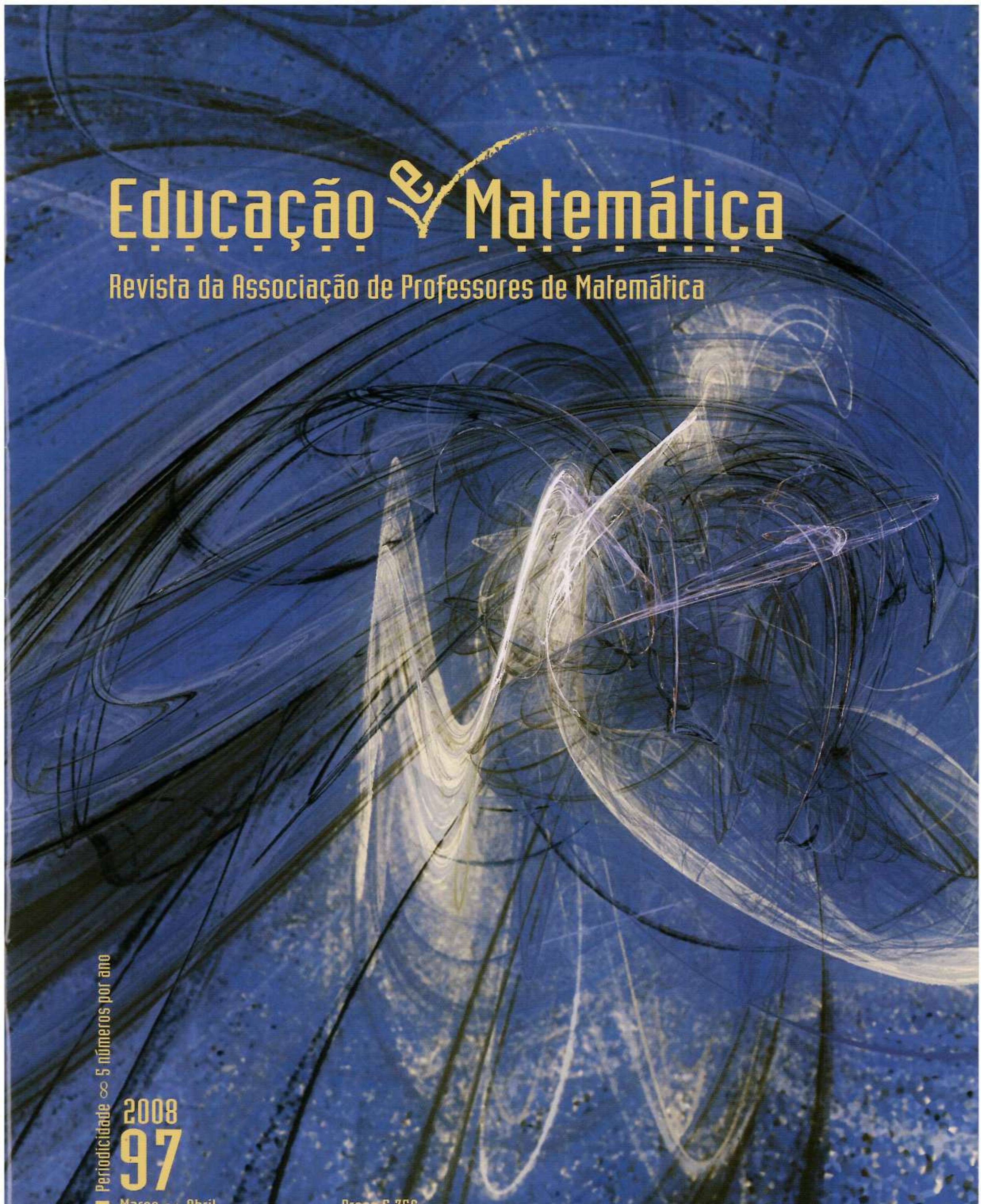


Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano
2008
97
Março ∞ Abril
Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
João Torres
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2008
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Etigráfe, Artes Gráficas, Lda
Rua Major Rosa Bastos, 55 A–B, Montemor
2670–502 Loures

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número foi obtida usando uma técnica que é uma evolução dos princípios originais de obtenção de estruturas fractais. Tipicamente, consideram-se funções $F_i(x, y)$ que transformam pontos do plano em pontos do plano (estas funções, em geral, são contractivas ou seja, a distância entre as imagens é menor que a distância entre os argumentos, uma condição técnica que assegura a convergência da iteração das funções F_i).

A figura em si mesma é gerada por um "algoritmo" cujo núcleo é, em termos gerais, do seguinte tipo

$(x, y) =$ ponto aleatório numa região limitada do plano pré-definida;
iterar k vezes
{
escolher uma função F_i aleatoriamente;
$(x, y) := F_i(x, y)$;
aplicar algumas transformações de pós-produção a (x, y)
obtendo (x_f, y_f)
imprimir o ponto (x_f, y_f) excepto nas primeiras r iterações
}

O método é extremamente versátil, admitindo muitas variações interessantes e a sua capacidade para produzir imagens esteticamente interessantes parece ser inesgotável.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Leitão, Ana Maria Boavida Ana Vieira Lopes, Branca Silveira, Filomena Leite Pinto, Hélia Oliveira, Hermínio Alexandre Marques, João Torres, Jorge Cruz, Leonor Santos, Lourdes Cangueiro, Mª Teresa Santos, Marília Pires, Paulo Afonso, Pedro Macias Marques, Rui Feiteira, Susana Carreira, Susana Diego.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

As vivências dos professores de Matemática num contexto em mudança

Isabel Rocha e Manuela Pires

Os professores de Matemática, nomeadamente do ensino básico, têm concebido/ assumido/desenvolvido, nas suas escolas, uma diversidade de projectos. Interessa conhecer e procurar compreender como estão a contribuir para o crescimento profissional dos professores e melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesta revista, é dado algum destaque aos projectos integrados no Plano da Matemática, à formação de professores acompanhantes e formadores, ligada respectivamente ao Plano da Matemática e ao Reajustamento dos Programas do ensino básico, bem como à Resolução de Problemas, tema sempre muito debatido mas nunca esgotado. Porquê?

No Plano da Matemática estamos a falar de mais de mil projectos de escola, concebidos e desenvolvidos pelos professores de Matemática. Pelo "olhar" que aqui nos traz Leonor Santos, identificam-se estratégias, nomeadamente as parcerias/assessorias entre professores na sala de aula, que estão a ser implementadas e que há muito se têm discutido e preconizado para realizar tarefas de natureza mais aberta e/ou complexa, utilizar tecnologias ou outros materiais e lidar com as diferenças de interesses, de aptidões e de experiências dos alunos. E questiona-se, a meio de um percurso previsto para três anos lectivos, "Mas será que já encontrámos o caminho certo para chegarmos àqueles que estão mais desinteressados, desmotivados, com maiores dificuldades de aprendizagem? Será que estamos a construir um currículo em que temos uma *matemática para todos*?"

Esse currículo deve incidir numa matemática relevante, como está salientado no documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, recentemente traduzido e publicado pela APM, de cuja obra se publica uma recensão nesta revista. Essa matemática relevante inclui conteúdos e processos, porque num ensino que se pretende efectivo, onde qualquer um pode e deve saber matemática, devem ser utilizadas tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos e desafiar intelectualmente os alunos. E nada melhor que os problemas para o conseguir.

Nesta revista, encontram-se artigos onde é retomada a discussão acerca da resolução de problemas: dos seus contextos; de serem um meio para a construção de novos conhecimentos matemáticos; da possibilidade de integrarem diversas ideias e temas matemáticos; e do papel do professor na selecção e exploração dos mesmos.

Colhendo a experiência e os resultados do acompanhamento do ensino secundário, em que se desenvolveram hábitos de trabalho conjunto e de reflexão nas escolas e fora delas, estamos em crer que o trabalho realizado no acompanhamento dos Planos de Matemática, na Formação Contínua de Professores dos 1.° e 2.° ciclos e nas formações específicas agora em desenvolvimento no âmbito do reajustamento dos programas, sendo devidamente articuladas ao nível das escolas e das respectivas Comissões de Acompanhamento, contribuirão para o desenvolvimento, nos professores do ensino básico, de uma atitude e predisposição para o investimento profissional, para a valorização do seu papel no desenvolvimento curricular, associado a um aumento da capacidade de reflexão e questionamento sobre as suas práticas.

O trabalho associativo desenvolvido na APM, embora de outro âmbito, tem vários pontos de contacto, e converge com os anteriores na formação de uma comunidade de professores mais forte. Instrumentos tão simples como as listas de discussão abertas 'macs-com-rede', criada numa sessão especial no ProfMat da Covilhã e mat_no_basico, mais recente, mantém-se activas porque existe a 'tal' comunidade que partilha sem receios opiniões divergentes e convergentes sobre as mais diversas questões didácticas, da escola e dúvidas sobre conteúdos, tantas vezes novos para todos.

São muitos os desafios associados a todos estes projectos (organização dos espaços; horários; partilha; trabalho de equipa; condições logísticas para...) e não é fácil concretizar orientações, que, por vezes, não se ajustam às práticas institucionalizadas. Mas as escolas e os professores que têm enfrentado tantas mudanças encontrarão certamente formas de responder a estes desafios.

Isabel Rocha, Escola Superior de Educação de Leiria
Manuela Pires, Escola Secundária Eng. Calazans Duarte

Pasta de Actividades — Pentaminós (reformulada)

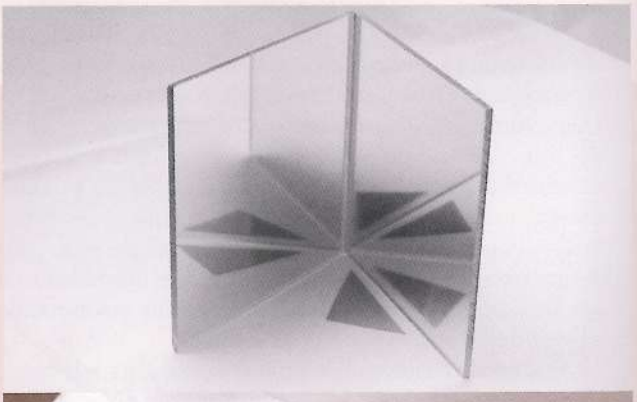
Edição APM, 2007
Sócio 15,00€ | *PVP* 22,50€

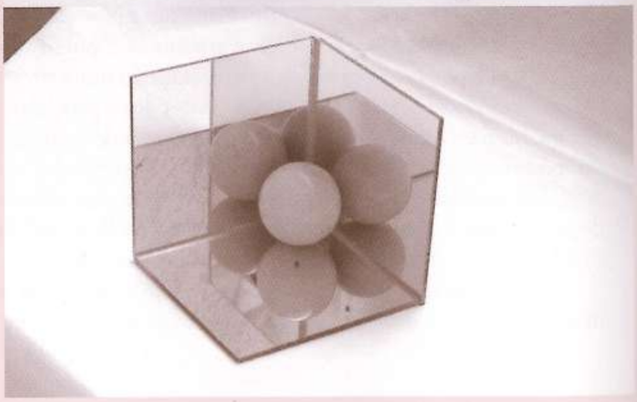
Os Pentaminós são um fantástico quebra-cabeças. Pelos desafios que proporcionam, constituem um material muito interessante na exploração da Geometria no primeiro e segundo ciclos do ensino básico.

Cada peça é formada por 5 quadrados, unidos pelos lados. Excluindo formas equivalentes, por rotação ou simetria, existem 12 pentaminós diferentes, denominados de acordo com as letras com que se parecem, que permitem a criação de inúmeros problemas e suas soluções.

Esta pasta reúne um conjunto de propostas de trabalho, que podem ser prontamente utilizadas com os alunos, que vão permitir desde a construção de formas geométricas, com a utilização de algumas ou todas as peças do jogo, à reprodução de peças noutra escala e ao preenchimento de áreas.

Uma pasta didáctica, com novo formato e os princípios de sempre. Uma reedição APM.





Conjunto de 3 espelhos de 10 cm x 10 cm, em acrílico

Sócio 3,50€ | *PVP* 4,50€

Este conjunto constituído por um espelho e um livro de espelhos destina-se ao estudo da simetria no plano ou no espaço, desde o jardim de infância ao ensino secundário.

As publicações do Atractor, também à venda na APM, *Simetria jogos de espelhos* e *O ritmo das formas* constituem um bom auxiliar do professor para a abordagem do tema Simetria, com recurso a espelhos e outros materiais.

Um olhar sobre o Plano da Matemática

Leonor Santos

As notas que a seguir se seguem representam não mais do que um olhar sobre uma realidade múltipla e diversa. Não tenho qualquer veleidade de ter uma visão de tudo o que se passa, nem tão pouco da minha interpretação ser a mais fiel ou aquela que melhor traduz o que acontece na maior parte das escolas públicas portuguesas do continente com 2° e 3° ciclos do Ensino Básico. É com o propósito de poder dar o meu contributo para uma compreensão mais aprofundada do objecto em análise que aceitei o convite que me foi feito de escrever sobre o Plano da Matemática.

O Plano da Matemática é uma das medidas que integram um plano de acção mais vasto sobre a Matemática desenvolvido pelo Ministério de Educação a partir de Junho de 2006, decorrente da reflexão sobre os resultados dos exames de Matemática do 9.° ano de escolaridade de 2005 (Portal de Educação, DGIDC). O Plano de Acção da Matemática tem como principal objectivo melhorar o ensino da Matemática. Comporta seis acções, que inclui 15 medidas, nelas prevendo, nomeadamente um novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (já entretanto elaborado e homologado), a promoção da formação contínua em Matemática para professores de todos os ciclos do Ensino Básico (em curso) e Secundário, a criação de um banco de recursos educativos para a Matemática (em construção); a avaliação de manuais escolares de Matemática para o Ensino Básico (em curso) e o desenvolvimento sustentado de projectos de escola que visem a melhoria das aprendizagens em Matemática. Esta última acção é designada por Plano da Matemática.

O Plano da Matemática foi previsto para três anos lectivos. Tendo tido o seu início no ano lectivo de 2006/07, poder-se-á dizer que se encontra sensivelmente a meio. É a partir essencialmente da experiência do primeiro ano que a seguir tecerei alguns comentários e colocarei algumas questões para uma eventual reflexão.

Natureza do Plano da Matemática

Falar-se do Plano da Matemática é o mesmo que falar-se de um conjunto de projectos concebidos e desenvolvidos por cada escola, em particular, pelos seus professores de Matemática. Estes projectos são pensados a partir do conhecimento de cada realidade, das particularidades de cada contexto, do diagnóstico das potencialidades e necessidades dos professores e alunos de cada uma das comunidades educativas. A partir deste conhecimento são definidos os objectivos a que a escola se propõe, pensadas as estratégias a desenvolver e elencadas as condições sentidas como necessárias para levar a cabo as estratégias concebidas de forma a atingirem-se os objectivos desejados. Para o acompanhamento científico e pedagógico dos projectos das escolas existe um dispositivo montado para o efeito, donde fazem parte a Comissão de Acompanhamento (uma única, que contempla o critério de região e da qual faço parte), a quem cabe conceber e pôr em acção uma estrutura de acompanhamento científico e pedagógico e acompanhar a execução dos projectos de escola, e os Professores Acompanhantes (um grupo por região) que fazem esse acompanhamento e apoio através de um contacto directo com as escolas.

Ora, em meu entender, do exposto pode afirmar-se que as características desta acção são marcadas pelos princípios: (i) da *autonomia*, é à escola que cabe desenvolver o projecto e não a ninguém externo que diz o que a escola deve ou não fazer; (ii) da *valorização profissional*, reconhece os professores como os profissionais com maior competência para delinearem os seus caminhos para a melhoria das suas práticas e, consequentemente, da aprendizagem dos alunos; (iii) da *contextualização institucional*, dirige-se à instituição escola e não a um conjunto particular de professores, segue uma lógica organizacional e não individual, e toma em consideração os contextos concretos em que os professores trabalham e as dificuldades que estes contextos levantam; (iv) da *metodologia de projecto*, propõe-se seguir um conjunto articulado e interdependente de acções e não um somatório de medidas avulso; (v) da *co-responsabilização*, a tutela assume que lhe cabe a obrigação de criar condições a vários níveis, recursos materiais e apoio, de forma a ser possível desenvolver adequadamente os projectos previstos.

Ora não poderia estar mais de acordo com este conjunto de princípios. É deste modo que perspectivo o caminho para a melhoria da Escola. Estes são princípios que actualmente se reconhecem como adequados para o desenvolvimento profissional dos professores (Loucks-Horsley *et al.*, 1998; Smith, 2001), desenvolvimento este que a acontecer implicará inevitavelmente uma melhoria da prática profissional e, em particular, da prática lectiva.

Não acompanhei os primeiros passos do Plano da Matemática. Apenas tomei conhecimento da sua existência já no decorrer de Setembro de 2006 e comecei então a procurar compreender a sua dinâmica. Muito já tinha sido até então feito, muitas e muitas horas de trabalho, nomeadamente na elaboração dos projectos pelos professores de Matemática das escolas e na sua análise por elementos da DGIDC. Ouvi diversas queixas relativas à origem e arranque deste processo. Com ou sem razão, foram certamente sentidas por aqueles que as faziam e isso é o que importa. Mas pergunto: Não valerá a pena aproveitar uma ocasião como esta, com as características que apresenta, nunca antes existente em Portugal? Não valerá a pena correr o risco de nos expormos, de reconhecermos que nem tudo o que fazemos está sempre bem feito? Até que ponto a nossa intervenção não poderá constituir um contributo essencial para a melhoria de todo o processo?

Desenvolvimento do Plano da Matemática

Numa acção que envolveu no seu primeiro ano cerca de 300000 alunos e 1070 escolas públicas é difícil falar-se de todas as estratégias que foram implementadas. Contudo, das informações a que tive acesso poderei dizer que houve uma grande diversidade de acções relacionadas com a Matemática o que veio originar uma grande visibilidade desta disciplina a nível da escola, e mesmo na comunidade educativa mais ampla. A Matemática esteve presente nas escolas, falou-se de Matemática e de forma positiva! Certamente não apenas pelos baixos resultados obtidos pelos alunos em provas nacionais, como tantas vezes aconteceu no passado.

Entre as múltiplas estratégias desenvolvidas, há duas que parecem ter sobressaído e que gostaria de referir. O aumento da carga horária dos alunos destinada à Matemática e o trabalho em parceria. Quando falo em aumento de carga horária destinada à Matemática não quero dizer obrigatoriamente que os alunos passaram a ter um aumento de horas no seu horário, embora nalguns casos tal tenha acontecido, mas sim que algumas dessas horas passaram a ser ocupadas com a Matemática. É, por exemplo, o caso da atribuição à Matemática do Estudo Acompanhado (contexto que parece ter tido mais expressão), da Área de Projecto, de sala de estudo, de Clubes, etc.... Quando tal aconteceu, estes espaços de trabalho serviram muitas vezes para se ensinar Matemática de outra forma. Em diversos casos, procurou-se desenvolver o interesse e uma atitude positiva dos alunos face à Matemática, através nomeadamente de uma abordagem de resolução de problemas. Parece-me certamente um passo importante e necessário quando se procura desenvolver um caminho pensado para três anos. Permite criar alguma experiência e segurança em práticas nem sempre muito frequentes. Mas não podemos ficar por aqui! Não podemos continuar a dar uma certa visão da Matemática na sala de aula e outra noutros espaços vistos pelos alunos como menos importantes. Assim, os desafios continuam e muitas são ainda as dificuldades a ultrapassar!

A segunda estratégia referida foi a das parcerias ou assessorias, quer entre professores de Matemática, num bloco de Matemática ou nas áreas curriculares não disciplinares, quer entre o professor de Matemática e o professor de outra área disciplinar, como seja a Língua Portuguesa. Esta experiência, inovadora para muitas escolas, certamente que foi muito rica. O trabalho colaborativo que tantas vezes é referido como um contexto que poderá facilitar a mudança de práticas passa também por este tipo de acções. Igualmente enriquecedoras, a meu ver, foram no entanto as questões que emergiram em muitas destas experiências. Trabalhar em parceria exige algumas condições. Parece ser consensual à partida poder dizer-se que uma delas seja existir um entendimento comum do que é ensinar. Se partirmos deste pressuposto, a constituição das equipas far-se-á pelo critério da homogeneidade. Mas qual a vantagem que então poderá advir para os alunos de parcerias cujos professores tenham uma visão ultrapassada do que é saber Matemática? Talvez, então, seja melhor optar-se pela heterogeneidade. Mas neste caso, como conseguir ultrapassar diferentes concepções e formas de agir para uma prática lectiva concertada? Quando se começam a pôr em prática novas formas de organização do trabalho docente, novos problemas emergem. Se, por um lado, a procura de soluções para novos problemas geram desenvolvimento profissional, por outro, novas dificuldades terão de ser ultrapassadas. Esta é, certamente, uma das grandes potencialidades da inovação, a criação de novos contextos ricos de aprendizagem.

Factores para o sucesso do Plano da Matemática

Não é minha intenção fazer uma listagem de factores que poderão influenciar o desenvolvimento de cada projecto de escola, mas apenas destacar um ou outro aspecto que me parece particularmente relevante.

O Plano da Matemática passa, formalmente, por um contrato que se estabelece entre o Ministério de Educação e cada escola. Não é dirigido ao professor enquanto indivíduo, mas sim à organização. É uma responsabilidade que é assumida pela Escola. Das diversas experiências a que tive acesso, emergiu, de forma inequívoca, a importância do papel dos órgãos de gestão da escola, Conselho Executivo e Conselho Pedagógico. Escolas em que estes órgãos se assumiram como parte integrante do Plano funcionaram, em geral, bastante melhor. Foram criadas condições propícias dentro da escola para o seu desenvolvimento. Problemas de ordem administrativa foram minimizados, podendo os professores mais directamente envolvidos, os professores de Matemática, dedicarem as suas energias àquilo que é verdadeiramente decisivo para a aprendizagem dos seus alunos. Este facto reforça, no meu entender, a importância da opção tomada de perspectivar o Plano da Matemática como um projecto de escola e não do grupo de professores de Matemática. Permite, ainda, aos professores de Matemática disporem de um argumento válido para levar os órgãos de gestão a assumirem a sua parte de responsabilidade, quando tal não acontece.

Os dados de que disponho permitem-me afirmar que houve, na grande generalidade, um elevado investimento dos professores de Matemática. Mas esse investimento ocasionou também cansaço e desânimo. Os resultados da nossa acção, por muito boa que ela seja nem sempre são visíveis de imediato e têm a expressão que gostaríamos que tivesse. Estes sentimentos não são compatíveis com a continuação de um projecto pensado para três anos. Esta é uma preocupação que tenho e que provavelmente é partilhada por muitos professores. Como contrariar esta tendência? Repensar/adequar os objectivos previamente definidos? Serão eles exequíveis ou demasiadamente ambiciosos? Repensar as questões organizacionais? Será que uma outra distribuição de tarefas é mais sensata? Reajustar o modelo de acompanhamento previsto? Criar medidas que permitam dar visibilidade social ao trabalho desenvolvido pelos professores na escola? Certamente que a estas questões, outras haverá a acrescentar. São, contudo, os professores que estão no terreno que melhor poderão apontar as respostas mais adequadas.

Impactes do Plano da Matemática

Porventura o impacte mais marcante ao fim do primeiro ano do Plano da Matemática foi o reforço do trabalho colaborativo entre professores, quer entre os de Matemática, quer entre estes e professores de outras áreas curriculares. Este aspecto é algo que atravessa as escolas em geral, mesmo naquelas onde as condições consideradas desejáveis para a concretização de um trabalho continuado e conjunto de planificação de aulas nem sempre foi possível garantir. Se por mais não fosse, já teria valido a pena o Plano da Matemática. Mas outros efeitos positivos poderão ser acrescentados.

Como já referido, foi sendo construído um novo modo de olhar a disciplina de Matemática na escola. Uma visão mais positiva, mais interessante e desafiadora para os alunos e mesmo para outros membros da comunidade escolar foi possível ser construída. Os resultados escolares nem sempre foram de encontro às expectativas iniciais definidas pelas escolas. Contudo, são muitas vezes apontadas mudanças nas atitudes dos alunos, seja de maior interesse, auto-confiança, e maior envolvimento no trabalho em Matemática.

Há ainda, no entanto, um problema por resolver. As respostas positivas dos alunos advêm, em geral, daqueles que, no passado, já não apresentavam os maiores problemas na aprendizagem da Matemática. Evidentemente que é excelente que haja cada vez maior número de alunos a aderirem e a melhorarem as suas aprendizagens em Matemática. Mas será que já encontrámos o caminho certo para chegarmos àqueles que estão mais desinteressados, desmotivados, com maiores dificuldades de aprendizagem? Será que estamos a construir um currículo em que temos uma *matemática para todos*? Por outras palavras:

> Um currículo em que a matemática seja para todos — melhor diríamos, em que a matemática seja para cada um — significa uma tentativa séria de alcançar os seguintes objectivos: (i) que nenhum aluno se sinta com frequência excluído das actividades matemáticas; (ii) que qualquer aluno, face a cada proposta, seja sempre capaz de, em maior ou menor grau, realizar algum trabalho matemático, e (iii) que cada aluno encontre, ao longo do currículo, e por diversas ocasiões, prazer nas actividades que desenvolve na aula de Matemática, em particular porque sente crescer, por pouco que seja, a sua auto-confiança perante a Matemática. (Abrantes *et al.*, 1997).

Este é, em minha opinião, o maior desafio que se coloca aos professores de Matemática e à escola no Plano da Matemática e, mais do que isso, à educação matemática qualquer que seja o contexto onde ocorra.

A concluir

O Plano da Matemática está em desenvolvimento. No tempo que falta para o seu término muito se irá ainda fazer. Algumas acções resultarão melhor, outras nem tanto assim. Continuaremos num processo marcado pela intencionalidade de irmos melhorando (a passagem do primeiro para o segundo ano do Plano é testemunha disso), procurando introduzir reajustes e soluções para novos problemas que irão certamente emergir, alguns dos quais não conseguimos sequer ainda fazer uma previsão Esta é a dinâmica associada ao trabalho de projecto. A característica central do trabalho de projecto é tratar-se de uma metodologia centrada em problemas (Boutinet, 1990). O objectivo de um projecto pode ser considerado um problema no sentido em que estamos perante uma situação para a qual se pretende encontrar uma resposta. Mesmo quando à partida não está formulado em problema, o projecto gera necessariamente problemas que correspondem a questões colocadas no início ou que surgem no seu desenvolvimento.

Há que continuar a pôr em acção as acções previstas, gerir os desvios, e avaliar ao longo do projecto. Note-se que o problema não é reduzir sem cessar os desvios, mas sim definir os desvios toleráveis. Se estes se tornam demasiadamente importantes coloca-se a questão de reorientar a prática ou de alterar o projecto inicial. Segundo Boutinet (1990), "dotar-se de um projecto é no mesmo movimento procurar construí-lo e querer realizá-lo" (p. 226).

O desafio que continuaremos a enfrentar não diz apenas respeito aos professores de Matemática e à Escola. Ele abrange igualmente os professores acompanhantes, a comissão de acompanhamento e a tutela. É um projecto colectivo com responsabilidades partilhadas. Cabe a cada um continuar a tentar fazer o seu melhor, procurando sinergias de apoio mútuo, respeito e valorização dos diversos intervenientes. Não antevejo facilidades, muito pelo contrário. Serão problemas, dificuldades de diferente ordem, que continuaremos a ter de enfrentar e procurar respostas. Mas o fim último de todo este esforço — a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática – não é aquilo que dá sentido à nossa profissão?

Referências

Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat$_{789}$, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Boutinet, J. P. (1990). *Anthropologie du Projet*. Paris: Presses Universitaires de France.

Loucks-Horsley, S.; Hewson, P.; Love, N. & Stiles, (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. California: Corwin Press, Inc.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston: NCTM.

Portal da Educação, DGIDC:
`http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/`

Leonor Santos

DEFCUL, CIE, DIFMAT, Projecto AREA

Encontro conjunto luso-espanhol sobre educação matemática

Três organizações ibéricas de investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática resolveram unir esforços e realizar um encontro científico. O Grupo de Trabalho sobre Investigação da Associação de Professores de Matemática, a Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação e a Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática organizam entre 4 e 6 de Setembro de 2008 em Badajoz um seminário conjunto.

É a primeira vez que se concretiza um encontro envolvendo estas três organizações de investigadores. Desejado desde há alguns anos, pretende-se neste simpósio aprofundar o conhecimento recíproco de problemáticas, metodologias, resultados e projectos futuros. Para o concretizar foi dado um primeiro passo no final do ano passado em Badajoz, onde cerca de trinta investigadores dos dois países acordaram na realização deste seminário conjunto.

Formalmente serão três encontros com um programa comum: o *XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática*, o *XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática* e o *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Assim, o habitual Seminário de Investigação do Grupo de Trabalho de Investigação da APM que tem precedido o ProfMat estará este ano integrado no encontro conjunto.

Durante os três dias prevêem-se conferências sobre a investigação nos dois países, bem como a apresentação de comunicações sobre estudos empíricos ou ensaios teóricos, históricos ou epistemológicos. Haverá ainda espaço para cada uma das organizações efectuar as suas reuniões de trabalho internas. Estão ainda em preparação algumas actividades conjuntas com o ProfMat de Elvas.

As inscrições deverão ser efectuadas até 21 de Junho de 2008 e os interessados deverão ter prontos os textos das comunicações até 15 de Abril. Estarão disponíveis informações mais detalhadas nos portais das três organizações (`www.apm.pt`, `www.spce.org.pt/sem`, `www.seiem.es`).

Da selha da roupa à forma do bolo

Susana Carreira, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira, Leonor Santos

O 1° módulo do segundo ano da formação concebida para apoiar os professores acompanhantes do Plano da Matemática, que decorreu nos dias 14 e 15 de Fevereiro em Vieira de Leiria, incidiu sobre as capacidades transversais expressas no Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em Dezembro de 2007, isto é, a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático e a Comunicação Matemática.

Na tarefa prévia que se propôs aos professores acompanhantes, antes do início deste módulo de formação, uma das questões colocadas prendia-se com o modo de concretização, no currículo e na aula de Matemática, de uma das três capacidades transversais. Foi pedido explicitamente o seguinte: "Seleccione uma das capacidades transversais enunciadas. Descreva sumariamente uma situação concreta que ilustre de que forma se pode integrar o desenvolvimento dessa capacidade com os temas matemáticos do programa".

Uma larga maioria das respostas a esta questão centrou-se na Resolução de Problemas. Despertou-nos a atenção uma contribuição, focada precisamente nesta capacidade, dado que permite discutir algumas questões acerca da natureza dos problemas e também do carácter mais ou menos autêntico dos mesmos. Em particular, possibilita retomar um comentário que foi tecido a propósito de uma das perguntas do último teste intermédio do 3° ciclo, acerca do valor do

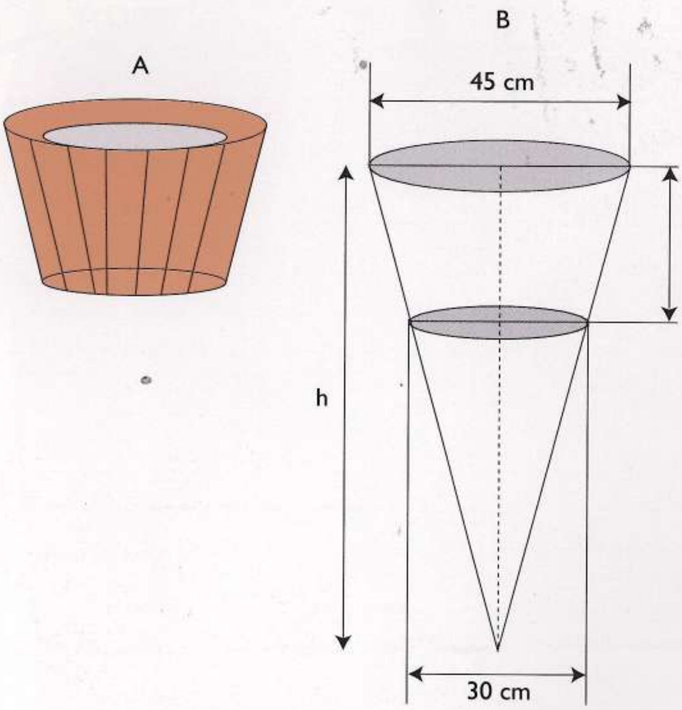


Figura 1.


Figura 2. Traditional hand washing tools

selo de uma carta em função do seu peso. Embora seja legítimo pensar que qualquer pessoa precisará, um dia, de ir aos correios mandar uma carta, há quem diga que se trata, para muitos alunos, de um contexto muito distante da sua experiência, pois isso de mandar cartas e cartões e de ter *pen-friends* já lá vai há décadas. Os nossos jovens comunicam pela Internet e por telemóvel! Para eles, os carteiros são os satélites.... O peso não lhes parece relevante. O que querem saber é se a banda é larga!

A referida contribuição de um dos professores acompanhantes traduziu-se numa resposta singular que incluía o problema a seguir apresentado.

Problema

Na figura 1A está representada uma selha. Na figura 1B, está representado o molde que serviu à construção da selha. As dimensões da selha são as apresentadas na figura 1B.

1. Qual é a altura do molde?
2. Determina a capacidade da bacia e apresenta a tua resposta arredondada às décimas do centímetro cúbico.
3. A selha tem água até metade da sua altura. Determina o volume de água, arredondado ao decilitro.

Este enunciado era acompanhado da indicação de que o problema poderia ser proposto a alunos do 9° ano e, com adaptações, também a alunos do 8° ano. Ao resolver o problema, o aluno teria que mobilizar conhecimentos de Geometria — semelhança de triângulos e volumes — e também de Números e Álgebra – conceito de proporção e arredondamentos.

Ainda a respeito desta proposta, o seu autor fez o seguinte comentário, em jeito de franca insatisfação: "Gostaria de ter elaborado melhor o enunciado deste problema..."

Foi a esta nota de certo dissabor que achámos interessante reagir, tentando entrever o que poderia estar na origem do desabafo.

A primeira análise levou-nos ao objecto que está no cerne do problema: uma selha. O que é isso de uma selha? É certo que aparece o desenho de uma selha no enunciado, mas resolvemos ir à procura na Internet como se não conhecêssemos esse objecto. Entrámos no *Google* e procurámos imagens, introduzindo para a busca a palavra selha. Nada! Ou melhor, uma resposta frustrante: "Será que queria dizer 'senha'?". Nova tentativa, desta vez em Inglês, com a expressão *wooden tub*. Um pouco mais de sorte. Apareceram imagens e algumas informações correspondentes (figura 2). Portanto, estamos a falar de banheiras do século XIX ou de utensílios artesanais de lavar a roupa à mão. Por certo, não será muito próximo da realidade dos nossos alunos.

Por outro lado, e numa segunda análise, consideremos as questões colocadas a propósito da selha e do molde da selha. Há um conjunto de perguntas que nos assaltam. Para que serve a selha? É feita a partir de um molde? Queremos saber a altura do molde, para quê? E a capacidade da bacia, para quê? Arredondado às décimas de centímetro cúbico, porquê?

Se parece pouco realista que os alunos saibam que uma carta é pesada para a determinação do valor do selo a pagar, ainda menos esperamos que eles vejam a importância de calcular as dimensões do molde de uma selha ou de sa-

Bolo de Café

Ingredientes
3 chávenas de farinha;
2 chávenas de açúcar
1 chávena de café bem forte
4 ovos
½ chávena de azeite
1 colher de chá de fermento
1 colher de chá de erva doce

Confecção
Unte uma forma grande com margarina e polvilhe com farinha. Numa tigela misture o açúcar com a farinha e junte depois todos os outros ingredientes. Mexa muito bem.

Deite na forma e leve a cozer em forno médio de 50 a 60 minutos. Depois retire e desenforme com cuidado quando estiver quase frio.

Enfeite ao seu gosto e bom apetite!

Figura 3.

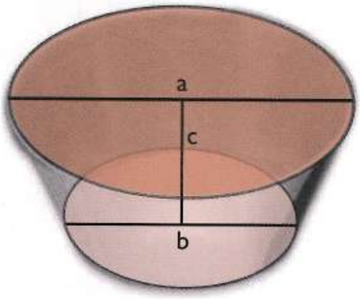


Figura 4.

ber quanto leva uma selha cheia até metade da sua altura, em décimas de centímetros cúbicos. Porventura, a insatisfação manifestada sobre o enunciado do problema decorrerá do facto de ser uma camuflagem para um problema que é essencialmente matemático e que efectivamente se reduz à determinação do volume de um tronco de cone, através da sua relação com o volume do cone, além de fazer apelo aos valores aproximados.

Quisemos sugerir uma alternativa a este enunciado, mantendo as intenções subjacentes quanto ao raciocínio matemático envolvido. Convergimos em dois pontos. É interessante relacionar o volume do tronco de cone com o volume do cone e é importante a realização de arredondamentos que nos dêem estimativas adequadas das dimensões dos objectos.

Falta-nos agora um enunciado que possa fazer sentido para os alunos, isto é, que eles o possam entender como "seu". Queremos uma situação para a qual o aluno não disponha de uma resposta pré-estabelecida e imediata, mas que mobilize e envolva o sujeito a quem o problema se coloca. De certa forma, pretendemos um desafio mais plausível do que o da selha. Foi assim que fomos de uma selha para uma forma de bolo.

A situação escolhida tem a ver com a confecção de um bolo e tem por base a receita de um bolo de café (ver descrição dos ingredientes e confeccção acima).

O problema agora é fazer este bolo, segundo a receita dada. E, desde logo, surgem várias questões. Teremos de assegurar que dispomos de todos os ingredientes; não precisamos de balança porque nos basta uma chávena e uma colher para as quantidades a medir. O café bem forte é um pouco subjectivo mas cada um decidirá o que isso significa; convém que um bolo de café saiba a café... Passando ao modo de confecção, há que usar uma forma grande... Aqui a questão complica-se mais. O que se entende por uma forma grande? Acontece que só tenho uma forma para bolos. E se a minha forma de bolos não é suficientemente grande? E se for grande demais?

Onde poderei saber alguma coisa acerca de formas de bolos para perceber o que é uma forma grande? Uma rápida pesquisa no *Google* dá-nos centenas de informações acerca de formas de bolos e das respectivas dimensões e tipos, com imagens.

O mesmo desenho de uma forma de bolo aparece para as várias dimensões da sua abertura: 18 cm, 20 cm, 22 cm, 24 cm, etc.

Será que uma forma sem tubo de 24 cm dá para o bolo de café? Este passou a ser o problema a resolver. Trata-se agora de encontrar um valor aproximado para a capacidade de uma forma de bolo (um tronco de cone, como se vê) que tem 24 cm de diâmetro da sua abertura (figura 3).

Com o *Google* encontrámos uma fotografia da forma mas só nos dizem qual é o diâmetro da abertura, nada mais. E a altura? E o diâmetro da base? Mas a fotografia do bolo é semelhante (matematicamente falando) à forma real. Então, há que usar uma régua e fazer algumas medições, por exemplo, com a ajuda dos objectos de desenho do *Office* como se mostra na figura 4.

A precisão não é, obviamente, a maior possível mas mantemos presente a ideia de que queremos um valor apro-

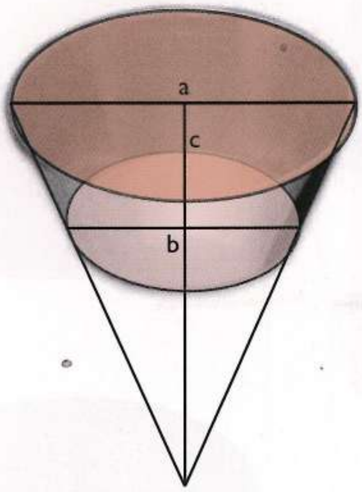


Figura 5.

ximado para a capacidade da forma. Pretendemos uma estimativa, perceber razoavelmente se o bolo cabe, ou não, na forma de 24 cm.

Aproximadamente, encontramos as medidas de a, b e c (7 cm, 3 cm, 4 cm). Usando uma proporcionalidade directa, determinamos as medidas reais da forma, ou seja, os diâmetros das bases e a altura. Então, passamos ao cálculo do volume e certamente poderemos pensar no tronco de cone e no cone (figura 5).

Passamos aos cálculos e usamos a semelhança dos triângulos.

- Altura do cone: 24 cm
- Volume do cone maior: 3617,28 cm^3
- Volume do cone menor: 285,93 cm^3
- Volume do tronco de cone:
  3617,28 cm^3 – 285,93 cm^3 = 3331,35 cm^3

De seguida, impõem-se os arredondamentos.

3,33 dm^3 = 3,33 litros (aproximadamente)

E, por fim, a questão a que queremos responder. Será esta uma forma grande? A julgar pelo número de chávenas (uma chávena leva menos de meio litro) e pela quantidade de ovos que a receita indica, concluímos que chega para o nosso Bolo de Café!

Este paralelismo que salientámos entre o problema da selha e o problema da forma do bolo serve como fundamentação para algumas ideias acerca do papel da resolução de problemas no ensino da Matemática. Propõe-se a resolução de problemas como uma capacidade a desenvolver pelos alunos mas, além disso, espera-se que a resolução de problemas lhes proporcione uma visão adequada da natureza e da relevância da Matemática. Desejamos que, em vez de um factor de desmotivação, se torne num meio de cativar e despertar os alunos para a actividade matemática. Importa que a resolução de problemas seja vista como elemento estruturante do contexto de aprendizagem e que leve ao desenvolvimento de outras capacidades interrelacionadas, como é o caso do raciocínio matemático e da comunicação matemática. Em última instância, será desejável que a resolução de problemas possa dar significado à actividade matemática escolar e constituir um espaço para a criatividade e para o desenvolvimento do espírito crítico.

Susana Carreira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve
Ana Maria Boavida, Escola Superior de Educação de Setúbal
Hélia Oliveira, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa
Leonor Santos, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

O problema da forma do bolo e as questões propostas resultam do trabalho realizado no 1° módulo do segundo ano de formação dos professores acompanhantes do Plano da Matemática. Surgiu como alternativa a um problema, apresentado por um dos professores, para exemplificar a integração de uma das capacidades transversais — a resolução de problemas – com os temas do programa de Matemática do Ensino Básico.

Durante a exploração deste problema, o professor pode incentivar os alunos a descreverem o sólido geométrico representado pela forma do bolo, a partir de uma ou mais fotografias. Pode, também, sugerir-lhes que, numa dessas fotografias, façam as medições necessárias para encontrarem a altura real da forma e o diâmetro real da base. Poderá recomendar que desenhem um esquema que facilite o cálculo da capacidade real da forma, a partir da determinação dos volumes de dois cones, e que estimem um valor para a capacidade da forma, em litros, com um arredondamento considerado adequado. Pode, ainda, propor-lhes que, se tiverem em casa uma forma de bolo, meçam as suas dimensões e a sua capacidade, comparando estes valores com os que obtiveram.

Susana Carreira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve
Ana Maria Boavida, Escola Superior de Educação de Setúbal
Hélia Oliveira, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa
Leonor Santos, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Uma forma de bolo grande?

Aqui está uma receita de um bolo de café que parece relativamente fácil de confeccionar mesmo para pessoas com pouca experiência de fazer bolos! Talvez te apeteça experimentar esta receita...

Bolo de Café

Ingredientes

3 chávenas de farinha
2 chávenas de açúcar
1 chávena de café bem forte
4 ovos
½ chávena de azeite
1 colher de chá de fermento
1 colher de chá de erva doce

Confecção

Unte uma forma grande com margarina e polvilhe com farinha.
Numa tigela misture o açúcar com a farinha e junte depois todos os outros ingredientes. Mexa muito bem.
Deite na forma e leve a cozer em forno médio de 50 a 60 minutos.
Depois retire e desenforme com cuidado quando estiver quase frio.
Enfeite ao seu gosto e bom apetite!

Já reparaste que não é preciso pesar os ingredientes?

E quanto à forma para o bolo? A receita refere que é preciso uma "forma grande". O que te parece ser uma forma grande para um bolo?

A resposta não é imediata mas podes tentar obter uma aproximação para a capacidade de uma dada forma de bolo e decidir se serve ou não para este bolo de café.

1. Começa por fazer uma pesquisa na Internet sobre "forma de bolo" e procura uma fotografia de uma forma que tenha o formato do bolo de café.

2. Deves ter visto que há formas "sem tubo" com várias dimensões e que geralmente é indicado o diâmetro da abertura, ou seja, da boca. Supõe que colocas a hipótese de encomendar pela Internet uma dessas formas que te parece boa para fazer o bolo de café. Será que o é na realidade? Caberá lá o bolo? Será grande demais? Como podes ter a certeza? Explica o teu raciocínio.

Tens tudo o que é preciso para o bolo de café? Experimenta fazê-lo!

Nota: Todo este desafio é tanto para rapazes, como para raparigas... E bom apetite...

No dia seguinte, oito dias depois, um mês depois

Escrevo este texto no dia seguinte... No dia seguinte à Marcha da Indignação, oito dias depois de ter iniciado a Oficina de Formação sobre o Programa de Matemática para o 2.º ciclo — Geometria e Medida e um mês depois da Formação de Formadores sobre o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico — Organização e Tratamento de dados. É sobre esta formação que desejava apresentar o meu ponto de vista o qual obviamente, nesta altura, não pode estar dissociado dos acontecimentos recentes, atrás referidos por ordem temporal inversa.

A Formação de Formadores que teve lugar em Fátima nos dias 8 e 9 de Fevereiro de 2008 teve como um dos objectivos proporcionar uma visão integrada de um dos temas Geometria (GEO) / Números e Álgebra (NA) / Organização e Tratamento de Dados (OTD) do Programa de Matemática (do 2.º ou do 3.ºciclo), incluindo o papel das capacidades transversais e o tipo de tarefas e práticas de sala de aula a usar no trabalho desse tema.

Após uma primeira apresentação geral do Programa pelos autores, onde foram realçadas as finalidades, a estrutura, os objectivos gerais e a lógica de desenvolvimento por ciclo, os trabalhos foram organizados de modo a existirem momentos de plenário e momentos de grupos.

Partindo de plataformas e documentos comuns, os momentos de discussão em grupos foram orientados por um dos autores do Programa.

Participei no grupo de Organização e Tratamento de Dados (OTD) com colegas de vários pontos do país. Foram resolvidas e analisadas tarefas para conhecimento do próprio programa e tarefas para sala de aula. Percebemos as profundas alterações da abordagem do tema ao longo da Escolaridade Básica, sendo uma das novidades o facto de formalmente se iniciar o seu estudo no 1.º ciclo. Analisámos as diferenças em relação ao actual programa, os objectivos gerais e específicos, as capacidades transversais, as conexões, e a articulação entre ciclos.

Os momentos de plenário permitiram acompanhar e entender as mesmas lógicas nos outros temas em que não participámos proporcionando assim uma visão global do Programa de Matemática.

Um dos momentos mais significativos para mim foi o da discussão que se gerou acerca das sequências de abordagem do programa nos três ciclos, isto é, o que devemos fazer quando o programa chegar às escolas? Apresentar possíveis percursos de aprendizagem (analisámos dois)? Permitir que sejam os Departamentos dos Agrupamentos de Escolas a decidir qual o caminho a seguir? Será que o facto de em algumas escolas se estarem a dar os primeiros passos (titubeantes) na necessária autonomia ou de noutras se identificarem ainda muitas dificuldades em gerir essa autonomia, justifica não se apostar nessa escolha responsável? Depois desta formação, em que num conjunto tão restrito de professores (56) surgiram posições tão opostas, estou convicta que o Ministério da Educação deverá apresentar algumas propostas de percursos para discussão, sob pena de mais uma vez serem os manuais a fazê-lo.

A Formação de Formadores teve também como objectivo preparar-nos para uma posterior dinamização de oficinas de formação segundo aqueles temas. Estão já a decorrer nesta altura as Oficinas de Formação mas quase não houve inscrições nas de Organização e Tratamento de Dados. O que se passou? Do meu ponto de vista, não foi percebido (pelos autores do programa ou pela DGIDC?) que os professores no terreno se inscreveriam segundo aquilo que consideram ser os temas onde os seus alunos têm mais dificuldades, os Números e Álgebra e a Geometria.

Por impedimento de uma das formadoras aceitei orientar uma oficina de formação, mas de Geometria. Porque refiro aqui este facto?

Em primeiro lugar, para realçar que a forma como esta formação de formadores decorreu permitiu criar uma visão global do funcionamento do programa e preparou o modo de funcionamento de qualquer delas.

Em segundo lugar porque gostaria de lembrar que sendo esta uma das medidas do Plano de Acção da Matemática (PAM), o facto de pertencer em simultâneo à equipa de formação de Leiria do Programa de Formação Contínua de Matemática (medida que também integra o PAM), onde discutimos aprofundadamente o reajustamento, permitiu-me estar numa situação mais confortável para fazer a adaptação necessária.

Para concluir, e reportando-me ao facto de hoje ser o Dia Seguinte... transcrevo parte de um artigo do Expresso de 8 de Março de 2008, escrito por Eduardo Marçal Grilo e Guilherme de Oliveira Martins.

"... Por mais que se queira que a escola constitua um elemento no combate às desigualdades e à exclusão, o que é mais relevante e deve ser assinalado é que a educação das crianças e dos adolescentes é principalmente uma responsabilidade dos pais e das famílias, sendo a escola uma estrutura muito relevante, que deve essencialmente ensinar e fazer com que os seus alunos e alunas aprendam, aprendam cada vez mais, adquiram o gosto de aprender e, sobretudo, de ler e de cultivar."

Em que é que este texto se liga ao Programa de Matemática do Ensino Básico? Pois terão de ir ler as Finalidades e os Objectivos Gerais e poderão dizer se concordam ou não comigo.

Filomena Leite Pinto
EB 2,3 D. Dinis, Leiria / ESE de Leiria

Unidos na formação

Aceitei o desafio para dinamizar uma oficina de formação sobre Geometria para professores do Ensino Básico, tendo em conta as novas abordagens sobre o tema, decorrentes do novo Programa de Matemática que vai ser posto em prática a partir do ano lectivo 2009/2010.

Tendo sempre presente que o sucesso destas iniciativas centrais depende do esforço de comunidades locais de docentes, só poderia pensar em dinamizar algo que viesse ao encontro das necessidades e anseios reais dos professores.

No caso da Geometria, a insegurança que ainda subsiste num razoável número de professores requer um esforço conjunto por parte de todos, para superar algumas angústias resistentes. Uma oficina onde cada um dos participantes relata as suas experiências em contexto de sala de aula, questionando-as e partilhando-as com os colegas, e onde, por entre "solavancos", irão surgir sempre novos meios de as implantar no terreno pode, estou convicto, contribuir para uma efectiva melhoria das práticas lectivas. As oficinas de formação são por excelência um fórum privilegiado de trabalho colaborativo, estimulam atitudes positivas, facilitam o debate de ideias e a discussão de problemas e podem ajudar a desenvolver um saber-fazer facilitador de boas aprendizagens.

Sabemos nós, sabem os autores do novo programa, que na Matemática em geral e na Geometria em particular é essencial o uso de instrumentos como a régua, esquadro, compasso e transferidor, as calculadoras e os computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações matemáticas. Os materiais referidos são as ferramentas de trabalho da oficina que estamos a levar a cabo. No programa agora aprovado relaciona-se a Geometria com Medida, o que julgamos contribuir muito para o desenvolvimento matemático dos alunos. Elegemos nesta formação a resolução de problemas, tema transversal no ensino da Matemática no ensino básico, como parte fundamental do sucesso educativo pretendido. Não esquecemos porém outros temas como o raciocínio matemático ou a comunicação matemática.

É uma verdade inquestionável que uma maneira de aproximar a Matemática da realidade dos alunos é a resolução de problemas do quotidiano, sendo a Geometria uma privilegiada área matemática para proporcionar essa proximidade.

Em tempos assumidamente conturbados, a união em torno de iniciativas de aprendizagem, como a oficina que estamos a dinamizar, é um factor de esperança que convém não desprezar.

Finalmente, reconhece-se que estas iniciativas de formação terão muito mais eficácia com o empenho e motivação dos docentes envolvidos, devendo para tal ser claramente assumido pelo governo, pelas instituições que formam professores, pelos actuais e futuros professores, pela sociedade em geral, a relevância do papel social dos educadores e professores, promovendo todos a sua dignificação.

Hermínio Alexandre Marques
Escola Secundária de Carregal do Sal

Do meu ponto de vista, é bom ter tempo ...

Está previsto que no ano lectivo de 2009/2010 entre em vigor o novo programa de Matemática para o ensino básico. Já há formação a decorrer...

Aceitei o desafio de ser formadora de uma das oficinas de formação, para professores do 2° e 3° ciclos, que a DGIDC lançou em todo país (54 no total), em que se pretende discutir os vários temas do novo programa de Matemática de uma forma integrada. Participei na formação dos formadores realizada em Fevereiro. Discuti as ideias base do programa, a sua estrutura e o seu conteúdo. Como a oficina que estou a dinamizar visa os temas do programa do 3° ciclo — Números e Operações e Álgebra — o grupo de formadores em que estive inserida analisou de forma mais pormenorizada a estrutura e o conteúdo destes temas ao longo dos três ciclos do ensino básico. Em relação ao 3° ciclo, estes temas, não abordam nenhum tópico matemático significativamente novo em relação ao programa em vigor. Claro que há uma ou outra novidade, como por exemplo o estudo de funções do tipo $y = ax^2$ que, muitos de nós, já introduzia informalmente quando trabalhava o conceito de função, para exemplificar os diferentes tipos de gráficos de uma função e respectivas expressões analíticas. Também no que se refere às sequências, que habitualmente são leccionadas no 8° ano (3° ciclo), o programa actual não refere explicitamente a determinação do termo geral, refere o "descobrir relações entre números, procurar o termo que vem a seguir, tentar encontrar uma lei de formação". No novo programa os aspectos referidos são objectivos específicos do tópico sequências e regularidades do 2° ciclo e no 3° ciclo o programa propõe que se aprofunde o trabalho com sequências e regularidades, por exemplo, que os alunos compreendam a noção de termo geral, determinem termos gerais e utilizem simbologia matemática adequada para os representar.

Um aspecto novo, deste programa, tem a ver com a introdução da Álgebra como um dos temas base. O programa propõe que desde o 1° ciclo os alunos comecem a trabalhar com ideias algébricas para que no 3° ciclo seja possível resolver problemas e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Um outro aspecto, que não é novo, mas que me agrada especialmente, é a ênfase que o programa dá e a forma como aborda o desenvolvimento da capacidade de cálculo mental e escrito e de estimação. Ao longo dos três ciclos, no tema Números e Operações, um dos objectivos gerais refere sempre o desenvolvimento destas capacidades havendo nas indicações metodológicas referências importantes quanto às formas do trabalho a desenvolver.

Estas são, apenas, algumas notas sobre o novo programa. Do meu ponto vista, é bom ter tempo para preparar a introdução do novo programa... Precisamos, por isso, de começar, desde já, a planear na nossa escola o trabalho a desenvolver ao longo do próximo ano lectivo.

Ana Vieira Lopes
Escola Secundária c/ 2° e 3° ciclos Passos Manuel

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

O caso da droga da gorda do saco

Susana Diego

Começarei pelo fim, embora neste caso não seja indiferente, indicando como óptima referência, o artigo *Capicuas* do José Paulo Viana para a *Educação e Matemática* nº 66, de Janeiro / Fevereiro de 2002.

http://www.apm.pt/portal/index.php?id=20670&rid=20659

Havia toda a pertinência em escrever sobre o assunto no ano em causa e em incluir o artigo num número capicua da nossa revista. Retomar o tema e sem tal oportunidade, implica, portanto, a obrigação de lhe pegar de forma diferente.

A ideia surgiu-me num contexto não escolar, que não importa aqui referir. E ao procurar na Internet, encontrei um pequeno videoclip palíndromo, de título igualmente palíndromo — *Monada Sa Danom* — vá-se lá saber o que isso quer dizer!: Em 56 segundos, é descrita a rotina diária de uma mulher, desde que acorda, sai da cama e enfia os pés nos chinelos, até que tira os pés dos chinelos para se enfiar na cama e fechar os olhos.

http://max.tportal.hr/subPage.aspx?videoId=5418

Achei piada e pesquisei mais, mais sobre palíndromos em geral e não sobre capicuas apenas.

É dessa transversalidade que me proponho apresentar alguns exemplos.

A palavra *palíndromo* tem origem grega e vem de *palin* ("trás") e *dromos* ("corrida"). Pode assim considerar-se como algo "que volta sobre seus passos", ou então "que corre em sentido inverso", "que volta pelo mesmo caminho". Uma palavra, frase ou texto palíndromo, pode ser lida da mesma maneira tanto esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Por exemplo, o curioso palíndromo RADAR (*Radio-detecting and ranging*) é notável, pois sugere a reflexão das ondas de radio.

Numa linha ou texto palíndromo, normalmente não são considerados os sinais ortográficos nem os espaços entre palavras.

Capicua, do catalão *cap i cua*, significa "cabeça e cauda". Uma capicua não é mais que um número palíndromo. Deixarei os números para o final, se tal se pode dizer: não é tudo número, segundo Pitágoras?

Ame o Poema

Escrever usando palíndromos é um exemplo de escrita constrangida que tem sido alvo de muita curiosidade e interesse desde a sua "invenção". Esta é atribuída a Sotades, "O Obsceno", de Maronea, assim designado devido à natureza da sua poesia. Os versos palíndromos chegaram a ser referidos como versos sodáticos. Sodates viveu no Egipto governado por Gregos, no século III A.C.. Foi mandado matar por Ptolomeu II, devido aos insultos ao rei, em versos que este decididamente não amou.

A escrita na forma palíndroma é como um jogo de letras-imagens ou palavras-imagens, por um lado as mesmas palavras e por outro lado diferentes, imagens invertidas umas das outras.

A forma do palíndromo introduz uma simetria no texto. A simetria é uma das formas mais comuns na natureza. O ser humano associa à simetria um sentido de reconhecimento e de prazer estético. Segundo o astrofísico Mario Livio, a simetria é a ferramenta mais poderosa para ligar a Ciência à Arte, como pode ser reconhecido desde os tapetes Persas às moléculas da vida, desde a Capela Sistina à Teoria de Grupos — a linguagem matemática que descreve a essência das simetrias e explora as suas propriedades.

O formalismo da linguagem, seja composta de símbolos matemáticos ou linguísticos, não tem nada de natural. Nem é tão pouco uma cópia da natureza. Torna-se, pois, paradoxal, que ao dividir o texto de uma forma natural — a simetria — o palíndromo torne o mais artificial possível, o texto que daí resulta.

No entanto, o interesse pelos palíndromos, em particular palavras e textos, foi sendo retomado a longo da história da literatura ocidental, de forma mais ou menos popular, tendo havido um ressurgimento desse interesse no século XX. É que esta espécie de jogo, criado pelo autor, é depois descoberta pelo leitor que se torna assim seu cúmplice. O jogo vai desde a criação de simples palavras, pequenas frases, poemas, até textos com mais de 17 000 palavras.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Figura 1

Soa como caos

Um famoso palíndromo bi-dimensional, também conhecido como quadrado mágico, quadrado latino ou fórmula Sator (ver figura), é uma inscrição latina que foi encontrada nas ruínas de Herculano e Pompeia do século I da nossa era. A sua tradução é controversa, mas duas das alternativas propostas são: "O semeador Arepo conduz cuidadosamente o arado" e "O criador mantém o mundo na sua órbita". O quadrado é absolutamente simétrico — tanto da esquerda para a direita, como da direita para a esquerda, de cima para baixo e de baixo para cima (figura 1).

Também se encontram palíndromos numa tradição literária tão diferente como a chinesa: são os *huiwenshi*, "poemas de leitura inversa", cuja origem remonta ao século III da nossa era. As características da escrita ideográfica chinesa, levam a que a ordem de leitura nos *huiwenshi* seja mais circular que linear, como espero que acreditem, pois o meu domínio da língua não me permite entendê-lo e consequentemente, muito menos explicá-lo.

Rezar para prazer

As duas fotografias que se seguem são de duas das faces de uma pia de água benta de uma igreja em Isére.

A face oeste contém a inscrição *ANOMHMATA* enquanto que a face sul contém *MH MONAN*. O palíndromo, com-

Figura 2.

Figura 3. Desenho de tapete de Arraiolos

pleto nas quatro faces, lê-se "nipson anomêmata mê monan opsin" — "Lava os meus pecados e não apenas os meus olhos".

Modo: som tiramos, somamos som a ritmos... o dom

Na música encontram-se muitos exemplos dos mais diversos tipos e em diferentes épocas.

No século XV, compositores atrevidos, por vezes exibiam-se compondo peças que podiam ser tocadas do fim para o início, do mesmo modo que do início para o fim. Estas composições em estilo *caranguejo* — assim designadas devido à ideia errada de que os caranguejos andam para trás — eram difíceis de construir como palavras cruzadas. E igualmente difíceis de ouvir!

A bem mais agradável Fuga N° 2 em Dó menor para Cravo Bem Temperado, de J. S. Bach, século XVIII, composta de forma palíndroma, pode ser seguida em formato hipermedia em:

http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/wtc/i02.html

O seu contemporâneo F. J. Haydn interessou-se também um pouco por este tipo de música, sendo a sua Sinfonia Op. 47 (1772) intitulada palíndroma, devido à parte da obra, Menuet à L'énvers (Minueto ao Contrário).

Possivelmente o único exemplo em estilo caranguejo do século XIX pertence a Schubert. É a sua ópera Die Zauberharfe, "Zuberspiel mit Musik", um "Jogo de Magia com Música".

Desde então, a maior parte dos compositores tem-se contentado em compor num só sentido. Mas há excepções! O modernista alemão Paul Hindemith, em 1927 compôs uma ópera inteira, uma espécie de musical e palíndromo dramático, intitulada Hin und zurück (Ida e Volta).

Perfeitamente actual é o Canon de David Roundy (figura 2) — um físico americano, que entre tantas outras coisas, faz crochet!

Claro que, na sua execução, ao chegar ao fim da página, basta virá-la de pernas para o ar... e continuar.

Igualmente da actualidade é o divertido clip de vídeo do autor "Weird Al" Yankovic, com texto formado por "versos"palíndromos, sobre a música de Bob Dylan — 115th Dream.

http://scotland.imeem.com/video/dwI47TmI/bob_parody_weird_al_yankovic/

Mark Skram, que se dedica apenas a este estilo de música algo estranha e nem sempre agradável aos (meus) ouvidos, apresenta muita informação e ficheiros wave em:

http://www.misterb.x3fusion.com/palindrome/index.php?rqst=music.html

Luz azul

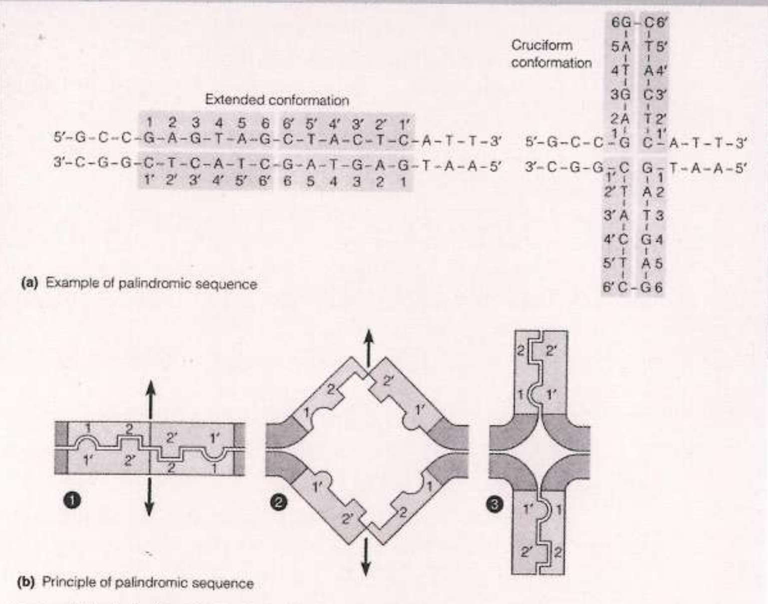
É extremamente fácil encontrar exemplos quer em desenho, pintura ou escultura, quer em fotografia, pois basta que as obras admitam simetria de reflexão (figura 3).

Rir, o breve verbo rir.

Em 20/02/2002 realizou-se um Festival do Palíndromo em LILLE, onde pôde ver-se, por exemplo a banda desenhada na página seguinte.

Autores: Philippe Bruhat, Melika Cherfaoui, Caroline Fontaine, Edward Millot e Etienne Lécroart

Figura 4



(a) Example of palindromic sequence

(b) Principle of palindromic sequence

hews and van Holde: *Biochemistry 2/e*. © The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc.

Somos

As sequências de reconhecimento das células de ADN são sempre palíndromas (figura 4).

Capicuas

Voltando, por fim, ao início!

A principal razão para deixar *os números* para o fim, é que o pouco que pretendo acrescentar neste domínio, ao artigo recomendado no princípio, poderá constituir uma actividade em aulas com alunos desde o 1° ciclo, com exemplos bem escolhidos, claro.

Trata-se de um conhecido algoritmo para obter capicuas. Experimentei-o em aulas de substituição com alunos de 5°, 6° e 7° anos e acho que a coisa não correu mal de todo. Cálculos simples, iterativos, um pouco de magia... e mesmo que desse para o torto, poderia sempre ocupar as crianças a tentar obter uma capicua a partir do renitente 196!

O algoritmo, bem simples, consiste então em:

1. considerar um número, não palíndromo
2. inverter a ordem dos seus algarismos e adicionar o número obtido ao número original.
3. se a soma não for um palíndromo, voltar a 2. e repetir o processo até obter um palíndromo.

No caso do número 87, por exemplo:

1. 87 + 78 = 165
2. 165 + 561 = 726
3. 726 + 627 = 1353
4. 1353 + 3531 = **4484**

No caso de números de dois dígitos, é evidente que se a soma dos seus algarismos for menor que 100, obtém-se um palíndromo de dois algarismos logo no primeiro passo. Cerca de 80% dos números menores que 10 000, resolvem-se num máximo de 4 iterações. Um caso raro, o 89, precisa de 24 iterações para levar a um palíndromo.

Chegou,pois, a conjecturar-se que seria possível, com um número finito destas iterações, obter uma capicua a partir de qualquer número inteiro.

A torre da derrota

Será verdadeira a conjectura? Não há certeza, pois não foi ainda provada. Há alguns números que parecem nunca originar capicuas. Trigg calculou todos os números inteiros menores que 10 000 em 1967 e descobriu que 249 pareciam nunca originar uma capicua. O menor deles é 196, o qual, ao fim da ducentésima iteração conduz ao número

9104495467417656552982698022556296323
0120725528121032358265631979728
03556567037646054008,

obviamente não palíndromo.

A pesquisa para resolver este caso, é designada por *196 Palindrome Quest*

`http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html#196`

Com recurso a programas informáticos, esta busca levou Tim Irving, em 1995, a um número não palíndromo com dois milhões de algarismos que pode ser descarregado em

`http://www.fourmilab.ch/documents/threeyears/two_months_more.html`

Como última curiosidade, um conjunto de capicuas fascinantes são aqui apresentadas por estarem ligadas ao Reajustamento do Programa do Ensino Básico de Matemática, nomeadamente às do 2° ciclo, pois são exemplos de padrões numéricos e do critério de divisibilidade por 11.

São capicuas que podem construir-se, na base 10, com sequências de dígitos começadas por 1.

Por exemplo 121, é divisível por 11, com quociente 11, o qual é evidentemente também uma capicua. De observar que neste exemplo, o algarismo 2, que isoladamente representa o maior número, é par.

Cumprindo esta última condição, o palíndromo seguinte é 1234321, novamente divisível por 11, com o quociente palíndromo 112211.

Continuando desta forma, segue-se 12345654321, cuja divisão por 11, leva à capicua 1122332211.

Este padrão repete-se, com 123456787654321, sendo 8 o algarismo par de maior valor isolado na base 10. Dividido por 11, dá 1122334433221.

De observar a simetria dos palíndromos resultantes, que começam todos por 1 e em que cada algarismo surge duas vezes. O *algarismo* de maior valor isolado, na capicua resultante, é sempre metade do valor do *algarismo* correspondente no número original.

Estes padrões são extensíveis a números representados em outras bases maiores que 2.

Em `http://www.iol.ie/~peter/num1.html` é mais desenvolvido este tipo de curiosidades.

Bibliografia

Capicuas, José Paulo Viana (2002) in *Educação e Matemática* n° 66. APM, Lisboa.

Gardner, Martin (1979). *The Ambidextrous Universe. Mirror Asymmetry and Time Reversed Worlds*. Charles Scribner's Sons.New York.

Gardner, Martin (2000). The Annotated Alice, The Definitive Gardner, Martin Edition — Lewis Carrol's Alice's Adventures In *Wonderland & Through The Looking Glass*. WW Norton & Company, Inc. New York.

Mais algumas referências electrónicas

`www.trigofacile.com/.../0202-palindromes.htm`

Amazon UK e US: `www.fun-with-words.com/palin_books.html`

`http://jkalb.freeshell.org/palindromes/`

`www.ciac.ca/.../fr/continuum/palindrome.html`

`http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo19.html`

`www.wikipedia.org`

The Palindromist-journal: `http://www.realchange.org/pal/`

Susana Diego

EB 2,3 de Perafita

Estatuto Editorial da Educação e Matemática

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da *Educação e Matemática* são:

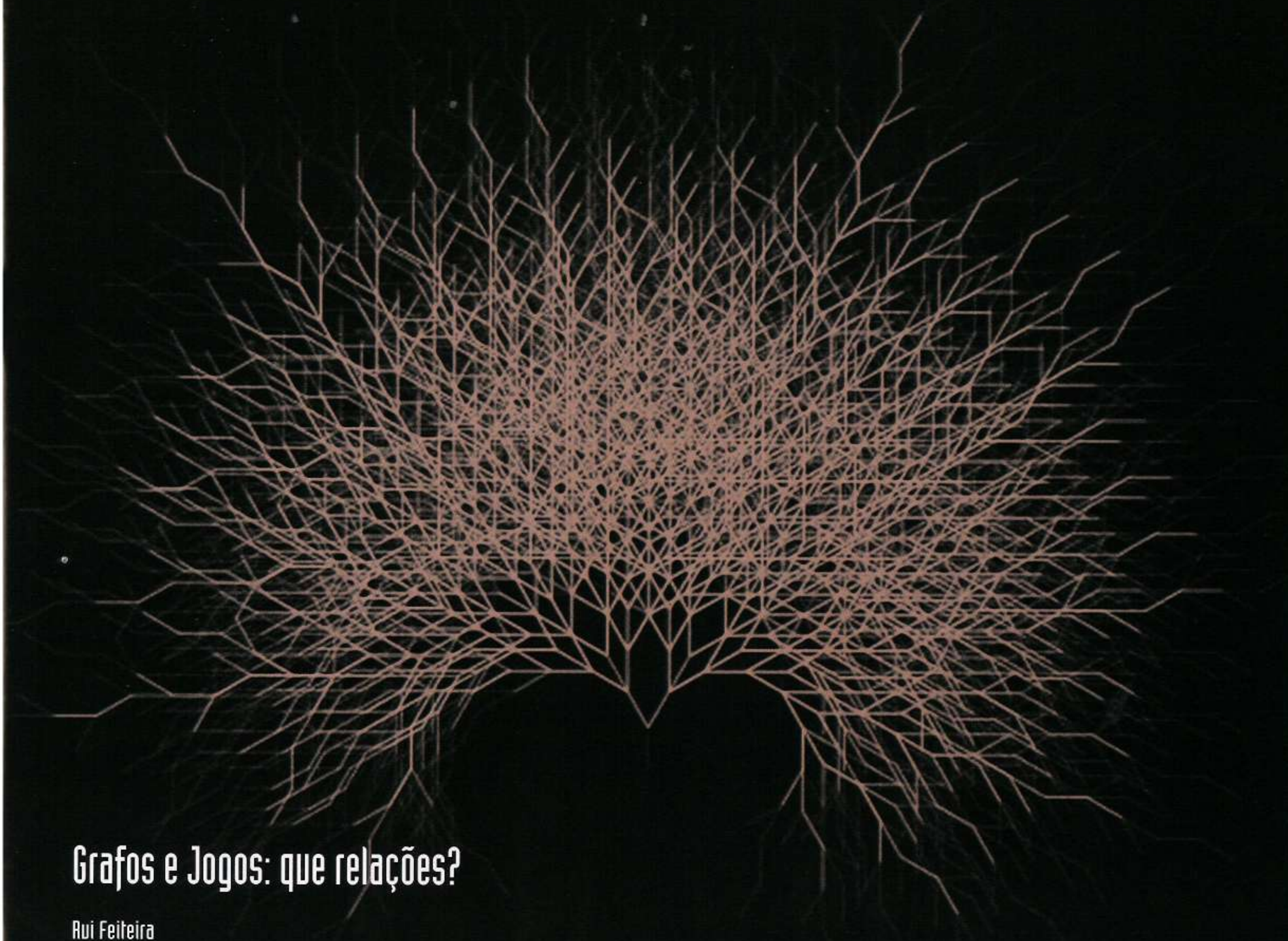
- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redactorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de recepção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da Educação e Matemática



Grafos e Jogos: que relações?

Rui Feiteira
Marília Pires

Considerações iniciais

O Currículo Nacional do Ensino Básico de 2001 (CNEB) introduziu várias mudanças no ensino da Matemática neste nível de ensino. Destas, uma das mais importantes prende-se com o objectivo expresso de formar alunos matematicamente competentes. De acordo com o CNEB esta competência só pode ser atingida pondo os alunos em contacto com experiências matematicamente ricas. Exemplos destas experiências são actividades de investigação, resolução de problemas, realização de projectos e implementação de jogos. É precisamente nesta última vertente que iremos centrar a nossa atenção. Ao longo deste artigo, pretendemos apresentar um conjunto de jogos que permitem desenvolver alguns dos conceitos básicos ligados à teoria de grafos.

Foi recentemente publicado o Reajustamento dos programas de Matemática do Ensino Básico, em vigor desde 1991. Pena é que neste reajustamento não tenha sido dada ênfase à importância que jogos, criteriosamente seleccionados, podem ter na aprendizagem do aluno.

Os jogos no Currículo Nacional

Segundo o CNEB os jogos representam um veículo privilegiado de desenvolvimento do raciocínio, da reflexão e da estratégia, ajudando ainda a potenciar o trabalho cooperativo. No referido documento pode-se ler:

"A prática de jogos, em particular os jogos de estratégia, de observação e memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social." (CNEB, 2001, p. 68)

A teoria de grafos oferece inúmeras oportunidades de apresentar aos alunos vários tipos de jogos que desenvolvem as

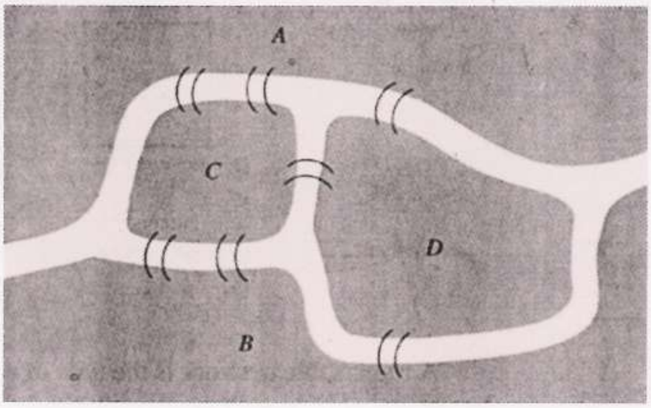


Figura 1. As sete pontes de Königsberg.

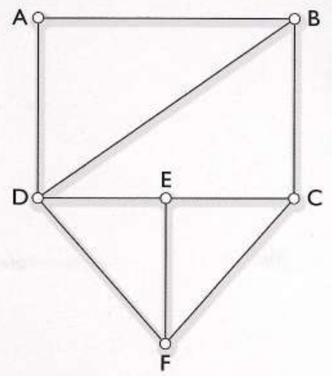


Figura 2.

capacidades de reflexão e estratégia. Uma vantagem da utilização de grafos prende-se com o facto de não ser necessário que os alunos tenham um conhecimento sólido e sistemático sobre grafos. Através de jogos que assentem em grafos os alunos podem simultaneamente apropriar-se, de modo informal, de alguns dos conceitos básicos de grafos e confrontar-se com um campo diferente e bastante actual da Matemática. Os próprios algoritmos utilizados na teoria de grafos, como por exemplo a determinação do caminho mais curto, a resolução do problema do carteiro chinês ou do problema do caixeiro-viajante assim como a obtenção de árvores de suporte mínimas podem, numa abordagem informal, ser encarados como um jogo com regras estipuladas. Segundo Hart (1992) a inclusão do estudo de grafos na Matemática escolar, propicia a utilização de uma Matemática pedagogicamente forte, que fornece hábitos matemáticos para o desenvolvimento do trabalho dentro da sala de aula. A modelação de situações da vida real, sem que haja necessidade de proceder a simplificações que fazem com que a realidade se perca, dá origem a problemas que se podem resolver com o auxílio de algoritmos muito intuitivos e fáceis de utilizar (pelo menos a um nível elementar). Segundo este autor, o mais importante é mostrar aos alunos uma Matemática activa e viva. O estudo de tópicos de teoria de grafos poderá assim contribuir para que os alunos vejam de modo imediato a Matemática como uma disciplina útil, moderna e com muitas aplicações na sociedade. Esta área permite ainda esquematizar e representar graficamente muitas situações distintas, contribuindo para mostrar a Matemática como uma ferramenta, extremamente útil no apoio a tomadas de decisão por parte das empresas, ou seja, a análise das situações que os grafos modelam pode ajudar a estimular e a desenvolver a criatividade nos alunos (Feiteira, 2007).

Algumas noções básicas

Em 1736, quando Euler resolveu a conhecida questão das pontes de Königsberg (figura 1), certamente não imaginava que estivesse a fundar um novo campo da matemática que viria a ser tão preponderante no estudo, funcionamento e desenvolvimento da sociedade. Das inúmeras áreas onde podemos encontrar a teoria de grafos destacamos as redes de transporte e comunicações e as relações internacionais. Já todos viram certamente um esquema da rede do metro de Lisboa ou Porto. Esquemas semelhantes encontram-se afixados nas paredes de todas as estações de metro do mundo e destinam-se a facilitar as deslocações dos passageiros, que assim podem planear as suas deslocações antes de entrar no comboio. Na realidade, estes esquemas não passam de grafos, em que as estações são os vértices e as linhas entre estações consecutivas as arestas. Com este exemplo, vários conceitos básicos de grafos, tais como vértice, aresta, caminho, circuito, conexidade, grau dos vértices ou árvore de suporte podem ser apresentados aos alunos de uma maneira informal.

Para melhor facilitar a leitura, nesta secção, iremos apresentar formalmente algumas das noções básicas que são necessárias para melhor perceber os jogos que propomos. É claro que, como muito bem diz o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), está fora de questão que esta abordagem formal seja apresentada aos alunos.

Um grafo é um par ordenado $G = (V, A)$ de conjuntos finitos, onde V é o conjunto de vértices e A é uma colecção de subconjuntos de dois elementos de V, a que se chama conjunto de arestas. Dois vértices dizem-se adjacentes se existe uma aresta que os ligue, ou seja se em A existe o conjunto cujos elementos são exactamente esses dois vértices. Uma aresta diz-se incidente aos dois vértices que une. Para ilustrar o que se disse atrás considere-se

$$V = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ e}$$

$$A = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{E, C\}, \{E, D\}, \{D, A\}, \{D, B\}, \{E, F\}, \{D, C\}, \{F, C\}\}.$$

A figura 2 pode ser uma representação gráfica para $G = (V, A)$.

Um grafo diz-se conexo se existir sempre um caminho entre quaisquer dois vértices pertencentes ao grafo. O grau de um vértice v é igual ao número de arestas incidentes a esse mesmo vértice e denota-se por gr(v). Por exemplo, no grafo da figura 2, gr(B) = gr(C) = gr(E) = gr(F) = 3, gr(A) = 2 e gr(D) = 4. Um caminho não é mais do que uma sequência de vértices adjacentes onde o vértice inicial pode ser diferente do vértice final. Caso o vértice inicial coincida com o final então temos um circuito. A sequência ABCEF é um ca-

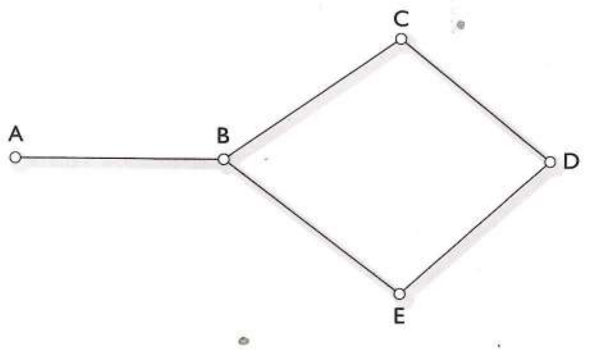


Figura 3.

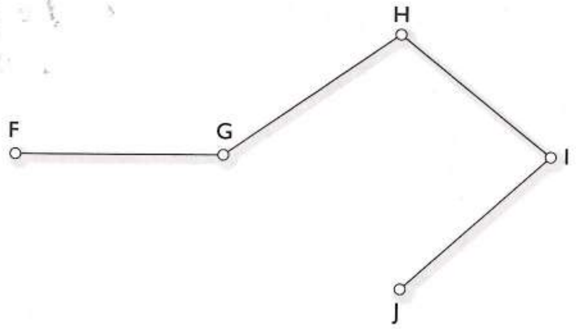


Figura 4.

minho enquanto a sequência ABDA representa um circuito. Uma árvore é um grafo conexo sem circuitos.

Por exemplo, o grafo da figura 3 não é uma árvore, visto conter um circuito. Facilmente se observa que se começarmos no vértice B e passarmos sucessivamente por E, D, C podemos voltar a B novamente. Já o grafo da figura 4 é uma árvore.

Gostaríamos de insistir na ideia que estes conceitos podem ser apresentados e desenvolvidos a partir de qualquer um dos jogos que apresentamos a seguir.

Jogo 1

O jogo que propomos de seguida pode apresentar-se de duas formas diferentes.

Na figura 5, em que os vértices já estão coloridos, os alunos devem unir os vértices de tal forma que vértices adjacentes deverão ter cores diferentes, ou dito de outra forma, dois vértices estão ligados se e só se tiverem cores diferentes.

1.ª versão: Nesta versão do jogo perde o primeiro jogador que não conseguir desenhar uma aresta (pode haver cruzamento de arestas, mas não arestas paralelas[1]). O professor deverá encorajar os seus alunos a encontrar uma estratégia que lhes permita vencer sempre. Se os alunos repetirem algumas vezes o jogo nas mesmas condições, a estratégia ganhadora não será difícil de encontrar. Como o primeiro conjunto tem 3 elementos e o segundo tem 4, isso quer dizer que de cada vértice do primeiro conjunto saem, no máximo, 4 arestas, uma para cada vértice do segundo conjunto. Então o grafo terá no máximo $3 \times 4 = 12$ arestas (número par), ganha o aluno que não iniciar o jogo. De facto, o segundo jogador irá colocar as arestas número 2, 4, 6, ..., 12, e portanto o jogador que iniciou o jogo perderá sempre que o número de arestas for par.

De notar que se o número máximo de arestas for ímpar, o que só acontece quando ambos os conjuntos tiverem um número ímpar de elementos, então quem ganha é quem começa.

Objectivos deste jogo: Tomar contacto com os grafos bipartidos[2] e bipartidos completos; Chegar à fórmula que permite determinar o número de arestas de um grafo bipartido completo; Estabelecer a estratégia ganhadora.

2.ª versão: Nesta versão não é permitido o cruzamento de arestas. Começamos com 2 vértices brancos e 3 castanhos, e depois passamos para 3 brancos e 3 castanhos. No primeiro caso, apesar da restrição de não poder haver cruzamentos de arestas, a estratégia ganhadora é a mesma do que na primeira versão. No segundo, caso o jogador que efectuar as jogadas ímpares não irá conseguir ligar os últimos dois vértices. De facto, as oito primeiras ligações são triviais e, suponhamos sem perda de generalidade, que o jogo está disposto como mostra a figura 6. Suponhamos então que os

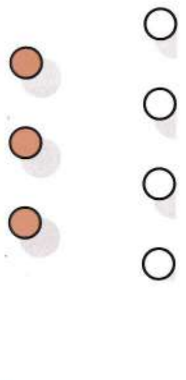


Figura 5.

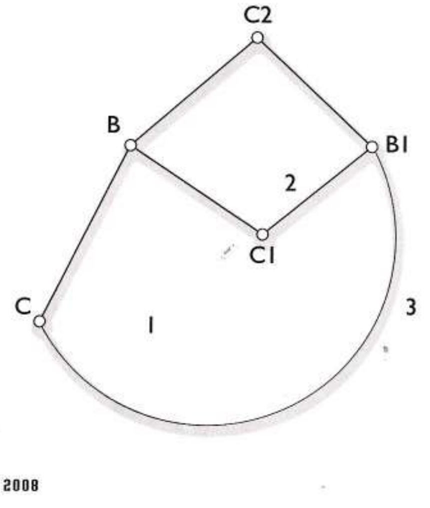


Figura 6.

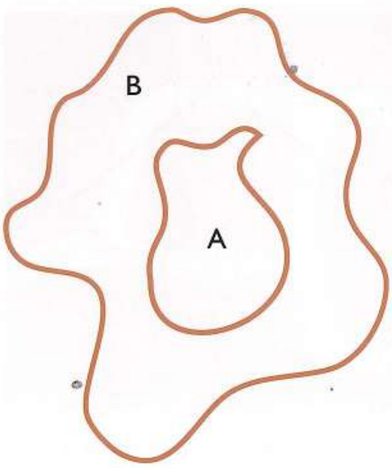


Figura 7. Adaptado de Benarroch, Moisés Coriat et al. (1989).

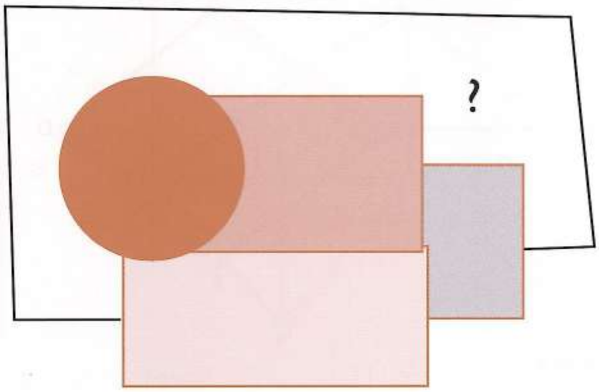


Figura 8.

vértices castanhos são representados por C, C1 e C2, enquanto que os brancos são representados por B, B1 e B2.

Se olharmos com atenção notamos que ainda falta colocar o vértice B2. Este vértice só pode ser colocado na região 1, 2, ou 3. Se colocarmos B2 na região 1 não conseguimos ligá-lo a C2. Se colocarmos B2 na região 2 não conseguimos ligá-lo a C. Finalmente se colocarmos B2 na região 3 não conseguimos ligá-lo a C1. e, portanto, não é possível fazer as nove ligações sem cruzamentos de arestas.

Objectivos do jogo: Fazer uma primeira aproximação aos grafos com e sem representação planar.

Jogo 2

Este jogo pode servir para dar a conhecer aos alunos o teorema das quatro cores. A propósito pode-se contar um pouco a história deste teorema. O facto de ter sido o primeiro teorema importante a ser demonstrado com recurso a meios computacionais, desperta sempre muito interesse por parte dos alunos.

Neste jogo intervêm apenas 2 jogadores, A e B, que dispõem de 4 cores diferentes e de uma folha em branco. O jogador A desenha uma região e o jogador B além de pintar aquela região desenha outra região adjacente à que pintou. De seguida, o jogador A pinta esta região com outra cor e desenha outra região adjacente. O jogo continua sempre desta forma. Perde o primeiro jogador que não conseguir colorir adequadamente a região proposta, por não ter mais nenhuma cor disponível. As regras do jogo são simples:

- se duas regiões têm apenas um ponto de contacto este não deve ser considerado como fronteira;
- regiões adjacentes devem ter cores diferentes;
- não é permitido desenhar uma região de tal forma que contenha totalmente uma outra região;
- não é permitido desenhar regiões que tenham apenas um ponto de contacto.

A figura 7 ilustra uma jogada considerada ilegal. A figura 8 ilustra uma sequência possível de jogadas.

Cada jogada deverá ser registada para facilitar a discussão posterior de cada um dos jogos. Depois de finalizar cada jogo os intervenientes deverão analisar o seu jogo e tentar perceber a razão pela qual o jogo terminou, mostrando qual o movimento que deveria ser feito para que o jogo não terminasse. No final de uma sequência de 3 ou 4 jogos os alunos já podem redigir um pequeno relatório onde, para além de descreverem o jogo, apresentem as suas conclusões para cada um dos jogos.

A título de curiosidade poderia colocar-se a seguinte questão: qual é o número mínimo de cores que se necessita para pintar um mapa plano? Depois de pintados alguns mapas, os alunos, devidamente orientados pelo professor, poderiam concluir que 4 cores chegam para pintar qualquer mapa plano. Esta conjectura poderia ser o ponto de partida para um trabalho de pesquisa histórica sobre o teorema das quatro cores. A este propósito pode-se dar como exemplo o teorema das 5 cores que foi formulado numa das tentativas frustradas de demonstração do teorema das 4 cores.

Objectivo do jogo: conjecturar que 4 cores são suficientes para colorir um mapa

Jogo 3

O cifrar e decifrar mensagens teve sempre um papel fundamental em qualquer conflito. Já os antigos romanos usavam a cifra de César para enviar mensagens para a frente de batalha. Os códigos de Huffman permitem muito facilmente cifrar e decifrar mensagens secretas. Este tipo de códigos trabalha apenas com os números 1 e 0, onde 1 significa "ir para a direita" e 0 significa "ir para a esquerda". Tendo transmitido esta informação, o professor começa por dividir a turma em grupos de três ou quatro alunos, e apresenta a árvore representada na figura 9 onde existe uma mensagem codificada.

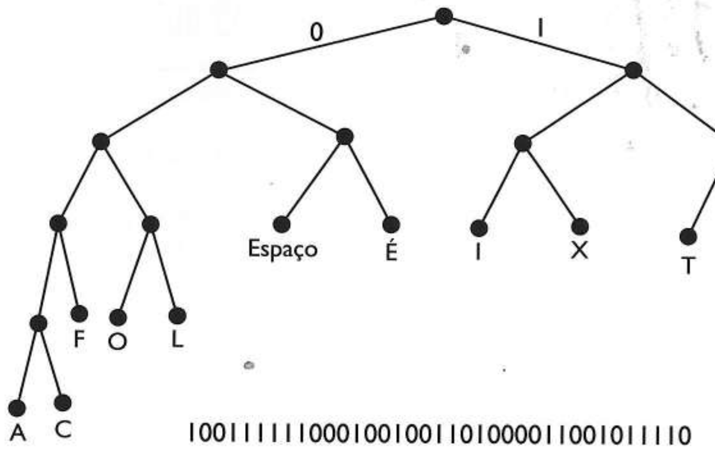


Figura 9.

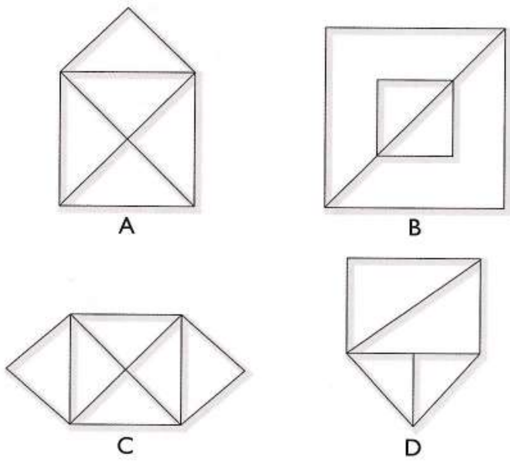


Figura 10.

O professor começa por explicar como decifrar a primeira palavra e os alunos ficariam responsáveis por decifrar o resto da mensagem. Como decifrar a primeira palavra? Comecemos por considerar os três primeiros dígitos da sequência que aparece no final da figura 9: 100. Um, zero, zero significa que começando no vértice inicial primeiro optamos pelo ramo da direita e, nos dois vértices seguintes optamos pelo vértice da esquerda, encontrando a letra I. Para descobrir as outras letras procede-se forma análoga considerando instruções com 3, 4 ou 5 dígitos. Uma vez descoberta a frase, o professor pode propor aos alunos que cada grupo codifique uma mensagem curta, usando a mesma árvore ou outra árvore qualquer. Claro que, para evitar mensagens menos próprias ou erros de codificação, o professor tem que activamente verificar o trabalho de cada grupo. Depois das mensagens codificadas e verificadas pelo professor, os grupos trocariam as mensagens entre si e cada grupo iria descodificar uma mensagem codificada por um outro qualquer grupo.

Objectivo do jogo: Trabalhar com árvores binárias; Reconhecer a utilidade das árvores binárias como esquemas de decisão.

Jogo 4

Desenhar cada uma das figuras seguintes sem levantar o lápis e sem passar por cima de segmentos já desenhados (figura 10).

Após algumas tentativas os alunos irão conseguir desenhar a figura C começando e terminando no mesmo vértice. Analisando a construção de cada uma das figuras os alunos poderão inferir que sempre que existir uma figura, em que todos os pontos possuem um número de ligações par, então consegue-se desenhar essa figura sem levantar o lápis (começando e terminando no mesmo vértice). Com ajuda do professor, e aproveitando a análise anterior, os alunos deverão inferir ainda que, caso um grafo tenha apenas 2 pontos que possuem um número ímpar de ligações, então é também é possível desenhar essa figura sem levantar o lápis, contudo o ponto onde se começa a desenhar a figura é diferente do ponto onde se acaba de desenhar, figuras A e B. Caso o número de pontos com grau ímpar, figura D, seja superior a 2 então não conseguiremos desenhar a figura nas condições impostas.

Na descrição deste jogo optámos por manter uma linguagem bastante informal sem incluirmos os termos de grafos, vértice, grau de um vértice e arestas. Contudo, defendemos que, caso se opte por trabalhar estes tópicos ao longo da escolaridade básica, poder-se-ia paulatinamente ir introduzindo estes conceitos.

Depois de trabalhada esta questão e introduzidos os conceitos referidos, poder-se-ia propor, em jeito de desafio, as seguintes questões:

Será possível desenhar um grafo tal que os graus dos seus vértices valem:

a) 4, 4, 3, 2, 1?

b) 3, 2, 3, 1?

Depois de resolvida esta questão poderá conduzir-se os alunos para o facto curioso que, num grafo, a soma dos graus dos vértices é sempre par.

Objectivo: Introduzir informalmente os conceitos de circuitos e caminhos eulerianos; Conjecturar as condições necessárias para existir um circuito de Euler e para existir um caminho de Euler.

Jogo 5

O jogo, para dois jogadores, inicia-se com um certo número de pontos (vértices) e as jogadas reduzem-se à ligação (arestas) destes pontos e à colocação de um novo ponto na nova aresta, tendo em atenção que cada vértice terá no máximo grau 3 e que as arestas não se podem cruzar. O vencedor é aquele jogador que conseguir ligar a última aresta.

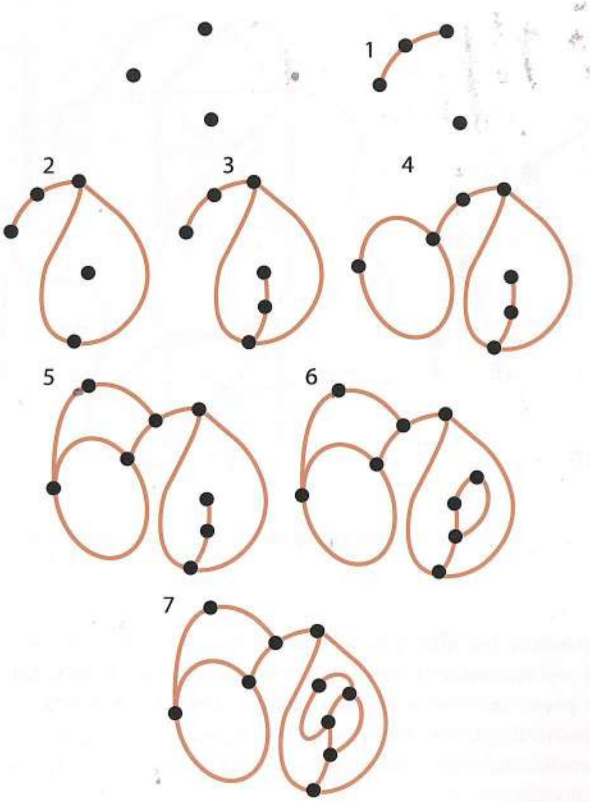


Figura 11.

À primeira vista pode parecer que este jogo se prolongará indefinidamente. Na verdade, consegue-se provar que, se o jogo começar com n vértices, este terminará no máximo ao fim de 3n − 1 jogadas. Segundo Peterson (1997), o primeiro jogador ganhará os jogos onde se comece com 3, 4 ou 5 vértices, enquanto o segundo jogador ganhará o jogo, se este começar com 1, 2 ou 6 vértices.

Objectivo do jogo: Estabelecer um primeiro contacto com grafos planares.

Considerações finais

Jogos do tipo dos que propusemos podem ser trabalhados entre conteúdos programáticos. A teoria de grafos, a um nível elementar, pode permitir que os alunos tenham boas experiências de aprendizagem, apresentando ainda a vantagem de poder ser um veículo de recuperação para aqueles alunos que tenham tido insucesso ao longo do seu percurso escolar e que por essa razão se tenham desmotivado. Por ser uma área rica em aplicações, que podem ir desde as Ciências Sociais à Matemática recreativa, coloca em evidência, de uma forma imediata, o papel e a importância da Matemática na nossa sociedade. Apresentámos apenas cinco jogos que podem ser modelados através de grafos, mas muitos outros se podem realizar dentro da sala de aula, como por exemplo, o problema do caixeiro-viajante ou o problema de construir um calendário de jogos de futebol com o número de equipas que desejarmos. Obviamente, sendo a teoria de grafos rica em problemas ou actividades que se podem desenvolver na sala de aula, existem muitas mais situações do que as aqui sugeridas. O único limite é o da nossa imaginação (Feiteira, 2007).

Notas

1 Duas arestas dizem-se paralelas se unirem os mesmos vértices.

1 Informalmente, um grafo designa-se por grafo bipartido se o conjunto dos vértices puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos, tais que não são permitidas arestas entre os vértices de um mesmo subconjunto, isto é, todas as arestas unem um vértice de um subconjunto com um vértice do outro subconjunto. Um grafo designa-se por bipartido completo se qualquer vértice de um dos subconjuntos de vértices for adjacente a todos os vértices do outro subconjunto.

Referências

Althoen, S., Brown, J., Bumcrot, R. (1991). Graph Chasing across the Curriculum: Paths, Circuits, and Applications, In Kenney, M., Hirsch, C., (eds), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12*, p. 30–43. Virginia: NCTM.

Departamento do Ensino Básico, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais*. Disponível em

http://www.dgidc.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf

Lima, E., (2004). *Matemática e Ensino*. Lisboa: Gradiva.

Hart, E. (1992), Discrete Mathematical Modelling in the Secondary Curriculum: Rationale and Examples from the Core-Plus Mathematics Project, In Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F., (eds), *Discrete Mathematics in the Schools*, p. 265–280, Vírginia: AMS e NCTM.

Feiteira, R., (2007). *Grafos para todos — sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve), Colecção de Teses, Lisboa: APM.

Peterson, I. (1997). *Sprouts for Spring*. Disponível em

http://www.sciencenews.org/pages/sn_arc97/4_5_97/mathland.htm

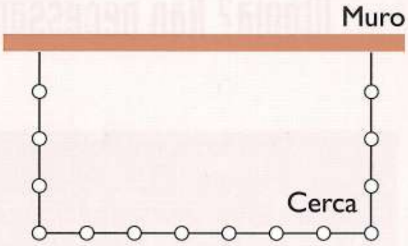
Rui Feiteira
Agrupamento Vertical de Escolas prof. José Buisel, Portimão
Marília Pires
Dep. de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Univ. do Algarve

O cercado das galinhas

Um criador de galinhas resolveu construir um cercado rectangular. Para um dos lados mais compridos do rectângulo aproveitou parte do muro da sua propriedade. Os outros três lados seriam construídos em rede, apoiada em postes igualmente espaçados de 6 em 6 metros.

Depois de ter comprado todo o material, verificou que se tinha enganado nas contas e que lhe faltavam 5 postes. Contudo, descobriu que se pusesse os postes de 8 em 8 metros tudo ficava perfeito e não precisava de alterar nenhuma das dimensões do cercado.

Quantos metros de rede usou? Quais são as dimensões do cercado?

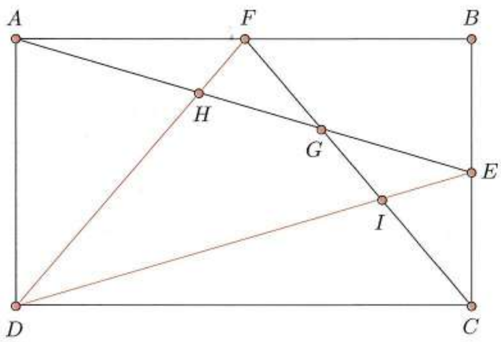


(Respostas até 12 de Junho)

Os caminhos do parque

O problema proposto no número 95 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Um parque rectangular $ABCD$ tem cinco entradas: uma em cada vértice A, C e D, outra no ponto médio F do lado AB e a última no ponto médio E do lado BC. O parque tem quatro caminhos em linha recta ligando várias das entradas, tal como se mostra na figura.



Os caminhos FC e AE encontram-se no ponto G.

O João afirma que os ângulos EDF e FGH são iguais.

A Sónia acha que só por sorte isso acontecerá, tudo dependendo das dimensões do parque (que nenhum deles sabe quais são).

Quem tem razão?

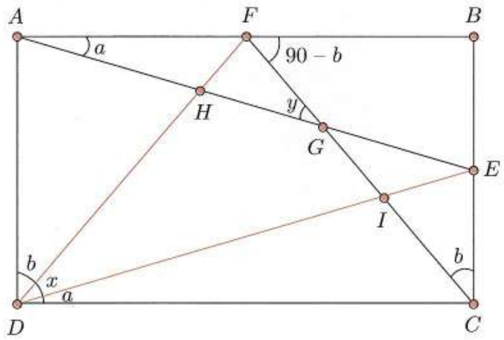
Recebemos 8 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Ana Luísa Correia (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Perpétua (Setúbal), Helena Pinto (Lisboa), Jeanette Bisschop (Funchal), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Vanderlei Monteiro (Chaves)

Eis como começa a resposta da Ana Luísa:

Li o enunciado deste problema. Fiquei logo com vontade de abrir o computador e experimentar no Sketchpad. Abri o computador mas resisti mais um bocadinho. Deixa-me lá ver o que eu faria no tempo em que nem se pensava em haver tal ferramenta. Peguei num papel e fiz o desenho (...).

Pois é, o Sketchpad é uma tentação, mas realmente o problema pode ser facilmente resolvido usando as semelhanças e as propriedades dos triângulos. Aliás, todas as resoluções recebidas seguiram esta via, embora algumas pessoas acrescentassem resoluções alternativas usando a trigonometria (Helena Perpétua e Alberto) ou a geometria analítica (Jeanette e Graça).

Vejamos como a Helena Pinto chegou à conclusão de que quem tem razão é o João. Sejam x e y a medida dos ângulos que queremos comparar.



Designando por letras os ângulos marcados na figura, verifica-se que:

$$x = 90° - a - b$$

Considerando o triângulo AGF temos:

$$y + a = 90° - b \text{ ou } y = 90° - a - b.$$

Logo $x = y$. E eis como acaba a resposta da Ana Luísa:

E quanto ao Sketchpad? Não o usei senão para fazer a ilustração da minha resolução. Desta vez o problema pareceu-me mais simples. E se eu não conseguisse tão rapidamente? Quanto tempo de tentativas frustradas seria necessário para eu ir ver o que acontecia construindo no Sketchpad? Fica-me a dúvida mas para já, porque sou do tempo em que não havia nada disto, tenho que confessar que fiquei contente por fazer o problema sem recurso a uma experimentação. Só porque eu sou desse tempo porque se eu fosse aluna hoje e me tivessem ensinado a usar o sektchpad para investigação,s provavelmente teria começado por aí e provavelmente muito bem. Nenhum mérito deve ser retirado a quem o faz desde que não se contente com isso e depois consiga provar.

Utopia? Não necessariamente.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar mostra, através de indicações concretas e exequíveis, bem como de relatos de situações reais, que "uma sala de aula onde todos os alunos têm acesso a uma aprendizagem estimulante e de elevada qualidade" pode e deve ser uma realidade para todos e não uma utopia que apenas alguns professores tentam realizar.

A matemática e o seu ensino é apresentada de forma simples e clara, numa proposta de currículo coerente e bem articulado, incidindo em ideias matemáticas relevantes.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar, traduzido e editado em 2007, pela APM, a partir da obra publicada em 2000, pelo NCTM, é um documento que serve de referência, orientação e recurso para todos aqueles cujas decisões afectam a educação matemática dos alunos, do pré-escolar ao 12° ano, em particular, professores, responsáveis pela elaboração dos currículos, formadores e decisores de políticas de educação matemática.

Princípios e Normas foi elaborado, pelo NCTM, a partir dos conteúdos dos textos das *Normas* (*Standards*) anteriores, e "reflecte a contribuição e a influência de muitas fontes diversas". O processo de elaboração deste documento contou com uma vasta participação crítica de diversas comunidades especializadas: professores, formadores, matemáticos e investigadores em educação. A sua importância está expressa numa "carta de apreciação", dirigida ao NCTM e incluída na parte introdutória de *Princípios e Normas*, na qual quinze instituições, institutos e sociedades com ligação à matemática expressam a relevância do documento e do seu processo de elaboração.

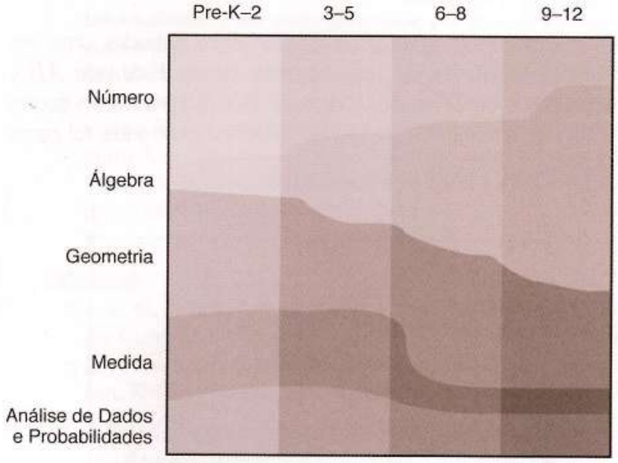
A edição portuguesa inclui prefácio do Professor Doutor Henrique Guimarães intitulada "Matemática com compreensão, Matemática para todos" na qual é feita uma excelente análise crítica dos aspectos fundamentais da obra.

Organização do documento

O texto é constituído por cinco partes:

- Uma *Visão* para a matemática escolar (cap.1).
- *Princípios* para a matemática escolar (cap.2).
- Descrição global das *Normas* para a matemática escolar do pré-escolar ao 12° ano (cap.3).
- Normas para quatro níveis de aprendizagem: do pré-escolar ao 2° ano, do 3° ao 5° ano, do 6° ao 8° ano e do 9° ao 12° ano (cap.4 a cap.7).
- Discussão sob a forma de tornar a *Visão* uma realidade (cap.8).

Termina com um Apêndice do qual consta uma tabela de *Normas* e *Expectativas* para todos os níveis de aprendizagem.



Graus de aprofundamento das Normas de Conteúdo ao longo dos níveis de aprendizagem.

A *Visão para a Matemática Escolar* é descrita como ambiciosa, exigindo um currículo sólido, professores competentes, recursos apropriados e "um compromisso dirigido à equidade e à excelência".

Partindo desta visão para a educação matemática, são definidos seis *Princípios* que constituem os "pressupostos considerados essenciais a uma educação matemática de elevada qualidade".

- *Equidade*. Excelência na educação matemática para todos.
- *Currículo*. Coerente, bem articulado e incidindo numa matemática relevante.
- *Ensino*. Todos os alunos devem ter a oportunidade de aprender uma matemática de elevada qualidade.
- *Aprendizagem*. Aprender matemática com compreensão e ser capaz de aplicar os seus conhecimentos.

- *Avaliação*. Como apoio à aprendizagem e fonte de informação para professores e alunos.
- *Tecnologia*. Ferramentas essenciais para o ensino, a aprendizagem e para fazer matemática.

Definidos os *Princípios*, são propostas dez *Normas* que constituem "descrições daquilo que o ensino da matemática deverá habilitar os alunos a saber e fazer". Cada uma das *Normas* contém considerações sobre o ensino e a aprendizagem, orientações metodológicas e exemplos de actividades de sala de aula e trabalhos dos alunos.

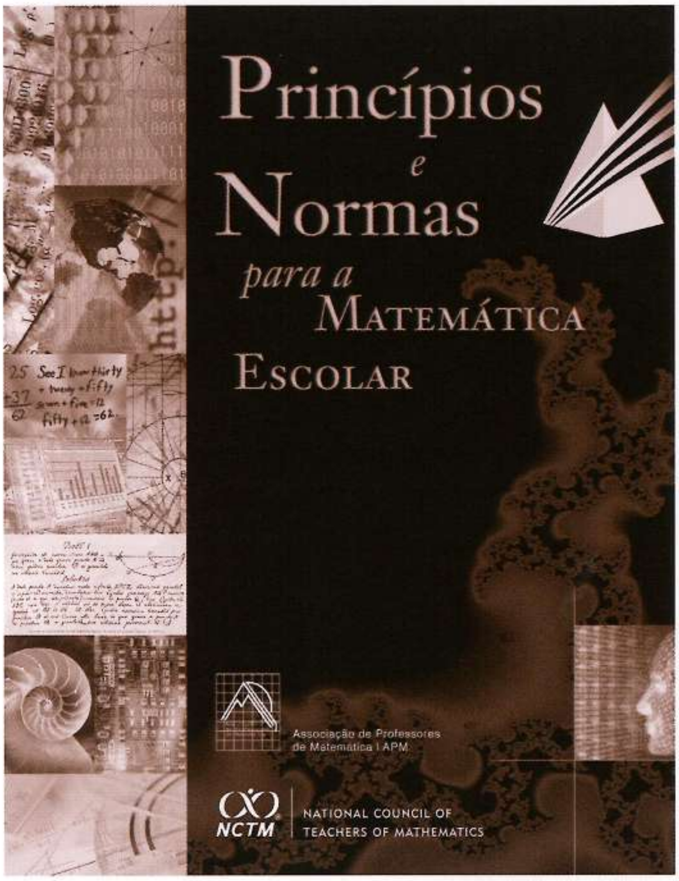
As cinco primeiras, *Normas de Conteúdo*, descrevem os objectivos de conteúdo matemático. A sua ênfase e o grau de aprofundamento variam dentro dos diferentes níveis de aprendizagem, conforme ilustra a figura, e são expressos através das *Expectativas* (objectivos mais específicos) definidas para cada um dos quatro níveis. As outras cinco, *Normas de Processo*, descrevem os processos matemáticos e são, também, comuns a todos os níveis de aprendizagem. Estes dois domínios, conteúdos e processos matemáticos, nos quais deve incidir a aprendizagem matemática, são sempre vistos e trabalhados como áreas fortemente interligadas.

Aspectos relevantes das Normas

Números e Operações. O ponto-chave desta *Norma* consiste no desenvolvimento do sentido do número, nomeadamente: a capacidade de decompor naturalmente os números; utilizar as relações entre as várias operações aritméticas na resolução de problemas; compreender o sistema decimal; fazer estimativas; dar sentido aos números, e reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números; (...) (Sowder, 1992). Incide, também, na compreensão dos sistemas numéricos, das suas estruturas e propriedades. É valorizada a destreza de cálculo, ou seja, "possuir e utilizar métodos de cálculo eficazes e precisos". O desenvolvimento desta destreza "exige uma relação de equilíbrio entre a compreensão conceptual e a competência de cálculo".

"Parte da capacidade para efectuar cálculos com destreza pressupõe tomar decisões perspicazes sobre o tipo de ferramentas a usar e sobre quando as usar".

Álgebra. São consideradas essenciais as relações entre quantidades, incluindo funções; o modo de representação das relações matemáticas; a análise da variação enquanto elemento essencial à compreensão das funções, nomeadamente as que não possuem taxas de variação constante. Ver a álgebra como um contínuo curricular desde o pré-escolar ao 12° ano, ajudará os alunos a adquirirem uma base sólida para um trabalho algébrico consistente. A experiência sistemática com padrões poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função (Erick Smith, para edição); um trabalho contínuo com os números e as suas propriedades constrói os fundamentos da compreensão e uso de símbolos e expressões algébricas; ao aprender que a matemática pode ser um meio para descrever situações, os alunos desenvolverão noções elementares de modelação matemática.



Normas para a Matemática Escolar

Editora: APM
Setembro 2007; 487 pp.
ISBN 978–972–8768–24–9
Preço PVP: 27,00€

"A álgebra é mais do que a manipulação de símbolos".

Geometria. É privilegiado o desenvolvimento do raciocínio e da demonstração com base em definições e factos já conhecidos. Considera-se que o trabalho em geometria constitui um contexto facilitador à formulação e exploração de conjecturas, e ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação que, no ensino secundário, culmina na demonstração. A modelação geométrica e a tecnologia possuem um papel importante no ensino e na aprendizagem da geometria. Programas de geometria dinâmica permitem, aos alunos, não só trabalhar com modelos e interagir com inúmeras formas bidimensionais, como criar muitos exemplos que lhes permitem formular e explorar conjecturas; embora criar muitos exemplos da mesma situação não constitua uma demonstração.

"Para analisar problemas e estudar matemática, os alunos deverão adquirir experiência na utilização de uma vasta gama de representações quer visuais quer através de coordenadas."

Medida. "Medir é atribuir um valor numérico a um dado atributo de um objecto ou, em níveis mais aprofundados, a uma característica de uma situação". Um aspecto importante é a compreensão do que é um atributo mensurável e das unidades e processos usados na medição desses atributos. É sublinhada a importância do estudo da medida no currículo de matemática, desde o pré-escolar ao ensino secundário, não só devido à sua aplicação prática na vida quotidiana, mas também porque permite realçar as conexões existentes no interior da própria matemática, ao proporcionar uma oportunidade para aprender e aplicar outros tópicos matemáticos: operações, conceitos geométricos, e noções de estatística e de funções.

"Compreender que todas as medidas são aproximações constitui um conceito difícil, mas importante, para os alunos".

Análise de Dados e Probabilidades. É recomendado que "os alunos formulem questões que possam ser respondidas através da utilização de dados, e explica em que consiste a recolha e a utilização sensata de dados". Para além da recolha, organização e apresentação de dados, inclui ainda a aprendizagem de métodos de análise de dados, formas de fazer inferências e tirar conclusões. Ao estudarem estatística, os alunos podem compreender que as soluções para determinados problemas dependem da assumpção de condições e possuem algum grau de incerteza. Os conceitos fundamentais de probabilidades, e as suas aplicações, são referidas principalmente no modo como elas se relacionam com a estatística.

"Os alunos deverão aprender o que significa fazer comparações estatisticamente válidas".

Resolução de Problemas. A resolução de problemas é considerada, simultaneamente, como um objectivo da aprendizagem matemática e como um meio pelo qual os alunos aprendem matemática. É essencial proporcionar, aos alunos, oportunidades para formular, discutir e resolver problemas complexos que exijam um esforço significativo e encorajá-los a reflectir sobre os seus raciocínios.

"O papel do professor na selecção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental".

Raciocínio e Demonstração. O raciocínio e a demonstração matemáticos são entendidos como "formas poderosas de desenvolver e expressar intuições sobre uma vasta gama de fenómenos". O raciocínio e a demonstração deverão constituir uma parte relevante das experiências matemáticas dos alunos, desde o pré-escolar ao 12.° ano. As primeiras tentativas de justificação deverão basear-se em estratégias de tentativa e erro ou na experimentação, não sistematizada, de muitos casos particulares. Seguidamente, os alunos poderão começar a aprender a ser sistemáticos nas suas explicações, a saber que experimentaram todos os casos e a criar argumentos a partir desses casos.

"Uma demonstração matemática é um modo formal de exprimir determinados tipos de raciocínio e justificação".

Comunicação. "A comunicação é uma parte essencial da Matemática e da Educação Matemática". Através da comunicação, é estimulada a reflexão e o rigor, bem como a consolidação e a divulgação das ideias. É evidenciado o facto de os alunos que são encorajados e apoiados a falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática, beneficiarem duplamente: "comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente".

"A comunicação escrita deverá ser encorajada", já que ajuda os alunos a consolidar o seu pensamento.

Conexões. Estabelecer uma forte inter-relação entre as diversas ideias matemáticas, permite aos alunos não só aprender matemática, como também aprender a reconhecer a utilidade da matemática. A matemática é uma ciência integrada. Ver a matemática como um todo realça a necessidade de estudar e pensar nas conexões existentes na disciplina. Como o *Princípio do Ensino* evidencia, "a compreensão envolve o estabelecimento de conexões".

"Para os alunos, a oportunidade de experimentar a matemática num contexto é importante".

Representação. A forma como são representadas as ideias matemáticas é determinante para o modo como são compreendidas e usadas. O termo "representação" refere-se tanto ao processo como ao resultado — ou seja, à aquisição de um conceito expresso numa determinada forma, e à forma em si mesma. As representações podem ajudar os alunos a organizarem o seu raciocínio. A utilização das representações poderá ajudar a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão.

"A utilização das representações, pelos alunos, para modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos deverá intensificar-se ao longo dos anos de escolaridade".

Ana Leitão e Lourdes Cangueiro

Poliedros regulares

Pedro Macias Marques

A nota publicada na última revista foi um grito contra a pobreza do elenco de objectos utilizados no ensino da geometria. Temos debatido isto nas reuniões do GTG e pretendemos publicar algumas notas sobre objectos que não costumam ser estudados, para aguçar a curiosidade dos professores, na esperança de que alguns deles venham a ser trabalhados nas aulas. Esta é a primeira.

Já aqui foram discutidas, em vários artigos, as definições em geometria. A importância de sabermos com quais trabalhamos quando estamos a tratar determinado assunto, as diferentes formas de as abordarmos no ensino, os excessos cometidos quando queremos que os alunos as saibam de forma enciclopédica. Nas notas sobre o ensino da geometria da revista n.º 90, Eduardo Veloso discutiu possíveis definições para polígono e a possibilidade de usarmos mais do que uma, conforme queremos trabalhar com uns objectos ou com outros. Deu como exemplo disto uma passagem da página 1 do livro de Coxeter *Regular polytopes* [Cox73] (tradução livre do inglês):

Definimos polígono [plano] de n lados como uma cadeia de n segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, unindo pares consecutivos de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Os segmentos e pontos dizem-se lados e vértices do polígono. Até ao início do capítulo VI, insistiremos que os lados não adjacentes não se intersectem.

No mesmo livro, na página 4, Coxeter apresenta uma definição análoga para poliedro (também tradução livre):

Um poliedro pode ser definido como um conjunto finito e conexo de polígonos planos tal que cada lado de cada polígono é comum a outro polígono, e a mais nenhum, de tal forma que os polígonos que estão à volta de um mesmo vértice formam um único circuito. Os polígonos são chamados faces e os seus lados são as arestas do poliedro. Até ao capítulo VI, insistiremos que as faces não se intersectem [para além das intersecções que têm lugar nas arestas de faces adjacentes].

Aceitando estas duas definições, tratamos a regularidade tanto de polígonos como de poliedros como estamos mais habituados. Um polígono regular é um polígono com lados iguais e ângulos iguais, um poliedro é regular se as suas faces são regulares e todas iguais e os seus vértices são congruentes. Assim, os polígonos regulares são o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular, etc. Os poliedros regulares são os sólidos platónicos: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro (figura 1).

Polígonos e poliedros estrelados

Podemos tornar tudo mais interessante se saltarmos para o capítulo VI do livro do Coxeter, e admitirmos que tanto os lados dos polígonos como as faces dos poliedros se intersectem sem restrições. Comecemos por perceber o que isto faz aos polígonos. Consideremos como exemplo o pentagrama da figura 2.

Nesta figura, temos uma sequência de cinco segmentos de recta $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ e A_5A_1, unindo os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, e A_5, por esta ordem. Segundo esta nova definição, estamos perante um polígono. Os seus lados intersectam-se noutros pontos, que não são vértices. Repa-

Figura 1.

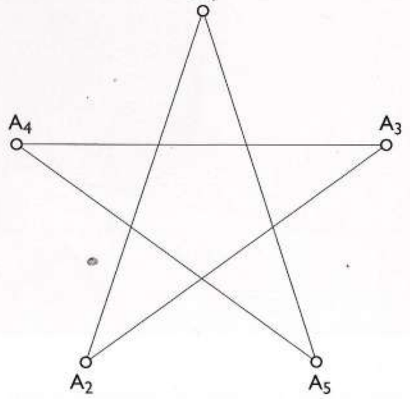


Figura 2

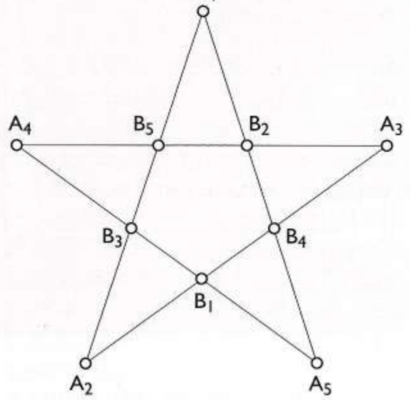


Figura 3

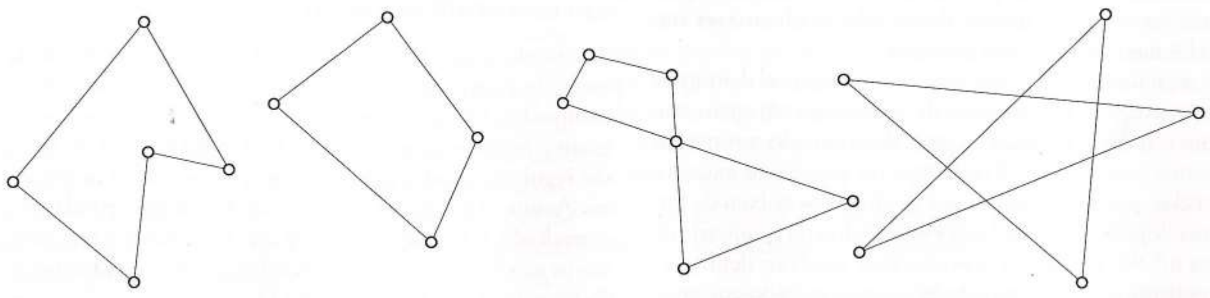


Figura 4.

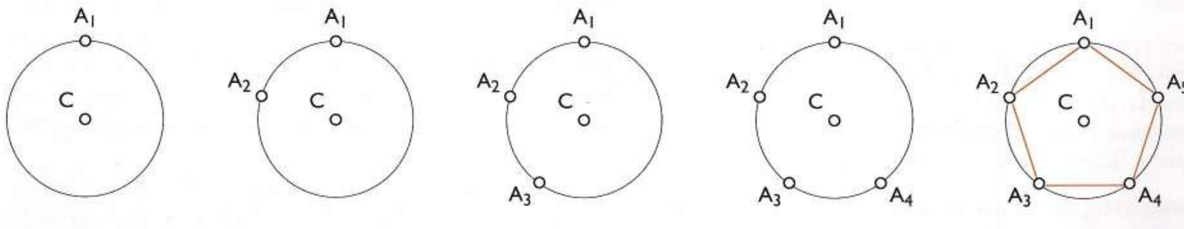


Figura 5.

remos que a figura 3 não é um polígono, se insistirmos em considerar os pontos B_1, B_2, B_3, B_4, e B_5, como vértices, nem à luz desta nova definição. Isto porque não conseguimos ordenar os segmentos que aqui estamos a considerar de forma a que eles unam todos estes dez pontos de forma consecutiva. Basta ver que a definição de polígono que estamos a adoptar obriga a que o número de lados seja igual ao número de vértices (figura 4).

Neste contexto continua a fazer sentido falar de regularidade. Mas como estamos a admitir que mais figuras sejam polígonos (por estarmos a utilizar uma definição mais geral, mais "permissiva"), será natural esperarmos encontrar mais polígonos regulares. O pentagrama que vimos acima é disto um exemplo. É o que chamamos um polígono regular estrelado. Para percebermos do que estamos a falar, reparemos que o pentágono regular se pode construir tomando um ponto fixo C e considerando rotações sucessivas de 72° (um quinto de volta) de um ponto A_1 em torno de C (figura 5).

Se fizermos o mesmo com rotações de 144°, obtemos o pentagrama. Como 144° equivale a dois quintos de volta, o que acontece é que damos duas voltas a C para chegar de novo ao ponto inicial. Em geral, podemos considerar fracções de volta da forma

$$\frac{d}{n} \cdot 360^\circ \text{ (d e n positivos e primos entre si),}$$

para obtermos polígonos regulares. O polígono obtido tem n lados e é obtido dando d voltas em torno de C. Quando $d > 1$, chamamos-lhe polígono regular estrelado (figura 6).

Numa futura nota, poderemos tentar perceber qual é a região interior de um destes polígonos e como se pode calcular a sua área, mas por ora, deixamos isso e passemos aos poliedros.

Voltando a considerar o pentagrama, podemos construir dois poliedros regulares juntando convenientemente doze pentagramas iguais. Se juntarmos cinco em cada vértice, obtemos o pequeno dodecaedro estrelado; se juntarmos três em cada vértice, obtemos o grande dodecaedro estrelado (figura 7).

Vejamos porque é que são regulares. As suas faces são todas iguais e são poliedros regulares (à luz desta definição mais abrangente). Os seus vértices são congruentes, em todos se encontram *de igual forma* — isto é, formando ângulos sólidos congruentes — um mesmo número (cinco ou três) de pentagramas iguais.

É preciso ter muito cuidado ao olhar para estas figuras: no caso da primeira, dependendo da forma como a interpretamos, podemos estar a olhar para o pequeno dodecaedro estrelado ou para outra figura, que também é um poliedro, mas já não é regular. Isto é, se em vez de considerarmos como faces os pentagramas, considerarmos apenas os triângulos isósceles que compõem as "pontas" das estrelas, estamos a olhar para um poliedro (com muito mais vértices) cujas faces já não são polígonos regulares, e cujos vértices já não são congruentes (há vértices de dois "tipos").

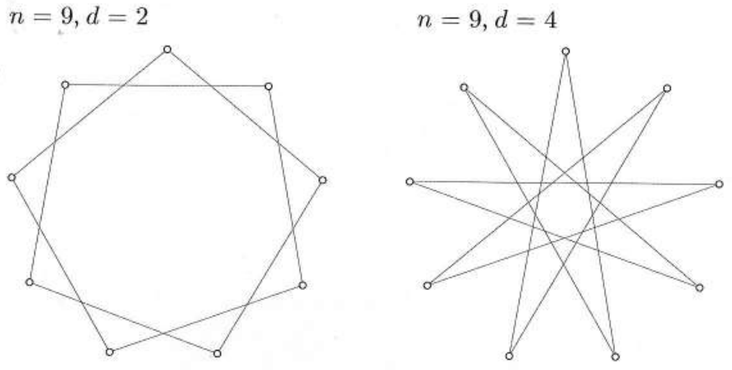


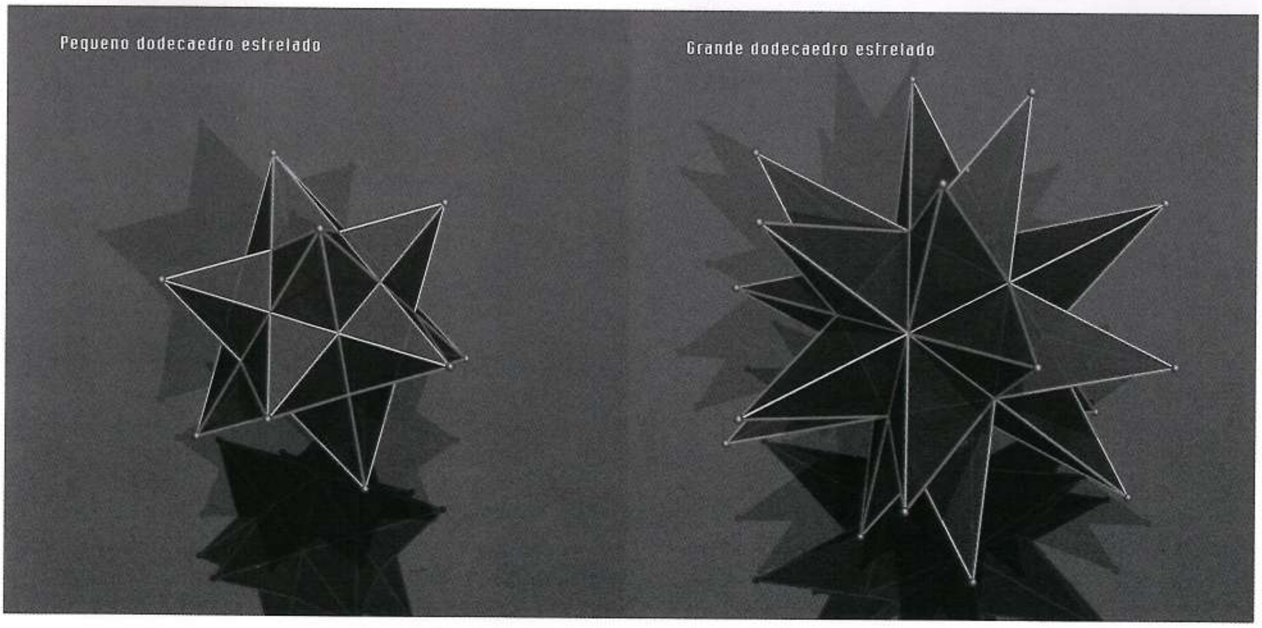
Figura 6.

Se quisermos fazer um bom exercício de visualização no espaço, podemos tentar imaginar duas maneiras (não muito diferentes) de obter este sólido. Ambas partem do dodecaedro. Para a primeira, podemos observar que um pentagrama pode ser obtido a partir de um pentágono regular se prolongarmos os seus lados (figura 8).

Ora se fizermos isto às faces do dodecaedro, os pentagramas resultantes formam um pequeno dodecaedro estrelado. A segunda é imaginar que "colamos" pirâmides pentagonais (adequadas) às faces do dodecaedro.

Uma terceira forma de o obter, bastante mais difícil de imaginar e também mais interessante, é partir do icosaedro, esquecer as suas arestas e considerar as diagonais não maximais. Isto é, considerar os segmentos de recta que unem vértices não opostos nem adjacentes.

Figura 7.



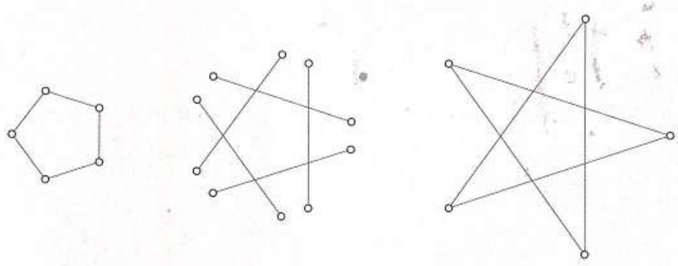


Figura 8.

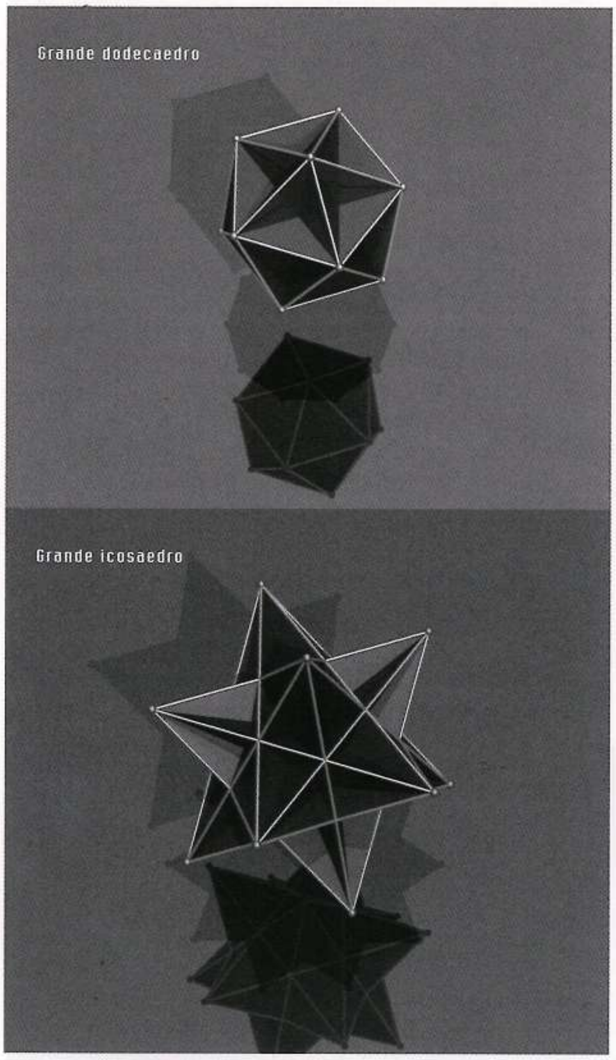


Figura 9.

Tarefa bastante mais simples é a sua construção a partir de uma planificação. Na página do GTG (que pode ser consultada a partir da página da APM, `http://www.apm.pt/`), na secção dedicada a estas notas, pode ser consultada uma planificação deste sólido, pronta para uma boa meia hora de tesoura e cola.

Podemos obter mais poliedros regulares. Se considerarmos doze pentágonos regulares iguais e "juntarmo-los" de forma a que em cada vértice se encontrem cinco, obtemos o grande dodecaedro. Se considerarmos vinte triângulos equiláteros iguais, podemos colocá-los de forma a obter o grande icosaedro (figura 9).

A definição de poliedro que considerámos permite a existência destes quatro poliedros regulares estrelados, chamados poliedros de Kepler-Poinsot, porque os dois primeiros foram descobertos em 1864 por Kepler (1571–1630), e os dois últimos em 1809 por Poinsot (1777–1859). Mais tarde, em 1813, Cauchy (1789-1857) mostrou que, aceitando estas definições, os cinco sólidos platónicos e estes quatro estrelados formam todos os poliedros regulares possíveis.

Bibliografia

[Cox73] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover, 1973.

[Fie99] J.V. Field, *Johennes Kepler*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kepler.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 1999

[OR97] J.J. O'Connor e E.F. Robertson, *Augustin Louis Cauchy*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cauchy.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 1997

[OR00] J.J. O'Connor e E.F. Robertson, *Louis Poinsot*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Poinsot.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2000

[Vel98] Eduardo Veloso, *Geometria: temas actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

[Wik08] Wikipedia, *Regular polyhedron — Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Regular_polyhedron&oldid=198207185`,
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2008.

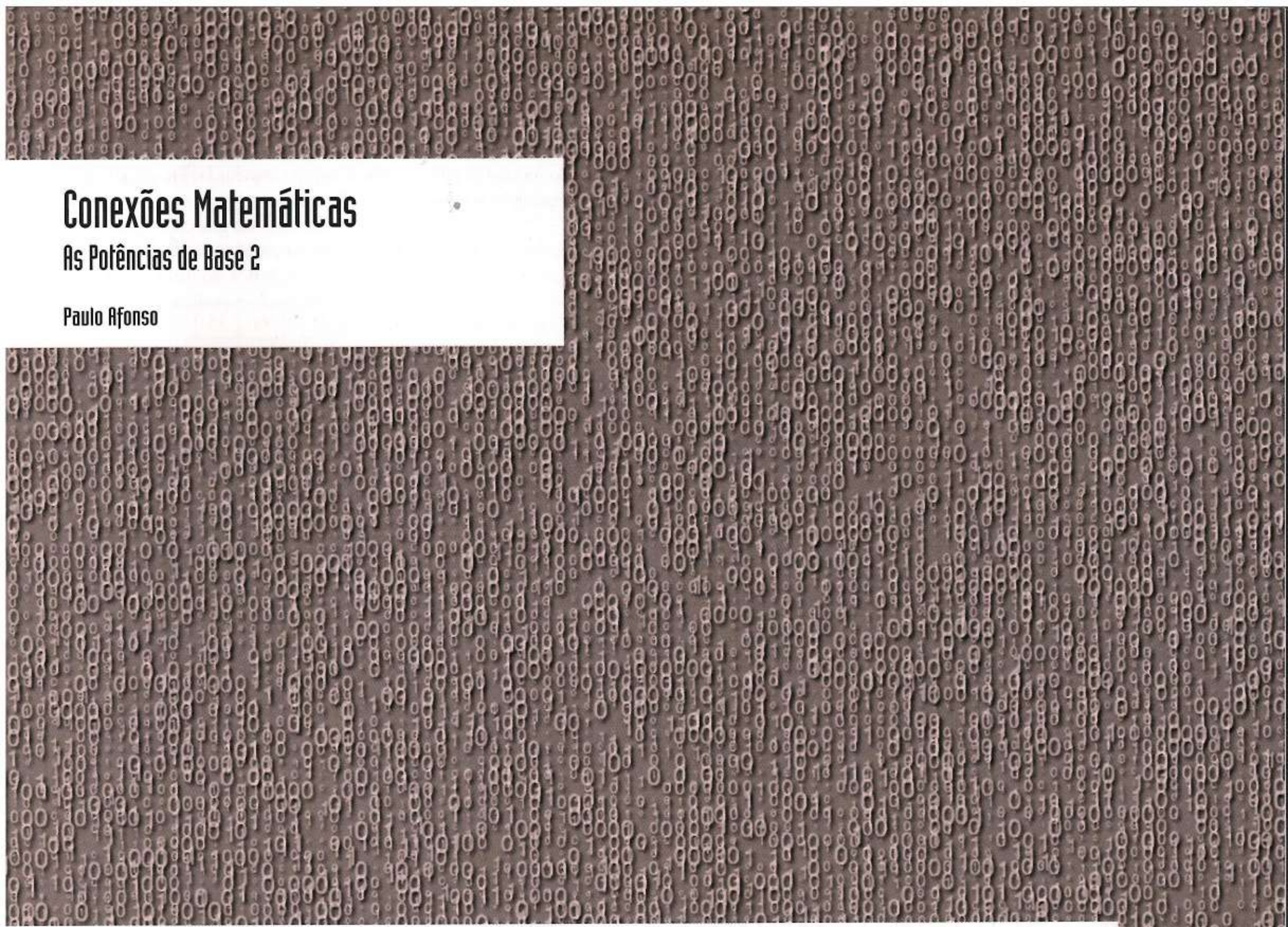
[Wik08] Wikipedia, *Kepler-Poinsot polyhedron — Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kepler-Poinsot_polyhedron&oldid=188763815`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2008.

Nota: as figuras dos quatro poliedros regulares estrelados foram obtidas na página

`http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler-Poinsot_polyhedra`,

e foram criadas com o software Great Stella, de Robert Webb (`http://www.software3d.com/Stella.html`).

Pedro Macias Marques
Grupo de Trabalho de Geometria da APM



Conexões Matemáticas

As Potências de Base 2

Paulo Afonso

O texto que se segue pretende evidenciar como o tema das potências de base dois pode ser desenvolvido num cenário de conexões matemáticas. Para tal começa-se por associar este assunto ao tema das grandezas e medidas, nomeadamente ao nível das medidas de massa, passando, depois, pela actividade lúdica de se adivinhar um determinado número secreto. Por fim relacionar-se-á este conteúdo com um algoritmo ancestral da operação multiplicação.

A — As potências de base 2 envolvidas em pesagens

"Ricardo: — Joana, imagina que só tínhamos à nossa disposição uma massa de um quilograma. Que quantidades inteiras de batatas poderíamos pesar?

Joana: — Francamente, Ricardo! Que pergunta mais sem jeito; só se poderia pesar um quilo de batatas.

Ricardo: — Tudo bem, mas imagina que te lançava o seguinte desafio: é mais vantajoso encomendar uma nova massa de um quilograma ou uma massa de dois quilogramas para pesarmos dois ou mais quilos de batatas, sabendo que o preço das massas é o mesmo?

Joana: — Oh Ricardo, até parece que não estás bom da cabeça! Isso suscita em ti alguma dúvida?! Claro que só há vantagem em adquirir a massa de dois quilogramas, porque jogando com a anterior já podes pesar um, dois ou três quilos de batatas. Se, em vez desta, adquirisses outra massa de um quilograma só poderias pesar duas quantidades inteiras de batatas: a de um ou a de dois quilos.

Ricardo: — Certo, concordo contigo. E agora, qual será a massa que deveremos encomendar para dar continuidade às pesagens inteiras de quilos de batatas? Será outra de dois quilogramas? Será uma de três quilogramas, ou será uma de quatro? Nota: cada massa continua a custar o mesmo preço, independentemente do seu peso.

Joana: — Deixa-me pensar... Parece-me que a de quatro quilogramas é a massa mais vantajosa, porque irá permitir pesagens inteiras de quilos de batatas até à quantidade de sete quilos.

Ricardo: — Excelente! Concordo contigo. Já agora, qual a massa que aconselhas adquirir-se para dar continuidade a este jogo de pesagens?

Joana: — Sem dúvida que é a de oito quilogramas!

Ricardo: — Exacto, porque juntamente com as outras massas podemos pesar desde um quilo de batatas até aos quinze quilos."

Joana: — E se elaborássemos uma tabela contendo todas as pesagens, à medida que as massas vão sendo adquiridas?

Ricardo: — Boa ideia! Depois poderemos dar continuidade a este jogo de pesagens sugerindo a próxima massa a adquirir. Tendo em conta essa nova mas, até que quantidade inteira de batatas se poderá pesar?"

Massas existentes	Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
1 kg	1 kg	1kg
1kg	1 kg	1 kg
2kg	2 kg	2 kg
	3 kg	1 kg + 2 kg
...	...	...

Tabela 1.

Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
1 kg	1 kg
2 kg	2 kg
3 kg	1 kg + 2 kg
4 kg	4 kg
5 kg	1 kg + 4 kg
6 kg	2 kg + 4 kg
7 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg
8 kg	8 kg
9 kg	1 kg + 8 kg
10 kg	2 kg + 8 kg
11 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg
12 kg	4 kg + 8 kg
13 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg
14 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg
15 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg
16 kg	16 kg
17 kg	1 kg + 16 kg
18 kg	2 kg + 16 kg
19 kg	1 kg + 2 kg + 16 kg
20 kg	4 kg + 16 kg
21 kg	1 kg + 4 kg + 16 kg
22 kg	2 kg + 4 kg + 16 kg
23 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 16 kg
24 kg	8 kg + 16 kg
25 kg	1 kg + 8 kg + 16 kg
26 kg	2 kg + 8 kg + 16 kg
27 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg + 16 kg
28 kg	4 kg + 8 kg + 16 kg
29 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
30 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
31 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg

Tabela 2. Massas existentes: 1kg, 2kg, 4kg, 8kg, 16kg.

Possível exploração em sala de aula

Face ao diálogo anterior seria interessante que os alunos começassem por recontar este mesmo diálogo com a intenção de evidenciarem compreensão acerca das pesagens e das respectivas grandezas envolvidas. Fazendo-o, de facto, com compreensão estar-se-á a preparar o terreno para que a tabela requerida possa ser facilmente construída. Eis um possível exemplo representado na Tabela 1.

Se os alunos já tiverem identificado que cada nova massa representa o dobro da massa adquirida imediatamente antes, é expectável que a seguir sugiram a aquisição da massa de dezasseis quilogramas, permitindo a realização das pesagens apresentadas na Tabela 2.

Caso as massas adquiridas ainda não tenham sido associadas ao tema das potências de base dois, poderá agora fazer-se essa conexão, evidenciando-se que *qualquer número inteiro*, neste caso até ao trinta e um, inclusive, *pode ser obtido por uma ou pela soma de várias potências de base dois*, que mais não são do que os valores das massas encomendadas.

Tirando-se partido da conclusão anterior, será interessante confrontar os alunos com o muito conhecido jogo dos cinco cartões numéricos (figura 1).

O objectivo da utilização destes cartões é desafiar os alunos a pensarem num número inteiro até ao trinta e um, inclusive, e revelar apenas a letra ou letras do cartão ou cartões onde esse número secreto se encontra. O professor apenas terá que saber que cada cartão está associado a uma potência de base dois (1, 2, 4, 8 ou 16). Para mais facilmente adivinhar o número pensado pelo aluno, sugere-se que a escrita destes cinco números ocorra sempre na mesma posição em cada cartão. A título de exemplo, se um determinado aluno disser que o seu número secreto se encontra apenas nos cartões A, D e E, facilmente se descobre que se trata do número vinte e cinco. De facto, o vinte e cinco pode ser obtido através da soma destas três potências de base dois, como se havia verificado no jogo das pesagens: 25 = 1 + 8 + 16, isto é: $25 = 2^0 + 2^3 + 2^4$. Ora, estes valores são, respectivamente, os que identificam os cartões A, D e E.

Após a exploração de vários exemplos será interessante reflectir-se acerca da conexão existente entre este jogo de cartões e o jogo das pesagens. De facto, no cartão da primeira potência de base dois, os números aí registados são todos aqueles que no jogo das pesagens necessitavam da utilização da massa de um quilograma. O mesmo se passa em relação aos restantes cartões, isto é, em relação às próximas quatro potências de base dois.

Reforçando a atenção nos números envolvidos em cada cartão, seria interessante que os alunos pudessem estabelecer novas conexões matemáticas. Assim, ao nível do cartão A — de valor 1, isto é: 2^0, os dezasseis números aí existentes são os primeiros dezasseis números ímpares. Colocando-os numa determinada disposição, verifica-se o seguinte padrão referenciado:

1 5 9 13 17 21 25 29

3 7 11 15 19 23 27 31

No que respeita ao cartão B – de valor 2, isto é: 2^1, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão anterior, os números existen-

7	15	11	29	31
25				3
5		A		27
17				23
9	19	1	21	13

19	23	26	31	27
10				30
22		B		6
7				15
3	14	2	11	18

7	21	12	30	31
20				29
13		C		23
6				15
28	14	4	5	22

31	15	9	14	29
11				26
24		D		13
30				10
12	28	8	25	27

22	27	17	18	25
20				31
23		E		29
24				21
26	28	16	30	19

Figura 1.

tes nas posições pares mantêm-se. Apenas se alteram os números existentes nas posições ímpares desta nova sequência. Colocando-os numa disposição semelhante à do cartão A, verifica-se, realmente, que a linha inferior se mantém. Já os números da linha superior aumentam todos um valor relativamente aos respectivos números dessa mesma linha do cartão A. Por isso, os valores desta linha passaram todos a ser pares, mantendo-se a outra linha com os respectivos sucessores, isto é, formada por números ímpares. Além disto, analisando os números de cada linha, encontra-se uma nova regularidade, que é o facto desses números irem aumentando de quatro em quatro:

2 6 10 14 18 22 26 30
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
3 7 11 15 19 23 27 31

Já ao nível do cartão C — de valor 4, isto é: 2^2, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão B, mantêm-se sempre os últimos dois números de cada conjunto de quatro. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A e B, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem quatro conjuntos formados por quatro números consecutivos. Além deste aspecto, o número que inicia um novo conjunto é sempre maior, em oito unidades, do que o número que inicia o conjunto anterior:

4 6   12 14   20 22   28 30
↓↗↓   ↓↗↓   ↓↗↓   ↓↗↓
5 7   13 15   21 23   29 31

Uma vez mais, a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares.

No que concerne ao cartão D — de valor 8, isto é: 2^3, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão C, mantêm-se sempre os últimos quatro números de cada conjunto de oito. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A, B e C, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem dois conjuntos formados por oito números consecutivos. Uma vez mais, a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares:

8 10 12 14   24 26 28 30
↓↗↓↗↓↗↓   ↓↗↓↗↓↗↓
9 11 13 15   25 27 29 31

Por último, ao nível do cartão E — de valor 16, isto é: 2^4, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão D, mantêm-se apenas os últimos oito números. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões anteriores, verifica-se uma nova regularidade, pois aparece um único conjunto formado por dezasseis números consecutivos. Novamente a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares:

16 18 20 22 24 26 28 30
↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓
17 19 21 23 25 27 29 31

B — As potências de base 2 envolvidas no algoritmo da multiplicação egípcia:

"Ricardo: — Joana, de facto, isto das potências de base dois é mesmo fascinante! Nunca pensei que este tema se relacionasse com o simples gesto de pesar batatas!

Joana: — Pois é, e faz-me lembrar, também, o algoritmo da multiplicação egípcia!

Ricardo: — Como assim?!

Joana: — Repara... sabemos que o produto de sete por quatro é vinte e oito, não é? E o que é esse vinte e oito? Não é mais do que o dobro do dobro de sete.

Ricardo: — E é isso dos dobros sucessivos que nos remete para as potências de base dois, não é?

Joana: — Claro. Repara na seguinte multiplicação: 15×12. Ora decompondo o 12 em $4 + 8$, fica: $15 \times (4 + 8)$. Tendo em conta a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, fica: $15 \times 4 + 15 \times 8$. Fazendo agora por partes, 15×4 não é mais do que o dobro do dobro de 15, que é igual a 60. Por sua vez, 15×8 não é mais do que o dobro do dobro do dobro de 15, que é igual a 120. Adicionando os dois valores dá 180.

Ricardo: — E no caso de ser 15×13?

Joana: — Vou responder a esta tua questão, recorrendo exclusivamente às potências da base dois.

Ricardo: — Ok, explica lá como funciona esse tal algoritmo da multiplicação egípcia!"

Possível exploração em sala de aula

O diálogo anterior pode remeter os alunos para uma resolução do tipo: $15 \times 13 = 15 \times (4 + 8 + 1)$, isto é,

$$15 \times 4 + 15 \times 8 + 15 \times 1.$$

Logo estar-se-ia a entrar no tema pretendido, pois a expressão anterior é equivalente a esta outra:

$$15 \times 2^2 + 15 \times 2^3 + 15 \times 2^0,$$

o que daria como resultado o valor 195. Para se introduzir o algoritmo da multiplicação egípcia, basta ter-se em consideração que há que se decompor o factor 13 na soma dessas três potências de base dois: $13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$.

Construindo o algoritmo, e tendo em conta que a antiga civilização egípcia não conhecia o conceito de potência, mas sim a ideia de que multiplicar um número por outro implicava o conceito do "dobro do dobro... de...", o mesmo apresentava a seguinte formalização:

15	× 13
15	1
30	2
60	4
120	8

Por baixo do factor 13, jogando-se com o conceito do "dobro do dobro... de..." consegue-se obter esse mesmo valor pela adição de alguns dos elementos dessa coluna (1 + 4 + 8), pelo que o algoritmo termina aqui. Logo, para se saber o resultado desta multiplicação só é necessário adicionar os respectivos números da coluna da esquerda associados a esses três valores (15 + 60 + 120), que são os resultados de $15 \times 1 + 15 \times 4 + 15 \times 8$, originando o valor esperado 195, isto é, o resultado de 15×13.

De facto, analisando-se agora os valores existentes por baixo do factor da direita, estamos perante a sequência das potências de base dois.

Vejamos este algoritmo aplicado a uma nova situação: 27×23:

27	× 23
27	1
54	2
108	4
216	8
432	16

Neste caso o valor 23 obtém-se pela adição dos valores 1, 2, 4 e 16. De facto, multiplicar 27 por 23 implica multiplicar 27 por (1 + 2 + 4 + 16). Logo, para se saber o resultado desta multiplicação só é necessário adicionar-se os respectivos números associados a estes quatro valores, que foram multiplicados pelo 27: (27 + 54 + 108 + 432), originando o valor 621.

Trata-se, pois, de um algoritmo conectado com o tema das potências de base dois, pois os valores a colocar por baixo do primeiro factor não são mais do que o produto de cada potência de base dois pelo outro factor.

Conclusão

Este texto mais não pretende ser do que um simples exemplo de como a Matemática pode ser desenvolvida pelos alunos num contexto desafiante de ludicidade e de interligação de conceitos, sejam estes de natureza numérica ou geométrica. Numa abordagem deste tipo, os alunos não ficarão com a ideia de que a Matemática é uma ciência estática, formada por conceitos espartilhados, sem ligação ao real ou sem conexão entre si.

A partir deste exemplo outros poderiam seguir-se-lhe, como seja a exploração do triângulo de Pascal, pois a soma dos valores numéricos de cada linha do triângulo coincide com uma das potências de base dois. Além disto, poder-se-iam explorar os múltiplos conceitos matemáticos que esse triângulo proporciona, sejam eles os números figurados, números naturais, etc.

Creio, pois, que um ensino-aprendizagem da Matemática alicerçado em múltiplas conexões matemáticas poderá aumentar o gosto dos alunos para esta disciplina. Um forte contributo para que isso ocorra mais sistematicamente pode advir do facto de se proporcionarem aos alunos ambientes de aprendizagem lúdicos, com actividades desafiantes e exequíveis tendo em conta os seus conhecimentos, e onde a resolução de problemas e as tarefas de investigação marquem, necessariamente, presença.

Bibliografia de suporte às ideias veiculadas no texto

Afonso, P. (2004). *Ensino e Aprendizagem da Matemática — em Ambiente de e-learning*. Coimbra/Castelo Branco: Alma Azul.

Afonso, P. (2006). A Magia das Conexões Matemáticas. *Educação e Matemática*, n° 90, Novembro/Dezembro, 35–38.

Afonso, P. e Gabriel, M. (2007). Investigações Matemáticas envolvendo alunos do 1° Ciclo do Ensino Básico. *LIBEC Line – Revista em Literacia e Bem-Estar da Criança*, 1, 23–30. www.libecline.pt.tp.

Balbuena, L. e Coba, M. (1992). *La Matemática Recreativa vista por los alumnos*. Granada: Proyecto Sur.

Holt, M. (1986). *Matemáticas recreativas 2*. Barcelona: Ediciones Martínez.

House, P. e Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curriculum*. Reston: National Council Of Teacher of Mathematics.

Lewis, B. (1983). *Matemáticas modernas. Aspectos recreativos*. Madrid: Alhambra.

Pareleman, Y. (1979). *Matemáticas Recreativas*. Lisboa: Litexa.

Tahan, M. (2003). *Matemática Divertida e Curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 19ª Ed.

Paulo Afonso
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Respostas reais para problemas reais

Jorge Cruz

Resolução de problemas no centro das atenções

Em termos de orientações curriculares para o ensino da matemática, vive-se, há mais de duas décadas sob o primado da Resolução de Problemas. Esta actividade, postulada como "foco da matemática escolar" (NCTM, 1980, p1), tem sucessivamente merecido relevo nos documentos posteriores como as *Normas* (NCTM, 1989) e os *Princípios e Standards* (NCTM, 2000). Esta ênfase não se circunscreve aos EUA, mas antes assume uma dimensão à escala global, da qual o livro Pehkonen (2001) nos dá abundante testemunho. Não obstante poder parecer ter decorrido tempo suficiente para implementação desta prática nas salas de aula, a verdade é que testes internacionais como o PISA, 2003 (GAVE, 2004) mostram, ao nível dos resultados, baixa *performance* dos alunos portugueses na Resolução de Problemas em particular e nas várias áreas de conteúdo matemático[1] em geral. Não é objectivo deste texto enumerar as causas de tal "demora" no surgimento de resultados. Elas são diversas e têm sido alvo de bastantes estudos, de que constituem exemplos mais recentes o estudo exaustivo (com cobertura nacional de praticamente 100% das escolas com 9° ano!) feito a propósito dos resultados dos exames de 9° ano de 2005 (GAVE, 2006a e GAVE, 2006b). O presente artigo tentará explorar apenas algumas ideias, que se supõem bastante consensuais, sobre como implementar a resolução de problemas em sala de aula.

Uma questão metodológica

Os problemas não podem ser encarados como mais um tema do programa, mas antes como uma metodologia (Leal, Veloso e Abrantes, 1994). O uso tradicional de problemas no final de uma sequência didáctica, como se fosse para provar que os conhecimentos teóricos leccionados têm aplicação em contextos reais (nos quais os problemas podem surgir) é insuficiente. Da mesma maneira, no dizer de Kunioka (2000), é insuficiente o desenho metodológico (comum em livros de texto): problema inicial, frequentemente para ser resolvido/explicado pelo professor, seguido de dois ou três problemas de aplicação a serem resolvidos pelo mesmo método e fazendo uso dos mesmos conhecimentos. Uma nova visão do ensino da resolução de problemas centra os processos de ensino no trabalho com heurísticas. O uso de problemas deixa de ser visto apenas como justificação para os conhecimentos e ganha importância por si só e então, à primeira visão, mais próxima da aplicação de conhecimentos, acrescenta-se um segundo enfoque ao nível do trabalho estratégico. Mas pensar no par conhecimento *versus* estratégia como uma dicotomia é errado pois é de bom senso que qualquer dos dois atributos, por si, é insuficiente para a resolução de problemas. Acresce que, tão-pouco os dois atributos juntos são suficientes. Se atendermos ao modelo de competência em resolução de problemas de Schoenfeld (1992), aos recursos (conhecimentos) e às heurísticas devem acrescentar-se o controlo e as crenças como peças necessárias a um bom desempenho. Para que um sujeito se torne um solucionador competente é pois preciso passar dos estádios do ensino *para* e *sobre* a resolução de problemas a um ensino através (ou *via*) resolução de problemas[2].

A escolha de problemas para a aula

Feita esta pequena reflexão de carácter metodológico, importa agora referir aspectos que se prendem com a qualidade das tarefas escolhidas e com a exploração das mesmas em contexto de sala de aula. Voltando ao modelo de Schoenfeld (1992), as duas últimas características do solucionador (controlo e crenças) requerem, além de um ensino via resolução de problemas, a selecção e exploração de actividades ricas. A formação de um sistema de crenças favorável é, provavelmente, o aspecto mais difícil de conseguir. O sistema de crenças do aluno é fortemente influenciado pelo meio, pela imagem social da matemática, e essa, precisará de mais tempo para mudar... Esta disciplina continua, grosso modo, a ser vista como a ciência de uma única resposta certa e da existência de caminho único. Estas crenças (predominantes na sociedade em geral, mas também nos alunos) precisam evoluir através de actividades bem escolhidas. Para o efeito é costume a literatura defender a utilização de problemas cuja situação ou contexto sejam reais, isto é, problemas cuja resolução possa surgir a um cidadão num dado momento da sua actividade. Se a situação for particularmente bem escolhida poder-se-á dizer que o problema é, além de real, quotidiano, ou seja, que o próprio aluno, no seu dia a dia, poderá ter necessidade de o resolver[3]. Se consultarmos os nossos manuais escolares observamos com frequência actividades classificáveis como problemas que traduzem contextos reais. Contudo, numa análise mais atenta, facilmente se constata que a maioria apenas traduz aspectos muito particulares e redutores dessa mesma realidade. Quase sempre o seu texto ou esquemas são simplificados (os dados são apenas os necessários e suficientes para resolver a situação e os esquemas são reduzidos aos detalhes matematizáveis). Os problemas surgem assim em contextos depurados, como se tivessem sido "lavados com lixívia". Ora o que importa é precisamente explorar a via mais "impura", mais "contaminada" de ruído que a situação possa trazer. O dia a dia tem, de facto, problemas de matemática para resolver, mas esses problemas surgem quer mal formulados, quer misturados com uma panóplia de dados e imagens supérfluas. A primeira fase para resolver problemas no dia a dia é a identificação (detecção) do problema[4], enquanto que em contexto escolar tal não acontece. A apresentação de problemas envolvidos em contextos tão próximos da realidade quanto possível poderá proporcionar ao aluno, por um lado, a sensação de estar a resolver um problema que, além do contexto escolar, é passível de surgir na vida real e, por outro lado, o desenvolvimento de capacidades para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. O NCTM (1991, p. 6) ao definir o conceito de Poder Matemático[5] (o qual inclui as três capacidades referidas) envolve ainda, entre outras, a aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos, meios de comunicação e noções de contexto. Estas noções de contexto, ou seja, todo o conhecimento que o solucionador detém da situação concreta de onde o problema emerge, é conhecimento mobilizável para a sua resolução e não apenas aquilo que de "matemático" se consegue extrair dos dados. Inoue (2005, p. 70) afirma que os alunos efectuam mentalmente operações aritméticas para resolverem problemas e não mobilizam o senso comum inerente às situações da vida real, o que, por vezes, leva a respostas sem sentido no contexto considerado.

A escolha de problemas abertos e/ou que permitam mais do que uma solução[6] constituirá um excelente estímulo com vista à formação de alunos matematicamente competentes.

A abordagem

"Quando os alunos falam sobre as suas resoluções tornam-se melhores resolvedores de problemas" NCTM (1999, p38). Então, dizer que o professor deve assumir um papel de mediador das aprendizagens não é palavra vã. A explicação ao nível das suposições feitas (se o problema é aberto) da escolha da estratégia e dos conhecimentos matemáticos aplicáveis, bem como da resposta adequada, constitui a maior riqueza deste processo. A possibilidade de vários caminhos permite o debate, que não deverá ter como objectivo a selecção da "melhor" solução, mas antes, mostrar possibilidade de coexistência de várias soluções. Desta maneira os alunos são forçados a desenvolver a capacidade de interpretar o pensamento dos outros e são confrontados com diferentes representações do mesmo problema, aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento flexível. (Warner, Coppola e Davis, 2002)

Na exploração de situações verdadeiramente problemáticas, ou seja, não apresentadas apenas nos seus aspectos necessários e suficientes, a tentação é de matematizar a situação, separando o acessório do essencial. Esta abordagem não é errada mas, uma vez encontrado o fim da exploração matemática, essa resposta deverá ser confrontada com a situação tal como estava proposta inicialmente, na sua diversidade contextual. Só então se poderá verificar da efectividade da resposta ao problema. Este procedimento é como uma espécie de movimento pendular: situação-matematização-situação. Nesta perspectiva, Gravenmeijer citado por Inoue (2005, p. 70) alerta para um princípio errado da aula tradicional que se poderia sintetizar na expressão: não te preocupes com a realidade, concentra-te apenas na matemática.

Com vista à desmistificação de algumas ideias que os alunos transportam e que são limitadoras da criatividade e da procura de soluções onde o senso comum possa valer, é importante trabalhar problemas que admitam mais do que uma resposta possível, fazendo ver que isto não é incoerente nem tira rigor à matemática. Nalguns problemas, por darem lugar a suposições intermédias devido ao seu grau de abertura, as respostas podem ser várias: não há uma única resposta certa mas várias admissíveis no contexto. Noutros problemas, mesmo sem suposições intermédias diferentes, dependendo da argumentação, também poderão ser admitidas respostas diferentes.

Veja-se o exemplo de um problema com grau de abertura face às suposições:

Fernando vive a dois quilómetros da escola e Joana vive a cinco quilómetros da escola. A que distância vivem um do outro?

Este problema, dependendo das suposições feitas pelo resolvedor, poderá assumir respostas compreendidas entre 3 e 7 quilómetros, inclusive. Na formulação apresentada, não será de estranhar que a turma se divida entre as duas respostas limite. De entre os dois valores arrisco um vaticínio: será o valor 7 o mais escolhido de entre os dois, pois supõe um raciocínio aditivo imediato. A existência de duas respostas deverá ser o motor para a verdadeira exploração do problema em sala de aula, a qual terá várias fases: compreensão e validação das duas possibilidades, conjectura sobre outras hipóteses, procura de outras soluções, conjectura sobre as características do conjunto solução (finito ou infinito), definição do conjunto solução possível. Esta exploração não terá necessariamente todas estas fases (os alunos podem saltar alguma e intuir o conjunto solução) ou poderá eventualmente ter outras (que dependem dos contributos dos alunos para a discussão). Uma boa forma de finalizar a exploração deste problema, para um nível de terceiro ciclo, poderá ser a construção do lugar geométrico (duas circunferências concêntricas num ponto designado por escola) o qual fornece seguramente uma imagem que vale por mil palavras. Uma exploração com *software* geométrico seria ouro sobre azul...

Analise-se outro problema, interessante, dependendo da importância contextual desejada:

A temperatura máxima prevista para hoje é de 31 graus Centígrados. Alguns países, como o Reino Unido, usam a escala Fahrenheit para medir as temperaturas. A fórmula

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

faz a conversão entre as duas escalas.

Um meu primo que vive perto de Londres há vários anos disse-me que está mais habituado a pensar nas temperaturas na escala Fahrenheit e que, por isso, quando telefona para Portugal e lhe digo a temperatura em Beja, procede mentalmente ao seguinte cálculo: multiplica por 2 e soma 30. Ele diz que o valor obtido corresponde à temperatura em Fahrenheit com um erro que não ultrapassa 1 grau. O meu primo tem razão? Explora o problema e faz um comentário fundamentado.

(Adaptado de Mason, 1999, pp. 7)

A resolução estritamente matemática deste problema sugere que o primo tem razão apenas para valores compreendidos entre 5 e 15 graus Fahrenheit inclusive. Contudo as sugestões de "explorar" e de "comentar", apontam claramente para uma harmonização entre o resultado matemático puro e a contextualização. Beja, cidade do interior sul do país, caracteriza-se por elevadas amplitudes térmicas. A estimativa não tem erro superior a 1 para valores que apenas se verificam no Inverno. Quanto às estações intermédias e ao Verão, dificilmente se registarão valores de temperaturas capazes de verificar a afirmação. Então a realidade diz-nos que a afirmação tem uma maior probabilidade de estar errada que de estar correcta. Uma extensão a uma estimativa probabilística, baseada em registos meteorológicos seria certamente um desenvolvimento enriquecedor.

Este outro problema mostra uma situação onde os dados iniciais podem parecer insuficientes:

Um condutor de camioneta expresso, habituado a fazer sempre a mesma carreira reparou que na sua última viagem se deu uma curiosidade. Ao observar o número de bilhetes vendidos verificou que saiu da estação com 1 passageiro. Recolheu em cada nova paragem tantos passageiros quantos os que já transportava no autocarro, sem que nenhum saísse. Na penúltima paragem o autocarro ficou cheio. Quantas paragens tem o percurso? Considere os locais de partida e de chegada como paragens.

(Adaptado de Santos Trigo, 1996, pp. 151)

O problema pode dar lugar a alguma surpresa inicial, quer pela sensação de insuficiência dos dados quer pela questão, a qual não tem relação aparente com os dados. Partir do que se sabe e raciocinar a partir dos dados será uma estratégia para começar a obter alguma evidência. A listagem de valores possíveis para número de passageiros (1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128, ...) deixa claro que o valor mais provável é 64 passageiros na sétima paragem. Pode-se discutir sobre a menor probabilidade das respostas restantes, embora se possa aceitar como válida a resposta 6, que corresponderia a uma lotação de 32 lugares na camioneta (este é um número plausível para autocarros de menor formato).

Finalmente um problema que admite as respostas sim ou não, dependendo da argumentação final.

O marco do correio tem uma abertura rectangular com 20 cm de comprimento e 5,5 cm de largura. A Mariana vai colocar uma carta cujas dimensões são 21 cm e 30 cm. Será que a carta entra sem ser dobrada? Explique a situação convenientemente.

A diagonal do rectângulo mede, aproximadamente, 20,7 cm, pelo que a resolução matemática do problema e uma interpretação muito "à letra" levariam à resposta negativa à pergunta. Porém, se pensarmos que curvar a carta é diferente de dobrar, na medida em que não lhe faz nenhum vinco, podemos pensar que a carta pode ser curvada uma vez e, dessa maneira, desde que a sua largura seja inferior a 25,5 cm ela poderá entrar na caixa sem ser dobrada. Com esta explicação a resposta positiva seria também admissível. Sem querer valorar as duas soluções, referir-se-á apenas, como argumento de bom senso, que só uma pessoa com pouca habilidade não conseguiria, com uma diferença que não chega a 3 mm, colocar a carta no marco sem a dobrar! Outras hipóteses poderiam ainda ser exploradas fazendo várias curvaturas na carta. Admitindo que a profundidade do marco nunca é inferior ao comprimento da carta, esta poderia sempre entrar dessa maneira "ondulada" sem qualquer vinco.

Devemos sempre pensar numa resposta real, se a situação proposta se reveste de contorno real. De outra forma não estaremos a preparar para a resolução de problemas para a vida, mas sim a criar situações escolarizadas, de laboratório, teóricas e difíceis de transpor para o mundo real. Não estaremos a formar alunos matematicamente competentes.

Notas

1 Ainda que os resultados não tenham igual expressão em todas as áreas, são "Espaço e Forma" e "Quantidade" as duas subescalas do PISA onde os resultados dos alunos portugueses são mais baixos.

2 Considerem-se os três níveis de Hatfield: Teaching for Problem Solving, Teaching about Problem Solving e Teaching via Problem Solving, citado por Contreras (1999)

3 Segundo a classificação: Problemas práticos (ou não rotineiros), problemas reais (ou da vida real) e problemas quotidianos, (Cruz, 2003).

4 Conforme o modelo IDEAL de resolução de problemas de Bransford e Stein (1993), por exemplo.

5 *Mathematical Power.*

6 Entende-se por solução a sequência de procedimentos desde a compreensão do problema até à resposta final, o que difere de resolução na medida em que esta é mais geral ao incluir todas as sequências, tentativas falhadas ou abordagens feitas, quer tenham ou não conduzido à resposta.

Referências

Bransford, J. e Stein, B. (1993): *Solución Ideal de Problemas.* Barcelona: Editorial Labor, S. A.

Contreras, L. (1999): *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva.

Cruz, J. (2003): *Alguns dados sobre recursos e heurísticas, postos em prática por alunos do ensino básico durante a resolução de problemas. (Estudo comparativo entre alunos de 7° e de 9° ano).* Huelva, Inédito.

GAVE (2004): *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003 (Primeiro Relatório Nacional).* Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

— (2006a): *Resultados do Exame de Matemática do 9° ano 2005 — 1ª chamada.* Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

— (2006b): *Reflexão dos docentes de matemática do 3° ciclo — Exame de 2005.* Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

Inoue, N. (2005): The realistic reasons behind unrealistic solutions: The role of interpretative activity in word problem solving. *Learning and Instruction.* Vol. 15, (1). 69–83.

Kunioka, T. (2000): Importance and difficulty of schema induction in analogical problem solving. *Proceedings of the 24th PME Conference.* Hiroshima. Vol 1, 167.

Leal, L.; Veloso, E. e Abrantes, P. (1994): Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? Em Fernandes, D.; Borralho, A. e Amaro, G. (Eds) (1994). *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular.* pp 239–259, Lisboa: IIE.

Mason, J. (1999): *Learning and Doing Mathematics (2ª Ed).* York: QED.

NCTM (1980): *An agenda for action.* Reston, Virgínia: NCTM

— (1989): *Curriculum and evaluation standardes for school mathematics.* Reston VA: NCTM

— (1991): *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM/IIE.

— (1999): *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

— (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston VA: NCTM.

Pehkonen, E (ed) (2001): *Problem Solving Around the World.* Turku. University of Turku.

Santos Trigo, L. M. (1996): *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

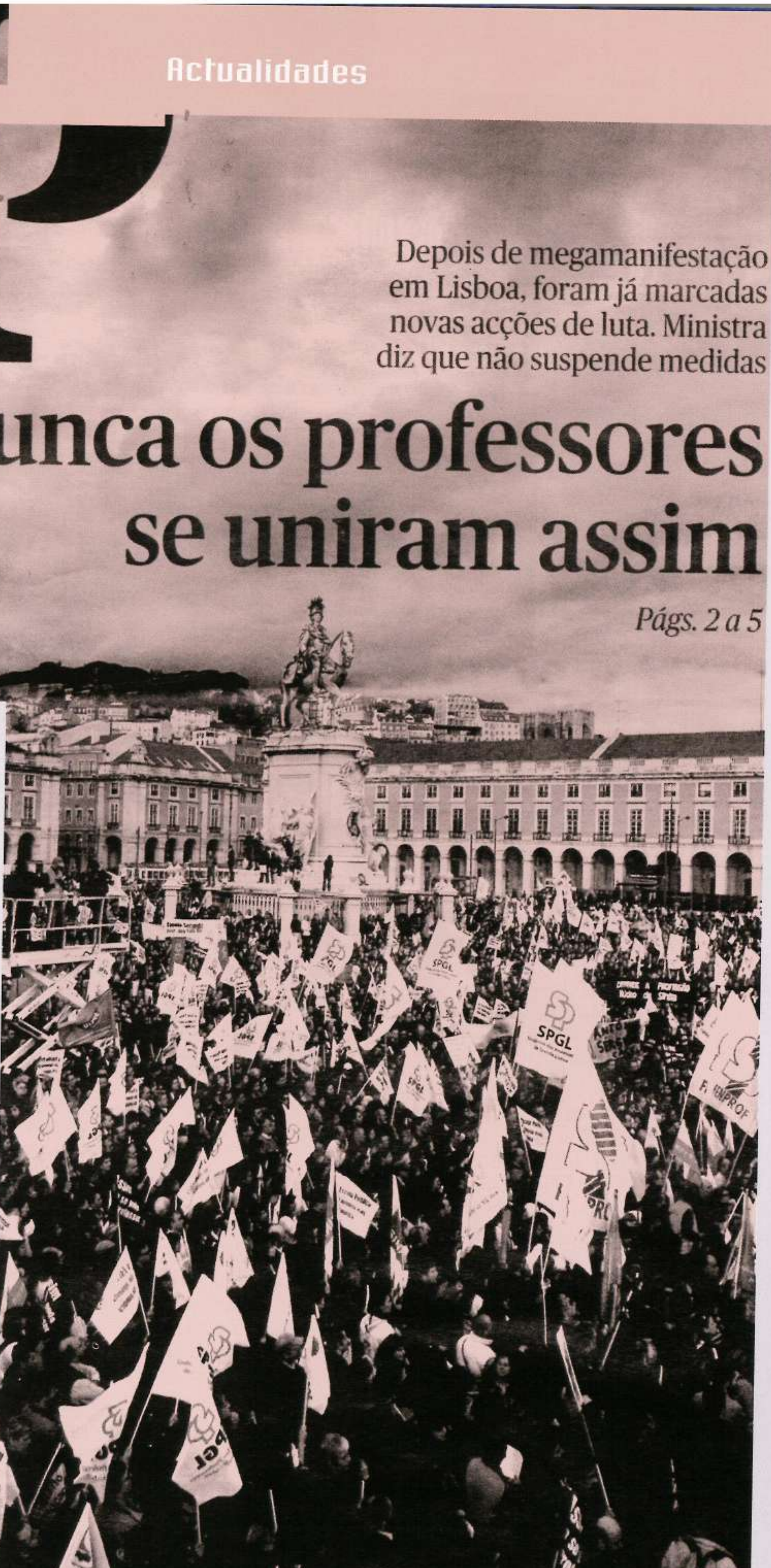
Schoenfeld, A. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Em Grows, D. (Ed) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan.

Warner, L. Coppola, J. e Davis, G. (2002): Flexible Mathematical Thought. *Proceedings of the 26th PME Conference.* Norwich. Vol 4, 354–361.

Jorge Cruz

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos Santiago Maior, Beja

In Público, 09 de Março de 2008



Algo vai mal neste reino... da educação

Este ano, tivemos oportunidade de viver dois acontecimentos ímpares nas nossas vidas: a Páscoa temporã e a união de todos os professores numa manifestação em que davam conta da sua inconformidade perante as decisões que estão a ser tomadas para o Sistema Educativo — Estamos com sorte!

Parece claro que entre todos os professores a diversidade de posições ideológicas e políticas não deve ser muito divergente de idêntica distribuição em toda a população.

O facto de se terem unido todos em torno de uma causa comum indicia que algo vai mal neste reino... da educação.

Diz-nos o bom senso que perante semelhante concerto de tão grande e tão variado número de implicados, algo deve andar desconsertado!

Ana Luísa Paiva
Helena Amaral

Quadros Interactivos (QI)

A última tecnologia a chegar à escola

Embora não sendo uma descoberta recente, este ano ouvimos falar muito mais de Quadros Interactivos (QI) nas nossas escolas. Este facto estará certamente associado ao concurso promovido pelo Ministério da Educação (ME) que atribuiu mais de um milhar destes equipamentos de norte a sul do país. Alguns destes quadros estão a ser usados por professores de Matemática na medida em que foram pedidos como material específico no âmbito dos Planos da Matemática (PAM).

Um documento de Setembro de 2007 do ME prevê que até 2010, um terço das salas de aula estejam equipadas com esta ferramenta tecnológica. Se nunca ouviu falar pergunte lá na escola... Temos quase a certeza que há por lá pelo menos um.

Como em torno de toda a nova tecnologia que chega à escola as expectativas são muitas. Depois da televisão, do vídeo, do projector, do computador ou do projector multimédia temos agora mais uma ferramenta que muitos classificam de inovadora, capaz de motivar professores e alunos e de introduzir os mais variados benefícios na sala de aula.

Mas afinal o que é um QI?

Um QI é uma superfície que, quando ligada a um computador, permite controlar o dispositivo apontador, que normalmente é controlado com o rato. Assim, cada toque no quadro equivale a um clique do rato. Cada vez que a superfície do quadro é tocada, pelo dedo do utilizador ou por uma caneta especial, as coordenadas desse ponto são transmitidas ao computador que desencadeará a acção equivalente ao clique do rato. Assim o quadro só funcionará associado a um computador e precisará também de um projector que projecte as imagens do computador na sua superfície.

Várias marcas têm desenvolvido diversas tecnologias que permitem passar as coordenadas do ponto tocado na superfície plana para o computador. Dependendo da tecnologia utilizada, para funcionarem, alguns quadros, vão ter necessidade de canetas magnéticas especiais enquanto que outros, compostos por duas telas que se tocam quando pressionamos a sua superfície, poderão ser usados com um dedo. Existem ainda modelos que podem ser instalados sobre qualquer superfície transformando um vulgar quadro branco ou mesmo uma parede num quadro interactivo.

Instalação

Uma vez que, como vimos, o QI não funciona isoladamente, uma correcta instalação do quadro e do restante equipamento indispensável ao seu funcionamento será crucial para uma efectiva utilização. Embora existam modelos mais vocacionados para serem transportados, a grande maioria dos quadros deverão ser fixos numa parede e ter afectos à sua utilização um computador e um projector de dados. É ainda conveniente que o projector esteja fixo no tecto da sala uma vez que, desta maneira: (i) a sombra do utilizador no quadro será consideravelmente menor; (ii) estando mais alto, o ponto de luz incomodará menos o utilizador quando se virar para a sala; e (iii) aumentaremos a longevidade da lâmpada do projector, uma vez que não será transportado e arrefecerá lentamente.

Tenho um quadro na minha sala e agora?

Agora, mãos à obra... A primeira coisa a fazer é explorar as suas potencialidades. Embora, como vimos, a função do quadro seja transmitir ao computador o ponto tocado, o quadro trará *software* que tirará partido deste modo de interagir com o computador. Assim, independentemente da marca ou tecnologia utilizada qualquer quadro:

- *permite o controlo dos programas do computador.* Uma vez que podemos interagir no quadro com o computador podemos utilizar qualquer tipo de *software* aí instalado. Podemos usar programas de geometria dinâmica ou ainda applets ou qualquer outra aplicação. Além de controlar o 'rato', podemos utilizar um teclado virtual que não sendo cómodo para redigir textos longos pode evitar uma deslocação ao teclado do PC se o objectivo for apenas escrever um endereço ou dar um nome a um ficheiro, por exemplo.
- *tem* software *que possibilita o registo do que vai sendo escrito ou desenhado.* Além de gravar ficheiros num formato próprio, este *software* permite exportar os registos para formatos comuns (PDF e/ou JPG) de modo a que o material produzido na aula possa ser posteriormente disponibilizado aos alunos. Este *software* pode ser instalado no computador dos professores da escola — mesmo não estando ligado ao quadro — de modo a poder ser explorado e a possibilitar a preparação — nesse formato — de planos de aula a utilizar com o QI.
- *permite escrever livremente — à mão — como se de um vulgar quadro branco se tratasse.* Será possível escolher a cor da tinta virtual a espessura do traço, etc. Algumas marcas possibilitam o reconhecimento automático da escrita passando a nossa caligrafia a letra de imprensa de forma automática;
- *possibilita a escolha de imagens de fundo que servirão de base ao que vamos escrever/desenhar.* Assim podemos, por exemplo, em vez de partir de um quadro branco escrever

sobre um quadro quadriculado ou desenhar sobre um referencial cartesiano.

- *permite trabalhar com formas e objectos possibilitando, de forma fácil, fazer rotações, ampliações e reduções.* O *software* que acompanha algumas marcas de quadros permite também reconhecer as formas desenhadas: rectas, círculos, quadrados, triângulos, etc., aperfeiçoando os desenhos do utilizador.
- *integra bibliotecas de recursos (imagens* e apllets flash*) que podemos utilizar no QI.* As várias marcas continuam a desenvolver pequenas aplicações para enriquecerem cada vez mais estas bibliotecas que são, no entanto, apenas mais um recurso que pode ser utilizado com o QI, uma vez que podemos também utilizar qualquer *applet* disponível na Internet.

Estas características podem ser aproveitadas pelo professor, de modo a rentabilizar um recurso que começa a estar disponível em muitas salas. Assim, ao possibilitar o registo e posterior envio dos materiais, liberta o aluno do processo de simples cópia, podendo o professor fazer uma gestão mais eficaz do tempo com propostas mais desafiadoras e enriquecedoras.

Podem também fomentar novas dinâmicas de sala de aula, uma vez que o aluno que controla o quadro (e o computador a ele ligado) está no centro das atenções de toda a turma e pode aproveitar a interactividade proporcionada pelo quadro para ilustrar um raciocínio ou uma estratégia diferente de abordagem de um problema, utilizando uma folha de cálculo, *software* de geometria dinâmica, um *applet* ou outra. O professor ou um aluno podem desempenhar o papel de mediadores de propostas/discussões com a toda a turma em pequenos jogos, como, por exemplo, utilizando o *applet* (`http://www.mathplayground.com/alienangles.html`) onde se pretende estimar ângulos que o computador escolhe aleatoriamente. Os alunos da turma podem ajudar o aluno que controla o quadro a decidir interactivamente a 'abertura' do ângulo, cuja amplitude é solicitada pelo programa de computador para que seja representado.

Nota final

As metas do Plano Tecnológico para a Educação apontam para a instalação, até 2010, de um quadro em cada três salas de aula das escolas básicas e secundárias, pelo que teremos cada vez mais acesso a esta tecnologia. Reconhecemos um enorme potencial nestas ferramentas tecnológicas mas, de acordo com a experiência no acompanhamento de escolas que temos vindo a fazer, nesta primeira fase de chegada do material, pensamos ser importante ter duas preocupações que permitam a sua rentabilização.

Em primeiro lugar, convém ponderar bem no modo como o quadro é instalado, uma vez que ele não funciona de forma isolada, mas necessita de um computador e de um projector e para que possa ser devidamente aproveitado terá que estar disponível e ser fácil de aceder e usar por parte do professor, bastando ligar um botão para que, em poucos segundos, esteja pronto a ser utilizado, funcionalidades que podem ser asseguradas e apoiadas pelo Coordenador TIC da escola.

Em segundo lugar e como acontece com toda a tecnologia, é fundamental proporcionar aos professores oportunidades de contacto/formação com a ferramenta, para uma apropriação progressiva das suas potencialidades, procurando integrá-la no seu plano didáctico, valorizando os aspectos de interactividade e dinamicidade que estas ferramentas possibilitam e que podem trazer um valor acrescentado às interacções e à comunicação matemática na sala de aula, uma das capacidades transversais reconhecidas no novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Como aí se refere, "o desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, é assim considerado um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula". Ora o quadro interactivo pode aqui dar uma contribuição positiva.

Mais uma vez, na nossa opinião, não será a tecnologia por si só que modificará e alterará radicalmente a escola e as formas de ensinar e aprender matemática, como outras tecnologias suas antecessoras não o foram.

No entanto, poderá dar um contributo, se bem aproveitada, como mais uma extensão da capacidade humana do professor, capaz de motivar e envolver os seus alunos em desafios e descobertas, em discussões ricas, permitindo explicitar caminhos e abordagens diferentes, procurando razões para os erros e incompreensões, facilitando a negociação de significados sobre conceitos matemáticos através do uso de múltiplas representações e permitindo registar a memória do que se passou na sala de aula e que poderá ser reinvestido posteriormente, num outro contexto, nomeadamente onde essa tecnologia esteja ausente.

João Torres
Professor de Matemática da ES Pinhal Novo
Membro da equipa do Centro de Competência CRIE — ESE de Setúbal

Fundo Antigo

A Faculdade de Ciências da Universidade do Porto levou a cabo um projecto coordenado pela Prof. Dr.ª Teresa Andresen (FCUP) a que deu o nome de "Fundo Antigo" e que consiste num *acervo de obras maioritariamente publicadas anteriormente a 1945*. Contém obras principalmente de natureza científica embora possua algumas de outra natureza. Encontram-se também várias obras pertencentes ao arquivo da Academia Politécnica.

Como se pode ler na página de apresentação, os objectivos deste projecto são :

- *Disponibilização do acervo ao público*
- *Digitalização de obras do acervo e disponibilização na net*
- *Realização de conferências, acções de formação, e exposições em torno na História e Filosofia da Ciência e do Livro Antigo*
- *Conservação do acervo*

O Fundo Antigo da FCUP está sediado na Praça Gomes Teixeira, no Porto, no edifício da Reitoria (antiga Faculdade de Ciências) e ocupa o espaço anteriormente destinado à Biblioteca Geral. No 1° piso, além dos Serviços do Fundo Antigo, há uma sala de leitura onde se encontram *obras de referência como enciclopédias, dicionários, atlas e ciências documentais assim como todas as obras posteriores a 1820 de carácter não científico e ainda obras de professores da FCUP. No 2° piso está concentrada a grande maioria da colecção de periódicos. No 3° piso encontram-se obras de natureza científica (matemática, física, química e ciências naturais) posteriores a 1820 e anteriores a 1945. A sala do 3° piso — antiga sala de leitura onde foi reintroduzido o mobiliário original — destina-se a ser espaço cultural. No 4° piso é o espaço de reservados.*

Na página de abertura do *site* do projecto, encontram-se indicações gerais como, por exemplo, a apresentação do projecto, os objectivos e a equipa. Acede-se ainda às normas de funcionamento, ao fundo bibliográfico e ao fundo iconográfico (`http://www.fc.up.pt/fa`).

Desde 2005 as obras do Fundo têm vindo a ser digitalizadas e disponibilizadas na Internet. Neste momento encontra-se digitalizado um número apreciável de obras, nas quais se incluem trabalhos de Pedro Nunes, Gaspar Nicolas, Abraão Zacuto, José Anastácio da Cunha, Gomes Teixeira, entre muitos outros.

Escolhendo a opção "Fundo Bibliográfico, acede-se a um menu onde se pode escolher entre Monografias e Periódicos, cada uma destas categorias ordenada por título, ou por ano.

Na opção "Fundo Iconográfico" está disponível uma obra com 136 gravuras de Francesco Bartolozzi e ainda uma galeria de retratos de 46 Fundadores da Academia Polythecnica e da Universidade do Porto — Docentes da FCUP.

Exemplos de duas imagens legendadas e de uma gravura do acervo.

Branca Silveira
Centro de Competência CRIE
Escola Superior de Biotecnologia — Universidade Católica do Porto

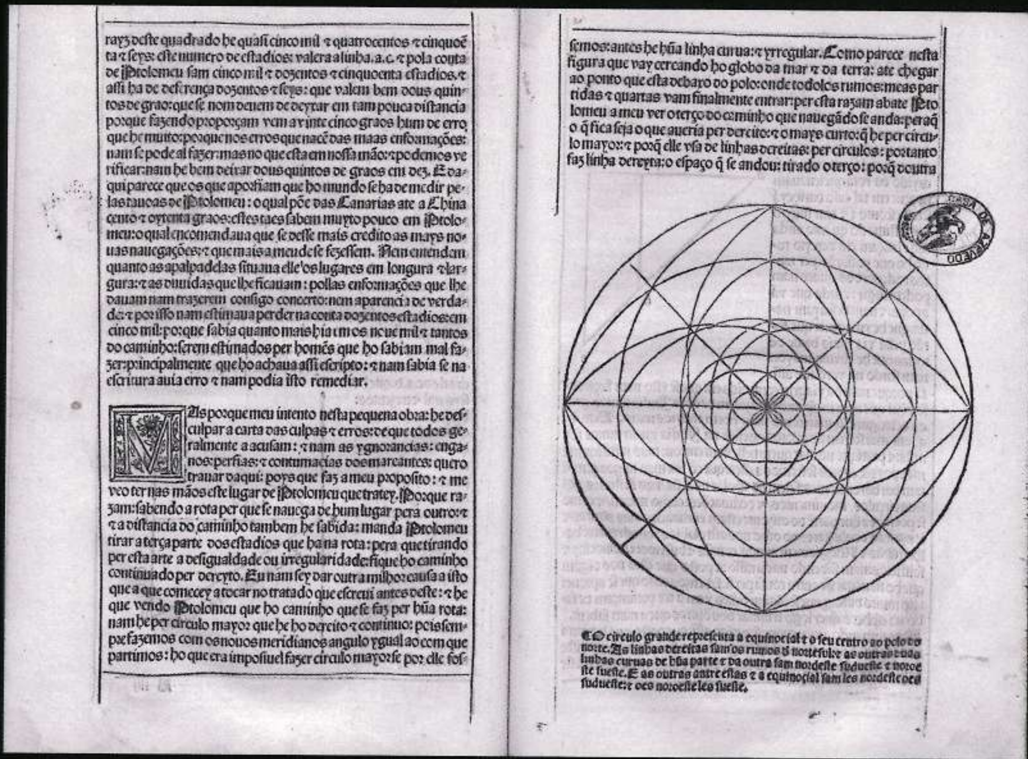


Figura 1. Tratado da sphera com a Theorica do Sol e da Lua e ho primeiro liuro da Geographia de Claudio Ptolomeo Alexa[n]drino. Tirados nouamente de latim em lingoagem pello Doutor Pero Nunez cosmographo del Rey Do[m] Ioão ho terceyro deste nome nosso Senhor. E acrece[n]tados de muitas annotações e figuras per que mays facilmente se podem entender ... Tratado da esfera (Nunes, Pedro/1537)

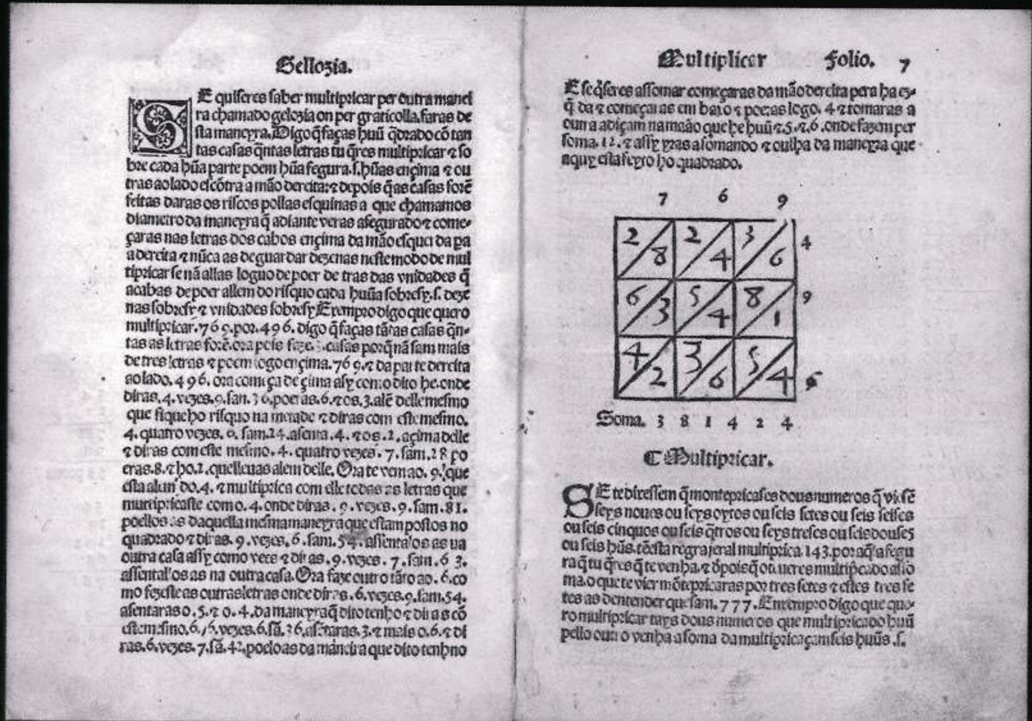
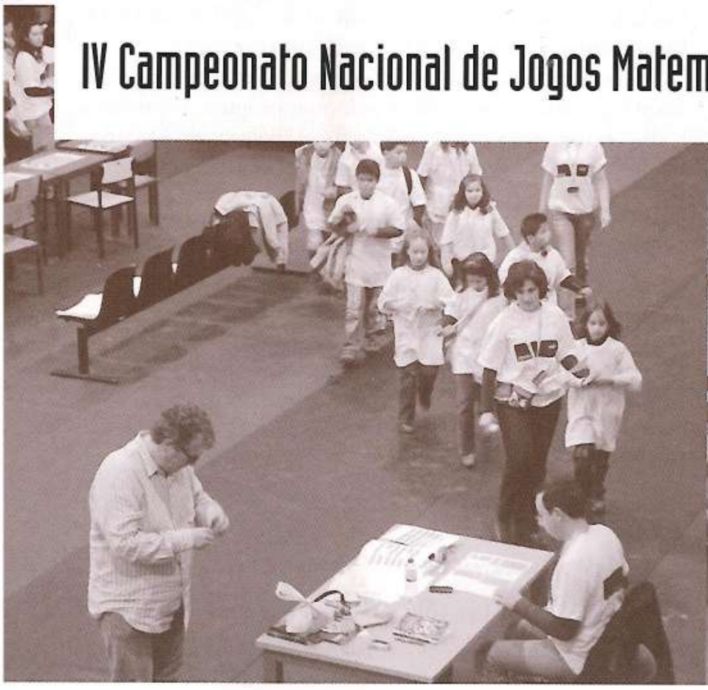


Figura 2. Tratado da pratica darismetyca ordenada per Gaspar Nycolas e empremida com previlegio del rey nosso senhor (Nicolas, Gaspar/1519)

IV Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos




Fotos: Nuno Gonçalves/UMdicas

A final da quarta edição do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) teve lugar no dia 29 de Fevereiro de 2007, no Campus de Gualtar, Universidade do Minho, em Braga. À semelhança do ano passado este campeonato decorreu num ambiente excelente a começar pela temperatura primaveril que ajudou a animar e entusiasmou os 1100 alunos e os respectivos professores acompanhantes.

Tal como nas edições anteriores, estiveram em competição seis jogos, distribuídos pelos três ciclos do ensino básico e pelo ensino secundário (e jogos diferentes por ciclo). No entanto, houve uma alteração em relação à edição anterior já que o Jogo Go (no ensino secundário) foi substituído pelo Jogo Rastros.

À medida que os participantes iam chegando recebiam crachás com um código numérico, correspondente à escola, ciclo de ensino e jogo e *t-shirts* com a identificação do jogo, para que ficassem ainda mais catitas, tendo posteriormente que aguardar junto dos Pontos de Encontro correspondentes ao seu nível de ensino, até que um monitor os viesse buscar.

Durante o período da manhã jogaram-se as eliminatórias mas, como certos jogos demoram mais um pouco... porque requerem dos jogadores um elevado grau de concentração... estas prolongaram-se pela hora do almoço. As finais decorreram após o intervalo tendo-se continuado a optar pelo apuramento dos vencedores através do mesmo processo de eliminatórias das duas edições anteriores.

A comissão organizadora, como tem sido hábito, contou uma vez mais com o apoio precioso de um grande número de monitores, alunos da Universidade do Minho, e dos nossos colegas do Núcleo de Viseu e de Aveiro, como júris: Ana Fraga Mota, Cláudia Pinto, Fernanda Graça, Graça Gonçalves, Isabel Cortez, Isabel Duarte, João Cavaleiro, Luís Carmelo, Margarida Abreu, Paula Sousa e Ricardo Poças.

Ao longo do dia, decorreram actividades paralelamente ao campeonato organizadas pelos departamentos de Matemática, Física, Química, Ciências da Terra, Matemática para a Ciência e Tecnologia, pelo Instituto de Estudos da Criança e pelos Serviços de Acção Social da Universidade do Minho, tais como: exposições, palestras, experiências, escalada, ténis de mesa, futsal, *beachvolley*, e um espectáculo de aeromodelismo.

Participantes

No dia da final participaram 270 escolas do Ensino Básico e Secundário de todo o país, num total de 1100 alunos com a seguinte distribuição:

- Pontos e Quadrados: 1° ciclo = 67
- Semáforo: 1° e 2° ciclos = 164 (65 + 99)
- Ouri: 1°, 2° e 3° ciclos = 296 (57 + 97 + 142)
- Hex: 2° e 3° ciclos e secundário = 299 (91 + 132 + 76)
- Amazonas: 3° ciclo e secundário = 194 (120 + 74)
- Rastros: secundário = 62

Em termos de números de participantes nas finais nacionais, há que registar que pela primeira vez participaram cerca de 1100 alunos, tendo-se verificado um aumento de cerca de 30% da terceira para a quarta edição.

Entrega de Prémios

Estiveram presentes na cerimónia de entrega de prémios a Dra Irene Montenegro, Pró-reitora da Universidade do Minho, a Dra. Ana Noronha, Directora Executiva da agência Ciência Viva, a Dra Graciete Dias, Presidente da Escola de

Ciências, além de Jorge Nuno Silva e Paula Mendes Martins, da comissão organizadora.

Os três primeiros classificados de cada jogo receberam computadores portáteis, leitores de MP3 e máquinas fotográficas digitais respectivamente. Quem estiver interessado em saber mais, em particular sobre resultados do 4.° campeonato, pode consultar as páginas em

`http://w3.math.uminho.pt/~cnjm2008/index.html.`

Ou então pode consultar o *site* oficial dos CNJM que inclui fotos relativos à final 2008 (`http://ludicum.org`).

Terminada mais uma edição fica o desejo que a próxima edição seja senão melhor pelo menos igual. Parabéns a todos, em especial à organização local, colegas do Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

M.ª Teresa Santos
Comissão Organizadora do CNJM4

Premiados

P & Q 1° ciclo	1° Gonçalo Ribeiro — *Colégio do Sagrado Coração de Maria, Lisboa* 2° Miguel Sousa — *EB1 de Salgueiros, Sousa* 3° Digo Mateus — *EB1 de Solum, Coimbra*
Semáforo 1° ciclo	1° Maria Cordeiro — *Colégio do Sagrado Coração de Maria, Lisboa* 2° M.ª Francisca Assunção — *Colégio Nossa Senhora de Lourdes, Porto* 3° João Miguel Caridade, *2° Jardim — Escola João de Deus, Coimbra*
Ouri 1° ciclo	1° Luana Dionísio, *EB1,2 Zambujal — Santana* 2° Ema Ferreira — *Colégio do Sagrado Coração de Maria, Lisboa* 3° Tiago Verde, *Colégio Cesário Verde, Lisboa*
Semáforo 2° ciclo	1° Vítor Bruno Figueiredo — *EB2,3 Gonçalo Nunes, Barcelos* 2° Matilde Neves, *EB2 —3 Lamaçães, Braga* 3° Beatriz Bento, *Esc. Salesiana de Manique — Alcabideche*
Ouri 2° ciclo	1° Ana Rita Barbosa —*Ext. das Neves, Mujães, Viana do Castelo* 2° Diogo Oliveira — *EB2,3 "A Ribeirinha", Macieira da Maia* 3° Luís Silva — *Colégio Ellen Key, Porto*
Hex 2° ciclo	1° Haroun Tlengari — *EB2,3 St.ª Clara, Évora* 2° Leonardo Oliveira — *EB2,3 Aires Barbosa, Aveiro* 3° Nuno Miguel Seabra — *EBI/ JI da Barranha, Porto*
Ouri 3° ciclo	1° Jonatas Rodrigues — *Colégio Quiaios, Figueira da Foz* 2° Bernardo Brito — *EB2,3 Dr. José Neves Jr., Faro* 3° Jorge Miranda — *Ext. das Neves, Mujães, Viana do Castelo*
Hex 3° ciclo	1° Luís Maduro — *EB2,3 Eugénio de Castro, Coimbra* 2° João Gouveia — *EB2,3 Penacova, Penacova* 3° Gonçalo Nunes — *Colégio do Vale, Marisol*
Amanzonas 3° ciclo	1° Rui Miguel Machado — *ES/3 de Tondela, Tondela* 2° Miguel Nunes — *EB2,3 St.ª Clara, Évora* 3° João Miguel Monge — *EB2,3 Moimenta da Beira, M. da Beira*
Hex Secundário	1° Miguel Silva — *ES Dr. Manuel Candeias Gonçalves, Odemira* 2° Fábio Costa — *ES/3 Dr. Bernardino Machado, Figueira da Foz* 3° Marina Jorge — *Colégio Dr. Luís Pereira da Costa, Monte Redondo*
Amazonas Secundário	1° Rui Miguel Silva — *ES de Barcelos, Barcelos* 2° Tiago Pereira — *Centro de Estudos de Fátima, Fátima* 3° Sara Ramos — *ES/3 de Oliveira do Douro, Oliveira do Douro, VNG*
Rastros Secundário	1° Rui Gonçalo Sousa — *ES/3 Montejunto, Cadaval* 2° João Filipe Peixoto — *ES de Leal da Câmara, Rio de Mouro* 3° António Manuel Pacheco — *ES de S. Lourenço, Portalegre*

Número temático de 2008

Em 2008, o número temático da *Educação e Matemática*, edição n° 100, será dedicado ao tema "Raciocinar em Matemática". Um dos objectivos é, precisamente clarificar esta designação: afinal do que falamos quando falamos em raciocínio matemático? O que é incluído nesta designação, nas provas de avaliação externa? E no contexto dos programas reajustados do ensino básico? Olhar, por um lado, para os diversos raciocínios associados aos conteúdos matemáticos e, por outro, olhar para os raciocínios que os alunos expressam quando, por exemplo, resolvem um problema, são outros aspectos que pretendemos analisar nesta revista.

Todos os colegas são convidados a enviar contributos sobre o tema. O número será o último do ano, ou seja, o de Novembro/Dezembro, pelo que todas as propostas de contribuição (artigo, relato de sala de aula, pontos de vista, ...) deverão ser enviadas até ao final do mês de Agosto.

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2008

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeito	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	50,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	70,70 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	65,50 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	86,20 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2008

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		11,50 €
	Estrangeiro		14,70 €
Instituições	Portugal	38,00 €	22,30 €
	Estrangeiro		26,70 €

índice

Editorial

Artigos

Secções