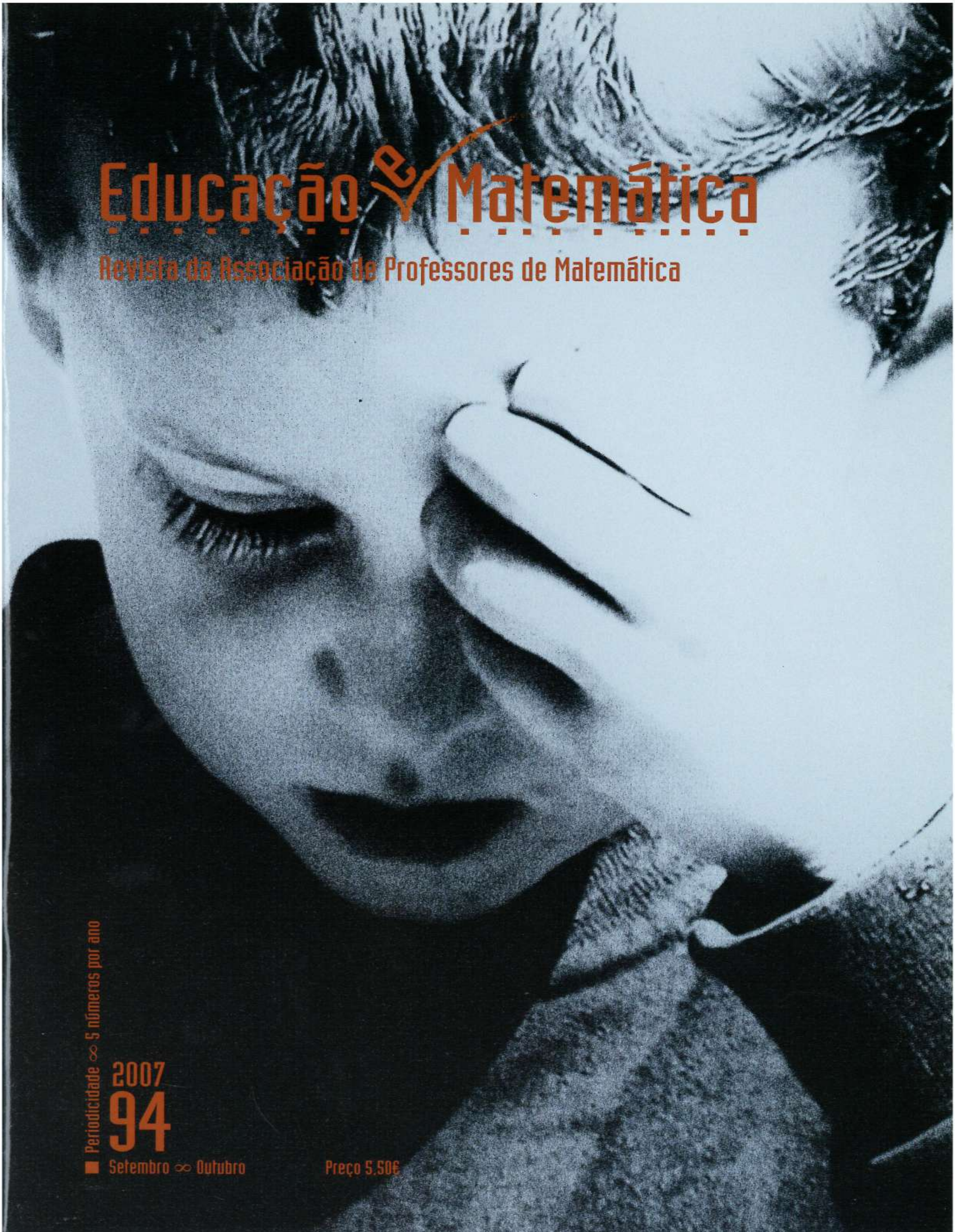


Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2007

94

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Claúdia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
João Torres
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Bóia
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Outubro 2007
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051

Porte Pago

Sobre a capa

Cogito ergo sum [Penso logo existo, *René Descartes*].

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Domingos Fernandes, Fernanda Velez, Fernando Nunes, Gabriela Schütz, Laura Margarida Bandarra, Leonor Santos, Marília Pires, Paulo Oliveira, Pedro Almeida, Rafael Santos, Renata Carrapiço, Rita Bastos, Sónia Dias, Sónia Figueirinhas.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Um Imperativo Ético

Domingos Fernandes

Há anos que, através da investigação e da reflexão teórica, persistem esforços para compreendermos porque é que a aprendizagem da Matemática continua a ser um problema mal resolvido na generalidade dos sistemas educativos. Como consequência de tais esforços vão-se desenvolvendo acções destinadas a apoiar os alunos nas suas aprendizagens. A discussão em curso acerca do *reajustamento* do Programa de Matemática para o ensino básico, em vigor há mais de 15 anos, exemplifica um esforço que está a ser feito entre nós pois, como muitos reconhecem, é necessário que o currículo daquele nível de ensino seja *claro* nas suas finalidades e objectivos, *consistente* na organização vertical dos temas e capacidades e *aberto* e *inovador* nas perspectivas metodológicas.

Investigações realizadas em Portugal têm mostrado que um número muito significativo de alunos do ensino básico continua a não manifestar gosto em aprender Matemática não desenvolvendo capacidades transversais (e.g., resolução de problemas; raciocínio matemático) e conhecimentos vários relativos aos diferentes domínios do currículo. O número de alunos que, na prática, são considerados incapazes para aprender Matemática continua a ser escandalosamente elevado. Simultaneamente, a investigação tem evidenciado que a natureza das acções pedagógicas e didácticas pode ter uma influência decisiva nas aprendizagens dos alunos. Por isso parece oportuno reflectir e discutir acerca de ideias que melhorem as realidades pedagógico-didácticas das salas de aula e que ajudem os alunos a aprender melhor. Ainda que telegraficamente discutem-se em seguida quatro dessas ideias.

O *paradigma da transmissão* continua a prevalecer largamente nas salas de aula. Isto significa que o desenvolvimento do currículo se faz essencialmente com base no discurso do professor e na passividade dos alunos que praticamente se limitam a *registar* o que lhes é dito. O *paradigma da interacção*, privilegiando a comunicação entre o professor e os seus alunos e entre os próprios alunos, é um importante objectivo a alcançar. O trabalho escolar tem que privilegiar a interacção social porque, no essencial, as aprendizagens são socialmente construídas.

A clássica *ênfase no ensino* tem que dar lugar à *ênfase nas aprendizagens*. Isto significa que as dinâmicas nas salas de aula devem ser mais orientadas para o que os alunos têm que aprender e não exclusivamente para o que os professores têm que fazer. Focar as acções de ensino nas aprendizagens que os alunos têm que desenvolver é fundamental para que eles se envolvam plena e activamente no trabalho escolar.

A terceira ideia refere-se à *selecção de tarefas* a propor aos alunos, componente fulcral do desenvolvimento do currículo. É uma actividade que exige aos professores um significativo esforço de análise e reflexão acerca do programa e dos seus objectivos mais estruturantes. Em geral questiona a utilização rotineira, pouco crítica, *página-a-página*, dos manuais escolares. As tarefas seleccionadas devem ser suficientemente desafiadoras, suscitar a mobilização e a integração de conhecimentos e capacidades, permitir aprendizagens profundas e ser diversificadas.

Finalmente, os processos de ensino, aprendizagem e avaliação devem desenvolver-se integradamente. Esta ideia é de grande alcance porque implica que a *avaliação para apoiar e melhorar* as aprendizagens e o ensino deve constituir o essencial das acções avaliativas de professores e alunos. Nestas condições, a *avaliação para classificar* pode ser mais justa, mais rigorosa e mesmo contribuir para, em certos momentos, apoiar aqueles três processos. Em suma, a avaliação formativa deve estar presente no dia-a-dia das salas de aula; a avaliação sumativa deve ser pontual e, tanto quanto possível, subordinada aos princípios, métodos e conteúdos da avaliação formativa.

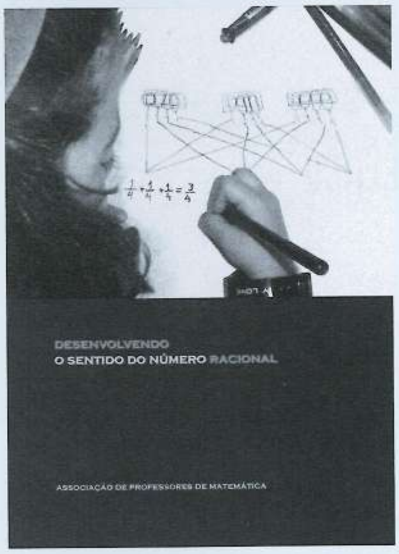
As ideias enunciadas implicam que os professores se afastem das perspectivas funcionalistas, tecnicistas e burocráticas de desenvolvimento do currículo e se assumam como intelectuais, como investigadores das suas próprias práticas e como profissionais capazes de reflectir acerca das complexas realidades sociais em que exercem o essencial da sua actividade. É um esforço significativo. Um duro e difícil combate. Um imperativo ético da maior relevância.

Domingos Fernandes
Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Univ. de Lisboa

Desenvolvendo o Sentido do Número: perspectivas e exigências curriculares, Volume II

Edição APM, 2007
Sócio 7,50€ | *PVP* 11,25€

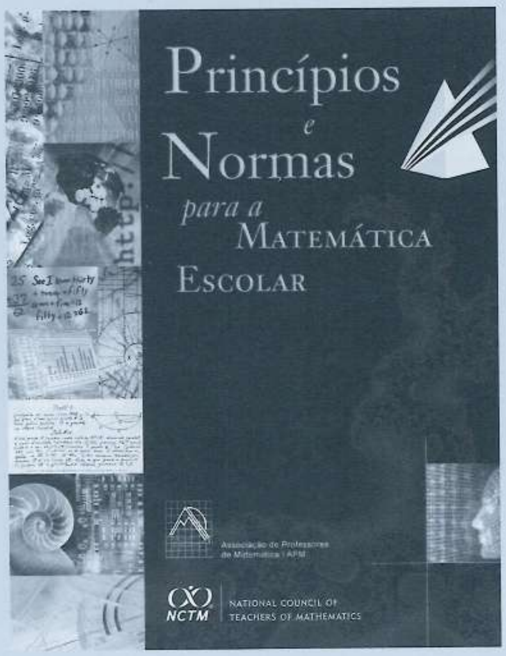
Esta brochura, destinada a professores do 1° ciclo, segue-se a uma primeira em que foram abordados aspectos iniciais relativos ao sentido do número e à abordagem da adição e subtracção. Aqui são apresentadas cadeias de tarefas experimentadas na sala de aula que dizem respeito especificamente à adição e multiplicação, à multiplicação (três cadeias), à divisão e ao trabalho com decimais. Antecedendo a apresentação destas cadeias de tarefas apresenta-se um texto que contextualiza e fundamenta a construção de tarefas.



Desenvolvendo o Sentido do Número Racional

Edição APM, 2007
Sócio 6,00€ | *PVP* 9,00€

Nesta brochura estão apresentadas várias tarefas cujo objectivo principal é proporcionar aos professores um recurso para o ensino dos números fraccionários positivos. Este conjunto de tarefas não pretendendo ser exaustivo, faz no entanto uma abordagem a vários aspectos fundamentais a ter em conta no ensino destes números, tais como diferentes formas de representação (fracção, numeral misto, numeral decimal), diferentes tipos de unidade (contínua e discreta) apresentando diversos contextos onde as fracções podem ter diferentes significados.



Princípios e Normas para a Matemática Escolar

Edição APM, 2005
Preço a anunciar

Na continuidade das orientações e propostas curriculares para o ensino da Matemática que tem vindo a elaborar nas décadas recentes, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicam os *Principles and Standards for School Mathematics*, agora editados pela APM. Os Princípios descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade; as Normas descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender. Em conjunto, os Princípios e Normas constituem uma perspectiva orientadora dos educadores que lutam pelo contínuo desenvolvimento da educação matemática nas salas de aula, escolas e sistemas educativos.

Mesa Redonda

No âmbito do processo de reajustamento do programa de matemática do ensino básico, pareceu-nos oportuno dinamizar uma mesa redonda onde fosse possível ouvir a opinião de autores do documento para discussão e de alguns grupos de trabalho da APM. Assim, em representação da equipa responsável pelo reajustamento estiveram presentes Lurdes Serrazina [LS] e Paulo Oliveira [PO], pelo grupo de trabalho do 1º ciclo, Pedro Almeida [PA], pelo grupo do 2º ciclo, Fernando Nunes [FN] e, pela direcção da APM, Sónia Figueirinhas [SF].

[EM] Antes de mais queríamos agradecer a vossa disponibilidade para estarem presentes. Damos a palavra a um elemento da equipa de elaboração do documento pedindo-lhe para identificar as principais diferenças que se encontram neste reajustamento. Antes disso, queríamos dizer que qualquer pessoa pode colocar questões, o objectivo é o debate.

[PO] Diria que a primeira diferença se prende com a estrutura do documento. Desde o início fizemos questão de elaborar um documento que fosse único para os nove anos do Ensino Básico [EB]. Procurámos ser precisos na linguagem, fixá-la para os três ciclos. O documento tem a mesma estrutura para todo o EB. Essa é uma grande diferença e parece-nos ser fundamental para as pessoas se apropriarem do documento. Outra diferença foi tornar mais objectiva a relação entre finalidades e objectivos gerais e relacionar isso com as propostas que fazemos de aprendizagens específicas em cada tema, porque no programa actual as finalidades e os objectivos gerais estão algo longínquos e parece-nos que era difícil para um professor tê-los mais presentes. Outra diferença importante é que identificámos três capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática, que são a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos. Isso não significa que não haja outras capacidades. O documento dá algum relevo a outras, como a representação e o estabelecimento de conexões, embora não tenham um papel tão preponderante. Há também algumas diferenças em relação aos temas. Aparece um capítulo de Álgebra nos três ciclos.

No 1° ciclo, digamos, uma pré-álgebra, uma coisa mais de carácter introdutório, nomeadamente através de regularidades numéricas. Aliás, padrões e regularidades constituem um fio condutor algébrico ao longo dos nove anos da escolaridade básica. A Organização e tratamento de dados aparece desde o 1° ciclo com bastante destaque e, no 3° ciclo, há um maior aprofundamento, nomeadamente em algumas matérias que não foram contempladas no programa actual, por exemplo, medidas de dispersão. Nos Números socorremo-nos de um conceito fundamental que dá uma certa unidade ao estudo dos números que é o conceito de 'sentido de número'. Como na literatura podemos encontrar várias perspectivas sobre o sentido de número, nós dizemos no documento o que entendemos por sentido de número; começa por ser o sentido de número natural, que se vai alargando progressivamente (sentido de número inteiro, racional e irracional). Esse é um fio condutor importante. Nos Números houve a preocupação, nomeadamente no 1° ciclo, de fazer algum trabalho antes da introdução dos algoritmos, um trabalho mais intuitivo, e também de trabalhar os números racionais nas suas diversas formas de representação logo desde o 1° ciclo. Na Geometria é o sentido espacial que é o eixo, e dentro do sentido espacial a visualização tem um papel muito importante para dar unidade ao ensino da geometria em todo o EB. As transformações geométricas acabam por ser também um eixo importante no ensino da Geometria. Aparece também a Medida ligada à Geometria, nomeadamente no 1° e no 2° ciclos; no 3° ciclo aparece só Geometria. Outra opção seria fazer um capítulo à parte de Medida, mas como a maior parte das grandezas que se tratam são de natureza geométrica, acabámos por achar que seria mais conveniente associá-la à Geometria. No 1° ciclo aparece Geometria e depois Medida, mas isso não significa que o tratamento seja esse, o programa não estabelece um roteiro de aprendizagem. Indica objectivos de aprendizagem, os temas a tratar, mas isso não é um roteiro. Digamos que estas são as principais diferenças que, para já, eu queria mencionar.

[FN] Gostava de começar por dizer duas coisas: a primeira é dirigida à redacção da revista, no sentido de que acho muito importante que se tenha preocupado com este evento; aos representantes da comissão que elaborou o reajustamento do programa é que este reajustamento já devia ter acontecido há mais tempo. Gostava também que tudo aquilo que vou dizer fosse visto como uma tentativa de melhorar a actual proposta. Eu estive a ouvir o Paulo, e o que nós identificámos foram coisas muito parecidas. Os temas matemáticos por si têm um determinado valor mas têm de ser acompanhados por mais qualquer coisa — objectivos, capacidades, finalidades, estratégias. Existe nitidamente uma articulação vertical mais forte, se compararmos com os programas em vigor. Este reajustamento foi apresentado para os nove anos de escolaridade, o que nos dá logo a oportunidade de estabelecer comparações. Depois uma outra diferença que notámos é de organização e consubstancia-se no facto de não haver especificação por ano. No 1° ciclo aparece 1° e 2° ano, depois 3° e 4°, no 2° ciclo aparece 5° e 6°, mas nos programas anteriores estavam definidos todos os anos e temas. Havia uma separação nítida. Aqui não temos propriamente um guião, temos quadros resumo. No geral são as principais diferenças que identifico.

[PA] Eu gostava de acrescentar, ao que o Fernando disse, que o programa anterior coexistia com o Currículo Nacional, e principalmente para os professores do 1° ciclo eram dois documentos completamente diferentes. Não se percebia muito bem como fazer a articulação entre ciclos e neste documento sente-se que há uma articulação melhor, embora não venha aqui citado qual é o papel deste programa e o papel do Currículo Nacional.

[SF] Eu tenho a dizer que analisei o programa sobretudo relativamente à geometria, visto que pertenço ao grupo de trabalho da geometria, e relativamente ao 3° ciclo. A direcção da APM agendou a sua discussão para outro momento e, portanto, eu vou dar apenas a minha opinião. Neste contexto, eu vejo sobretudo semelhanças entre este programa e o anterior, e se calhar a mais importante e a mais positiva é a de continuar a ser um programa organizado por ciclo e, portanto, romper-se com a prática que veio introduzir aquele roteiro em relação ao programa de 91 e que é uma organização por ano. Eu concordo com uma organização por ciclo, defendo-a em absoluto. Por outro lado, mais um ponto muito positivo foi aquele que já referiram, ser só um documento para todo o ensino básico. Penso que se abandonou aqui um pouco a ideia de espiral que estava subjacente ao programa anterior. Isso significa, espero eu, que se devem continuar a revisitar os temas com cada vez mais profundidade, ampliando os conhecimentos e as experiências, mas no fundo, sem repetir etapas, que era um efeito negativo que, por vezes, o programa anterior tinha na sua interpretação. Eu acho que a arrumação naqueles quadros síntese permite perceber melhor o que é que os alunos já trabalharam e, portanto, não pressupor que tem de se começar sempre do zero. Este programa não tem o peso relativo dos temas e, na minha opinião, devia ter, porque a mim como professora, me ajuda a organizar e a gerir os conteúdos. Orienta o meu trabalho e, portanto, eu acho que deve dizer aquilo a que se deve dar mais peso. Acho que isso era importante. Congratulo-me com o regresso à ênfase nas transformações geométricas e a uma tentativa de correcção no uso de termos, contudo e, infelizmente, não foi muito conseguido. Numa primeira leitura, parece-me também que nalguns aspectos se pretende uma maior formalização no 3° ciclo, mas não consegui decidir se acho isso positivo ou não.

[EM] Um outro aspecto que nós gostaríamos que abordassem era os pontos críticos do documento. Quase todos os grupos da APM identificaram pontos críticos em relação ao programa anterior. Vêem que este reajustamento ultrapassou alguns desses pontos críticos, ainda permanecem alguns, surgiram outros?

[PA] No grupo do 1° ciclo iniciámos uma discussão com base numa primeira reflexão, mas não fomos muito além disso e, portanto, estou aqui a transmitir essencialmente a minha opinião pessoal. Relativamente aos pontos críticos, embora eu possa reconhecer que este documento traz vantagens, o que me parece é que ele cria novos pontos críticos. Há aqui, de facto, muito para discutir e o tempo dado para se analisar este documento é muito curto. Eu considero muito positivo, por exemplo, a introdução da gestão curricular, da avaliação, das orientações e indicações metodológicas e este aspecto das capacidades transversais estarem num ponto à parte, mas creio que isso cria um ponto crítico, nomeadamente porque enquanto que no programa anterior, por exemplo, em relação à resolução de problemas, estava bem definido que a resolução de problemas era o centro de onde partiam todas as actividades dos diversos temas matemáticos, neste documento parece-me que, o facto de haver um capítulo à parte, pode criar uma espécie de outro tema matemático que não é aquilo que se pretende. Por isso, uma das sugestões seria, por exemplo, preceder os temas matemáticos das capacidades transversais. Colocá-las em primeiro lugar e só depois os temas matemáticos, para frisar bem que as capacidades transversais são o cerne de toda a aprendizagem.

[LS] Esta ordem não é por acaso. Nós, a equipa, discutimos muito acerca disso. Está escrito nas orientações metodológicas que as capacidades transversais são um aspecto fundamental. Também pensamos que os temas matemáticos são fundamentais para trabalhar as capacidades transversais, porque as actividades são transversais a todos os temas. Nós estamos numa disciplina de matemática e os temas matemáticos são a matemática, o nosso conteúdo de trabalho e, portanto, são fundamentais as capacidades transversais, mas elas alimentam e são alimentadas pelos temas matemáticos e, por isso, é que aparecem no fim. Essa discussão, entre nós, foi muito agitada, e chegámos à conclusão que realmente faria sentido pô-las no fim, embora nas orientações metodológicas seja dito que a resolução de problemas pode ser o ponto de partida para a aprendizagem, mas a resolução de problemas também é um ponto de trabalho dentro dos temas matemáticos. Nós estamos numa disciplina de matemática, nisso também é importante reflectir... . Mas deixa-me dizer mais uma coisa... eu ainda ontem arguí uma tese em que um dos testemunhos diz que não faz resolução de problemas porque não há tempo para dar o conteúdo do programa. Portanto, o facto de vir no princípio não quer dizer que as pessoas o façam. Se calhar, não é tão fundamental vir no princípio ou no fim, o que é preciso é que as pessoas o valorizem e nós tentámos pôr as capacidades transversais como um tema a par dos temas matemáticos, exactamente porque sentimos que isso era uma valorização para as capacidades transversais. As capacidades transversais são fundamentais, assim como os temas matemáticos, e por isso foram incluídas no local onde estão. Elas constituem-se ao mesmo tempo como orientações metodológicas e como conteúdos a trabalhar.

[SF] Vou apontar alguns pontos críticos e que não têm nenhuma hierarquia. Eu entendo que há uma falta de explicitação das conexões quer dentro dum tema, quer com temas já estudados. É evidente que eu também entendo que como está previsto que haja outra documentação de apoio, isso possa acontecer, mas como este é que vai ser o documento orientador da prática dos professores, sinto que aqui deveria haver uma coisa mais explícita. A apresentação dos quadros e do resumo do programa em colunas pode levar a leituras parciais incompletas e redutoras do que se pretende — isso já acontecia no programa anterior, como é óbvio. Das pessoas olharem para aqui e dizerem "Ah! Entrou isto, saiu aquilo, isto passou para...". Considero igualmente que era de toda a importância a inscrição de uma nota junto de cada quadro que clarifique que a última coluna, a das notas, é indicativa e não prescritiva.

[LS] Nos temas, para nós as três colunas devem ser lidas, uma não é mais importante que a outra.

[SF] Uma das coisas que parece *picuinhas* é explicitar em que situações se deve trabalhar em grupo, em pares e em grande grupo. Bastava sublinhar a importância dos vários modos de trabalho. Noutros casos, considero que falta clarificar alguns aspectos específicos e não deixar algumas situações ao critério de cada um. Vou dar um exemplo: no desvio padrão não é claro se é para dar a fórmula e calcular o valor manualmente ou se só faz sentido o seu cálculo com uso de tecnologia.

[PO] Mas vem explícito que para calcular o desvio padrão se usa tecnologia.

[SF] Deve vir nas notas...

[PO] As notas têm que ser lidas!

[SF] Como objectivo específico diz "Compreender e determinar a mediana, os quartis, a amplitude interquartis e o desvio padrão num conjunto de dados e utilizar essa estatística na sua interpretação". No objectivo específico não diz como determinar, só na nota é que vem escrito "usar tecnologia". Pode-se correr o risco que as pessoas ao lerem o objectivo específico interpretem que primeiro os alunos têm de saber o que é mediana, quartis, desvio padrão e depois usem a tecnologia, e interpretem que é necessário dar a fórmula.

[PO] Tu achas que a fórmula acrescenta alguma coisa em termos da compreensão?

[SF] Não, eu tenho é terror que as pessoas o façam.

[PO] Não, esse é um dos casos em que a fórmula é completamente inútil, não acrescenta nada em termos da compreensão. Eu só estou a falar na compreensão porque o objectivo é compreender. No contexto do que está aí, acho que não se pode retirar a ideia de que para compreender a fórmula facilita. Na nota tivemos o cuidado de fazer uma redacção que evitasse essas ambiguidades: "para determinar o desvio padrão usar a tecnologia".

[SF] Na versão anterior, por exemplo, em relação aos casos notáveis, são aqueles que eu me lembro de maiores diferenças de abordagem, davam um exemplo dum polinómio factorizado, dizia "...não se deve ir mais além do que..." e isso para mim era claro como água, que o objectivo não é fazer coisas dum determinado tipo.

[PO] Tu achavas que seria mais claro se estivesse escrito: "Não usar a fórmula, mas ...

[SF] "Não se pretende o cálculo através da fórmula, deve-se recorrer à tecnologia". Aí era perfeitamente claro. Tal como ainda em relação ao mesmo tema acho que pode não ser muito claro qual é a diferença entre o que se pretende agora com a estatística no 3° ciclo e o que é estudado no 10° ano, no sentido que foram acrescentadas as medidas de dispersão e as distribuições bivariadas, etc., que me parece ser o âmbito do estudo da estatística no 10° ano. É evidente que eu imagino que seja a forma, a profundidade, as situações que se apresentam aos alunos, mas ao ler isto, a minha primeira reacção foi "Bolas, isto pode ser o 10° ano."

PO: Não, não pode. Tu já delimitaste.

[SF] Quando se acrescenta uma coisa, penso que ainda temos de ser mais cuidadosos, precisamente porque no 3° ciclo não há a experiência de tratar estes assuntos, a não ser que o professor fizesse algum projecto e, naquele ano, decidisse isto ou aquilo. Tem de haver um especial cuidado naquilo que se acrescentou para não ser interpretado "Ah! Isto era do 10° ano e agora passou para o 9°".

[PO] Pensámos naquilo que era fundamental na educação matemática básica actualmente e pareceu-nos que algum tratamento de dados bivariados fazia sentido e não ter apenas as medidas da chamada tendência central, mas ter alguma dispersão.

[SF] Eu achei positivo este acrescento, mas só no sentido dos alunos compararem amostras que têm as mesmas medidas de tendência central e serem capazes de dizer coisas diferentes em relação a essas amostras.

[PO] Os objectivos de aprendizagem que foram definidos não nos permitem colar isso ao que se faz no 10° ano.

[SF] Mas se as pessoas não lerem o documento todo...

[LS] Nós tivemos o cuidado de fazer um documento com 77 páginas, onde se concentram três ciclos, exactamente para não haver desculpas de as pessoas não poderem ler porque era um documento muito grande. A nossa ideia é que todos leiam tudo, inclusive os do 1° ciclo. Se estamos a falar de educação básica, a nossa preocupação não é o que eles dão no 10° ano. A nossa preocupação foi definir, no âmbito limitado que tivemos para fazer o reajustamento, o que era completamente fundamental para ser trabalhado na educação básica, foi essa a base de trabalho.

[SF] A geometria, na minha opinião continua a ser, infelizmente, o parente pobre do programa. Vou falar de um dos meus temas favoritos, as transformações geométricas e parece-me duas coisas: por um lado, o programa parece pressupor um conhecimento muito maior por parte dos professores do que aquele que eu considero que efectivamente existe e portanto, a introdução de novos termos como "congruente" e não "geometricamente igual", ou "eixo de reflexão" não é pacífica — as pessoas estão habituadas a falar em "eixo de simetria" e, por outro lado, agora há uma tentativa de um maior rigor. Não me parece que os professores vão logo dizer "Ah! Aquilo que eu chamava isto ou aquilo agora passou a ser....": Também me parece que nalguns momentos há alguma confusão no documento. Por exemplo, há uma identificação muitas vezes do eixo de reflexão com o eixo de simetria e nem sempre um e outro são a mesma coisa. Se os professores estão inseguros é ainda pior. As transformações geométricas antes eram muito mal tratadas porque apareciam quase uma por ano, ou uma por ciclo. Tinha muita esperança que fosse muito diferente agora, fiquei um bocadinho decepcionada. O programa parece dar a entender que é possível trabalhar frisos sem ter a noção de translação, quando é isso no fundo que os define. Tal como a rotação e a reflexão aparecem intuitivamente, parece-me que a translação — o deslize, no fundo — também deveria aparecer ao mesmo nível. Isso, infelizmente, não me parece ser assim e as translações, tão importantes nos frisos como nos padrões, aparecem só no 3° ciclo e associadas aos vectores, às operações com vectores, e à composição de translações, ou seja, uma ligação quase exclusiva à análise vectorial.

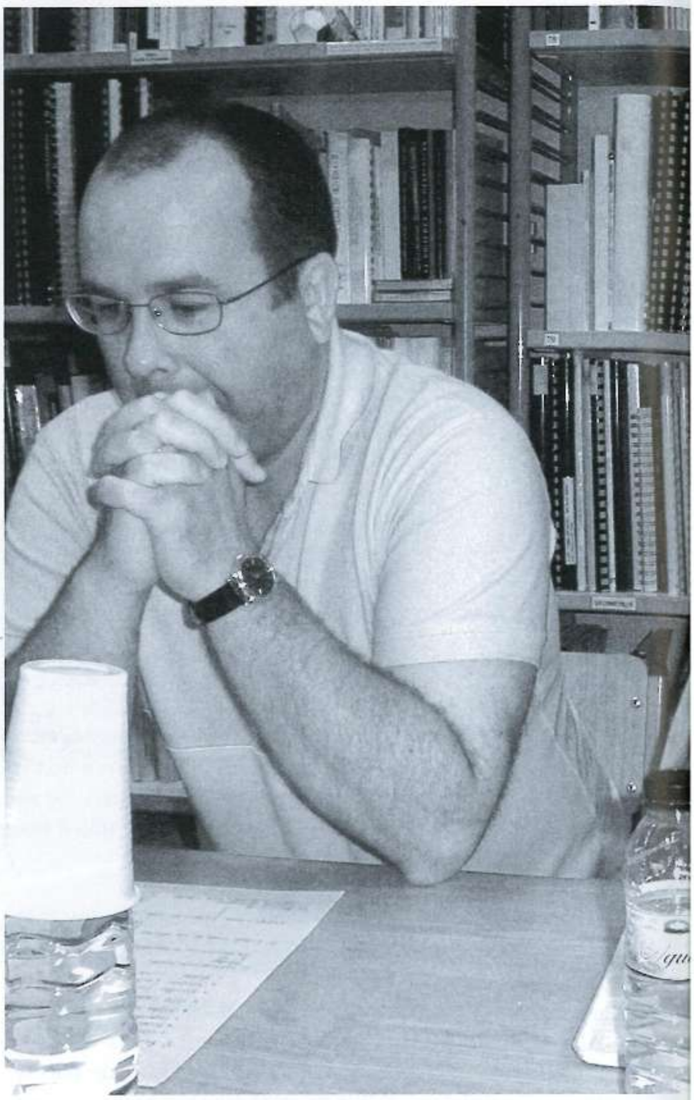
[LS] Nós aceitámos este trabalho na condição de haver materiais para os professores e está previsto que vai haver materiais, portanto, espero que haja formação. Um programa pode também ser uma forma de fomentar a necessidade de formação.

[FN] Eu acho que o grande ponto crítico está relacionado com a forma como o texto está escrito. Estão aqui pessoas que se interessam por estes assuntos, pensam sobre eles, e com muita facilidade vemos interpretações diferentes sobre uma mesma coisa. Ou seja, o grande ponto crítico tem a ver com a clareza deste texto e aquilo que as pessoas vão ler no texto, que é um problema usual da comunicação. Eu pessoalmente aprecio muito o facto de se ter tentado que a nível da terminologia esta se aproximasse de uma terminologia que considero mais correcta. Por exemplo, fazia uma confusão muito grande que os alunos estudassem os números inteiros e depois, ampliado esse conjunto, passavam a ser os inteiros relativos. Este reajustamento, como está, ainda não conseguiu resolver o problema da designação de "números decimais". A representação decimal existe, mas não o número decimal. Não sei qual foi a preocupação da equipa em perceber como é que os professores vão ler e perceber isto tudo. Por exemplo, voltando às notas. O que é que querem dizer com estas notas? Estão-me a dizer que devo usar esta metodologia? Estão-me a esclarecer acerca de uma definição? Nas notas aparece isso tudo. Eu não sou capaz de dizer como é que a maioria dos meus colegas professores interpretará, mas creio que poderá haver problemas.

[LS] Por exemplo, a questão do trabalho e do pensamento. A questão do trabalho com números pretende-se que seja muito mais que pensamento numérico... vai para além disso e como vai para além disso, achou-se que não fazia mal estar escrito dessa forma. O pensamento algébrico e o pensamento geométrico aparecem muitas vezes e o pensamento numérico aparece poucas vezes, mas para nós, a questão de trabalho com números — e porque discutimos muito sobre a questão do sentido de número e a compreensão das operações — vai para além do que teoricamente, se chama pensamento numérico, normalmente.

[EM] E como foi o funcionamento desta comissão de programas?

[LS] A forma de funcionamento desta comissão de programas com a anterior, acho que não tem comparação possível. A anterior teve três ou quatro anos para fazer sair os programas. Nós tínhamos um prazo de um ano, e nesta comissão, pela primeira vez, trabalharam em conjunto professores de três níveis de ensino, pessoas ligadas à didáctica da matemática e matemáticos. Que eu tenha conhecimento, não aconteceu nos anteriores programas. Foi uma opção pressionada pelo tempo que tínhamos, porque realmente tínhamos um ano, e nós fizemos questão que houvesse uma fase de discussão pública e aceitámos o trabalho nessa condição, pensando que era uma oportunidade de fazer o tal reajustamento que era necessário. Foi também nossa condição fazer outros materiais a ser disponibilizados aos professores e que me parecem fundamentais. Os materiais podem ser brochuras, ainda não está completamente definido. O que é facto é que há um compromisso da equipa no desenvolvimento de materiais de apoio ao programa. Para todos os ciclos.



[FN] Voltando aos pontos críticos. A extensão do programa. Fazer resolução de problemas, trabalhar a comunicação... como é que eu vou ter tempo? Os temas matemáticos não são uma coisa dispensável, mas a diferença não é nos conteúdos matemáticos e mais ainda, existindo as capacidades transversais, existe esse apelo para que elas sejam trabalhadas e isso é algo que leva tempo. Outro ponto crítico é a avaliação. A avaliação a colocada de forma muito positiva (avaliar o que os alunos sabem), mas temos de ter consciência que, com muita facilidade, o sistema de avaliação externa pode destruir e pôr isso em causa. A avaliação como

está proposta, é eminentemente formativa, e serve tanto para ajudar o aluno aprender como para o professor ensinar melhor. Agora se começamos com provas externas, será um ponto crítico. Outro ponto crítico é a gestão curricular da articulação entre ciclos. Vai ser necessária muita discussão. Por exemplo, no 2° ciclo, é mais ou menos unânime em termos da divisão que os alunos não chegam com o conhecimento do algoritmo usual e tradicional... como é que aqui a ponte entre ciclos?

[LS] A questão do algoritmo da divisão foi imensamente discutida, optou-se por, manter no 1° ciclo, mas nas indicações metodológicas do 2° ciclo, na articulação, fala-se em continuar as destrezas de cálculo. Isto é reconhecer que o trabalho com os algoritmos tem que continuar e não há mais a pressão dos professores do 2° ciclo dizerem: Mas tinham que saber fazer e não sabem! Agora tem de continuar a ser trabalhado no 2° ciclo. A questão dos algoritmos, eu reconheço que é uma questão complicada, porque é uma questão sobre a qual nós temos uma tradição que é muito limitada. Aqui aponta-se para uma aprendizagem com compreensão, é preciso tempo para compreender. Há aqui uma opção em relação aos números e operações nos dois primeiros anos de escolaridade que foi trabalhar só representações horizontais. Isso está explícito exactamente para não haver tentação de iniciar os algoritmos logo nestes anos, porque acreditamos que ao desenvolver estratégias de cálculo sobre as quatro operações é muito mais fácil depois continuar esse trabalho no 3° e 4° e então introduzir os algoritmos. Os algoritmos serão um assunto pertinente para incluir nas eventuais brochuras.

[FN] Não sei também quais serão as consequências da mudança de nomes para os professores — por exemplo, tratamento de dados e não estatística. Isto vai dificultar ou não o que vai ser o trabalho dos professores?

[LS] Só se mudou esse, basicamente. Os restantes são mudanças de pormenor. Em vez de números e cálculo optámos por números e operações, conscientemente. E com razões, existe uma grande ênfase na compreensão das operações, e portanto era preciso o título. E depois álgebra e funções, o que se trabalha ao nível das funções é tão pouco que não se justificava ter lá o nome, trabalha-se, essencialmente a álgebra no 3° ciclo. A questão de não haver álgebra no 1° ciclo, como tema separado, como era tão pouquinho não fazia sentido estar a separar. Assim, o que se trabalha mais directamente é com os números.

[PO] É preciso esclarecer o seguinte: o texto do reajustamento fixa a linguagem, os documentos complementares ampliam isso um bocado, com exemplos, alguma discussão, etc... e depois as pessoas entram naquilo que se chama o jogo da linguagem, pela sua prática, pela formação, pelas conversas, apropriam-se da linguagem... é assim que fazemos com tudo, não é?

[FN] Só para acrescentar que a articulação também tem a ver com a forma como os agrupamentos vão trabalhar.

[PO] Nós procurámos criar algumas condições para facilitar a articulação, uma delas é o documento estar estruturado como está. Por outro lado, nós já fazemos alguma articulação, embora isso não substitua o trabalho dos professores. Quando temos introduções aos temas e depois pontos de articulação com os ciclos, isto é importante, mas não esgota o trabalho que é preciso fazer. Mas, do meu ponto de vista, o grande desafio, é de facto o trabalho em estilo colegial. Eu diria que isso tem de ser uma forma de trabalho quase imprescindível, porque senão... Há muitas decisões a tomar na gestão e na articulação das coisas e portanto, as pessoas têm de trabalhar desta forma, porque se um professor trabalhar isoladamente vai ser difícil, por um lado, apropriar-se da lógica disto e, por outro, fazer as articulações que não são apenas as óbvias e gerir o programa de uma forma articulada.

[LS] Não faz sentido, com este programa, as pessoas trabalharem sozinhas. Mesmo quando se optou por pôr os dois primeiros anos e os dois últimos no 1º ciclo, continua a fazer todo o sentido gerir o currículo em conjunto. Isto é um grande desafio, porque há falta de hábitos de trabalhar em conjunto.

[EM] Querem fazer um comentário final? Vamos deixar os autores para o fim...

[PA] Aquilo que eu posso dizer é que de uma maneira geral acho esta proposta positiva. Gostava de ver algumas coisas melhoradas, gostava de ter tempo para discutir muito este reajustamento. Uma das coisas que acho que este documento poderia trazer de vantagem em relação ao anterior era uma clarificação, mas à medida que fui discutindo e analisando com mais pormenor acabei por me confrontar com coisas que ainda não estão esclarecidas. Aquilo que eu espero é que os materiais que se venham a produzir para acompanhar este programa não demorem tanto tempo como demorou este reajustamento e que sejam esclarecedores. E espero que mesmo com o tempo curto que temos para fazer algumas sugestões, que elas sejam feitas e acolhidas.

[FN] Eu queria acabar como comecei porque nestas coisas todas há sempre muitos pormenores, muitas questões que se levantam e convém pegar naquilo que é mais importante, que é não perdermos esta oportunidade para melhorar a aprendizagem matemática dos nossos alunos. Nesse sentido, parece-me essencial tentar, dentro daquilo que é possível, clarificar o texto. Espero que todo o trabalho à volta desta proposta seja um trabalho aturado e que permita a muitas pessoas irem-se apropriando dos princípios que aqui estão expressos.

[SF] Vou começar por voltar a salientar que é muito positivo não existir, e não vir a existir, um roteiro por ano, para dar liberdade na gestão do programa e que é crucial haver um apoio neste sentido, sob pena de se perder um dos aspectos que para mim são mais positivos nesta proposta. A minha crítica é sobretudo sobre o processo. Eu comecei logo por não entender a necessidade da equipa só ser conhecida quando é apresentada esta proposta para discussão, porque acho que há entidades em Portugal, como a APM e a SPM, que poderiam e deveriam ter dado um contributo. Já se falou que o prazo de discussão é curto. E ainda me parece que a discussão através de endereço electrónico não facilita a colocação de dúvidas.

[LS] Em relação a nós... Todos nós aceitámos este desafio com a perspectiva que o Fernando apontou, contribuir para melhorar as aprendizagens da matemática. Pensamos que até este momento o trabalho foi muito enriquecedor, pela composição da equipa, pela discussão que houve e, sobretudo, foi importante analisarmos os programas de outros países, tentar focarmo-nos nos conceitos — houve conceitos que discutimos e voltámos a discutir para sair o que está aqui. Um dos conceitos que foi imensamente discutido foi o sentido de número, por exemplo. Nós tentámos, não sei se conseguimos, que realmente este tipo de conceitos apareça de forma transversal ao programa e isto só foi possível porque a equipa era esta, não é por serem estas pessoas, era esta composição de pessoas diferentes. Agora temos grandes expectativas em relação aos contributos da discussão pública para melhorarmos a proposta, percebemos que o tempo não é o mais adequado, percebemos que há limitações, mas de qualquer forma fizemos muita força para que houvesse este espaço de discussão pública. Quanto ao secretismo da equipa, nós nunca fizemos segredo de qualquer um de nós, de qualquer forma nós achámos sempre que quem devia publicitar era a tutela. Voltando à questão que colocou o Pedro, que gostaria de ter tempo para discutir o documento com os professores, esta proposta poderá ficar com alguns defeitos porque não vai haver tanta discussão nesta fase, mas vai haver um período de tempo, que parece largo pelas questões legais, entre o documento estar pronto e ser colocado em prática. Eu acho que esse tempo vai ter de ser muito bem aproveitado por nós todos. É uma oportunidade para a matemática, e foi nesse sentido que nós a aproveitámos.

[PO] Eu queria só sublinhar a ideia que as questões de linguagem realmente são importantes e que a estrutura do documento também e nós tivemos o cuidado de fazer um documento que fosse consistente, bem articulado, diminuindo as possibilidades de ambiguidade em termos de linguagem, mas isso é uma questão inevitável. Queria só reforçar a ideia que a Lurdes transmitiu: temos expectativas, apesar das limitações do tempo. Percebemos que as pessoas já se têm estado a organizar para discutir o texto e, evidentemente, as boas sugestões vamos incorporá-las, não temos nenhuns pruridos quanto a isso.

[EM] Queríamos agradecer a vossa participação.

Será que os alunos compreendem o que lhes escrevem os professores?[1]

Leonor Santos
Sónia Dias

Neste artigo pretendemos relatar uma experiência levada a cabo no âmbito do projecto AREA[2] (Avaliação Reguladora no Ensino e Aprendizagem), que integra um grupo de investigadores, educadores de infância, professores do 1° ciclo e professores de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário. Os objectivos deste projecto são: desenvolver, implementar e avaliar formas de concretização de práticas avaliativas ao serviço da aprendizagem no 1° ciclo, em geral, e nos 2°, 3° ciclos e secundário em Matemática e construir um banco de bibliografia relativa à avaliação reguladora.

Este estudo, em particular, teve como objectivo perceber de que forma entendem os alunos o *feedback* escrito que os professores dão às actividades por si realizadas. O estudo incidiu em quatro grupos de trabalho de duas turmas de nono ano no ano lectivo 2005/2006, de uma Escola da Área Metropolitana de Lisboa. No artigo daremos a conhecer três destes grupos.

Feedback ou escrita avaliativa

A vertente formativa da avaliação das aprendizagens tem vindo a ganhar especial importância nas últimas décadas. Em particular, os normativos portugueses respeitantes à avaliação deixam muito claro este enfoque. É o caso do Despacho Normativo n° 1/2005 onde se pode ler que "a avaliação é um elemento integrante e regulador da prática educativa" (pt. 2) e um dos princípios enunciados aponta para a "primazia da avaliação formativa" (pt. 6).

Toda a regulação pedagógica faz-se através de um processo de comunicação, seja ele oral ou escrito. Neste segundo caso através de anotações, isto é recorrendo a uma escrita avaliativa ou *feedback*. Mas o dizer avaliativo não é sinónimo de regulação pedagógica. É apenas um primeiro passo. Corresponderá a um processo de regulação apenas quando o *feedback* é usado pelo aluno para melhorar a sua aprendizagem (Wiliam, 1999). É assim de chamar a atenção para que não é qualquer dizer avaliativo que garante uma acção de natureza reguladora.

Uma escrita avaliativa conducente à regulação por parte do aluno da sua aprendizagem, segundo Santos (2003), deve ser clara, para que autonomamente possa ser compreendida pelo aluno, apontar pistas de acção futura, de forma que a partir dela o aluno saiba como prosseguir, incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta, não incluir a correcção do erro, no sentido de dar ao próprio a possibilidade de ser ele mesmo a identificar o erro e a alterá-lo de forma a permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo (Nunziati, 1990; Jorro, 2000), identificar o que já está bem feito, no sentido de não só dar autoconfiança como igualmente permitir que aquele saber seja conscientemente reconhecido. Na mesma linha, Wiliam (1999), alerta para que o feedback pode contribuir para o aperfeiçoamento do desempenho dos alunos, e como tal para a sua aprendizagem, quando a escrita avaliativa é focada naquilo que é preciso ser feito para melhorar o desempenho e, em particular, quando são dadas indicações mais detalhadas sobre como proceder.

O momento certo para dar *feedback* parece também ser um aspecto crucial. Diversos estudos apontam que o *feedback* nunca deve surgir antes do aluno ter oportunidade para pensar e trabalhar sobre uma dada tarefa (Wiliam, 1999). Para além disso, deve incidir sobre situações em fase de desenvolvimento e ainda não sujeitas a qualquer tipo de classificação, para que o *feedback* possa ser considerado pelos alunos como útil. Num trabalho já acabado, não faz sentido qualquer reformulação. Este aspecto é tanto mais importante se atendermos a que dar *feedback* é muito exigente para o professor e é consumidor de tempo (Leal, 1992; Menino & Santos, 2004). Logo, há que escolher criteriosamente as situações de ensino e aprendizagem, as tarefas a comentar.

Proposta curricular

No final de Janeiro foi proposto aos alunos de duas turmas de 9° ano de escolaridade a realização de um trabalho de grupo sobre "A Evolução do Conceito de Número". Foi-lhes entregue um guião de trabalho por grupo e discutido os objectivos do trabalho, onde devia ser realizado, como ia ser avaliado e o tempo que tinham para o realizar. O trabalho seria realizado em grupo, nas aulas de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). O professor de TIC tinha também o guião dado aos alunos. Em relação à avaliação, foi-lhes explicado que a comunicação e organização matemáticas seriam os aspectos a avaliar pela professora de Matemática. Seriam também tidas em conta competências transversais a serem avaliadas pelo professor de TIC.

No final de Fevereiro, tal como combinado, os alunos entregaram o trabalho à professora de Matemática. Todos os alunos fizeram o trabalho.

Em Março, a professora entregou os trabalhos comentados aos alunos, mas não lhes divulgou as respectivas classificações. Foi-lhes dito que poderiam melhorar o trabalho. Cinco grupos de um total de dezoito não entregaram a segunda versão.

Na última aula do 2° Período, foi feita uma discussão em torno desta experiência e os alunos escreveram quais as vantagens e desvantagens para si e para a professora, ao fazer-se a avaliação nestes moldes. Os grupos de alunos estudados foram também entrevistados.

O *feedback* da professora

Quando os alunos entregaram a primeira versão do trabalho, a professora leu os trabalhos todos, fez comentários, assinalou erros, fez sugestões de extensão e identificou o não cumprimento do guião de trabalho.

Os comentários que mais escreveu foram: "Valor exacto?"; "Tem de ser melhor explicado"; "Muito texto/letra muito pequena para um slide"; "Qual deveria ser o último slide?", "Simbologia matemática?", "Capa completa?". Também assinalou os erros ortográficos. Utilizou um conjunto de simbologia para outros aspectos que necessitavam de melhoria. Por exemplo, "X" quando algo estava errado e tinha de ser mudado, uma "O" quando alguma coisa tinha de ser mudado (por exemplo quando eram utilizadas abreviaturas), um sublinhado em "cobrinha" quando a ideia estava certa, mas alguma coisa estava errada, ou a justificação, ou algum termo matemático, um "?" quando algo não se percebia, ou não fazia sentido. A professora classificou os trabalhos utilizando grelhas concordantes com o guião fornecido aos alunos.

O trabalho dos alunos

Grupo 1. Este grupo era composto por duas raparigas, uma com aproveitamento satisfatório e a outra não satisfatório, na disciplina de Matemática.

Quando a professora *assinala um erro e o corrige* na primeira versão do trabalho (isto acontece essencialmente nos erros ortográficos), as alunas introduzem as alterações na segunda versão do trabalho. Quando *o erro é assinalado, mas não é corrigido* nem sempre as alunas conseguem corrigir a informação na segunda versão. Se se trata de uma abreviatura, as alunas corrigem na segunda versão. Caso contrário, as alunas nem sempre conseguem alterar. Nesse caso optam por deixar a informação como estava na primeira versão, dado não saberem como alterar:

Lemos, mas não tínhamos percebido o que estava mal. Decidimos pôr de novo. Se tirássemos podia fazer falta. Se alterássemos podia ficar pior. Como não sabíamos o que devíamos alterar (...) Não sabemos qual é a informação que está correcta. Fomos consultar o livro mas não resultou. Também fomos ver os apontamentos. Eu sabia o que era, mas não conseguia explicar. (entrevista)

Uma cruz por cima do símbolo errado que as alunas usam para representar o número de ouro, faz com que percebam exactamente o que têm de mudar, mas não as ajuda a alterar, porque "Era o número de ouro que não encontrámos [o símbolo]. Tentámos procurar e não encontrámos. Pedimos ajuda ao professor de TIC".

Quando a professora assinala com uma "cobrinha" e um ponto de interrogação uma expressão específica, as alunas percebem o que está mal ou incompleto e conseguem alterar na segunda versão, como referem: "Falta dizer se era periódica ou não periódica. Acrescentámos isso na segunda versão".

Quando o *feedback* da professora *é assinalar o erro e dar pistas*, por exemplo quando escreve "simbologia?", ou assinala falta de informação, as alunas conseguem corrigir uns erros, mas não conseguem corrigir outros. Não conseguem alterar aqueles cuja correcção dependa da procura de mais informação, apesar de recorrerem a livros, Internet, apontamentos e ao professor de TIC. Por exemplo, quando a professora escreve "Valor exacto?", para que as alunas escrevam que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

as alunas não conseguem melhorar.

Em síntese, o *feedback* dado ao trabalho deste grupo nem sempre ajudou as alunas a corrigirem ou completarem o que fizeram. Quando não conseguem corrigir ou melhorar, optam, geralmente, por manterem a informação. Na sua opinião, "Se a professora explicasse como era. Podia ter uma nota a explicar o que estava errado, em vez de uma cruz". Parece-nos claro que, para este grupo, o *feedback* dado deveria incluir informações mais específicas do que se pretende, incluindo fontes de consulta apropriadas.

A adesão que as alunas expressam face a esta estratégia de trabalho é favorável, apresentando vantagens, quer para os alunos, quer para o professor:

Nós achamos que estes trabalhos de melhoramento de nota e este tipo de avaliação favoráveis, porque os alunos têm oportunidade de melhorar o que erraram no 1° trabalho, podemos entender melhor como a professora avaliou (graças às grelhas de avaliação) o nosso trabalho e darmos a nossa opinião acerca da nota e debatê-la com a professora, para no caso de existir algum erro podermos emendá-lo. Nós achamos que não existem lados negativos nestes trabalhos de melhoramento de nota e este tipo de avaliação a não ser o trabalho ser repetido em alguns aspectos tanto para o aluno como para a professora, a não ser a professora ter mais trabalho. Pelo lado da professora ela assim pode perceber melhor os aspectos dos alunos e a forma de como nós encarámos o trabalho. (balanço escrito)

Grupo 2. Este grupo era composto por duas raparigas com aproveitamento satisfatório/bom e bom/muito bom na disciplina de Matemática. Quando a professora *assinala um erro, mas não o corrige*, regra geral, as alunas conseguem corrigir a informação, independentemente da simbologia utilizada pela professora: bola à volta, bola e ponto de interrogação, cruzes ou traço por baixo. Quando as alunas na primeira versão do trabalho escrevem "grupo dos números reais" e "os números racionais formam um grande conjunto finito", a professora faz uma bola à volta das palavras "grupo" e "finito" e marca uma cruz. Tal simbologia parece ser suficiente para que as alunas compreendam o que se pretende:

Inv.: "Como é que vocês sabiam que bastava assinalar ali a palavra (...)?

A.: O conjunto dos números reais e não o grupo dos números reais (...) era conjunto infinito e não finito (...) percebemos logo (...), aí foi falta de atenção. (entrevista)

Quando a professora *indica falta de informação*, as alunas conseguem completar o texto. Por exemplo, a professora escreve "Capa completa?", as alunas completam a capa na segunda versão com todos os elementos pedidos. O *feedback* dado permite assim chamar a atenção para a necessidade de conhecimentos que as alunas já possuíam, mas não tinham aplicado, como nos explicam:

A.: Faltava a disciplina, o nome da professora, e os nomes completos.

Inv.: Quando vocês vêem aqui este comentário "capa completa?", este comentário não vos diz o que é que falta.

A.: Não, mas

A.: Como já tínhamos feito outros trabalhos, víamos que faltavam aí coisas (...)

Inv.: Então este comentário foi suficiente para vocês perceberem o que tinham de melhorar, é isso?

A.: Foi. . (entrevista)

Noutra situação em que a professora assinala falta de informação, escrevendo "Valor exacto?", para que as alunas escrevam que

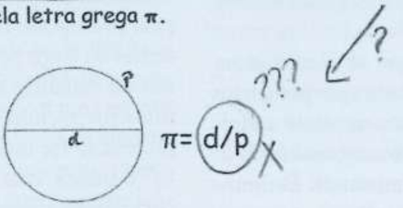
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

as alunas entendem o que se pretende e conseguem melhorar, pois dizem-nos "(...) quando a stora escreveu isto fomos pesquisar melhor na Internet e vimos". Quando as alunas se referem à numeração romana e árabe, a professora escreve: "Qual era a principal diferença entre a numeração romana e a árabe?". As alunas explicam:

Aqui tínhamos uma sugestão da professora que nós fomos pesquisar um bocadinho e também algumas coisas que sabíamos, e

Figura 1.

Na matemática o Pi é um número irracional, que resulta da divisão do comprimento de uma circunferência (perímetro) pelo seu diâmetro. É representado pela letra grega π.



desenvolvemos essa sugestão (...) Fomos a um livro (...) Fomos ter com ela [professora] porque estávamos com algumas dúvidas, e depois ficámos a perceber o que era. (entrevista)

O *feedback* dado ao trabalho deste grupo ajudou as alunas a corrigirem ou completarem o que fizeram. No final da entrevista, quando se pergunta se algum comentário lhes tinha criado confusão, as alunas respondem "Não, eu acho que foram todos claros". Fazem recurso ao que sabem, a livros, à Internet e à professora. Pode dizer-se que é um caso de sucesso.

A adesão que as alunas expressam face a esta estratégia de trabalho é incondicional, apresentando vantagens, quer para os alunos, quer para o professor:

As vantagens que nós encontramos ao fazer este tipo de avaliação, para nós são: o facto de percebermos os erros que damos e podermos tentar a forma correcta de os resolver, apercebermonos onde temos dificuldades e ajudar-nos em futuros trabalhos. Não encontramos nenhuma desvantagem porque revela interesse e empenhamento da nossa parte para melhorar a nossa nota. Para a professora as vantagens que encontramos são: o facto de os alunos darem a sua opinião face aos seus trabalhos, que permite à professora ter uma noção de como os alunos se auto-avaliam. (balanço escrito)

Grupo 3. Este grupo era composto por duas raparigas, uma com aproveitamento bom e outra pouco satisfatório, na disciplina de Matemática. Quando a professora *assinala um erro e o corrige* na primeira versão do trabalho (isto acontece essencialmente nos erros ortográficos), as alunas corrigem a informação na segunda versão do trabalho. O mesmo não acontece quando *o erro é assinalado, mas não é corrigido*. Reparámos que este grupo se distingue dos outros pois por regra, uma observação da professora dá origem ao corte da informação assinalada, independentemente da simbologia utilizada pela professora. Por exemplo, num parágrafo, as alunas escrevem como se vê na figura 1.

Perante a simbologia da professora, as alunas fazem desaparecer toda esta informação da segunda versão. A razão que as levou a tomar esta decisão parece estar relacionada com o desejo de não incluírem erros no trabalho, como nos explicam:

Inv.: Vocês leram essas anotações que a professora escreveu, o que é que na vossa cabeça...?

A.: Não era a forma de calcular o PI de uma circunferência e então cortámos.

Inv.: Estavas a dizer que foram vocês que fizeram o desenho...

A.: E como não tínhamos a certeza que estava bem e depois a stora pôs que estava mal, nós pensámos que...

Inv.: Estava mesmo mal.

(...)

A.: Portanto, mais uma vez cortámos. (entrevista)

Quando o *feedback* da professora *é assinalar o erro e dar pistas*, nem sempre as alunas conseguem melhorar; só o conseguem se a pista for muito directa. Por exemplo, quando as alunas escrevem "raiz quadrada de 2" e "Phi", a professora escreve "Simbologia". Nestes dois casos as alunas percebem e substituem por "$\sqrt{2}$" e "ϕ", respectivamente. No entanto, mais à frente, as alunas escrevem como se vê na figura 2.

Mais uma vez, perante a simbologia da professora, apesar de ser dada a pista do que deve ser feito, este excerto desaparece na segunda versão. Na entrevista as alunas referem "A professora escreveu transformar numa regra de 3 simples, e nós tentámos e foi complicado, porque transformar...".

Assim, quando são dadas pistas, só as de menor grau de dificuldade nutrem o efeito pretendido. As alunas não conseguem clarificar as dúvidas que o *feedback* lhes provoca. Não procuram outras vias que não as primeiras fontes. Quando não conseguem corrigir, a opção é quase sempre re-

Figura 2.

Baseia-se no seguinte principio:

"Seccionar um segmento de recta de tal forma que a parte menor esteja para a maior como esta está para o todo."

→ Transformar numa regra de 3 simples!

$$\underbrace{a \qquad b}_{a+b}$$

O número de ouro vai ser a razão entre A + B X

tirar a informação assinalada. Na sua opinião, "talvez uma anotação para o lado a dizer que estava certo o raciocínio ou a forma escrita estava correcta, mas estava mal aplicada" pudesse ajudá-las. Contudo, o *feedback* é útil tanto para os alunos como para o professor, e constitui uma oportunidade de perceber e corrigir os erros:

Na nossa opinião esta forma de avaliação, de podermos melhorar os trabalhos ajuda-nos muito pois, através disso, conseguimos perceber onde errámos, a fim de não voltarmos a repetir. Também ajuda os professores pois, através disso, conseguem perceber se os alunos compreenderam o trabalho para conseguirem melhorar os erros. (balanço escrito)

Conclusões

Comentar uma primeira versão de um trabalho e dar oportunidade de a melhorar é visto por todos os alunos deste estudo como um tipo de avaliação que contribui para aprendizagem. Contudo, a evolução da primeira para a segunda versão do trabalho não foi a mesma para os três grupos de alunos, nem o mesmo tipo de comentário recebeu igual resposta por parte destes.

Quando a professora *assinala um erro e o corrige*, na maioria dos casos os alunos corrigem esse erro na segunda versão. Quando a professora *assinala o erro* utilizando uma simbologia, os alunos interpretam-na como algo que está mal. Mas as acções desenvolvidas são diferentes. Para alunos com bom desempenho a Matemática, a simbologia é suficiente, pois funciona como uma chamada de atenção que os faz mobilizar conhecimentos para melhorarem o produto na segunda versão. Para alunos com desempenho médio, a simbologia não chega para corrigirem a informação errada. No entanto, uns deixam-na ficar, apesar de saberem que está errada, pois têm receio que, ao retirarem a informação, o trabalho perca coerência, outros eliminam toda a informação assinalada como incorrecta.

Quando a professora *assinala o erro e dá pistas*, o facto de os alunos conseguirem ou não melhorar, também parece depender do tipo de pistas. Se a situação é utilizar um símbolo matemático em vez de uma descrição, em regra basta escrever "Simbologia?" para os alunos alterarem. Quando a professora dá uma pista explícita, por exemplo "transformem numa regra de 3 simples", os alunos nem sempre conseguem alterar, apesar de admitirem que pesquisaram.

Quando o *feedback* dado aos alunos vai no sentido de *assinalar falta de informação*, também o sucesso depende do tipo de alunos. Quando a professora assinala que a capa está incompleta ou que falta o valor exacto do número de ouro, alunos com bom desempenho a Matemática completam correctamente a capa e encontram o valor pedido; alunos com desempenho médio a Matemática fazem alterações na capa, mas insuficientes e, apesar de afirmarem que procuraram a informação em falta, não conseguem encontrar, e portanto não melhoram.

Em síntese, este estudo evidencia que dar *feedback* com potencialidades reguladoras é uma tarefa ainda mais exigente do que inicialmente pensávamos. Perante uma mesma produção, o *feedback* provavelmente terá de ser diverso, isto é, o professor não pode limitar-se a procurar compreender o raciocínio desenvolvido, mas deve igualmente pensar no que têm de específico aqueles alunos a quem se dirige o seu comentário. Este estudo parece indicar que alunos com desempenho médio a Matemática necessitam de um feedback mais descritivo e menos simbólico. Esta orientação é tão mais importante quanto ao facto de estes alunos tendencialmente não recorrerem ao professor para esclarecerem algum *feedback*, enquanto que alunos com um bom desempenho a Matemática, para além de usarem mais fontes de informação do que as iniciais, procuram também o professor para necessários esclarecimentos.

Evolução do Conceito do Número

O trabalho que vão iniciar deve ser realizado em grupo, nas aulas de TIC. No entanto, podem e devem recorrer a diverso material para pesquisa.

Composição do trabalho

- Capa
- Índice
- Introdução
- Desenvolvimento
  - Evolução do conceito de n°
  - Os números irracionais
  - π (pi) e ϕ (número de ouro)
  - Richard Dedekind (1831-1916)
- Conclusão
- Bibliografia
- Competência a avaliar

Formas de apresentar o trabalho

- Formato *papel* (conforme composição referida ao lado)
- Formato *PowerPoint* (o 1° *slide* funcionará como capa; o 2° *slide* funcionará como índice, tendo cada assunto um *link* para o *slide* correspondente)
- *Outra* (deve ser sempre adaptado de forma a conter todos os elementos da composição referida ao lado)

Competência específica a avaliar:

- Comunicação e organização matemáticas
  - Recolhem informação relativa a uma situação
  - Seleccionam informação previamente recolhida
  - Organizam informação previamente seleccionada
  - Utilizam vocabulário científico na expressão
  - Utilizam simbologia matemática

Competências transversais a avaliar:

- Relacionamento interpessoal e de grupo
  - Contribuem para a criação de um ambiente de trabalho favorável
- Métodos de trabalho e de estudo
  - Cumprem prazos
  - Cumprem com as tarefas propostas
  - São criativos

Notas

1 Um texto mais desenvolvido deste artigo encontra-se publicado nas Actas do ProfMat2006.

2 Projecto financiado pela FCT, n° PTDC/CED/64970/2006. Para mais informação, consultar o *site* `http://area.fc.ul.pt/`.

Referências

Despacho Normativo n° 1/2005, Diário da República, 3 Série I–B, de 5 de Janeiro de 2005, pp. 71–76.

Jorro, A. (1996). Pour une culture plurielle de l'évaluation: entre usages et archétypes. *Mesure et évaluation*, *19*(2), 5–21.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular.* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2° ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 271–291). Lisboa: APM.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques*, 280, 47–64.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, *74*, 16–21.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8–11.

Leonor Santos, UL, DEFCUL, CIE

Sónia Dias, EBI da Charneca de Caparica

A Matemática nos jornais, pelas melhores razões

1990, VIII Final Nacional das Olimpíadas de Matemática, que boas recordações...

Esta Final decorreu na nossa Escola e o Zé Pedro Coelho, na época aluno do 12º ano, fazia parte da comissão organizadora local, pela sua experiência de finais. É que o Zé Pedro tinha sido um dos vencedores da categoria B na final das VII Olímpiadas e integrado a primeira representação portuguesa em Olimpíadas Internacionais de Matemática, as XXX, realizadas na ex RFA.

Estava a *jogar em casa* mas não foi por isso e sim por mérito próprio que ficou no grupo que representou Portugal nas Olimpíadas Internacionais desse ano que se realizaram na China, o que para a nossa comunidade foi um facto marcante.

Tínhamos algum orgulho em ter sido a primeira vez que se realizavam finais numa escola secundária e aprimorámos a organização com uma exposição aberta à comunidade. Era com muito entusiasmo que os alunos e professores desta Escola se envolviam nesta iniciativa da Sociedade Portuguesa de Matemática, pois privilegiávamos a resolução de problemas e o raciocínio matemático, numa altura em que os programas mecanicistas estiolavam e se trabalhava muito à base de exercícios repetitivos para automatizar processos.

Na época, pouco destaque havia nos jornais destas efemérides. O destaque era sempre para os nossos maus resultados quando chegávamos ao confronto com alunos de outros países (o que provaria a tal inépcia...), misturando com os maus resultados nos exames. Ainda bem que se vai impondo uma imagem e que surgem notícias como estas *Portugueses no pódio das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática*. Estes jovens são muito bons a pensar, mas a matéria-prima sempre existiu. Na altura os jovens trabalhavam quase sozinhos, resolviam tudo o que lhes aparecia à frente, mas tinham dificuldades em competir com outros, como os chineses, que passavam por períodos longos de treino, apoiados pelas instituições. Hoje, o projecto Delfos preenche essa lacuna em Portugal e está de parabéns pelo trabalho que tem realizado.

Mas, se participar na Final das Olimpíadas é só para uma *elite*, o prazer de resolver problemas não tem de o ser e alguma coisa se tem feito para democratizar esta actividade. A adesão das nossas crianças e jovens noutro tipo de concursos envolvendo Matemática tem sido massiva.

Afinal somos um povo com apetência para a dita?

Durante alguns anos, a resolução de problemas estava presente nos concursos, problemas do mês, problemas da semana, ... na escola, mas fora da sala de aula. Actualmente, os programas e as orientações curriculares apostam na resolução de problemas para desenvolver o raciocínio e a comunicação de todos os alunos.

"Esta vitória tem para nós o mesmo significado que haver medalhados nos Jogos Olímpicos", desabafa Paula Oliveira da Comissão Organizadora, sobre um país que não percebe o valor da disciplina. "A matemática é uma nova profissão e cheia de saída. Um matemático pode ocupar muitas carreiras: é alguém que pensa bem e tem uma enorme preparação mental".

E como se passa esta mensagem, se a nota de entrada no curso de Matemática da Universidade de Lisboa foi a segunda nota mais baixa (10,05)? Porque não optam por este curso os alunos com um percurso escolar considerado de sucesso, com bons desempenhos escolares, nomeadamente a Matemática? Não optam os alunos, nem muitos pais nem outros actores sociais e educacionais aconselham e até consideram um *desperdício* se é um dos alunos que não engrossa as estatísticas do insucesso em Matemática.

Que as medalhas actuais de João Guerreiro, João Matias e Vasco Moreira sejam um incentivo para todos os alunos Portugueses.

Isabel Rocha e Manuela Pires

Portugueses com melhor resultado de sempre nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática

Marta Ferreira dos Reis

● É o melhor resultado de sempre para Portugal, à 22.ª edição das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática. Uma medalha de ouro para João Guerreiro, prata para João Matias e bronze para Vasco Moreira. Arrecadaram pontos suficientes para os três lugares do pódio, numa iniciativa que reúne anualmente jovens génios da Matemática de 23 países.

Poderão ter passado despercebidos, mas até amanhã vão andar pelas ruas da cidade de Coimbra. As Olimpíadas Ibero-Americanas decorreram pela primeira vez em Portugal, com a participação de cerca de 90 crânios da Matemática, com idades entre os 15 e os 19 anos, apurados entre os melhores dos seus países. A iniciativa foi organizada pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, em conjunto com a Sociedade Portuguesa de Matemática, e valeu a Portugal a primeira medalha de ouro numa competição internacional.

Aos 17 anos, o grande vencedor português não se lembra do momento exacto em que começou a gostar de Matemática, mas tem um percurso exemplar. Participou nas primeiras olimpíadas nacionais no 9.º ano e agora, em vésperas de entrar para a faculdade, guarda várias prémios nacionais e duas medalhas de bronze em compe [illegible]

Ao todo [illegible] nove hora [illegible] das por du [illegible] os alunos t [illegible] blemas m [illegible] difícil que [illegible] sexto e úl [illegible] resolver. "Os problemas não exige[illegible] conhecimentos universitários, mas sim reflexão", diz Paula Oliveira, presidente da comissão organizadora, que quer desmistificar o preconceito que existe em relação aos "crânios": são pessoas normais, naturalmente com uma apetência especial mas com os mesmos desejos, brincadeiras e o humor de qualquer jovem.

"A Matemática estimula as pessoas a aprender mais, a estudar e a desenvolver as suas capacidades", diz João Matias, o rapaz que ganhou prata nesta selecção da Matemática.

[illegible]zação portugue- [illegible]ês portugueses [illegible]a do bolo para o [illegible]atemática da Uni[illegible]bra, que desde [illegible]ojecto *Delfos*, o [illegible]cado à prepara- [illegible] as competições associadas à Matemática e que quer [illegible]lmatar as deficiências ao nível do en[illegible]ino da disciplina.

"A Matemática estimula as pessoas a aprender mais, a estudar e a desenvolver as suas capacidades", diz João Matias, o rapaz que ganhou prata nesta selecção da Matemática.

In Público, 15 de Setembro de 2007.

CEFs — Sentido e Emoção na Matemática

Os Cursos de Educação e Formação de jovens têm como objectivo a recuperação dos défices de qualificação escolar e profissional da população portuguesa jovem, através da aquisição de competências escolares, técnicas, sociais e relacionais, que lhes permitam o acesso a desempenhos profissionais mais qualificados. Estes cursos pretendem contribuir para a formação de jovens em situação de abandono escolar e em transição para a vida activa, nomeadamente dos que entram precocemente no mercado de trabalho com níveis insuficientes de formação escolar e de qualificação profissional. Estes são os objectivos preconizados pelo Ministério da Educação para os cursos vulgarmente designados por CEF. É a alternativa para alguns alunos, mas pode tornar-se num grande problema para os professores, por isso, resolvemos divulgar a nossa experiência, por sinal, bastante positiva.

No ano lectivo 2006/2007, a Escola Secundária da Moita acolheu, pela primeira vez, este tipo de cursos. Para sermos mais precisos funcionaram 3 turmas do Curso tipo 2, Curso Técnico Comercial, e 2 turmas do Curso tipo 5, Curso Técnico Instalação e Manutenção de Sistemas Informáticos. Tratando-se de alunos que apresentam perfis diversos no que respeita à heterogeneidade (idade, comportamento, nível e percurso escolar), revelou-se imprescindível a uniformização de critérios de actuação relativamente ao comportamento/ atitudes destes jovens.

No início do ano lectivo, os alunos acusavam desintegração social e dificuldades ao nível da capacidade de concentração e de perseverança na realização das actividades lectivas, bem como limitações na assumpção das responsabilidades individuais, factores condicionadores do seu desempenho. As dificuldades ao nível da expressão oral e escrita constituíam, também, limitações acrescidas. Assim, desde o início, foi necessário adoptar estratégias pedagógicas diversificadas conducentes à integração e ao sucesso destes jovens. Algumas passaram pela simples aprendizagem da forma de estar na sala de aula e pela sensibilização para a necessidade de se fazerem acompanhar dos materiais imprescindíveis a uma participação activa nas tarefas escolares.

Nas diferentes turmas, e perante o conjunto que descrevemos, confrontámo-nos com alunos cujo historial era de insucesso na disciplina de Matemática. Assim, desde logo, sentimos que se tornava indispensável adaptar o programa da disciplina de Matemática Aplicada às características peculiares destes jovens.

Atendendo a que, em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, a matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania, procurámos que a disciplina de Matemática Aplicada assumisse uma forma necessariamente muito concreta e ligada à realidade.

Na nossa prática lectiva assumimos uma atitude firme mas simultaneamente de compreensão, de modo a promover o envolvimento dos alunos nas actividades propostas. Associando as novas tecnologias, os alunos realizaram predominantemente tarefas de interpretação e modelação de situações reais.

Por exemplo, a turma D do 8° ano, no âmbito do módulo 8 — *Geometria Intuitiva* — efectuou um trabalho denominado *A Escola Secundária da Moita por Formas Geométricas*. Os alunos começaram por fotografar objectos nos espaços exteriores/ interiores da escola e identificar as suas formas geométricas. De seguida, com o recurso aos computadores, realizaram todo o trabalho necessário à produção de um filme.

Com este trabalho foi possível observar o importante reforço da motivação e da autoconfiança dos discentes. Assim, do ponto de vista da professora e dos alunos, esta actividade revelou-se bastante profícua, uma vez que permitiu a apreensão e consolidação, de forma lúdica e agradável, dos conteúdos abordados no tema em estudo. Os alunos adquiriram competências matemáticas para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação e ficaram aptos para classificar e definir poliedros de uma mesma família.

No 11° ano, no módulo 21 — *Funções Polinomiais*, os alunos trabalharam actividades de modelação através da recolha de dados a partir de CBR e CBL e do site[1] do INE (Instituto Nacional de Estatística). Com estes dados procuraram as funções adequadas à situação tratada por cada um dos grupos de alunos e criticaram os resultados obtidos. O recurso às tecnologias foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que permitiu o rápido tratamento da informação, através de ferramentas como a folha de cálculo e outras onde era possível a alteração de parâmetros nas funções encontradas, para melhor ajuste das rectas e curvas obtidas. Os alunos tiveram oportunidade de adquirir a competência matemática para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais, utilizando diversos tipos de funções e adquiriram igualmente competências de interacção e participação social.

Estas práticas lectivas caracterizaram-se por uma atitude de abertura e de aceitação relativamente ao que os alunos eram capazes de concretizar. Mais do que implementar o programa de Matemática Aplicada como uma listagem de conteúdos a leccionar, a preocupação centrou-se no desenvolvimento de competências, de uma forma integrada e apoiada, com o objectivo de aprender a reconhecer na Matemática o papel fundamental que esta desempenha no mundo que nos rodeia.

É de referir que o trabalho realizado com estes alunos foi evoluindo de forma positiva ao longo do ano lectivo, em função da melhoria verificada na sua forma de estar na sala de aula e do desenvolvimento de actividades de carácter prático, adequadas às suas características. Desta forma, foram atingidos, com sucesso, os objectivos propostos para a disciplina e alterada a visão da matemática, que os alunos tinham inicialmente, algo abstracto e sem qualquer ligação com a realidade.

Nota

1 http://www.ine.pt/portal/page/portal/PORTAL_INE/Publicacoes?PUBLICACOESpub_boui=5921019&PUBLICACOESmodo=2

Fernanda Velez
Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

Sou professora há 12 anos e gosto muito do que faço. Desde sempre que tenho convicções relativamente ao papel que devo ter no ensino da Matemática e confesso que essas convicções têm vindo a sofrer reajustes ao longo da minha carreira profissional.

Embora a realidade escolar esteja a mudar a passos largos, essas mudanças nunca me fizeram desistir de investir na minha formação contínua como forma de poder oferecer aos meus alunos novas formas de aprender matemática.

Tenho consciência de que não posso parar no tempo. Este meu esforço pessoal, muitas vezes com penalizações para a família, tem de ser recompensado de alguma forma. Sou exigente! Exijo dos meus alunos trabalho, rigor e seriedade na aprendizagem da Matemática. E como tanto as crianças, como adultos me dizem: "Continue assim!" Dificilmente mudarei!

Hoje o que se pede a um professor de Matemática? Que diversifique os instrumentos de avaliação, que use as tecnologias, que desenvolva tarefas de investigação/exploração com os seus alunos, que resolva problemas, que dinamize projectos na escola, que crie planos de acção para colmatar o insucesso a Matemática, que seja reflexivo, etc..

Considero que sou um pouco de tudo isto, e que muito trabalho me dá ser assim. Mas este ano lectivo, o facto de ter sido seleccionada para classificadora das provas de aferição de 6° ano fez-me questionar muita coisa. O que ando eu aqui a fazer? Ser exigente para quê? Pedir rigor na aprendizagem da Matemática com que fundamento? Diversificar práticas com que objectivo, quando se pretende que, no final de um 2° ciclo, um aluno apenas saiba uma operação inversa ou inicie a resolução de um problema com um raciocínio que depois de desenvolvido até nem leva à resposta correcta e seja premiado por isso?

É sem dúvida desmotivante para um professor criar práticas lectivas que exijam dos alunos o desenvolvimento de competências no âmbito da matemática e depois ver que a avaliação externa que se faz tem um grau de dificuldade mínimo e que os alunos são premiados apenas pelo facto de "respirarem". Saber Matemática é isto?

Vejamos um exemplo. Um dos problemas da prova de aferição deste ano tinha um conjunto de moedas que o aluno tinha que distribuir de igual forma por quatro meninos. Um aluno que distribuísse três quantias iguais, mesmo usando moedas não contempladas nos dados do problema, já era premiado com código. Ora, do meu ponto de vista, este tipo de resolução só demonstra que o aluno não sabe utilizar os dados de um problema para o resolver, nem tão pouco sabe ser crítico.

Depois de analisar e reflectir acerca das capacidades a avaliar, expressas num documento existente na Internet na página do GAVE, relativamente à resolução de problemas, ao raciocínio e à comunicação matemática, onde se pretende que um aluno consiga, por exemplo, "*interpretar e criticar resultados dentro do contexto de uma situação*", acerca de algumas das respostas dadas pelos alunos e dos critérios de correcção que me obrigaram a seguir rigidamente, só me posso questionar e pôr em causa o porquê de todo o meu trabalho.

Noto alguma incoerência entre o que se pretende avaliar e o que na realidade se avalia. Por isso, algo tem de mudar, só não percebi ainda o quê! Sou eu que estou a agir mal nisto tudo?

Voltando às minhas convicções, penso que o grau de exigência no ensino deve aumentar para que possamos ser mais competitivos, os alunos devem ser mais responsabilizados pela sua aprendizagem, bem como os pais e encarregados de educação.

A avaliação externa deve passar a ter implicações na aprovação ou não aprovação dos alunos no final de cada ciclo, devendo por isso, ser repensada e discutida com os professores para que exista coerência entre o que se ensina e o que se avalia externamente no final de cada ciclo.

Renata Carrapiço
Escola EB 2, 3 Padre Vitor Melícias

Um por um no "Um contra todos"

No número 84 da revista *Educação e Matemática*, Lina Brunheira faz uma proposta de trabalho interessante envolvendo o concurso *Um contra todos* que passa diariamente na RTP1. Também nós já tínhamos pensado qual seria a melhor estratégia e qual a maior quantia que o concorrente poderia arrecadar. A proposta que é feita na revista é de um trabalho experimental, com a máquina de calcular e paciência. Quem fez as experiências já percebeu que o melhor mesmo é derrotar um adversário em cada jogada. O que nos propomos agora é demonstrar que é mesmo assim. A demonstração é bastante simples e pensamos que pode ser feita com os alunos do ensino superior. Recordemos as regras do jogo:

1. Em cada jogada há uma pergunta que deve ser respondida independentemente pelo jogador e por cada um dos adversários;
2. O jogador perde se errar uma pergunta e acaba o jogo;
3. Em cada jogada há um máximo de 12500 euros que podem ser ganhos pelo jogador;
4. Cada adversário que não acerta uma pergunta sai definitivamente do jogo, pelo que o número de adversários vai diminuindo à medida que o jogo avança;
5. Em cada jogada, o jogador ganha proporcionalmente ao número de adversários que não acertam. O valor de cada adversário é 12500 euros a dividir pelo número de adversários em jogo;
6. Se, numa jogada, todos acertarem passa-se à jogada seguinte sem perdas nem ganhos;
7. Numa determinada jogada (uma única vez) o jogador pode decidir que os seus ganhos vão ser a dobrar;
8. Se o jogador não souber uma resposta pode comprar o direito a continuar perdendo 25, 50 ou 75% do que já acumulou e claro que não ganha nada independentemente do número de adversários que falharem.

Vejamos agora como traduzir tudo isto numa expressão matemática.

Na jogada inicial há 50 adversários, valendo cada um 250 euros

$$(50 \times 250 = 12500).$$

Se x_1 adversários falharem a resposta e o jogador acertar, este recebe 250 x_1 euros.

Na segunda jogada já só há $50 - x_1$, adversários, por isso cada um deles vale $12500/(50-x_1)$ euros. Neste ponto, se x_2 adversários falharem e o jogador acertar, ele recebe mais $12500/(50-x_1)x_2$ euros. E assim por diante até falharem todos os adversários, altura em que o jogador ganha o total acumulado.

Como pretendemos determinar qual o montante máximo que o jogador pode receber e qual o processo que conduz a esse máximo, vamos supor que:

1. O jogador acerta sempre (se falhar o jogo acaba e ele não recebe nada);
2. Em cada jogada há pelo menos um adversário que falha (pois se nenhum falhasse o jogador não recebia nada e tudo se passaria como se a jogada não tivesse acontecido);
3. O jogador nunca compra o direito a continuar (caso contrário não receberia a quantia máxima);
4. A jogada em que decide dobrar os ganhos é a última (na última jogada o jogador ganha sempre 12500 euros seja qual for o número de adversários ainda em jogo, uma vez que todos falham a resposta).

Com base nestes pressupostos, podemos afirmar que o número de jogadas é, no máximo 50, situação que corresponde a falhar um adversário em cada jogada.

Definição das variáveis:

$k \rightarrow$ número de jogadas, no máximo 50;

$x_i \rightarrow$ número de adversários que falham na jogada i $(i = 1, ..., k)$;

$y_i \rightarrow$ número de adversários em jogo na jogada i $(i = 1, ..., k)$.

Restrições do problema:

$x_i \le y_i$ $(i = 1, ..., k)$ não podem falhar mais do que os que estão em jogo;

$y_1 = 50$ (número de adversários na jogada inicial);

$x_k = y_k$ (o jogo acaba quando todos os adversários falham).

Total dos ganhos:

$$\frac{12500}{50}x_1 + \frac{12500}{y_2}x_2 + L +$$

$$+\frac{12500}{y_{k-1}} + 2 \times \frac{12500}{y_k}x_k =$$

$$= 12500 \times \sum_{i=1}^{k-1} \frac{x_i}{y_i} + 25000.$$

Como todas as parcelas estão multiplicadas pela mesma constante e a última parcela é fixa, o problema pode então ser formulado:

Maximizar

$$z = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{x_i}{y_i}$$

com

$$\begin{array}{ll} y_1 = 50 & \\ k \le 50 & \\ x_i \le y_i & (i = 1, ..., k-1) \\ y_{i+1} = y_i - x_i & (i = 1, ..., k-1) \\ x_k = y_k & \\ x_i > 0, y_i > 0 & (i = 1, ..., k) \\ x_i, y_i \text{ inteiros} & (i = 1, ..., k) \end{array}$$

Como $y_{i+1} < y_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, o valor de cada adversário, $12500/y_i$, aumenta à medida que o jogo avança.

É claro que as variáveis y_i podem ser calculadas à custa das variáveis x_i como se mostra a seguir:

$$y_1 = 50$$

$$y_2 = y_1 - x_1 = 50 - x_1$$

$$y_3 = y_2 - x_2 = 50 - x_1 - x_2 =$$

$$= 50 - (x_1 + x_2)$$

$$\vdots$$

$$y_{i+1} = y_i - x_i =$$

$$= 50 - \sum_{j=1}^{i-1} x_j - x_i =$$

$$= 50 - \sum_{j=1}^{i} x_j, i = 1, \ldots, k-1$$

Deste modo obtém-se a formulação equivalente:

Maximizar

$$z = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x_j}{50 - \sum_{i=0}^{j-1} x_i}$$

com

$$x_0 = 0$$

$$k \le 50$$

$$x_j > 0 \; (j = 1, ..., k)$$

$$x_j < 50 - \sum_{i=0}^{j-1} x_i \; (j = 1, ..., k-1)$$

$$x_k = 50 - \sum_{i=0}^{k-1} x_i$$

x_j inteiro $(j = 1, ..., k)$

Ou seja, desenvolvendo o somatório, pretendemos maximizar

$$z = \frac{12500}{50}x_1 + \frac{12500}{50 - x_1}x_2 +$$

$$+\frac{12500}{50 - x_1 - x_2}x_3 + L +$$

$$+\frac{12500}{50 - x_1 - x_2 - Lx_{k-2}}x_{k-1} +$$

$$+\frac{12500}{x_k}x_k \times 2.$$

À primeira vista, o problema parece complexo. Temos uma expressão não linear, as variáveis devem assumir valores inteiros e o número de variáveis é, ele próprio, desconhecido.

Vejamos o que acontece quando há um único adversário que falha em cada jogada. Neste caso, temos

$$k = 50 \text{ e } x_1 = x_2 = \ldots = x_{50} = 1.$$

Vamos designar por $\tilde{x}$ o vector com 50 componentes iguais a 1. Então:

$$\tilde{z} = \frac{12500}{50} + \frac{12500}{49} + \frac{12500}{48} + $$

$$+L + \frac{12500}{2} + \frac{12500}{1} \times 2$$

$$(\approx 68740,07€).$$

Suponhamos agora que na jogada de ordem i falham p adversários e que em todas as outras falha exactamente um. O número de jogadas neste caso é

$$k = 50 - p + 1.$$

O vector correspondente a este jogo é

$$\hat{x} = (1, 1, \ldots, 1, p, 1, \ldots 1)$$

e tem $k = 50 - p + 1$ componentes, sendo que a componente de ordem i vale p e todas as outras valem 1. Os ganhos associados a este vector são calculados através de:

$$\hat{z} = \frac{12500}{50} + L + \frac{12500}{50-(i-2)} +$$

$$+\frac{12500}{50-(i-1)} \times p + \frac{12500}{50-i} +$$

$$+L + \frac{12500}{2} + \frac{12500}{1} \times 2.$$

Temos que comparar os valores de $\tilde{z}$ e $\hat{z}$. Observa-se nestas duas somas que:

- As primeiras $i-1$ parcelas são iguais;
- As últimas $50 - p - i + 1$ parcelas são iguais;
- Em $\tilde{z}$ há p parcelas que não aparecem em $\hat{z}$ (da parcela de ordem i até à parcela de ordem $i + p - 1$);
- Em $\hat{z}$ há uma parcela (a de ordem i) que não aparece em $\tilde{z}$.

Tendo em atenção estas observações podemos calcular a diferença entre os dois valores:

$$\tilde{z} - \hat{z} = \sum_{j=i}^{i+p-1} \frac{12500}{50-(j-1)} -$$

$$-\frac{12500}{50-(i-1)} \times p$$

Pode-se escrever a segunda parcela como uma soma de p parcelas iguais e associar cada uma delas a uma das parcelas do somatório:

$$\tilde{z} - \hat{z} = \left(\frac{12500}{50-i+1} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+\left(\frac{12500}{50-i} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+\left(\frac{12500}{50-i-1} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+L + \left(\frac{12500}{50-i-p+1} - \frac{12500}{50-i+1}\right).$$

A primeira destas parcelas é nula e todas as outras são positivas; então $\tilde{z} > \hat{z}$.

Esta construção mostra que a saída de jogo de p adversários numa qualquer jogada, corresponde a substituir uma soma de p parcelas crescentes por outra de p parcelas iguais entre si e iguais à menor parcela da primeira soma.

A construção feita é facilmente generalizável ao caso em que saem de jogo vários adversários em jogadas distintas.

Fica assim demonstrado que, de facto, o valor máximo que se pode alcançar corresponde a derrotar os adversários um por um. Note-se que no concurso o valor de cada adversário é arredondado às unidades por defeito, pelo que o ganho máximo atingível é de $\tilde{z}_a = 68717$ euros.

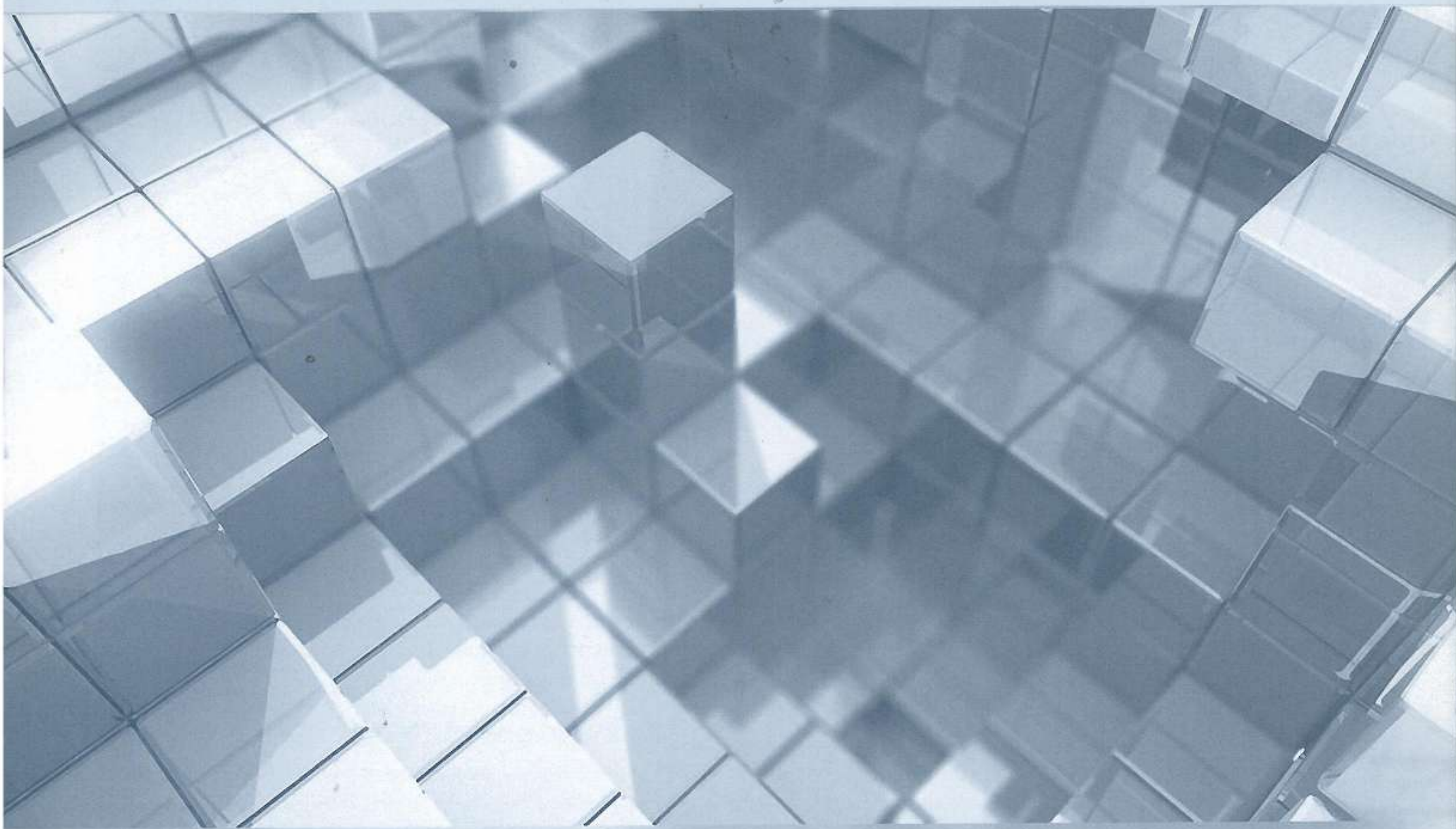
Como, antes de responder à pergunta, o jogador deve escolher o grau de dificuldade da mesma (fácil ou difícil), a melhor estratégia, para ganhar o máximo possível, é escolher sempre uma pergunta fácil. Mas, se o jogador pretender "evidenciar a sua cultura", escolhendo difícil, quanto mais cedo o fizer, maior será o seu ganho.

Gabriela Schütz
Escola Superior de Tecnologia de Faro

Marília Pires
Rafael Santos
Departamento de Matemática
Universidade do Algarve

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.


NÃO!
Não é uma calculadora...
Mas vai TRANSFORMAR a sua Sala de Aula!!!
TI-nspire™
$f(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1$
$\frac{E_c}{mc^2}$
$E_k = m\gamma c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$
Lançamento no ProfMat 2007
TEXAS INSTRUMENTS
A sua experiência. A nossa tecnologia. O sucesso dos seus estudantes.



Transformações Geométricas

Rita Bastos

Quando nós, professores dos ensinos básico e secundário, falamos em transformações geométricas, de uma maneira geral estamos a pensar nas isometrias — translações, rotações, reflexões e todas as compostas destas — e pouco mais. Mesmo quando abordamos o conceito de semelhança no ensino básico, raramente trabalhamos o tema enquadrado no das transformações geométricas do plano ou do espaço. Normalmente, limitamo-nos a falar de figuras semelhantes, em especial triângulos, e utilizar, em exercícios e problemas, o facto de estas terem lados proporcionais e ângulos congruentes. No ensino secundário, quando temos a oportunidade de voltar ao assunto das transformações geométricas, a propósito das operações com números complexos ou da comparação de gráficos de funções da mesma família, não temos tempo para o fazer como seria desejável. Isto é, não temos tempo para pôr a tónica nas conexões dos temas matemáticos, que nos ajudam a compreender melhor a matemática, a sua natureza e as suas aplicações.

No entanto, justificar-se-ia que se desse muito maior importância às transformações geométricas, em primeiro lugar pela relevância que elas têm na história da matemática recente — veja-se o Programa de Erlangen, de Félix Klein, que influenciou o desenvolvimento da matemática no século XX — mas também porque constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

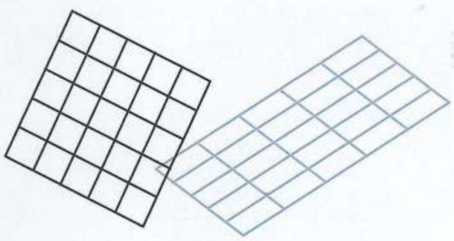


Figura 1. Uma grelha quadriculada e a sua sombra projectada pelo Sol.

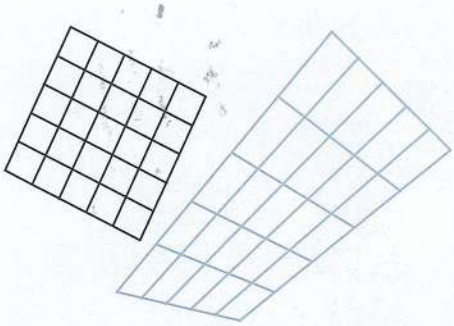


Figura 2. A mesma grelha quadriculada e a sua sombra projectada por um ponto de luz

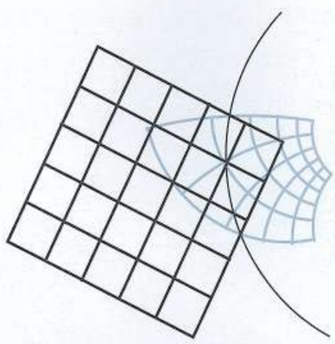


Figura 3. A grelha quadriculada e a sua transformada por uma inversão

Que transformações geométricas?

O mundo das transformações geométricas é muito vasto. Para além das transformações que melhor conhecemos — as isometrias e as semelhanças — temos um sem número de exemplos de transformações geométricas, com as quais os nossos alunos poderiam tomar contacto, não para conhecer os seus nomes ou enumerar as suas propriedades, mas para se aperceberem da riqueza desta área da geometria e de que, tal como noutros temas matemáticos, há uma estrutura comum por trás de tanta diversidade.

Pensemos, por exemplo, numa figura plana e na sua sombra num outro plano, o de uma folha de papel, por exemplo. Depois façamos coincidir os dois planos e observemos a figura original e a sua transformada – a sombra. Qual é a transformação geométrica que está aqui em causa? Que relações geométricas são preservadas pela transformação assim definida? Provavelmente, por esta altura, já o leitor está a pensar na questão essencial desta situação: sombra originada pelo Sol ou por um ponto de luz? E com toda a razão, porque no primeiro caso podemos considerar os raios do Sol paralelos e, por isso, a transformação geométrica em causa é uma projecção paralela, que preserva o paralelismo e a razão entre comprimentos de segmentos com a mesma direcção (figura 1); no segundo caso temos uma projecção central que não preserva nenhuma destas relações, mas preserva a colinearidade (figura 2).

A projecção paralela é uma transformação da família das afinidades, ou transformações afins, e a projecção central pertence, conjuntamente com todas as afinidades, à família, mais alargada, das transformações projectivas. Entre estas últimas, encontramos a perspectiva cónica ou dos pintores.

Um outro exemplo, muito interessante, é o que se passa com a reflexão de um plano num espelho cilíndrico. Claro que há algumas dificuldades em materializar este tipo de transformações porque os espelhos físicos só reflectem de um lado e não dos dois, como os *espelhos matemáticos*, mas a nossa imaginação e um programa de geometria dinâmica podem muito bem completar aquilo que vemos no mundo físico.

A transformação a que nos referimos e que está ilustrada na figura 3, a inversão, não preserva a colinearidade, ao contrário de todas as anteriores.

Muitos são os artistas que se têm interessado pelos efeitos visuais produzidos por transformações geométricas (figuras 4 e 5). Elas constituem, além do mais, um tema privilegiado para estabelecer ligações entre a matemática e a arte, muito para além do estudo da simetria, que já foi aqui referido num outro artigo desta secção[1]. Também no próximo número desta revista, será publicado um artigo de Eduardo Veloso, sobre o tratado de perspectiva para pintores, de Piero de La Francesca e a sua pintura renascentista.

Alguns aspectos matemáticos das transformações geométricas

Uma transformação geométrica é sempre uma função bijectiva, de um espaço nele próprio. Nós, professores do ensino básico e secundário, trabalhamos apenas com as transformações geométricas em que esse espaço é o conjunto de pontos do plano, muitas vezes designado por R^2, dada a identificação de cada ponto com as suas coordenadas, ou o conjunto

Figura 4. Na gravura *Cada vez mais pequeno*, de M. C. Escher, 1975, podemos ver a transformada de uma pavimentação regular do plano por uma transformação geométrica que Escher concebeu.

Figura 5. A perspectiva em *A Anunciação*. Fra Carnavale. 1445—50

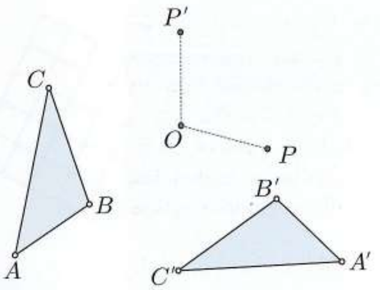


Figura 6. A rotação de centro O e amplitude 105°, transforma o triângulo ABC no triângulo A'B'C', mas também transforma o ponto O nele próprio e qualquer outro ponto P do plano num ponto P' tal que $m[\angle POP'] = 105°$ e que $\overline{OP} = \overline{OP'}$.

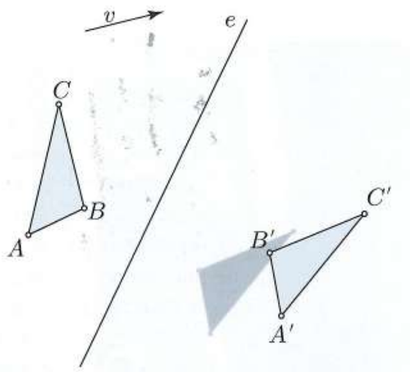


Figura 7. A'B'C' é o transformado de ABC pela composta ToR, em que T é a translação definida pelo vector v e R é a reflexão definida pelo eixo e.

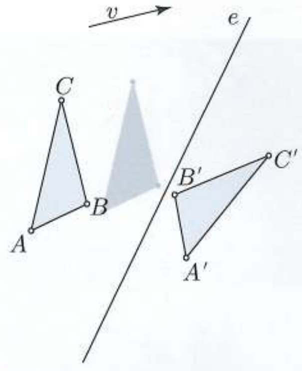


Figura 8. O mesmo triângulo ABC, agora transformado pela composta RoT. O resultado é diferente do da figura anterior, não há comutatividade.

de pontos do espaço tridimensional, também chamado R^3. Portanto, e dito de outra maneira, uma transformação geométrica é uma correspondência biunívoca do conjunto de todos os pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio. Este é um aspecto muito importante que é muitas vezes esquecido, quando vemos escrito ou quando dizemos, por exemplo, que "rodamos o triângulo ABC". Na verdade a rotação transforma não apenas o triângulo ABC mas todos os pontos do plano (ou do espaço) em que este está contido, embora muitas vezes nos interesse apenas analisar as relações entre uma dada figura (o triângulo ABC) e a sua transformada por essa rotação (figura 6).

Esta definição, de transformação geométrica como uma aplicação bijectiva, é essencial para o que se segue: a operação composição usual entre funções de qualquer tipo.

Dadas duas transformações geométricas do plano (ou do espaço), o resultado da composição das duas é a que se obtém se aplicarmos uma a seguir à outra. Isto é, se T transforma o ponto P no ponto P' e S transforma o ponto P' em P'', a composta SoT transforma o ponto P no ponto P''. É fácil demonstrar que esta aplicação é também uma transformação geométrica do plano (ou do espaço) e que a operação composição tem a propriedade associativa, mas não a propriedade comutativa (figuras 7 e 8).

Um resultado imediato do facto de termos exigido que uma transformação geométrica seja biunívoca, é que toda a transformação geométrica tem inversa. Isto é, é sempre possível "voltar atrás", "desfazer" uma transformação, aplicando a sua inversa. Como é natural, a composta de uma transformação com a sua inversa é a transformação identidade, a que transforma cada ponto em si próprio. A transformação identidade é o elemento neutro da operação composição.

Posto isto, já todos os que nos estão a ler devem ter reconhecido a estrutura algébrica que está subjacente ao conjunto de todas as transformações geométricas do plano (ou do espaço) com a operação composição: é um grupo (não comutativo). A observação deste facto, juntamente com o conhecimento que temos de outros grupos (os números inteiros com a operação adição, por exemplo), fornece-nos imediatamente uma compreensão, bastante poderosa, deste tema.

É interessante, depois desta observação, investigar que subconjuntos de transformações constituem subgrupos daquele grupo, isto é, que também são grupos. Ou seja, quais são as transformações que, compostas entre si, dão origem a transformações do mesmo tipo, que incluem a transformação identidade e tal que todas têm inversa do mesmo tipo. Por exemplo, pensando só nas transformações do plano:

Podemos dizer que a composta de duas translações é sempre uma translação? E há alguma translação que seja igual à identidade? Todas as translações têm uma translação inversa? A resposta a todas estas questões é afirmativa (deixo ao leitor que nunca pensou nisto o prazer de descobrir porquê), por isso, o conjunto das translações do plano é um subgrupo do conjunto de todas as transformações geométricas do plano.

Mas com as reflexões já não se passa nada disto. A composta de duas reflexões não é uma reflexão: é fácil ver que a reflexão muda a orientação[2] das figuras, por isso, mudando a orientação duas vezes sucessivamente, vamos obter uma figura com a orientação da primeira (figura 9). Então, o conjunto das reflexões do plano não é um subgrupo do grupo das transformações geométricas do plano. Outra forma de chegarmos à mesma conclusão é pela observação do facto de não podermos transformar cada ponto do plano nele próprio por reflexão: a transformação identidade não pode ser uma reflexão.

Deixo ao leitor o desafio de investigar que outras transformações geométricas suas conhecidas constituem subgrupos, e também que tipo de transformações geométricas se obtém quando se compõem duas que não pertencem ao mesmo subgrupo. Esta estrutura, e a organização das transformações geométricas em subgrupos que preservam, ou deixam invariantes, determinadas relações, revelaram-se tão importantes que foi com base nelas que Félix Klein propôs, em 1872, no célebre Programa de Erlangen, a unificação e classificação das geometrias[3].

Assim, a geometria euclidiana é aquela em que duas figuras congruentes são as que podem ser transformadas uma na outra por uma isometria, ou seja, por uma transformação geométrica que preserva as distâncias. Na geometria afim, por exemplo, duas figuras são congruentes se houver uma afinidade que transforme uma na outra — como é o caso de uma circunferência e uma elipse. Se demonstramos um te-

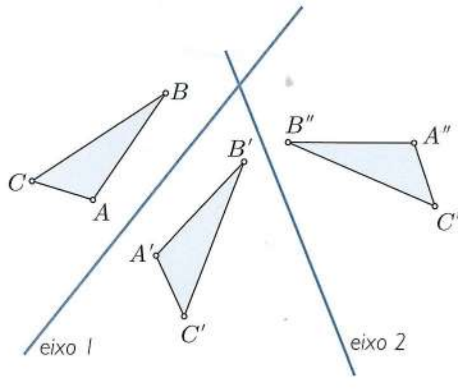


Figura 9. Os triângulos ABC e A'B'C' têm orientações diferentes, mas o triângulo A''B''C'' tem a mesma orientação de ABC. Não pode, por isso, ser a imagem de ABC por uma reflexão.

orema para a circunferência onde só intervêm propriedades e relações invariantes nesta geometria, o teorema é válido para todas as elipses.

A geometria que engloba todas estas é a geometria projectiva que, podendo ser abordada na forma sintética, a um nível bastante elementar, é bastante poderosa nos métodos de demonstração, nos resultados que nos permite obter e na visão unificadora que nos proporciona. Infelizmente, o movimento da Matemática Moderna acabou com ela nos cursos superiores, e em consequência disso actualmente poucos professores dos ensinos básico e secundário têm conhecimentos neste campo.

Transformações geométricas no ensino básico e no ensino secundário

Na primeira parte deste texto, defendi que os alunos deveriam tomar contacto, desde cedo, com outros tipos de transformações geométricas, que não sejam só as isometrias e as semelhanças. Estas últimas podem ser trabalhadas pelos alunos mais novos através de experiências em que observem, representem e descrevam movimentos, ampliações e reduções, como é recomendado pelo National Council of Teachers of Mathematics nos *Principles and Standards for School Mathematics*. Exemplifiquei a abordagem de outras transformações geométricas com a observação e representação de sombras, para o caso das transformações afins e projectivas, e com o espelho cilíndrico para a inversão.

Mas devemos ter algum cuidado e, como professores, saber que estas duas últimas têm uma característica especial — é que não são aplicações bijectivas a não ser que se complete o plano ou o espaço com pontos no infinito. Se esta observação não é relevante para os alunos mais novos, a partir de certa altura é importante que os alunos vão formalizando os aspectos matemáticos relacionados com as transformações geométricas. E é, sobretudo, importante que os professores conheçam bem as transformações com que estão a trabalhar para saberem orientar os alunos na construção correcta das ideias.

As isometrias, que até agora têm integrado os programas do ensino básico separadamente, devem ser trabalhadas em conjunto porque é na comparação das suas propriedades — pontos fixos, orientação dos originais e das imagens e outras — e nas composições e relações entre elas que reside a tal estrutura que devemos ir progressivamente revelando aos alunos, ao longo da escolaridade. Além disso, o estudo da simetria é o melhor ambiente para aprofundar as isometrias, mas isso só é possível se os alunos trabalharem com todas as isometrias simultaneamente.

As semelhanças deveriam ser trabalhadas do ponto de vista das transformações geométricas, talvez no terceiro ciclo, e constituem uma óptima oportunidade para se estabelecer conexões com as funções, nomeadamente as proporcionalidades directas, e para aprofundar o conceito de razão. De facto, o grupo das semelhanças caracteriza-se por deixar invariantes as razões entre comprimentos, o que corresponde a um conceito mais alargado de razão que, geralmente, se reduz à razão entre números.

A algebrização das transformações geométricas pode e deve ser feita no ensino secundário, designadamente quando se trabalhar com os números complexos. Um programa de geometria dinâmica é um recurso excepcional para fazer a conexão entre a geometria e o corpo dos complexos, conexão esta que torna ambos os temas muito mais poderosos na resolução de problemas. Também no secundário se deveria abordar as afinidades e, porque não?, alguns elementos de geometria projectiva. O estudo sintético das cónicas seria uma boa oportunidade para compreender um pouco da história da geometria desde a antiguidade até ao século XIX. A geometria projectiva vem revelar a sua unidade e a geometria analítica, finalmente — e sobretudo nunca partindo daí — permite-nos deduzir as várias equações que traduzem essa unidade.

Notas

1 Ver *Notas para o Ensino da Geometria — Sobre Simetria*, no número 88 da revista *Educação e Matemática*, páginas 9–11.

2 Estamos aqui a falar de orientação de ângulos ou de triângulos. Um triângulo ABC, por exemplo pode orientar-se de duas maneiras, que correspondem aos dois sentidos em que é possível percorrer a sua fronteira: de A para B para C; ou de A para C para B.

3 Foi durante o século XIX que se deram os grandes desenvolvimentos na teoria dos grupos, com Galois, na geometria projectiva, com Poncelet, Chasles e Staudt, e nas geometrias não euclidianas de Lobatchevski, Bolyai e Riemann, entre outros.

Bibliografia

Franco de Oliveira, A. J. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Klein, F. (1991). *Le Programme d'Erlangen*. Sceaux : Editions Jacques Gabay.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Sebastião e Silva, J. (?). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências.

Rita Bastos
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

Projecto BiblioCiência

Aprender informalmente ciência no interface escola-comunidade

Figura 1

Breve apresentação do Projecto

Para além do ensino formal das ciências na escola, a cultura científica promove-se também através da aprendizagem informal, em contextos diversos como os museus, os observatórios, os centros de ciência, as quintas pedagógicas ou os parques naturais.

Em 2004, e por iniciativa do Departamento de Bibliotecas e Arquivos da Câmara Municipal de Lisboa, numa parceria com o Ministério da Educação, tomou forma e *desceu à rua* um autocarro/laboratório transformado (figura 1), apetrechado com equipamento de experimentação científica, materiais manipuláveis, jogos educativos e vários computadores com ligação à Internet.

Professores de Matemática e de Ciências das Escolas Superiores de Educação de Setúbal e Portalegre, conceberam um conjunto de tarefas e desafios nas áreas das Ciências Naturais, da Física e da Matemática, dirigidas a alunos no final do 2° ciclo, privilegiando a abordagem dos conceitos através do trabalho prático e experimental, da ligação ao real e à vida quotidiana.

Durante três meses o autocarro viajou por cinco escolas do concelho de Lisboa, em articulação com cinco bibliotecas municipais, envolvendo cerca de meio milhar de alunos do 6° ano de escolaridade, tendo efectuado quatro visitas a cada uma das cinco escolas participantes. Professores dessas escolas, das áreas científicas envolvidas, e membros dos Conselhos Executivos e Pedagógicos, prepararam as visitas das turmas ao autocarro e, lá dentro, quatro monitores asseguraram o enquadramento e apoio aos alunos nas experiências a realizar nas bancadas (figura 2) e nas actividades a realizar no computador (figura 3).

No tejadilho do autocarro BiblioCiência, uma estação meteorológica (figura 4), permitia a recolha de dados que eram transmitidos ao servidor e podiam ser consultados pelos alunos.

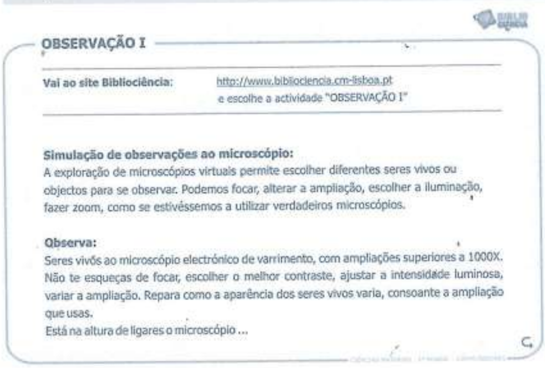
As actividades com recurso às tecnologias

Um conjunto de actividades com suporte em *sites* da Internet, convidava os alunos a uma exploração pouco escolarizada de conceitos de Matemática e de Ciências e envolvia-nos em desafios e pequenas actividades de pesquisa, de resolução de problemas e de investigação. Nas Ciências (figura 5), podemos referir a observação de objectos e de seres vivos, com o auxílio de microscópios reais e virtuais[1] ou o uso do sistema de recolha de dados EcoLog XL que, com o auxílio de cinco sensores, mede e armazena dados relativos a temperatura, intensidade da luz, pressão atmosférica, humidade e intensidade do som (onde o *software* EcoLab 3 permite a visualização e tratamento dos dados recolhidos, com vista à elaboração de um relatório multimédia — vídeo, audio e texto). Partindo dos dados disponíveis na Internet, nomeadamente em edições *on-line* de jornais diários, podiam comparar-se os dados obtidos na estação meteorológica com as previsões feitas para o dia.

Relativamente à Matemática, as 16 actividades propostas para realizar nos computadores, tinham como referência alguns *applets* disponíveis nos *sites* do Instituto *Freudenthal*[2] e do NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*)[3], o *software* para geometria *Poly*, o *software* de geometria dinâmica *Geometer's Sketchpad* e alguns jogos educativos como o Trinca-Espinhas ou o Estimatemp.

Nas pequenas fichas que orientavam a exploração, eram simultaneamente indicados um conjunto de passos para uma primeira abordagem do programa e algumas tarefas no âmbito da Didáctica da Matemática, com vista ao desenvolvimento

Figura 5


OBSERVAÇÃO I

Vai ao site Bibliociência: http://www.bibliociencia.cm-lisboa.pt e escolhe a actividade "OBSERVAÇÃO I"

Simulação de observações ao microscópio:
A exploração de microscópios virtuais permite escolher diferentes seres vivos ou objectos para se observar. Podemos focar, alterar a ampliação, escolher a iluminação, fazer zoom, como se estivéssemos a utilizar verdadeiros microscópios.

Observa:
Seres vivos ao microscópio electrónico de varrimento, com ampliações superiores a 1000X. Não te esqueças de focar, escolher o melhor contraste, ajustar a intensidade luminosa, variar a ampliação. Repara como a aparência dos seres vivos varia, consoante a ampliação que usas.
Está na altura de ligares o microscópio ...

Figura 6

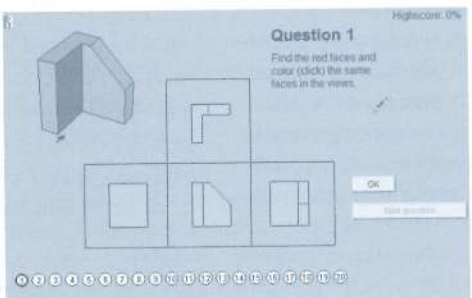


Figura 7

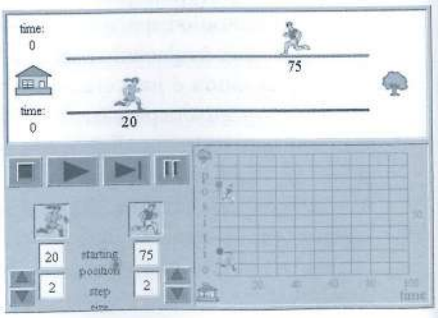


Figura 2

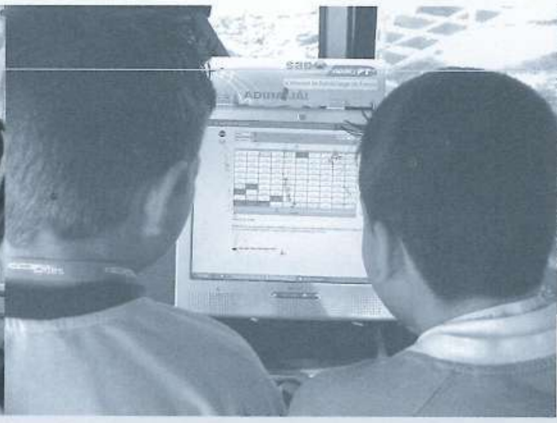


Figura 3

Figura 4

de competências de visualização espacial, de destreza numérica ou de interpretação algébrica e gráfica.

Por exemplo, no site `http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en`, os alunos eram convidados a abrir o *applet Colouring Sides I* (figura 6) e através da manipulação de sólidos, com o auxílio do rato, podiam pintar diferentes faces e desenvolver as suas capacidades de visualização espacial. Também no site

`http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.2/index.htm`,

os alunos eram convidados a experimentar o jogo (uma corrida de dois jovens, permitindo o controle da velocidade e do ponto de partida) e a interpretar o movimento, a sua representação gráfica e os valores atribuídos aos parâmetros (figura 7).

Uma avaliação e algumas lições

O Projecto teve sempre um site de apoio[4] na Internet (figura 8) onde alunos, professores, pais e restante comunidade podiam aceder e conhecer as actividades do Projecto e o seu funcionamento, disponibilizando também um jogo Trivial com um conjunto de 100 perguntas de escolha múltipla relativas às duas áreas.

Das actividades do Projecto, que teve continuidade, com algumas correcções introduzidas no ano de 2005, existe uma avaliação realizada por alunos, professores e responsáveis das bibliotecas municipais envolvidas, disponível, assim como toda a história e materiais referidos anteriormente, na publicação BiblioCiência: um projecto experimental[5], editada em 2005 pela Divisão de Bibliotecas e Arquivos da Câmara Municipal de Lisboa, sob a coordenação da Drª Margarida Estrelo Rodrigues, que podemos referir, sem exagero, ter sido a 'alma' deste projecto.

Nas palavras dos monitores, que acompanharam todo o projecto *'por dentro'*, ele "ultrapassou as fronteiras dos seus próprios constrangimentos. Muito para além dos objectivos a que se propunha, o BiblioCiência resultou num projecto com um carácter social. Atingiu crianças que não estão habituadas a ser escolhidas, nem a estar na linha da frente, no que toca a projectos experimentais (...) Foi nas escolas mais carenciadas que, com o decorrer das sessões, se tornou mais visível a adesão ao projecto".

Como em todas as experiências educativas, esta nasceu de uma ideia, teve alguns meios humanos e materiais à disposição e desenvolveu-se tendo por base desafios que foram colocados a jovens do 2° ciclo, alguns dos quais já afastados das ideias em ciência, por motivos de um percurso escolar irregular e mal sucedido.

As tecnologias, constituíram uma mais-valia e deram vida às ideias, aproximando os alunos de abordagens mais práticas, experimentais e ligadas a situações reais e do seu quotidiano. A aprendizagem decorreu *fora de portas* e os professores que estiveram *mais atentos* ao Projecto, tiveram oportunidade de dar continuidade na sua sala de aula, às *rondas* (assim foram chamadas) de 45 minutos dos alunos pelo autocarro e ao trabalho que estes realizaram nas visitas às bibliotecas.

Notas

1 `<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/electronmicroscopy/magnify1/index.html>`, acedido em Junho de 2004.

2 `<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en>`, acedido em Setembro de 2007.

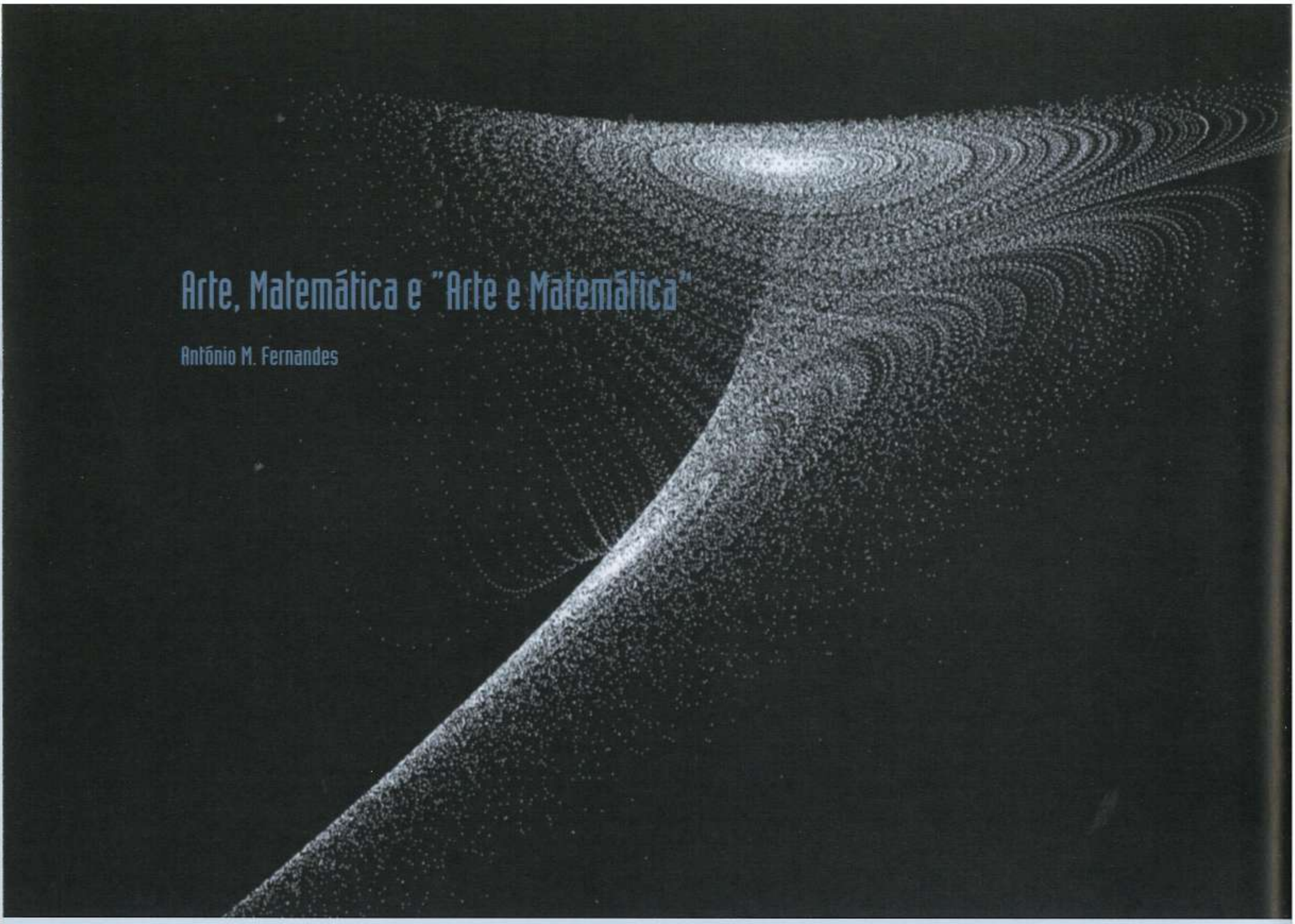
3 `<http://illuminations.nctm.org/>`, acedido em Setembro de 2007.

4 Ainda hoje disponível em `<http://biblioclencia.cm-lisboa.pt/biblio2/site-bin/index.asp>`.

5 Distribuída pela Gradiva.

José Duarte
Esc. Sup. de Educação de Setúbal

Figura 8



Arte, Matemática e "Arte e Matemática"

António M. Fernandes

A Matemática e o seu valor estético intrínseco

A relação entre a Arte e a Matemática não é fácil de caracterizar. A fiabilidade de uma tal caracterização depende, em parte, de uma resposta satisfatória para as questões "o que é a Arte?" e "o que é a Matemática?". No caso desta última, parece mais ou menos consensual que uma definição satisfatória da sua essência, não se encontra disponível. No caso da Arte, ela pode ser descrita como *um veículo de conteúdos estéticos*. Esta caracterização tem o mérito de definir o que quer definir mas fá-lo claramente à custa de transferir todo o grau de relativismo para a expressão "conteúdos estéticos".

Ora, um dos primeiros princípios estéticos: *de gustibus non est disputandum*,[1] parece afastar-nos, definitivamente de uma possibilidade de resposta, tal é o grau de subjectividade introduzido.

Em todo o caso, todos os princípios estéticos envolvem um juízo de valor relativamente a um determinado tipo de impressão que a obra de arte causa em nós. Essa impressão varia amplamente desde a emoção à razão, envolvendo desde os mais básicos instintos aos mais sofisticados actos intelectuais.

Não parece adequado considerar a actividade matemática como uma manifestação artística na sua essência, já que não constitui essencialmente num veículo estético, possui outros propósitos fundamentais. De certo modo contradiz Espinosa: "[A arte consiste numa] qualquer criação humana contendo uma ideia que não seja o seu propósito utilitário."

Seja como for, parece inequívoco que determinados aspectos da actividade matemática são susceptíveis de julgamentos de valor puramente estéticos.

Com a crescente utilização de computadores, a Matemática tem ganho espaço enquanto meio de produção artística. Isto, mesmo sem ter em consideração o facto de a generalidade dos algoritmos presentes no *software* de produção artística utilizar, intensamente, ferramentas matemáticas que abrangem campos desde a geometria diferencial e a álgebra linear aos números complexos e aos quaterniões, para mencionar apenas alguns.

Desde logo, em muitos casos, as representações visuais de muitos objectos matemáticos possuem em si mesmas um valor estético intrínseco, o que permite *servir* Matemática como Arte, apenas com modificações menores.

Tal é o caso da capa do número anterior da *Educação e Matemática*, elaborada tendo como base um objecto designado *atractor de Lorenz*.

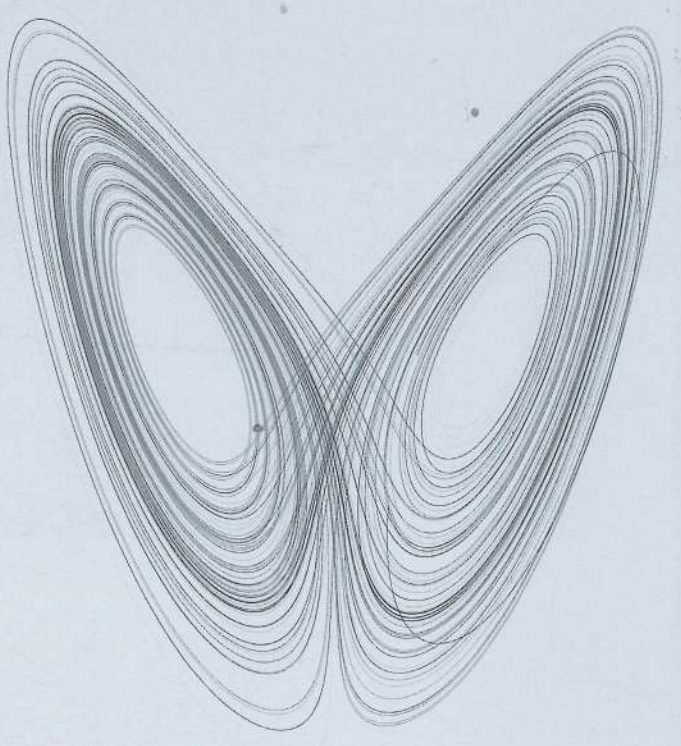


Figura 1. O atractor de Lorenz

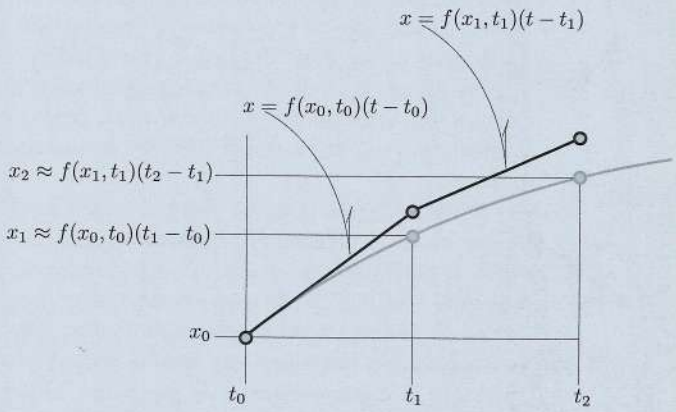


Figura 2. Cálculo da solução aproximada

A figura base é gerada a partir da representação gráfica da solução de um *sistema de equações diferenciais*, mais precisamente um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

onde x, y e z são funções de uma variável t, e x', y' e z', são as respectivas derivadas em ordem a t. As letras gregas σ, ρ e β, representam parâmetros, ou seja, quando substituídas por números reais concretos originam um sistema particular. Para $\rho = 28$ a solução tem um comportamento caótico, comportamento esse que se ilustra na figura 1.

Para obter a imagem final, foram utilizados certos pontos daquela curva, calculados através de processos numéricos. Um desses métodos é conhecido sob a designação de método de Euler. Ilustramos o método no caso de uma única equação: suponhamos que queremos descrever (em termos discretos) uma solução de uma equação diferencial do tipo $x' = f(x, t)$ onde $f(x, t)$ é uma certa expressão envolvendo x e t, sendo que x é ela própria uma função de t. De modo a obter uma solução específica é necessário fornecer aquilo que se designa de *condição inicial*, ou seja, fixar o valor $x(t_0)$ para certo número t_0. (Se f é bem comportada a teoria elementar das equações diferenciais garante a existência e a unicidade de uma tal solução.) Uma vez fixada esta condição inicial, podemos determinar uma aproximação da verdadeira solução.

Sabemos, considerando a equação diferencial dada, que $x'(t_0) = f(x(t_0), t_0)$ pelo que, tendo em conta que a recta tangente (cujo declive em t_0 é $x'(t_0)$) é uma boa aproximação local da solução x então, localmente, a recta de equação $y = f(x(t_0), t_0)(t - t_0)$ é uma boa aproximação da verdadeira solução $x(t)$. Assim, se considerarmos um ponto t_1 próximo de t_0, podemos calcular uma aproximação de $x(t_1)$, usando a recta, ou seja, considerando

$$x(t_1) \approx f(x(t_0), t_0)(t_1 - t_0).$$

Usando agora este valor de $x(t_1)$, acabado de calcular, podemos, como no caso anterior, usá-lo para calcular o valor da derivada $x'(t_1)$, prosseguindo deste modo todo o processo (ver a figura 2). Assim sendo, é possível determinar uma boa aproximação da verdadeira solução, desde que consideremos uma sucessão de pontos $t_0, t_1, t_2, \ldots$, todos suficientemente próximos uns dos outros.

No caso da capa da *Educação e Matemática* n° 93 foram utilizados cerca de 50000 pontos t_n onde $|t_{n+1} - t_n| \leq 1/100$.

Um segundo exemplo

Não é necessário recorrer a conceitos matemáticos sofisticados para obter objectos de valor estético reconhecível. Neste segundo exemplo utilizam-se figuras geométricas básicas (setas e quadrados) e transformações geométricas (no caso, dilatações e rotações). O plano é preenchido por 2500 figuras, de cada tipo, dispostas numa retícula 50x50. Os quadrados e as setas, uma vez colocados em cada ponto dessa retícula são sujeitos a transformações geométricas do tipo referido.

Uma tal tarefa, como se prevê, é levada a cabo por um computador, devidamente programado para o efeito. Na figura 3, pode observar-se um exemplo produzido usando o *software NodeBox* que, consiste basicamente num interpretador da linguagem de programação *Python*. Mesmo quem não conhece a linguagem em detalhe pode reconhecer, na essência, o comportamento do programa. Numa área de 1000x1000 *pontos*, são desenhadas setas e quadrados usando uma retícula (como já se disse). Essas figuras sofrem variações de escala e rotações determinadas por certas funções matemáticas, mais precisamente pelas funções

$$(x, y) \mapsto 3(\sin(x) + \cos(x))$$

e

$$(x, y) \mapsto x + y$$

respectivamente.

Figura 3

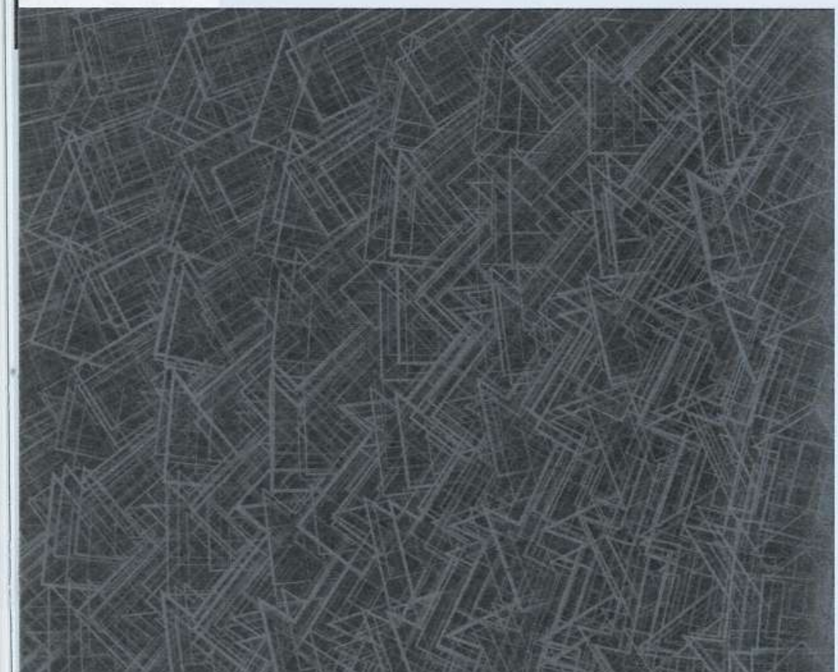


Figura 4. Programa [em Python] que gerou a figura 3.

```
size(1000,1000)
from math import *
fill(0,0,1.0,0.05)
stroke(0,0,0)
for i in range(50):
    _x0=20*i
    for j in range(50):
        _y0=20*j
        scale(3*(cos(i)+sin(j)))
        rotate(i+j)
        strokewidth(random(.8))
        stroke(0,0,0)
        rect(_x0,_y0,20,20)
        arrow(_x0,_y0,40)
        reset()
```

Este exemplo, de certo modo minimalista, revela, apesar de tudo, a enorme potencialidade plástica que pode ser alcançada recorrendo a ferramentas matemáticas elementares.

As potencialidades que resultam da utilização de noções matemáticas como tintas e pincéis são inúmeras. A utilização do computador, permitindo a implementação de esquemas recursivos abre novas possibilidades que, de outro modo seriam totalmente inacessíveis.

A Arte e o seu valor matemático intrínseco

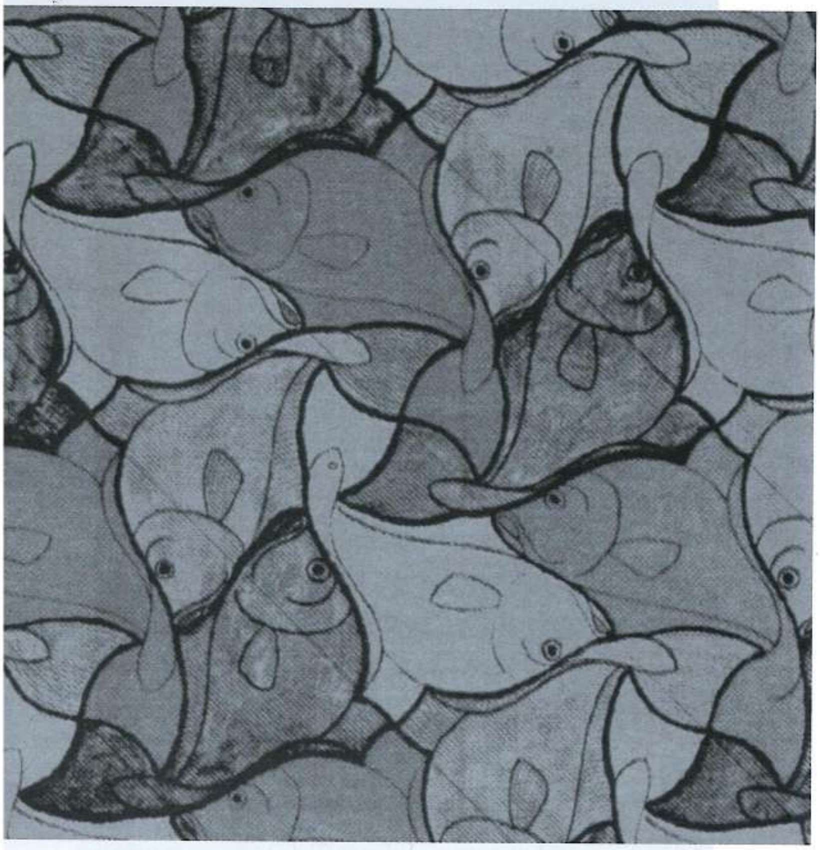
Em diversas ocasiões, noções fundamentais em matemática viram a sua génese localizada na actividade artística.

O mais emblemático desses casos é, talvez, o desenvolvimento da geometria projectiva, baseado nos estudos sobre perspectiva, enquanto método para obter uma representação visual realista.

Não nos ocuparemos aqui desse exemplo, em detrimento de um outro, cuja *matemática intrínseca* é, atrevemo-nos a dizê-lo, mais substancial. Falamos das pavimentações do plano.

Do ponto de vista estritamente artístico, as pavimentações constituem uma manifestação artística ancestral. Os exemplos que podem ainda hoje observar-se no mosteiro de Alhambra (Séc. XIII–XIV) evidenciam um conhecimeno notável das possibilidades combinatórias desta técnica. Tal facto surpreende-nos a todos do mesmo modo que surpreendeu Esher. Essas possibilidades podem ser descritas em termos de noções geométricas clássicas que envolvem a noção de *grupo de simetria*.

Ainda mais surpreendente é, certamente, o facto de a geometria clássica ser insuficiente para descrever a riqueza



Pavimentação do plano por M. C. Escher

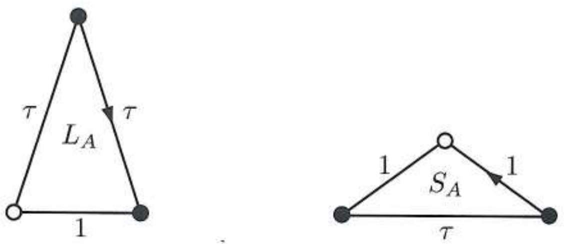


Figura 4

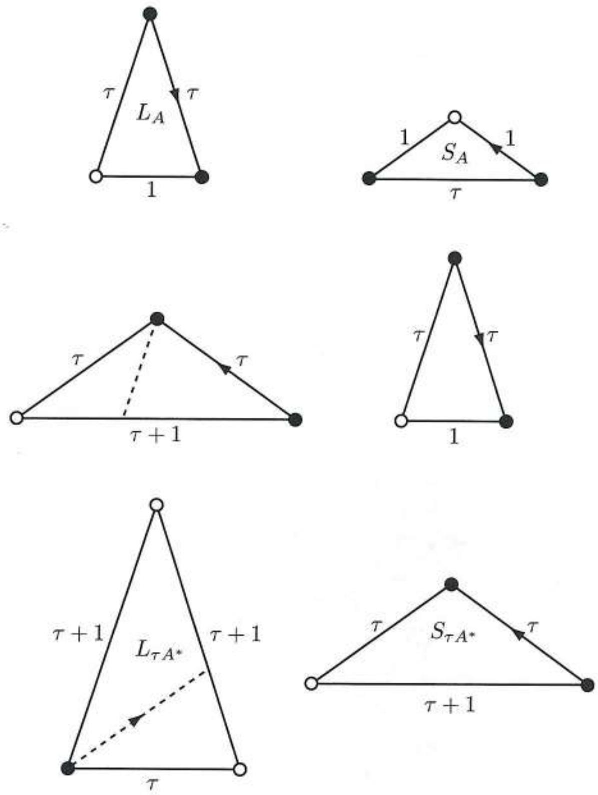


Figura 5

do universo das pavimentações. É essa surpresa que iremos descrever.

Consideremos os dois ladrilhos L_A (designado *ladrilho grande*) e S_A (designado *ladrilho pequeno*) da figura 4 (τ representa o número de ouro). Qualquer pavimentação do plano usando aqueles dois ladrilhos designa-se por pavimentação do tipo A. Como se vê na figura as arestas são orientadas e os vértices coloridos. Isso sucede para impor certas restrições no tipo de pavimentações que se podem obter usando aquelas duas figuras. De facto, iremos apenas considerar aquelas em que, nos ladrilhos adjacentes, as arestas e vértices em que eles contactam tenham, respectivamente, a mesma orientação e a mesma cor. Pode demonstrar-se que é possível pavimentar o plano desta forma e que as pavimentações assim produzidas não possuem simetria translaccional sendo, por isso, designadas de *aperiódicas*. Mais precisamente, *pavimentações aperiódicas de Penrose*. No que se segue referir-nos-emos a elas simplesmente como pavimentações do tipo A.

A partir de uma pavimentação T do tipo A podemos, iterando um processo algorítmico, obter uma infinidade de outras pavimentações deste tipo,

$$T_0 = T, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$$

A passagem de T_n para T_{n+1} processa-se de acordo com o que se descreve na figura 5. Ou seja, os ladrilhos pequenos da nova pavimentação, obtêm-se unindo um grande e um pequeno da anterior, tal como a figura descreve (segunda linha). Depois de obtidos os ladrilhos pequenos da nova pavimentação, através deste processo, alguns destes podem

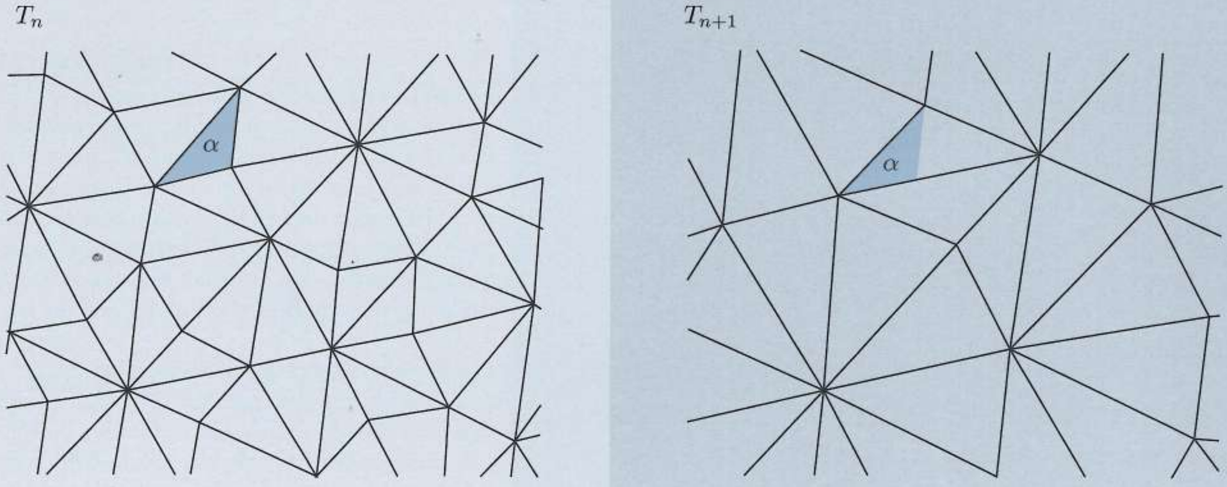


Figura 6

juntar-se com triângulos grandes da anterior, originando um triângulo grande na nova. Os triângulos obtidos dizem-se dos tipos $L_{\tau A^*}$ e $S_{\tau A^*}$. Obtemos assim uma nova pavimentação T_{n+1} (ainda do tipo A), com triângulos do tipo $L_{\tau A^*}$ e do tipo $S_{\tau A^*}$. A razão para esta notação é simples: os triângulos em T_{n+1}, têm agora lados cujo comprimento surge multiplicado por τ e, como se pode observar, a orientação e coloração dos vértices é em T_{n+1}, dual (ou seja «trocada»)da de T_n (figura 5). Em todo o caso, apesar desta alteração de coloração e orientação, continuamos a ter uma pavimentação do tipo A.

Se considerarmos agora uma pavimentação T e um triângulo α ocorrendo nessa mesma pavimentação, podemos fazer corresponder a ambos uma sequência (infinita) de zeros e uns, $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ que denotamos por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de acordo com o seguinte: a_n é zero ou um consoante o triângulo α ocorra na pavimentação T_n dentro de um triângulo grande ou pequeno, respectivamente (figura 6). Já que, pelo processo que descrevemos, um triângulo pequeno em T_n, origina sempre um triângulo grande em T_{n+1}, isso traduz-se na sequência através da observância da seguinte lei geral:

$$(*) \qquad a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0.$$

Outro aspecto interessante reside no facto de, considerados dois triângulos α e β de uma mesma pavimentação T, existe sempre um natural n tal que, em T_n, os triângulos α e β ocorrem dentro de um mesmo ladrilho. Do ponto de vista das respectivas sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isso significa que para $k \geq n$ se tem $a_k = b_k$.

Se considerarmos o conjunto $\mathbb{T}$ de todas as sequências, de zeros e uns satisfazendo $(*)$, pode demonstrar-se que decorrem de triângulos e pavimentações de tipo A, como descrevemos atrás. Por outro lado, as sequências que correspondem a uma mesma pavimentação podem ser caracterizadas facilmente, ou seja, dadas (a_n) e (b_n) em $\mathbb{T}$, elas são determinadas por uma mesma pavimentação T se e só se existe um natural k tal que $n \geq k$ implica $a_n = b_n$.

Definindo uma relação binária no conjunto $\mathbb{T}$ de acordo com, $(a_n) \sim (b_n)$ *se existe* k *tal que* $n \geq k$ *implica* $a_n = b_n$, obtém-se aquilo que vulgarmente se designa de uma *relação de equivalência*. O conjunto $[a_n]$, constituído por todas as sequências em $\mathbb{T}$ equivalentes a (a_n), designa-se de classe de equivalência de (a_n) e, pode ser visto como um representante natural da pavimentação T. Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre as pavimentações de tipo A e as classes de equivalência de sequências de $\mathbb{T}$, cujo respectivo conjunto se designa de conjunto quociente de $\mathbb{T}$ por $\sim$ e se representa por $\mathbb{T}/\sim$.

Aquilo que torna estes conjuntos quociente interessantes é que se existe no conjunto original algum tipo de estrutura algebro-geométrica então, a estrutura quociente como que herda alguma dessa estrutura, numa forma que é previsível. Muitos objectos geométricos interessantes (por exemplo a banda de Möbius ou o plano projectivo) podem obter-se deste modo.

Esta circunstância parece permitir, no nosso caso, estudar a estrutura do conjunto das pavimentações de tipo A, já que uma estrutura geométrica pode ser imposta em $\mathbb{T}$, por via da consideração de uma métrica dada por:

$$d((a_n),(b_n))) = \frac{1}{n+1}$$

onde n é o primeiro índice em que as duas sequências diferem.

O que torna esta situação tão especial é que, contrariando a situação clássica, em que a passagem ao quociente revela ainda uma estrutura geométrica rica e informativa, neste caso, porém, isso é dramaticamente contrariado. A *métrica* (ou se se quiser o modo de medir distâncias) induzida por d no quociente é a *pseudo-métrica*[2] definida do seguinte modo: considerados dois elementos x e y de $\mathbb{T}$ (x e y são sequências infinitas de zeros e uns) consideramos sequências finitas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de elementos de $\mathbb{T}$, de tal modo que $p_1 \sim x$ e $p_n \sim y$, considerando então as somas

$$(**) \quad d(p_1,p_2) + d(p_2,p_3) + \cdots + d(p_{n-1},p_n)$$

para finalmente definir $d'([x],[y])$ como o menor valor possível entre todas as somas que acabámos de descrever.[3] (Recorde-se a notação: $[x]$ representa a classe de equivalência de x sendo, por isso, um elemento do conjunto quociente $\mathbb{T}/\sim$.) Cada sequência $p_1, p_2, \ldots, p_n$, como acima, descreve um *circuito*, que conduz de x a y. Estamos a medir a distância entre $[x]$ e $[y]$, considerando a menor distância percorrida ao longo desses circuitos.

Aquilo que, em última instância traduz a falência dos métodos geométrico clássicos na análise da estrutura das pavimentações de tipo A, é o facto de, dados dois elementos quaisquer $[x]$ e $[y]$ de $\mathbb{T}/\sim$, se ter sempre:

$$d'([x],[y]) = 0!!!$$

A razão para este facto é simples, dadas duas sequências (a_n) e (b_n), correspondendo a duas pavimentações, se elas correspondem a duas pavimentações diferentes (e pode demonstrar-se que o conjunto de tais pavimentações é infinito) então, temos $d((a_n),(b_n)) = 1/(k+1)$, onde k é a primeira posição onde as sequências diferem. Nesse caso pode sempre considerar-se uma nova sequência (y_n) que difere de (b_n), apenas na posição k, onde coincide com (a_n). Por construção, é claro que $(y_n) \sim (b_n)$ e que, por outro lado $d((a_n),(y_n)) < 1/(k+1)$. Uma vez que este procedimento se pode repetir o número de vezes que se quiser, é claro, que a respectiva distância se pode tornar tão pequena quanto se queira. Tudo isto tem uma tradução, no cenário menos formal que envolve directamente as pavimentações. Embora exista um número infinito de pavimentações de tipo A, a verdade é que dada uma qualquer configuração que ocorra numa região finita de uma delas, essa mesma configuração ocorre (um número infinito de vezes) em qualquer outra, ou seja, as pavimentações de tipo A não se podem distinguir umas das outras localmente.

Retomando a relação (**), a conclusão permitida é a de que, os métodos geométricos clássicos aplicados à determinação da estrutura das pavimentações de tipo A, não distingue essencialmente essa estrutura do espaço geométrico que possui um único ponto. A conclusão de que existe essencialmente uma pavimentação de tipo A é muito forçada. Muito embora qualquer configuração local, que surja numa delas, surja em todas as outras, recordamos que não existe simetria translaccional, o que torna a conclusão pouco adequada e amplamente insatisfatória.

A geometria capaz de proceder a este tipo de caracterização, apesar de tudo, existe. Trata-se de uma *invenção* relativamente recente, designada por *geometria quântica* ou *geometria não comutativa*.

Classicamente, é possível, associar a cada espaço geométrico (no sentido de Riemmann) uma estrutura matemática vulgarmente designada de *álgebra*. A teoria clássica revelou que, de certo modo, a estrutura geométrica encontra uma tradução na estrutura algébrica, tornando possível estudar a geometria *na* álgebra. Acontece que as álgebras que se obtêm a partir dos espaços geométricos clássicos possuem todas uma propriedade, a *comutatividade*. Afortunadamente, os conceitos que permitem estudar geometria nas álgebras, generalizam-se a álgebras que não são comutativas. Abrindo portas a novos espaços geométricos em que a noção de *ponto* deixa de ter significado. Esta nova geometria fornece a chave para o estudo da complexidade do conjunto das pavimentações de tipo A, mas ao mesmo tempo fornece os meios para o estudo da física quântica, o seu advento tem a mesma relevância que a descoberta de geometrias não-euclidianas. Se estas, mostraram não haver razão para considerar uma noção absoluta de espaço, já a geometria não comutativa, veio mostrar que a geometria não é o estudo de certo tipo peculiar de objectos, mas antes um método ou, se se quiser, uma certa abordagem racional.

Não menos surpreendente é o facto de estes objectos aparentemente simples, como são as pavimentações, e cujo valor intelectual parecia restringir-se ao seu valor estético, partilharem com realizações intelectuais sofisticadas (como a física quântica) aspectos da sua natureza.

Notas

[1] Gostos não se discutem.

[2] Assim designada porque deixa em aberto a possibilidade de se ter $d(x,y) = 0$ mesmo que $x \neq y$.

[3] Em rigor esse mínimo pode não existir, existindo contudo o respectivo ínfimo mas, para os propósitos desta exposição podemos pensar em termos de mínimos.

António M. Fernandes
Dep. Matemática — IST

Regresso às aulas

Na campanha de promoções do regresso às aulas, uma papelaria anunciava: "Um lápis, uma borracha e uma esferográfica, tudo por apenas 1 euro". O Francisco reparou que:

— Uma esferográfica é mais cara que dois lápis,
— três lápis custam mais quatro borrachas,
— paga-se mais por três borrachas que por uma esferográfica.

Quais são os preços de cada lápis, borracha e esferográfica?

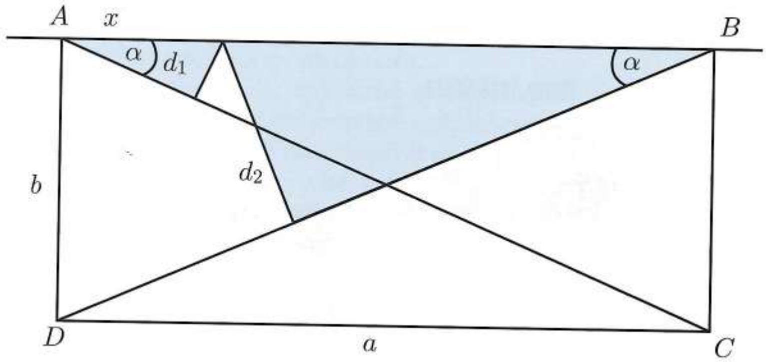
(Respostas até 31 de Dezembro)

Uma manhã no parque, com as bicicletas

O problema proposto no número 92 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Resolvi levar a Rita e a Carolina, duas simpáticas miúdas filhas de uns amigos meus, a um parque dos arredores de Braga, junto a uma estrada. O parque é rectangular e tem dois caminhos que o atravessam segundo as diagonais. Cada uma das miúdas escolheu uma das diagonais para andar de bicicleta. Quanto a mim, resolvi ficar na estrada, de tal modo que a soma das distâncias a cada um dos caminhos fosse mínima

Em que locais me poderia ter colocado?



Recebemos 11 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios (Catujal), Augusto Taveira (Faro), Bruno Oliveira (Esc. Sec. Vitorino Nemésio), Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Isabel Leite (Prado), José Paulo Coelho (Santana), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sónia Abrantes (Baixa da Banheira) e Vanderlei Monteiro e Sofia Monteiro (Chaves).

Ao analisarmos as respostas dos nossos leitores confirmamos que este problema pode ser resolvido por vários processos: com programas de geometria dinâmica, com o programa *Excel*, através da geometria analítica, aplicando as semelhanças de triângulos, ou usando a trigonometria.

O Bruno, a Graça e o José Paulo levaram o problema bem a sério e resolveram-no mesmo de três formas diferentes.

Vejamos então alguns destes processos.

Sejam, conforme se vê na figura: a e b as medidas do rectângulo $ABCD$, P o ponto do lado AB na estrada, onde está o autor, x a distância de A a P, d_1 e d_2 as distâncias de P a cada uma das diagonais, α o ângulo do lado da estrada com cada diagonal.

1] Trigonometria

Foi usada pelo Bruno, pelo José Paulo e pelo Alberto e é a mais simples e curta:

$d_1 = x \text{ sen } \alpha$
$d_2 = (a - x) \text{ sen } \alpha$
$d_1 + d_2 = \quad \text{sen} \quad =$ constante

A soma das diatâncias é constante, não tem mínimo e portanto qualquer lugar serve.

2] Semelhanças de triângulos

Este processo foi, com ligeiras variantes, usado por cinco dos leitores.

Os dois triângulos sombreados e o triângulo são semelhantes porque têm os ângulos iguais de uns para os outros. Então podemos estabelecer as seguintes proporcionalidades:

$$\frac{d_1}{x} = \frac{d_2}{a-x} = \frac{b}{\overline{BD}}$$

Daqui tira-se que:

$$\frac{d_1}{x} = \frac{b}{\overline{BD}} \text{ ou } d_1 = \frac{bx}{\overline{BD}}$$

$$\frac{d_2}{a-x} = \frac{b}{\overline{BD}} \text{ ou } d_2 = \frac{b \cdot (a-x)}{\overline{BD}}$$

$$d_1 + d_2 = \frac{b \cdot x + \cdot (a-x)}{\overline{BD}} = \frac{b \cdot a}{\overline{BD}}$$

A soma das distâncias é constante e portanto qualquer lugar serve.

3] Programas de geometria dinâmica

Foram também cinco os leitores que usaram o *GSP*, o *Geogebra* ou o *Cabri* para chegar à solução. É uma resolução muito fácil de fazer nestes programas pelo que nos parece que pode ser um bom problema a propor pelos professores aos alunos nas aulas em que disponham de computadores.

A Educação (e não só!) em debate em Serralves

Maria José Costa

Há uns meses, a Fundação de Serralves deu início ao ciclo *A crítica do contemporâneo*, um conjunto de conferências internacionais repartidas por três blocos: Política, Educação e Biologia. O evento teve como comissário geral o Prof. Doutor Rui Mota Cardoso, e a cada bloco coube um comissário e um moderador próprios: para a Educação foram convidados o Prof. Doutor Manuel João Costa, e o Prof. Doutor Alberto Amaral, respectivamente. Vejamos algumas ideias das conferências sobre Educação.

1. A primeira conferência. Alunos no papel de professores

Foi proferida por Éric Mazur, Professor na Universidade de Harvard e Professor de Física e Física Aplicada no Instituto Gordon McKay.

O conferencista expõe o método de trabalho que usa para ensinar Física: designado por *Peer instruction* — ensino/aprendizagem por pares — baseia-se na reflexão sobre um potencial escondido nos alunos como professores uns dos outros quanto ao seu desenvolvimento intelectual e cognitivo e procura tirar daí consequências para o seu empenho. Este método dá mais responsabilidade ao aluno para adquirir informação e ao professor cabe ajudar a assimilá-la; afiança que não sendo mais trabalhoso para o professor, é mais gratificante que os métodos antes utilizados. Com este método, o livro de texto passa a ter um papel diferente: os alunos lêem o assunto antes de ser apresentado nas aulas, que passam a incidir em curtas apresentações da responsabilidade do professor e elaboradas a partir das dúvidas enviadas pelos alunos por correio electrónico; segue-se um curto teste conceptual cujas respostas individuais são recolhidas com apoio das novas tecnologias, por vezes com o grau de confiança que a resposta merece a quem a dá. Os alunos são então convidados a discutir a pares a resposta dada, com o intuito expresso de convencer o colega que a sua resposta é a correcta. Depois desta discussão, o professor recolhe novamente as respostas às mesmas questões (e o grau de confiança na resposta). Consoante a percentagem de respostas certas (acima ou abaixo de 90%), segue-se um novo tópico ou são propostas novas tarefas sobre o mesmo assunto, novo teste conceptual e assim sucessivamente até atingir os níveis de compreensão desejáveis.

De um modo geral, depois da discussão a percentagem de respostas correctas sobe, bem como a segurança quanto à resposta dada. Apesar disso, e antes de entrar no próximo tópico, apresenta sumariamente a resposta correcta.

Segundo o seu autor, este método pode ser aplicado do jardim-de-infância ao ensino de pós-graduação e em qualquer disciplina.

Mazur pratica uma *educação experimental*: põe uma hipótese para melhorar as suas aulas e investiga sobre ela com rigor e método científico. Esta conferência foi mais uma oportunidade para os professores presentes reflectirem sobre o ambiente de aprendizagem que criam na sala de aula e a investigação educacional, que não é incompatível com a prática lectiva.

2. A segunda conferência. Uma estética alternativa: Arte & Biomatemática.

John Jungk, Professor no Dep. de Biologia do Beloit College, no Wisconsin, EUA, explica que para envolver os estudantes na investigação de padrões biológicos recorre a modelos informáticos de fácil uso que utilizam conteúdos matemáticos como equações diferenciais, fractais, transformações afins, geometria analítica de coordenadas polares tridimensionais, funções trigonométricas, autómatos celulares, geometria computacional e hiperbólica, teoria de grafos, mas que dispensam o domínio esses conhecimentos. Estes modelos permitem gerar objectos semelhantes aos que se encontram na natureza, explorar livremente padrões complexos e consequências de hipóteses científicas básicas a respeito da origem de diversos padrões e fazer várias experiências. Para obter uma *cópia*, os estudantes têm de examinar matematicamente o objecto e recolher os dados essenciais a introduzir, com ou sem instrumentos auxiliares (no mínimo, réguas, fitas métricas, compassos e transferidores): se a comparação dos objectos gerados e observados não satisfizer, podem repetir a simulação.

Na opinião dos alunos, este tipo de trabalho traz benefícios indirectos: ficam observadores mais cuidadosos, fazem mais perguntas sobre o que vêem, aumentam o poder de formular hipóteses para diferenças causais entre padrões teóricos e empíricos.

Os estudantes participam em actividades de elaboração, revisão e construção do modelo informático e na resolução do problema iterativo: daí os estudantes serem apresentados como autores ou co-autores de alguns módulos. Defende que a educação em ciência deve dar uma possibilidade mais robusta de preparar estudantes (todos futuros cidadãos, alguns futuros cientistas) para compreender ou participar na tomada de decisão ou em investigações científicas.

Quanto à ligação entre a Matemática e a Arte, cita e comenta quatro alternativas:

— Matemática *é* arte: teoremas e demonstrações são belos

— Matemática *como* Arte: objectos matemáticos apresentados como beleza

— Matemática *na* Arte: análise da estrutura de trabalhos de arte, como perspectiva e simetria

— Arte matemática: trabalhos que *têm* conteúdo matemático: como os de Escher.

3. A terceira conferência. Os benefícios sociais de aprender.

Proferida por Tom Schuller, Director do Centro para Pesquisa Educacional e Inovação (CERI), organismo da OCDE, que começa por destacar a existência de três tipos de capitais, todos eles sofrendo influências da educação formal: o capital humano (comportamentos, qualificações e competências adquiridas sobretudo a partir da educação informal na família; é visto como a chave para o desenvolvimento económico), o capital social (o conjunto de normas e relações que facilitam a cooperação entre grupos sociais; imprescindível para optimizar o capital humano existente) e o capital da identidade (ligada à auto-estima, ao carácter económico do capital humano e ao carácter social, estes em sentido lato). Há alguma reciprocidade entre eles: um alto capital humano geralmente ajuda a auto-estima e um forte senso de identidade pessoal é útil nas ligações sociais e vice-versa, o que não significa que não possa haver conflitos entre as diferentes formas de capital.

Faz referência ao poder transformativo da educação definido como a capacidade de ajudar cada um a mudar a sua vida do ponto de vista profissional e pessoal, por alargamento do potencial ou das aspirações; a transformação operada será avaliada pela mudança na participação política ou comunitária local ou mais global. Mas o efeito mais sistemático da educação, ou seja, o modo como a educação ajuda a enfrentar a pressão diária da vida mantendo a humanidade e identidade ou a contribuir para preparar a comunidade para fazer face à vida e estabelecer ligações sociais é mais difícil de identificar, analisar e quantificar do que em acções pontuais em que se ensina algo de carácter prático.

Estudos mostram uma correlação forte entre a aquisição educacional e a boa saúde ou a cidadania mais activa. Um nível alto de qualificação permite ser livre de vícios como o consumo de tabaco ou de drogas ilícitas, o que permite viver mais tempo: com a educação aprende-se a viver saudavelmente, quais os riscos dos excessos, como da bebida ou do fumo, o que dá oportunidade para modificar o seu comportamento — são os benefícios sociais directos.

Depois, vêm os benefícios indirectos; as habilitações adquiridas permitem arranjar um emprego melhor, ganhar mais dinheiro, viver num local mais saudável e ter esperança de viver durante mais tempo; e há o efeito colectivo de uma população mais educada num indivíduo particular: viver num meio de educação alta permite-lhe beneficiar dela por um processo próximo da osmose ou do parasitismo.

Há também efeitos perversos, que podem trazer bem-estar a uns e sofrimento a outros, ainda que de soma zero: dando mais importância às qualificações do que à experiência, corre-se o risco de camadas jovens retirarem empregos a gente mais velha que aprendeu o ofício sem ter possibilidade de se escolarizar.

4. A quarta conferência. Educação: da investigação às políticas.

William Schmidt, professor do Dep. de Psicologia Educacional e do Dep. de Estatística da Universidade do Estado do Michigan, co-director do *Centro de Políticas Educativas* do *Centro para o Estudo do Currículo*, advoga que o nível educacional é o recurso mais importante das economias actuais: num país que pretende competir economicamente, os currículos escolares devem ajudar os alunos a tornarem-se adultos competitivos; as normas de qualidade para educação, em particular em áreas como a matemática e a ciência, devem ser definidas tendo em conta as normas internacionais de referência, sobretudo das que provêm de nações economicamente mais competitivas.

Afirma que os estudos internacionais podem fomentar a mudança ao permitir a comparação entre os currículos praticados e os resultados obtidos. Procurando esclarecer, projecta uma tabela de dupla entrada com os itens estudados pelos alunos abrangidos pelo TIMSS em cada um dos anos do currículo nos países com melhores resultados, recolhidos a partir dos currículos nacionais: há itens comuns a alguns anos sucessivos mas outros são substituídos e há uma progressão entre os temas. Por outro lado, nos países cujos alunos apresentam mau desempenho há maior permanência dos itens ao longo dos oito anos. A sua pesquisa em mais de 50 países fazem-no salientar que os currículos dos alunos em países mais bem classificados nos estudos TIMSS apresentam três características:

— *Focagem:* tem a ver com o número de tópicos e o tempo necessário para que os alunos atinjam o nível pretendido; exige um pequeno número de tópicos — tópicos chave — que podem estar focados num determinado nível.

— *Rigor:* o nível de alcance dos tópicos matemáticos pode aumentar em complexidade atingindo o máximo no 8° nível com os fundamentos da álgebra e da geometria.

— *Coerência:* tem a ver com a sequência dos tópicos através dos anos de escolaridade: as matemáticas escolares devem reflectir a lógica e a estrutura da disciplina académica.

Portugal participou no TIMSS em 1995; o orador achou que faltava coerência ao currículo português da época, no sentido aqui definido, com tópicos inseridos demasiado cedo relativamente aos países do topo da lista de classificações.

O conferencista foi peremptório: o sucesso dos alunos está associado ao currículo e à sua implementação.

Foi talvez a noite em que a sala menos encheu: o tema e o conferencista mereciam maior assistência, nomeadamente de quem se encarrega do desenho curricular.

A *Crítica do Contemporâneo* será retomada em Outubro, com quatro conferências dedicadas à Biologia.

Para mais informações:

`http://www.serralves.pt/actividades/detalhes.php?id=1029`,

`mazur-www.harvard.edu`,

`http://beloit.edu/~jungck/`,

`ustimss.msu.edu` e `promse.msu.edu`

Maria José Costa

Materiais para a aula de Matemática

A tarefa *Explorar os sólidos platónicos e os seus duais* foi criada a partir de um *applet* disponível na *National Library of Virtual Manipulatives*[1]. Existem vários sites como este que disponibilizam este tipo de aplicações e que podem auxiliar os alunos e os professores nas suas actividades. A secção *Tecnologias na educação matemática*, desta revista, tem vindo a fazer referência a alguns destes programas que se encontram em sites de organizações e instituições de referência como o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) ou o Instituto Freudenthal.

Numa oficina de formação, *Materiais para o Ensino da Matemática: produzir, experimentar e reflectir*, que frequentei, dinamizada por formadores da ESE de Setúbal, no final de 2006, tivemos a oportunidade de elaborar propostas de trabalho para a aula de Matemática com suporte nas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e em particular na Internet. As tarefas que nos foram propostas e que realizámos, procuravam ter em conta o contexto da nossa actividade lectiva, pelo que aproveitei para planificar e integrar os materiais produzidos nas minhas aulas.

A exploração de uma tarefa sobre os sólidos platónicos e os seus duais por esta via foi assim realizada por mim, com uma turma de 10° ano de Matemática — B. No entanto, esta aplicação pode facilmente ser manipulada por alunos do 3° ciclo do Ensino Básico. O uso destes modelos computacionais, em articulação com os sólidos manipuláveis, foi considerado pelos alunos como de grande utilidade para a compreensão dos conteúdos matemáticos envolvidos e para o desenvolvimento de competências de visualização no espaço.

Reconheço que a aplicação desta actividade na escola, e a sua concretização pelos alunos, foi facilitada pelo envolvimento da escola no projecto CRIE (Computadores, Redes e Internet na Escola). O facto de existirem computadores portáteis e uma ligação à Internet nas escolas, proporciona as condições necessárias à exploração deste tipo de aplicações nas aulas de Matemática. O professor, conhecendo e *desbravando* estas pequenas aplicações, e lançando os desafios apropriados aos alunos, pode introduzir melhorias significativas no processo de ensino e aprendizagem.

Nota

1 `http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html`

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

Explorar os sólidos platónicos e os seus duais

No teu computador abre o seguinte site
`http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_128_g_4_t_3.html?open=instructions`
O sólido pode rodar, experimenta... (figura 1).
Através da introdução de novas figuras, quantos são os sólidos que observas?

Para cada um dos sólidos, completa a tabela:
(sugestão usa shift + clic em cima do objecto que pretendes marcar como contado)

Sólido	Número de Vértices	Número de faces	Número de arestas	Polígono da face
Tetraedro	4			
Cubo				
Octaedro			12	
Dodecaedro				Pentágono Regular
Icosaedro		20		

Vamos continuar a investigar?

Observa o sólido que se encontra na figura 2. As faces (figura 3) são constituídas por pentágonos regulares e o ângulo interno de um pentágono regular é 108°.

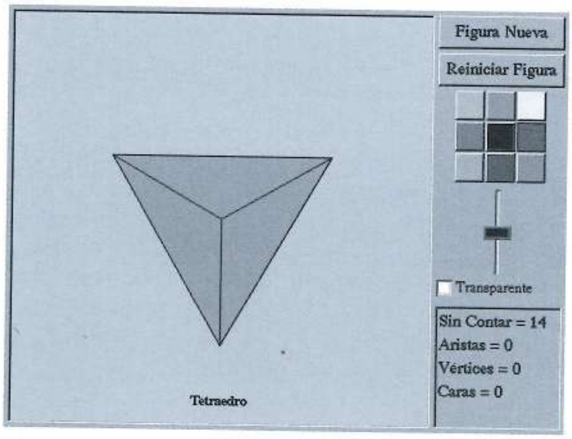


Figura 1.

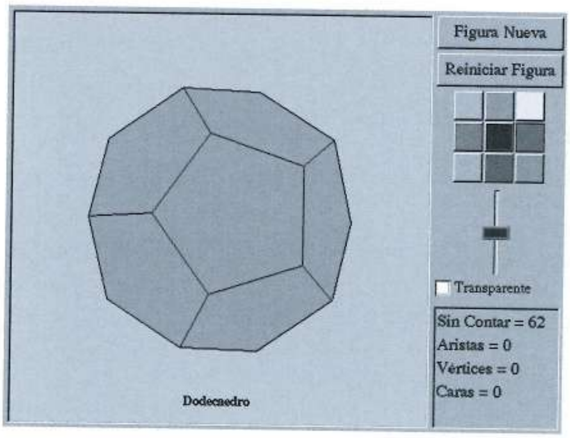


Figura 2.

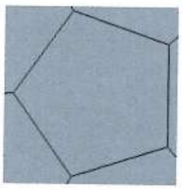


Figura 3.

Quantos são os pentágonos regulares que se podem juntar em torno de um mesmo vértice, de forma a obter o sólido da figura 4?

Consegues encontrar uma justificação para o caso do sólido seguinte?
Como podes explicar a existência de apenas cinco sólidos platónicos?
Quais são os polígonos regulares que se podem encontrar nas faces dos diferentes sólidos platónicos?
Existe uma razão para não encontrar outros polígonos regulares?

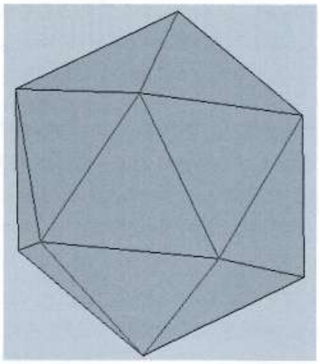


Figura 4.

Numa nova aplicação (`http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_131_g_4_t_3.html?open=instruction`) podes encontrar cada um dos sólidos platónicos e os respectivos duais. (figura 5)

Completa a tabela:

Poliedro	Dual	Nº de faces do sólido	Nº de vértices do dual
Tetraedro			
	Octaedro		
Octaedro			
	Icosaedro		
Icosaedro			

Depois de completares a tabela, explica como se obtém o dual da figura 6?

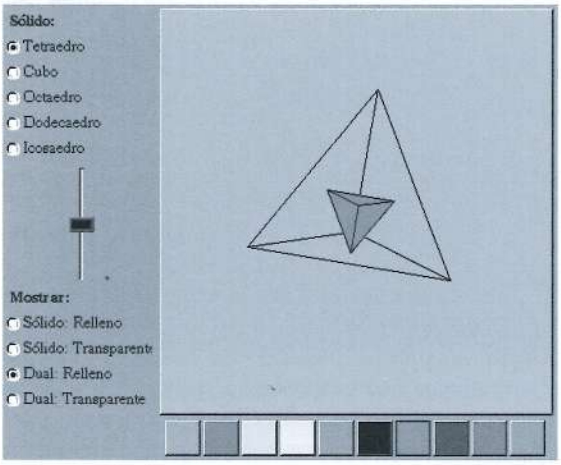


Figura 5.

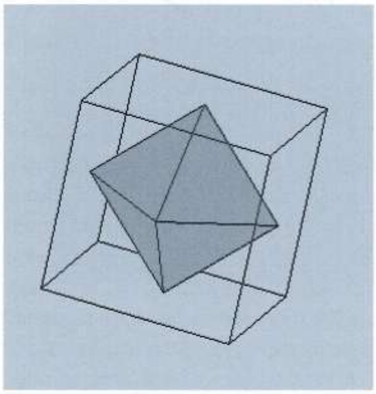
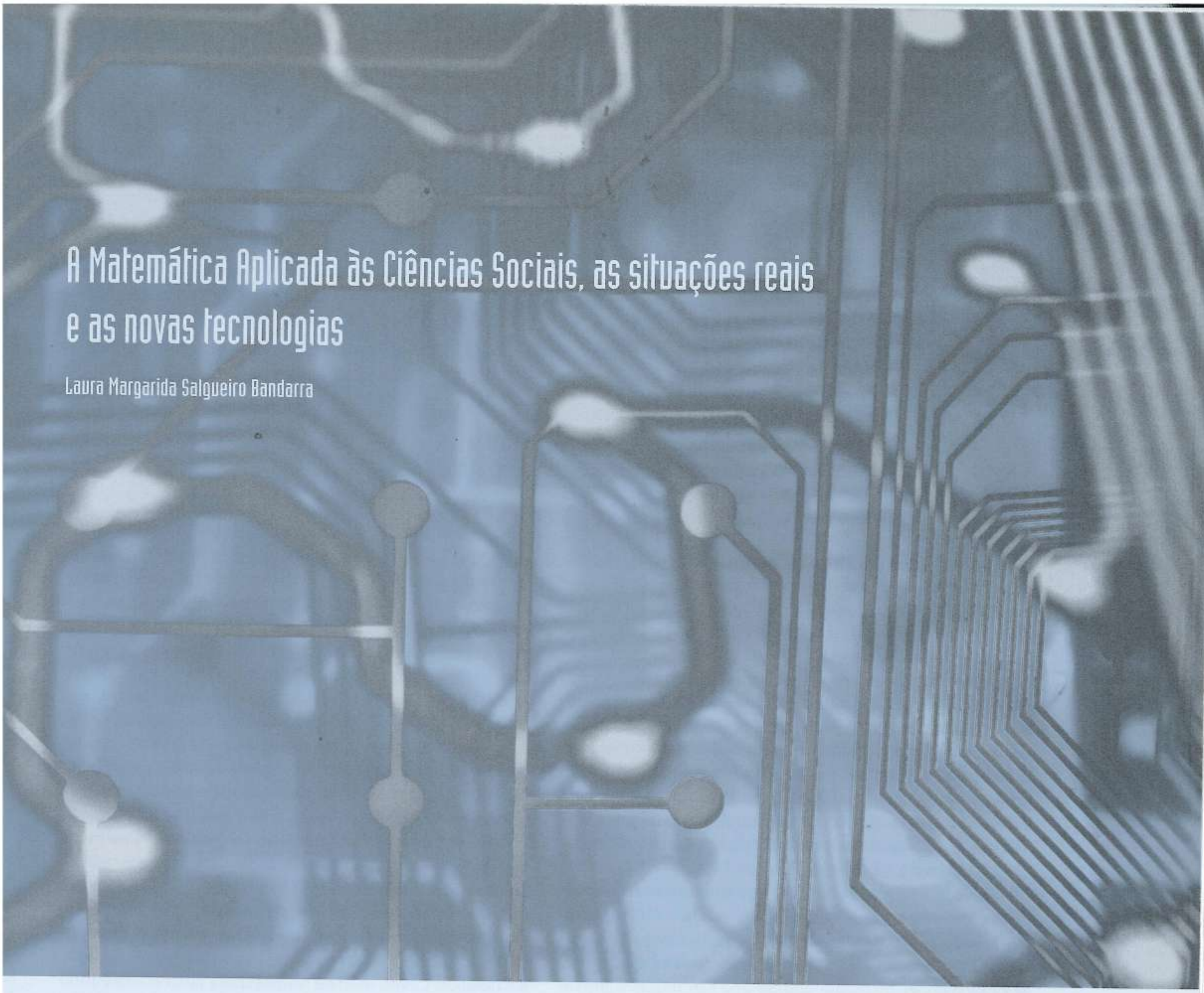


Figura 6.



A Matemática Aplicada às Ciências Sociais, as situações reais e as novas tecnologias

Laura Margarida Salgueiro Bandarra

Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.

Galileu Galilei

Neste artigo, irei descrever algumas experiências que decorreram, no ano lectivo 2006/2007, numa turma do 10.° ano do Curso *Geral de Ciências Sociais e Humanas*, em torno do ensino e aprendizagem dos conceitos estatísticos. Saliente-se que, durante todo o processo, tive sempre presente as orientações emanadas pelo programa oficial e pelos investigadores, e tentei transmitir aos alunos que mais importante do que saber calcular as medidas estatísticas, é perceber os seus significados. Mais importante que saber construir um gráfico, é saber interpretá-lo. Mais importante que saber os conceitos e as técnicas, é saber interpretar e criticar o mundo que nos rodeia, e participar nele de forma activa.

Perspectivas curriculares

A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) surgiu num contexto de diversificação de currículos para alunos do Ensino Secundário e, em particular, para os que frequentam os Cursos *Geral de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território*.

O programa desta disciplina estabelece, como objectivo fulcral, a abordagem de situações reais que permitam o desenvolvimento das capacidades de formular e resolver matematicamente problemas, e de comunicar ideias matemáticas. Considera que, mais do que pretender que os alunos dominem questões técnicas e de pormenor, é necessário que eles usufruam de experiências matemáticas significativas que lhes incutam a importância da Matemática nas suas actividades futuras. Refere, ainda, propósitos de Educação para a Cidadania e o papel importante assumido pela Escola, realçando a necessidade de dotar os alunos de ferramentas que permitam uma melhor compreensão do mundo que os rodeia.

De entre os inúmeros assuntos que ligam a Matemática à realidade, o referido programa atribui um lugar de destaque à *Estatística* e caracteriza-a como "uma ciência que fornece os instrumentos próprios para melhor seleccionar e tratar a quantidade de informação que nos chega" (Silva, Martins, Martins e Loura, 2001, p.2). A valorização da Estatística assumida no programa relaciona-se directamente com a elevada importância da sua utilização para interpretar problemas da realidade e estudar situações que preparem o jovem para uma participação activa no mundo actual, e com as aplicações variadas que esta área da matemática possui, quer em ciências como Economia ou Ciências Humanas, quer em áreas como a Administração Pública, o Planeamento e Controlo de Produção.

Denote-se que a perspectiva assumida neste documento vem na prossecução do anteriormente estipulado para os alunos do ensino básico. Assim, segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), um aluno que finalize o ensino básico é matematicamente literado se também for estatisticamente competente, o que "inclui conhecimentos de Estatística e Probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos da actividade científica, profissional, política e social" (p. 77).

O modo como a *Estatística* é introduzida na sala de aula deve concordar com as causas da sua inserção no programa. Os conceitos estatísticos devem ser leccionados de forma a utilizar a Matemática como uma ferramenta que permite compreender melhor o mundo que nos rodeia e interagir com ele de uma forma informada. A brochura *Estatística*, elaborada em 1997, clarifica alguns dos princípios metodológicos que orientam a Educação Estatística: (i) os conceitos estatísticos devem ser abordados em contextos significativos; (ii) a comunicação dos resultados de actividades práticas e de problemas deverá ser acompanhada de relatórios escritos e discussão na turma; e (iii) o desenvolvimento de projectos de carácter investigativo pelos alunos deve ser levado a cabo através de trabalhos de grupo. Uma perspectiva semelhante possuem Batanero e Díaz (2004). Segundo estas investigadoras, leccionar *Estatística* implica concretizar trabalhos com projectos, sobre temas sugeridos pelo professor ou pelos alunos, em que seja notória a execução das diferentes fases de uma investigação estatística: definição de um problema, decisão sobre os dados a recolher, recolha e análise de dados, e obtenção de conclusões. Referem, ainda, a importância das competições estatísticas organizadas por escolas e instituições superiores.

As novas tecnologias de informação e comunicação têm desempenhado um papel fulcral no ensino e aprendizagem da Estatística, pois permitem a realização de cálculos morosos e facilitam a compreensão e interpretação de um leque variado de representações gráficas. Em particular, segundo Canavarro (2001), as calculadoras gráficas possibilitam que os alunos centrem a sua atenção nos aspectos mais elaborados do trabalho, como o interpretar, organizar, discutir e argumentar, e desvalorizem os aspectos mais mecânicos e rotineiros. Por sua vez, a Internet surge como um recurso fundamental, pois possibilita a obtenção de uma variedade de dados estatísticos.

Após analisar algumas orientações curriculares, irei relatar duas iniciativas concretizadas no 10.° ano de escolaridade, envolvendo uma turma de MACS.

A experiência do 10.° ano

A turma do 10.° ano de MACS é composta por 21 alunos, com idades compreendidas entre os 15 e os 18 anos. Oriundos de meios sócio económicos desfavorecidos, estes alunos possuem hábitos de trabalho e de leitura claramente parcos, e reduzidos conhecimentos sobre o mundo actual. Apenas três foram meus alunos em anos anteriores.

No início do ano lectivo, em diálogo franco e aberto com a turma, ficou claramente definido que a opção de enveredar pelo Curso *Ciências Sociais e Humanas* foi influenciada pela evidente aversão à Matemática. Para eles, esta disciplina resumia-se a um amontoado de contas e letras, onde as equações possuem um lugar de destaque e uma componente fortemente negativa. Nesse diálogo, ficou também claro que o absentismo era um factor bastante marcante na vida destes alunos. Num inquérito efectuado em Janeiro de 2007 sobre o ensino e aprendizagem da Estatística, quatro alunos não conseguiram expressar qualquer tipo de opinião, pois afirmaram que não presenciaram as aulas do 3.° ciclo em que se leccionaram tais conteúdos. Enfim, perante tal panorama, um professor deve colocar-se a si próprio inúmeros desafios: Como motivar alunos desta faixa etária e inseridos nesta área de ensino para a aprendizagem de conteúdos matemáticos? Como colocar os alunos a escrever de forma fluente e a interagir com o mundo que os rodeia? Como torná-los cidadãos mais activos e críticos?

Saliente-se que durante o 1.° período foi efectuado um trabalho sistemático e contínuo, em torno do tema *Métodos de Apoio à Decisão*. Dinamizaram-se debates, efectuaram-se relatórios, organizaram-se portefólios individuais, elaboraram-se composições, fizeram-se pesquisas na Internet, ... Portanto, no início do 2.° período, os alunos já manifestavam uma franca melhoria e conseguiam elaborar trabalhos em grupo, com alguma qualidade.

A planificação da unidade *Estatística* envolveu a consecução de um conjunto de etapas necessárias à aquisição de uma visão global da forma como os conteúdos devem ser leccionados. Analisei documentos elaborados por instituições (os do Ministério da Educação e do NCTM), efectuei uma pesquisa nas páginas de Internet, uma leitura da bibliografia existente e uma análise atenta dos manuais escolares, bem como das brochuras editadas pela APM. Na fase seguinte, em diálogo reflexivo organizado em conjunto com a

professora que lecciona também MACS, decidimos que tarefas se deveriam concretizar.

Assim, após efectuar um teste diagnóstico e um inquérito individual e analisar com os alunos os resultados obtidos, foi implementado um conjunto de tarefas diversificadas. Concretizaram-se trabalhos de projecto, realizaram-se debates e exploraram-se tarefas de natureza investigativa. Durante todo este processo, a calculadora gráfica e o computador foram recursos diariamente utilizados. Denote-se que, no final da exploração de cada tarefa, tive sempre a preocupação de dinamizar uma aula de discussão dos resultados obtidos.

Neste artigo, irei apenas comentar a dinâmica desencadeada pela exploração de duas tarefas. A selecção destas relaciona-se directamente com os gostos pessoais manifestados pelos alunos, durante as entrevistas individuais concretizadas em Abril e Maio de 2007. Assim, de acordo com as suas afirmações, as tarefas mais relevantes foram o *Estudo das características físicas dos alunos* e a *Comparação entre histogramas e diagramas de extremos e quartis*.

Estudo das características físicas dos alunos

A adolescência é uma fase da vida em que existem muitas transformações físicas, um despertar pela curiosidade do próprio corpo e, por vezes, uma certa rejeição do mesmo. Sendo assim, no início da unidade *Estatística*, considerei interessante propor aos alunos a concretização de um projecto de natureza investigativa, centrado no estudo das suas características físicas. A ideia pareceu-lhes aliciante.

Cedo, estabeleceram que se deveria estudar as variáveis *idade*, *peso*, *altura*, *número de irmãos*, *cor dos olhos*, e *programa de televisão* e *grupo musical preferidos* e que cada grupo deveria efectuar o tratamento estatístico de uma das variáveis. Depois, munidos com os instrumentos de medição fornecidos por mim (balança e fita métrica), organizaram-se em grupos e decidiram que alunos deveriam recolher os dados relativos às variáveis *altura* e *peso*. Consideraram que a aula seguinte deveria decorrer na sala de informática, onde poderiam recorrer à folha de cálculo para efectuar o tratamento dos dados. Assim, utilizando as funcionalidades desta ferramenta computacional, os grupos organizaram e representaram os dados e calcularam algumas medidas estatísticas (moda, média e mediana). Na terceira aula, apresentaram ao grupo-turma as conclusões obtidas, bem como a tabela e gráficos elaborados. Para concretizar esta etapa, os alunos utilizaram as potencialidades do quadro interactivo existente na sala de Matemática.

Após analisarem os resultados obtidos relativos às variáveis *peso* e *altura*, os alunos manifestaram alguma curiosidade em tentar perceber se os seus índices de massa corporal ultrapassavam os limites dos estipulados para uma pessoa física e mentalmente saudável.

Consultando uma página de Internet sobre este assunto, comprovaram que um deles possuía peso excessivo e que duas raparigas apresentavam sinais visíveis de manifestada carência física. Perante estes factos, surgiu a necessidade de se analisar a actual *Roda dos Alimentos*, bem como as regras inerentes à prática de bons hábitos alimentares. Comentou-se, ainda, o documento existente no site do projecto *ALEA* sobre a alteração dos hábitos alimentares dos portugueses (`http://alea-estp.ine.pt/`).

Um outro aspecto que também despoletou as suas curiosidades prende-se com a existência de alguns alunos com alturas demasiado reduzidas ou elevadas. Perante esta situação, surgiu a necessidade de introduzir a noção de *desvio-pa-*

drão e perceber como se calcula esta estatística, utilizando a calculadora gráfica. Após efectuarem os cálculos, eles constataram que o desvio-padrão referente à variável *altura* era elevado e perceberam que este conceito caracteriza a concentração/dispersão de dados.

Ainda sobre esta variável, os alunos também manifestaram interesse em investigar se as alturas dos indivíduos variam ao longo dos tempos. Assim, para comprovar a teoria de que as alturas dos indivíduos evoluem, eles estabeleceram que se deveria recolher informações sobre as características físicas dos seus antepassados. Na aula seguinte, munidos com as medidas das alturas dos pais e dos avós, os alunos transmitiram as informações recolhidas, organizaram e representaram os dados, determinaram algumas estatísticas e tiraram algumas conclusões, utilizando a folha de cálculo. Durante o debate realizado em torno das conclusões obtidas, ficou estabelecido que as gerações vindouras possuem sempre alturas mais elevadas que as antecedentes porque os hábitos alimentares e a prática de exercício físico sofreram algumas alterações, nos últimos anos. Um dos grupos salientou, ainda, que "os primeiros reis de Portugal deveriam ser pessoas baixas porque as portas dos castelos e as camas que existem nos palácios possuem tamanho reduzido". Um outro considerou esta observação óbvia porque os primeiros homens eram minúsculos. Perante estas observações, a turma sentiu a necessidade de consultar algumas páginas de Internet sobre este tema.

Sobre esta iniciativa, um dos alunos regista o seguinte: "A aula mais marcante para mim foi quando a turma analisou o peso, a altura e os gostos pessoais. (...). A turma encontra-se mais motivada quando temos tarefas onde se analisam dados nossos". Um outro salienta que aprecia "estas tarefas porque tem que se ver o que acontece. Prefiro à resolução de exercícios".

Sobre a utilização da folha de cálculo, um deles comenta o seguinte: "a parte mais interessante das tarefas é termos utilizado muito a informática na elaboração das tarefas, que eram facilitadas pela sua utilização, permitindo um maior conhecimento e aprendizagem da matéria, pois éramos nós que as realizávamos".

Comparação entre histogramas e diagramas de extremos e quartis

Ao apresentar a tarefa à turma, solicitei que, durante a sua exploração, os alunos elaborassem um relatório, onde deveriam explicitar os seus raciocínios, referir as suas dificuldades e exprimir as suas opiniões. Tal como nas restantes aulas, também nesta foi adoptada a dinâmica de trabalho em grupo.

Ao analisarem o enunciado da tarefa proposta, os alunos perceberam que deveriam estabelecer relações entre dois tipos de representações gráficas: histogramas e diagrama de extremos e quartis.

Numa primeira abordagem, eles sentiram a necessidade de rever alguns dos conceitos que foram leccionados nas aulas anteriores, nomeadamente as noções de *quartil*, *desvio-padrão*, *média* e *mediana*. Durante a exploração da tarefa, alguns grupos utilizaram a calculadora gráfica, fizeram algumas representações gráficas e tentaram relacionar as alturas das barras dos histogramas com as dimensões das caixas dos diagramas de extremos e quartis. Outros atribuíram escalas aos histogramas e representaram os valores fictícios na calculadora gráfica. Um deles analisou o livro adoptado e tentou perceber as relações que se podem estabelecer entre as diversas representações. Na fase final desta primeira parte da abordagem da tarefa, todos os grupos conseguiram relacionar as diversas representações gráficas, mas alguns deles obtiveram conclusões incorrectas.

Na fase seguinte, os alunos analisaram o guião fornecido em aulas anteriores e elaboraram os relatórios. Efectuaram um texto sobre a forma como ocorreu a exploração da tarefa, as dificuldades sentidas e a dinâmica de trabalho em grupos.

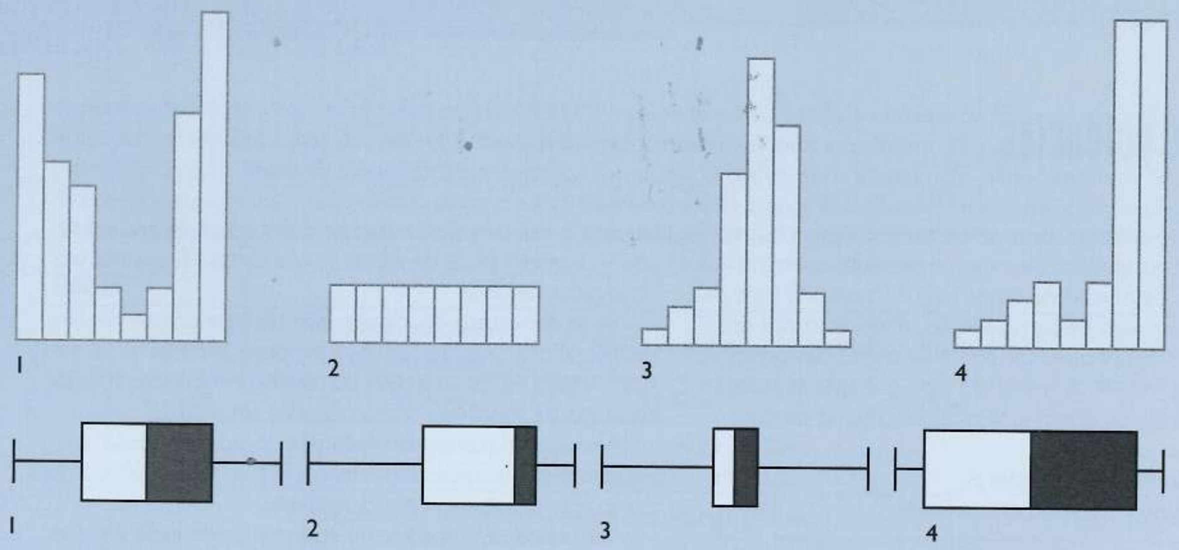
Analisando os relatórios efectuados, pode-se verificar que, em termos gerais, os alunos compreenderam os significados dos conceitos estatísticos e interpretaram correctamente as representações gráficas. Gostaram muito desta tarefa porque "sem ajuda dos algarismos tivemos que aplicar conhecimentos adquiridos ao longo das aulas."

Na aula de discussão dos resultados obtidos, todos os alunos colaboraram na elaboração de um texto descritivo dos raciocínios e conceitos a utilizar de forma a resolver a tarefa de forma correcta. Considero que esta aula decorreu de uma forma muito produtiva porque existiu uma clarificação dos significados de alguns conceitos e a compreensão de que a utilização da calculadora gráfica relativiza os cálculos morosos e desencadeia o surgimento de um ambiente de natureza investigativo.

Durante a realização das entrevistas individuais, surgiram as seguintes opiniões:

"Neste ano, a tarefa em que aprendemos mais foi aquela em que tinha que se ligar histogramas com diagramas de extremos e quartis porque tinha que relacionar tudo".

"Neste ano, a tarefa que gostei mais foi aquela em que se relacionava os histogramas com os diagramas de extremos e quartis porque, no início, o meu grupo pensava que as coisas eram de uma maneira e depois analisámos melhor e dava outra coisa. À



Faz corresponder os gráficos das frequências absolutas aos diagramas de extremos e quartis.

primeira vista nem era aquilo que parecia. Gosto de fazer relatórios em grupo porque todos podem expor as ideias, nem todos têm a mesma maneira de explicar as coisas e também aprendemos com os outros e todos fazem criticas".

"As aulas mais importantes foram aquelas em que se corrigiam os relatórios. Eram as aulas onde se aprendia mais, relembrava os conhecimentos, melhorava a capacidade de expressar sobre a matéria".

A concretização destas iniciativas permite retirar algumas conclusões fundamentais. Em primeiro lugar, utilizar a *Estatística* para compreender a realidade que nos rodeia permite que se efectuem aprendizagens significativas, em que os alunos atribuem significado aos conceitos e constroem os seus conhecimentos a partir dos saberes construídos diariamente. Depois, a dinamização do trabalho colaborativo e a necessidade de os alunos assumirem o papel de investigadores desencadeiam o surgimento de um ambiente dinâmico, onde se privilegia a organização de ideias, a adopção de decisões, a argumentação de opiniões e a recolha sistemática de informações relacionadas com os temas a estudar. Por último, é de salientar o papel activo desempenhado por todos os alunos, pois as suas intervenções foram fulcrais para a edificação de pessoas mais activas e autónomas, que intervêm na realidade, alterando-a de forma positiva.

Reflexão final

Motivar os alunos para a exploração de tarefas, em que eles desempenham o papel de investigadores e utilizem as novas tecnologias, permite edificar indivíduos mais autónomos e activos, que constroem os seus próprios conhecimentos. Mais do que resumir a prática educativa à transmissão dos conteúdos estipulados oficialmente, é necessário envolver os alunos na abordagem de situações relacionadas com o mundo que os rodeia e sobre assuntos das suas preferências, para que possam atribuir significado aos conceitos. Mais do que ministrar um saber organizado em compartimentos estanques e desligados entre si, é necessário estabelecer conexões entre os diversos conhecimentos escolares (ou não) e permitir que os nossos alunos compreendam que "não há nenhum fenómeno da Matemática, por mais abstracto que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenómenos do mundo real." (Nicolai Lobachevsjy)

Não há nenhum fenómeno da Matemática, por mais abstracto que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenómenos do mundo real.

Nicolai Lobachevsky

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Batanero, C. & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE. Obtido de `http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ICE.pdf` em 10 de Março de 2007.

Canavarro, A. P. (2001). Estatística e calculadoras gráficas. Em SPE, APM e DEEIOFCUL (Ed.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*, 159-167.

Silva, J. (Coord.), Martins, M., Martins, A. & Loura, L. (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: ME-DES.

Martins, M.E.G. (coord.), Monteiro, C., Viana, J.P. & Turkman, M.A. (1997). *Estatística: Matemática — 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: ME-DES.

Laura Margarida Salgueiro Bandarra
Escola Secundária c/ 3.º CEB Dr. Manuel Fernandes

Jogo das potências

As potências e as operações entre estas constituem o grande foco deste jogo, embora também se pretenda estimular em simultâneo o desenvolvimento do cálculo mental. O jogo das potências é um jogo de cartas simples, onde os alunos recorrem aos seus conhecimentos sobre as regras das potências para pontuar. Trata-se assim de um jogo que apenas pode ser utilizado quando os alunos já têm conhecimento destas.

N° de jogadores: 2 a 4 jogadores.
Nível de ensino: 7° ano de escolaridade.

Material necessário: um baralho de 40 cartas com expressões envolvendo potências.

Objectivo do jogo: formar pares de cartas com expressões que tenham o mesmo valor.

Preparação do jogo

A primeira coisa a fazer é decidir qual o jogador que será o presidente da mesa de jogo e a quem caberá o registo das pontuações. E, para tal, de entre os vários processos usualmente utilizados neste tipo de situações, sugere-se que se opte por lançar um dado e se escolha o jogador que alcançar a maior pontuação. Este será o presidente da mesa de jogo e também o primeiro a jogar.

Modo de jogar

No início do jogo as cartas são baralhadas e distribuem-se cinco a cada jogador, sendo as restantes colocadas em monte sobre a mesa, viradas para baixo.

Na sua vez, cada jogador coloca sobre a mesa o par (ou pares) de cartas que tenha conseguido formar com as cartas que lhe foram distribuídas, cujas expressões representem o mesmo valor. Os adversários analisam se o par (ou pares) é válido e, caso entendam que é, o presidente da mesa de jogo atribui ao jogador um ponto por cada par apresentado. As cartas jogadas são então recolhidas e colocadas num monte ao lado do baralho, viradas para cima, e o jogador retira do baralho o número de cartas necessário para tornar a ficar com o número inicial de cartas (cinco cartas). É então a vez do jogador seguinte.

Se se der o caso do jogador não ter nenhum par de cartas (ou afirmar não ter), o jogador deve entregar uma das suas cartas e retirar uma nova do baralho em sua substituição, passando de imediato a vez ao jogador seguinte.

No caso do par apresentado pelo jogador não estar correcto, o presidente da mesa deverá retirar-lhe um ponto na pontuação alcançada, como penalização.

Terminada uma rodada, ou seja, depois de cada um dos jogadores ter tido ocasião de jogar, o presidente da mesa deve baralhar entre si as cartas que saíram de jogo, juntá-las ao baralho de onde estão a ser retiradas as novas cartas e baralhar novamente.

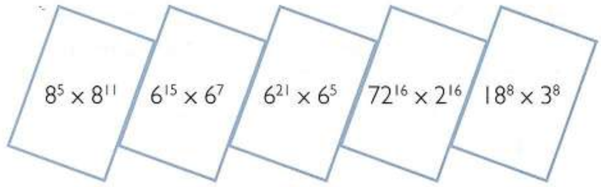


Figura 1

Fim do jogo

O facto do baralho ser sucessivamente reabastecido, leva a que o jogo não termine por falta de cartas. Assim, o final do jogo será ditado pelo fim do período de tempo previamente estabelecido para a duração do jogo ou por ter sido alcançado o número de jogadas que se acordou à partida que seria permitido a cada jogador. O vencedor será então o jogador que conseguiu formar mais pares e consequentemente obteve mais pontos.

Exemplo de uma jogada

Um jogador recebe as cartas da figura 1. Identifica as expressões $6^{15} : 67$ e $(18 : 3)^8$ como tendo o mesmo valor e, quando chega a sua vez de jogar, coloca-as sobre a mesa. O par é validado pelos adversários e o presidente da mesa atribui-lhe um ponto. As cartas são então colocadas num monte ao lado do baralho, viradas para cima, e o jogador retira duas novas cartas do baralho. A jogada está terminada e é agora a vez do jogador seguinte.

O baralho de cartas

O baralho de cartas é constituído por 40 cartas que dão origem a cinco valores diferentes (8^6, 6^8, 36^{16}, 6^{16}, 8^{16}), sendo que para cada valor existem oito expressões diferentes.

Tabela 1

	8^6	6^8	36^{16}	6^{16}	8^{16}
Expressão em cada carta	$8^2 \times 8^4$	$6^5 \times 6^3$	$36^4 \times 36^{12}$	$6^9 \times 6^7$	$8^9 \times 8^7$
	$8^9 : 8^3$	$6^{10} : 6^2$	$36^{10} \times 36^6$	$6^8 \times 6^8$	$8^5 \times 8^{11}$
	$16^6 : 2^6$	$18^8 : 3^8$	$18^{16} \times 2^{16}$	$3^{16} \times 2^{16}$	$4^{16} \times 2^{16}$
	$4^6 \times 2^6$	$3^8 \times 2^8$	$9^{16} \times 4^{16}$	$6^{21} : 6^5$	$8^{21} : 8^5$
	$8^{14} : 8^8$	$6^{15} : 6^7$	$36^{20} : 36^4$	$18^{16} : 3^{16}$	$8^{30} : 8^{14}$
	$(4 \times 2)^6$	$(18 : 3)^8$	$72^{16} : 2^{16}$	$(6^4)^4$	$16^{16} : 2^{16}$
	$(8^3)^2$	$(6^4)^2$	$(36^4)^4$	$(6^2)^8$	$(8^2)^8$
	$(8^2)^3$	$(6^2)^4$	$(36^2)^8$	$(6^8)^2$	$(8^8)^2$

Helena Rocha
Universidade Nova de Lisboa

Junte-se à APM em 2007

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

Quadro 1

Sócio	Sócio residente no estrangeiro	Sócio Estudante	Sócio Aposentado	@-Sócio*
47,50€	51,60€	33,50€	37,00€	37,00€
Revista *Educação e Matemática* impressa e *on-line* (saem 5 números por ano e uma delas é temática)				Revista *Educação e Matemática on-line*
APM*informação* impresso e *on-line* (4 números por ano)				APM*informação on-line*
Opção de assinatura da revista *Quadrante* impressa (2 números por ano — 11,00 €)				
Acesso à zona *on-line* para sócios				
Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)				
Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público				
Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições				
Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento				
Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção				

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Instituições

Quadro 2

Opções			Valor
Opção 1	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)		36,50€
Opção 2	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)		21€
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	47,50€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15,50€
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* — 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	68€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15,50€

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções