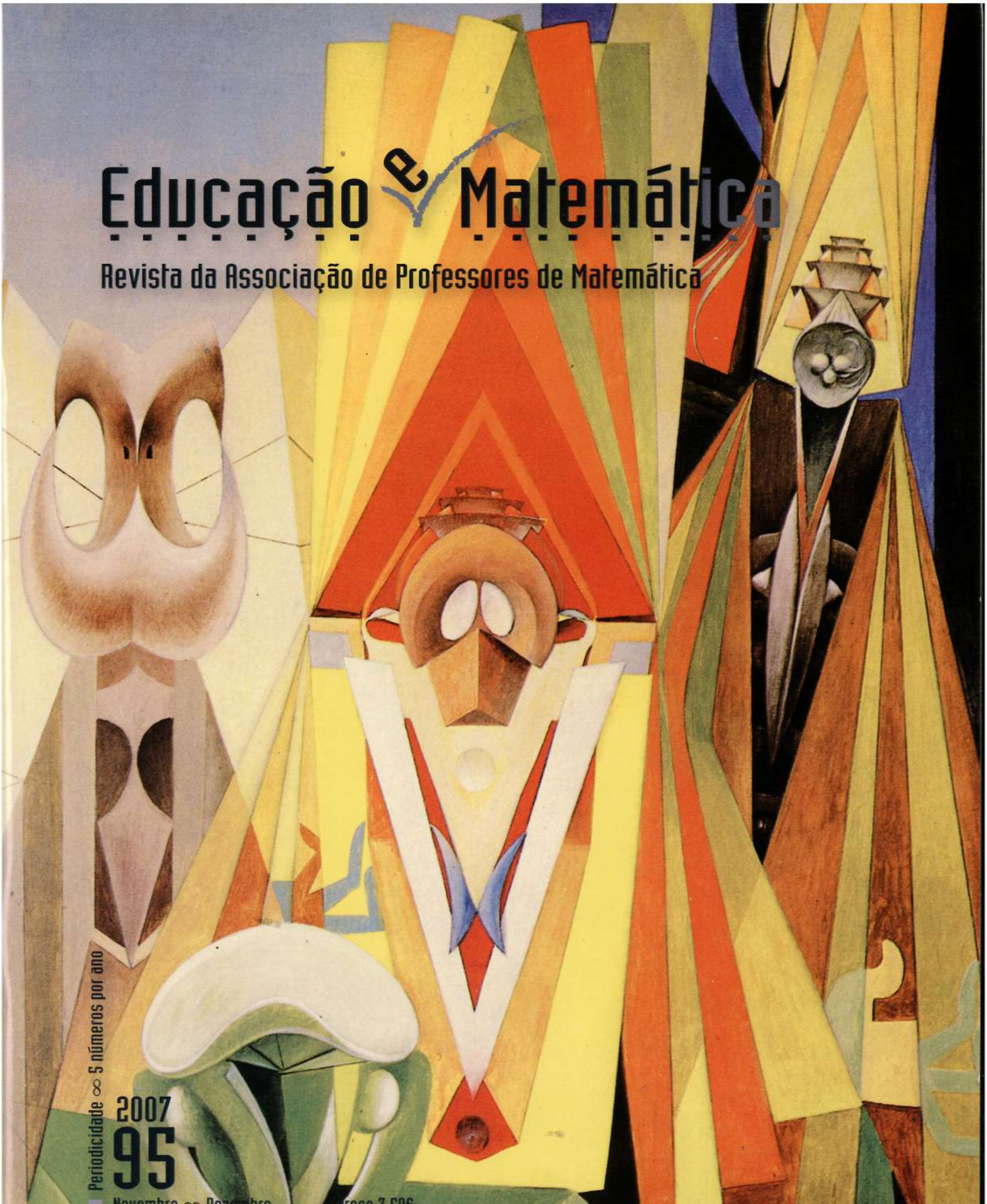
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2007

95

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7.50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
João Torres
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Dezembro 2007
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051

Porte Pago

Saíram da redacção

Lina Brunheira e Maria José Bóia deixaram de integrar a redacção da revista *Educação e Matemática*. Com estilos diferentes, estas colegas muito contribuíram para a qualidade da revista, dedicando-lhe o seu trabalho durante vários anos. A ambas queremos deixar o nosso grande obrigada.

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado ao tema *Geometrias*. O nome de Franco de Oliveira para editor convidado surgiu com naturalidade, não só por ser colaborador permanente da EM, mas sobretudo porque sabíamos poder contar com o seu conhecimento e interesse pelo tema, e com a sua experiência e qualidades enquanto matemático e enquanto professor — que António Fernandes tão bem descreve no artigo *Augusto Franco de Oliveira: A primeira última lição de um Meste*, na revista nº 93 (p. 16–18). Expressamos-lhe aqui o nosso agradecimento por ter aceite o convite e pela forma como ajudou a construir esta revista.

Sobre a capa

Em 1936, sob a influência de Man Ray realizou-se nas New Burlington Galleries de Londres, a International Surrealist Exhibition. Man Ray deixou-se fascinar pela beleza plástica dos objectos matemáticos já anteriormente notada por André Breton, outro surrealista importante.

Nos laboratórios de matemática de todo o mundo, é possível observar lado a lado objectos construídos de acordo com princípios geométricos euclidianos e não euclidianos de aparência igualmente mítica para o homem comum mas que, apesar de tudo se relacionam de modo equívoco e fascinante no espaço como nós geralmente o concebemos.

André Breton—Crisis of the object, in Cahiers d'Art

Max Ernst, que fez a capa do catálogo da exposição, sofreu igualmente forte influência das ideias de Breton e Man Ray, produzido diversas pinturas onde as figuras matemáticas associadas à geometria não euclidiana marcam presença. Na capa deste número reproduz-se uma dessas obras, trata-se de *O festim dos deuses* de 1948.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Filomena Leite Pinto, Helena Rodrigues, João Pedro Xavier, José Santos dos Santos, Manuela Ribeiro, Marisa Ferreira, Paulo Almeida, Pedro Miguel de Oliveira, Pedro Pimenta.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Regresso ao futuro da Geometria

Augusto J. Franco de Oliveira

Para além da bela história da Geometria ao longo dos séculos, de ser reconhecida com fonte de problemas e geradora de desenvolvimentos em diversos ramos da matemática, e do seu real valor formativo, é sabido e estabelecido que o «pensamento geométrico» não se reduz à utilização de imagens e diagramas mentais. É, provadamente, também um instrumento de descoberta, compreensão e até de demonstração. Pode-se perguntar, portanto, por que razão é necessário regressar tão frequentemente ao assunto das geometrias nos diferentes graus de ensino, do básico ao superior.

A questão é antiga. No capítulo O *Futuro da Matemática* do livro *Science et Méthode* (Flammarion, 1908), comentava eloquentemente Henri Poincaré:

"Pareceria que a geometria não pode conter nada que não esteja contido na álgebra ou na análise, e que os factos geométricos não são outros que factos da álgebra ou análise expressos noutra linguagem. Poderia supor-se, então (...) que não ficaria nada pertinente para dizer acerca da geometria. Mas isto implicaria o falhanço do reconhecimento da grande importância de uma linguagem bem formada, ou da compreensão do que às próprias coisas é acrescentado pelo método de expressão e, consequentemente de agregação dessas coisas.

Para começar, as considerações geométricas levam-nos a colocar novos problemas. Estes são certamente, se quiserdes, problemas analíticos, mas são problemas de que nunca nos lembraríamos no seio da análise. A análise, todavia, tira deles proveito, como aproveita daqueles que é obrigada a resolver para satisfazer os requisitos da física.

Uma grande vantagem da geometria reside precisamente no facto de os sentidos poderem vir em auxílio do intelecto, e ajudar a determinar o caminho a seguir, e muitas mentes preferem reduzir os problemas da análise à forma geométrica."

A linguagem da geometria, fonte de novos problemas, os sentidos em auxílio do intelecto, ... Se Poincaré sente necessidade de dizê-lo há cem anos atrás, nós precisamos recordá-lo, se outras razões não houvesse, porque anda por vezes esquecido, especialmente por aqueles que, atingida a maioridade intelectual e os pedestais do poder académico ou político, nunca souberam ou esqueceram o papel positivo que a geometria podia ter tido ou teve na sua formação, respectivamente, ou ainda aqueles que tomam a aparência pela realidade referidas na primeira frase de Poincaré citada acima.

E aqui marcamos presença, com um número especial dedicado às *Geometrias*, que não necessita de mais justificação.

Abrimos com um artigo dedicado ao ensino e aprendizagem da geometria, de Paulo Almeida, dos primeiros passos de exploração do espaço circundante de uma criança ao método axiomático como instrumento de economia de pensamento de esforço de transmissão.

Eduardo Veloso presenteia-nos com um fresco na melhor tradição renascentista, literalmente, aproveitando bem a oportunidade para falar de uma geometria que muitos desejariam conhecer melhor (incluindo o autor destas linhas) mas poucos se aventuram — a Geometria Projectiva. Mas é bom não esquecer outra lição implícita no artigo do Prof. Veloso: é que, na geometria dos nossos antepassados como na dos nossos contemporâneos, nem tudo é divertimento, ainda que seja susceptível de nos dar um grande prazer.

O que têm de comum um baralho de cartas e um programa de computador? Pelo menos três coisas, digo eu e dirão os leitores depois de ler os artigos do Pedro Pimenta e da Marisa Ferreira: podem ser utilizados no ensino da geometria, têm algo de lúdico e são aparentemente fáceis de manipular. A geometria dinâmica, como é de esperar, permite dar à geometria uma dinâmica que se contrapõe à (mais real do que aparente) concepção estática ou contemplativa da geometria de Euclides. Mas quando o cérebro está a magicar num problema da tal geometria *estática*, está certamente num estado bem dinâmico. Quem ainda tiver dúvidas e preferir sempre o clássico pode entreter-se a manipular as figuras geométricas dos *Elementos* na Internet. Acresce que a apresentação de Marisa Ferreira deixa alguns desafios teóricos (do tipo "tal construção ou teorema pode justificar-se com tais princípios", entre outros), matéria para aquecer as têmporas a qualquer incauto.

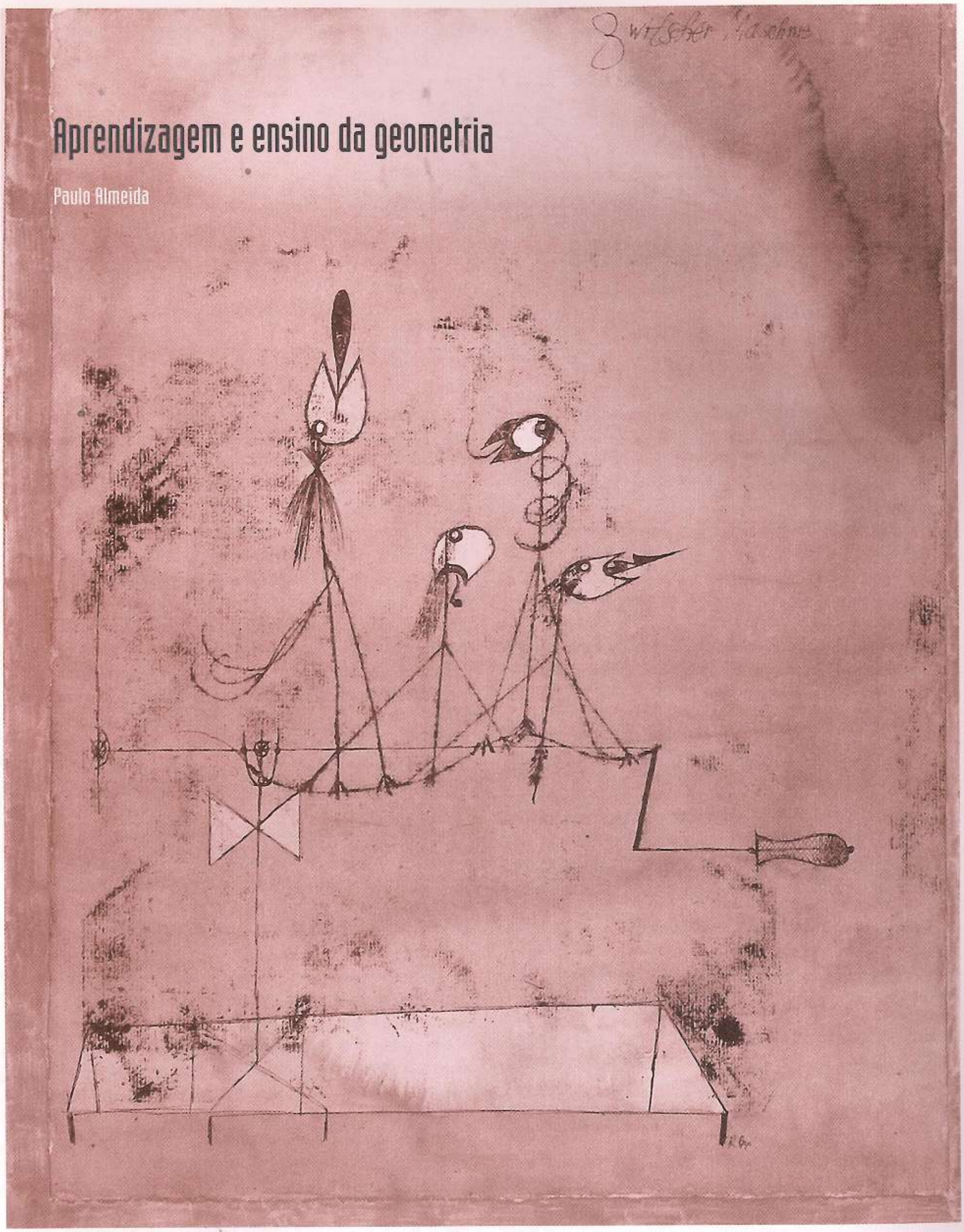
Por falar em contemplação *vs.* actividade mental ou de exploração, temos os artigos da Manuela Ribeiro e do Paulo Dias. Espantoso como há tanta coisa interessante que se pode dizer acerca de objectos e figuras que habitam no nosso dia-a-dia. E temos as secções habituais desta revista, sensíveis ao enfoque geométrico pretendido.

Exceptuando as linhas que acabo de compor, editar este número foi especialmente fácil, pela rapidez e qualidade das respostas aos pedidos de colaboração solicitados. E foi especialmente gratificante pelo ambiente que se respira e vive nesta instituição dedicada à Educação e Matemática. Obrigado a todos.

Augusto J. Franco de Oliveira

Aprendizagem e ensino da geometria

Paulo Almeida



O espaço da criança e do adulto

A base experimental

Deixemos cair uma gota de tinta num copo com água e olhemos atentamente através do vidro transparente do copo: o complexo espectáculo a que assistiremos tem como protagonista principal a geometria. A aprendizagem da geometria começa pela assistência assídua a este tipo de espectáculo, no qual o espectador, mais tarde ou mais cedo, acabará por envolver-se, participando, ora experimentando ora interpretando à sua maneira. O psiquiatra infantil João dos Santos (1913–87) considerava que "a livre experiência está na base de toda a *actividade simbólica* ou *linguagem*"; essa base experimental é condição *sine qua non* para aprender geometria.

Ao desenhar, pintar, modelar, cantar, "fazer de conta", a criança "lê" à sua maneira tomando opções afectivamente e

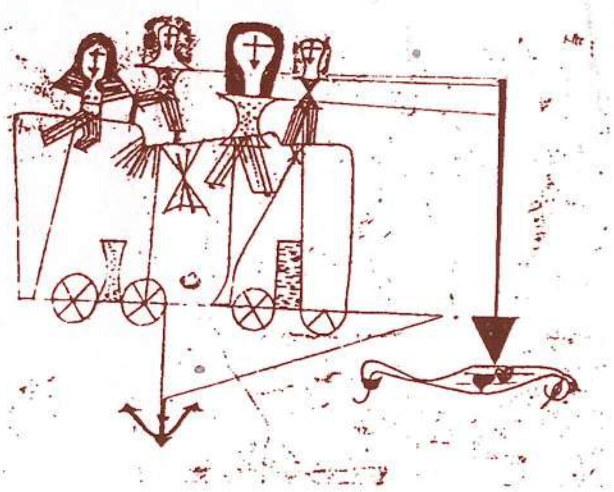


Figura 1. Um desenho de Klee e de uma criança.

compondo para si o seu "espaço de segurança", na terminologia de João dos Santos; o espaço de segurança é ressentido como um porto de abrigo confortável. Trata-se de uma teia de relações onde certas coisas se transmutam em objectos do seu afecto, permitindo à criança percebê-los, sobretudo e primeiro pelo tacto e só depois pela vista. Essa teia é o seu primeiro espaço, esses objectos as suas primeiras figuras e o seu agir e sentir — com o corpo todo — as suas primeiras formas de pensamento geométrico.

Quantas formas atraentes para manipular, ver, ouvir, entender, numa concha, num ritmo musical, num remoinho de fumo, numa corrente de água, num monte de areia, numa flor, numa lenga-lenga, na espuma, no saltitar de uma bola, ou no voo de um pássaro!

Que desejo não ressentimos em criança, de fixar muitas dessas formas, particularmente interessantes por uma razão ou outra, para melhor as entender! E como era feita a nossa "leitura"? Alguns pintores, como Klee (1879–1940) ou Picasso (1881–1973), que assim se interrogaram, quiseram mesmo em dado momento "pintar como quando se era criança".

Ao recorrer ao "espaço" como lugar para entender as coisas do nosso interesse é natural que ele difira consoante os objectos predominantes a estudar e alterando-se os nossos interesses altera-se em geral a nossa concepção de espaço entendido este como o quadro que torna inteligível uma dada teia de relações. Isto vale quer do ponto de vista psicológico individual — da criança ao adulto — quer do ponto de vista do fluir histórico.

Breve história do espaço

O conceito de espaço varia, na criança, da forma "espaço de segurança" à aceitação da euclidianidade — cerca dos 9 anos — ou seja à integração das ideias de pertença, de ordenação, de isometria entre figuras, de continuidade do movimento, e de paralelismo.

Em qualquer dessas etapas trata-se sobretudo de um ponto de vista "operacional" ou seja a criança apreende certas regras de comportamento num espaço sem que haja consciência de uma existência própria desse espaço até que se questiona um dia sobre a natureza do palco em que se vê agir.

A análise histórica do conceito de espaço é muito eloquente mostrando como foi variável e pouco unânime. Faremos uma breve alusão ao assunto respigando uma ou outra opinião significativa.

Antes de mais, a ideia de "lugar" precedeu qualquer ideia de espaço; quer para Aristóteles (384–322 a.C.) quer para o próprio Euclides (c. 330–c. 275 a.C.) o "lugar" das coisas ou das figuras é o bastante para fundamentar, no caso do primeiro, uma teoria do movimento — cada coisa teria um "lugar natural" para onde tenderia a dirigir-se — e no caso do segundo uma grande ferramenta da física-matemática — aplicável ao estudo das figuras que não mudam ao mudar o seu "lugar".

A ideia de tempo é certamente posterior à de espaço como atestam certos vestígios linguísticos onde o tempo se subordina ao espaço: dizemos "um tempo curto", "um espaço de tempo", "de aqui em diante".

Ao explicar o movimento rectilíneo da queda dos corpos terrestres como resultado da existência de um "lugar natural" comum fica claro que para Aristóteles há lugares privilegiados e direcções privilegiadas ou seja esse conjunto de "lugares" a que poderíamos chamar, abusivamente é certo, o "espaço de Aristóteles" não seria homogéneo nem isotrópico. Contendo-se o universo numa esfera, segundo aquele filósofo, todos os lugares aí se conteriam e aquele "espaço" seria fatalmente finito.

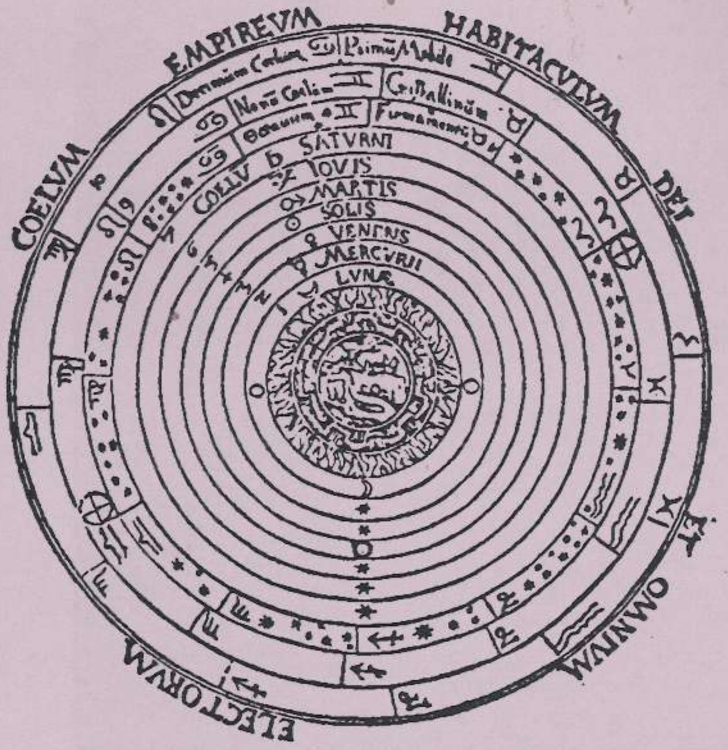


Figura 2. O mundo finito de Aristóteles.

Figura 3. A ruptura com o mundo finito numa imagem renascentista.

A ideia de um "lugar dos lugares", de raiz tipicamente hebraica, confunde-se com o próprio "Deus" como revelam inúmeros textos religiosos: "Deus é o lugar de todas as coisas", "Deus é o espaço de si próprio"; a própria língua hebraica clássica conota numa só palavra — *or* — a ideia de luz, espaço e Deus o que dá um cunho particular a expressões como "luz de Deus", ou, na boca de Deus: "Eu sou a luz". O espaço seria nesta linha de ideias de raiz religiosa um atributo de Deus, se não o próprio Deus.

O pensamento cristão medieval e renascentista vai atribuir diferentes propriedades ao espaço procurando conciliar a fé com a razão e a experiência, conduzindo pouco a pouco a uma concepção que virá a ser partilhada ainda hoje pela maioria das pessoas, embora ignorando o mais das vezes a sua origem religiosa. A título de exemplo mencionemos alguns argumentos do tipo dos invocados por pensadores cristãos: "o espaço é infinito porque uma causa infinita tem um efeito infinito", "o espaço é homogéneo e isotrópico porque na sua infinita justiça Deus não saberia privilegiar nem lugares nem direcções"; a homogeneidade e a infinitude é então expressa poeticamente: "o mundo não tem centro nem circunferência".

Sobre outros atributos do espaço como o seu carácter limitado ou ilimitado — a não confundir com finito e infinito — ou se é contínuo ou descontínuo, se é real ou imaginário ou qual a sua extensão ou dimensão, tão pouco se pode dizer que tenha havido unanimidade; sendo finita a dimensão não seria isso uma limitação divina? e porque não conciliar "uma extensão a um tempo infinita e nula — como Deus"? À tridimensionalidade, definitivamente aceite no século XVII, não é também alheia a argumentação religiosa. A mecânica newtoniana acabaria por consolidar uma concepção de espaço em voga praticamente até ao aparecimento da teoria da relatividade: um atributo considerado essencial é o carácter absoluto do espaço, ou seja a sua existência independente dos corpos, um espaço-receptáculo, portanto, mas mais do que isso pois segundo Newton (1642–1727): "o espaço é o *sensorium* — o sistema nervoso — de Deus". Sem corpos o que sobraria seria o espaço; não deixa por isso de ser curiosa a opinião do inventor da máquina para fabricar o vazio ou seja da máquina pneumática, conhecida na época por "máquina filosófica"; segundo aquele contemporâneo de Newton: "o espaço vazio não é senão o próprio Deus". O espaço absoluto de Newton é um espaço coordenatizável em que cada ponto fica descrito por uma sequência finita de números; para descrever a posição de um ponto material seriam necessários apenas três números mas para a descrição do seu estado mecânico seriam apenas necessários seis: três para a posição e três para a velocidade.

Mas a ideia de espaço absoluto viria a ser posta em causa; para Poincaré (1854–1912), um dos precursores da teo-

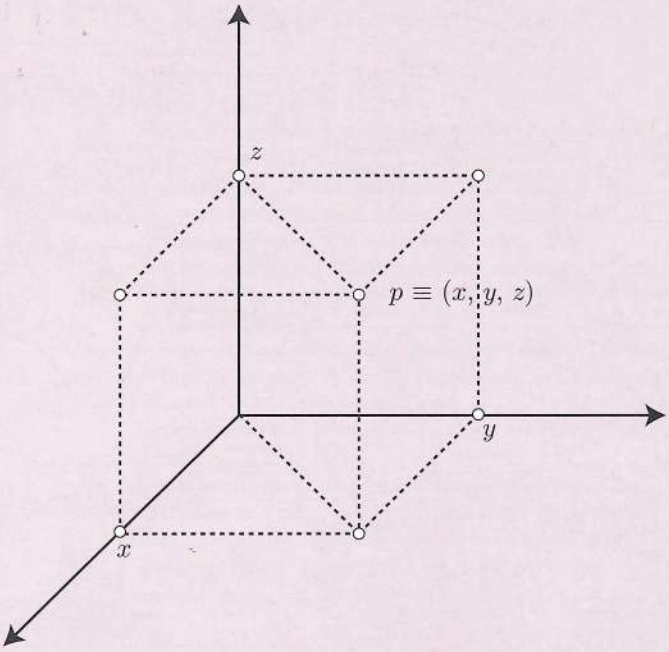


Figura 4. Esquema usual para figurar o espaço absoluto tridimensional.

ria da relatividade, "quem falar de espaço absoluto emprega um termo sem significado". Um pouco antes já Riemann (1826–66) se insurgira contra o "espaço-receptáculo" sustentando que "o espaço não é uma casa alugada à matéria". Para Einstein (1879–1955) a dependência do espaço e da matéria é tal que esta o pode "encurvar" e certas porções de espaço singularmente encurvadas — os buracos negros — mais não seriam afinal do que matéria. Enfim, em que medida é o espaço independente do tempo? Para Isaac Barrow (1630–77), professor de Newton e grande impulsionador do cálculo infinitesimal "o espaço é a expressão da omnipresença divina e o tempo é a expressão da eternidade divina". Esta visão mística do espaço e do tempo nada tem a ver com o ponto de vista de Minkowski (1864–1909) que em 1908 introduz nestes termos o conceito de espaço-tempo: "Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autónomos, vão desvanecer-se como sombras e somente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois". Do que não há dúvida é que se recorre a um conceito de espaço, seja ele qual for, para organizar um conhecimento, em sentido lato. O espaço e o tempo são para Kant (1724–1804) intuições puras que organizam as sensações e tornam possível o conhecimento; para Kant "o espaço não é um objecto mas sim um modo de perceber os objectos". Afinal de contas quer o espaço de segurança da criança, o espaço-lugar de Aristóteles, o espaço-universo infinito do fim do Renascimento, o espaço-receptáculo de Newton, o espaço-tempo de Minkowski e o espaço-tempo curvo de Einstein conduzem todos a formas de perceber a inteligibilidade das coisas. Talvez tenha sido Leibniz (1646–1716) quem melhor que ninguém tenha sido capaz de englobar numa só fórmula todas as concepções de espaço: *spatium est ordo coexistendi*, ou seja, o espaço é a ordem das coisas em si, não é substância mas fenómeno de relações, não é senão ordem e relação.

É significativo que Leibniz dê como exemplo de espaço uma árvore genealógica, na qual participariam os ascendentes, os parentes mesmo longínquos e os descendentes mesmo futuros, todos coexistindo não no espaço e tempo físicos mas no "espaço da árvore genealógica". O espaço físico seria, quando muito, mais um exemplo de espaço, chegando até Leibniz a referir-se à "quimérica hipótese da realidade do espaço [físico] em si". A falta de unanimidade na concepção de espaço reflecte afinal a necessidade de adequação do quadro conceptual geométrico à natureza das questões em jogo. Não é pois de estranhar que em geometria se estudem espaços com diferentes propriedades úteis ora em estudos de mecânica, ora no estudo das partículas elementares ou quiçá até no estudo da linguística. Para o geómetra, o conceito de espaço depende do tema em estudo.

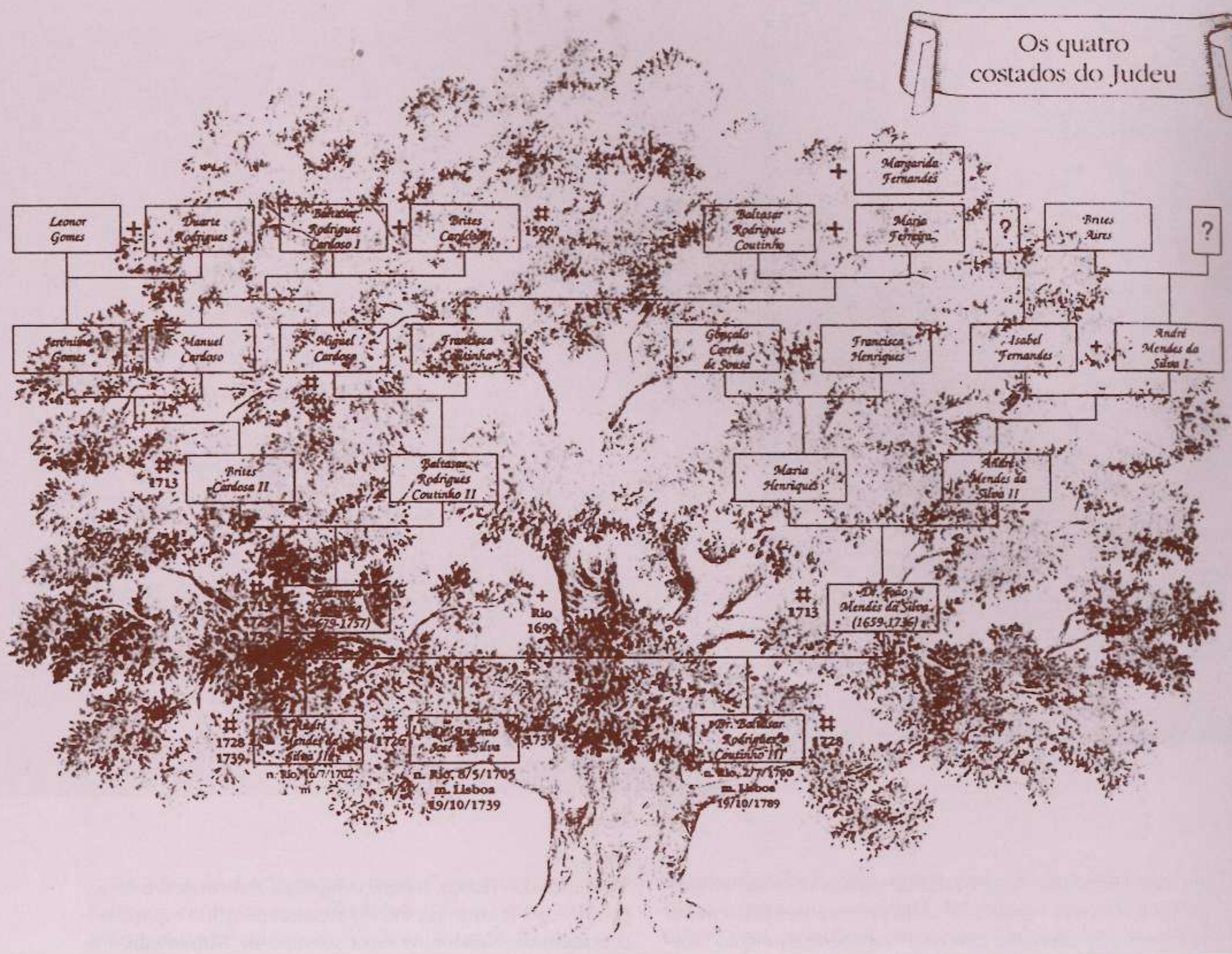


Figura 5. Árvore genealógica do dramaturgo António José da Silva, conhecido por "o Judeu", queimado vivo pela Inquisição em Lisboa, em 1739.

A geometria como sistema dedutivo

A importância do jogo

Ao observar as crianças a brincar concordaremos que em geral intervêm duas componentes: o "faz de conta" e as "regras do jogo". Deixando de parte o porquê da brincadeira, a sua finalidade e utilidade, poderemos reconhecer naqueles dois elementos como que os vestígios primitivos do método axiomático. O jogo é realmente um faz de conta voluntário com regras provisoriamente aceites. Embora não seja apenas isso, pois comporta em geral elementos aleatórios ou seja o factor "sorte" que lhe aviva o interesse e pressupõe em geral "adversários" e consequentemente "luta" e "vencedores e vencidos". É certo que nenhum destes elementos é totalmente estranho à actividade matemática — como actividade humana que é — mas interessa-nos agora aqui apenas apontar para o carácter embrionário de um sistema dedutivo que resulta da atitude do "faz de conta" e da aceitação das "regras do jogo".

Se entendermos as "regras do jogo" no sentido lato — "só pode falar um de cada vez" ou "o jogo começa depois de ele contar até vinte" — concluiremos que as mesmas regras se aplicam a diferentes contextos mas isso continua mesmo válido entendendo-as no sentido estrito do "faz de conta": "agora sou eu o rei" ou "vocês são os bandidos e nós os polícias" ou "hoje o meu palácio é este canteiro e o teu aquele ramo de árvore". Em geral o olhar indulgente do adulto ao ver brincar assim tão sensatamente as crianças, deve-se à ideia que as dramatizações necessárias ao "faz de conta" ajudam ao desenvolvimento psicológico e físico pelo enriquecimento que resulta das experiências vividas, e a contemplação do preceituado nas "regras do jogo" favorece o

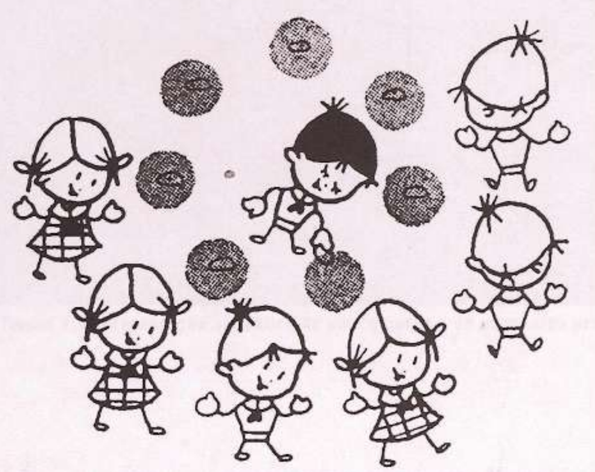


Figura 6. Jogos infantis.

*Um grupo é determinado por um conjunto G e uma operação * em G de tal forma que:*

** seja associativa;*

** possua um elemento neutro;*

*Todo o elemento de G tenha um oposto com relação a *.*

Um espaço topológico é determinado por um conjunto E e um conjunto de partes de E chamadas abertos *de tal forma que:*

Toda a reunião de abertos seja um aberto;

A intersecção de dois abertos seja um aberto;

O conjunto E e o conjunto vazio sejam abertos.

Um plano segundo Euclides é determinado por um conjunto Π cujos elementos têm o nome de pontos *e por um conjunto de partes de Π chamadas* rectas *de tal forma que:*

Dados dois pontos distintos A e B exista uma única recta à qual pertençam A e B;

Dados dois segmentos AB e CD exista um único ponto E tal que B esteja entre A e E e CD seja congruente a BE;

Todos os ângulos rectos sejam congruentes entre si;

Para toda a recta r e todo o ponto P não pertencente a r, exista uma única recta s passando por P e paralela a r.

Figura 7. Axiomáticas da teoria dos grupos, da teoria dos espaços topológicos e da geometria plana de Euclides.

desenvolvimento intelectual e social da criança, obrigada a tomar decisões e a ajudar os outros ou a esperar ajuda deles. É por demais evidente onde queremos chegar: as regras do jogo são o esboço de uma axiomática e o faz de conta colectivo constitui um esboço de um seu modelo. Tal qual como sucede em matemática só o exercício das regras do jogo em diferentes modelos conduz à sua listagem abstracta. Só brincando "às lojas", umas vezes comprando outras vendendo, se descortinam as regras do "comércio" tal como só depois de operar com os números inteiros e depois de calcular com polinómios ou matrizes se alcança o conceito algébrico de anel. A interiorização das regras de jogo faz-se jogando através de modelos seus. As "boas" regras das estruturas matemáticas só surgiram depois de uma prolongada actividade com modelos que *a posteriori* as ilustram; o mesmo se passa nos jogos infantis. A aceitação de uma proposta para jogar um jogo novo depende do grau de confiança que inspira o proponente ou da experiência dos que são convidados a jogar; o mesmo se passa nos sistemas axiomáticos. De qualquer modo aceitar jogar com dadas regras de jogo num modelo particular exige, quer se trate de um jogo infantil ou de um sistema axiomático, uma forte capacidade de imaginação e imaginar é essencialmente abstrair: imaginar exige de quem o faz, não ver tudo o que se vê e ver algo do que não se vê. Esta é aliás a característica principal da ciência moderna que como se sabe teve o seu ponto de viragem com a matematização do real feita por Galileu (1564–1642).

Pretender inculcar num jovem a capacidade de abstrair tendo-lhe coarctado a possibilidade de imaginar durante a sua infância é pretender ensinar música às pedras. De quem se tolheu, em pequeno, o passo natural ao pensamento abstracto, só pode esperar-se em adulto pensamentos abstrusos.

O ensino da geometria e o método axiomático

Os *Elementos* de Euclides serviram durante séculos como paradigma dos sistemas dedutivos e foram acima de tudo um pretexto para ensinar lógica, sendo a geometria sobretudo o veículo desse ensino e não, em geral, a finalidade em si. Invocava-se a geometria euclidiana pelo seu carácter formativo e pela sua ligação ao real. Do ponto de vista axiomático moderno faltava porém à geometria euclidiana uma característica essencial para a valorizar como teoria axiomática: a variedade dos modelos da teoria. O valor da obra de Euclides residiu antes de tudo na elegância e rigor de que se investiu aos olhos da história, durante séculos. Mas a relativa extensão da lista de axiomas da geometria euclidiana restringe a possibilidade de dispor de uma grande variedade de modelos e faz com que os teoremas demonstrados só possam ser ilustrados num ou dois modelos realmente significativos da teoria.

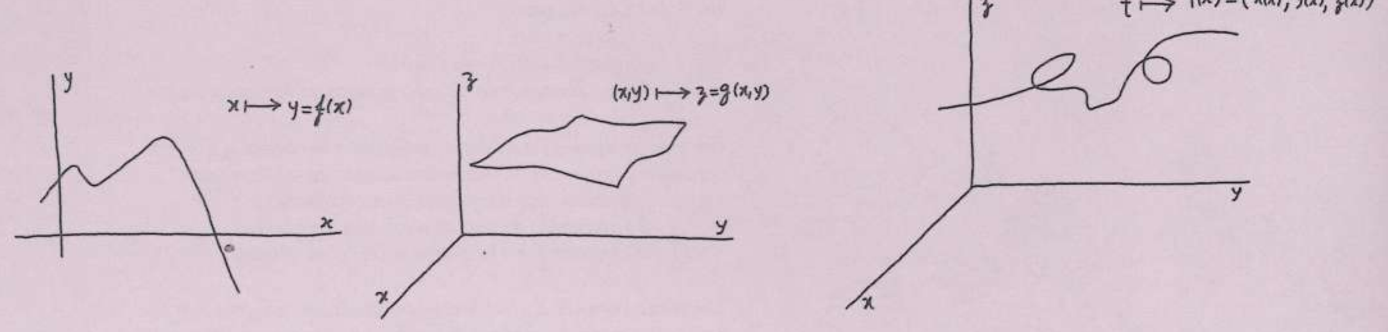


Figura 8. Esboços de gráficos de funções.

Ora hoje em dia o valor de uma teoria axiomática mede-se sobretudo por um critério económico: como os teoremas demonstrados em certa teoria valem para todos os seus modelos, são as teorias com maior variedade de modelos as que se traduzem numa maior economia de tempo no que à transmissão do saber se refere. Ao desenvolver a teoria dos espaços vectoriais, por exemplo, evita-se ter de repetir certos resultados no quadro dos polinómios, das matrizes, das funções ou dos vectores, na medida em que o que está em jogo é apenas a estrutura de espaço vectorial. Por outro lado desde que a partir do século XIX se foram introduzindo sucessivas teorias axiomáticas — teoria dos grupos, teorias dos espaços topológicos, vectoriais, métricos, por exemplo — algumas delas foram parecendo de inclusão mais vantajosa no ensino do que a geometria euclidiana.

Os moldes em que se passou em todo o mundo a processar o ensino da Análise Matemática e da Álgebra Linear retiraram à geometria o papel quase exclusivo que chegou a ter na formação do pensamento matemático na escola. Todavia a tendência abstractizante que integra esses moldes reforçou a importância da geometria como ponte para o real, tornando-a a nível elementar um verdadeiro cordão umbilical. Na segunda metade do século XX a inclusão de temas de geometria — não só nem sobretudo de geometria euclidiana — em cursos de nível mais avançado deve-se antes de mais à possibilidade de emprestar as fortes intuições que nela radicam à compreensão da arquitectura de áreas abstractas da ciência, já só relacionadas com o real de modo indirecto. Não se invoca ao incluir esses temas nem a questão da formação da mente nem a relação com o real, nem sequer o acréscimo de informação resultante da consideração desses temas. Usa-se geometria em física das partículas ou em teoria dos códigos, ou em programação económica ora por ser cómodo ora por ser imprescindível pensar geometricamente nessas áreas.

Geometria e pensamento geométrico

Como aprender geometria?

Como nunca é demais repetir, o mais importante em geometria é o pensamento geométrico e é portanto sobretudo no exercício progressivo dessa forma de pensar que consiste a aprendizagem da geometria. Mas seria errado confinar esse exercício aos conteúdos tradicionais da geometria, em particular ao reportório da geometria euclidiana. Uma das características da matemática axiomatizada e em particular da geometria é o facto de se constituir em linguagem universal ou seja: é possível usá-la, ganhando sentido, em terrenos distintos, provocando um enriquecimento de perspectivas e de métodos: na análise funcional usam-se ideias geométricas, por exemplo no quadro dos chamados espaços de Hilbert — espaços de dimensão infinita fundamentais em mecânica quântica. Para Dieudonné (1906–92), "as transferências da intuição" explicam o domínio universal da geometria. O pensamento geométrico, assente em fortes intuições espaciais da nossa infância, desenvolve-se através de certas estruturas que guardando a marca da sua remota origem, permitem um tu-cá-tu-lá familiar embora conscientemente fictício, que por vezes pode levar-se muito longe.

Ao pensar numa função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, arbitrária, quase mecanicamente desenhamos um gráfico qualquer embora f possa ter um gráfico completamente diferente. Ao pensar num conjunto arbitrário M imaginamo-lo como um espaço cujos pontos representam os elementos do conjunto embora, M possa ser um conjunto de rectas ou de matrizes.

As estruturas geométricas ao poderem ser interpretadas neste jogo de ficção ajudam a "ver" ou como dizia Platão (427–347 a.C.), "a geometria conduz a alma à verdade". Raciocinar geometricamente, é por assim dizer raciocinar sobre objectos abstractos como se eles fossem concretos; das

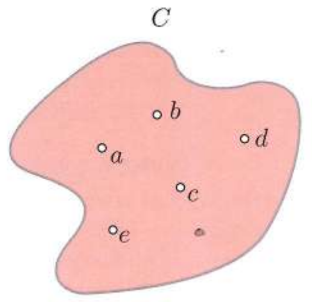


Figura 9. Representação simbólica de um conjunto e de elementos seus.

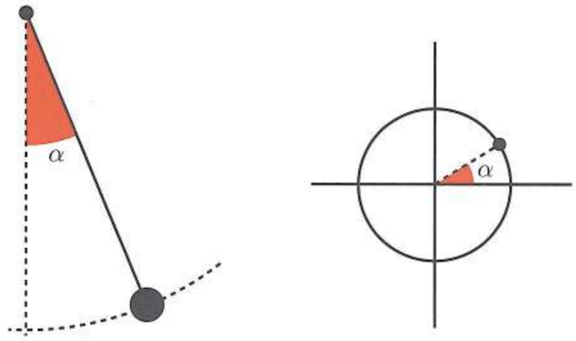


Figura 10. A posição de um pêndulo simples é descrita por um ponto sobre uma circunferência.

figuras que usamos em geometria, teoricamente dispensáveis embora de grande ajuda, não podemos retirar porém o que é abusivo... Na realidade o mesmo sucede em toda a teoria axiomatizada: dos objectos "concretos" apenas conservamos as propriedades formalizadas nos axiomas, considerando as outras irrelevantes — para certos fins em vista. O "concreto" é, neste sentido, apenas um grau do "abstracto".

Ao carácter mais "próximo" dos objectos de partida da geometria não será alheio o ter-se ela constituído na primeira teoria axiomática, paradigma formal do pensamento geométrico. Consideremos um exemplo simples: em física para descrever o movimento de um pêndulo simples recorre-se a uma circunferência graduada para parametrizar as diferentes posicões através de um ângulo.

Em se tratando de um pêndulo duplo articulado o melhor é representar cada posição através de um ponto num toro bidimensional visto que há dois ângulos a referenciar em simultâneo.

É claro que se apenas se considerarem pequenas oscilações que não envolvam rotações em torno dos pontos de suspensão, um simples rectângulo seria suficiente para assinalar as posições.

Ao estar em movimento, as sucessivas posições do duplo pêndulo correspondem a uma trajectória no toro. O estudo do movimento do duplo pêndulo corresponde, assim, ao estudo de um sistema dinâmico ou campo de vectores no toro, de forma que partindo de um ponto no toro — ou seja de uma posição particular do duplo pêndulo, todo o futuro mecânico do sistema é descrito por uma linha de corrente desse campo de vectores. Uma função numérica da posição do duplo pêndulo (a distância do segundo pêndulo ao ponto de suspensão do primeiro, por exemplo) corresponde a uma função numérica definida no toro. É claro que só uma certa familiaridade com o toro nos permitirá raciocinar com as trajectórias nele desenhadas e tirar conclusões mecânicas sobre o movimento do duplo pêndulo. Vemos através deste

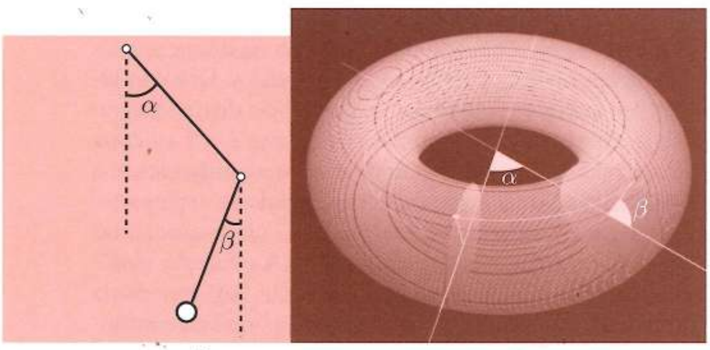


Figura 11. A posição de um pêndulo duplo é descrita por um ponto sobre um toro.

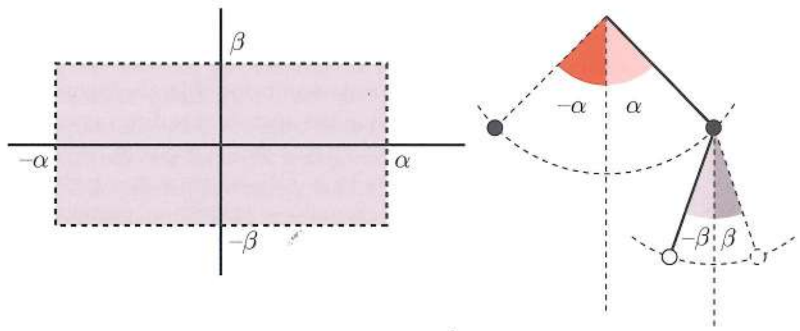


Figura 12. As pequenas oscilações do pêndulo duplo são descritas por pontos de um rectângulo.

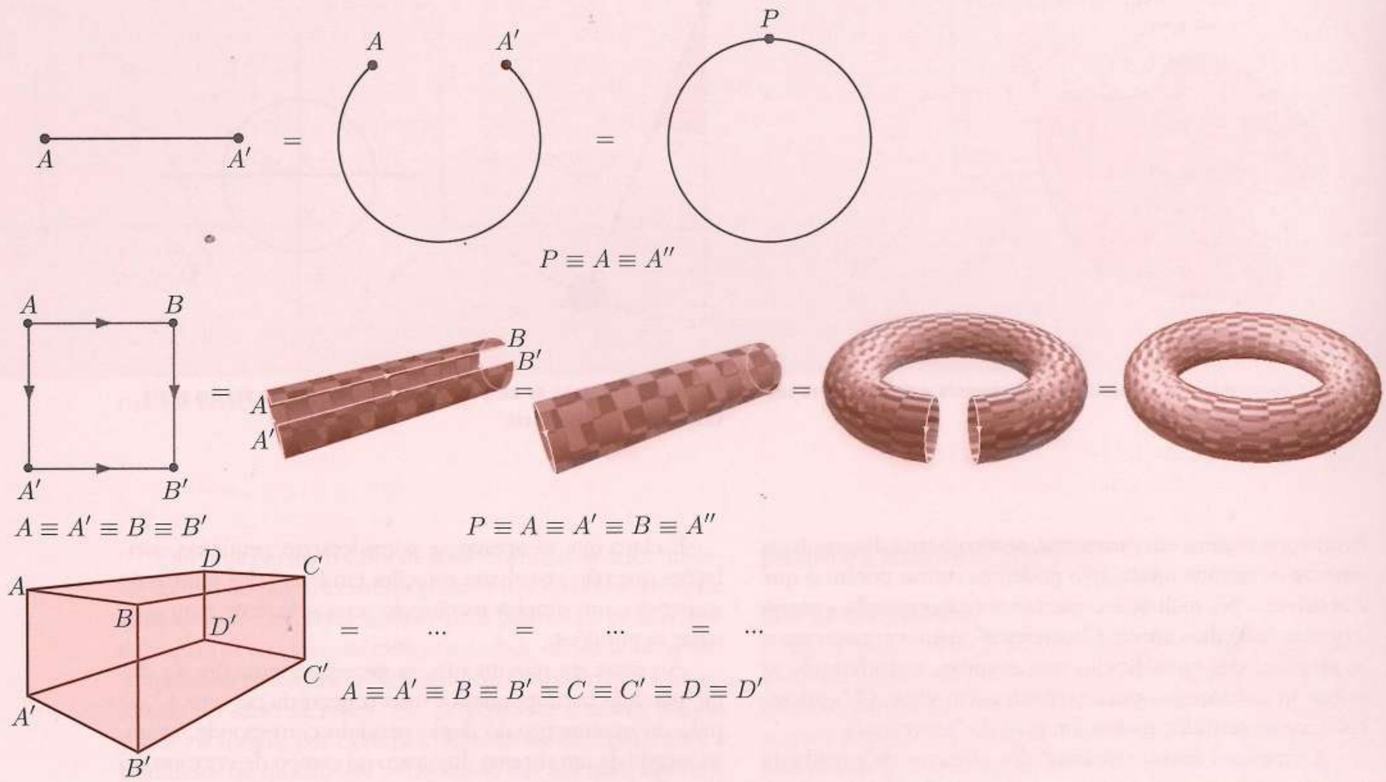


Figura 13: Representação de uma circunferência, de um toro bidimensional e de um toro tridimensional através de um segmento, de um quadrado e de um cubo.

exemplo o modo como frequentemente se usam os objectos geométricos: modelando situações do mundo real eles têm o papel de sombras ou "duplos" que simulam a realidade — isolando apenas o que se pretende estudar — e o estudo dessas sombras fornece dados sobre a realidade, em geral mais complexa.

Aprender geometria, hoje, seria inútil para a maioria das pessoas se elas se interessassem pelos objectos geométricos apenas na medida em que eles aparecessem directamente no mundo real. O estudo do toro e da sua geometria — qual é a trajectória mais curta (a geodésica) entre dois pontos arbitrários do toro?, por exemplo — justifica-se, portanto, por ser ele o espaço adaptado a inúmeros problemas, que podem ser bem mais importantes do que o fabrico de câmaras de ar, que não exige certamente nenhum estudo profundo sobre a geometria do toro. Para ilustrar melhor este aspecto consideremos um triplo pêndulo que é do ponto de vista mecânico uma coisa bem simples; as suas posições são porém descritas por pontos de um toro tridimensional que certamente nunca ninguém viu na natureza, embora, não seja difícil ao geómetra imaginá-lo. Se pensarmos um pouco compreenderemos que uma circunferência se pode interpretar como um segmento — representado pelo intervalo de números reais $I = [0, 1]$ — cujos extremos são identificados. Um toro bidimensional interpreta-se como a superfície de um quadrado — representado pelo produto cartesiano $I \times I$ — cujas arestas opostas foram convenientemente identificadas, e o toro tridimensional é afinal um cubo sólido — representado pelo produto cartesiano $I \times I \times I$ — cujas faces opostas foram convenientemente identificadas. A evolução mecânica do triplo pêndulo é, pois, descrita por uma trajectória no toro tridimensional que não é preciso "ver" para imaginar; ao fazê-lo estamos a pensar geometricamente no fenómeno mecânico do triplo pêndulo. Para aprender geometria é essencial desenvolver este poder de representação: o triplo pêndulo — que se "vê" — simula-se comodamente com um toro tridimensional – apesar de não se "ver" — e para de alguma forma o "ver" simula-se de novo mas desta feita com um familiar cubo.

Como ensinar geometria?

Antes de mais: que geometria ensinar? De uma publicação da UNESCO — o organismo internacional tutelado pela ONU vocacionado para as questões de educação e cultura — respigamos esta confissão: "De todas as decisões a tomar no quadro de um projecto de ordenamento dos programas escolares quanto às escolhas dos conteúdos, a mais controvertida e a mais difícil de defender é em geral a que respeita à geometria". E porquê? Pensamos que a maior unanimidade na escolha e ordenação dos temas conducentes à transmissão de conhecimentos de aritmética, álgebra e análise a nível escolar se deve sobretudo a uma concepção ultrapassada do papel da geometria no pensamento científico.

Deve-se esta concepção à divulgação de uma imagem da geometria ligada ao mundo clássico e desligada do mundo actual. Vamos analisar brevemente esta atitude. Por um lado, o excessivo volume de material elementar em geometria, acumulado durante séculos, como resultado do papel proeminente que ela teve no ensino, tornou-se em grande parte obsoleto devido às inflexões de rumo da ciência e da técnica. Tornar-se-ia deste modo difícil proceder a uma selecção, curiosamente por excesso de oferta; qualquer escolha desse material tenderia a parecer arbitrária. Trata-se obviamente de um falso problema pois o verdadeiro problema reside em saber tirar partido de questões de outras áreas — dentro e fora da matemática — para pretextar a forma geométrica de pensar. E há que reconhecer que tal como sucede a um bom médico ou a um bom mecânico de automóveis o volume de conhecimentos necessário para não ser surpreendido na vida profissional é bem maior do que o necessário — em geral pouco — para resolver cada caso pontualmente. É por isso que há quem diga que aquele acervo de saber é localmente inútil e globalmente indispensável. É o que sucede com a geometria. Os temas geométricos a ensinar podem ser muitas vezes justamente considerados como jogos inúteis em si, mas se pensarmos neles como pretexto para o "pensar geometricamente" compreenderemos por que são indispensáveis. Por outro lado o poder político e a comunicação social, atribuem um carácter mais indispensável, no dia a dia da vida moderna, aos conhecimentos de aritmética, álgebra e análise ou até de estatística que aos de geometria; essa postura devendo-se à ideia de se entender por "geometria" apenas o seu conteúdo tradicional sem compreender a relevância do pensamento geométrico no pujante desenvolvimento da álgebra e da análise, o que torna impossível a sua compreensão a nível escolar sem o recurso a fortíssimas intuições geométricas. Tal atitude, verdadeiramente caricata, é só comparável à atitude de considerar que já não é tão importante saber ler ou saber andar porque hoje em dia dispomos de televisão e automóvel.

Não temos dúvidas em afirmar que o apagamento, se não a exclusão, da geometria no ensino da álgebra e da análise remetendo-a a um corpo isolado de conhecimentos, está na origem de boa parte do insucesso escolar em matemática, tornando estupidamente difícil e *contra natura* a aquisição de conhecimentos de álgebra e de análise e tornando odiosa a geometria.

Independentemente do conteúdo dos temas que devem configurar um qualquer programa de geometria a nível elementar o mais importante é o uso da geometria como contraponto dos temas matemáticos mais áridos do ponto de vista dos estudantes, porque menos intuitivos.

Em matemática, dedução e intuição são inseparáveis e não ter em conta este aspecto é caminhar para o fracasso. Porém como é bem sabido a intuição descontrolada conduz aos maiores abusos e frequentemente, quando erigida em método único, sob o pretexto de ser uma fonte privilegiada para inteligir as coisas esconde apenas uma incapacidade para raciocinar dedutivamente. E é a dedução que pelo seu rigor, põe cobro aos desvarios a que pode conduzir a intuição. A intuição é a voz do atrevimento e da invenção e a dedução a da prudência e do controlo. Quando se pensa em ensino ambas as coisas são necessárias. Ao aluno que estuda tem de ser dada a ocasião para tirar partido da intuição sem que ela constitua um talismã e tem de ser dada a ocasião para tirar partido da dedução sem que ela constitua para ele um freio. É preciso, em conclusão, fazer entender ao estudante que em matemática a intuição conduz ao verosímil e daí a dedução conduz ao verdadeiro, tornando possível o repto de fazer previsões, sondando o ignoto e nele agindo eficazmente.

Ora além de ser a geometria o terreno privilegiado para desenvolver a intuição — nisto reside a força do pensamento geométrico — sucede que os excessos da intuição são nela o mais das vezes facilmente detectáveis. É por isto, mais do que pelo seu conteúdo programático que a geometria é insubstituível no ensino, embora os conteúdos clássicos da geometria se revelem particularmente recomendáveis no plano da formação estética e cultural do futuro cidadão, sendo tão insensato sonegá-los como o seria não lhe facultar o conhecimento da cultura literária clássica, por exemplo.

Se ao ensinar geometria nunca, mas nunca, a dissociarmos do seu conteúdo humanístico, teremos sabido fazer desse ensino um meio formativo de cultura, útil e indispensável a todos.

Paulo Almeida
Instituto Superior Técnico

O ProfMat 2007

Filomena Leite Pinto

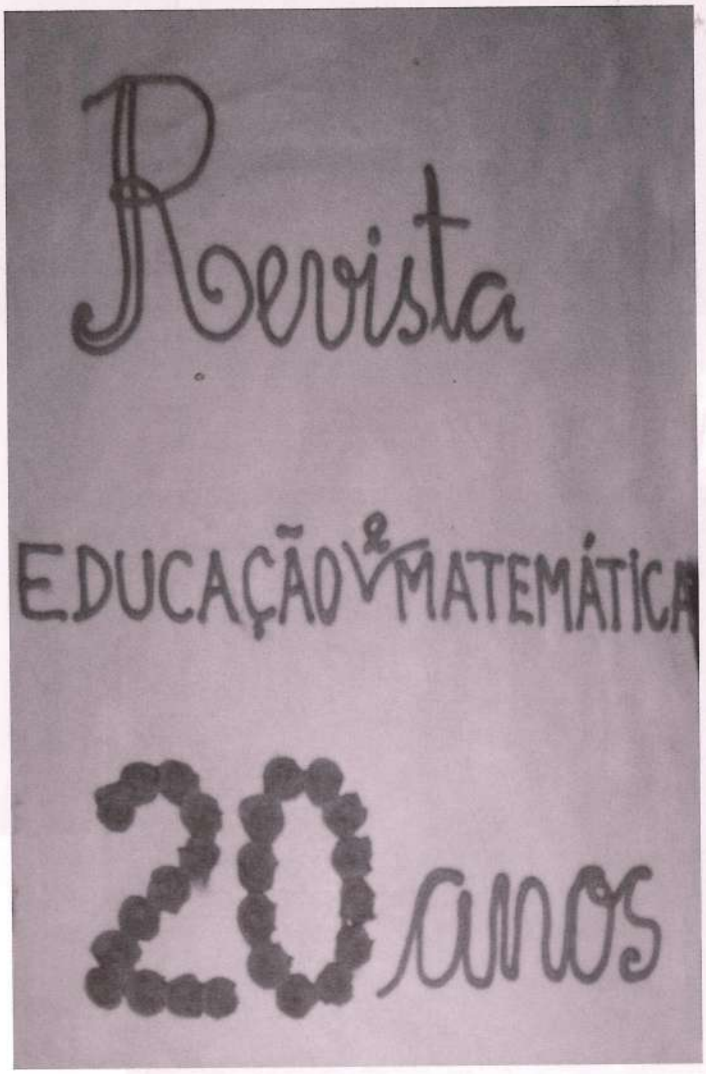
O *ProfMat* 2007, para além de ter constituído um contexto privilegiado para o meu enriquecimento profissional, foi também uma grata oportunidade de concretizar um sonho antigo: conhecer as Ilhas de Bruma, os Açores! Foi com um misto de muita curiosidade e algum receio (vulcões, tremores de terra, …) que fiz a viagem de avião — quase exclusivamente lotado com professores de Matemática. A duração da viagem, 2h e 30 minutos, deu-me a primeira noção real da insularidade. Na *Ilha Terceira de Nosso Senhor Jesus Cristo*, seu nome completo de baptismo, fomos muito bem acolhidos, com todos os apoios logísticos, transferes de e para os hotéis, deslocações para as escolas e para os locais dos jantares a funcionarem com qualidade e eficiência.

Nos dias 5 e 6 de Novembro, que antecederam o *ProfMat*, realizaram-se, na Escola Básica Integrada de Angra do Heroísmo, os Cursos (oito) promovidos pelo Centro de Formação da APM, envolvendo 173 professores, a maioria deles oriundos do arquipélago dos Açores. A referida Escola recebeu-nos de braços abertos e com todas as condições e materiais — salas, equipamentos, fotocópias, pastas — devidamente preparados. Os colegas da Comissão Organizadora foram inexcedíveis, em simpatia e em disponibilidade para a pronta resolução de qualquer problema. Não posso deixar de referir os magníficos arranjos florais espalhados pelas instalações, o café excelente e a *massa sovada* deliciosa servida nos intervalos das sessões.

O *ProfMat* propriamente dito teve lugar, entre 7 e 9 de Novembro, na Escola Secundária Jerónimo Emiliano de Andrade, com as sessões plenárias a decorrer nas modernas instalações do Centro Cultural e de Congressos de Angra do Heroísmo. O evento foi acolhido no arquipélago com grande interesse pelos professores locais e também pelo Governo Regional e Câmara Municipal de Angra.

Um congresso deste tipo é o momento propício para rever colegas — académicos e profissionais — de outros lugares ou contextos, de fazer novos conhecimentos e com eles partilhar ideias, saberes e experiências, cultivar relações e aproximar conceitos e pontos de vista sobre temas comuns. Este ano, o número de participantes foi menor, cerca de 500 professores, aqueles que acabaram por conseguir organizar-se, em termos financeiros ou de gestão de aulas, para estar presentes. Recordo-me de outros *ProfMat* bem mais participados, com cerca de 1600 professores onde assisti a excelentes comunicações e animadas sessões de trabalho com alguns associados *de peso*, desta vez também ausentes.

No discurso de abertura proferido pela Presidente da APM, estes aspectos da dificuldade de mobilização dos professores acabaram por merecer a principal atenção, em-



bora eu tivesse preferido que o mote se centrasse nos temas científicos do Encontro, os temas actuais da Educação Matemática, razões principais que levaram os professores em marcar presença nesta iniciativa.

Um congresso, enquanto espaço de reflexão e debate, é naturalmente um lugar de movimento e alguma agitação e frenesim. Nem sempre conseguimos assistir a tudo o que nos interessa, existem opções difíceis de fazer entre diferentes sessões, vemos salas mais cheias e outras menos preenchidas, há conversas animadas nos corredores, registamos temas que apreciamos mais e outros que nos parecem menos conseguidos, nalguns casos, escasseia tempo para o debate após comunicações ou, pelo contrário, outros há onde falta quem se disponibilize a intervir, questionando, completando, contrapondo, debatendo... Enfim, um cenário sempre vivo, animado e enriquecedor!

Os temas relacionados com o Plano da Matemática, com os Programas de Formação Contínua em Matemática (medidas do PAM), a Inovação Educativa, a História da Matemática e o Reajustamento de Programas do Ensino Básico foram debatidos sob diversos aspectos ao longo dos 3 dias. Neste *ProfMat* pudemos escolher entre 3 Sessões Plenárias, 8 Painéis, 15 Conferências, 3 Grupos Temáticos, 27 Sessões Práticas, 6 Simpósios de Comunicações — num total de 18, 2 Posters, e 6 Sessões especiais. A opção da Comissão Organizadora em não fazer a pré-inscrição nas sessões práticas e cursos pareceu-me acertada e não geradora de confusão, verificando-se que quem estava interessado aparecia à hora marcada e participava se houvesse lugar.

Gostaria aqui de realçar a sessão especial SE2, onde estive presente, subordinada ao tema: Os 20 anos da Revista Educação e Matemática. Apresentada pela redacção da Revista, foi com muito agrado que revimos e recordámos, através de *spots* das capas publicadas, a história destes 20 anos e ouvimos o discurso emocionado do editor da revista temática dos vinte anos, o colega Henrique Guimarães.

Em minha opinião, a revista continua a ser uma referência e um elo fundamental da ligação dos sócios à APM.

Em jeito de sugestão, gostaria de propor que se crie, no âmbito dos próximos *ProfMat(s)*, um espaço para um *Painel de blogs*, disponibilizando a identificação dos autores de muitos dos *blogs* que já frequentamos, permitindo alargar o espaço de reflexão conjunta.

A organização deste *ProfMat* está, por todas as razões, de parabéns. Se o sucesso de um Congresso se consegue a partir da disponibilidade e da qualidade dos convidados e dos participantes na apresentação dos seus trabalhos, não é menos verdade que são elementos essenciais para esse sucesso, a capacidade de concepção e de concretização do programa científico e do programa cultural, a par da eficácia de funcionamento de toda a máquina organizativa e de suporte (bares, cantinas, bancas, estacionamentos, serviço de cópias, etc). E, em todos estes aspectos, podemos fazer uma avaliação extremamente positiva dos resultados conseguidos pela Comissão Organizadora.

No final dos 6 dias dos Cursos e Congresso da APM, saboreada muita e boa comida açoriana, gravada na memória aquela paisagem única, ainda que bem salpicada de chuva e vento (que tem o lado positivo de nos retirar quaisquer sinais de bafio...), fiquei com a firme vontade de um dia regressar para conhecer as restantes ilhas.

Pelo discurso do representante do Secretário Regional de Educação, ficámos com a boa notícia de que o abandono escolar nos Açores diminuiu para os 2%, indicador de que estarão praticamente todas as crianças na escola. Outra curiosidade que tive oportunidade de saber tem a ver com o facto do *cartão único de cidadão* já se encontrar em pleno uso naquela Região Autónoma.

Há, pois, que reconhecer, por um lado, que temos algo a aprender com estes nossos compatriotas insulares motivados, simpáticos e afáveis e, por outro, que as autonomias têm virtualidades.

Filomena Leite Pinto
EB 2.3 D. Dinis

Piero della Francesca e a Geometria Projectiva[1]

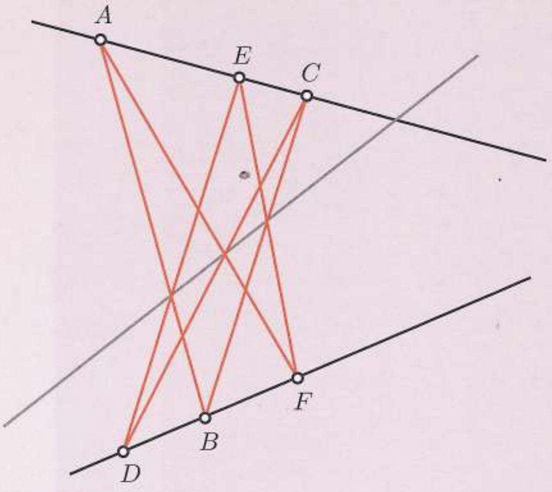
Eduardo Veloso

Introdução

Embora a geometria projectiva, como teoria matemática, seja resultado dos trabalhos de Jean-Victor Poncelet (1788–1867) nos inícios do séc. XIX, é habitual afirmar-se que as suas origens remontam ao século XVII, quando Desargues publica as suas ideias sobre novos métodos na geometria, em particular o estudo das secções cónicas como resultantes da projecção central de uma circunferência e a invenção do infinito: "quando, num plano, nenhum dos pontos de uma recta está a distância finita, dizemos que a recta está a distância infinita"[2].

No entanto, isto não significa que matemáticos anteriores não tenham tratado de questões que mais tarde vieram a enquadrar-se na geometria projectiva. Um exemplo é o teorema de Papo (c. 290–c. 350) de Alexandria, o último dos matemáticos gregos do helenismo (ver caixa). Neste artigo, pretendo mostrar como Piero della Francesca, nas instruções que dá aos pintores sobre a forma de construir a imagem perspectiva de diversos polígonos, define uma transformação que não é mais do que uma transformação projectiva de um plano sobre si próprio.

Teorema de Papo



Se os vértices de um hexágono $ABCDEF$ estão alternadamente sobre duas rectas, então os pares de lados opostos encontram-se em três pontos colineares.

Notas

1. Adopta-se uma definição de polígono em que os lados podem encontrar-se em pontos diferentes dos vértices.
2. A demonstração baseada nos *Elementos* de Euclides é muito trabalhosa. Na geometria projectiva este teorema é uma consequência quase imediata do teorema fundamental da geometria projectiva.[3]

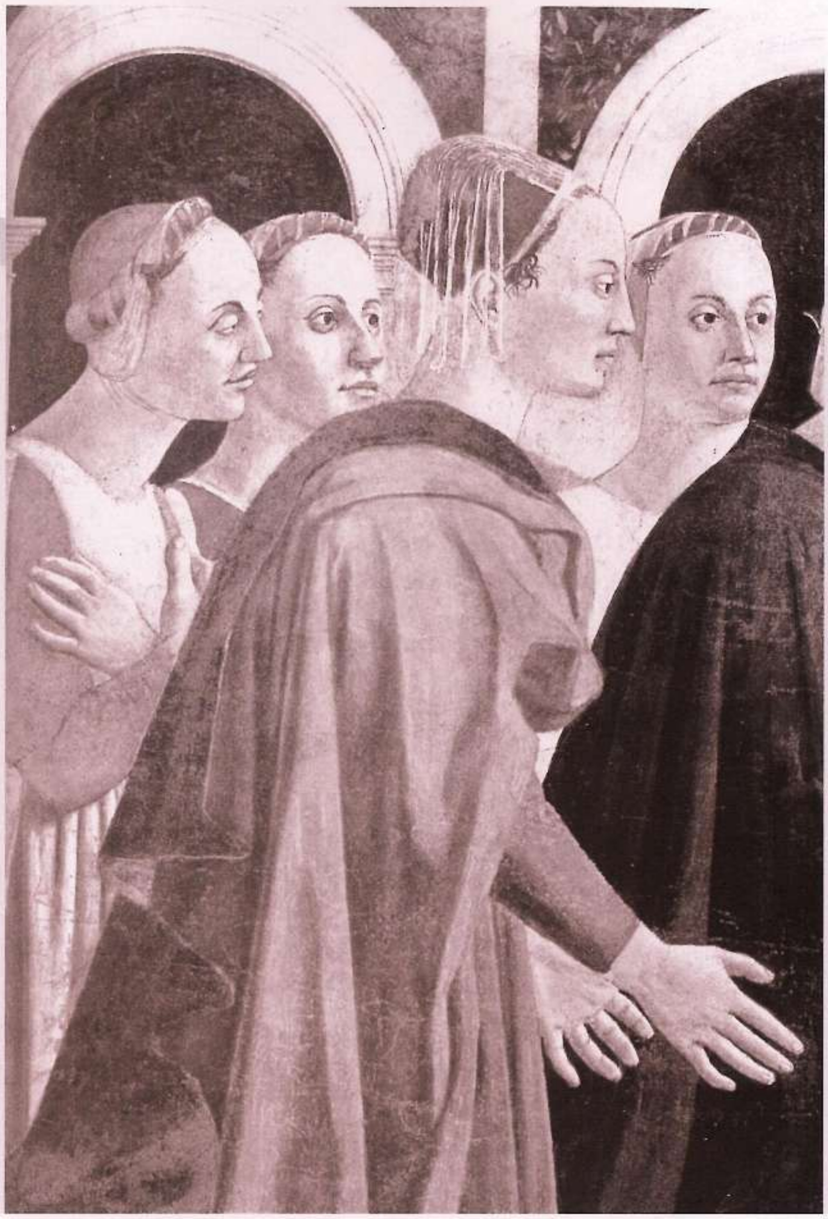


Figura 1. Detalhe de um fresco na Igreja de S. Francisco, em Arezzo.

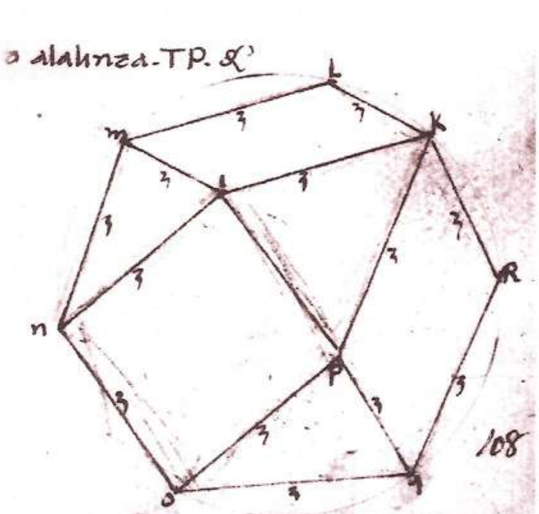


Figura 2.

Piero della Francesca (c. 1413–1492) foi simultaneamente um grande pintor — embora relativamente ignorado até ao fim do séc. XIX, devido ao carácter moderno da sua pintura (figura 1) — e um grande matemático. Nasceu em Borgo San Sepulcro (a cerca de 100 km de Florença), e preencheu a sua vida a pintar e — presume-se, pois não se sabe quais as fontes do seu conhecimento dos matemáticos gregos — a estudar latim e geometria euclidiana pela edição latina dos *Elementos*. Escreveu em vernáculo (isto é, em italiano da época) pelo menos três tratados que chegaram até nós:

- *Trattato d'abaco* — uma espécie de manual escolar de matemática comercial e técnicas práticas de geometria para as chamadas "escolas de ábaco"; estas escolas tinham aparecido em Itália, na segunda metade do séc. XIII, com o objectivo de preparar jovens para o trabalho

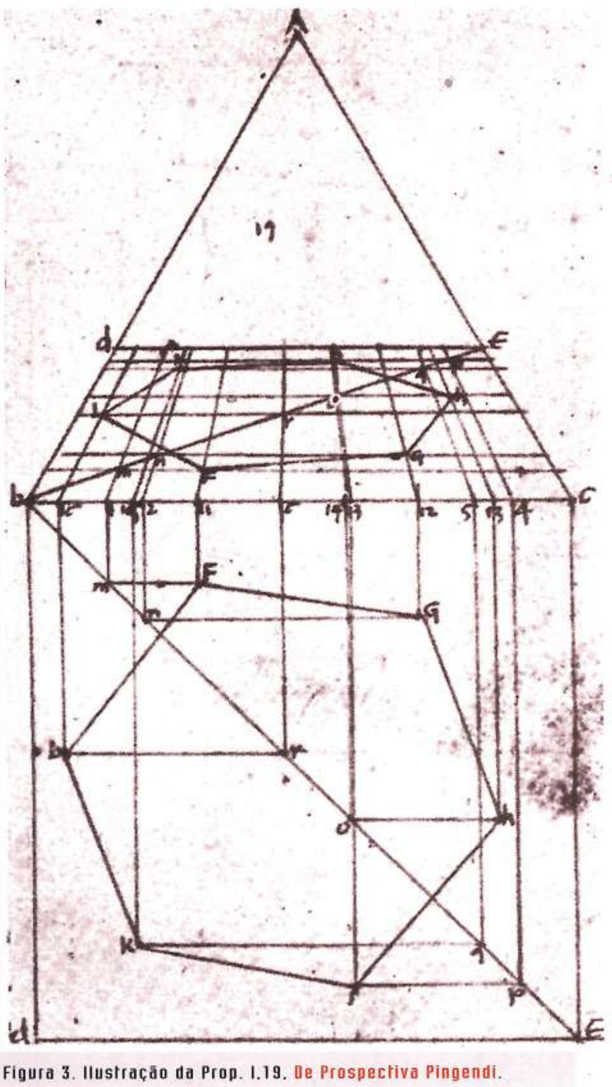


Figura 3. Ilustração da Prop. I.19. De Prospectiva Pingendi.

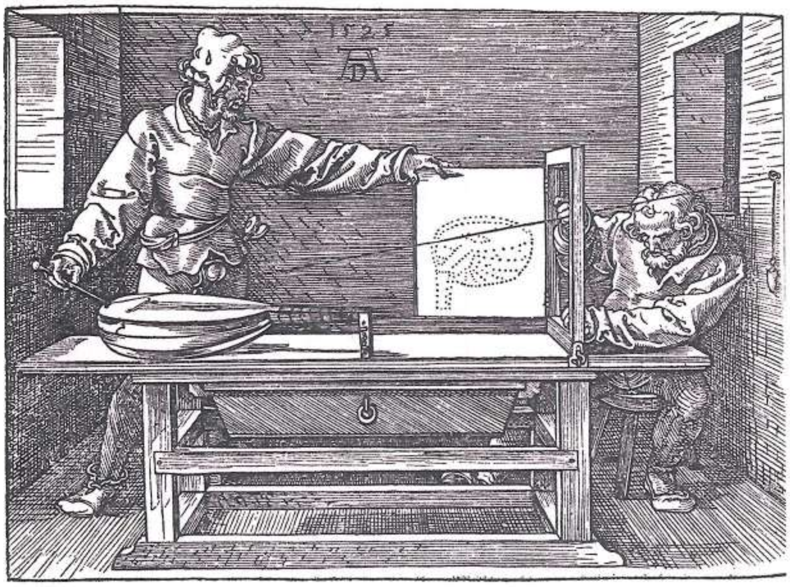


Figura 4. Perspectógrafo de Dürer.

na sociedade comercial que iniciava o seu rápido desenvolvimento e eram uma alternativa às tradicionais escolas "latinas", onde se ensinava gramática e retórica em latim; a figura 2 mostra a ilustração de Piero que acompanha um problema sobre o cuboctaedro;

- *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Tratado dos Cinco Sólidos Regulares*) — problemas geométricos postos em termos numéricos, que se referem em grande parte aos poliedros regulares, mas que exigem conhecimentos de geometria plana e do espaço; este tratado foi usado (plagiado, diríamos hoje) por Luca Paciolli, um contemporâneo e conterrâneo de Piero della Francesca;
- *De Prospectiva Pingendi* (*Da perspectiva em pintura*) — um tratado sobre a perspectiva linear, que mostra preocupações de estabelecer uma relação com a tradição da matemática grega; o estilo é o de um livro para formação de pintores em perspectiva, com instruções detalhadas sobre as diversas construções (figura 3), mas ao mesmo tempo segue claramente a tradição dos Elementos, apresentando uma sequência de proposições (enunciados e demonstrações).[4]

Não é possível desenvolver aqui, mesmo brevemente, as experiências pioneiras em perspectiva do arquitecto Filippo Bruneleschi (1377–1446) — de que não existem quaisquer textos originais —, nem do humanista e arquitecto de Florença Leon Battista Alberti (1404–1472), o primeiro a fazer uma exposição escrita do método da perspectiva para representar a realidade tridimensional no plano do quadro do pintor. Digamos apenas que Piero della Francesca foi o primeiro a adoptar, embora num livro de instruções para pintores — o tratado *De Prospectiva Pingendi* —, um ponto de vista verdadeiramente científico, nomeadamente geométrico, na sua concepção da perspectiva linear. Vamos apenas referir as proposições desse tratado que nos permitem chegar, o mais brevemente possível, ao nosso objectivo: mostrar a transformação projectiva que Piero criou na segunda metade do século XV, mais de trezentos anos antes de Poncelet.

Perspectiva de um quadrado horizontal

Como sempre, na origem de tudo está um problema. No caso de Bruneleschi, Alberti e Piero, o que experimentavam e procuravam eram métodos de desenho que permitissem pintar rigorosamente num quadro, que suporemos vertical e quadrado, o espaço e os objectos tridimensionais que o pintor via enquadrados pelos seus lados. Dürer inventou com esse objectivo o chamado perspectógrafo (figura 4) (que qualquer de nós, graças à Associação Atractor, pode ver se quiser).[5] Pensemos num exemplo extremamente simples, que é o de um quadrado horizontal — o chão de um

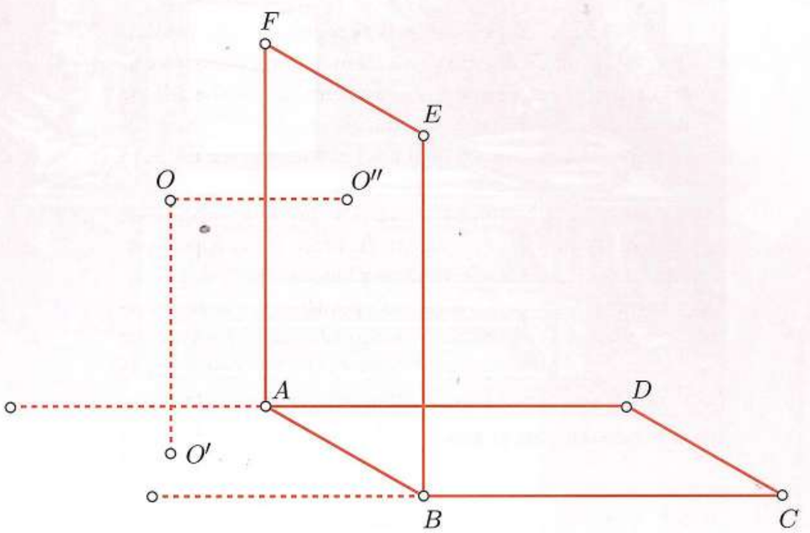


Figura 5.

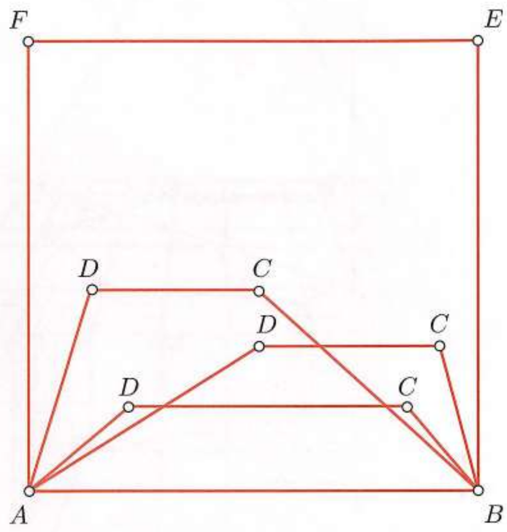


Figura 6.

quarto ou o tampo de uma mesa, muito frequentes em pinturas da época. Embora rapidamente possamos perceber que tipo de figura iremos ver como representação do quadrado, sem um auxiliar mecânico deste tipo teremos que encontrar uma construção rigorosa, no plano, para a traçar.

Mais concretamente, observemos a figura 5. O plano vertical do quadro do pintor é $ABEF$ e está assente sobre o bordo AB do tampo quadrado $ABCD$ de uma mesa horizontal. O ponto O é o ponto de vista do pintor (acrescentámos as projecções ortogonais O'' e O' desse ponto de vista, respectivamente sobre o plano do quadro e sobre o plano horizontal, para se ver melhor em perspectiva cavaleira a posição do ponto O). Note-se que se o pintor não pode utilizar um processo mecânico, como o do perspectógrafo de Dürer, apenas tem diante de si um quadro quadrado $ABEF$ e sabe que o tampo horizontal ABCD é um quadrado igual. O problema — como obter a imagem do quadrado horizontal no plano do quadro? — reduz-se portanto a saber onde deverão ser desenhados no quadrado $ABEF$ as imagens dos vértices C e D do quadrado horizontal, (pois é óbvio que os pontos A e B se representam a si mesmos no quadro do pintor). Para quem já tem alguma facilidade em visualização espacial — como era certamente o caso de Piero —, é quase óbvio que CD vai ser um segmento paralelo ao segmento AB. Mas diversas posições são possíveis... e diversos comprimentos também, como na figura 6! Como determinar a imagem verdadeira de CD?

Resumindo, temos agora dois problemas:

1. A que distância de AB fica o segmento CD?
2. Qual o comprimento de CD?

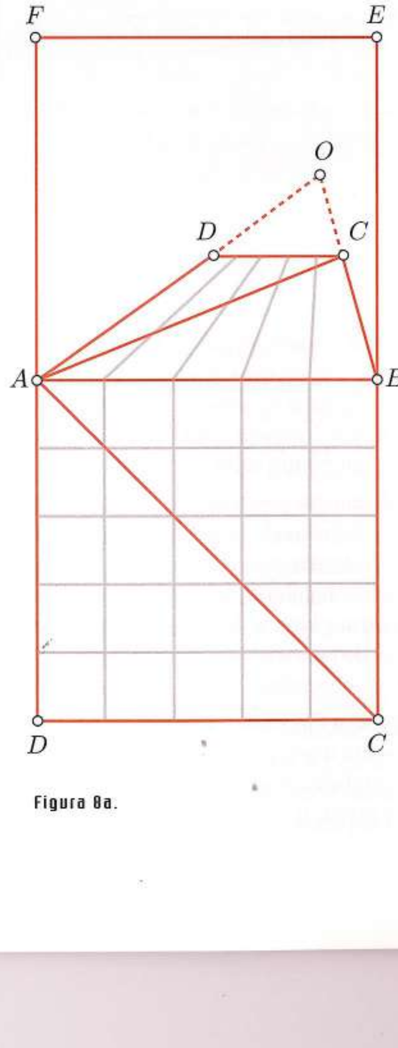


Figura 8a.

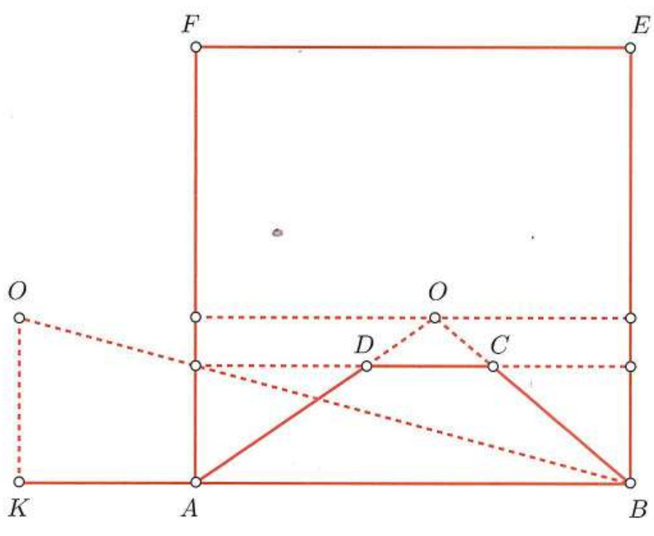


Figura 7.

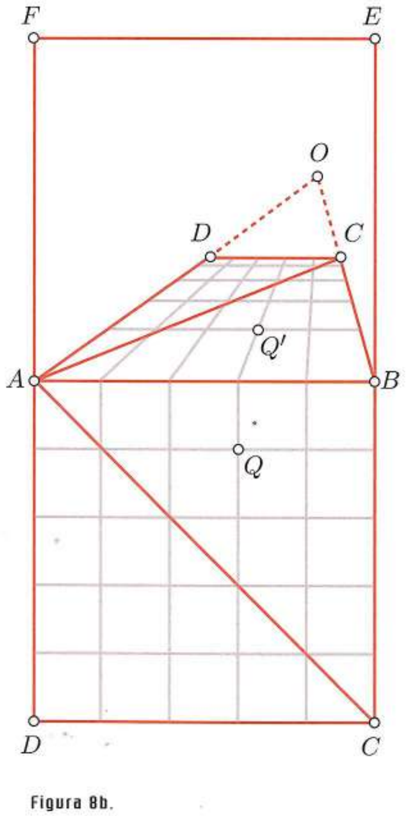


Figura 8b.

Piero resolve estes dois problemas nas suas proposições I.12 e I.13, com demonstrações rigorosas de resultados já descobertos por Alberti.

Note-se que qualquer destes dois problemas são resolvidos por Piero em geometria plana, sem mostrar quaisquer figuras auxiliares em perspectiva cavaleira, desconhecida na altura. Assim, apenas podemos imaginar qual era a visualização espacial que Piero estava a ter como suporte das suas demonstrações no plano.

A solução final englobando os dois problemas pode ser descrita pela figura 7. O segmento KA tem por comprimento a distância do ponto de vista ao plano do quadro do pintor. O segmento OK é a altura do ponto de vista relativamente ao plano horizontal. O ponto O situado no interior do quadro representa a projecção ortogonal do ponto de vista O no plano do quadro (a letra que designa o ponto é a mesma, como era habitual em Piero della Francesca). A posição (em altura) da imagem do segmento CD, paralela a AB, obtém-se unindo por um segmento o ponto de vista com o ponto B e determinando a sua intersecção com AF. Finalmente, o comprimento do segmento imagem CD obtém-se por meio dos segmentos OA e OB, como indicado na figura. Assim, *o quadrado $ABCD$ no plano horizontal transforma-se no trapézio $ABCD$* no quadro do pintor (ver simultaneamente as figuras 5 e 7). Antes de Piero o ponto O (interior ao quadro) estava sempre situado a igual distância dos lados verticais do quadrado, mas esta demonstração mostra que isso não é necessário. Ou seja, esta construção é válida para qualquer posição do ponto de vista em relação ao quadro (portanto não necessariamente central). Não temos espaço para apresentar aqui as demonstrações de Piero das proposições I.12 e I.13, mas o leitor pode recorrer a um esplêndido artigo no *Mathematical Intelligencer* (e ficar a conhecer, se ainda não conhece, uma estimulante revista sobre matemática, de leitura sempre muito acessível).[6]

Perspectiva de um pavimento

Na proposição I.15 Piero dá instruções para a construção em perspectiva de um quadrado horizontal mas quadriculado, ou seja dividido num certo número de quadrados mais pequenos, por exemplo 25 (5×5). É o problema da perspectiva de um pavimento, elemento presente em tantas pinturas da época. Na figura que Piero utiliza como ilustração das suas instruções, o quadrado e o trapézio são representados numa mesma figura plana, que inclui ainda o ponto O (projecção ortogonal do ponto de vista sobre o quadro do pintor) (figuras 8a e 8b). Piero traça as diagonais AC do quadrado e do trapézio (figura 8a) e depois diz naturalmente que o "quadriculado" do trapézio se obtém unindo os pontos de divisão de AB com O e traçando em seguida paralelas a AB pelos pontos de intersecção daqueles segmentos com a diagonal (figura 8b). Como pode ver nesta última figura, ao ponto Q (vértice da quadrícula no pavimento dado) corresponde o ponto Q' no pavimento em perspectiva.

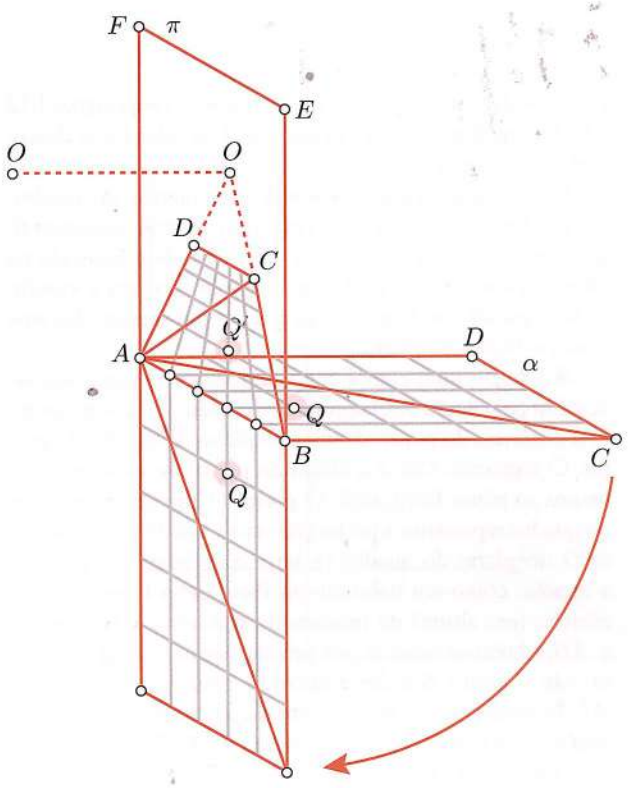


Figura 9a.

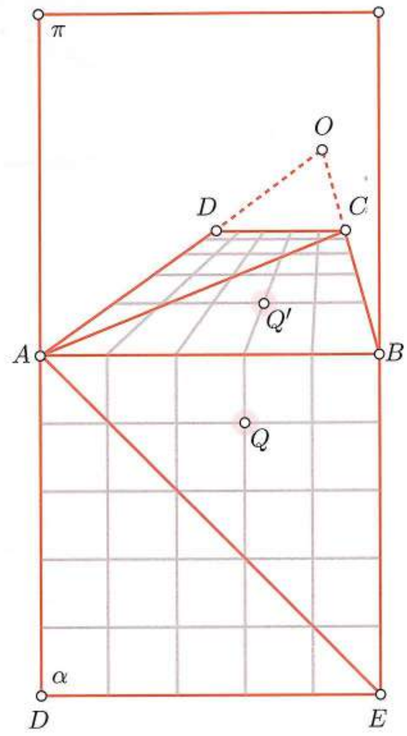


Figura 9b.

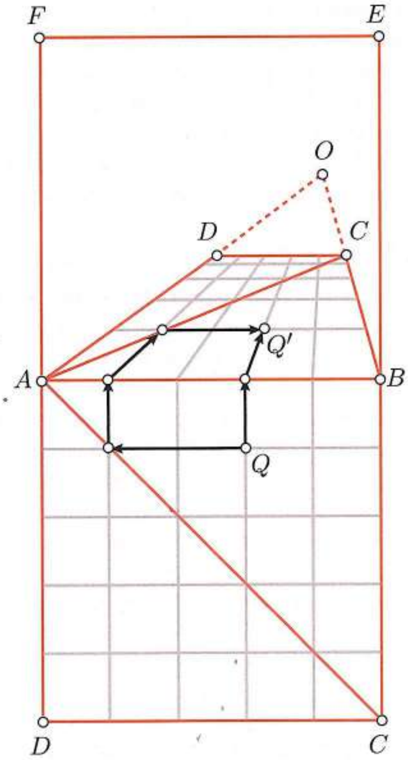


Figura 10.

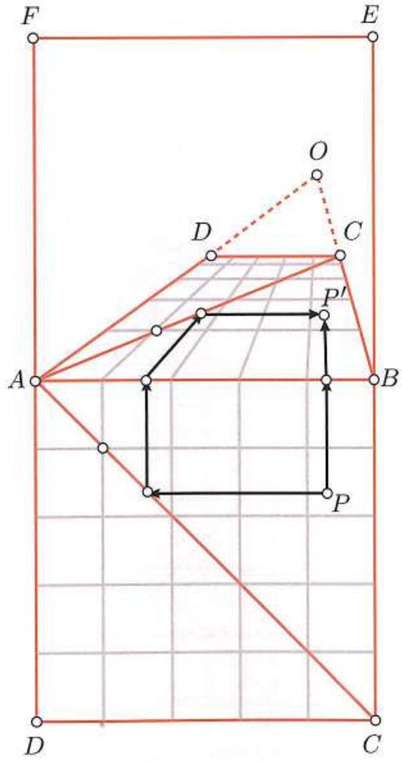


Figura 11.

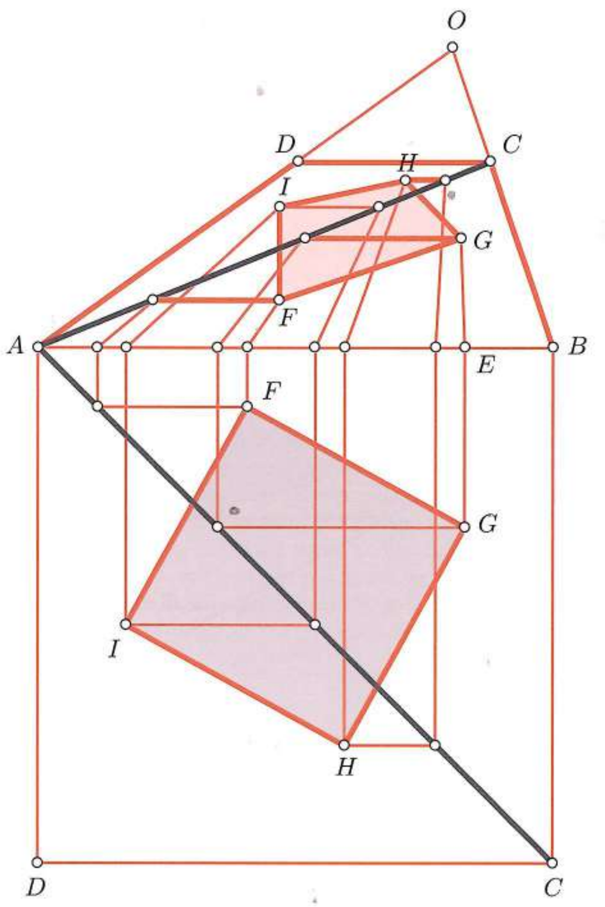


Figura 12.

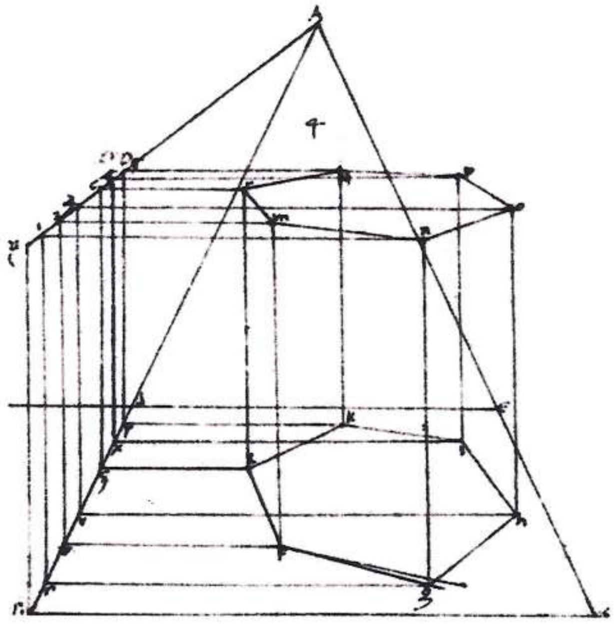


Figura 13.

Sobre a visualização no espaço que Piero estava a usar para construir esta figura plana, nada sabemos. Mas podemos imaginar (figuras 9a e 9b):

- que partia da situação de dois planos, um horizontal α e outro vertical π, onde estavam situados o quadrado e o trapézio;
- que, dado o ponto de vista O, cada ponto Q do quadrado (no plano α) ficava a corresponder um ponto Q' do trapézio: imaginar a recta que passa por O e por Q; Q' será a intersecção dessa recta com o plano π;
- finalmente, procedia a uma rotação de eixo AB e ângulo 90°, levando o plano α a coincidir com o plano π, obtendo assim a figura plana que ilustra a sua demonstração.

Perspectiva de uma figura desenhada sobre um pavimento

Estando completamente resolvida na proposição I.15 a questão do traçado de um pavimento em perspectiva, é um pequeno passo para Piero fornecer um conjunto de instruções para obter a perspectiva de qualquer figura situada sobre esse pavimento.

As próprias linhas do quadriculado e da sua perspectiva servem de guias para fazer corresponder ao vértice Q do quadriculado o vértice Q' do quadriculado em perspectiva (figura 10); e sugerem como se pode fazer corresponder a qualquer ponto P do interior ou da fronteira do quadrado o ponto P' do interior ou da fronteira do trapézio que representa o quadrado em perspectiva (figura 11). Em termos modernos, a correspondência $P \rightarrow P'$ é uma aplicação biunívoca do quadrado $ABCD$ (interior e fronteira) sobre o trapézio $ABCD$ (interior e fronteira). A aplicação $P' \rightarrow P$ (cujo traçado é evidente) é a aplicação inversa da anterior.

Seguem-se, no tratado que estamos a percorrer, uma série de proposições em que é aplicado o resultado anterior. Em particular, Piero dá instruções sobre os traçados em perspectiva de diversos polígonos situados no interior do quadrado $ABCD$: triângulo equilátero (I.18), hexágono regular (I.19), pentágono regular (I.20), quadrado (I.25), octógono (I.26). Damos como exemplo uma adaptação da ilustração de Piero para o caso do quadrado (figura 12). No livro II, Piero estende o seu método ao traçado perspectivo de prismas tendo por bases polígonos situados no interior do quadrado $ABCD$ (figura 13, caso do hexágono).

Piero trata sempre da perspectiva de figuras limitadas, nomeadamente de figuras contidas no quadrado que designámos por $ABCD$. Não sabemos, nem certamente viremos a saber alguma vez, se Piero colocou a questão de saber se a sua aplicação se podia prolongar a todo o plano. Podemos apenas constatar que no seu tratado não está explicitamente considerada essa extensão (de resto, o seu valor prático seria bem pequeno num livro de instruções para pin-

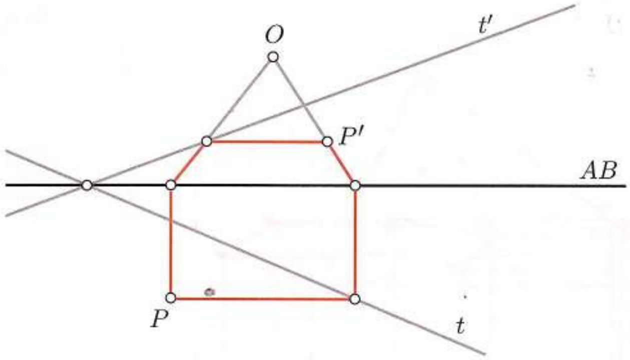


Figura 14.

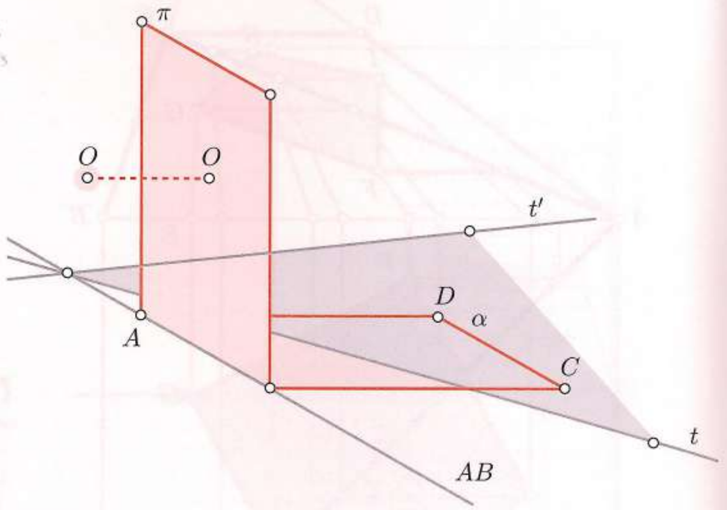


Figura 15.

tores...). Vamos estudar esse prolongamento no ponto seguinte, e veremos que é uma aplicação projectiva cuja paternidade é justo atribuir ao geómetra Piero della Francesca.

Transformação projectiva de Piero

Que problemas nos surgem quando pretendemos estender o método de Piero a todo o plano? Um problema surge imediatamente (figura 12): se o vértice G do quadrado, por exemplo, estivesse um pouco mais para o lado direito, no exterior do quadrado $ABCD$, não podíamos obter a intersecção E nem, portanto, a imagem perspectiva de G, pois o segmento EA não existia. Além disso, percebemos que na construção de Piero, além das intersecções com AB, são essenciais as intersecções com as diagonais. Assim, somos levados a fazer as seguintes alterações à situação criada por Piero (obtendo a figura 14):

- Substituímos o segmento AB pela recta AB;
- substituímos as diagonais AC (resp. do quadrado e do trapézio) por duas rectas (resp. t e t'); note-se que a diagonal do trapézio é a transformada da diagonal do quadrado pela transformação de Piero; é intuitivo que para obtermos um prolongamento da transformação de Piero a todo o plano, a recta t, que substitui a diagonal do quadrado, deve ser transformada na recta t', que substitui a diagonal do trapézio; e é óbvio, de tudo o que vimos, que para que assim seja t e t' devem ter um ponto comum sobre a recta AB;
- mantemos o ponto O como projecção ortogonal do ponto de vista sobre o quadro do pintor.

Tendo em atenção que AB, t e t' são agora rectas, a construção de Piero que faz passar de P para P' parece ser possível para todos os pontos P do plano (as intersecções fundamentais para a construção parecem existir sempre!).

Notemos ainda que, se imaginarmos que a recta t está no plano α, que a recta t' está no plano π ortogonal a α, que O é a projecção ortogonal sobre π do ponto de vista, e que a recta AB é a intersecção dos dois planos, caímos na situação espacial anterior, em que a transformação de Piero não era mais do que uma projecção central, com centro no ponto de vista (tente o leitor compreender este facto fundamental, observando a figura 15).

Em resumo: *Dadas no plano três rectas, AB, t e t', de tal modo que t e t' têm um ponto comum sobre AB, e dado ainda um ponto O, parece ficar definida uma transformação do plano sobre si próprio que é um prolongamento da transformação de Piero, que este apenas definiu para o interior e a fronteira de um quadrado. Esta transformação pode imaginar-se, tal como a de Piero, que foi obtida a partir de uma projecção central, como explicado anteriormente.*

Escrevemos "parece ficar" porque nada nos prova ainda que a construção é válida para todo o ponto P do plano. Não há nada como experimentar, e o melhor meio de o fazer é utilizar o *Sketchpad*. A figura 16 foi obtida no *Sketchpad* da seguinte maneira:

- Traçámos as rectas AB, t e t' e marcámos um ponto O como indicado anteriormente;
- construímos uma circunferência a e marcámos um ponto P sobre ela;
- pela construção de Piero (usámos uma ferramenta já preparada) obtivemos o ponto P';
- seleccionámos os pontos P e P' e pedimos (no menu *construct*) o *locus* (lugar geométrico de P' quando P percorre a circunferência a); o lugar geométrico, ou seja a

Note que:

- Os paralelogramos a vermelho apenas servem para indicar as posições dos planos α horizontal e π vertical;
- A recta AB é a intersecção dos dois planos;
- A recta t está no plano α e a recta t' no plano π, tendo um ponto comum na recta AB;
- O triângulo azul, em parte escondido pelo plano π, serve para indicar o plano definido pelas rectas t e t';
- A ortogonal a π passando pelo ponto O de π intersecta o plano das rectas t e t' num ponto (bola vermelha) que é o centro da projecção central, que faz corresponder t' a t; vemos assim que dadas num plano as rectas AB, t e t' nas condições indicadas anteriormente e ainda um ponto O, fica definida uma projecção central, como indicado nas figuras 9a e 9b; o que fazemos aqui é partir da situação da figura 9b para chegar à situação da figura 9a.

imagem da circunferência pela transformação, é no caso da figura a elipse a';

- arrastámos a circunferência para a posição b e obtivemos como imagem a hipérbole b'...; que se passa?

Voltemos à situação espacial. Recordemos que tudo começou com a procura de um método para representar no plano π as figuras situadas num plano α quando vistas a partir do ponto de vista O. Geometricamente, o que temos é uma projecção central de centro O: dado um ponto P do plano α, a sua imagem em π por meio dessa projecção central obtém-se encontrando a intersecção da recta OP com o plano π (e a transformação de Piero, que nós tentámos prolongar a todo o plano, não é mais do que um processo de desenho, num único plano — recordar as figuras 9a e 9b —, para encontrar essa imagem). O que acontece é que essa intersecção — da recta OP com o plano π — não existe para nenhum ponto de uma recta, designada por u na figura 17. Esta recta pode obter-se intersectando α pelo plano que passa por O e é paralelo a π; com efeito, as imagens de todos os pontos de u não existem, pois as rectas definidas por O e por um ponto qualquer da recta u são paralelas a π! Arriscando dizer em poucas palavras o que exigiria muitas páginas, a imaginação de Desargues conduziu-o ao seguinte:

- a imagem de qualquer recta de α (com excepção de u), por meio da projecção central, é uma recta em π:
- as imagens dos pontos de u deveriam "então" formar uma recta, mas nenhuma dessas imagens está a distância finita;
- então a imagem de u é *a recta do infinito* do plano π. A recta u é a chamada *recta de fuga* da transformação $P \rightarrow P'$.

Observações análogas, relativas à transformação inversa (que faz passar de P' em π para P em α), levariam à consideração de uma recta de fuga v no plano π, que se obtém traçando a paralela à intersecção dos dois planos passando pela projecção ortogonal do ponto de vista sobre π.

Vemos assim que:

- é possível prolongar a transformação de Piero (e a sua inversa) a todo o plano α (resp. π) se completarmos cada um dos planos com a sua recta do infinito;
- em cada um dos planos fica definida uma recta (u em α e v em π) cuja imagem pela projecção central é a recta do infinito do outro plano;
- obtemos desta forma uma bijecção entre os planos α e π, completados com as respectivas rectas do infinito.

Podemos proceder depois como já fizemos para a transformação inicial de Piero e está indicado nas figuras 9a e 9b, e obter assim uma transformação de um plano sobre si próprio (resultado da identificação dos dois planos). Este é um dos processos clássicos de obter uma transformação projectiva de um plano (aumentado com a recta do infinito) sobre si próprio. Assim, a transformação, imaginada por Piero num livro de instruções sobre perspectiva para pintores, é uma transformação projectiva. Como Desargues descreveu, a projecção central de uma secção cónica ainda é uma secção cónica, e as imagens obtidas a partir de uma circunferência pela transformação de Piero são agora naturais.

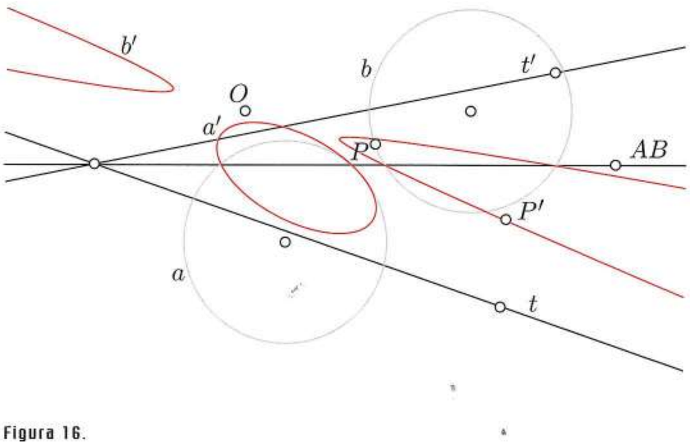


Figura 16.

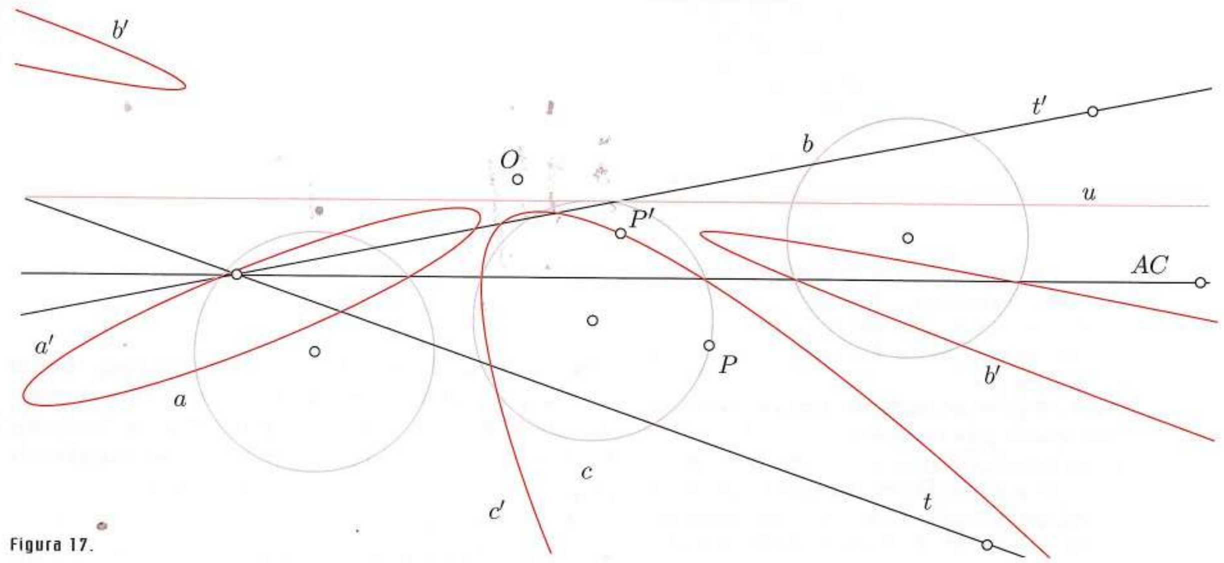


Figura 17.

Regressemos assim à figura 16 (agora chamada 17), à qual acrescentámos a recta de fuga u. Além disso, acrescentámos uma terceira circunferência c e a sua imagem c'. Constatamos que:

- a circunferência a não intersecta a recta u, e portanto todos os pontos da sua imagem pela transformação prolongada de Piero estão a distância finita: a' é uma elipse;
- a circunferência b intersecta a recta de fuga u em dois pontos, e portanto dois pontos da sua imagem estão no infinito: b' é uma hipérbole;
- a circunferência c é tangente à recta u, e portanto um dos pontos da sua imagem está no infinito: c' é uma parábola.

"Moral da história"

A geometria pode ser um tema apaixonante da matemática escolar, nomeadamente porque apresenta múltiplas conexões estreitas com temas da arte. Em particular, a geometria projectiva elementar devia ser um tema da geometria no ensino secundário, pois abre portas e revela factos que nas outras geometrias ficam encobertos — por exemplo, a invenção do infinito e a existência de três tipos de secções cónicas. É também importante na compreensão cultural — e não exclusivamente técnica — da matemática e dos seus processos, um desejável objectivo central do seu ensino a todos os cidadãos. Nesta época de reajustamentos conservadores dos programas e de objectivos economicistas na educação dos jovens portugueses, espero que os leitores possam descobrir, para lá das minhas pobres palavras, um mundo diferente e apelativo na educação matemática.

Notas

1. Este artigo resulta de uma paixão antiga pela pintura de Piero della Francesca, da descoberta feita há poucos anos do geómetra Piero e do recente trabalho, em conjunto com Rita Bastos, sobre transformações geométricas, em particular as transformações projectivas. No entanto os disparates que porventura existam neste texto são meus, não da Rita. Para acompanhar melhor a leitura deste artigo, pode recorrer ao documento *Sketchpad* de que pode fazer o *download* a partir do endereço `www.apm.pt`, na página correspondente a este artigo on-line.
2. Girard Desargues (1591–1661), *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, 1639.
3. Ver, por exemplo, Coxeter, *Projective Geometry*, pág. 38.
4. O presente artigo refere-se fundamentalmente a este tratado de perspectiva, sendo extraídas dele as respectivas ilustrações de Piero. Ver na bibliografia duas edições, uma em italiano e outra em francês, numa tradução a partir do latim.
5. Em Lisboa, no Pavilhão do Conhecimento, Exposição *Matemática Viva*. Endereço do Atractor: `http://www.atractor.pt`.
6. Ver Peterson na bibliografia.

Bibliografia

Coxeter, H.S.M. *The Real Projective Plane*. Springer-Verlag, New York 1992.

Coxeter, H.S.M. *Projective Geometry*. Springer, New York 2003.

Francesca, Piero della. *De la Perspective en Peinture*. Tradução em francês do original em latim. In Medias Res, Paris 1998.

Francesca, Piero della. *De Prospectiva Pingendi*. Edição em italiano. Casa Editrice Le Lettere, Florença, 1984.

Lavin, Marilyn Aronberg org. *Piero della Francesca and His Legacy*. National Gallery of Art, Washington 1995.

Lavin, Marilyn Aronberg. *Piero della Francesca*. Phaidon, London 2002.

Lehmer, Derrick Norman. *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. Grátis online, edição 2005. The Guttenberg project. `http://www.gutenberg.org/etext/17001`.

Francesca, Piero della. *De la Perspective en Peinture*. Tradução em francês do original em latim. In Medias Res, Paris 1998.

Francesca, Piero della. *De Prospectiva Pingendi*. Edição em italiano. Casa Editrice Le Lettere, Florença, 1984.

Peterson, Mark A. The Geometry of Piero della Francesca, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, 1997.

Se o leitor quer iniciar-se em geometria projectiva, o livro mais acessível é o de Derrick Lehmer, e a seguir o *Real Projective Plane*, de Coxeter.

Eduardo Veloso

A Geometria na proposta de ajustamento — algumas questões

A geometria tem sido ao longo dos tempos um dos assuntos menos trabalhados no ensino básico. Torna-se por isso mesmo mais premente encontrar modos de a propor e apresentar aos professores que visem facilitar essa entrada e instalação na sala de aula. Para este breve apontamento elegi dois aspectos que me parecem cruciais e que, em meu entender, ainda não foram bem resolvidos na proposta de ajustamento.

O primeiro ponto refere-se às capacidades transversais que nesta proposta de ajustamento assumem um papel fundamental muito destacado.

Uma das características cruciais da geometria, aliás como em tudo na matemática, é que ela não se limita ao conhecimento de factos e procedimentos pois são várias as capacidades que estão envolvidas na sua aprendizagem. Visualização, representação, raciocínio e comunicação são capacidades transversais presentes no estudo da geometria. E, reciprocamente, a geometria dá contributos únicos e específicos para o desenvolvimento destas capacidades.

Partindo assim da proposta organizativa do ajustamento, em que estão separadas as capacidades transversais dos tópicos temáticos, penso que deveriam ter sido também eleitas como capacidades a desenvolver a *visualização* e a *representação*.

Tal não acontece na proposta que esteve em discussão. É verdade que a *representação* aparece como um sub ponto da *comunicação* o que me parece muito limitativo desta capacidade. No que respeita à *visualização*, ela aparece referida no desenvolvimento do tema geometria, tanto no propósito principal de ensino como nos objectivos de aprendizagem. Mas esta capacidade não está exclusivamente ligada à geometria e merece obviamente um tratamento análogo às outras, isto é, com o devido destaque no texto. A *visualização* e a *representação* são duas capacidades que, para além do seu valor próprio, são também capacidades de conexão muito fortes. Reconheço que talvez não haja muitas experiências de inovação curricular em Portugal que se tenham debruçado sobre este assunto, mas há muito conhecimento didáctico já produzido sobre elas e que será uma excelente orientação para a produção de materiais de apoio aos professores.

Não aceito que a justificação para o destaque de uma capacidade seja o facto de não haver trabalhos de inovação curricular realizados em Portugal. Não são certamente as orientações deste documento sobre Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação matemática que vão ajudar os professores a dar-lhes relevância na sua prática. Terá que haver bons documentos de apoio. Ora o mesmo podemos dizer para as duas capacidades que referi, a que sou muito sensível e às quais reconheço uma importância fundamental nos primeiros anos.

O segundo ponto que questiono é a opção sobre as opções de caracterização dos tópicos em geometria. O que devemos valorizar nos primeiros anos, os objectos geométricos ou as acções sobre os objectos? Façamos um paralelo com os números. Há alguém que esteja preocupado em definir número no ensino básico? Ou definir adição, ...? O que fazemos, e bem, é ir trabalhando com números para um dia olhar para todos eles e começar a organizá-los. E então até pensar que podemos construir números de outros tipos sem limites para a nossa capacidade criativa. Mas quando é que isto acontece?

Por que é que para a geometria procedemos de maneira inversa? A tendência dominante é para começarmos por dizer o que é uma figura geométrica e depois afinarmos logo o leque de figuras. Para além de triângulos e quadriláteros, prismas e pirâmides, não haverá mais objectos matemáticos interessantes para trabalhar nos primeiros anos? E para eu saber o que é um quadrado, haverá melhor estratégia de aprendizagem do que trabalhar e actuar sobre quadrados de diversas maneiras?

Nos níveis mais elementares, o que se pode fazer com um quadrado? Dar um nome? Dizer o que é? Poderíamos listar uma série de ideias do que é interessante fazer.

Em meu entender, o trabalho em Geometria nos primeiros anos deve centrar-se mais nos tipos de acções do que nos objectos matemáticos sobre os quais essas acções se realizam, sob pena das crianças apenas aprenderem nomes de figuras e começarem a distingui-las apenas pelo seu aspecto ou posição. As acções como classificação, composição, decomposição e construção devem ter um destaque especial, à semelhança do que esta proposta de reajustamento já apresenta para *orientação* e *localização*. É evidente que estas acções, ao ocorrerem sobre os objectos da geometria, fazem esses objectos aparecer, serem manipulados, serem conhecidos e designados. Mais tarde, são os objectos matemáticos que vão ganhar identidade e passar a ser objecto de estudo. Na proposta apresentada são as figuras que dão as entradas dos tópicos e por isso são elas que aparecem destacadas. Assim, a orientação e o desenvolvimento dos tópicos deveriam ir no sentido de destacar estas acções e não os objectos. Para reforçar ainda mais esta ideia é importante ter em conta que os objectos à nossa volta são das mais diversas formas. Para quê limitar os objectos de estudo se é da riqueza existente e acessível que pode nascer o interesse de estudar alguns objectos em especial?

Poderá sempre argumentar-se que com esta proposta de reajustamento estas orientações aqui defendidas serão uma opção didáctica que o professor pode seguir. Mas fico com alguma mágoa que faltem ou falhem algumas ideias chave que me parecem facilitadoras destas opções didácticas. Penso que a geometria vai continuar a ficar à porta das salas de aula.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

A Geometria perde peso?

Ao elaborar-se um programa para o ensino da matemática, é necessário tomar decisões com as quais, podermos concordar ou discordar. Eu, pessoalmente, gosto mais deste *novo programa* do que do anterior e até aprecio o facto, de quando quiser preparar aulas, bastar ler um documento. Pode não ser ainda o documento *perfeito* (talvez nunca exista) por vezes até pouco claro, mas dá liberdade de decisão aos professores sobre as sequências de aprendizagem a proporem aos alunos e até onde essas aprendizagens podem ir.

Focando a atenção nas opções tomadas quanto à geometria e ao seu ensino no 3° ciclo, e nunca me desassociando do facto de pertencer há uma década ao Grupo de Trabalho de Geometria que tem dedicado anos a aprofundar várias questões relacionadas com os tópicos presentes neste reajustamento, impõem-se algumas questões, possivelmente já consideradas pelos autores no período posterior ao da discussão pública: (i) Que notação adoptar, uma vez que esta tem sido deixada um pouco ao sabor dos autores dos manuais escolares?; (ii) Porquê limitar a experiência geométrica dos alunos apenas à geometria euclidiana?; (iii) Porquê a eleição das translações, separando-as da reflexão e da rotação no 3° ciclo? (iv) Estará claro neste reajustamento que o ensino da geometria não se cinge ao estudo de nomes e medidas? (v) Porquê a limitação do estudo dos objectos geométricos aos polígonos e sólidos *tradicionais* e não ir um pouco mais além, utilizando como ponto de partida programas como por exemplo o *Poly*?

É visível que alguns dos tópicos geométricos foram antecipados um ciclo em relação ao actual programa. Terão os alunos maturação intelectual para apenas (pois alguns não são referidos no 3° ciclo) os estudarem mais cedo? Existirá mais tempo nos horários dos alunos do 2° ciclo para ensinar matemática, ou alguns dos tópicos de geometria, apontados para este ciclo, avançarão para o 3° ciclo, engrossando a lista dos que já lá se encontram?

Relendo uma vez mais os tópicos dos quatro grandes temas temáticas do 3° ciclo parece que é à custa do *empobrecimento* da geometria que surgem assuntos a serem tratados nos outros temas. O facto de não existir referência ao peso relativo que deve ser atribuído aos diversos temas, poderá levar a que geometria tenha perdido peso no programa de Matemática no 3° ciclo? Talvez não!...

Nuno Candeias
Escola EB 2,3 Vasco Santana

O reajustamento do programa de Geometria do 2° ciclo

O reajustamento do programa de Matemática do 2° ciclo, pecando pela ausência de avaliação do programa em vigor, valoriza a área de geometria, através do tema *Geometria e Medidas*, e impulsiona o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial do aluno.

O currículo continua construído em espiral, sem distinção clara entre as novas aprendizagens e as que os alunos deverão trazer do ciclo anterior. Por exemplo, há falta de clareza quando se diz que no 2° ciclo "o perímetro é trabalhado com outras figuras geométricas (círculo, polígonos regulares mais complexos, ...)". Onde reside a maior complexidade dos polígonos regulares? No maior número de lados!? Sabendo o que são polígonos regulares e o comprimento de um dos lados, em que consiste o conhecimento acrescentado para o cálculo do perímetro!?

Pela positiva, destaca-se a ênfase nas experiências de aprendizagem, as notas que acompanham os tópicos, a referência à importância do uso de instrumentos de medida e desenho, de materiais manipuláveis e de programas computacionais de geometria dinâmica, bem como a interligação entre este e outros temas, como o dos números racionais.

Porém, mantendo-se a carga horária semanal, não se afigura exequível um programa de geometria (e não só) assaz exigente, com tão diversificadas experiências de aprendizagem, com a introdução de um novo tópico e o aprofundamento de alguns outros.

Por fim, não deverá ser submestimada a importância da formação de professores nesta área e a produção de materiais de apoio, particularmente para a abordagem da nova temática de *rotações e translações* com alunos de 10/11 anos.

Helena Rodrigues
Escola E. B. 2,3 Vasco Santana

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Às voltas com noções a aptidões geométricas no cubo...

Paulo Dias

Será que ainda não vimos tudo o que há no cubo? *Tudo o que há num cubo*... foi um artigo de Eduardo Veloso, publicado na *Educação e Matemática* nº 26, em 1993, uma actualidade que se tornou recomendada nos programas de Matemática A e Matemática B, em 2004.

No programa de Matemática B, a "Geometria inclui assuntos de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonométrica, com as competências de cálculo numéricas a elas associadas" (DES, 2001, p. 2). Nesta disciplina, ao nível da Geometria, preconiza-se o desenvolvimento das seguintes competências matemáticas: a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis, a computadores e calculadoras gráficas; a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio (espacial ou outro) na análise e tratamento de situações problemáticas e na resolução de problemas. Também, é sugerido que no tema de Geometria se insista no trabalho por via intuitiva com uma grande ênfase no desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

Os episódios de aula relatados neste texto dizem respeito a aulas do 10° ano de uma turma de Matemática B (10° A4), no entanto, a actividade desenvolvida pelos alunos podia, com as devidas adaptações, ser proposta a alunos de qualquer ano. Na Matemática B, com o intuito de consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais do 3° ciclo, existe um Módulo inicial, onde um dos enunciados dos problemas propostos é o seguinte: "Que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?" (DES, 2001, p. 19). Para obter a resposta a este problema foi necessário fazer um longo caminho, os alunos envolveram-se em várias actividades, construíram intuitivamente noções geométricas e desenvolveram as suas aptidões geométricas. Exploraram "um dos sólidos mais simples e mais conhecido, supostamente, é o cubo" (Veloso, 1993, p. 26).

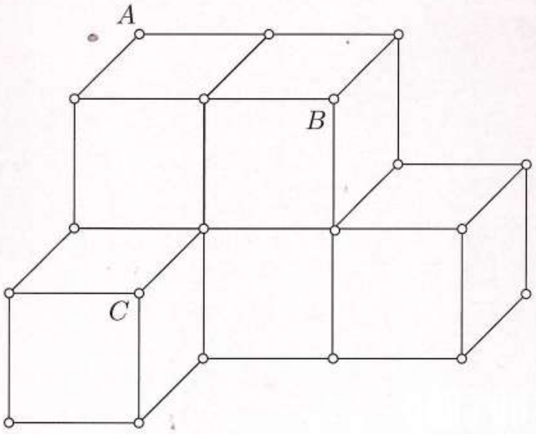


Figura 1

Figura 2

Vamos empilhar cubos

A figura 1 representa um conjunto de cubos empilhados, quantos cubos são necessárias para a reproduzir? A questão é simples e pode assumir vários graus de complexidade, com mais ou menos cubos, consoante a faixa etária dos alunos. Este "monte" de cubos, expressão usada pelo João (aluno do 10° A4), é fácil de construir com material manipulável (*polidrons* — figura 2) e pode ser colocado em posições distintas. Depois de empilhar os vários cubos, representa no papel o que vês quando te colocas na vista de cima. E do lado esquerdo, observas o mesmo? (figura 3)

Esta capacidade de visualização, que está relacionada com a percepção das relações espaciais (Matos & Gordo, 1993), pode ser trabalhada com os alunos do primeiro ciclo ou do pré-escolar. No secundário, verifiquei que a generalidade dos alunos do 10° ano não a detém. Por um lado, porque não conhecem as diferentes perspectivas que os ajudam a representar no papel o que se vê, não distinguem as regras a que é necessário obedecer (por exemplo na perspectiva cavaleira ou na perspectiva do ponto de fuga). No caso da perspectiva cavaleira, os alunos tendem a desenhar o cubo com todas as arestas em verdadeira grandeza, esquecendo que "as faces de frente para o observador são em verdadeira grandeza e as arestas paralelas são representadas por segmentos paralelos" (Loureiro *et al.*, 1997, p. 78). Por outro lado, os alunos têm dificuldade em conhecer as propriedades que permitem distinguir os diferentes objectos geométricos.

Planificação do cubo

Mas, afinal o que é um cubo? Disse-me o Miguel. É um poliedro regular, convexo, com 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Desisto — disse o Miguel. Não, espera! Sabes o que é um quadrado? — disse. O Miguel responde que sim. Ah — retorquiu o Miguel — Já sei, um cubo é um conjunto de 6 quadrados! Não, não, ... Um cubo é ... um cubo. E fui explicando ao Miguel, — Não é verdade que qualquer disposição de 6 quadrados adjacentes podem formar um cubo. Às disposições de 6 quadrados chamam-se hexaminós, existem 35 figuras nessas condições e com apenas 11 delas é possível obter o cubo. E entrámos numa nova actividade de investigação: quais as disposições de seis quadrados que formam um cubo? (figura 4)

A Neise resolve colocar a questão "fatal", com a qual, todos os anos, me confrontam: — para que é que isto serve? A resposta surge através de um problema: "Uma formiga está no centro de uma face do cubo que tem 10 centímetros de aresta. A certa altura decide mudar-se para o centro de outra face, passando por todas as outras faces. Contudo,

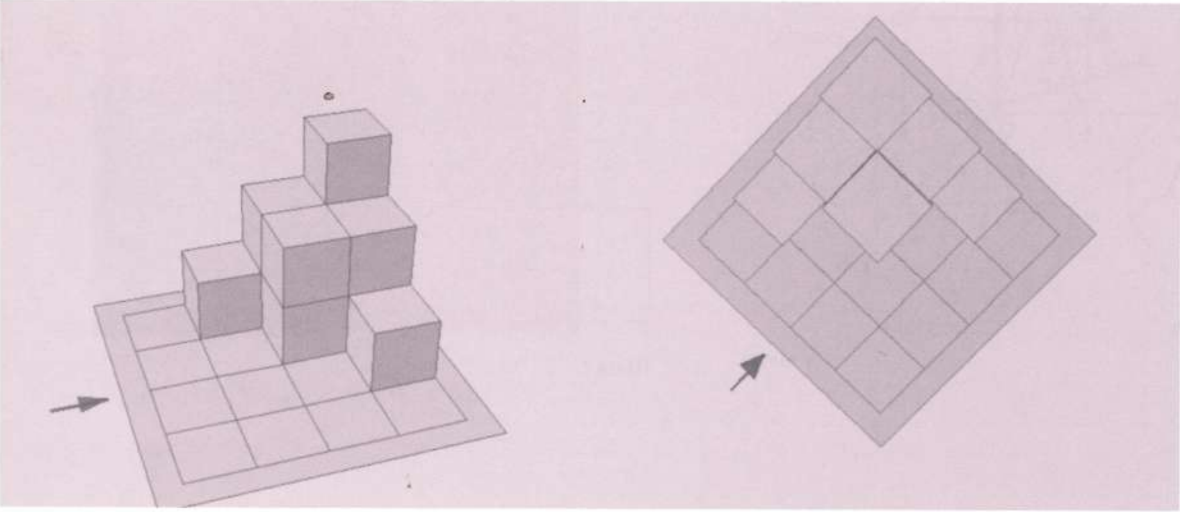


Figura 3.

a formiga tem receio dos vértices e por isso nunca passa a menos de um centímetro deles. Qual é o trajecto mais curto que a formiga consegue fazer? (O problema deste número, *Educação e Matemática* n° 41).

O caminho mais curto, são problemas de optimização que podem ser usados com outros sólidos, desenhar a planificação (figura 5) permite a visualização de possibilidades que, no modelo ou na representação em perspectiva, podem não ser perceptíveis. — Porque usamos tanto o cubo? — O Cubo é-nos mais familiar e é mais fácil de desenhar, de compreender e de relacionar, é por isto que usamos o cubo tantas vezes. Não terás de saber qual o trajecto mais curto de uma formiga, mas podes querer saber onde deve passar o fio, numa sala, para ligar a lâmpada à tomada (sem que o fio fique suspenso) e propus um novo problema.

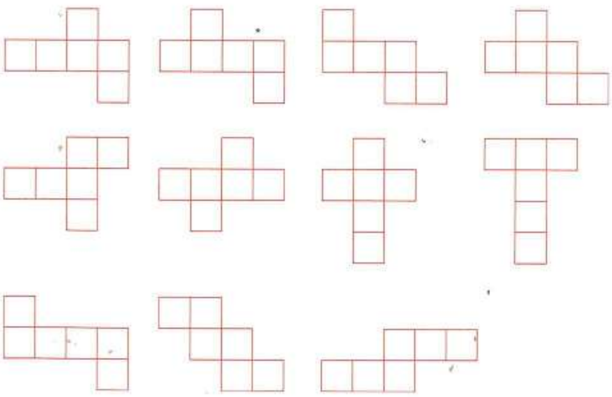


Figura 4

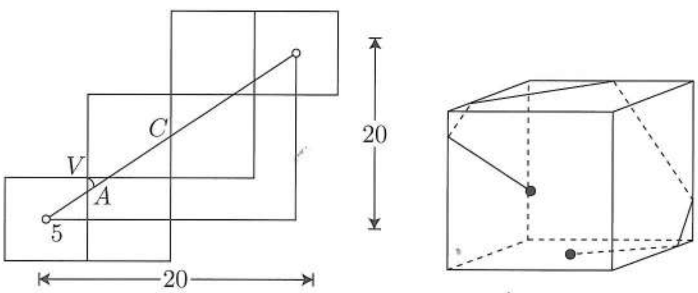


Figura 5

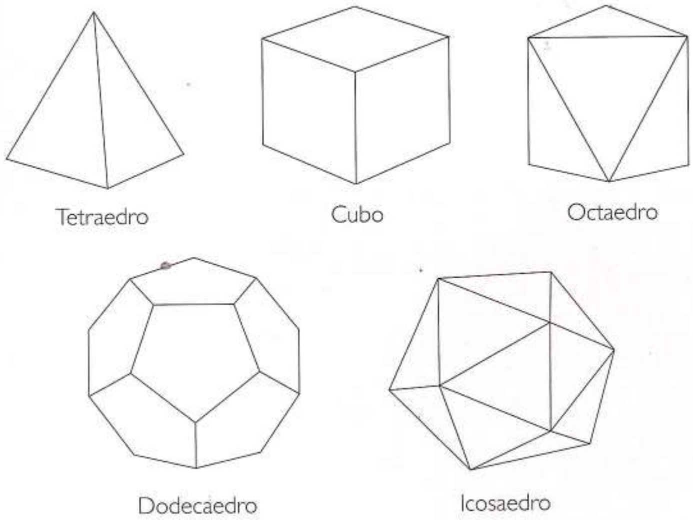


Figura 6.

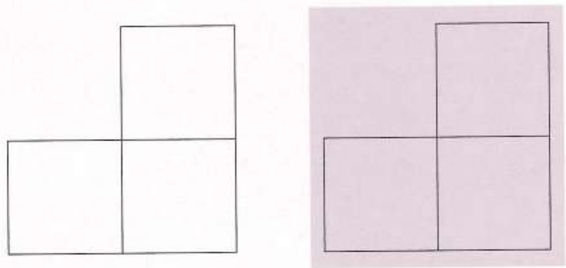


Figura 7

A fórmula de Euler

Em qualquer poliedro convexo, o número de faces F, o número de arestas A e o número de vértices V verificam a condição $F + V - A = 2$. A Marisa (aluna), que gosta de ter definições para tudo: — Stor, Stor, eu posso escrever que todos os poliedros que verificam a fórmula de Euler são regulares. — Não, Não. Todos os poliedros convexos verificam a fórmula de Euler, mas apenas cinco são regulares (figura 6).

O céptico do Pedro (aluno): — Como é que o professor pode afirmar que existem apenas cinco? — Vamos iniciar uma nova investigação: Quantos poliedros regulares existem? (na mesma condição que o cubo) E porquê? Se voltarmos aos hexaminós, a concorrer num mesmo vértice temos no máximo três faces quadradas (figura 7), porquê? Para poder dobrar e construir o cubo. Ora, com quatro faces quadradas já não era possível dobrar, a figura era plana e a soma dos ângulos internos era de 360°.

Ana: — Então para poder dobrar temos de ter menos de 360°. Logo, poliedros regulares com faces quadradas, só existe o cubo. Vamos repetir com o triângulo equilátero, com o pentágono regular, o hexágono regular, o heptágono regular, etc… o que verificam? Três hexágonos, a soma dos ângulos internos é 360°, logo não é possível construir um poliedro regular. Então, temos o Tetraedro, o Cubo, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro. — O cubo não está sozinho! Exclamou a Liliana.

Duais

Os duais resultam de um procedimento fácil de compreender e que é acessível à maioria dos alunos. Os duais envolvem figuras complexas e atraentes, através delas os alunos fascinam-se com a harmonia da geometria. Qual o dual do cubo? E o que é um dual? Jorge: o octaedro encaixa perfeitamente no cubo. Com o auxílio de *software* de Geometria ou de *applets* (figura 8) disponíveis na Internet foi possível explorar, com relativa facilidade, a intuição geométrica dos alunos a este nível. No entanto, o desenvolvimento da noção de ponto central de uma face do cubo faz apelo a noções que são assumidas como primitivas e que alguns alunos têm dificuldades em apropriarem-se delas.

A representação da figura 9 foi realizada pelo Jorge, a propósito de uma investigação dos duais, realizada numa aula com computador.

O cubo e a medida

O que significa para um aluno dizer que o ponto central de uma face é o ponto equidistante dos 4 vértices contidos nessa face, ou das 4 arestas dessa face? No caso desta turma, a preocupação da generalidade dos alunos foi a de saber quanto mede a aresta do cubo. Para eles, só era possível saber se a distância é a mesma sabendo a medida.

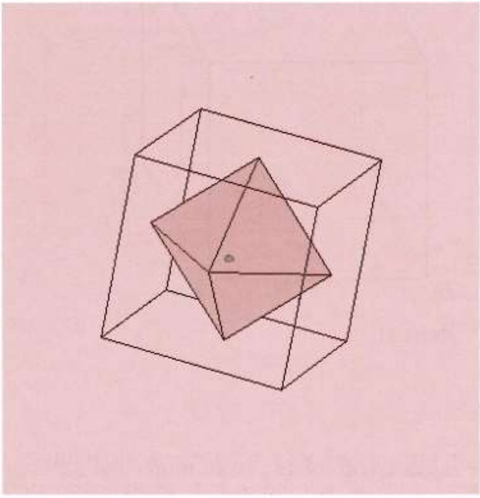


Figura 8.

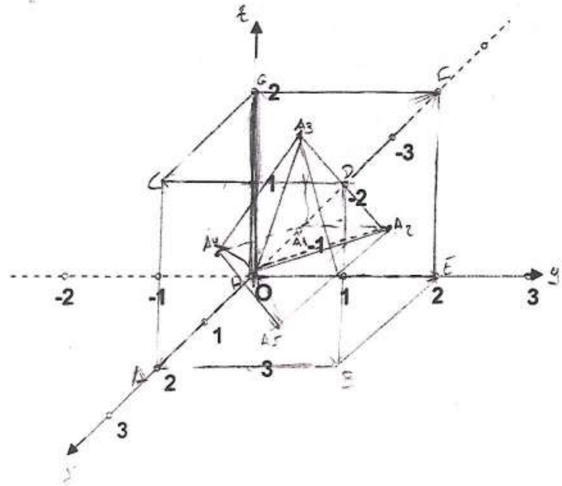


Figura 9.

A necessidade de ultrapassar questões deste tipo implicou a seguinte tarefa: Quais as medidas das diagonais de um cubo de aresta 1? E de aresta 2? E de aresta a? A generalização pela intuição é uma prática corrente em determinada faixa etária, e com alguns conteúdos. Assim, a informação quantitativa passou a ser uma relação métrica entre elementos de uma figura. A medida ajudou a compreender que, independentemente do comprimento da aresta do cubo, o ponto central da face existe e é identificável. Mas, os cálculos foram importantes. Os alunos aprenderam que a medida da diagonal da face (figura 10) é $\sqrt{2}a$, a medida da diagonal espacial é $\sqrt{3}a$, o perímetro da face $4a$, a área da face a^2 e a área lateral... E a área total... E o volume...

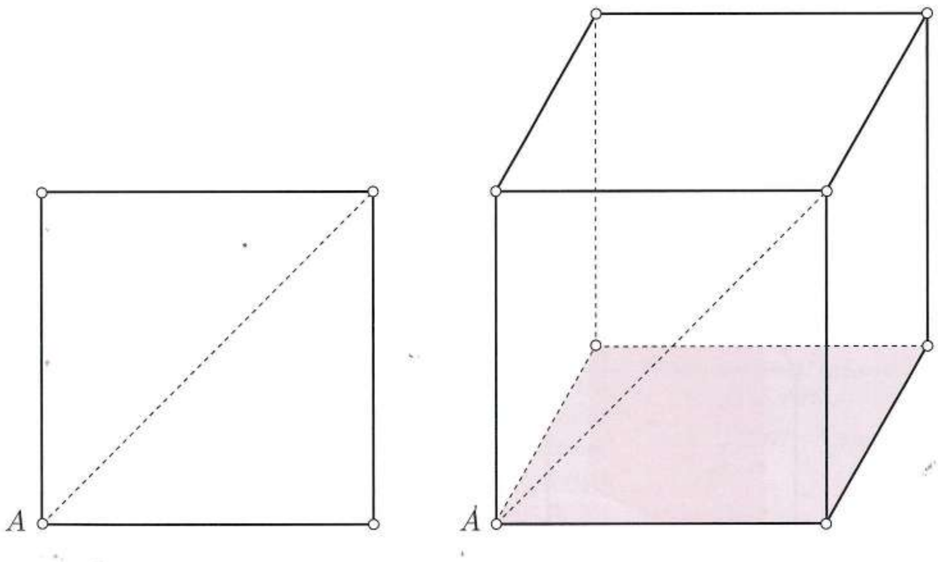


Figura 10

Paralelismo e perpendicularidade

O tema que precedeu as secções no cubo (figura 11). Como dizer aos alunos que a secção que se obtém no cubo por corte, através de um plano paralelo a uma face, é um quadrado — sem as noções de paralelismo e perpendicularidade. Inicialmente, existe alguma confusão entre paralelismo e perpendicularidade, mas intuitivamente, verifica-se que os alunos confundem os nomes e não as noções. Um exercício típico, e que se pode encontrar em vários manuais, é o seguinte: Na figura ao lado está representado um cubo. Utiliza as letras dos vértices para indicar, se possível: dois planos paralelos; dois planos concorrentes perpendiculares; dois planos concorrentes não perpendiculares; uma recta aposta a um plano; uma recta perpendicular a um plano; duas rectas não complanares; e duas rectas concorrentes não perpendiculares.

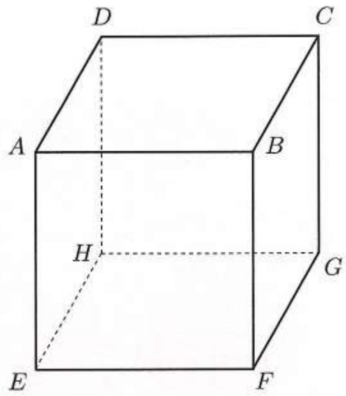
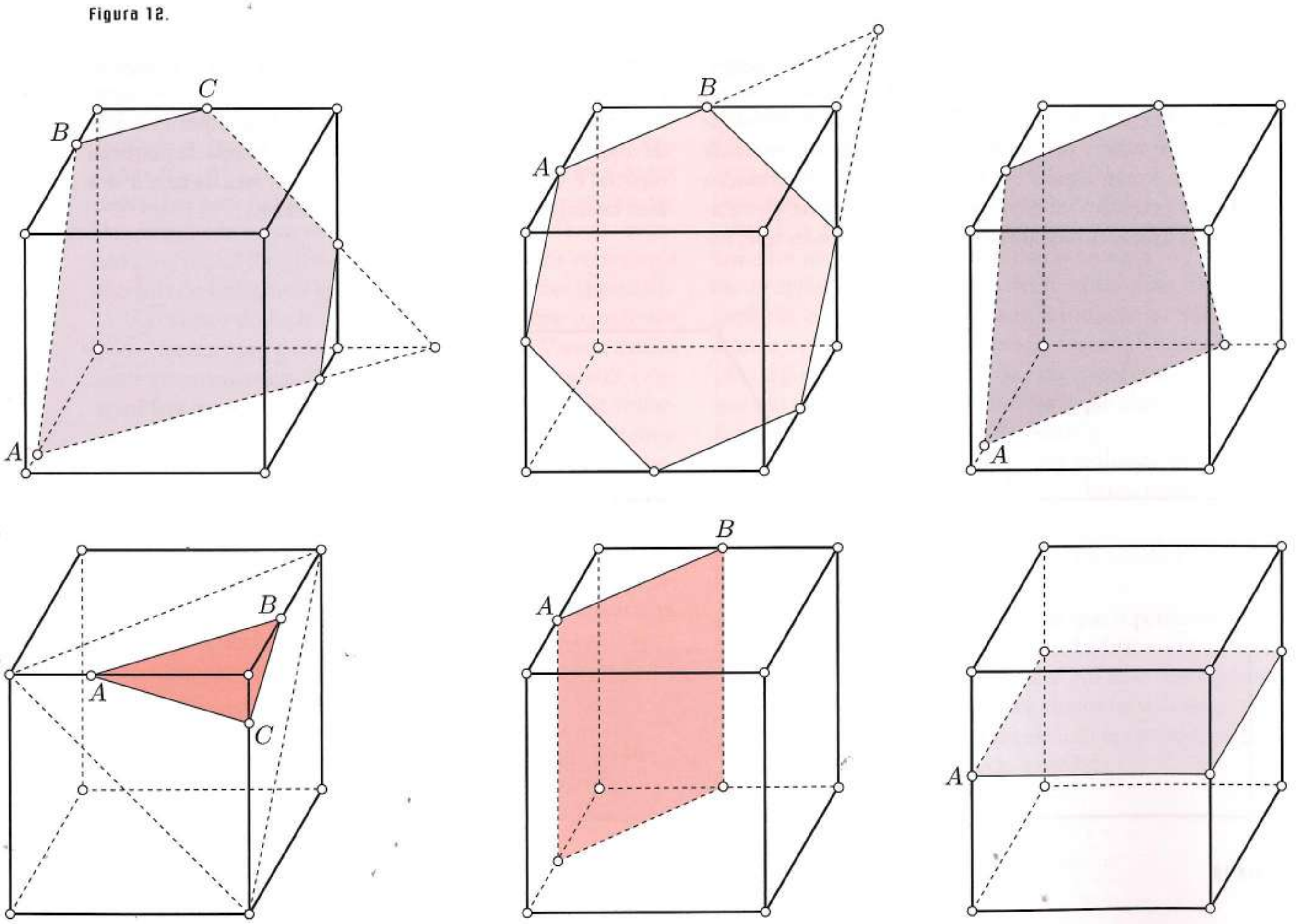


Figura 11.

Secções no cubo

As secções (figura 12), vulgarmente designadas por *cortes*, permitem observar propriedades que na visualização espacial ou na representação através das perspectivas são difíceis de identificar. Eduardo Veloso, em 1993, identifica os polígonos que resultam de cortes planos num cubo e as, respectivas, propriedades dos planos. Os alunos tiveram oportunidade de explorar estas secções em duas vertentes: usando os cubos de enchimento e uma aplicação computacional,

Figura 12.



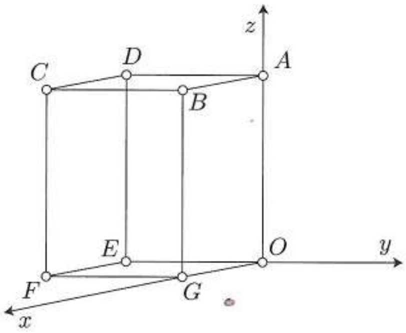


Figura 13.

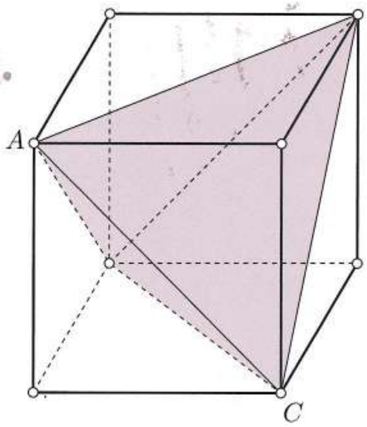


Figura 14.

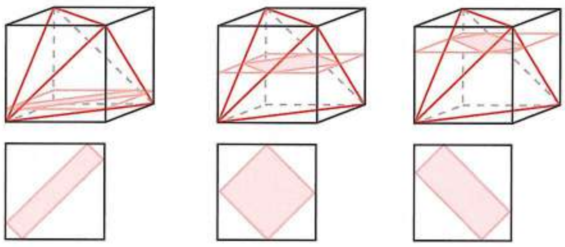


Figura 15.

em ambiente de geometria dinâmica. Esta metodologia esteve relacionada com a organização da aula: cinco computadores e cinco cubos em acrílico, para dezoito alunos. Enquanto uns alunos viam as secções, pré-construídas em *GSP* (*Geometer's Sketchpad*), onde podiam movimentar os pontos A e B (figura 12) e assim responder a perguntas numa ficha de acompanhamento, outros alunos, enchiam os cubos, experimentavam as diferentes posições do cubo (do plano de corte) e caracterizavam a secção obtida.

Nos sólidos de enchimento, a maior dificuldade é a de colocar a quantidade certa de líquido para caracterizar o pentágono e o hexágono. — Impossível encontrar o hexágono! Referiu o Miguel várias vezes. O João, enquanto trabalhava com a aplicação em *GSP*, afirmou: — Stor, isto tem quadriláteros que nunca mais acaba... É quase verdade... Os alunos colocaram o ponto A em muitas posições diferentes e tiveram alguma dificuldade, no ambiente computacional, em distinguir trapézios, rectângulos e quadrados. O que foi ultrapassado quando usaram os cubos acrílicos e através do meu apelo para que os alunos escrevessem as propriedades que permitem distinguir os diferentes quadriláteros. Nesse dia, o entusiasmo dos alunos foi grande, mas eu repeti vezes sem conta: — vamos mudar o cubo de posição... a secção é a mesma?

Coordenadas no plano e no espaço

René Descartes (1596–1650) trouxe para o estudo da Geometria Analítica os referenciais cartesianos. Qual é o objecto matemático que usei, com maior frequência, para identificar as coordenadas dos vértices num referencial tridimensional? O CUBO. O centro do cubo num referencial do espaço, um vértice a coincidir com a origem do referencial, sei lá..., as inúmeras posições que usei. A Geometria Analítica abre, ao nível do 10° ano, a possibilidade do estudo dos lugares geométricos: plano mediador, esfera, esfera inscrita no cubo, superfície esférica (circunscrita) e inscrita ao cubo, etc... Embora, em Matemática B, este tema não tenha sido aprofundado (figura 13).

Voltando ao problema inicial, que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo (figura 14)? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?

Fez parte de uma actividade de investigação e avaliação em que os alunos deveriam escrever um relatório. Os resultados (figura 15) foram muito significativos, a generalidade dos alunos concluiu que: os "cortes" só podiam ser triângulos e quadriláteros (esquecendo o facto do plano ser paralelo a duas arestas do cubo); e o perímetro da secção obtida é sempre o mesmo (para quem aprofundou os quadriláteros).

No relatório do Gonçalo lia-se:

$$V_{tetraedro} = V_{cubo} - 4 \times V_{pirâmide}$$

porque o tetraedro tem 4 vértices e o cubo tem 8 vértices, logo ao cubo é necessário tirar 4 para obter o tetraedro. Este aluno encontrou no cubo, através da sua intuição, um tetraedro e 4 pirâmides, que mais haverá no cubo?

Bibliografia

Loureiro et al. (1997). *Geometria — 10° ano de escolaridade*. DES.

Matos, J. & Gordo, F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática* n° 26. APM.

Ministério da Educação (2003). *Programa de Matemática B*. DES.

Veloso, E. (1993). Tudo o que há num cubo... *Educação e Matemática* n° 26. APM.

Viana, J. (1997). A formiga no cubo. *Educação e Matemática* n° 41. APM.

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

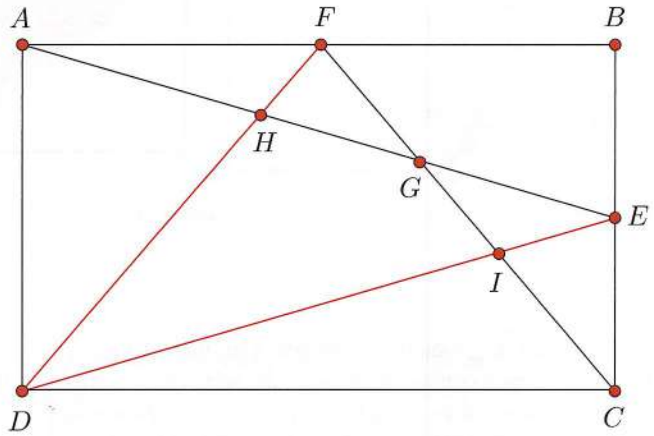
Os caminhos do parque

Um parque rectangular $ABCD$ tem cinco entradas: uma em cada vértice A, C e D, outra no ponto médio F do lado AB e a última no ponto médio E do lado BC.

O parque tem quatro caminhos em linha recta ligando várias das entradas, tal como se mostra na figura. Os caminhos FC e AE encontram-se no ponto G. O João afirma que os ângulos EDF e FGH são iguais. A Sónia acha que só por sorte isso acontecerá, tudo dependendo das dimensões do parque (que nenhum deles sabe quais são).

Quem tem razão?

(Respostas até 15 de Fevereiro)



Os mealheiros da Patrícia e do Luís

O problema proposto no número 93 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Patrícia e o Luís têm cada um seu mealheiro, onde vão juntando as moedas de 1€ que lhes dão. Quando as economias se aproximam dos mil euros vão ao banco depositá-las.

No domingo passado verificaram que a Patrícia tinha uma quantia que era múltipla da do Luís. Como cada um tinha recebido um euro dos pais, colocaram-nos nos respectivos mealheiros e o dinheiro da Patrícia continuou a ser um múltiplo do Luís.

Na segunda feira, novamente cada um arranjou um euro, continuando a quantia da Patrícia a ser múltipla da do Luís.

A situação foi-se repetindo ao longo de toda semana, até hoje, domingo: todos os dias cada um colocou um euro no seu mealheiro e a quantia da Patrícia foi sempre múltipla da do Luís.

Quanto é que eles têm agora no mealheiro?

Recebemos 4 respostas, enviadas por João Alves (Chaves), Luís Ferreira & Beatriz Barbosa, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Sónia Abrantes (Portalegre).

A Sónia chamou a atenção para o facto de o enunciado do problema não indicar que a Patrícia e o Luís tinham quantias diferentes. Se os dois começarem com o mesmo número de euros, qualquer solução entre 8 e 999 serve.

Vamos então admitir que eles têm quantias diferentes nos seus mealheiros. Vários processos de resolução se podem seguir, muitos deles jogando com algumas características da possível quantia da Patrícia e depois fazendo tentativas.

O Luís e a Beatriz resolveram o problema por uma destas maneiras mas depois, conhecida a solução, desenvolveram uma segunda resolução, muito mais expedita. O João seguiu também este caminho.

Os sucessivos valores no mealheiro do Luís terão de ser pequenos para que o dinheiro da Patrícia não ultrapasse mil euros. Vamos admitir que ele começa a semana com 1 euro e acaba com 8.

Seja x a quantia da Patrícia antes de tudo começar. Então, terá de ser:

$$x + 1 \text{ múltiplo de } 1$$
$$x + 2 \text{ múltiplo de } 2$$
$$x + 3 \text{ múltiplo de } 3$$
$$\ldots$$
$$x + 8 \text{ múltiplo de } 8$$

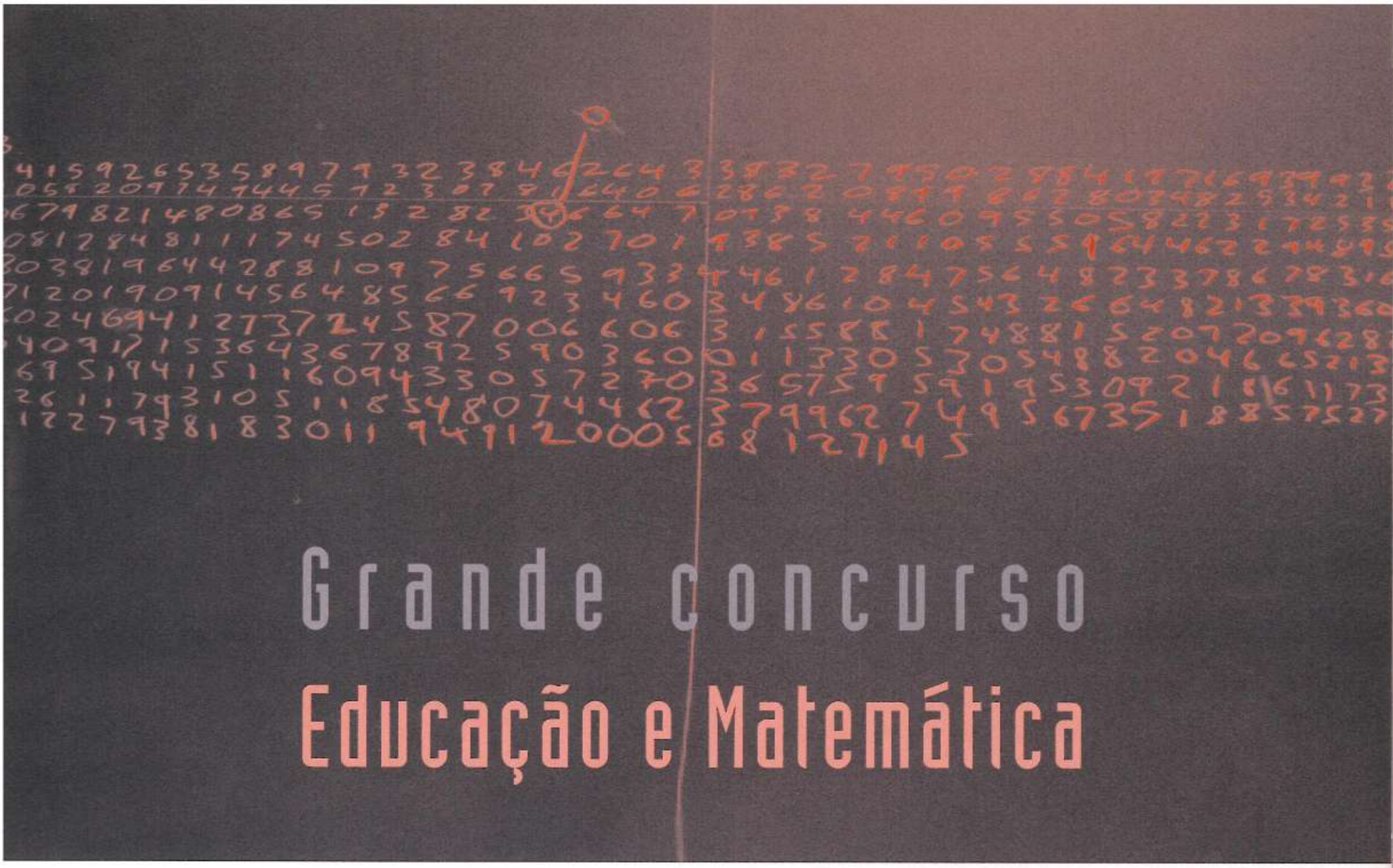
Mas daqui podemos concluir que x é múltiplo de todos os inteiros de 1 até 8.

O menor valor de x é o mínimo múltiplo comum desses inteiros:

$$\text{m.m.c.}\,(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8) = 840.$$

O possível valor seguinte para x seria 1680, que já ultrapassa o limite dos mil euros.

Então, a Patrícia começou a semana com 840 euros e terminou-a com 848. O Luís começou com 0 e acabou com 8.



Grande concurso Educação e Matemática

À procura do π

Usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 exactamente por esta ordem, os parênteses que se quiser, e as operações adição, subtracção, multiplicação, divisão e raiz quadrada, obter o resultado mais próximo de π.

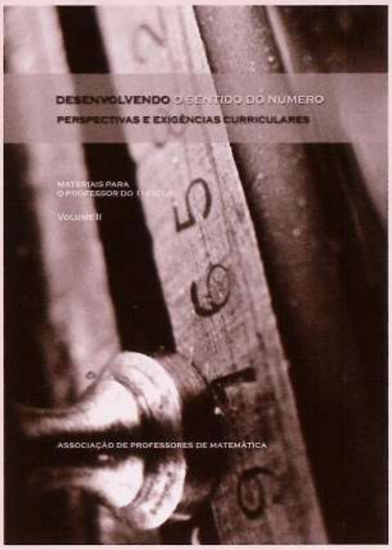
De novo, a revista *Educação e Matemática* lança um grande concurso entre os seus leitores com os objectivos de criar laços mais dinâmicos no interior da nossa Associação e de alargar o público leitor da revista.

O problema proposto pretende ser um desafio não só aos professores de Matemática mas também aos seus alunos. Todos poderão concorrer!

Regulamento

1. Podem concorrer os sócios da APM, os leitores da revista e ainda os alunos dos ensinos básico e secundário desde que indiquem a escola e o nome do respectivo professor de Matemática.
2. O concurso consiste na resolução do problema apresentado. A resposta deve indicar apenas a sequência de operações e o resultado aproximado à milionésima (6 casas decimais).
3. As classificações serão divididas em duas categorias: *Categoria* A para alunos dos ensinos básico e secundário e *Categoria B* para os restantes concorrentes.
4. O vencedor em cada categoria será o concorrente que apresentar o resultado mais próximo de π.
5. Os casos de empate serão resolvidos por sorteio, na presença da direcção da APM.
6. As respostas, com a identificação do concorrente, deverão ser enviadas até 25 de Abril de 2008, por *e-mail* para `zepaulo@armail.pt` com indicação do assunto *Grande Concurso EeM* ou por carta para *Grande Concurso EeM*, Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa.
7. Os prémios serão divulgados no próximo número da revista *Educação e Matemática* e serão entregues até ao final do ano lectivo 2007–08.

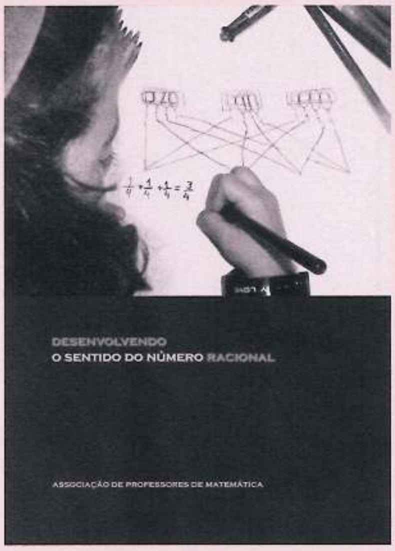
Publicações APM



Desenvolvendo o Sentido do Número: perspectivas e exigências curriculares, Volume II

Edição APM, 2007
Sócio 7,50€ | *PVP* 11,25€

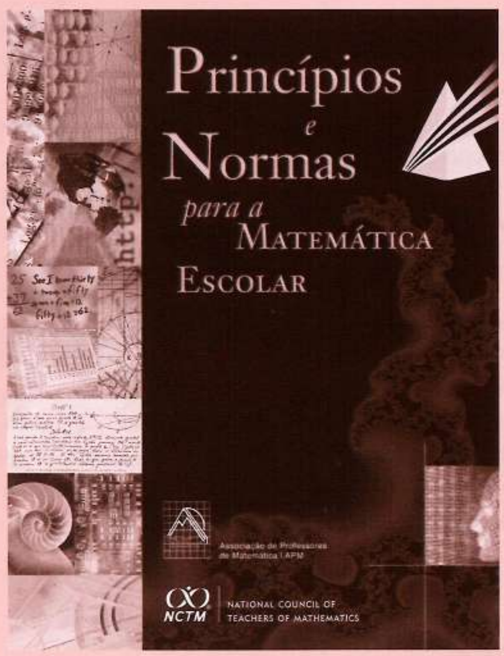
Esta brochura, destinada a professores do 1° ciclo, segue-se a uma primeira em que foram abordados aspectos iniciais relativos ao sentido do número e à abordagem da adição e subtracção. Aqui são apresentadas cadeias de tarefas experimentadas na sala de aula que dizem respeito especificamente à adição e multiplicação, à multiplicação (três cadeias), à divisão e ao trabalho com decimais. Antecedendo a apresentação destas cadeias de tarefas apresenta-se um texto que contextualiza e fundamenta a construção de tarefas.



Desenvolvendo o Sentido do Número Racional

Edição APM, 2007
Sócio 6,00€ | *PVP* 9,00€

Nesta brochura estão apresentadas várias tarefas cujo objectivo principal é proporcionar aos professores um recurso para o ensino dos números fraccionários positivos. Este conjunto de tarefas não pretendendo ser exaustivo, faz no entanto uma abordagem a vários aspectos fundamentais a ter em conta no ensino destes números, tais como diferentes formas de representação (fracção, numeral misto, numeral decimal), diferentes tipos de unidade (contínua e discreta) apresentando diversos contextos onde as fracções podem ter diferentes significados.



Princípios e Normas para a Matemática Escolar

Edição APM, 2007
Sócio 18,00€ | *PVP* 27,00€

Na continuidade das orientações e propostas curriculares para o ensino da Matemática que tem vindo a elaborar nas décadas recentes, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicam os *Principles and Standards for School Mathematics*, agora editados pela APM. Os Princípios descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade; as Normas descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender. Em conjunto, os Princípios e Normas constituem uma perspectiva orientadora dos educadores que lutam pelo contínuo desenvolvimento da educação matemática nas salas de aula, escolas e sistemas educativos.

A geometria dinâmica no ensino básico e secundário

Pedro Pimenta

Sendo professor contratado, passei por 8 escolas diferentes nos últimos 7 anos (básicas, secundárias e superiores), de diferentes zonas, com diferentes alunos, de diferentes anos de escolaridade, com diferentes formações e motivações. No entanto, houve sempre uma característica comum preocupante: A falta de competência matemática na área específica da geometria. Não sei se esta amostra de alunos é representativa. Espero que não...

Hoje é fundamental, na minha opinião, o trabalho num ambiente de geometria dinâmica para se ensinar e aprender geometria. Fui sentindo essa necessidade ao longo destes últimos anos de trabalho com os meus alunos.

Quando, pela primeira vez, abordo com uma turma um tema de geometria, coloco-lhes muitas vezes algumas questões cujas respostas têm sido inquietantes. Quando lhes é pedido o cálculo da área de um qualquer triângulo, dadas as medidas de uma sua base e da respectiva altura, as respostas são quase sempre rápidas e correctas; no entanto, só uma minoria deles me tem respondido imediatamente que um triângulo tem três alturas (dependendo do lado que se considera como base); alguns alunos juram que um triângulo tem apenas uma base, dependendo de como o "triângulo está assente numa linha do seu caderno", ou seja, segundo estes alunos, "a base do triângulo é o seu lado horizontal"). Quando inicio o trabalho com uma turma do 9° ano, que estudou o teorema de Pitágoras no 8° ano, proponho aos alunos que determinem a medida de um lado de um triângulo conhecidas as medidas dos restantes, muitos deles são capazes de aplicar com mestria algébrica o teorema de Pitágoras, mesmo que o triângulo seja acutângulo ou obtusângulo; aliás, alguns deles juram que aprenderam dois teoremas de Pitágoras: um útil para determinar o comprimento da hipotenusa ($h^2 = c_1^2 + c_2^2$) e outro útil para determinar o comprimento de um dos catetos ($c_1^2 = h^2 - c_2^2$). A geometria dinâmica pode contribuir para que se perceba efectivamente geometria, para além de a usar como mais um pretexto para efectuar cálculos.

Por outro lado, em muitas aulas sobre isometrias vive-se num mundo imaginário:

- "Imaginem este triângulo a rodar 180° em torno deste vértice..."
- "Imaginem que se move a figura, sem lhe alterar o tamanho, do canto do quadro até ao centro do quadro..."

O problema é que muitas vezes é difícil ao professor ter a certeza que os alunos estão a imaginar o mesmo que ele!

No ensino da geometria é fundamental que o professor possa recorrer a uma componente visual e dinâmica que permita a mais fácil percepção pelos alunos das propriedades geométricas, variantes ou invariantes, o que implica que melhor se identifiquem com a disciplina de Matemática, incrementando o seu gosto por ela, o que naturalmente é sinónimo de sucesso escolar. Desenvolvem-se, assim, no aluno as capacidades de interpretação, compreensão, construção, análise, conjectura e aplicação inerentes à aprendizagem de Geometria.

Muitos são os autores que nos mais diversos âmbitos reflectiram sobre as vantagens do uso das novas tecnologias da informação na educação escolar, em particular no ensino da Matemática e, ainda mais especificamente, no ensino da geometria:

- "Uma iniciação ao trabalho com a folha de cálculo e com programas de gráficos de funções e de geometria dinâmica deve fazer parte da experiência de aprendizagem de todos os alunos." (A Matemática na Educação Básica, ME, 1999).

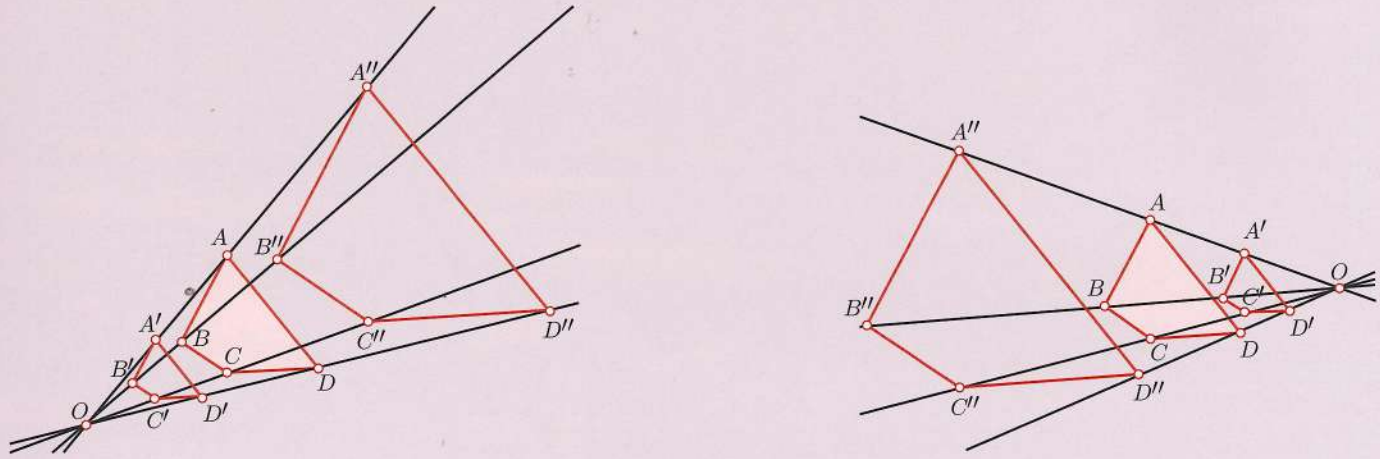


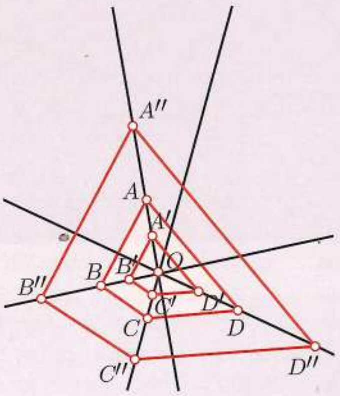
Figura 1. Construção de Figuras Semelhantes: Método da Homotetia.

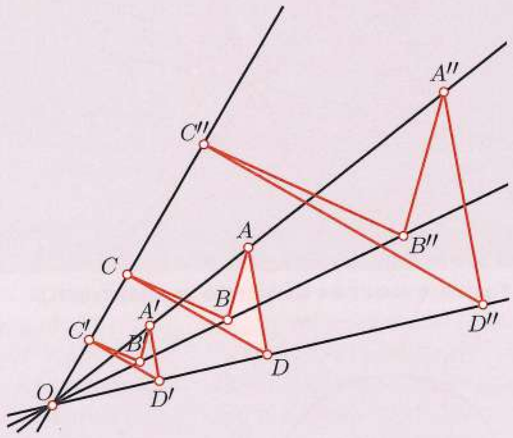
- "Muita da geometria deve ser aprendida através de actividades com modelos físicos, desenhos e software dinâmico, como ferramentas de aprendizagem". (*Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000).
- "Se ao longo dos tempos os instrumentos disponíveis sempre propiciaram o desenvolvimento de ambientes geométricos criativos e didácticos, também o impacto das novas tecnologias da sociedade actual se deve traduzir em mudanças de conteúdo, abordagens, métodos e processos de pensamento no ensino e aprendizagem da geometria, que poderão ser protocoladas pela exploração do moderno *software* geométrico. (...) Utilizando o microcomputador, o estudante pode "ver" com os seus olhos e com os olhos da mente, os invariantes de uma forma que sofre transformações dinâmicas." (Hershkowitz, 1994).
- "As explorações desenvolvidas em ambientes computacionais fazem com que o aluno compreenda as relações entre os conceitos geométricos de uma forma mais profunda e levam-no a pensar de um modo mais geral e mais abstracto." (Olive, 1992).

A utilização de um ambiente de geometria dinâmica, em particular o *Cinderella* (como a seguir se ilustrará), como ferramenta ao serviço da investigação, na construção de conceitos e na resolução de problemas, numa perspectiva de construção de conhecimento pelo próprio aluno, num ambiente de auto-confiança, propicia a aquisição da competência matemática. A actividade matemática não deve ser rotineira e, no caso concreto do estudo da geometria, deve dar prioridade à exploração, à conjectura e à experimentação.

É importante que os professores disponham de ferramentas que possam contribuir para uma melhoria e diversificação das suas práticas docentes, particularmente na área das novas tecnologias, para que seja possível proporcionar aos alunos condições para o desenvolvimento da sua competência matemática. Deve haver uma consciência de que cumprir o programa não é leccionar todos os conteúdos ali discriminados, mas sim dar condições aos alunos para que aprendam efectivamente todos os conteúdos do programa, cumprindo-se os objectivos ali descritos e aplicando-se as metodologias recomendadas. Aliás, actualmente é "obrigatório" o recurso à geometria dinâmica como se explicita nos currículos e nos programas de Matemática:

- "Os alunos devem desenvolver a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* geométrico". (Competências Essenciais de Matemática — Currículo Nacional do Ensino Básico)
- "O ensino de todos os temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros. (...) Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada. (...) "O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa." (Programa de Matemática A — Ensino Secundário).





O ambiente de geometria dinâmica

Por geometria dinâmica entende-se o estudo da geometria através do movimento de figuras geométricas. Ambiente de geometria dinâmica designa o ambiente de trabalho de um programa de geometria dinâmica.

Os programas de geometria dinâmica (como o *Cinderella*, o *Cabri*, o *Geogebra* e o *Geometer's Sketchpad*, entre outros) apareceram na última década e têm evoluído constantemente, com novas versões, tornando-se ferramentas fundamentais para o ensino/aprendizagem da geometria nos dias de hoje. Pensados originalmente para o ensino da geometria nas escolas secundárias, estes programas incluem as clássicas construções com "régua e compasso", bem como as isometrias e os lugares geométricos. As suas características dinâmicas permitem que se obtenham infinitos exemplos com a mesma construção, movendo ou animando os elementos iniciais. Escolhemos o *Cinderella* para exemplificar a sua aplicação no trabalho com os nossos alunos.

O Cinderella na sala de aula

O *Cinderella* tem algumas características importantes que o tornam uma ferramenta pedagógica muito importante. Por exemplo, é possível exportar as construções ali elaboradas na forma de ficheiro interactivo (ficheiro *html* contendo aplicações *Java* visualizáveis e exploráveis em *browser* de páginas de Internet), isto é, sem a necessidade de qualquer programação adicional, podemos transformar as construções que preparamos para as nossas aulas em ficheiros visualizáveis e exploráveis no ambiente de uma página de *Internet*, sem que seja necessário ter instalado o *Cinderella* no computador onde trabalharemos com este ficheiro. Noutro âmbito, há a possibilidade de partilhar estas construções com os alunos (por exemplo, via plataforma *Moodle* ou e-mail), para que os alunos as possam explorar, mesmo sem terem o *Cinderella*. A possibilidade de o aluno testar os seus conhecimentos de geometria num ambiente interactivo tem, sem dúvida, um grande potencial pedagógico. Com a utilização do modo "criar exercício" do programa *Cinderella*, programam-se exercícios interactivos que podem ser resolvidos pelos alunos no ambiente de geometria dinâmica, tendo acesso à correcção automática da sua tarefa. Partindo de um elemento inicial, por exemplo construindo-se um triângulo isósceles, pode-se programar um exercício que requeira ao aluno a construção do seu eixo de simetria. O programa reconhecerá a solução, desde que obtida por um método geometricamente válido, independentemente do caminho percorrido (por exemplo, traçar a recta que contém o vértice da intersecção dos dois lados iguais e o ponto médio do lado oposto, ou traçar a recta que contém esse mesmo vértice perpendicular ao lado oposto).

Escolhemos três exemplos que possam ser ilustrativos das potencialidades deste tipo de trabalho.

Homotetia

Quando, no 7° ano, se ensina aos alunos o método da Homotetia para a ampliação ou redução de uma figura geométrica, ao acompanhar este trabalho no *Cinderella*, podemos, com uma só construção, movimentando-a e alterando-a, obter variados exemplos, para que se investiguem as propriedades geométricas em causa. Pode-se por exemplo mostrar aos alunos, rapidamente, que a semelhança é independente do centro da homotetia considerado, movendo o respectivo centro (figura 1).

Podemos também exemplificar a semelhança entre várias classes de figuras, o que demoraria muito tempo a desenhar no quadro, a giz, só sendo possível fazer um número limitado de exemplos. Em geometria dinâmica o limite é o infinito.

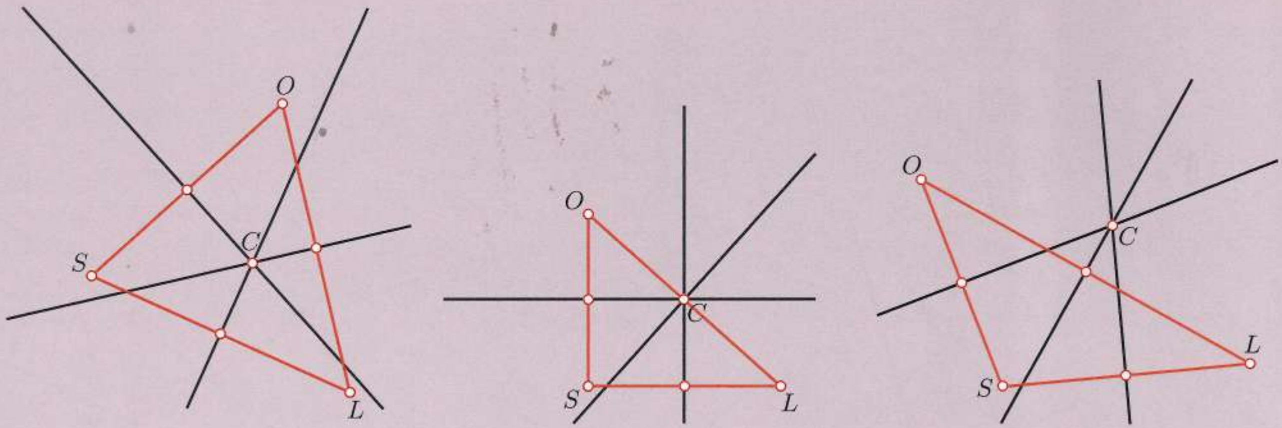


Figura 2. O ponto C é o circuncentro do triângulo [SOL].

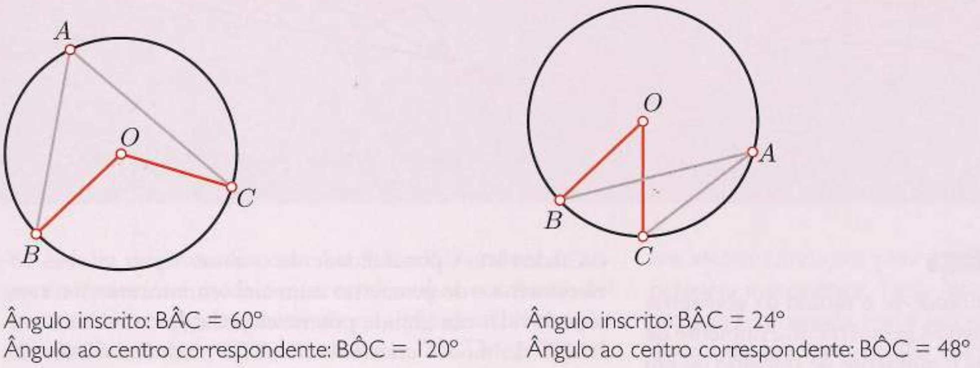


Figura 3.

Circuncentro de um triângulo

Para o 8° ano, uma actividade interessante consiste na investigação da relação entre a localização do circuncentro e a classificação do triângulo quanto aos ângulos. Marcando o circuncentro de um triângulo qualquer e alterando essa construção, os alunos concluem facilmente, e sobretudo percebem que num triângulo rectângulo o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa, por exemplo (figura 2).

Este tipo de actividade pode ser um ponto de partida para a posterior formalização ou demonstração da propriedade.

Amplitude de um ângulo inscrito na circunferência

No 9° ano pode-se pedir aos alunos que conjecturem acerca da relação entre a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do seu respectivo *ângulo ao centro*. Pode depois pedir-se aos alunos que, fora do ambiente de geometria dinâmica", provem a sua conjectura (figura 3).

Lichtenberg (filósofo, físico e escritor alemão, 1742–1799) defendia que "O que se é obrigado a descobrir por si próprio deixa um caminho na mente que se pode percorrer novamente sempre que se tiver necessidade". Kant (1724–1804), por sua vez, escreveu que "Todos os conhecimentos humanos começam por intuições, avançam para concepções e terminam com ideias". Trabalhar com os nossos alunos com geometria dinâmica pode ser uma das formas de perpetuar as ideias de Lichtenberg e Kant.

Bibliografia

Junqueira, M. M. B. B. (1995). *Aprendizagem da Geometria e Ambientes Computacionais Dinâmicos*.

Olive, J. (1992). *Example explorations with the Geometer's Sketchpad*. Comunicação apresentada no 7th International Congress in Mathematical Education, Quebeque, Canada.

Hershkowitz, R. (1994). *Working group 11: The role of geometry in general education*. Em G. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler, J. Egsgard (Eds.), Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, 1992 (pp. 160–167). St.-Foy, Canada: Les Presses de l'Université Laval.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino básico — Competências Específicas* [on-line]. `http://www.iie.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf`

Ministério da Educação (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A*. Departamento do Ensino Secundário.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Geometria Dinâmica em `http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/`

Pedro Pimenta

Esc. Sec. Dr. António Carvalho Figueiredo, Loures

Conseguir que as pessoas queiram aprender

Prémio Nacional de Professores — Arsélio Martins é o título da notícia de Sandra Silva Costa no jornal *Público* de 21 de Novembro de 2007. O artigo refere-se ao Prémio Nacional de Professores, destinado a distinguir os educadores de infância e professores do básico e secundário que contribuam de forma excepcional para a qualidade do sistema de ensino.

"Eu ensino muito as pessoas, mas passa principalmente por eu conseguir que as pessoas queiram aprender". A afirmação é de Arsélio Martins, professor de Matemática na Escola Secundária com 3º Ciclo de José Estêvão, em Aveiro, e vencedor da primeira edição do Prémio Nacional de Professores.

Referindo-se ao seu trabalho ao serviço da educação, o júri do Prémio afirmou que este professor é um "exemplo de cidadania" mas também um "mestre, no verdadeiro sentido do termo". Professor, matemático, poeta e cidadão participativo, são algumas das palavras que caracterizam Arsélio Martins. Destaco o seu espírito associativo e, em particular, a sua participação activa na APM. A sua última colaboração com a revista *Educação e Matemática* foi o editorial da revista número 93.

A sua candidatura foi apresentada pelo Conselho Executivo da sua Escola que sentiu como uma obrigação "o reconhecimento de 35 anos de trabalho capaz como poucos". Para este professor não foi o Governo que o premiou mas sim a sua escola e um júri nacional. Segundo ele "deve ter custado ao primeiro-ministro e à ministra da educação galardoar um homem que não se coíbe de dizer o que pensa (...) e de abandonar uma comissão do plano de acção da matemática por discordar do défice democrático de quem gere os destinos da educação".

Destaco ainda, em Arsélio Martins, uma concepção do que pode ser o ensino da matemática, (centrada no aluno e aberta à tecnologia); a atitude de permanente disponibilidade para o saber e a preocupação com a sua transmissão. O reconhecimento da sua excepcionalidade importa mais pelo que a sua carreira representa em termos pedagógicos e do exercício de cidadania do que a atribuição de um prémio de carreira ou o destacar que afinal sempre há bons professores e que estes são um elemento crucial na educação.

Para o conhecer melhor aconselha-se uma visita ao seu blog (`aveiro.blogspot.com`) e a leitura da sua autobiografia em `http://www.prof2000.pt/users/hjco/hjco/Pg80060b.htm`.

Que o professor Arsélio Martins continue a "participar em todas as reformas do ensino em vez de preparar a sua própria reforma".

Os méritos e intenções dos prémios são sempre discutíveis mas que este está bem entregue ninguém duvida.

Cláudia Fialho

4 • P2 • Quarta-feira 21 Novembro 2007

Prémio Nacional de Professores Arsélio Martins

"Quando perco um aluno é uma desgraça completa"

Será enfado? "Com esta coisa quase deixei de ter tempo para o que gosto..." Modéstia? "Isto é circo", diz, referindo-se aos autocolantes que espalharam a sua cara por tudo o que é parede da escola – "Estamos muito contentes!". Ironia? "Se calhar ganhei porque o júri reconheceu a minha tralha consolidada."

Talvez uma soma disto tudo ou nada disto. Há uma verdade e é esta: a vida de Arsélio Martins, 59 anos, quase deixou de lhe pertencer desde que foi anunciado como vencedor da primeira edição do Prémio Nacional de Professores. Não é que ter jornalistas à perna durante uma semana o aborreça; só que ele tem cada vez menos tempo. "E o que eu mais preciso enquanto professor é de tempo", explica, depois de uma aula de 90 minutos do 10.º B da Escola Secundária José Estêvão, em Aveiro.

A escola está "muito contente", já percebemos. Ele, professor de Matemática há 35 anos, está sobretudo "honrado" por ter sido distinguido no seio da escola de José Pereira Tavares (1887-1983), professor e reitor do então Liceu de Aveiro. "Ao pé deste tipo sinto-me um nabo." Não há quem confirme esta informação. Funcionária de olhos verdes escondidos atrás de uns óculos: "O professor Arsélio é espectacular. É um homem pequeno mas uma grande pessoa." Ana Santos, aluna do 10.º B: "É diferente de todos os professores que já tive. Consegue tornar a Matemática mais simples e explica que ela está em tudo o que fazemos." Maria da Luz, professora de Matemática: "Não desiste enquanto não faz os alunos perceber o que ele está a explicar." Alcino Carvalho, presidente do conselho executivo: "Não se esgota na faceta de professor."

E agora, professor Arsélio? "Eu sou basicamente um produto da educação. Sou filho de camponeses de Santo André, Vagos, fui criado por uma irmã, quis ser padre mas a minha família não deixou, tentei ser marinheiro porque achava que era a melhor maneira de ser poeta." Não sabe se foi por acaso que foi parar a um curso de Matemática Pura. "Não era bom nem mau aluno, mas não houve nenhuma paixão assolapada."

Com verdadeira paixão fala da sua intervenção cívica. Foi dirigente associativo, envolveu-se na política (é deputado municipal pelo Bloco de Esquerda), tem um blogue (aveiro.blogspot.com/). No campo da educação, foi presidente do conselho executivo da José Estêvão, orientou estágios, dirigiu o Centro de Formação de Escolas de Aveiro, foi co-autor dos programas da disciplina, fundou o Sindicato dos Professores do Norte.

Na sala de aula – "a parte mais difícil, a relação directa com os alunos, mas também a que mais me realiza" – o que mais lhe interessa é "não perder nenhum aluno". "Quando perco um é uma desgraça completa", diz. E o segredo, se é que é segredo, é "arranjar estratégias que possam ir ao encontro das necessidades de cada um".

Defende que a melhor forma de potenciar o sucesso numa disciplina como a Matemática é permitir que os alunos tenham o mesmo professor ao longo de um ciclo de estudos – "eu tenho de ter persistência, respiração e tempo". Não dá "nada em papel aos alunos, para eles se habituarem a tirar notas", constrói com as próprias mãos sólidos geométricos para mostrar aos estudantes, maneja com destreza o quadro interactivo – "uma óptima ferramenta". "Sou um professor clássico que foi incorporando tudo o que há de moderno." Mas não é um professor modelo. "Ninguém deve imitar-me. Meti muita água. Mas faço o que gosto e melhor do que isso não há no mercado." **Sandra Silva Costa**

In Público, 21 de Novembro de 2007.

O papel que a geometria poderia desempenhar...

A escolha deste excerto dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado pelo NCTM em 2000 e traduzido recentemente pela APM, trás à luz algumas das ideias que têm sido defendidas ao longo dos anos por professores que se têm dedicado ao estudo do papel que a geometria pode desempenhar no ensino da matemática. "As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas", quer dentro da matemática, quer fora desta, e poderiam ter um peso maior no ensino da própria matemática.

Normas para a geometria

Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.° ano deverão habilitar todos os alunos para:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

Com o estudo da geometria, os alunos poderão aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações. A visualização espacial — a construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tridimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas — constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico. A geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos, culminando no trabalho de demonstração no ensino secundário. A modelação geométrica e o raciocínio espacial proporcionam formas de interpretar e descrever ambientes físicos, podendo ser ferramentas bastante importantes na resolução de problemas.

As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas da matemática e em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas. As representações geométricas poderão ajudar os alunos a dar significado a áreas e fracções, os histogramas e os diagramas de dispersão poderão ajudá-los a clarificar a informação e os gráficos de coordenadas poderão estabelecer um elo entre a geometria e a álgebra. O raciocínio espacial revela-se útil na utilização de mapas, no planeamento de trajectos, na construção de plantas e na criação artística. Os alunos poderão aprender a ver a estrutura e a simetria presentes no que os rodeia. Através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas informáticos de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se activamente com conceitos geométricos. Com actividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridade. A geometria é mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio. A ideia da construção da compreensão em geometria ao longo dos anos de escolaridade, transitando de um raciocínio informal para um mais formal, é consistente com o pensamento de teóricos e investigadores (Burger e Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Senk, 1989; van Hiele, 1986).

A geometria tem sido considerada, desde há muito, como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática. A Norma da Geometria privilegia o desenvolvimento de um raciocínio cuidadoso e da demonstração, recorrendo à utilização de definições e factos já conhecidos. A tecnologia também possui um papel importante no ensino e na aprendizagem da geometria. Ferramentas como programas informáticos de geometria dinâmica permitem que os alunos trabalhem com modelos e que tenham uma experiência interactiva com uma vasta gama de formas bidimensionais. Utilizando a tecnologia, os alunos podem criar muitos exemplos como forma de formular e explorar conjecturas, mas é importante que reconheçam que o facto de criarem muitos exemplos de um mesmo fenómeno não constitui uma demonstração. A visualização e o raciocínio espacial são igualmente melhorados pela interacção com animações computorizadas e com outros tipos de meios tecnológicos (Clements *et al.*, 1997; Yates, 1988).

Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas

Os alunos mais novos encontram-se naturalmente inclinados para observar e descrever uma variedade de formas e para começar a descobrir as suas propriedades. A identificação de formas é igualmente importante, mas as suas propriedades e relações deverão ser fortemente privilegiadas. Por exemplo, os alunos do pré-escolar ao 2° ano poderão observar que os rectângulos se adequam à construção de pavimentos, porque têm quatro ângulos rectos. Neste nível, os alunos poderão aprender sobre formas geométricas, utilizando objectos concretos, observáveis, palpáveis e manipuláveis. Posteriormente, o estudo das características e propriedades das formas tornar-se-á mais abstracto. Nos anos de escolaridade mais avançados, os alunos poderão centrar-se e discutir as componentes das formas, tal como os lados e os ângulos, e as propriedades das diversas classes de formas geométricas. Por exemplo, utilizando objectos ou programas informáticos de geometria dinâmica para fazer experiências com vários tipos de rectângulos, os alunos do 3° ao 5° ano deverão ser capazes de conjecturar que os rectângulos possuem sempre diagonais congruentes que se bissectam.

Ao longo do 2° e 3° ciclos e no início do secundário, enquanto estudam temas como a semelhança e a congruência, os alunos deverão aprender a utilizar o raciocínio dedutivo e técnicas de demonstração mais formais para a resolução de problemas e para a demonstração de conjecturas. Em todos os níveis de ensino, os alunos deverão aprender a formular explicações convincentes para as suas conjecturas e soluções. Por fim, deverão ser capazes de descrever, representar e investigar relações contidas no próprio sistema geométrico e de as expressar e justificar recorrendo à lógica. Deverão também ser capazes de compreender o papel das definições, dos axiomas e dos teoremas, e de construir as suas próprias demonstrações.

Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação

De início, os alunos mais novos aprendem os conceitos de posição relativa, tais como acima e atrás de, próximo e entre. Mais tarde, poderão construir e usar grelhas rectangulares para posicionar objectos e medir a distância entre pontos situados ao longo das linhas verticais e horizontais. Experiências com o sistema de coordenadas rectangulares serão bastante úteis na resolução de uma série de problemas mais abrangentes de geometria e álgebra. Nos 2° e 3° ciclos e também no secundário, o sistema de coordenadas poderá ser útil, à medida que os alunos trabalham na descoberta e na análise das propriedades das formas. Determinar distâncias entre pontos num plano, por meio da utilização de escalas num mapa ou das relações pitagóricas, revela-se bastante importante nestes anos de escolaridade. Figuras geométricas, como rectas nos 2° e 3° ciclos ou triângulos e círculos no secundário, podem ser representadas analiticamente, estabelecendo-se assim um elo essencial entre álgebra e geometria.

Para analisar problemas e estudar matemática, os alunos deverão adquirir experiência na utilização de diversos tipos de representações quer visuais quer através de coordenadas. Nos primeiros anos do ensino básico, por exemplo, uma interpretação da adição com números inteiros pode ser demonstrada numa recta numérica. Nos anos seguintes, os alunos poderão utilizar a recta numérica para representar operações com outro tipo de números. Do 3° ao 5° ano, os arranjos de objectos, as grelhas e outros materiais podem ajudar os alunos a compreender a multiplicação. Posteriormente, poderão ser analisados problemas mais complexos. Por exemplo, ao tentar determinar a distância mais curta que uma ambulância deverá percorrer, de um qualquer ponto da cidade, até ao hospital, os alunos do 2° e 3° ciclos poderão usar as medidas dos comprimentos das ruas. No secundário, poder-se-á pedir aos alunos para determinar o trajecto aéreo mais curto, entre duas cidades, que um avião deverá seguir e, também, para comparar os resultados obtidos a partir de um mapa com os resultados obtidos a partir de um globo terrestre. Se os alunos pretenderem determinar a distância mínima percorrida entre várias cidades, numa viagem de automóvel, poderão utilizar grafos. Os alunos do secundário deverão utilizar as coordenadas cartesianas quer como forma de resolver problemas, quer como forma de demonstrar os seus resultados.

Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas

As crianças chegam à escola com algumas noções informais acerca de como se podem mover as formas. Os alunos poderão explorar alguns desses movimentos, como translações, reflexões e rotações, através da utilização de espelhos, de dobragens de papel e de representações gráficas. Mais tarde, os seus conhecimentos sobre transformações deverão tornar-se mais formais e sistematizados. Os alunos do 3° ao 5° ano poderão investigar os efeitos das transformações e começar a descrevê-los em termos matemáticos. Poderão iniciar a aprendizagem das características essenciais que definem uma transformação, através da utilização de programas informáticos interactivos de geometria. Por exemplo, para obter a transformação de uma figura por rotação, os alunos precisarão de definir o centro da rotação, o sentido da rotação e o ângulo de rotação, como se mostra na figura 1. Nos anos seguintes, os alunos deverão aprender a compreender o que significa, numa transformação, manter a distância constante, como se verifica nas translações, rotações e reflexões. No secundário, os alunos deverão aprender diversas formas de representação das transformações, incluindo o uso de matrizes para indicar como as figuras são transformadas num sistema de coordenadas no plano e a notação das funções. Deverão, ainda, começar a compreender os efeitos das composições de transformações. Em todos os níveis de ensino, a ênfase adequadamente atribuída ao tema da simetria fornece aos alunos discernimento no campo da matemática e no da arte e estética.

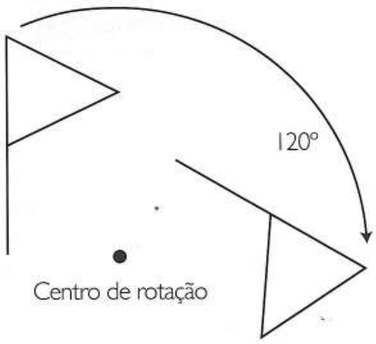
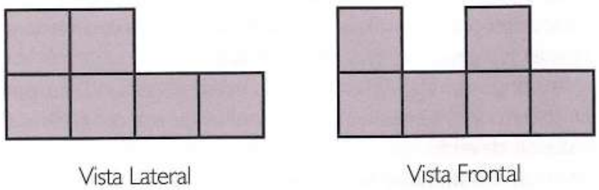


Figura 1. Rotação de 120° no sentido dos ponteiros do relógio.

Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas

Desde o início dos primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objectos bi e tridimensionais. Mais tarde, os alunos deverão sentir-se à vontade na análise e no desenho de vistas, na contagem das partes componentes das figuras e na descrição das propriedades que não podem ser vistas, mas apenas inferidas. Os alunos necessitam de aprender a alterar, quer física quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objectos de forma sistematizada, à medida que vão desenvolvendo os seus conhecimentos sobre congruência, semelhança e transformações.

Um aspecto da visualização espacial implica fazer corresponder formas bi e tridimensionais às suas representações. Os alunos dos primeiros anos podem experimentar construir sólidos a partir das planificações — figuras bidimensionais, geralmente feitas de papel, que podem ser dobradas de modo a obter objectos tridimensionais — como um passo no sentido de aprenderem a prever se determinadas planificações correspondem a determinados sólidos. Nos anos seguintes, deverão já ser capazes de interpretar e criar vistas de topo ou laterais dos objectos. Esta capacidade pode ser desenvolvida através de um desafio aos alunos que vise a construção de uma estrutura da qual são dadas apenas as suas vistas lateral e frontal, como ilustrado na figura 2. Os alunos do 3° ao 5° ano poderão verificar se é possível construir mais do que uma estrutura que satisfaça as duas condições. Poder-se-á pedir aos alunos do 2° e 3° ciclos e do secundário que determinem o número mínimo de blocos necessários à sua construção. Os alunos do secundário deverão ser capazes de visualizar e desenhar outras secções transversais das estruturas e de uma variedade de sólidos geométricos.

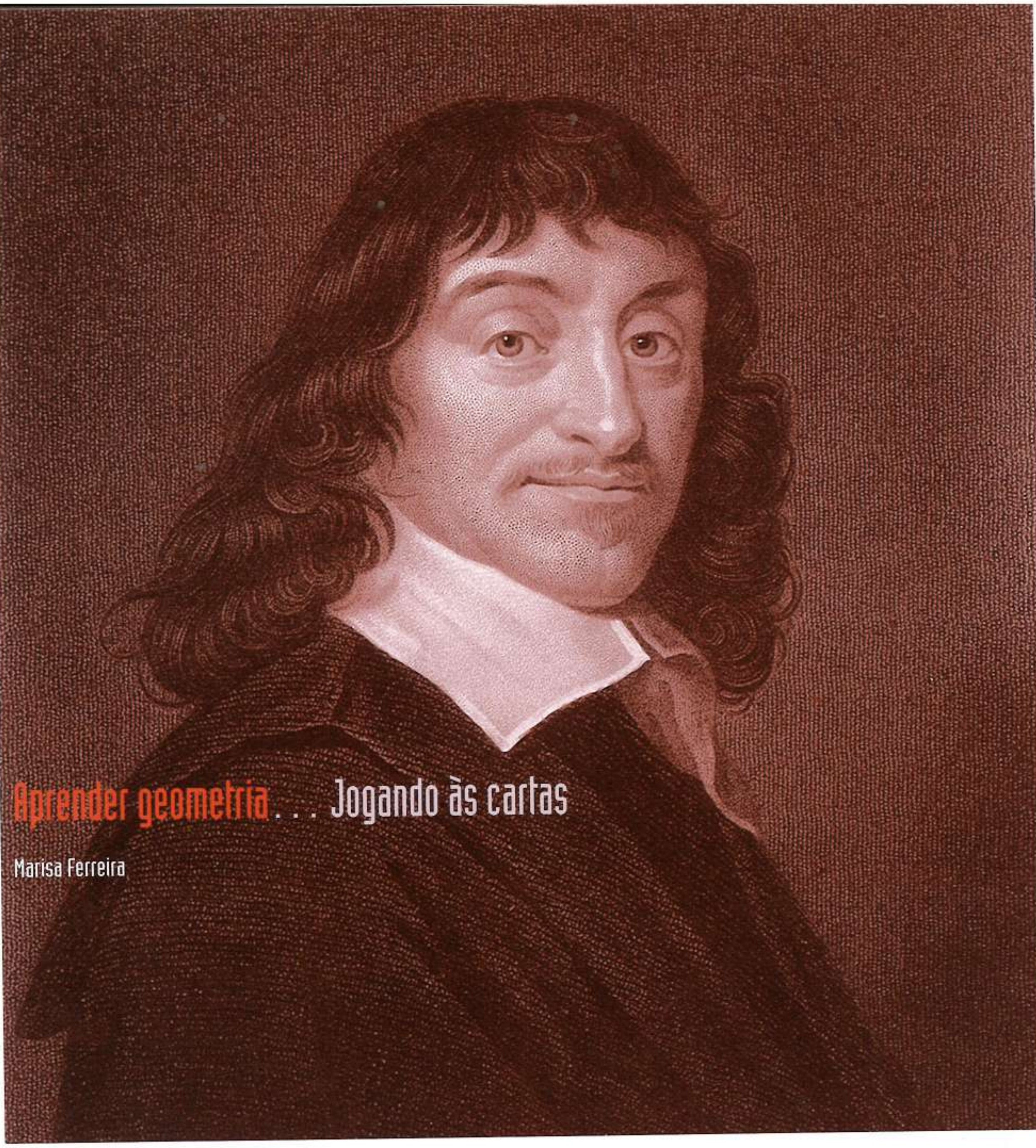


Vista Lateral   Vista Frontal

Figura 2. Uma estrutura de blocos [retirada de uma apresentação realizada por J. de Lange].

Aprender geometria... Jogando às cartas

Marisa Ferreira



René Descartes

Introdução

René Descartes, Filósofo e Matemático, nasceu em La Haye, França, em 31 de Março de 1596, e veio a falecer em Estocolmo, Suécia, a 11 de Fevereiro de 1650. Fez parte da nobreza francesa do séc. XVII e foi educado em Matemática, Física e em Filosofia Clássica. Foi caracterizado como o homem que se esqueceu do que sabia para tentar encontrar a causa do que via, tal como Newton, tornando-se em homens que viram a necessidade de levar a Geometria para a Física.

A figura de René Descartes domina largamente o panorama das ideias no século XVII. Talento multifacetado, dividiu por muitos ramos do saber a sua actividade, assim um pouco ao jeito dos sábios antigos que, antes da diversificação ou da autonomização dos vários ramos das ciências, tentavam, abarcando-as todas, uma síntese inteligível da realidade.

Descartes fez incursões de mérito pelas matemáticas, pela Geometria e pela Física. Hoje, o seu contributo para o desenvolvimento destas ciências apresenta também um grande interesse histórico.


USE

Of the GEOMETRICAL

Playing Cards,

As also a Discurse of the

Mechanick Powers.

By Monsi. *Descartes*.

Translated from his own Manuscript Copy.

SHEWING

What Great Things may be performed by MECHANICK ENGINES in removing and raising Bodies of vast Weights with little Strength or Force.

LONDON,

Printed and Sold by *J. Moxon* at the *Atlas* in *Warwick-Lane*, 1697.

Figura 1.

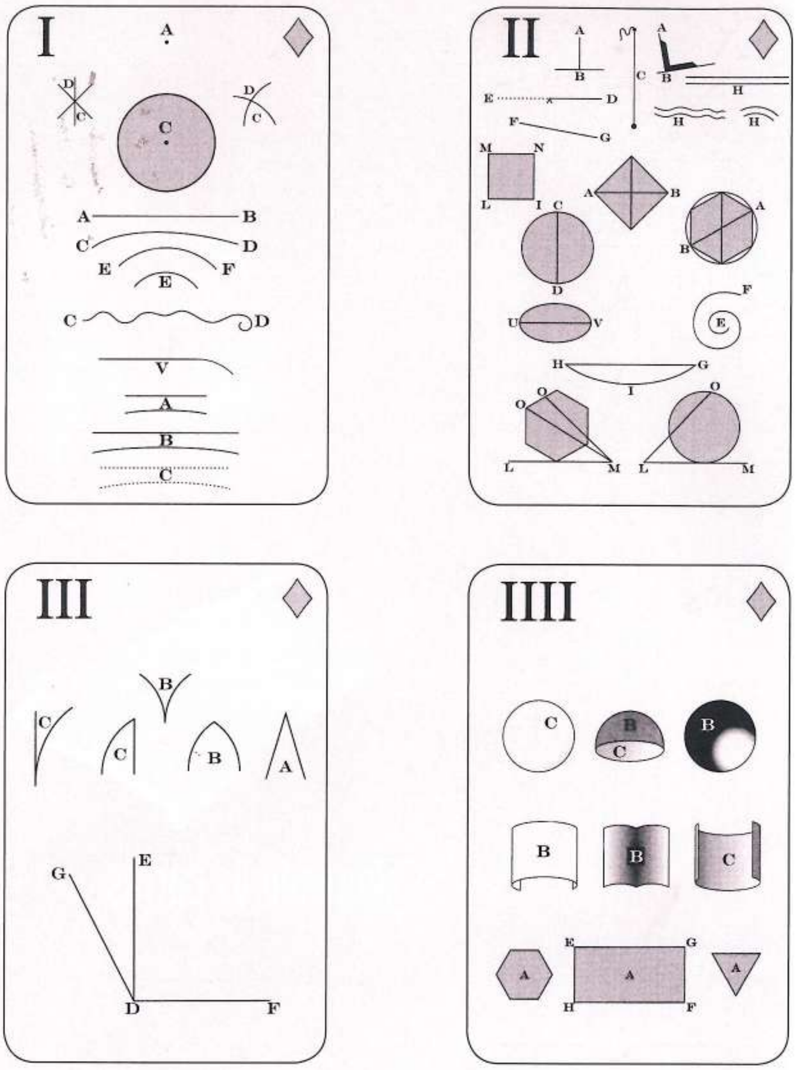


Figura 2. Cartas de Ouros I, II, III e IIII.

Uma das suas obras, na área da Matemática e da Física, foi *Use of the Geometrical Playing Cards* (figura 1). Não se sabe ao certo a sua data de publicação, no entanto, conhece-se uma tradução, de uma cópia do manuscrito de Descartes, impressa em Londres em 1697.

Esta obra é constituída por um baralho de cartas, com o respectivo texto explicativo, vocacionado para o ensino da Geometria através do jogo. As cartas estão divididas pelos quatro naipes de um baralho comum: ouros, copas, espadas e paus. Os três primeiros naipes têm como principal objectivo o ensino da Geometria e o naipe de paus, um discurso sobre os *Poderes da Mecânica*.

Cartas de Ouros

As Cartas de Ouros servem como uma introdução a alguns conceitos de Geometria, e nelas são mencionadas algumas definições de entes matemáticos que poderão ser comparadas com as definições em *Elementos* de Euclides (Livro I):

- Definição de *Ponto* — o ponto é o que não tem nenhuma parte.
- Definição de *Linha* — a linha é um comprimento sem largura. (Tipos de Linhas: Rectas, Curvas e Mistas.)
- Definição de *Ângulo* — o ângulo é o encontro indirecto de duas linhas, num só ponto, ou o espaço entre o encontro indirecto, ou concorrência de duas linhas num ponto. (Tipos de Ângulos: rectilíneo, curvilíneo e misto.)
- Definição de *Superfície* — a superfície é o que tem comprimento e largura sem profundidade. (Tipos de Superfícies: Convexa, Côncava e Plana.)

Neste naipe também surgem sete *Axiomas*, com a respectiva justificação geométrica, alguns semelhantes às *Noções Comuns* de Euclides:

- Axioma I — *Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si*.
- Axioma II — *Se a coisas iguais adicionarmos coisas iguais, obtemos outras iguais*.
- Axioma III — *Se a coisas iguais retirarmos coisas iguais, os restos serão iguais*.
- (...)

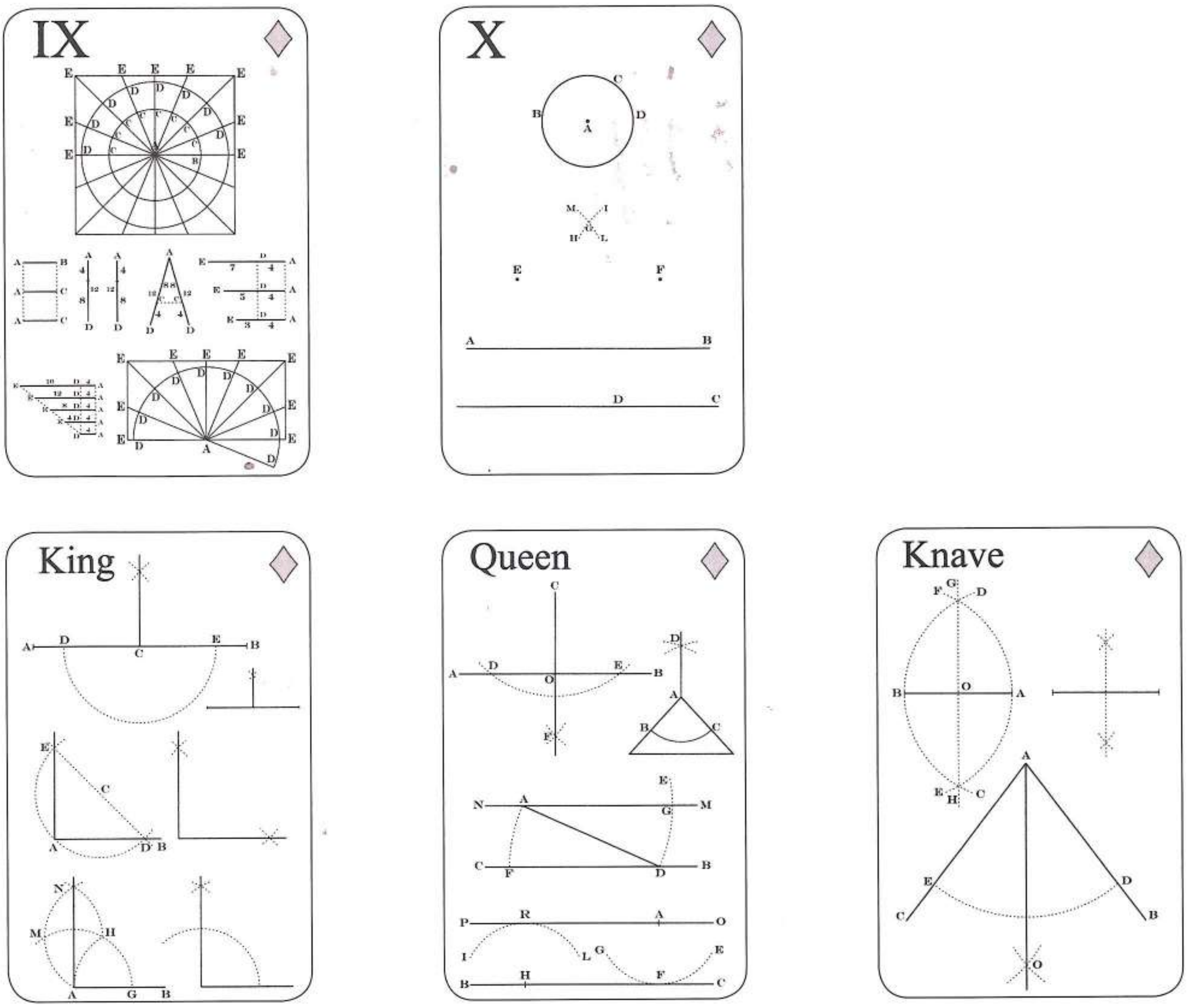


Figura 3. Cartas de Ouros IX, X, King, Queen e Knave.

Descartes contempla ainda, nas Cartas de Ouros, os seus *postulados*, que poderão ser comparados aos *postulados* de Euclides. Considera-se que estes postulados são a base da geometria de Descartes, do mesmo modo que os Postulados de Euclides são a base da sua geometria (euclidiana):

- Postulado I — Desenhe uma linha recta do ponto A até ao ponto B.
- Postulado II — Prolongue indefinidamente sobre o lado do extremo D.
- Postulado III — Desenhe uma circunferência a partir do ponto A e de raio AB.
- Postulado IV — Dos pontos E ao F, faça uma secção. (É de salientar a definição de secção, que para nós, hoje em dia, é a definição de um qualquer ponto equidistante de outros dois pontos.

Contudo, como se pode verificar Descartes define apenas quatro postulados, enquanto Euclides define cinco. Além disso, apenas os três primeiros são semelhantes, sendo o quarto, de certo modo, desnecessário, já que para construir uma secção é preciso somente o *Postulado III*. Em relação ao *Postulado* 4[1] e Postulado 5[2], de Euclides, Descartes não os inclui nos seus.

Nas últimas cartas deste naipe, aparecem algumas proposições com semelhanças às dos *Elementos* (Livro I). Descartes, além da proposição, faz a descrição da respectiva construção geométrica.

- Proposição I — Elevar uma perpendicular a uma recta por um dos seus pontos.
- Proposição V — Desenhar uma linha paralela a uma recta dada passando por um ponto dado.
- Proposição VI — Cortar uma linha recta em duas partes iguais.
- Proposição VII — Cortar um ângulo rectilíneo em dois iguais.
- (...)

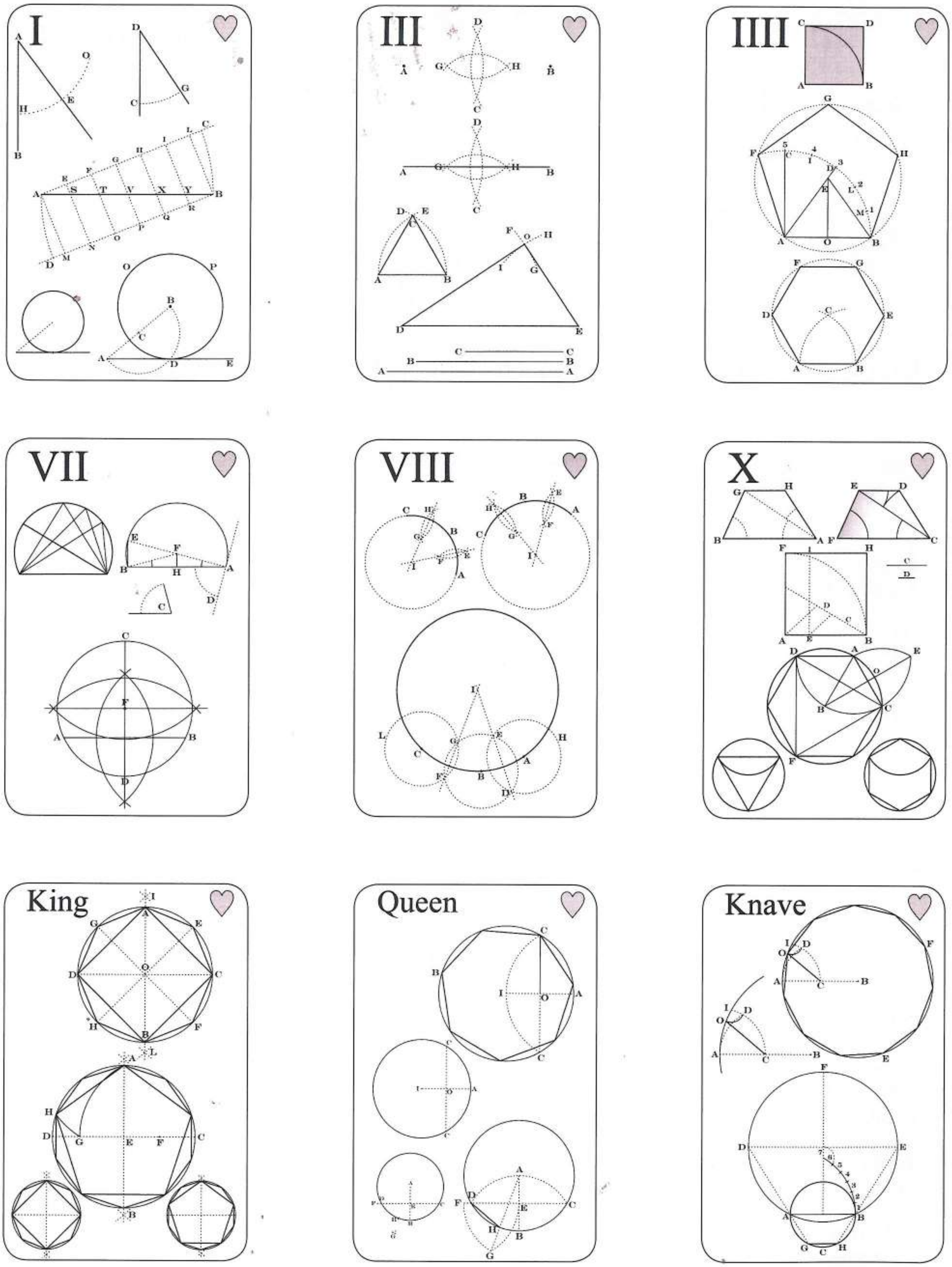


Figura 4. Cartas de Copas I, III, IIII, VII, VIII, X, King, Queen, Knave.

Cartas de Copas

As Cartas de Copas, numa primeira parte, dão continuidade às proposições estabelecidas inicialmente no naipe de Ouros:

- Proposição VIII — No extremo de um segmento de recta fazer um ângulo rectilíneo, igual a um proposto.
- Proposição X — De um ponto dado desenhar uma linha recta, que toca um círculo proposto.
- Proposição XI — Desenhar uma linha recta que toca o círculo num ponto proposto.
- Proposição XIII — Descrever uma linha espiral sobre uma linha recta dada.
- (...)

Posteriormente, surge um novo conjunto de proposições com vista à construção de figuras planas, com as respectivas instruções para a construção geométrica:

- Proposição I — Construir um triângulo equilátero sobre um segmento de recta.
- Proposição III — Traçar um quadrado sobre um segmento de recta.
- Proposição IV — Traçar um pentágono regular sobre uma linha recta dada.
- Proposição V — Traçar um hexágono regular sobre uma linha recta.
- Proposição VIII — Sobre uma linha recta dada descrever uma porção de um círculo, definindo um ângulo igual a um ângulo dado.
- Proposição XI — Descrever uma circunferência por três pontos dados.
- (...)

Nas últimas cartas do naipe, surgem outras proposições e respectivas orientações, que visam a construção de polígonos inscritos em círculos:

- Proposição I — Num círculo dado, inscrever um triângulo equilátero, um hexágono e um dodecágono.
- Proposição II — Num círculo dado inscrever um quadrado e um octógono.
- Proposição IV — Num círculo dado inscrever um heptágono.
- Proposição VI — Num círculo dado inscrever um hendecágono.
- (...)

Cartas de Espadas

À semelhança dos naipes anteriores, as primeiras Cartas de Espadas dão seguimento às proposições estabelecidas no naipe anterior:

- Proposição X — Inscrever um círculo num triângulo dado.
- Proposição XI — Inscrever um quadrado num triângulo dado.
- Proposição XII — Inscrever um pentágono regular num triângulo equilátero.
- Proposição XV — Inscrever um quadrado num pentágono.
- (...)

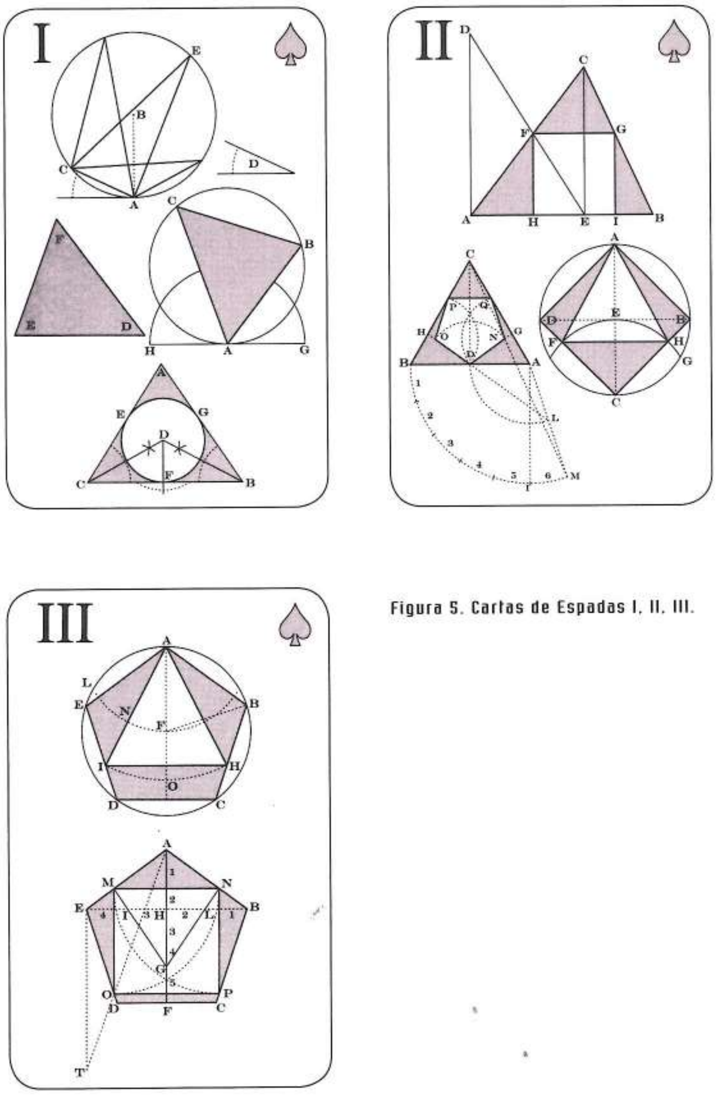


Figura 5. Cartas de Espadas I, II, III.

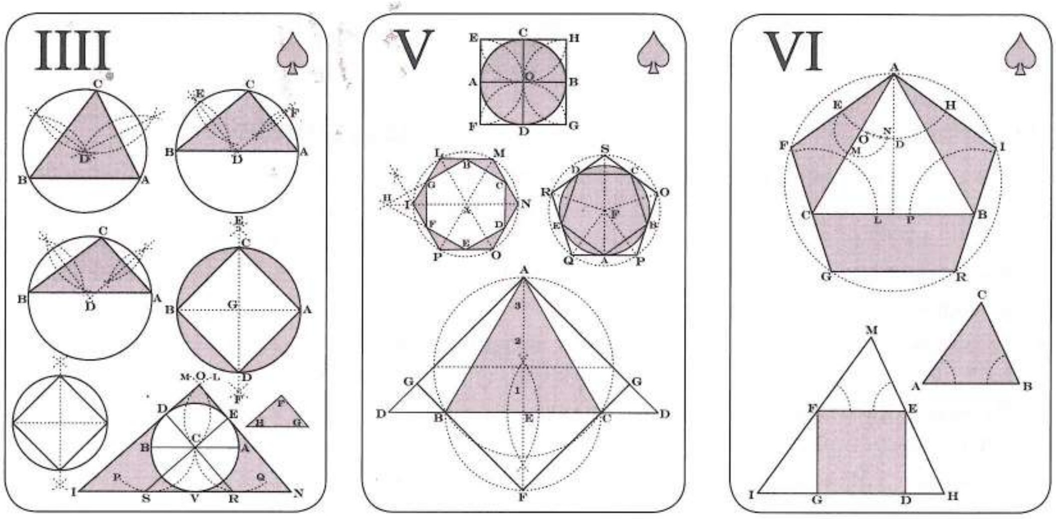
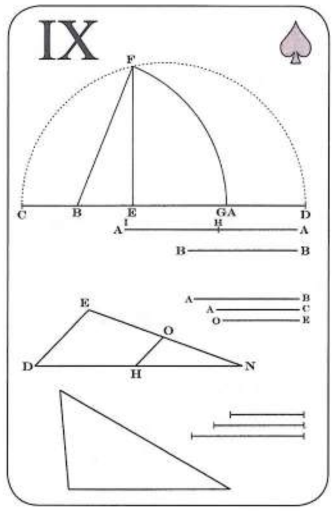


Figura 6. Cartas de Espadas IIII, V, VI, IX.



Depois, seguem-se outras proposições também com indicações da construção geométrica de como circunscrever um polígono regular a outro polígono:

- Proposição I — Dado um triângulo, circunscrever um círculo.
- Proposição II — Dado um quadrado, circunscrever uma circunferência.
- Proposição IV — Num círculo circunscrever um quadrado.
- Proposição VI — Sobre um polígono regular circunscrever o mesmo polígono.
- Proposição VIII — Sobre um triângulo dado equilátero circunscrever um pentágono.
- (...)

Nas últimas Cartas de Espadas, surgem novas proposições com algumas razões proporcionais:

- Proposição II — Dada a soma dos extremos e o meio proporcional, discernir os fins e os extremos.
- Proposição IV — De uma linha recta dada cortar uma parte, que será meio proporcional entre o resto e outra linha recta dada.
- Proposição VII — Entre duas linhas rectas dadas encontrar dois meios proporcionais.
- Proposição X — Dividir um segmento de recta em proporção áurea o meio e o extremo da razão.
- (...)

Cartas de Paus

As Cartas de Paus fazem referência aos *Poderes da Mecânica.*

É neste naipe que Descartes faz referência aos seus estudos e descobertas na área da Mecânica e aos seus Princípios.

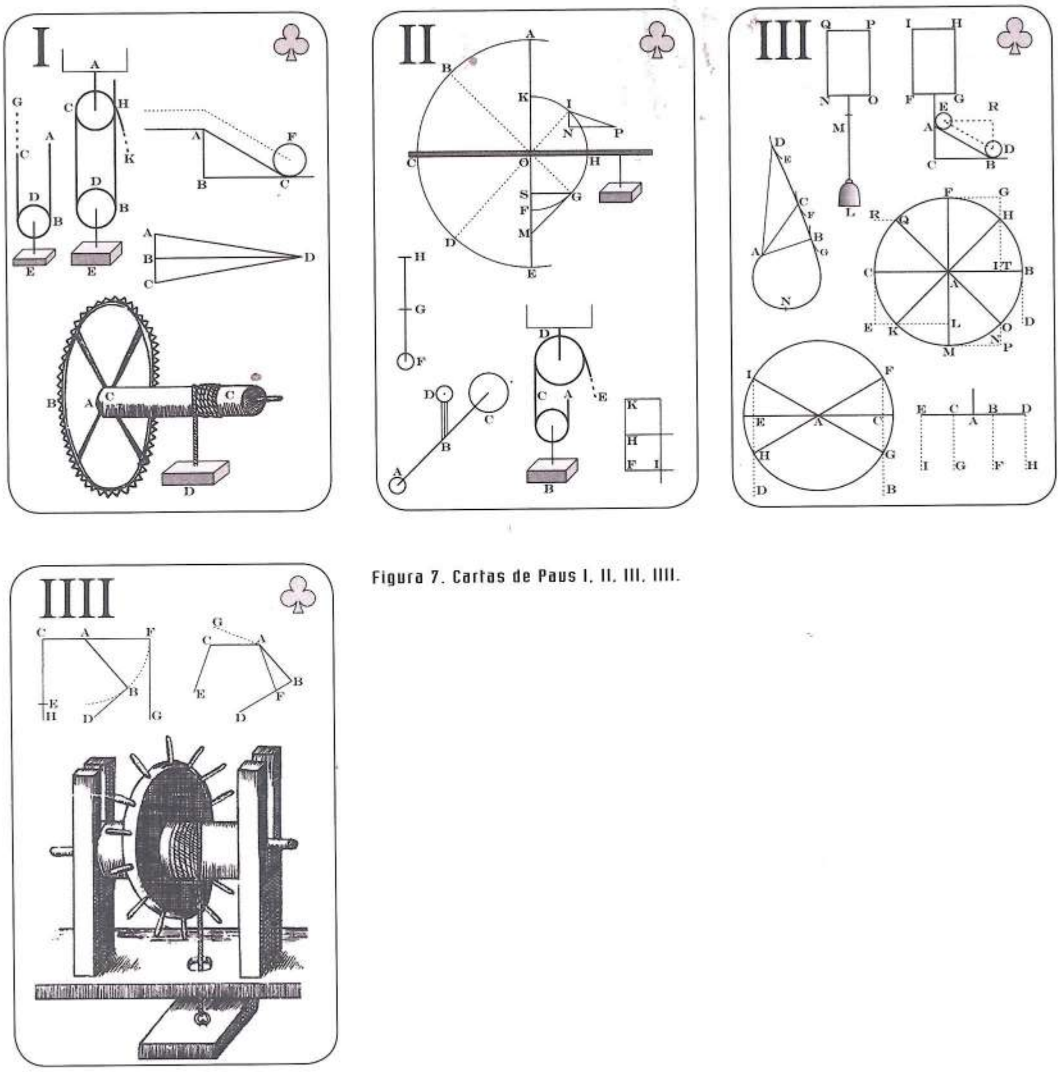


Figura 7. Cartas de Paus I, II, III, IIII.

Nas primeiras cartas consta A *Explicação* das máquinas, com a ajuda das quais se podem levantar grandes pesos com pequenas forças. Dentro destas, podemos considerar: as roldanas, o plano inclinado, a cunha, a grua, a roda, a rosca, a alavanca, entre outras. De seguida, surgem duas cartas: uma de Descartes a Mersenne e outra de Roberval a Fermat.

Conclusão

Como se pode constatar, a analogia da geometria exposta por Descartes com a geometria de Euclides é notória. No entanto, mais semelhanças poderiam ser investigadas, nomeadamente: identificar relações entre a geometria de Descartes, a geometria de Euclides e a geometria moderna; comparar os diferentes instrumentos utilizados, quer por Descartes, quer por Euclides (por exemplo, o compasso utilizado por Descartes não é o compasso de Euclides).

Outra situação interessante a explorar diz respeito ao carácter didáctico das cartas. Será que Descartes utilizava as cartas como mero divertimento? Ou como "uma cábula"? No artigo não há qualquer referência a este aspecto, mas julgo interessante, num trabalho futuro, atribuir um carácter didáctico a estas cartas, reproduzindo actividades que as utilizem.

A título de curiosidade, as cartas foram reproduzidas integralmente e estão disponíveis, em forma de baralho, na associação LUDUS.

Notas

1 Postulado 4 — Todos os ângulos rectos são iguais.

2 Postulado 5 — Se uma linha recta cai em duas linhas rectas de forma a que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam menores que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se forem prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos rectos.

Marisa Ferreira
Externato Cooperativo da Benedita

Uma regra de perspectiva inédita

João Pedro Xavier

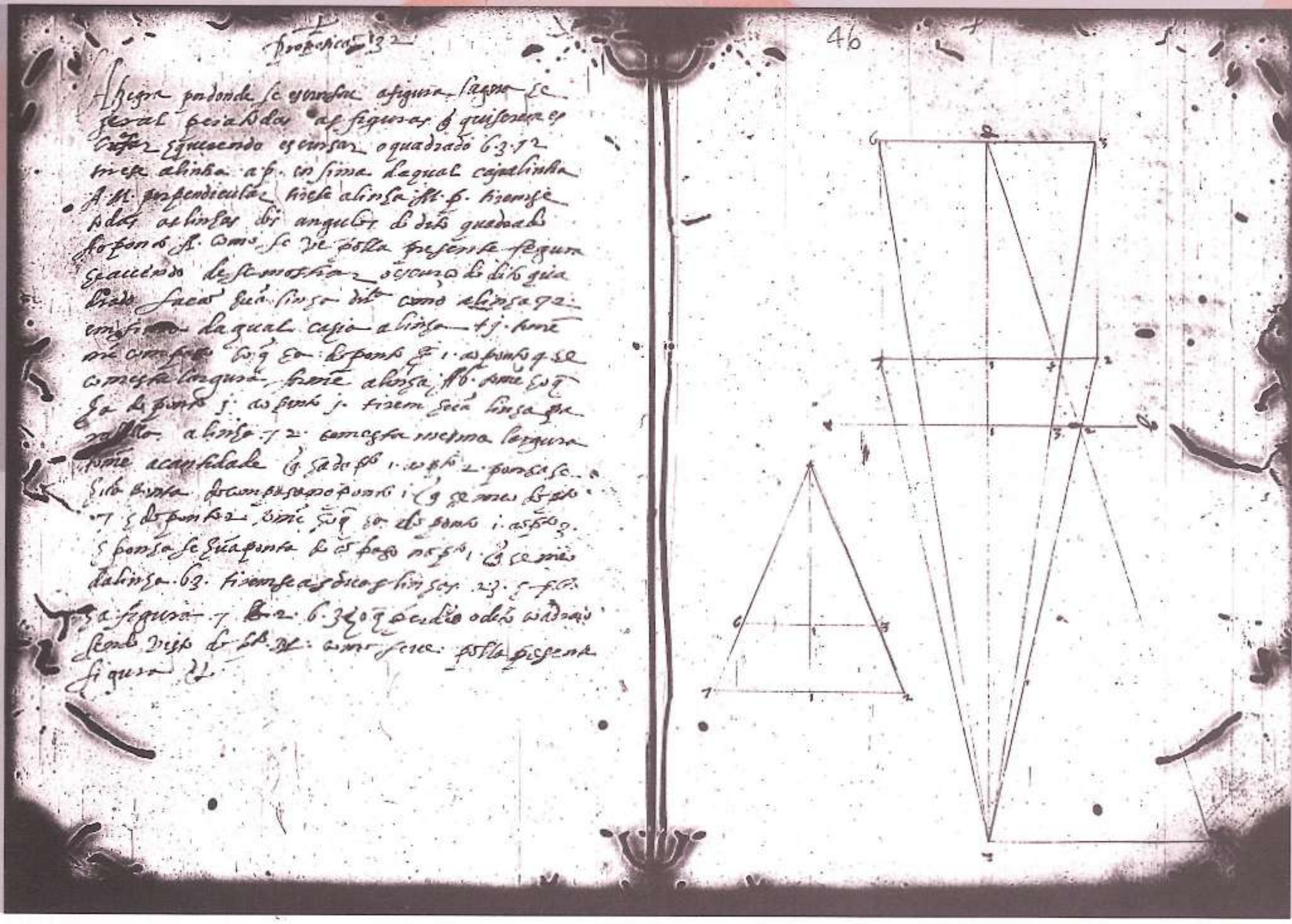


Figura 1. Proposição 32 do *Livro de Perspectiva* [BN. Cód. 3675, fol. 45v e fol. 46r]

A proposição 32 do *Livro de Perspectiva* do *Tratado de Arquitectura* de António Rodrigues[1], de 1576[2], descreve o conjunto de procedimentos a seguir para se obter a perspectiva de um quadrado, cujos vértices se identificam com os números 6, 3, 7 e 2 (figura 1).

Acompanhemo-los, actualizando a transcrição do texto e do desenho original, e isolando cada um dos passos da construção.[3]

E querendo *escursar* o quadrado 6.3.7.2,

1) tire-se a linha $A.P$
2) em cima da qual caia a linha $A.M$ perpendicular,
3) tire-se a linha $M.P$
4) tirem-se todas as linhas dos ângulos (vértices) do dito quadrado ao ponto A
5) e havendo de se mostrar o *escorço* do dito quadrado façam uma linha direita (recta) como a linha $7''.2''$ em cima da qual caia a linha $1''.1'''$
6) tomem num compasso o que há do ponto 1 ao ponto 4
7) e com esta largura formem a linha *ab*
8) tomem o que há do ponto 1 ao ponto 1', tirem uma linha paralela à linha $7''.2''$, com esta mesma largura
9) tomem a quantidade que há do ponto 1' ao ponto 2', ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1''$ que é meio do ponto $7''$ e do ponto $2''$
10) tomem o que há do ponto 1' ao ponto 3' e ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1'''$ que é meio da linha $6''.3''$
11) tirem-se as duas linhas $2''.3''$ e $7''.6''$
12) a figura $7''.2''.6''.3''$ é o que perdeu o dito quadrado sendo visto do ponto A como se vê pela presente figura.

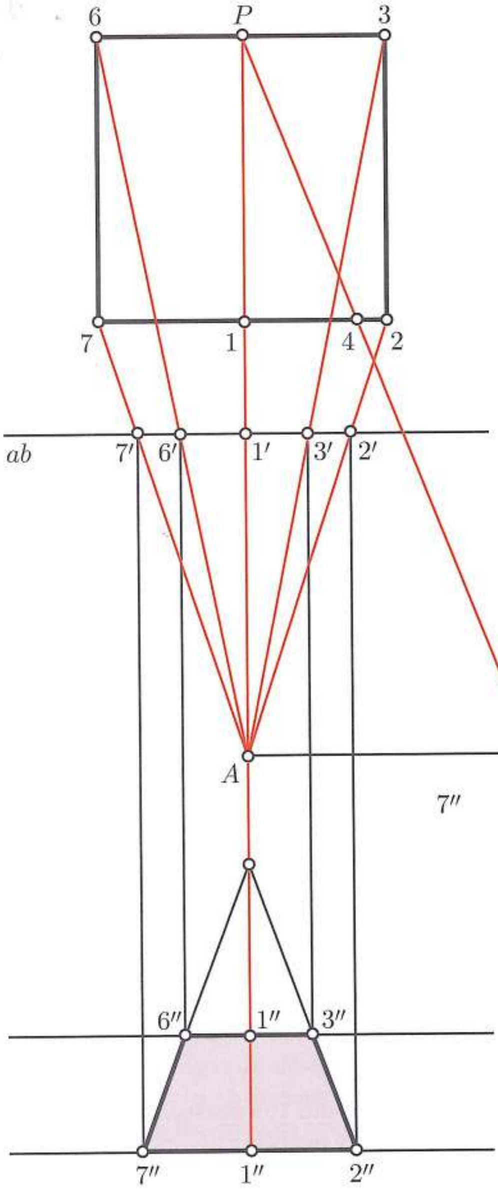


Figura 2. Desenho actualizado da proposição 32.

Como a *regra* em causa, a primeira das duas apresentadas no *Livro de Prespectiua*[4], é susceptível de nos causar alguma estranheza, vale a pena analisar, em pormenor, cada um dos passos identificados ...

1] tire-se a linha $A.P$

A é o pé do Observador[5] e, por conseguinte, parece estar definida a relação do Observador com o quadrado: posição e distância recíprocas. Parece estar, digo, porque na realidade não está como adiante teremos ocasião de comprovar.

De acordo com as definições iniciais do *Livro de Perspectiva*, a linha $A.P$ é a *linha cêntrica*. Como a referida linha passa por P, ponto médio do lado 6.3, é seguro afirmar que o quadrado se apresenta simetricamente em relação ao Observador.

2] em cima da qual caia a linha $A.M$ perpendicular

Esta operação corresponde, em linguagem actual, ao rebatimento do Plano Visual Principal sobre o Plano de Terra. Mas também se pode dizer, aproximando-nos mais do que seria a linguagem da época, que passámos a ter o perfil sobreposto à planta. Nesta projecção ortogonal de perfil a linha $A.P$ representa o Plano de Terra e a linha $A.M$ (que nela cai na perpendicular) representa o Plano Neutro. M é o Olho[6]. A medida de $A.M$ é a altura a que se encontra o Olho ou a altura do Observador. O segmento $1.P$ representa o quadrado visto de perfil. Como coincide com a linha $A.P$ podemos afiançar que a figura está contida no Plano de Terra.

3] tire-se a linha $M.P$

A linha $M.P$ é um raio visual traçado no perfil. Corresponde à *linha de distância*, de acordo com a definição de Rodrigues.

Trata-se de uma definição peculiar, que procura relacionar o Observador com o Objecto, completamente estranha ao conceito de distância conforme a definição original de Alberti para a qual o que conta é a distância do Observador ao Quadro. Definição esta que prevaleceu.

Note-se que até ao momento o Plano do Quadro ainda não foi mencionado. Nem será.

4) tirem-se todas as linhas dos ângulos (vértices) do dito quadrado ao ponto A
Trata-se do traçado da projecção horizontal dos raios visuais que unem o pé do Observador a cada um dos vértices do quadrado: $A.7$, $A.6$, $A.3$ e $A.2$.

5) e havendo de se mostrar o escorço do dito quadrado façam uma linha direita (recta) como a linha $7''.2''$ em cima da qual caia a linha $1''.1'''$
Passámos, neste momento, para a perspectiva propriamente dita com o pedido de traçar duas linhas perpendiculares entre si: a linha $7''.2''$ e a linha $1''.1'''$. Em linguagem actual diríamos que o pedido se refere ao traçado da Linha de Terra (LT) e da Linha Principal (LP).

Optei por fazer coincidir o traço do Plano Visual Principal no Plano de Terra (a *linha cêntrica*) com a Linha Principal fazendo, no fundo, o desdobramento da Linha de Terra. No original, a perspectiva do quadrado está situada no quadrante inferior esquerdo do fólio.

6) tomem num compasso o que há do ponto 1 ao ponto 4
Voltámos ao perfil. O ponto 4 é a intersecção do raio visual $M.P$ com a linha coincidente com a projecção horizontal do lado 7.2 do quadrado. Embora o Autor não o indique sabemos que essa linha corresponde à posição do Quadro no perfil e, por conseguinte, o ponto 4 será o traço do raio visual $M.P$ no Quadro. Como o ponto 1 é a projecção do lado 7.2 visto de perfil e o ponto P do lado 6.3, o segmento 1.4 será, adaptando a linguagem de Rodrigues, *o que perdeu a figura vendo-se do ponto A*. Na verdade não é de A que a figura é vista mas sim de M, que é o Olho, mas é evidente que é isso que se quer referir.

7) com esta largura formem a linha ab
Limitemo-nos a seguir as instruções e tracemos, na planta, uma linha ab paralela ao lado 7.2 do quadrado à distância correspondente à medida 1.4. Ou seja, em planta, 1.4 será igual a $1.1'$.

É evidente que o fazemos com alguma perplexidade pois não conseguimos descortinar de imediato qual poderá ser o serviço que a referida linha nos poderá prestar...

8) tomem o que há do ponto 1 ao ponto $1'$
O que há do ponto 1 ao ponto $1'$, a distância do lado 7.2 à linha ab, sabemos nós que é também a distância que no perfil vai do ponto 1 ao ponto 4, ou seja, aquilo que a figura *perdeu* vista de M.

tirem uma linha paralela à linha $7''.2''$. com esta mesma largura
Perfeito. Voltámos à perspectiva e aí, com esta mesma medida, tracemos uma paralela à linha $7''.2''$. Designemo-la por linha $6''.3''$ já que será sobre essa linha que se irá situar, garantidamente, a perspectiva do lado 6.3 do quadrado.

9) tomem a quantidade que há do ponto $1'$ ao ponto $2'$
Ficamos agora a perceber o que é, e para que serve a linha ab. Representa o Quadro em projecção horizontal e, por conseguinte, a medida $1'.2'$ sobre ab é a projecção da medida 1.2 correspondente a metade do lado 7.2 do quadrado representado em projecção horizontal.

Não se descortina, para já, o motivo que levou o Autor a pedir para colocarmos a linha ab à distância 1.4 do lado 7.2 do quadrado[7]...

ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1''$ que é meio do ponto $7''$ e do ponto $2''$
Voltámos de novo à perspectiva. Com a medida $1'.2'$ tomada anteriormente, colocando a ponta do compasso no ponto $1''$, médio de $7''.2''$, poderemos localizar o ponto $7''$ e o ponto $2''$ e assim definir a perspectiva do lado 7.2.

Confirma-se que a linha ab é efectivamente a representação do Quadro em projecção horizontal, ou seja, LT.

10) tomem o que há do ponto $1'$ ao ponto $3'$
Novamente na linha ab... o segmento $1'.3'$ sobre esta linha é a projecção de $P.3$ metade do lado 6.3 do quadrado que se encontra mais distante.

e ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1'''$ que é meio da linha $6''.3''$
De regresso à perspectiva para se definir o lado 6.3: com centro no ponto $1'''$ e raio igual a $1'.3'$, medida tomada sobre ab, localizamos o vértice $6''$ e o $3''$.

Desconcertante!...

O Quadro não tem no perfil a mesma posição que apresenta em planta!

Lembro que no perfil passava pelo ponto 1, intersecção de $A.P$ com 7.2; em planta é a linha ab.

Pergunta-se: será que isto pode ser?...

Adianto que a resposta é positiva e será isso que me proponho demonstrar a seguir. Mas, para já, confiando na possibilidade do traçado, passemos à etapa seguinte...

11) tirem-se as duas linhas $2''.3''$ e $7''.6''$
Para concluir o *escorço* do quadrado basta traçar os lados $2''.3''$ e $7''.6''$.

12) a figura $7''.2''.6''.3''$ é o que perdeu o dito quadrado sendo visto do ponto A como se vê pela presente figura.
Note-se que o lado $7''.6''$ e o lado $2''.3''$ são prolongados intersectando-se, naturalmente, no Ponto Principal — ponto de fuga das rectas de topo (ou ortogonais ao Quadro). No entanto, de acordo com a descrição, depreende-se que este ponto não foi utilizado na construção.

Nem sequer se faz referência ao prolongamento dos lados do quadrado. No entanto, em desenho isso foi feito e poderá dever-se a uma certificação do rigor do traçado. Ademais, a distância do ponto 1, médio de 7.2, a este ponto, teria de ser igual à medida $A.M$, correspondente à altura do Plano do Horizonte. E, de facto, é. Verifique-se o original (figura 1). Isso constitui uma prova irrefutável de que o desenho é preciso.

Acompanhada que foi, a par e passo, a descrição constante na proposição 32 para se *escursar* um quadrado ficaram, como assinalei, duas importantes questões por esclarecer:

- o condicionamento na colocação da linha ab (representativa do Quadro em planta) indicado no 7° passo da construção;

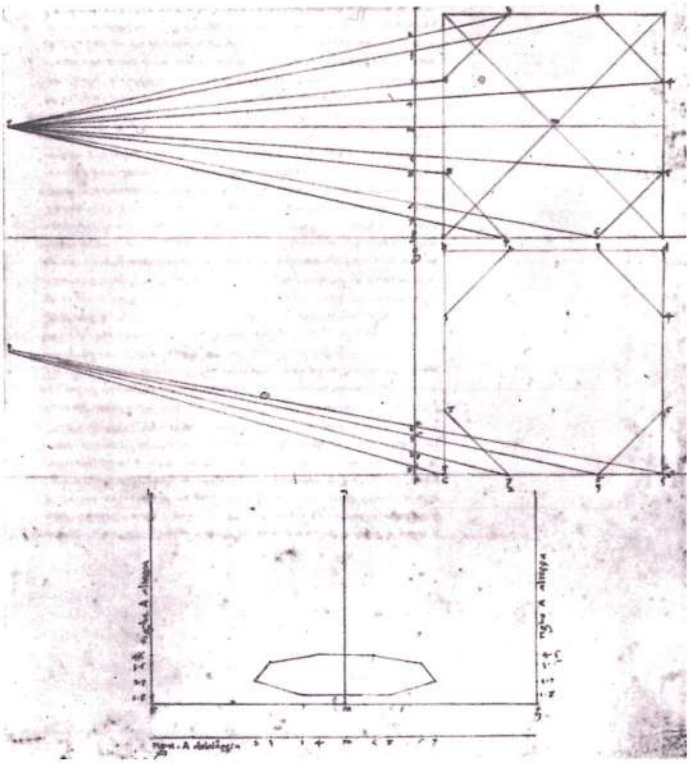


Figura 3. Perspectiva de um octógono regular segundo a *costruzione legittima*. **Piero della Francesca. De Prospectiva Pingendi, c. 1460. Teorema XLVI**

- o posicionamento distinto do plano do Quadro em planta e no perfil.

Abordarei, seguidamente, esta última questão, sem dúvida a mais essencial, porque sem a certificação da possibilidade de operar com uma posição variável do Quadro na projecção horizontal e na projecção de perfil não é possível validar a regra de Rodrigues.

Não há dúvida de que, à semelhança da *costruzione legittima*[8], o caminho para a obtenção da perspectiva por via da sua regra é feito *con la pianta e profillo e per via della intersegazione*[9] (figura 3).

Só que o desencontro do posicionamento do Quadro em ambas as projecções é um claro desvio em relação à essência desta verdadeira regra. Com efeito, deixa de ser possível a articulação das duas projecções ortogonais e, naturalmente, os raios visuais representados em projecção horizontal não se correspondem com os da projecção de perfil e reciprocamente. Mas o que é notável é que apesar de não estarmos em presença de uma dupla projecção ortogonal sistematizada, a construção perspéctica exposta não deixa de ser válida, já que as distâncias horizontais que se vão buscar à linha que representa o Quadro na respectiva projecção são passíveis de ser combinadas com as distâncias verticais que se vão colher na linha que o representa de perfil, como veremos.

Não se estranha, por isso, que os *escorços* obtidos por esta regra, presentes no *Tratado*, tenham verosimilhança, apesar do processo poder ser considerado pouco canónico se comparado com a construção clássica, a dita *costruzione legittima*.

E como não haveriam de ter se estão correctos!?

Sempre utilizando como referência a figura da proposição 32, generalizável a outros polígonos, verifiquemos então se é ou não possível fazer a sua restituição perspéctica, ou seja, comprovar se o seu *escorço* corresponde ou não a um quadrado.

Note-se que no novo desenho que agora apresento actualizei por completo a linguagem e a nomenclatura[10] tendo atribuído outras designações aos elementos geométricos em presença (figura 4). Tive igualmente o cuidado de fazer uma translação lateral da projecção de perfil para clarificação da leitura mas deixei-a, também, sobreposta à projecção horizontal tal como acontece no desenho de Rodrigues.

Primeiramente, confirma-se o que o Autor já tinha verificado: os lados ortogonais do quadrado convergem para o Ponto Principal (PP). Referi há pouco que isso se poderia dever a uma certificação do rigor do traçado. E poderá. Mas também pode ser um gesto que visa demonstrar a correcção da construção perspéctica em si mesma.

Determinado o PP pode traçar-se a Linha do Horizonte (LH) e, se a figura é um quadrado, uma das suas diagonais cruzará LH num Ponto de Distância (PD). A distância do PD ao PP dá-nos a distância do Observador ao Quadro que na planta confirmamos ser igual à medida do segmento *PF*

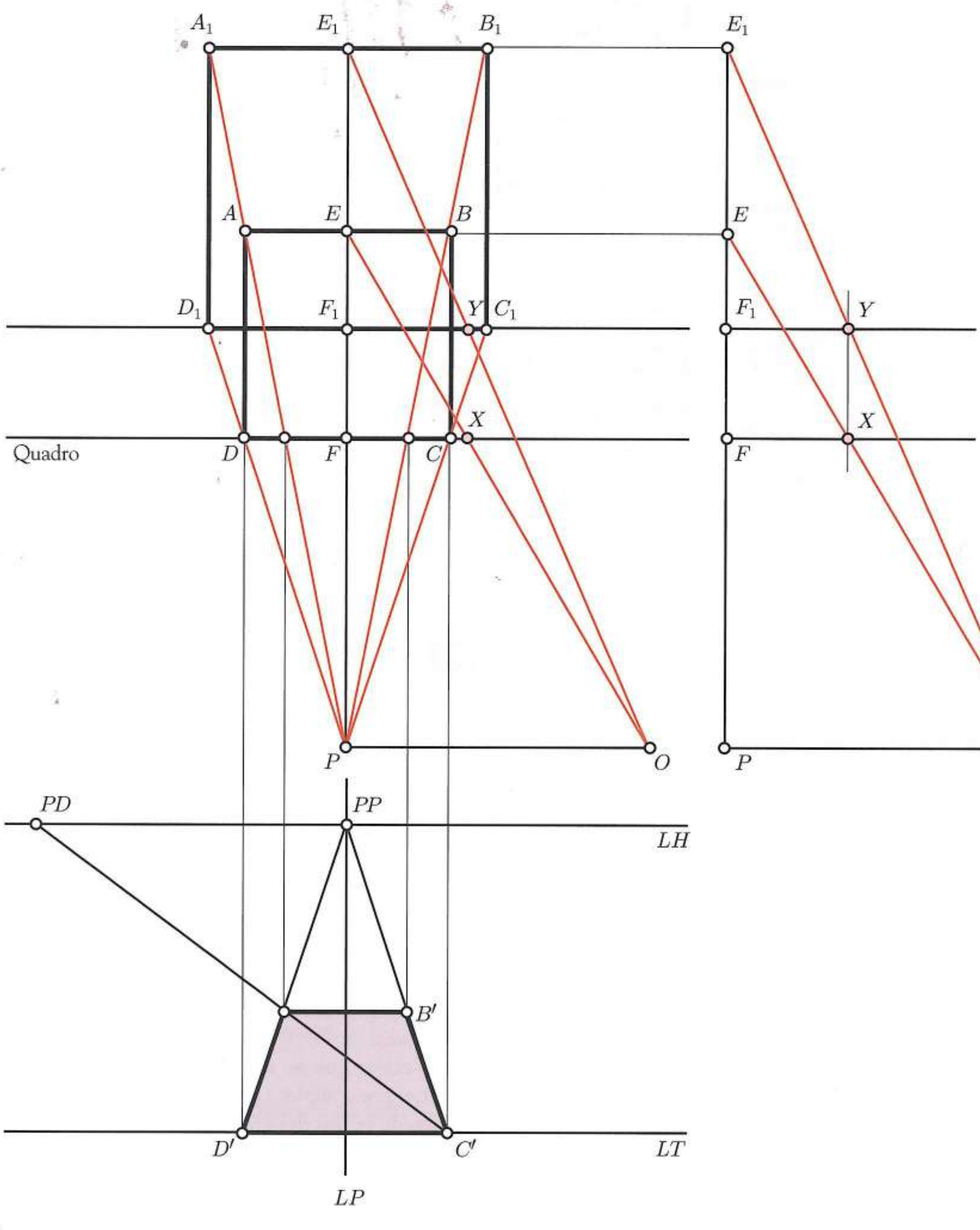


Figura 4. Interpretação da 1ª regra de perspectiva (Proposição 32)

e, por conseguinte, ficamos a conhecer com segurança a posição exacta do plano do Quadro. Também se confirma no perfil a altura do *horizonte*: a distância de LH a LT é a medida do segmento OP.

Como consequência do que acabei de referir conclui-se que o quadrado *escorçado* não é afinal o quadrado $A_1B_1C_1D_1$ representado em projecção horizontal mas sim o quadrado $ABCD$ (que o Autor nunca representa) homotético desse, cujo lado CD pertence a LT, sendo o centro de homotetia a projecção horizontal do Observador ou o seu pé — P.

Garantida que está essa relação de homotetia, e é exactamente aqui que está o segredo(!) desta construção pers-

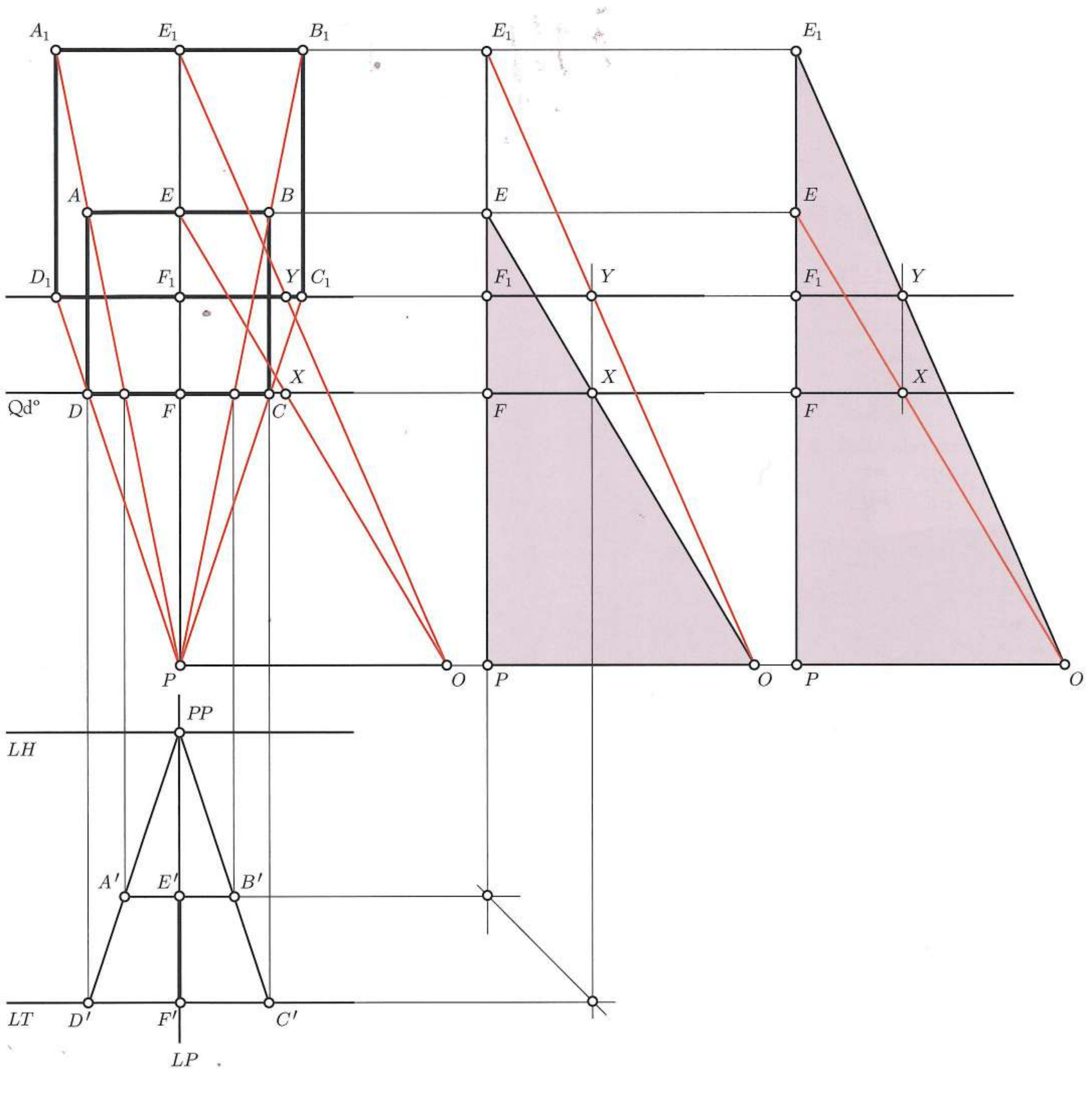


Figura 5. Da semelhança dos triângulos PEO e FEX e dos triângulos PE_1O e F_1E_1Y conclui-se que: $FX = F_1Y = F'E'$

péctica, constata-se que a escala de alturas correspondente ao afastamento das transversais paralelas ao Quadro, obtida na projecção de perfil, é sempre constante seja qual for a localização do quadrado efectivamente representado em planta. Vejamos, então, se estamos perante um teorema, ou seja, tentemos por fim certificar a universalidade da regra.

Utilizarei agora, para o efeito, um desenho com um duplo desdobramento da projecção de perfil para destacar os dois pares de triângulos semelhantes a que recorrerei no curso da demonstração (figura 5).

No caso vertente teremos então de demonstrar que, para qualquer posição do quadrado $A_1B_1C_1D_1$, homotético de $ABCD$ na homotetia de centro P, o segmento FX será sempre igual ao segmento F_1Y.

Recorrendo ao Teorema de Thales podemos afirmar que o triângulo PEO é semelhante ao triângulo FEX, pelo que:

$$(1)\ \frac{PE}{PO} = \frac{FE}{FX}$$

Por outro lado, o triângulo PE_1O é semelhante ao triângulo F_1E_1Y, donde:

$$(2)\ \frac{PE_1}{PO} = \frac{F_1E_1}{F_1Y}$$

Destas duas relações proporcionais podemos extrair a seguinte igualdade:

$$(3)\ PO = \frac{PE}{FE} \cdot FX = \frac{PE_1}{F_1E_1} \cdot F_1Y$$

Como, pela relação de homotetia de centro P,

$$(4)\ \frac{PE}{FE} = \frac{PE_1}{F_1E_1}$$

conclui-se a partir da expressão (3) que,

$$FX = F_1Y$$

... QED

E assim se confirmou a validade da 1ª regra de perspectiva de António Rodrigues, na verdade uma regra inédita, algo bizarra, mas, ainda assim, justa!

Notas

1 *Tratado de Arquitectura*. [Manuscrito]. BN, Cód. 3675 (microfilme F-603).

2 A datação e atribuição do *Tratado* deve-se a Rafael Moreira. Moreira, Rafael — *Um tratado português de arquitectura do séc. XVI (1576–79)*. Lisboa: FCSH-UNL, 1982. Mestrado em História de Arte.

3 A notação apresentada na primeira parte deste artigo segue a original apresentada no tratado de António Rodrigues. Apenas se acrescentam plicas aos pontos para clarificação da leitura. Por exemplo: o ponto 1 aparece repetido em diferentes situações e para evitar equívocos é nomeado em cada uma delas como 1, $1'$, $1''$ e $1'''$.

4 Para uma análise extensiva do *Liuro de Prespectiua* de António Rodrigues ver: Xavier, João Pedro — *Sobre as origens da perspectiva em Portugal*. O Liuro de Prespectiua do Códice 3675 da Biblioteca Nacional, um Tratado de Arquitectura do século XVI. Porto: FAUP Publicações, 2006.

5 Segundo a tradição italiana este ponto designava-se por *P* de Piedi.

6 Em italiano a letra reservada para nomear este ponto era o *O* de Occhio.

7 Ver acima: passo 7) da construção.

8 A primeira utilização explícita da *costruzione legittima* encontra-se no *De Prospectiva Pingendi*, c. 1460 (Della Francesca, Piero — *De Prospectiva Pingendi*. Org. por G. Nicco-Fasola. Florença: Casa Editrice Le Lettere, 1984 [1ª Ed. in LIBRI, Guglielmo — *Histoire des Sciences Mathematiques en Italie*. Paris: s/e, 1841; Reprodução anastática da edição Sansoni de 1942]). É, porém, verosímil que esta construção, que depende da realização prévia de desenhos de extracção arquitectónica, como são a planta e o perfil, tenha sido utilizada anteriormente por Filippo Brunelleschi.

9 Vasari, Giorgio — *Le vite de' eccellenti pittori, scultori ed architetti scritte da GiorgioVasari, pittore Aretino*. Ed. P. Barocchi. Florence: 1966, vol. 1, p. 279.

10 As notações actuais utilizadas são as seguintes: *O* — Observador (centro de projecção); *Quadro* — Plano de Projecção; *P* — Pé do Observador (projecção horizontal de *O*); *PP* — Ponto Principal (intersecção do raio visual principal com o Quadro); *PD* — Ponto de Distância (ponto de fuga de rectas que fazem ângulos de 45° com o Quadro); *LH* — Linha do Horizonte (intersecção do Plano do Horizonte com o Quadro); *LT* — Linha de Terra (intersecção do Plano de Terra com o Quadro); *LP* — Linha Principal (intersecção do Plano Visual Principal com o Quadro).

João Pedro Xavier
Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto

Materiais para a aula de Matemática

A Casa da Música

O material aqui proposto foi retirado e adaptado de uma proposta disponibilizada nas páginas on-line *Matemática e Arte*, da APM (`www.apm.pt`).

A actividade A *Casa da Música* foi concebida por José Santos dos Santos, em 2007, e tem por base um esquema produzido pelo OMÃ, *Office for Metropolitan Architecture* que gentilmente o cedeu e autorizou o seu uso. Esta instituição está interessada em receber relatos do trabalho em aulas onde o esquema seja usado. No verso da ficha encontra-se a planificação da figura que esteve na base da construção da Casa da Música. A impressão da planificação é fundamental para a utilização deste material.

Deixamos aqui o desafio: use a actividade e relate a experiência.

A Casa da Música

Esta imagem é do edifício da Casa da Música, desenhado pelo arquitecto Rem Koolhaas.
A planificação é a de um modelo comemorativo.

1. Usa a planificação para construíres o modelo.

2. A partir da planificação e do modelo tenta responder às seguintes questões:

2.1. Qual o número de faces do poliedro sugerido pelo modelo do edifício?

2.2. Observa as faces do poliedro.

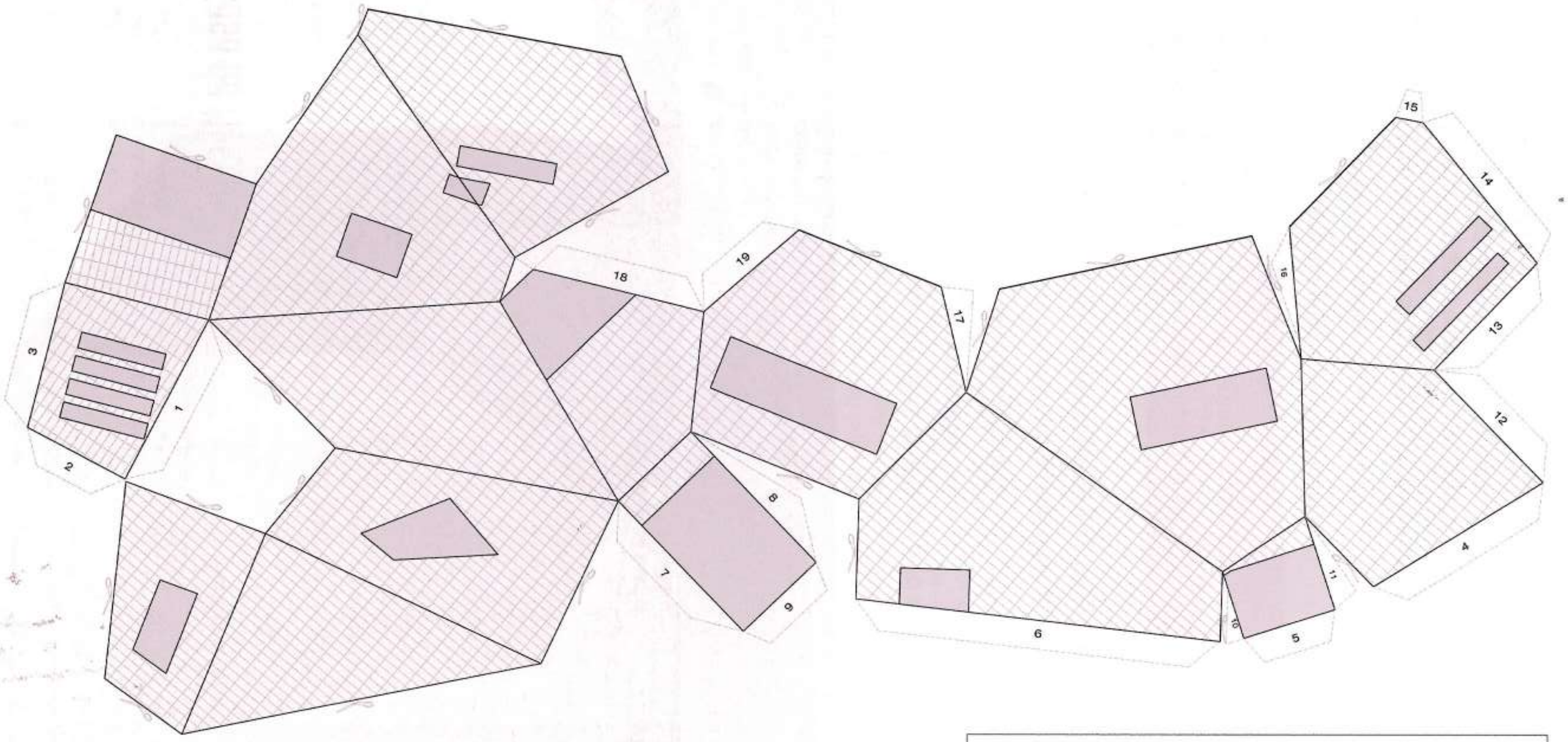
- Existem faces que sejam polígonos regulares?
- Quais são as formas geométricas mais usadas pelo arquitecto?
- Qual é a forma associada à base do edifício?

2.3. Em algumas das faces do edifício existem aberturas.

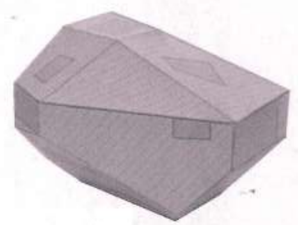
- Que polígonos são usados nas aberturas?
- Todas estas aberturas estão sobre o mesmo plano?
- Investiga qual é a razão entre o comprimento e a largura associada às aberturas rectangulares. É sempre a mesma? Encontras alguma abertura em que esta razão seja a razão áurea?

2.4. Comenta a afirmação: *no poliedro associado ao modelo, em cada vértice concorrem três planos.*

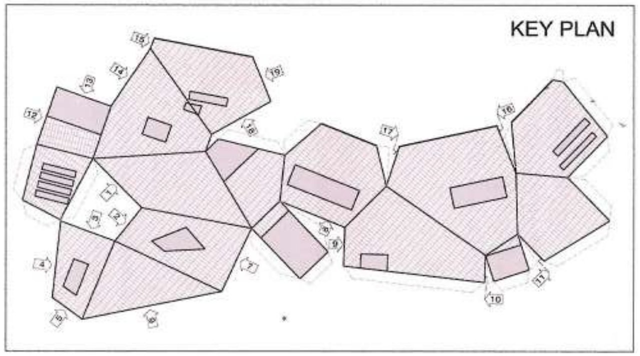
2.5. Investiga se existem, no poliedro associado ao edifício, faces contidas em planos paralelos.



CASA DA MÚSICA, PORTO
© OMA / Arup



COMMEMORATIVE MODEL
APRIL 2005



As cónicas sob múltiplas perspectivas

Manuela Ribeiro

Desenvolvi no ano de 2005/2006, no âmbito do Projecto Pencil (projecto dinamizado por *Permanent Resource Centre for Informal Learning*), em duas turmas do 11° ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, em sala de aula e no Pavilhão do Conhecimento, um trabalho sobre dois temas: *As cónicas sob múltiplas perspectivas* e *As sucessões e os fractais*. Trago-vos hoje o primeiro e numa próxima oportunidade virá o segundo.

Embora o estudo das cónicas apareça, nos programas de 10° e 11° anos, sempre com carácter facultativo e no 10° ano já tivesse abordado com os mesmos alunos:

- a elipse como circunferência deformada e como lugar geométrico;
- a parábola como gráfico de uma função quadrática

pareceu-me pertinente aproveitar a abordagem da hipérbole como gráfico de uma função homográfica, no tema Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11° ano, para fazer o estudo comum das três cónicas sob múltiplas perspectivas:

- como secções de uma superfície cónica;
- como envolventes de famílias de rectas;
- como lugares geométricos

e demonstrar que as curvas obtidas pelos três processos são as mesmas.

Tal multiplicidade de perspectivas permitiu estabelecer conexões variadas com os temas: Geometria no Plano e no Espaço I tratado no 10° ano e Geometria no Plano e no Espaço II tratado no 11° ano.

O trabalho desenvolvido ocupou três blocos de 90 minutos, englobou uma visita à Exposição Matemática Viva do Pavilhão do Conhecimento e decompôs-se em seis partes:

- na Parte 1 foram abordadas as três cónicas como secções de uma superfície cónica, recorrendo a um cone de enchimento;
- na Parte 2 foram obtidas as três cónicas como envolventes de famílias de rectas, recorrendo a dobragens;
- na Parte 3 foram abordadas as três cónicas como lugares geométricos, começando por traçar cada uma delas com um fio esticado e em seguida, desse traçado, deduzir a propriedade característica;
- na Parte 4 foi verificada a igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como secções de uma superfície cónica, recorrendo aos cones com as esferas de Dandelin;
- na Parte 5 foi verificada a igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes de famílias de rectas, e encontrada uma justificação para a propriedade reflectora de cada uma das cónicas, recorrendo ao *Sketchpad*;
- na Parte 6 foi dado um cheirinho da história das cónicas, ligando estas ao problema da duplicação do cubo e abordando as secções cónicas antes de Apolónio e com Apolónio.

Os alunos trabalharam em grupos de quatro, tendo nas partes 3, 4 e 5 cada grupo trabalhado apenas uma cónica. Na Parte 5 o uso do *Sketchpad* limitou-se à exploração de *sketches* previamente construídos. Em cada um dos três blocos de 90 minutos foram trabalhadas duas partes, tendo a visita ao Pavilhão do Conhecimento antecedido o último bloco.

Para auscultar a reacção dos alunos a todo o trabalho realizado pedi-lhes que respondessem a um pequeno questionário. Entre todas as perspectivas trabalhadas, a preferida foi *As cónicas como envolventes de famílias de rectas*, seguindo-lhe de perto *As cónicas como secções de uma superfície cónica*.

"Foi interessante ficar na expectativa, dobrar e dobrar para descobrir o que iria aparecer".
"Acho engraçada a forma de como simplesmente com rectas é possível formar uma cónica".
"Foi a forma mais divertida de aprender".
"Como era a primeira vez que via de um cone tirar múltiplas secções, fiquei impressionada".
"Porque é aquela que nos permite visualizar as cónicas traçadas no espaço".

A adequação dos materiais utilizados foi reconhecida pela totalidade dos alunos e o maior interesse despertado foi para os cones, seguindo-se-lhe o fio esticado.

"Porque variando a posição do cone obtemos as três cónicas".
"Porque usar uma figura tridimensional torna mais fácil e agradável o trabalho".
"Foi uma maneira mais fácil de visualizar as secções definidas".
"Deu para verificar que com uma haste e uma corda consegue-se uma hipérbole".
"Porque permitiu sermos nós a traçar a elipse".

Dos comentários a todo o trabalho realizado destaco:

"Foi diferente. Sem darmos conta demos uma parte da matéria quase de uma maneira auto-didáctica".
"Acho que contribuiu para perceber melhor o assunto já que foi realizado por etapas tornando mais acessível apreender os conhecimentos".
"Gostei do trabalho apesar de nos termos atrasado algumas vezes. Foi diferente daquilo que costumamos fazer nas aulas por envolver vários tipos de materiais, a visita, ...".
"Algumas partes, em particular, as partes com uma representação física provaram ser bastante mais fáceis de atingir os objectivos que nas restantes partes".
"Penso que trabalhar em grupo é interessante pois podemos discutir os nossos pontos de vista e chegar de forma mais rápida e eficaz a uma solução. Também considero interessante trabalhar com diversos materiais de forma a aplicarmos os nossos conhecimentos".

O balanço final foi positivo embora tenha ficado aquém das minhas expectativas. Porque eram alunos que eu acompanhei desde o 10° ano e que já estavam habituados a trabalhar muitas vezes em grupo e com materiais manipuláveis, e algumas vezes com o *Sketchpad*, esperava encontrá-los mais autosuficientes. Tal sabor a pouco no entanto serviu-me de estímulo para aproveitar todas as oportunidades que surgirem para desenvolver trabalho do mesmo tipo, é preciso que este tipo de trabalho seja cada vez mais um hábito e não uma excepção.

Trabalho desenvolvido em sala de aula

O trabalho desenvolvido em sala de aula assentou, para cada aluno, em: seis fichas de trabalho, tantas quantas as partes anteriormente referidas, e no uso de materiais variados: papel vegetal, modelos acrílicos comercializados (cone de enchimento e cones com as esferas de Dandelin), instrumentos artesanais de fio esticado e *software* de Geometria Dinâmica (*Geometer's Sketchpad*).

Os alunos em geral aderiram bem ao trabalho, tendo havido no entanto alguns casos de desmobilização logo à primeira dificuldade.

Embora o trabalho fosse muito dirigido, cedo me apercebi da falta de autonomia de grande parte dos alunos pelo que, nos dois primeiros blocos, desempenhei um papel não apenas de observador e mobilizador mas também de auxiliar na descoberta e aprendizagem. Nestes dois blocos foram trabalhadas as partes 1 a 4 e os materiais nelas manipulados mostraram-se decisivos como auxiliares na compreensão dos conceitos envolvidos. No último bloco resolvi ter um papel menos interventivo, já porque na Parte 5 tinham o auxílio precioso do *Sketchpad* já porque era a última parte do trabalho e como tal as falhas eventualmente havidas não teriam repercussão em fases subsequentes. Mais uma vez ficou patente a falta de autonomia e foram muito poucos os que levaram a bom termo as Partes 5 e 6.

Visita ao Pavilhão do Conhecimento

A visita ao Pavilhão do Conhecimento teve por objectivo a exploração dos módulos, existentes na Exposição Matemática Viva, intimamente relacionados com as cónicas e a exploração, no Cib@rcafé, de algumas animações em flash construídas pelo Atractor.

A visita à Exposição Matemática Viva começou logo no exterior do Pavilhão com a exploração da Hipérbole-Fenda, continuou com a exploração dos módulos: Hiperbolóide de fios, Bilhares elíptico, hiperbólico e parabólico e terminou com uma passagem pelos restantes módulos.

Foi preparado um pequeno guião com o objectivo de estimular a exploração mais aprofundada dos primeiros módulos. Tal estímulo, que por vezes precisou de ser renovado oralmente, nalguns surtiu efeito, levando-os a procurar informação complementar e a tomar notas.

Seguiu-se um tempo no Cib@rcafé, igualmente apoiado num pequeno guião, para a exploração das animações em flash: Cortes do cone, Elipse método do jardineiro e Cónicas obtidas por um candeeiro.[2]

A reacção dos alunos foi muito positiva, tendo sido as Cónicas obtidas por um candeeiro a animação sensação, já porque numa mesma animação se obtêm as três cónicas, já porque viram estas evoluir de um modo contínuo.

As diferentes partes do trabalho desenvolvido tiveram como suporte as fichas *As cónicas como secções de uma superfície cónica*, *As cónicas como envolventes de famílias de rectas*, *As cónicas como lugares geométricos*, *Igualdade das curvas obtidas como secções de uma superfície cónica e com fio esticado*, *Igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes da família de rectas*, *Propriedades reflectora* e as *Secções cónicas antes de Apolónio e em Apolónio*, publicadas nas páginas seguintes.

Ficha 1 — As cónicas como secções de uma superfície cónica

Figura 1.

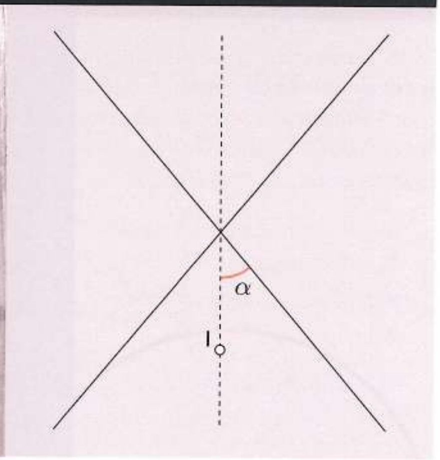


Figura 2.

1. Pega em duas canetas e simula com elas duas rectas concorrentes, r e s. Roda uma delas em torno da outra, que figura obténs? Que papel desempenha nela cada uma das rectas consideradas? E o ponto intersecção?

2. Tens na tua mão um cone circular recto de enchimento, deita-lhe um pouco de água e simula com a superfície do líquido um plano que intersecta o cone (figura 1).

a) Começa por considerar planos que não contenham o vértice.

- Como colocar o cone de modo que o plano intersecte todas as geratrizes?

  Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

- Coloca agora o cone de modo que o plano seja paralelo a uma única geratriz.

  Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

- Por último coloca o cone de modo que o plano seja paralelo a duas geratrizes.

Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

b) Olha agora a vista de frente da superfície cónica. Seja α o ângulo formado pela geratriz e pelo eixo — semi-abertura do cone. Entre que valores pode variar α?

Considera planos que passam por I e desenha a cores diferentes (figura 2):

- a vista de frente de um plano paralelo a uma única geratriz. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α?

- a vista de frente de um plano que intersecte todas as geratrizes. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α? E qual o maior valor de β?

- a vista de frente de um plano paralelo a duas geratrizes. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α? E qual o menor valor de β?

c) Considera agora planos que contenham o vértice satisfazendo as três relações encontradas entre β e α.

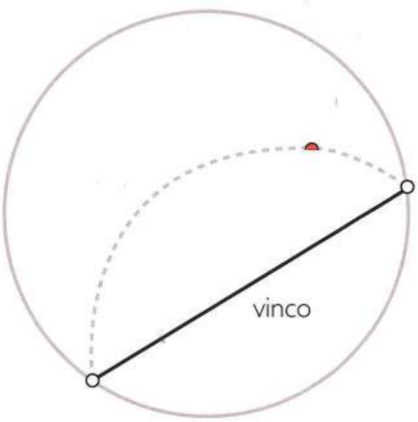
Qual a secção determinada por cada um deles?

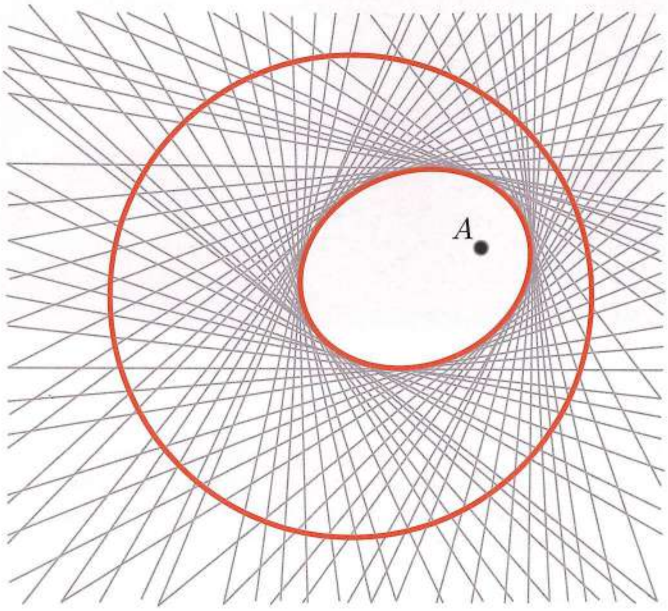
3. Acabas de investigar quais os diferentes tipos de secções determinadas numa superfície cónica por um plano, isto é, as cónicas degeneradas ou não (cónicas degeneradas determinadas por um plano que contenha o vértice e cónicas não degeneradas determinadas por um plano que não contenha o vértice).

a) Faz uma síntese em que as enumeres e em que, usando os ângulos α e β, identifiques a maneira de obter cada uma delas.

b) Sabendo que a razão $\cos\beta/\cos\alpha$ é a excentricidade de uma cónica, atendendo à relação conhecida entre β e α diz o que podes concluir quanto aos valores da excentricidade de cada uma das cónicas.

Ficha 2 — As cónicas como envolventes de famílias de rectas





1. Numa folha de papel vegetal, desenha uma circunferência e no seu interior marca um ponto A.

Dobra o papel de modo que o ponto A fique sobre a circunferência, e faz um vinco. Repete esta operação tantas vezes quantas a tua paciência te permitir, procurando percorrer todas as zonas da circunferência.

Qual a linha envolvida pelos vincos do papel?

2. Procede de modo análogo considerando o ponto A exterior à circunferência.

Qual a linha encontrada?

3. Procede de modo análogo substituindo a circunferência por uma recta e sendo A um ponto não pertencente à recta.

Qual a linha encontrada?

4. Acabas de obter as três cónicas como envolventes de famílias de rectas.

a) Seja P o ponto genérico da circunferência/recta consideradas.

O que é em cada caso o vinco em relação ao segmento de recta $[AP]$?

Justifica a tua resposta.

b) Qual a posição relativa do vinco e da cónica em cada caso?

Ficha 3 — As cónicas como lugares geométricos[1]

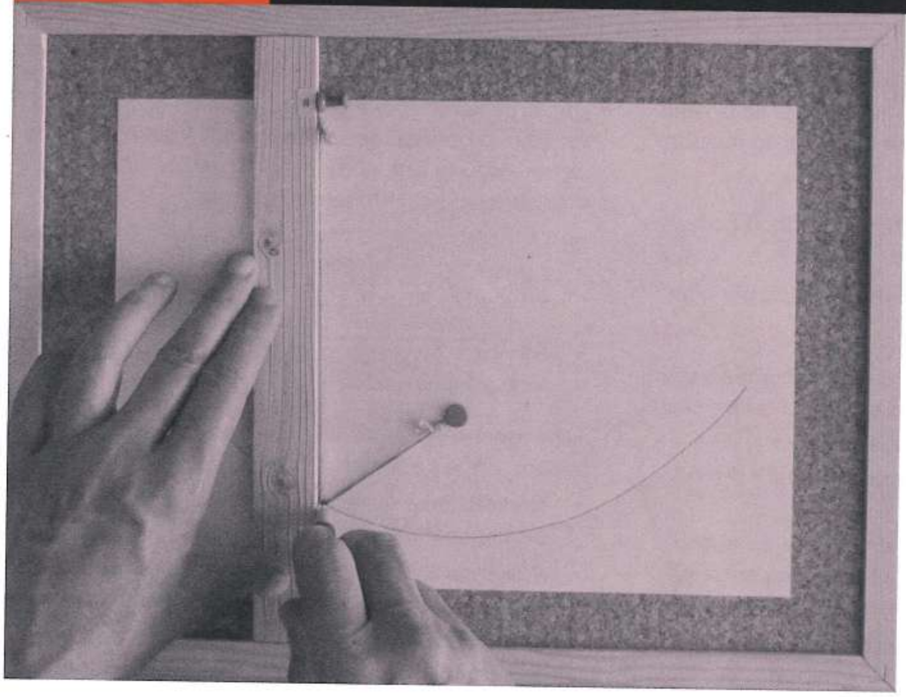


Figura 1.

1. Pega no placard, nos dois punaises, na haste e no fio.
   - Coloca sobre o placard uma folha de papel A4.
   - Prende a folha ao placard com um dos punaises.
   - Ajusta a haste a duas das tabelas do placard.
   - Prende uma extremidade do fio no punaise que prende a folha, à distância de 10 cm da tabela inferior do placard, a outra no topo da haste, ponto A, com o outro punaise.
   - Estica o fio com o bico da tua lapiseira e encosta este à haste.
   - Mantendo o fio esticado e o bico encostado à haste e assente sobre o papel, desliza a haste ao longo das tabelas do placard.
   - Passa agora a haste para o outro lado do punaise que prende a folha e repete a operação deslizando a haste em sentido contrário (figura 1).

2. Acabas de traçar uma parábola recorrendo ao método do jardineiro.

   O ponto onde o punaise que prende a folha está colocado é o foco da parábola — F.

a] Identifica o vértice, V, e o eixo da parábola.

b] Traça uma recta, d, perpendicular ao eixo que não contenha o foco e tal que a distância do Foco ao Vértice é igual à distância do vértice à recta.

$d \rightarrow$ Directriz

c] Seja P o ponto corrente da parábola.

- Coloca a haste sobre o vértice e verifica que o comprimento do fio é igual à distância de A à directriz.
- Que relação tem o comprimento do fio com a distância de P a F? E de P à directriz?

Completa de dois modos diferentes

Fio $= \overline{AP} + \ldots$

Fio $= \overline{AP} + \ldots$

O que podes concluir?

Podemos então definir a parábola como o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

Ficha 4 — Igualdade das curvas obtidas como secções de uma superfície cónica e com fio esticado[1]

Já trabalhaste as cónicas como secções determinadas numa superfície cónica por um plano, como envolventes de famílias de rectas, e já traçaste uma parábola recorrendo ao método do jardineiro.

1. Recorda a propriedade característica da parábola deduzida desse traçado

   A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

2. Verifica que a secção cónica com o mesmo nome satisfaz essa propriedade (figura 1). Para isso pega no cone e olha com atenção tudo o que nele existe:
   - um plano que secciona a superfície cónica segundo uma parábola
   - uma esfera inscrita no cone e tangente ao referido plano. A esfera tem em comum com a superfície cónica uma circunferência e, com o plano um ponto — Foco.

     Está assim identificado o foco da parábola.

Para identificares a directriz considera:

- a circunferência que a esfera tem em comum com a superfície cónica
- o plano C_1 que contém a circunferência anterior
- o plano C_2 que contém a parábola

Figura 1.

a) A directriz d é a intersecção dos planos C_1 e C_2. Pretendemos demonstrar que o ponto genérico da parábola, P, verifica a propriedade recordada em 1 (figura 2). Começa por ver uma propriedade das tangentes a uma esfera tiradas de um ponto exterior. Para isso:
   - Demonstra que, no plano, se PA e PB são tangentes a uma circunferência C em pontos distintos A e B, então $d(P, A) = d(P, B)$
   - Enuncia a propriedade correspondente para as tangentes a uma esfera.

b) Olha agora o ponto genérico da parábola, P, o foco F, a geratriz PV e a esfera E.
   - Identifica duas tangentes a E tiradas por P e os respectivos pontos de tangência.
   - Aplicando a propriedade enunciada em a) completa $d(P, F) =$ ....
   - Tira por P uma perpendicular à directriz, seja D o pé da perpendicular; uma paralela ao eixo do cone, seja B o ponto intersecção desta com o plano C_1
   - Identifica os ângulos α — semi-abertura do cone (ângulo que a geratriz faz com o eixo) e β — ângulo que o plano C_2 que contém a parábola faz com o eixo.
   - Exprime $\overline{PB}$ em função de α e da distância de P ao foco, e $\overline{PB}$ em função de β e da distância de P à directriz.

     O que podes concluir?
   - Atendendo a que, como já viste, a excentricidade de uma cónica é $\cos\beta/\cos\alpha$ e a excentricidade de uma parábola é 1, completa

     $d(P, \text{foco})$ .... $d(P, \text{directriz})$
   - Então as curvas obtidas pelo método do jardineiro e como secção de uma superfície cónica são as mesmas?

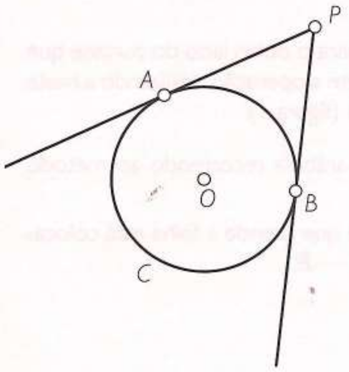


Figura 2.

Ficha 5

Igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes das famílias de rectas. Propriedade reflectora[1]

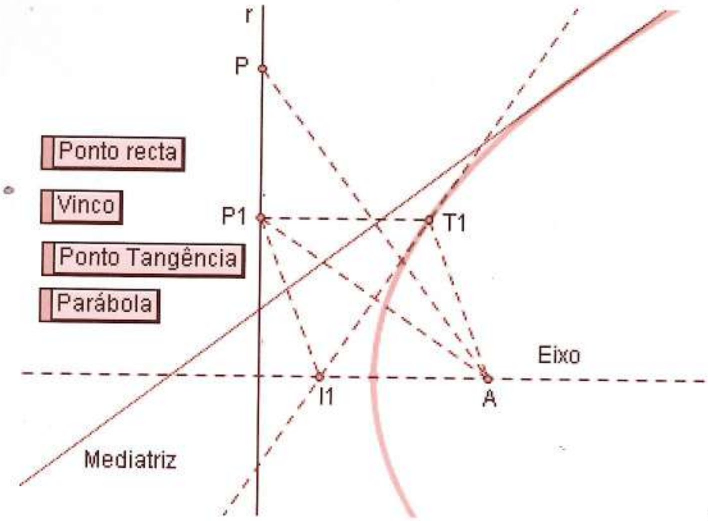


Figura 1. Parab1

Temos ainda duas questões por resolver:

1. Mostrar que a curva obtida como envolvente de uma família de rectas é a mesma que a traçada recorrendo ao método do jardineiro.
2. Encontrar uma justificação para a propriedade reflectora da parábola.

Proponho-te que as resolvas recorrendo ao uso do *Sketchpad*.

1. Abre o ficheiro `Parab1`. Nele tens uma recta r e um ponto A que não lhe pertence. *Faz sucessivamente click* sobre os botões: `Ponto recta`; `Vinco`.

E em seguida *arrasta* P sobre a recta. Acabas de encontrar mais uma vez a parábola como envolvente de uma família de rectas. Para verificares que é a curva obtida com o método do jardineiro recorda a propriedade característica deduzida desse traçado.

A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

Em seguida *faz sucessivamente click* sobre os botões: `Ponto Tangencia`; `Parábola`.

Apaga os traços, arrasta P_1 sobre a recta e constata que:

- a família de rectas obtida envolve a parábola;
- o ponto de tangência T_1 é o ponto corrente da parábola.

Identifica o foco e a directriz da parábola e traduz por uma expressão, a ser verificada por T_1, a propriedade característica da parábola. Procura por último assegurar a sua verificação. Para isso:

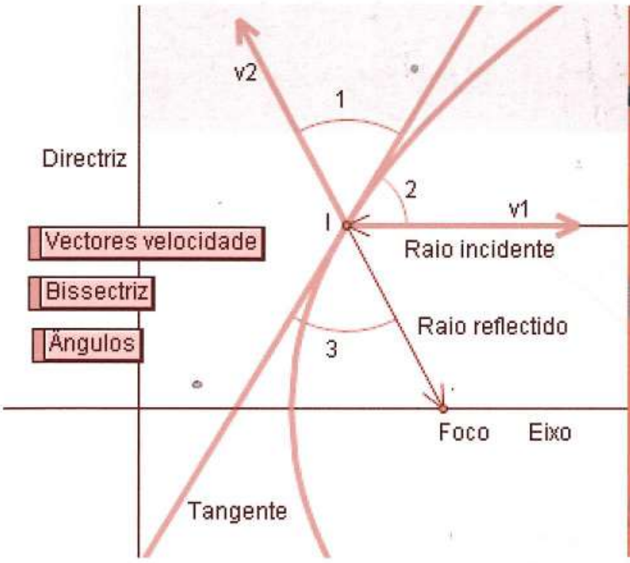
- Tem em atenção que:

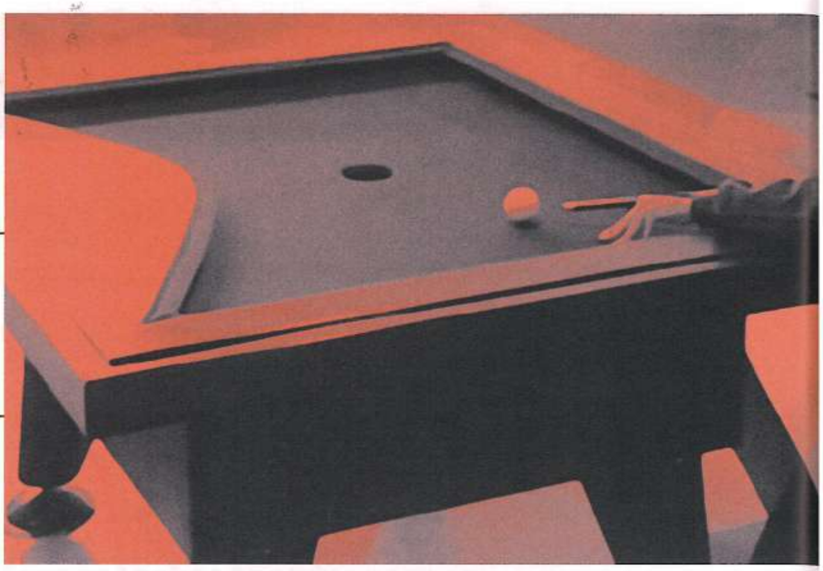
  P_1 é um ponto da recta r

  O vinco feito para fazer coincidir A com P_1 intersecta o eixo da parábola no ponto I_1

  O ponto de tangência T_1 foi marcado de modo que T_1 está sobre o vinco e $\overline{T_1A} = \overline{I_1A}$
- Identifica o quadrilátero $[T_1P_1I_1A]$.
- Procura assegurar a expressão a ser verificada por T_1.

Figura 2. Parab2





2. Abre o ficheiro `Parab2`. Nele tens uma parábola, os seus foco, directriz e eixo, um raio incidente, o ponto de incidência I e o respectivo raio reflectido. *Arrasta o ponto* I sobre a parábola. Como vês o *sketch* ilustra a experiência que efectuaste na exposição *Matemática Viva* com o bilhar parabólico — colocada a bola em qualquer ponto da mesa e lançada em direcção à tabela curva, paralelamente às laterais (paralelamente ao eixo), a bola caía no buraco (foco).

Se a parábola for espelhada estás perante uma propriedade tua conhecida da Óptica — Quando um raio incide sobre um espelho o ângulo de incidência 1 e o ângulo de reflexão 2 são iguais (figura 3).

O ângulo de incidência/ângulo de reflexão é o ângulo formado pelo raio incidente/raio reflectido com a tangente ao espelho no ponto de incidência (se o espelho for plano com o próprio espelho).

Então encontrar uma justificação para a propriedade reflectora da parábola é encontrar uma justificação para a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão. Para isso:

a] Procura a tangente à parábola no ponto I.

Tendo presente que em Física, a direcção do movimento de um corpo, em cada ponto da sua trajectória, é definida pela tangente à trajectória nesse ponto procura a direcção do movimento do ponto I.

Arrasta o ponto I sobre a parábola e repara que à medida que se afasta do foco se afasta também da directriz.

Faz click sobre o botão `Vectores velocidade`

Tens agora exemplificados os vectores velocidade de afastamento do foco, V_2, e afastamento da directriz, V_1. Repara que atendendo a que $d(I, \text{foco}) = d(I, \text{directriz})$ o afastamento do foco e o afastamento da directriz é feito à mesma velocidade.

Ora o movimento do ponto I é a resultante dos dois movimentos anteriores, logo definido pela soma dos vectores V_1 e V_2.

Como determinas essa soma?

Faz agora *click* sobre o botão `Bissectriz`

Ficaste com a direcção do movimento do ponto I, tangente à parábola no mesmo ponto.

b] *Faz click* sobre o botão `Ângulos` e:

- identifica os ângulos de incidência e reflexão;
- procura assegurar a sua igualdade.

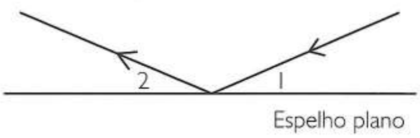


Figura 3.

Ficha 6 — As secções cónicas antes de Apolónio e com Apolónio

As origens exactas da teoria das secções cónicas são um tanto ou quanto nebulosas, mas parecem estar ligadas ao problema da duplicação do cubo.

O célebre problema da duplicação do cubo teve origem na Grécia Antiga e é também conhecido por *problema de Delos*.

Diz a lenda que uma delegação da cidade de Atenas deslocou-se ao oráculo em Delos para perguntar como poderia ser combatida a peste que dizimava a cidade.

Ainda segundo a lenda, o oráculo respondeu que o altar de Apolo, que tinha forma cúbica, deveria ser duplicado.

Os atenienses terão construído um novo altar com o dobro da aresta, mas daí resultou um cubo oito vezes maior ... e a peste não foi eliminada.

1. Identifica o erro cometido pelos atenienses e encontra a solução correcta do problema da duplicação do cubo.

O problema permaneceu para além da lenda e consistia em determinar, *geometricamente*, a medida da aresta de um cubo que tivesse o dobro do volume de um cubo dado.

Hipócrates de Quios (séc. V A.C.) esteve entre os primeiros a atacar o problema. Descobriu que o problema pode ser resolvido com dois meios proporcionais entre dois números a e $2a$, ou seja com a determinação de dois números x e y verificando a condição

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

2. Verifica que se for a a aresta do cubo dado, x será a aresta do cubo de volume duplo.

Para isso completa:

$x^2 = ...$

$xy = ...$

e resolve o sistema das duas equações.

Como vês a solução do problema com Hipócrates de Quios está na intersecção de duas curvas, hoje por ti conhecidas como ....

Como obter essas curvas?

Estamos no séc. V A.C. e os gregos dispõem apenas de dois processos para obter curvas:

— Composição de movimentos uniformes

— Intersecção de superfícies geométricas conhecidas

Só mais tarde, séc. IV A.C., Menecmo descobre uma família de curvas, das quais aquelas duas fazem parte, cortando um cone circular recto por um plano perpendicular a uma geratriz. Os diferentes tipos de curvas eram obtidas consoante a *abertura* do cone.

Cerca de um século e meio depois Apolónio na sua obra prima *As cónicas* mostrou que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cónicas, simplesmente variando a inclinação do plano da secção. Aqui tens as secções cónicas tal como as estudaste.

3. Recorda mais uma vez como se podem obter as três cónicas a partir de um único cone circular recto.

Notas

1. As fichas correspondentes às apresentadas para a elipse e a hipérbole, podem ser encontradas na página do Pavilhão do Conhecimento-Ciência Viva em *Projectos — Pencil*. Uma vez aqui basta aceder aos links: *mais — materiais produzidos*.
2. As animações em *flash* podem ser encontradas na página do Atractor em `www.atractor.pt/stereoP/imgs/icons/menus/outros-flash.htm` e `www.atractor.pt/stereoP/descri/candeeiro-net.htm`
3. Os ficheiros `Parab1` e `Parab2` estão disponíveis na revista *on-line*.

Manuela Ribeiro
ES3 Padre António Vieira
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

As TIC e a Geometria na aula de Matemática: quatro testemunhos

Introdução

Os artigos e estudos de inovação e investigação sobre a integração das TIC no ensino e aprendizagem da Matemática, têm vindo a crescer em quantidade e na diversidade de abordagens e apontam, de um modo geral, benefícios acerca do seu uso. No entanto, a literatura reconhece simultaneamente que a integração nas práticas da sala de aula caminha a um ritmo muito vagaroso. Assim, para a presente Revista temática da *Educação e Matemática*, fomos pedir alguns testemunhos a um conjunto de quatro professoras do ensino básico e secundário, sobre usos recentes que fizeram de *software* para computadores, particularmente indicado para a abordagem da Geometria.

Os limites do espaço disponível, levaram-nos a *cortar* algumas partes e, para tornar a leitura mais coerente, optámos por ir organizando as questões em três secções, ao mesmo tempo que as palavras das professoras as vão ilustrando. Terminamos com uma pequena síntese e uma breve *leitura* das alterações curriculares anunciadas para o ensino básico.

As professoras de Matemática que contribuíram para este artigo foram, a Margarida Rodrigues (MR), professora do QND da EB 2,3 de Bocage — Setúbal, actualmente requisitada na ESE de Setúbal, a Isabel Gorgulho (IG), professora do QND da Escola Básica 2,3 de Aranguês — Setúbal, a Maria João Vieira (MJV), professora de do QND da Escola Secundária de Santo André — Barreiro e a Elvira Santos (ES), professora do QND da Escola Básica 2, 3 de Álvaro Velho — Lavradio.

Que TIC, em que temas e que potencialidades?

Quando falamos das TIC, estamos a referir-nos às folhas de cálculo, às calculadoras gráficas, aos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), aos CAS (*Computer Algebric Systems*) e a aplicações específicas, como alguns *applets*, para a abordagem de conceitos de matemática. No entanto, as experiências a seguir descritas centram-se exclusivamente no uso dos AGD, em particular, no *Geometer's Sketchpad*.

Os temas de Geometria envolvidos nestas experiências são: triângulos e soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo (5° ano); quadriláteros (6° ano); decomposição de polígonos, relações entre ângulos verticalmente opostos e ângulos de lados paralelos (7° ano); lugares geométricos e semelhança de triângulos (8° ano); relação entre as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro e arcos correspondentes (9° ano); estudo das isometrias (9° ano).

A experiência da Margarida Rodrigues em sala de aula, leva-a a "realçar as potencialidades de programas de geometria dinâmica, como o *Cabri* ou o *Geometer's Sketchpad*[1] (GSP), ao nível da melhoria das aprendizagens e na promoção da compreensão matemática" (MR). Usando o *GSP*, a Isabel Gorgulho propôs-se investigar, entre outras coisas, "de que modo este AGD facilita a exploração de tarefas de carácter exploratório e investigativo e quais as suas potencialidades ao nível da aprendizagem da geometria, nomeadamente de que forma os alunos descobrem propriedades geométricas e como é que essas descobertas facilitam a compreensão de propriedades e relações geométricas" (IG).

Já Maria João Vieira, assume-se como uma fã do GSP, por vários motivos, mas "pelo facto das construções não serem imediatas, porque é preciso ter conhecimentos elementares de Geometria para poder construir alguma coisa e pelas potencialidades de exploração de conexões entre a Geometria e outros temas da Matemática" (MJV).

Finalmente, a Elvira Santos "incluiu a utilização do GSP quando do estudo da circunferência inscrita e circunscrita num triângulo, no sentido de diversificar as experiências de trabalho dos alunos. As características deste software dá aos alunos a possibilidade de experimentar, de uma forma rápida para muitos casos e assim construir relações que de outro modo, concretizada no papel com instrumentos de desenho, demoraria muito tempo" (ES).

O trabalho dos alunos na sala de aula

A Margarida refere que, "no 5° ano de escolaridade, as turmas envolvidas deslocavam-se à sala dos computadores e podiam, por exemplo, chegar, por si só, à propriedade relativa à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. O recurso às ferramentas de medição e de cálculo do *Sketchpad*, associado ao facto de o dinamismo do programa permitir uma grande variação de triângulos, leva a que as propriedades matemáticas surjam como aquilo que se mantém constante no meio de tudo o que varia. Trabalhei ainda com turmas de 8° ano e 9° ano, em parceria com outra colega titular das referidas turmas, em diferentes anos lectivos. No 8° ano, o trabalho incidiu nos lugares geométricos, com o *Cabri*, e no 9° ano, incidiu essencialmente na descoberta da relação entre as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro, e arco correspondente, bem como no estudo das isometrias, com o *Sketchpad*" (MR).

O projecto de intervenção da Isabel incidiu em duas turmas, uma de 6° e outra de 7° ano e para o seu desenvolvi-

mento foram construídas tarefas de carácter exploratório e investigativo. "Os alunos participantes nunca tinham utilizado o GSP, não estavam habituados a desenvolver este tipo de actividades para além de que não era usual elaborarem relatórios, o que originou, no início, alguma dispersão até encontrarem um método de trabalho. Foram aplicadas quatro tarefas ao grupo do 6º ano e cinco tarefas ao grupo de 7º ano. Na resolução das tarefas propostas, os alunos desenvolveram conceitos relacionados com os triângulos e os quadriláteros. O grupo do 7º ano trabalhou ainda a decomposição de polígonos e as relações entre ângulos verticalmente opostos e ângulos de lados paralelos.

A actividade dos alunos passou pela construção de algumas figuras, pela medição, pela manipulação, pela identificação de propriedades e relações geométricas e pela verificação das descobertas. Todo este processo se baseou na discussão de ideias entre pares e na formulação de hipóteses, até chegarem a uma conclusão, que foi apresentada por escrito em forma de relatório.

Em todas as tarefas era solicitada a descoberta de propriedades e relações geométricas. Os processos utilizados pelos alunos na procura de regularidades foram os usuais em Ambientes de Geometria Dinâmica, como são a visualização e a manipulação, processos estes que, por vezes, se complementaram" (IG).

A Maria João trabalha há muito tempo com os alunos, com este *software* [GSP], onde "desenvolvem trabalho de investigação e exploração, quer a partir de construções previamente elaboradas, quer pela criação das suas próprias construções, e dentro das condicionantes que todos sabemos e contra as quais lutamos, como a escassez de material informático, o elevado número de alunos nas turmas, etc.

No último ano lectivo, por uma série de felizes coincidências consegui condições especiais de trabalho: um laboratório equipado com 10 computadores e uma turma com reduzido número de alunos (treze), com a qual tem sido feito um trabalho regular em contexto de sala de aula. Esta turma, do ensino básico, é de percurso alternativo iniciado no 8º ano e terminará no final deste ano lectivo e aposta num currículo *rico* em Geometria. Os alunos trabalham em pares e apenas um trabalha sozinho, por opção. Todos os temas da Geometria foram leccionados recorrendo a actividades exploratórias e de investigação e utilizando o computador, com o GSP, mas também com a exploração de applets interactivos para o ensino, existentes em sítios como, por exemplo, o *Illuminations*[2], do NCTM.

É um facto que a opção por esta metodologia de trabalho em sala de aula se deveu ao facto dos alunos, devido ao seu percurso formativo, não estarem minimamente motivados para a aprendizagem, nomeadamente da Matemática e por revelarem muito pouca autonomia em relação às tarefas de aula, factor este que poderia ser, de alguma forma, impeditivo do sucesso desta abordagem.

Após ter sido estabelecida a metodologia de trabalho a adoptar durante as aulas, que passou pela existência de um pequeno manual de instruções do software e um guião de trabalho para cada tarefa, parti para a primeira experiência que se revelou uma agradável surpresa. No final da primeira aula, os alunos tratavam *por tu* os comandos e os menus e tinham conseguido concretizar todas as tarefas propostas —

sobre semelhança de triângulos, em menos tempo que o que lhes era proposto, tendo realizado, inclusive, apresentações espontâneas dos seus resultados" (MJV).

A Elvira trabalhou com uma turma de 24 alunos do 9º ano, num bloco de 90 minutos. "A turma organizou-se em 6 grupos de trabalho de 4 alunos e cada grupo tinha ao seu dispor um computador portátil, o GSP, um guião elaborado pela professora e os habituais elementos de trabalho numa aula, como o caderno, elementos de escrita e o manual escolar (...) O trabalho desenvolveu-se com os alunos a seguirem um conjunto de instruções que lhes permitiu usar os menus do GSP, primeiro, para desenhar um triângulo, seguido do traçado das bissectrizes dos seus ângulos internos e posteriormente a circunferência inscrita nesse triângulo. Após a construção deste lugar geométrico, os alunos foram convidados a observar a construção obtida, descrever as suas características e a arrastar a figura para verificar as condições desse lugar geométrico. Posteriormente repetiram o processo, mas desta vez com a utilização das mediatrizes dos lados de outro triângulo que deu origem à construção de uma circunferência circunscrita.

Depois de terminadas as construções e as experiências necessárias o guião incentivava os grupos a pesquisarem no manual os nomes adequados para o ponto de encontro das bissectrizes, mediatrizes, bem como para as duas circunferências construídas" (ES).

Algumas 'leituras' e conclusões

Segundo a Margarida, o seu trabalho pode resumir-se assim: "Em todos estes casos, o facto de as propriedades no domínio da geometria surgirem como sendo descobertas pelos próprios alunos, e não ditadas externamente pela professora como algo consumado que os alunos apenas terão de acreditar como certo e verdadeiro, contribui fortemente para que essas mesmas propriedades sejam mais facilmente interiorizadas pelos alunos, pois tornam-se especialmente significativas, dada a experiência vivida. Lembro-me, em particular, como os alunos daquela turma de 9º ano, com manifestas dificuldades a Matemática, se apropriaram tão bem da relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do ângulo ao centro, e também do arco correspondente, ao trabalharem com o *Sketchpad*. E todavia, este é um assunto que geralmente os alunos tendem a confundir" (MR).

Já a Isabel referiu que "o processo desenvolvido pelos alunos constou de uma primeira fase de identificação das regularidades mais evidentes. Numa fase posterior, identificaram regularidades que sobressaíram com a manipulação. Verifica-se no entanto que a passagem para esta segunda fase teve de ser, por vezes, incentivada.

Os alunos utilizaram a potencialidade do *software*, de manipular figuras para descobrirem propriedades que não eram à partida evidentes através da visualização, para verificarem a veracidade de relações evidenciadas pelo *feedback* do programa e para validarem descobertas, apesar de esta última não se verificar em todas as tarefas. De uma forma geral pode-se afirmar que os alunos utilizaram a manipulação, essencialmente, para testar ideias e descobrir propriedades e relações que se apresentavam de uma forma explícita ou implícita.

Os alunos desenvolveram o estudo das propriedades geométricas utilizando numa primeira fase a percepção natural (visualização), para identificar regularidades. Essas primeiras descobertas convergiram para a conclusão final através de um processo de relacionamento com os conhecimentos anteriormente aprendidos e com a manipulação das figuras. O desenvolvimento e consolidação de conhecimentos fizeram-se através de um processo reflexivo" (IG).

Para a Maria João, "os resultados, ao nível das competências adquiridas, foram além das expectativas. Estes alunos, em determinados momentos, conseguiram ir mais além do que os outros que frequentavam o currículo normal, estabelecendo conjecturas, procurando conexões, relacionando propriedades. Por outro lado, passaram a encarar a Matemática com outros olhos e surpreenderam-se muitas vezes com o facto de lhes dizer que sabiam muito sobre Geometria, que consideravam muito difícil.

Uma aluna, das mais *preguiçosas* e com mais dificuldades, dizia no final do período, quando lhes foi pedida uma reflexão sobre as tarefas propostas:

"Eu gostei muito destas aulas, aprendi muito a fazer estes exercícios com jogos no computador. Foi divertido e aprendemos ao mesmo tempo. Aprendi mais este ano do que nos outros que só fazíamos fichas e era aborrecido"

Este ano continuamos e estendemos esta metodologia a outros temas e a outras aplicações e esperamos obter o mesmo sucesso" (MJV).

A Elvira Santos, refere que "os alunos são muito receptivos à utilização do computador na aula de Matemática e conseguem utilizar qualquer *software* com bastante facilidade, por isso, o desafio não acaba na aula e é pedida a elaboração individual de um relatório sobre a actividade que desenvolveram. O relatório entregue através de correio electrónico foi posteriormente comentado pela professora e reenviado ao aluno com a indicação de refazer ou colocá-lo no seu portefólio. Quando da recepção dos relatórios alguns alunos registam o seu prazer por este tipo de trabalho, como se pode ver pelos registos de estes dois alunos:

"Gostei da maneira que aprendi porque trabalhar com o computador portátil dá mais vontade de aprender."

"Com a realização destes exercícios que foram feitos no computador portátil usando o *software* (GSP) a aprendizagem da matéria é feita de uma maneira mais simples e interessante." (ES)

Em síntese

Estes testemunhos sobre o uso das TIC no ensino da Geometria centram-se sobre os AGD, em particular, o *GSP*, o que corresponde à ideia de que se trata do tipo de *software* mais usado para a abordagem da Geometria, embora algumas vezes complementado com o uso de *applets* ou de programas como o *Poly Pro*[3].

Os aspectos da aprendizagem da Geometria parecem *caminhar* a par dos aspectos de motivação, presentes principalmente em turmas com percursos escolares mais irregulares.

O *software* permite a realização de um grande número de experiências e as tarefas exploratórias e de cunho investigativo são privilegiadas, também devido ao carácter aberto e dinâmico da aplicação *GSP* e à propriedade do *arrasto*, procurando as invariâncias, ou seja, aquilo que permanece constante entre tudo o que varia.

Também é reconhecido que a actividade dos alunos não passa apenas pela manipulação individual dos objectos geométricos que o *software* permite para visualizar conceitos, descobrir propriedades e relações, procurando regularidades, mas integra a discussão de ideias entre pares, a formulação de conjecturas e a procura de explicações ou a respectiva validação das conjecturas.

O trabalho de grupo é usado como forma de organização natural devido ao número de equipamentos disponível, mas também para facilitar a interacção entre os alunos.

Aqui, como em toda a actividade pedagógica, o papel do professor é essencial no tipo de propostas e desafios que faz para promover a aprendizagem, na passagem das fases mais intuitivas e de descoberta, para as da prova e para o registo de conclusões que permite sistematizar as descobertas "através de um processo de relacionamento com os conhecimentos anteriormente aprendidos e com a manipulação das figuras", nas palavras da Isabel, um processo reflexivo essencial para a consolidação dos conhecimentos. O registo sistematizado, normalmente sob a forma de relatório, permite prolongar o desafio para além da sala de aula.

Finalmente, os resultados parecem também ser animadores, ao nível das competências adquiridas que nalguns casos superaram as expectativas, levando os alunos a estabelecer conjecturas e a procurar relações e conexões e a *ver* a matemática com outros olhos.

O carácter dinâmico dos AGD convida à exploração e à descoberta, implicando directamente o aluno numa aprendizagem pessoal que assim se torna significativa, assumindo este, muitas vezes, uma postura de questionamento que ultrapassa os aspectos mais directamente ligados com as tarefas.

No entanto, vários autores e também uma das professoras entrevistadas, levantam questões para reflexão sobre a oportunidade e as condições para a introdução desta tecnologia, com vista a promover a aprendizagem. Por falta de espaço, voltaremos numa próxima revista a abordar o uso dos AGD, mas agora incidindo sobre algumas limitações e constrangimentos que se identificam.

Que relação com as alterações curriculares que se avizinham?

Finalmente, fomos ver até que ponto a proposta de reajustamento do programa de Matemática do Ensino Básico contemplava ou sugeria o uso das TIC e, em particular, dos Ambientes de Geometria Dinâmica, aqui referidos.

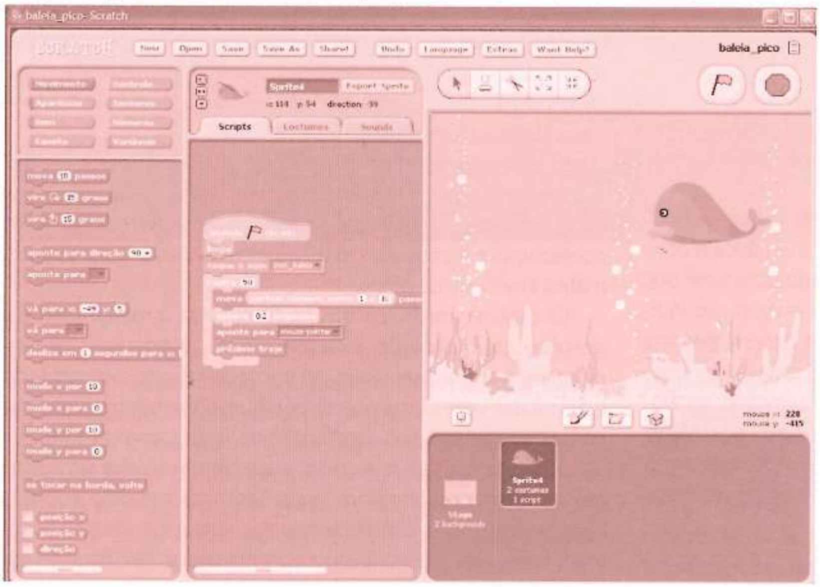
Nas orientações metodológicas gerais, a proposta aponta para que, "ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores — usualmente designados por Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) — na realização de cálculos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos" (p. 10).

Já ao nível do 2° ciclo, nas indicações metodológicas relativas ao tema Geometria e Medida, refere-se que "é fundamental o recurso aos instrumentos de medida e de desenho (...) bem como a utilização de materiais manipuláveis (...) e de programas computacionais de Geometria Dinâmica e *applets*. A utilização destes instrumentos, materiais e programas computacionais, favorece a compreensão dos conceitos e relações geométricas, é um apoio importante na exploração, análise e resolução de situações de natureza geométrica e permite desenhos e construções com um rigor adequado" (p. 39).

Também nas indicações metodológicas para o tema Geometria, no 3° ciclo, sugere-se que "os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação (...) Tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática" (p. 54), o que vem na linha de alguns testemunhos acima relatados. Os usos dos AGD que acima se descrevem através das palavras das professoras, constituem uma ilustração concreta daquilo que as novas propostas curriculares já vêm reconhecendo, ainda que de forma muito ténue.

Talvez valha a pena aprofundar o debate sobre o uso da tecnologia no que respeita à valorização e melhoria das aprendizagens dos alunos, identificando alguns constrangimentos e limitações à sua real integração na sala de aula de matemática e à sua expressão, ainda pouco explícita, nos documentos de orientação curricular.

Está aí um novo Logo multimédia?!



O *Logo* da década de 80 caiu em desuso. Porquê? Porque acompanhou o movimento de *desencanto* que atravessou as linguagens de programação? Porque o esforço que se exigia em termos de conhecimento da linguagem, não revertia necessariamente em aprendizagens ao nível de conceitos da matemática? Porque as potencialidades técnicas eram limitadas e a sua apresentação visual *perdeu* face aos produtos multimédia emergentes?

O que é certo é que a linguagem *Logo* vestiu novas roupagens e surgiu com novos interfaces, de que o *MicroWorlds* (versão 2.03, LCSI, 1997) foi um exemplo e mais recentemente, o Scratch (um écran do programa, ver figura). Desenvolvido pelo grupo de investigação Lifelong Kindergarten do *Media Lab do Massachussets Institute of Technology* (MIT), pode ser descarregado livremente no *website* do *Scratch*, em `http://scratch.mit.edu`.

Basicamente, o *Scratch* é constituído por uma área de comandos e duas áreas de trabalho: a área de construção de procedimentos e a área de gráficos. Os projectos construídos com o *Scratch*, podem ser histórias interactivas, animações, jogos, música, etc. Estão presentes, agora numa linguagem orientada a objectos, os *velhos* comandos do Logo, que permitem: a deslocação e orientação de objectos, mudar a aparência das formas, usar estruturas de controle, trabalhar com números e variáveis e a utilização de sensores. Depois pode publicar o seu projecto directamente na *Web* e partilhá-lo com o mundo.

Sabemos já de professores e alunos que estão a utilizar o *Scratch*. No próximo número da Revista contaremos novidades sobre os contextos em que está a ser usado e as mais valias que esses utilizadores vêem nesta recente aplicação. Se, por acaso, está a usar o *Scratch*, envie-nos, por *mail*, as suas ideias.

Notas

1 Para mais informações sobre o GSP, visite o *site* da Keypress (`http://www.keypress.com`)

2 Ver em `http://illuminations.nctm.org/`

3 Ver em `http://www.peda.com/polypro/`

José Duarte

CASIO® CALCULADORAS PARA O ENSINO

A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado, perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas, através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional CASIO.

Nova familia de gráficas

FX 9860G SD

Muito fina e leve

FX 9860G Slim

FX 9860G

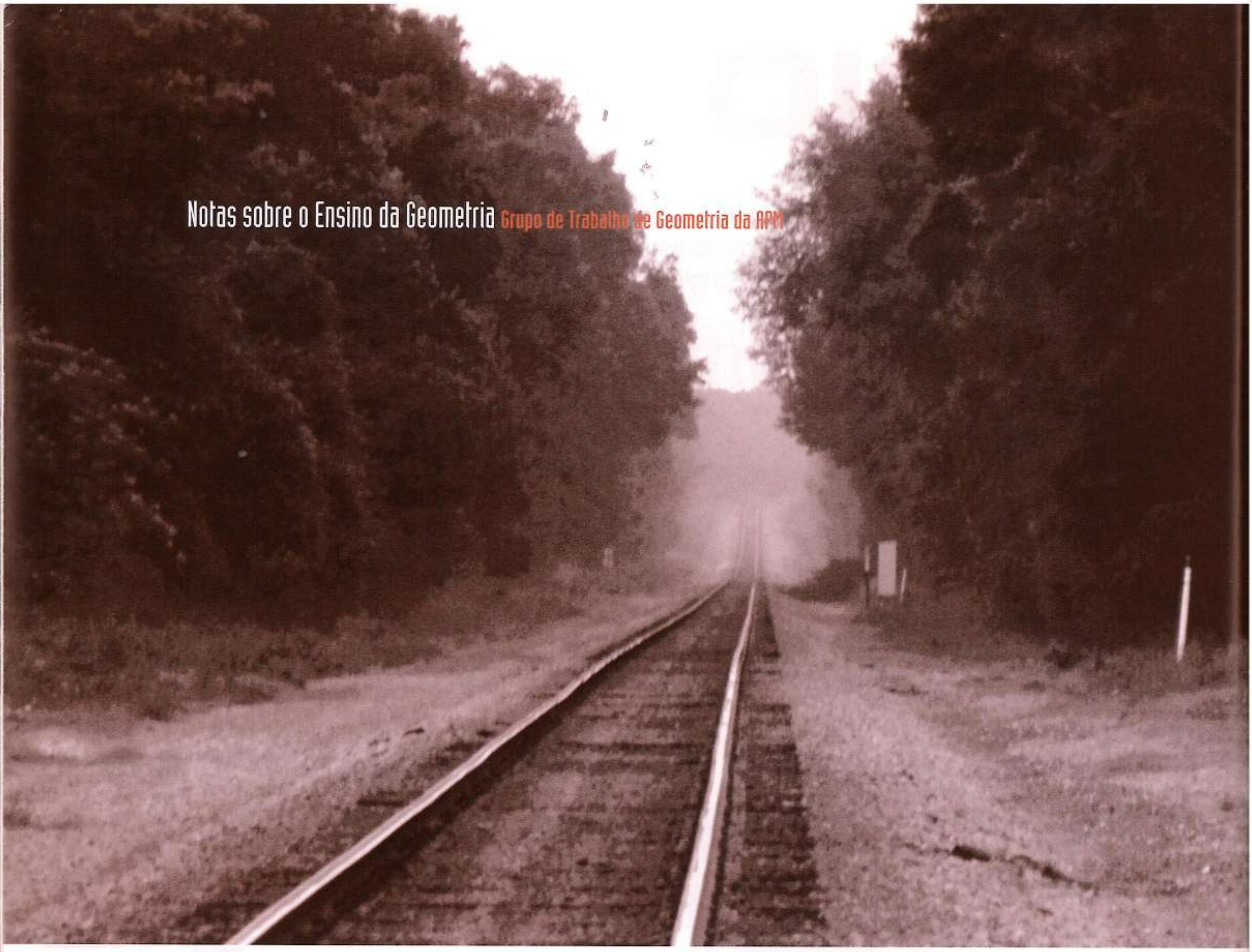
CARACTERISTICAS COMUNS:

- Grande Visor gráfico de alto contraste
- Memória Flash 1.5MB + 64K Ram (modelo SD expande memória)
-Grande velocidade de processamento e Rapidez de calculo
- Graficos com diferentes traçados.
- Número de funções 1025 , 286 das quais científicas
- Número de programas dependente da capacidade de memória
- 64 Kbytes passos de programação
- 1,5 Mbytes de memória Flash Ram
- Introdução de expressões em formato Natural
- Folha de calculo e E-Actividades
- Ligação a PC via USB incluída
-Linguagem em Português
-Actualização pela Internet – possibilidade de introduzir a geometria

BELTRÃO COELHO

Lisboa, Porto, Braga, Aveiro, Coimbra, Santarém, Setubal, Evora, Faro, Funchal e Açores

http://edu.beltraocoelho.pt



Será o infinito um ponto?!

Pedro Miguel Oliveira

Os números e a geometria desde há muito que revelam segredos comuns apesar de nem sempre os associarmos ou trabalharmos em conjunto. Por exemplo, fará sentido explorar geometricamente o inverso de um número real? Que relação terá com a inversão de um ponto num plano? E que propriedades terá a transformação que faz corresponder a cada ponto do plano o seu *inverso*? É sobejamente aceite que um determinado número multiplicado pelo seu inverso é igual a um. E, além disso, se pensarmos na sucessão dos números naturais esta tende para infinito, ao invés da sucessão dos seus inversos, cuja sequência tende para zero. Mas poderão estas noções implicar algo de tão extraordinário na procura de propriedades geométricas?

Jacob Steiner, no século XIX, produziu uma interessante descoberta desenvolvendo uma geometria que, com a sua própria concepção devidamente alicerçada, permitiu resolver problemas que até então eram considerados irresolúveis pela geometria de Euclides. Um desses exemplos é *o problema das três circunferências de Apolónio* que consiste na determinação da circunferência (ou das circunferências) tangente (ou tangentes) a três circunferências dadas. Também problemas de difícil resolução no âmbito da geometria euclidiana puderam ser demonstrados de forma mais simplificada como foi disso exemplo o *Teorema de Ptolomeu*, em que se afirma que o produto das diagonais de um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Para melhor entendermos estes e outros problemas Steiner deixou-nos então como legado as bases da *geometria inversiva* que nos têm levado numa viagem, onde se apresentam outras perspectivas sobre o que é

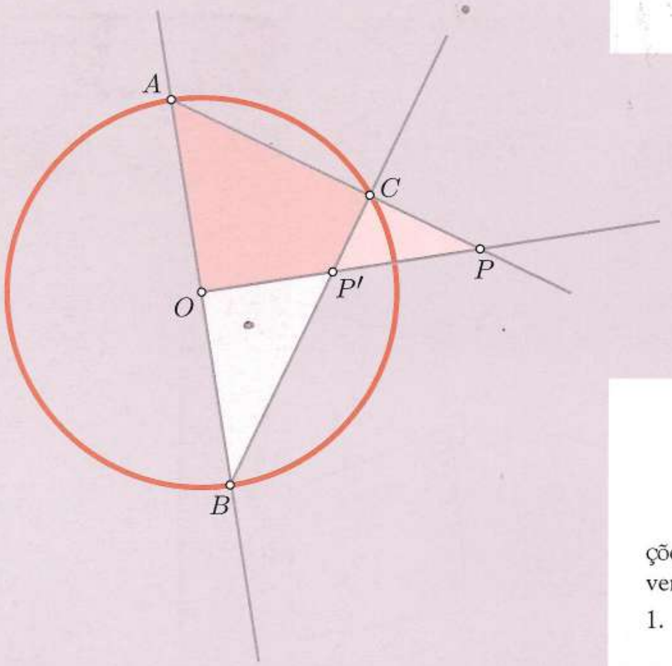


Figura 1.

Os triângulos rectângulos OPA e OBP' são semelhantes logo

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OP} \times \overline{OP'}$$

Como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ então

$\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.

a geometria, combatendo mesmo preconceitos firmados de definições estanques que limitam a capacidade de explorar o conhecimento.

Vamos começar por ver a condição inicial necessária ao entendimento desta geometria não euclidiana:

Dada uma circunferência de centro em O e raio r, dizemos que a *inversão* é a transformação que faz corresponder, a cada ponto P do plano, diferente de O, o ponto P' que se encontra sobre a semi-recta OP e que verifica o facto de $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.

A inversão pode então ser comparada como uma espécie de reflexão onde a chamada *circunferência de inversão* funciona como um eixo de reflexão. Mas para melhor entender esta transformação, identifiquemos geometricamente as condições que nos permitem obter a localização de um ponto inverso de um dado ponto, diferente de O (figura 1):

1. Desenhar a *circunferência de inversão* de centro em O e raio r;
2. Marcar um ponto P e desenhar a semi-recta OP;
3. Passando por O, traçar a perpendicular à semi-recta OP e assinalar os pontos A e B de intersecção com a circunferência;
4. Traçar a semi-recta AP e assinalar o ponto C, outro ponto que intersecta a circunferência;
5. Traçar a semi-recta BC;
6. Assinalar o ponto P', inverso de P, que resulta da intersecção das semi-rectas OP e BC.

Através da construção apresentada verifica-se que é possível transformar um ponto no seu inverso em quase todo o plano. Mais, verifica-se que o afastamento de um qualquer ponto do centro da circunferência de inversão leva a uma aproximação do seu inverso desse mesmo centro e vice-versa. Neste particular, o único caso que requer uma atenção especial é mesmo o ponto O cujo inverso não é possível construir. Se intuitivamente entende-se que o afastamento de um ponto P leva a uma aproximação do seu inverso, ambos relativamente ao centro da circunferência de inversão, então levanta-se a questão: *será o infinito um ponto?* A resposta é um convencional sim para que possamos estabelecer uma transformação biunívoca e assim a inversão ser uma verdadeira transformação geométrica segundo a definição mais usual (ver, na mesma secção desta revista, o artigo de Rita Bastos, *Transformações Geométricas*). Assim, ampliamos o plano euclidiano com um ponto (Ω), que designamos por ponto do infinito, obtendo então o chamado *plano inversivo*. A inversão torna-se então numa transformação definida em todo o plano e com valores em todo o plano, convencionando-se que o transformado do centro da circunferência de inversão, O, é o ponto Ω e o transformado de Ω é o ponto O.

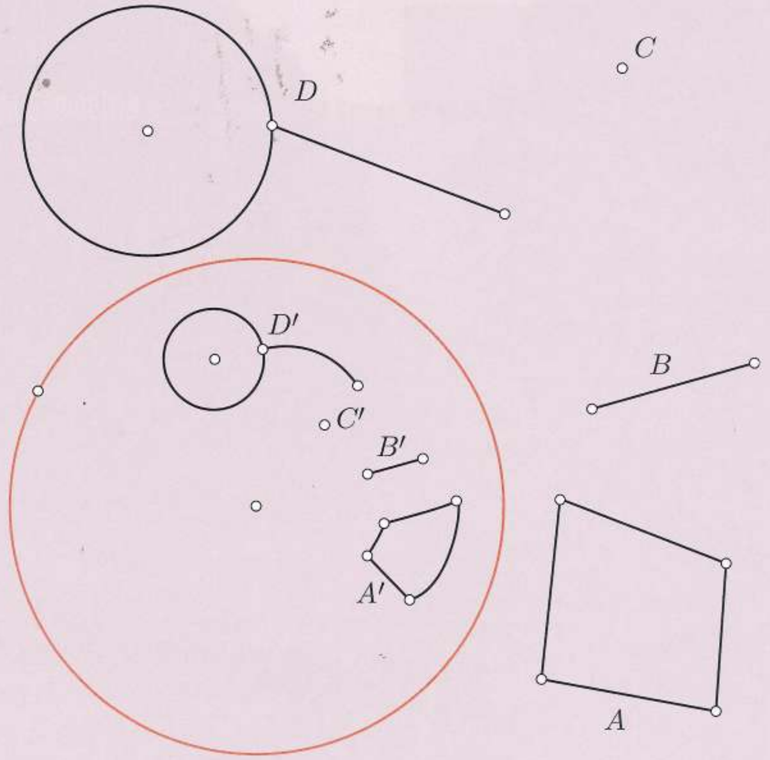


Figura 2. Inversão

Destaque-se aqui a possibilidade que a geometria nos oferece de criar e recriar uma teoria que, apesar de uma aparente lacuna, com o simples acrescento de um ponto passa a ser sempre válida. O leitor poderá ver uma situação semelhante a esta na geometria projectiva, onde uma recta é a solução necessária para se poder construir uma projecção sem limitações.

Estamos agora em condições de enunciar um conjunto de resultados que permitem descobrir e construir a geometria inversiva. Contudo desafiamos o leitor, caso seja possível, a acompanhar esta descoberta usando em paralelo um programa de geometria dinâmica, como por exemplo o *The Geometer's Sketchpad*.

- A inversão é uma transformação que faz corresponder a cada ponto do exterior da circunferência um ponto do interior da mesma e vice-versa.
- O transformado pela inversão de uma recta que passa pelo centro da circunferência de inversão é a própria recta.
- O transformado pela inversão de uma recta que não passa pelo centro da circunferência de inversão é uma circunferência que passa por esse centro. Além disso, o seu diâmetro que parte de O é perpendicular à recta considerada.
- Assim, um segmento de recta é transformado, pela inversão, ou noutro segmento de recta ou num arco de circunferência, conforme a sua recta suporte passe ou não pelo ponto O.
- Rapidamente se pode verificar que a inversão não preserva as distâncias logo não é uma isometria.
- O transformado pela inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão O é uma outra circunferência que também não passa por O.
- Uma circunferência ortogonal à circunferência de inversão é transformada pela inversão nela mesma (duas circunferências são ortogonais se as tangentes nos pontos das suas intersecções formam ângulos rectos).

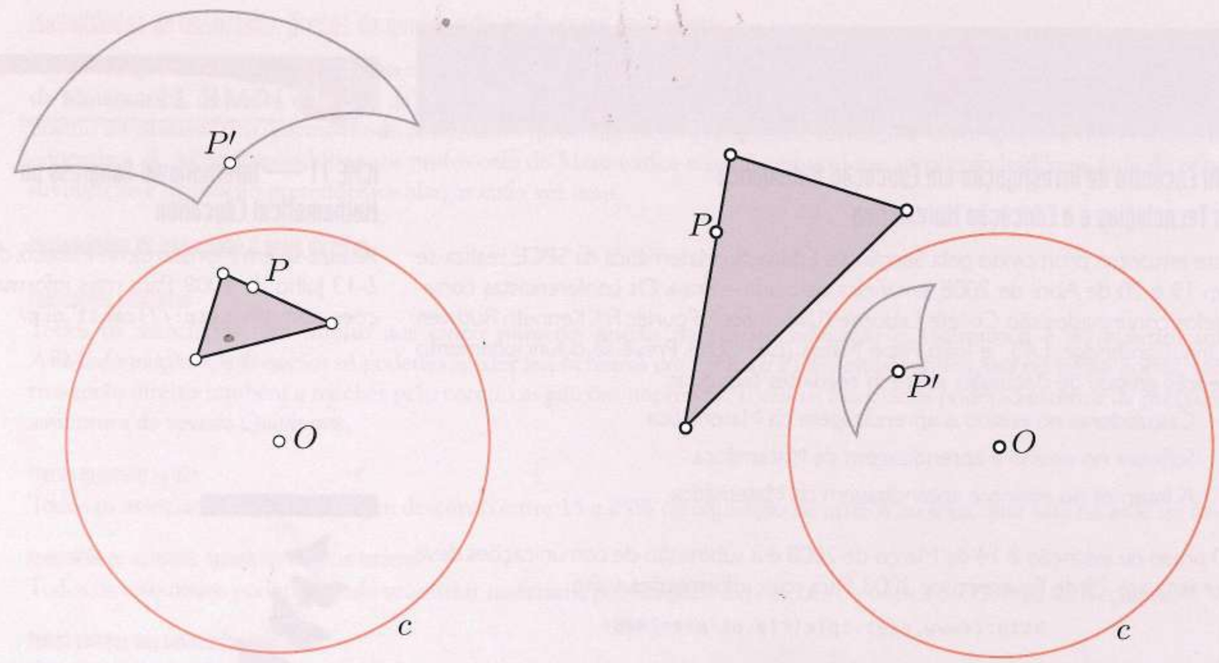


Figura 3.Inversão de triângulo

- A inversão é uma transformação conforme, ou seja, preserva os ângulos, contudo inverte o seu sentido. Particularmente, se duas circunferências são tangentes então as suas inversas também o são e o mesmo se passa relativamente à ortogonalidade.

Com base nestes resultados podemos agora explorar um conjunto de desafios com diferentes graus de dificuldade. Por exemplo: Como serão as figuras transformadas, pela inversão, de um triângulo equilátero ou de um quadrado? Que efeito geométrico terá a inversão de uma pavimentação de triângulos que se encontre no exterior da circunferência de inversão? Conseguirá o leitor encontrar a solução do *problema das três circunferências de Apolónio*? E do *Teorema de Ptolomeu*?

As potencialidades que a inversão oferece são alargadas e não se limitam apenas às construções geométricas no plano inversivo. A projecção estereográfica ou os números complexos também se relacionam de forma directa com a inversão. Como tal convidamos os leitores, em particular os professores, a descobrir e a explorar a inversão. E, para estes últimos, porque não tentar trabalhar algumas noções e propriedades da inversão em sala de aula e, em conjunto com os alunos, conjecturar, negar ou validar resultados? Será que *geometrizar* com temas pouco vistos e trabalhados não será importante para estimular e formar o aluno na procura da formalização de conceitos e propriedades geométricas?...

Notas

1 Para melhor acompanhar este artigo pode fazer *download* dos ficheiros de *Sketchpad* disponibilizados na revista *on-line*.

2 Pode ainda consultar as páginas:

http://www.atractor.pt/mat/inversao/index.html
http://whistleralley.com/inversion/inversion.htm
http://en.wikipedia.org/wiki/Inversive_geometry
http://www.mat.uab.es/departament/Varis/material/inversions.pdf

Pedro Miguel Oliveira
Grupo de Geometria da APM

XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática
As Tecnologias e a Educação Matemática

Este encontro, promovido pela Secção de Educação Matemática da SPCE, realiza-se em 19 e 20 de Abril de 2008, em Vieira de Leiria – Praia. Os conferencistas convidados confirmados são Collete Laborde (Univ. Joseph Fourier, Fr), Kenneth Ruthven (Univ. Cambridge, UK), e João Filipe Matos (DEFCUL). Prevê-se o funcionamento de três grupos de discussão, sobre as seguintes temáticas:

- Calculadoras no ensino e aprendizagem da Matemática
- *Software* no ensino e aprendizagem da Matemática
- A Internet no ensino e aprendizagem da Matemática

O prazo de inscrição é 14 de Março de 2008 e a submissão de comunicações deve ser feita até 25 de Fevereiro de 2008. Para mais informações, visite

`http://www.esel.ipleiria.pt/eiem2008/`

ICME 11 — International Congress on Mathematical Education

Realiza-se em Monterrey, no México, de 6-13 Julho de 2008. Para mais informações, consulte `http://icme11.org/`

I Congresso Internacional em Estudos da Criança
Infâncias Possíveis, Mundos Reais

Nos dias 2, 3 e 4 de Fevereiro de 2008, o Instituto de Estudos da Criança promove a realização do I Congresso Internacional em Estudos da Criança, em Campus de Gualtar, Universidade do Minho. Para mais informações, consulte

`http://ciec.iec.uminho.pt/`

PME32 & PME-NA30 Mexico

Realiza-se em Morelia, Michoacán, Mexico, de 17-21 Julho 2008. Para mais informações visite `http://igpme.org/`

5th Mathematics Education and Society Conference

Este Congresso, promovido pelo CIE — Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa realiza-se entre 16 e 21 de Fevereiro de 2008 no Hotel Baía Grande, Albufeira, Portugal. Para mais informações, consulte

`http://www.mes5.learning.aau.dk/`

5th International Colloquium on the Didactics Of Mathematics

Realiza-se em Creta, Grécia, entre 17 e 19 de Abril 2008. Para mais informações consulte

`http://www.edc.uoc.gr/5colloquium`

YESS 4 — 4th YERME Summer School for Young Researchers in ERME

Realiza-se em Trabzon, Turquia, entre 18-24 Agosto, 2008. Mais informações em `http://yess4.ktu.edu.tr`

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2008

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeito	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	50,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	70,70 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	65,50 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	86,20 €

Para efectuar a sua inserição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2008

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		11,50 €
	Estrangeiro		14,70 €
Instituições	Portugal	38,00 €	22,30 €
	Estrangeiro		26,70 €

índice

Editorial

01 **Regresso ao futuro da Geometria**
Augusto J. Franco de Oliveira

Artigos

02 **Aprendizagem e ensino da geometria**
Paulo Almeida

12 **O ProfMat 2007**
Filomena Leite Pinto

15 **Piero della Francesca e a Geometria Projectiva**
Eduardo Veloso

27 **Às voltas com noções a aptidões geométricas no cubo…**
Paulo Dias

37 **A geometria dinâmica no ensino básico e secundário**
Pedro Pimenta

45 **Aprender geometria… Jogando às cartas**
Marisa Ferreira

52 **Uma regra de perspectiva inédita**
João Pedro Xavier

61 **As cónicas sob múltiplas perspectivas**
Manuela Ribeiro

76 **Notas sobre o Ensino da Geometria: Será o infinito um ponto?!**
Pedro Miguel Oliveira, Grupo de Trabalho de Geometria da APM

Secções

34 **O problema deste número** Os caminhos do parque, *José Paulo Viana*
Grande concurso Educação e Matemática *À procura do π*

41 **Actualidades** *Cláudia Fialho*
Conseguir que as pessoas queiram aprender

70 **Tecnologias na educação matemática** *José Duarte*
As TIC e a Geometria na aula de Matemática: quatro testemunhos
Está aí um novo Logo multimédia?

59 **Materiais para a aula de Matemática**
A Casa da Música, *José Santos dos Santos*

25 **Pontos de vista, reacções e ideias …**
A Geometria na proposta de ajustamento — algumas questões, *Cristina Loureiro*
A Geometria perde peso?, *Nuno Candeias*
O reajustamento do programa de Geometria do 2° ciclo, *Helena Rodrigues*

42 **Para este número seleccionámos**
O papel que a geometria podia desempenhar…

80 **Encontros**