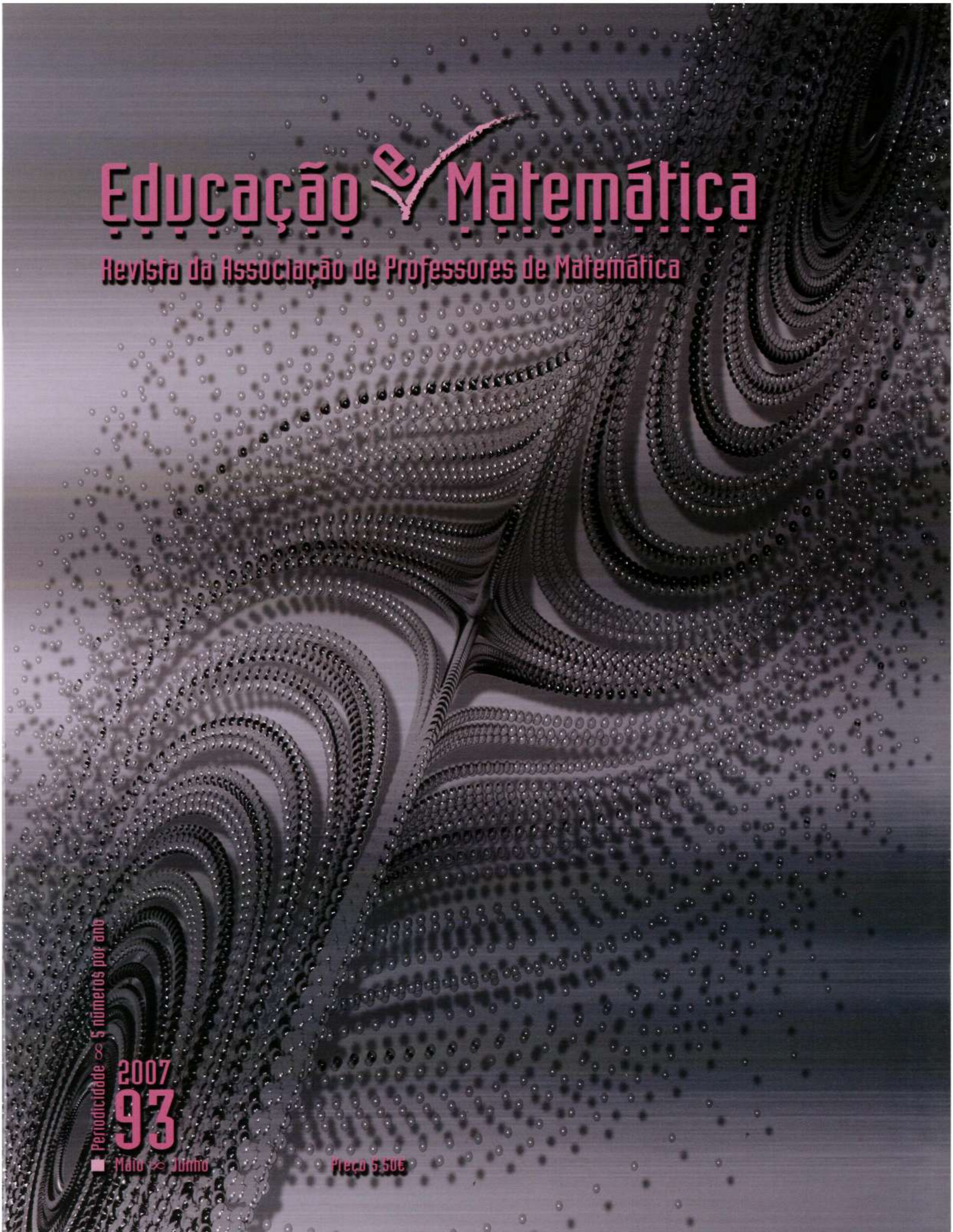
# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2007

93

Maio ∞ Junho

Preço 5.50€

# ficha técnica


EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

**Directora** Ana Paula Canavarro
**Subdirectora** Adelina Precatado
**Redacção** Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Claúdia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
João Torres
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia
Nuno Candeias
Paulo Dias

**Colaboradores Permanentes**
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

**Capa** António Marques Fernandes
**Paginação** Gabinete de Edição da APM

**Entidade Proprietária**
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

**Data da publicação** Junho 2007
**Tiragem** 4000 exemplares
**Periodicidade**
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

**Impressão**
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

**Depósito Legal** nº 72011/93
**Registo no ICS** nº 124051

**Porte Pago**


## Sobre a capa

A capa deste número reproduz uma visão particular de um objecto matemático bastante conhecido — o atractor de Lorenz. O verdadeiro attractor é de facto uma curva no espaço. Esse objecto contínuo é, neste caso, substituído por um objecto discreto, consistindo de 20000 pequenas esferas no espaço, cujos centros são determinados pela resolução numérica das equações diferenciais que determinam o atractor de Lorenz.

**António M. Fernandes**

## Neste número também colaboraram

Ana Cristina Tudella, Arsélio Martins, Cristina Fonsec, Eduardo Veloso, Elsa Barbosa, Equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido do Número, João Janeiro, Luís Reis, Margarida Graça, Margarida Santos, Maria João Gouveia, Marília Pires, Rita Bastos, Sara Monteiro, Suzana Nápoles, Teresa Olga Duarte, Viktor Kravchenko.

## Correspondência


Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt


## Nota

# Editorial

## As políticas vão a exame

Arsélio Martins

Dos últimos governos da nação, não houve um único que tivesse ignorado a importância do ensino da matemática. Não se trata de mera propaganda política e, antes, é consequência do reconhecimento generalizado da necessidade de formação matemática de todos os cidadãos. Os governos têm sido obrigados pela opinião pública (seja isso o que for) a dar contas da sua acção nesse campo, a dar informação sobre os resultados, assumindo sucessivos falhanços e propondo medidas para superar deficiências.

A generalidade dos eleitores pouco reclama sobre a qualidade da formação e a natureza das aprendizagens e mede o bom desempenho em educação por resultados das provas nacionais. Nos últimos anos, os governos que tentaram eliminar exames ou provas nacionais de português ou matemática esbarraram com oposições poderosas e recuaram. Essa oposição tem expressão exterior às escolas básicas e secundárias e ao conjunto dos agentes educativos. Os governos e os agentes educativos sabem que não é possível obter resultados globalmente positivos em provas de aferição determinadas para os conhecimentos definidos centralmente como essenciais. Os resultados globalmente positivos poderiam ser obtidos pelo reconhecimento das aprendizagens que a primeira aferição validasse. Os exames nacionais esquecem as diferenças entre escolas e esquecem a diversidade de condições sociais dos jovens chamados a prestar provas, bem como esquecem a diversidade das interpretações e das práticas dos professores no cumprimento dos programas nacionais em contextos diferenciados.

Podemos reconhecer que esse acerto é feito pela realização dos sucessivos exames, se estes estiverem a ser acompanhados de estudos detalhados sobre resultados consolidados e as respostas dadas ao longo de vários anos. Reconhecermos que os governos podem aplicar exames leva-nos a recomendar aos professores que mobilizem a favor do ensino todos os materiais produzidos e publicados pelo GAVE para os diversos níveis de ensino. Para aumentar a compreensão dos problemas e exercícios que podem ser objecto de exame sem que possam ser enfrentados com êxito por rotinas, pela execução acrítica e pobre em compreensão dos conceitos e técnicas matemáticas.

As iniciativas dos governos viradas para um ou outro aspecto do ensino da matemática, sejam elas adaptações curriculares, formação de professores, apetrechamento das escolas ou ampliação dos impactos dos resultados dos exames nacionais ou testes internacionais, aumentam a pressão sobre as escolas e os professores no sentido do cumprimento de programas escolares nacionais. Tem força a ideia de que os professores têm tendência para abordar os conteúdos que mais lhes agradam ou para se demorarem neste ou naquele tema que consideram importante. Sempre que as competências a desenvolver apareceram independentes de um corpo completo de conhecimentos, conceitos e técnicas (números e cálculo, geometria e medida, álgebra e funções, estatística e probabilidade) os professores têm tendência a empobrecer a variedade de conceitos leccionados. Há quem considere que, sem exames nacionais, há áreas de conhecimentos básicos em matemática a ser automaticamente prejudicadas. A existência de exames condiciona fortemente a acção dos professores que mantêm ainda assim uma separação artificial entre a sua acção e os resultados dos exames. As medidas dos governos na melhoria das condições das escolas tende a criar na opinião pública uma exigência maior sobre os resultados e pretendem passar a maior fatia das responsabilidades para o corpo dos professores, procurando separar o resultado da acção dos professores dos resultados de outras acções (ou inacções), até considerarem que os resultados dos exames são independentes das condições económicas, diferenças culturais e de escolarização das famílias.

Os planos de acção para a matemática escolar básica partiram de uma iniciativa central e tornaram-se planos por adesão voluntária(?) de escolas espalhadas pelo país. Mais de um milhar de escolas aceitaram tomar iniciativas locais com vista à melhoria dos resultados a matemática. As escolas puderam escolher as oportunidades e os grupos de estudantes sobre os quais se comprometeram a intervir especialmente. Também por isso, esta iniciativa central assume uma grande variedade de aplicações locais — variedade de públicos, variedade em estratégias de intervenção, variedade na distribuição no tempo, etc — que retira todo o sentido a qualquer atribuição de influência de um primeiro ano de aplicação do plano na melhoria dos resultados de exames. Cada escola deve responder pelos resultados da sua iniciativa local que, no melhor dos casos, pode ter sido intencionalmente dirigida a estudantes em início de um dos ciclos do ensino básico e que, obviamente, não estão a prestar provas ao fim do primeiro ano. Pode mesmo ter acontecido que este primeiro ano de candidatura e início de actividade corresponda mais a encomenda de compromissos de gestão do que a compromissos dos professores relativamente às suas práticas reais.

Nenhuma destas considerações pode iludir a necessidade de avaliar as intervenções locais pelos resultados obtidos. Não são os exames? Não são. Cada plano de escola deve responsabilizar a escola e os seus professores relativamente ao compromisso que assumiram. Não se pode esperar mais que isso e isso é o mais importante. Porque é também sobre isso que, ao fim de cada ano e dos três anos de aplicação, poderemos medir o impacto das iniciativas do governo.

Claro que as políticas também podem fazer exame e podem reprovar.

**Arsélio Martins**
**Escola Secundária José Estevão**

# Pontos críticos nos programas do Ensino Básico

## A discussão interna, na APM... e agora a discussão pública

A Direcção da APM

Em Junho de 2006, com o objectivo de melhorar o ensino da disciplina de Matemática, a Sra. Ministra da Educação anunciou um conjunto de 5 acções distribuídas por 15 medidas, a que chamou Plano de Acção para a Matemática. Uma dessas medidas, a 10.ª, é o "Reajustamento dos Programas de Matemática actualmente em vigor para os três ciclos do ensino básico, adoptando o Currículo Nacional do Ensino Básico como referência". Embora já estivesse previsto o seu reajustamento em 2001, quando foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB), também conhecido por "documento das competências", de facto tal acabou por não acontecer até hoje.

Em Janeiro deste ano, foi proposto e aceite, na reunião do Conselho Nacional da APM, que se lançasse uma auscultação aos sócios sobre o que consideravam ser os *pontos críticos dos actuais programas de Matemática do ensino básico*. Pretendia-se assim que a APM reflectisse de forma alargada para que, quando surgissem os documentos para discussão pública, emitir pareceres fundamentados, não só no conhecimento de alguns investigadores em Educação Matemática, especialistas em desenvolvimento curricular, mas também no conhecimento prático de quem executa as orientações curriculares no terreno e dos sócios que na APM se têm dedicado a reflectir sobre quaisquer questões relacionadas com o currículo, principalmente através dos grupos de trabalho e dos núcleos regionais.

Esta iniciativa, que foi desde logo designada por Pontos Críticos dos Programas do Ensino Básico (PCPEB) foi amplamente divulgada aos sócios e a discussão/reflexão decorreu em vários suportes. Embora alguns sócios e escolas tenham enviado a sua participação através de correio electrónico, a maior parte da reflexão foi efectuada na plataforma de *e-learning* da APM (`http://onlearn.apm.pt`), numa *disciplina* criada especialmente para o efeito. De forma a estruturar esta discussão foi decidido que se abririam vários fóruns, cada um deles com um moderador: Geral, 1° ciclo, 2° ciclo, 3° ciclo, Geometria, Tecnologias.

Foram muitos os professores que participaram, ou apenas acompanharam, a discussão. No dia em que escrevemos este texto estão inscritos na *disciplina* PCPEB 217 participantes, o que não deixa de nos surpreender positivamente. Algumas escolas e grupos de sócios enviaram à direcção documentos mais estruturados, que foram também postos à disposição de todos, para discussão, nos fóruns respectivos.

Foram muitas as questões que surgiram sobre o ensino da Matemática nos três ciclos do ensino básico: desde problemas inerentes à organização curricular, à gestão das escolas, ao comportamento e motivações dos alunos, à participação da comunidade na vida das escolas, até à avaliação e às finalidades do ensino da Matemática e do ensino em geral, passando por muitas outras que não cabe aqui enumerar. Mas o que foi evidente é que os professores têm muitas ideias de como melhorar o ensino da Matemática e manifestaram essas ideias nestes fóruns.

A partir de todas as intervenções e de algumas discussões que se realizaram nas estruturas da APM, foram elaborados três documentos com vista à análise da proposta de programa(s) que viesse(m) a aparecer — um sobre aspectos gerais e transversais dos programas, outro sobre Geometria e o terceiro sobre Tecnologias. Depois de discutidos e aperfeiçoados em Conselho Nacional, na reunião de Maio, estes documentos foram também divulgados na plataforma *Moodle*. Entretanto, o Conselho Nacional considerou que seria desejável que aparecessem outros documentos referentes aos grandes temas da Matemática, à semelhança do que tinha sido elaborado para a Geometria.

A direcção convidou alguns sócios, com trabalho realizado no âmbito da didáctica dos temas, para elaborarem documentos sobre *Números e operações*, *Estatística e Probabilidades* e *Álgebra e Funções*, para liderarem esse processo de construção de documentos de análise dos futuros programas. Todos os colegas contactados aceitaram o desafio, embora sem possibilidade de compromissos com prazos. Foi assim que surgiu um outro documento sobre *Números e operações*, que provocou uma nova onda de comentários e contribuições. As contribuições para este documento provêm, até ao momento, quase exclusivamente do 1° e 2° ciclos. Esperamos poder alargar, dada importância do tema, o mais rapidamente possível ao 3° ciclo.

Hoje, dia 2 de Julho, foi publicada no site da DGIDC a proposta de programa de Matemática do Ensino Básico, para discussão até 20 de Setembro. A direcção da APM irá, muito em breve, propor um calendário e uma metodologia de discussão que, provavelmente, continuará a ter como suporte privilegiado a plataforma *Moodle*, que nos parece a forma mais eficaz de poder permitir a participação de todos os sócios. Quando estiver a ler estas linhas, já deverá ter acesso a mais informações no *site* da APM e na própria plataforma.

A direcção gostaria que o parecer que vai emitir fosse sentido como um parecer dos sócios da Associação, um parecer assumido como o *nosso parecer*, aquele que foi produzido por todos e, como tal, retrate verdadeiramente o que pensamos sobre o que deve ser a educação matemática no ensino básico. Que fosse um documento de referência para todos nós, professores de Matemática, especialmente os do ensino básico. E isso só se consegue se todos estivermos atentos e participarmos. Pois então participe, agora.

**A direcção da APM**

# António Aniceto Monteiro

António M. Fernandes

Nos passados dias 5 e 6 de Junho, decorreu no Museu de Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, um colóquio em homenagem a António Aniceto Monteiro, por ocasião do centenário do seu nascimento. António Monteiro é mais um desses vultos da designada geração de 40, de que o país, num exercício de auto-flagelação, decidiu prescindir—a bem da nação, como então era uso dizer.

Percebeu-se claramente, numa conferência inaugural magnífica, de Fernando Rosas, que Monteiro era demasiado amplo para o seu país. A sua ânsia de modernizar a investigação matemática em Portugal, de dar a conhecer a Portugal a matemática contemporânea, opunha-se substancialmente a um regime que via na ruralidade a essência do ser português. Tão estreito recipiente não poderia conter tal energia, sobretudo sendo este feito de matéria tão rígida e opressiva.

António Monteiro nasceu em 1907, em Angola. A morte prematura do Pai, em 1915, trouxe a família para Lisboa. De 1917 a 1925, frequentou o Colégio Militar. Em 15 de Outubro deste último ano inscreveu-se no Curso de Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, curso que concluiu em 1930. Casou entretanto, em 1929, com Lídia Monteiro.

Entre 1931 e 1936, António Monteiro esteve em Paris, como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, no Instituto Henri Poincaré, sob a orientação do conhecido matemático francês Maurice Fréchet. Foi para Paris com o intuito de, como o próprio dizia, estudar matemática. De facto, o panorama matemático português, na época, era pouco mais que estéril. Em Paris ele teve a oportunidade de contactar com a verdadeira investigação matemática mas, não só, lá ele também teve ocasião de observar em que moldes se podia organizar essa mesma investigação.

Ainda em 1936, António Monteiro regressou a Portugal e aqui ficou até 1945. Permaneceu a maior parte desse período sem uma posição oficial numa Faculdade. O mais que conseguiu foi trabalho a catalogar publicações científicas. De facto, a sua intransigente verticalidade nunca lhe permitiu assinar um compromisso que, então era exigido a todos os funcionários públicos,

Declaro por minha honra que estou integrado na ordem social estabelecida pela Constituição Política de 1933, com activo repúdio do comunismo e de todas as ideias subversivas.

*in* Diário do Govêrno, Primeira Série, n. 216; 14 de Setembro de 1936.

Perante isto, Monteiro referiu a Armando Girão (que tentou que ele procedesse como todas as outras pessoas, ou seja que tacitamente assinasse tal declaração, não se comprometendo com ela) o seguinte:

Não sou comunista nem acredito que venha a sê-lo, mas a declaração diz que "não sou nem serei", e não aceito limitações à minha inteligência.

Apesar da hostilidade que o poder lhe movia, Monteiro não deixou de tentar proceder à modernização do país, naquilo que lhe competia, naquilo que ele considerava ser uma responsabilidade: a organização da investigação matemática em Portugal. Não fez pouco em favor dessa missão. Ajudou a criar a Portugaliae Mathematica, de que foi editor; organizou o Seminário de Análise Geral, onde procurou interessar jovens matemáticos pela matemática moderna. Procurou, e conseguiu. Dois grandes vultos da matemática portuguesa, como o são Hugo Ribeiro e José Sebastião e Silva, foram discípulos de Monteiro. Durante esse período assinala-se ainda a criação da Gazeta de Matemática e a fundação da Sociedade Portuguesa da Matemática, projectos onde teve um envolvimento fundamental. António Monteiro esteve ainda associado à criação da Junta de Investigação Matemática, no Porto, onde de resto passou um ano da sua estadia em Portugal.

Mas o regime não tolerava espíritos livres e movimentos modernizadores. Tudo isto era muito contrário à "ordem nas ruas e nos espíritos" bem como ao "viver habitualmente". Esse sentimento foi bem expresso pelo então Sub-Secretário de Estado das Corporações. Disse ele, acerca da nova geração de cientistas portugueses, que "não realizaram trabalho útil ou porque não quiseram ou não souberam produzir, ou porque cometeram o crime de reservar para os seus partidos o que de direito pertencia à Nação", indo mais longe, "não exibem títulos à confiança do povo português—ou porque os não possuem, ou porque os sonegaram".

Monteiro, entretanto, já tinha aceite um convite para ensinar na Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro. Não pôde, por isso, defender-se ele próprio de tal insanidade. Coube a Bento de Jesus Caraça essa tarefa, numa carta aberta que seria publicada no jornal República, na sua edição de 29 de Outubro de 1945:

Não sou nem fui bolseiro e não tenho procuração de nenhum deles para o defender, nem eles necessitam de quem os defenda. Mas há entre eles dois homens que não podem agora defender-se porque já não estão em Portugal. Dois homens que são dos maiores valores intelectuais da sua geração—José Rodrigues Miguéis e António Aniceto Monteiro. (...)

Dois homens que foram bolseiros e que quiseram dar honestamente ao seu país os frutos do seu trabalho e da sua capacidade; dois homens que o Estado não aproveitou, a quem não criou as mínimas condições de trabalho; dois homens que através das maiores dificuldades materiais lutaram heroicamente para dar ao seu país tudo aquilo de que eram capazes.(...)

A António Aniceto Monteiro, matemático brilhante, doutor pela Sorbonne, não foi dado, como situação pública, mais que um lugar de assalariado no Instituto de Alta Cultura para catalogar revistas!

Quão actual parece ser esta luta, entre os que querem tornar maior o país e aqueles que almejam tornar maior o Estado.

Caraça termina: "ou seremos nós já tão irremediavelmente infelizes que não possamos fazer justiça aos nossos adversários?"

Definitivamente, tudo isto é muito actual!

Com dois filhos, sobrevivendo em precárias condições económicas, e sentido um forte antagonismo do regime, que permaneceu absolutamente insensível a vários apelos da comunidade matemática dando conta da importância do seu trabalho, Monteiro aceitou uma posição na Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro. Foi recomendado por Albert Einstein, Jonn von Neumann e Guido Beck (pelo menos, as recomendações não eram precárias!). Estava convencido que o Brasil era um país com uma dinâmica favorável ao desenvolvimento científico, e que não teria os problemas que o assolaram em Portugal. Esteve lá entre 1945 e 1949, onde para além de alguns discípulos teve a oportunidade de criar uma série de publicações designadas por *Notas de Matemática* e de ajudar a fundar o *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*. Foi ainda nomeado membro do Comité de Redacção da *Summa Brasiliensis Mathematicae* editada pela Fundação Getúlio Vargas.

O Estado português, que nunca deixou de o vigiar, exerceu através da Embaixada Portuguesa, uma forte influência promovendo junto do Estado brasileiro as condições para um clima de antagonismo relativamente a Monteiro, de tal modo que o seu contrato de quatro anos não seria renovado.

No final de 1949, Monteiro viaja para a Argentina. Tinha conseguido um contrato com a Universidad Nacional del Cuyo em San Juan. A sua actividade durante esse período foi igualmente profícua. Até que em 1957 aceitou aquele que terá sido o desafio da sua vida, o de organizar o Instituto de Matemática e a Licenciatura de Matemática na Universidad Nacional del Sur, em Bahía Blanca.

Em 1957, este era um local remoto. Praticamente não existia nada e muito menos qualquer actividade científica. Monteiro que poderia ter seguido o conselho do grande matemático Stone, e seguido os passos de Hugo Ribeiro, indo para os Estados Unidos, decidiu-se por este local. São geralmente apontadas duas ordens de razões para esta escolha. Em primeiro lugar, indo para os Estados Unidos, António Monteiro de algum modo receava que o seu passado de perseguido político, lhe levantasse dificuldades. Por outro lado, em Bahía Blanca ele tinha a oportunidade de criar um projecto científico de raíz, em última análise podia pôr em prática toas as suas convicções sobre o modo de fazer e ensinar ciência.

Ele não enjeitou essa oportunidade e fez de Bahía Blanca um dos centros matemáticos mais importantes de toda a América Latina e, certamente o centro de Lógica Algébrica mais importante de toda a América Latina. Em 1972, viria a ser designado Professor Emérito da Universidade Nacional del Sur.

Mas, mesmo depois de tamanhos esforços em prol da dignificação de um país, António Monteiro ainda haveria de ter a oportunidade de reviver o seu passado. Em 1975 a situação política modificou-se na Argentina. Ele viu o seu contrato com a Universidad Nacional del Sur abruptamente terminado, ao abrigo da *Ley Orgánica de las Universidades Nacionales*. Num dos artigos pode ler-se:

Queda prohibido en el âmbito de la universidad el proselitismo político partidario o de ideas contrarias al sistema democratico que es proprio de nuestra organización nacional.

Monteiro foi inclusivamente proibido de frequentar a Biblioteca do Instituto de Matemática, uma biblioteca que criou e que hoje tem o seu nome. Era a bibliotecária que subrepticiamente o informava das últimas aquisições da biblioteca, permitindo-lhe deste modo manter-se actualizado.

Em 1977, regressa a Portugal onde o Instituto Nacional de Investigação Científica lhe cria um lugar de investigador. Monteiro permanece cerca de dois anos no nosso país, recebendo em 1978 o *Prémio Gulbenkian de Ciência e Tecnologia*.

António Aniceto Monteiro, regressou a Bahía Blanca onde morreu a 29 de Outubro de 1980.

O trabalho científico de Monteiro é vasto e reconhecido internacionalmente. Mais que isso, é substancial na medida em que deixou vasta e variada obra para ser continuada pelos seus discípulos. O seu trabalho em prol da organização da ciência não é menos importante e tudo isto foi conseguido em condições de enorme adversidade.

Foi pois inteiramente merecida a *Grã-Cruz da ordem Militar de Santiago da Espada*, que lhe foi atribuída a título póstumo, pelo Presidente da República Jorge Sampaio em 2000.

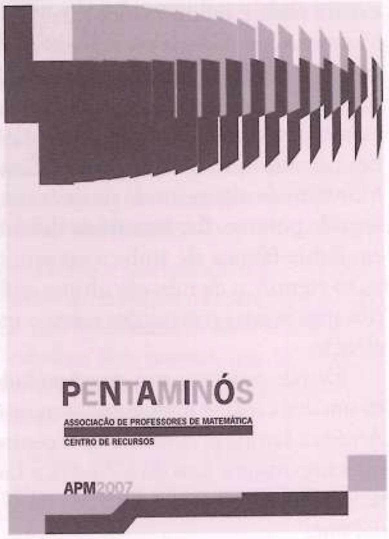
António Monteiro é certamente um exemplo, pela sua força interior, preserverança, defesa do trabalho sistemático e da racionalidade. Mas são também notórias as dificuldades que teve que vencer. Um ambiente persecutório e medíocre adverso à realização de grandes propósitos era então dominante e é agora ressurgente. Se a história de Monteiro é a história de um homem de sucesso já a história de Monteiro e Portugal é a história de um país que perdeu tempo (para não dizer que se perdeu no tempo) e desperdiçou força inovadora imprescindível. É da nossa responsabilidade o empenho activo para que não se repita. Esta é a melhor homenagem que se pode prestar a António Aniceto Monteiro.

**António M. Fernandes**
**Dep. Matemática, IST**

# Materiais APM

## Pasta de Actividades — Pentaminós (reformulada)

*Edição* APM, 2007
*Sócio* 15,00€ | *PVP* 22,50€




Os Pentaminós são um fantástico quebra-cabeças. Pelos desafios que proporcionam, constituem um material muito interessante na exploração da Geometria no primeiro e segundo ciclos do ensino básico.

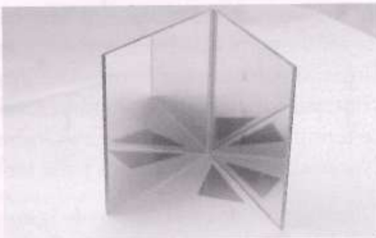
Cada peça é formada por 5 quadrados, unidos pelos lados. Excluindo formas equivalentes, por rotação ou simetria, existem 12 pentaminós diferentes, denominados de acordo com as letras com que se parecem, que permitem a criação de inúmeros problemas e suas soluções.

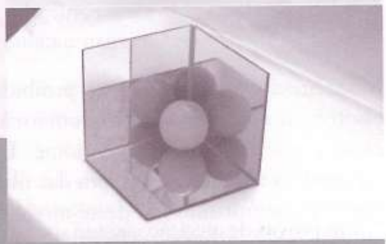
Esta pasta reúne um conjunto de propostas de trabalho, que podem ser prontamente utilizadas com os alunos, que vão permitir desde a construção de formas geométricas, com a utilização de algumas ou todas as peças do jogo, à reprodução de peças noutra escala e ao preenchimento de áreas.

Uma pasta didáctica, com novo formato e os princípios de sempre. Uma reedição APM.

## Conjunto de 3 espelhos em acrílico

10 cm x 10 cm *Sócio* 3,50€ | *PVP* 4,50€
15 cm x 15 cm *Sócio* 5,50€ | *PVP* 7,30€

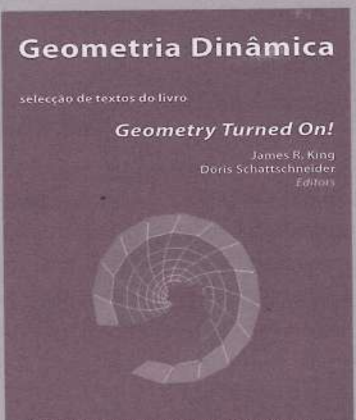




Este conjunto constituído por um espelho e um livro de espelhos destina-se ao estudo da simetria no plano ou no espaço, desde o jardim de infância ao ensino secundário.

As publicações do Atractor, também à venda na APM, *Simetria jogos de espelhos* e *O ritmo das formas* constituem um bom auxiliar do professor para a abordagem do tema Simetria, com recurso a espelhos e outros materiais.

# Publicações APM




## Geometria Dinâmica: selecção de textos do livro Geometry Turned On!

*Edição* APM, 2003
*Sócio* 8,00€ | *PVP* 12,00€


## Desenvolvendo o Sentido do Número: perspectivas e exigências curriculares — 1º ciclo

*Edição* APM, 2005
*Sócio* 6,00€ | *PVP* 9,00€

# Sobre as provas nacionais de Matemática para o Ensino Básico

Maria João Gouveia
Suzana Nápoles

As provas de aferição e os exames nacionais, pela sua importância na definição de estratégias que permitam um melhor desempenho em Matemática, têm sido objecto de várias reflexões e críticas. O texto seguinte constitui mais uma reflexão sobre esta temática, tendo como ponto de partida exemplos extraídos destas provas.

No Despacho n°2351/2007, Diário da República, 2ª série — N° 32 — 14 de Fevereiro de 2007 escreve-se

"... as provas de aferição são um instrumento de avaliação que permite recolher dados relevantes sobre os níveis de desempenho dos alunos no que respeita às aprendizagens adquiridas e competências desenvolvidas. Constituem ainda instrumentos de diagnóstico postos à disposição das escolas e dos professores pelo Ministério da Educação, no sentido de possibilitarem uma reflexão colectiva e individual sobre a adequação das práticas lectivas, ajustando-as — se for caso disso — para a obtenção de uma progressiva melhoria dos resultados escolares."

No *site* da DGIDC de 18 de Maio de 2007 esclarece-se o carácter estritamente informativo das provas de aferição:

"As *provas nacionais de aferição* constituem um dos instrumentos de avaliação do desenvolvimento do currículo nacional e visam fornecer informação relevante aos professores, às escolas e à administração educativa sobre a eficácia do sistema de ensino e sobre o desempenho dos alunos no que respeita ao desenvolvimento de competências consideradas essenciais para cada Ciclo do Ensino Básico, nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, *não produzindo efeitos na progressão escolar dos alunos*."

As provas de aferição de Matemática, como qualquer outro elemento de avaliação, são, ou deveriam ser, simultaneamente, um instrumento de diagnóstico da aprendizagem realizada pelos nossos alunos e um instrumento regulador da prática lectiva dos professores.

Como instrumento de diagnóstico, as provas de aferição têm tido, para a sociedade em geral, um carácter absoluto, o que lhes conferiu inevitavelmente um papel rotulador de escolas, professores e, em particular, de crianças. Não pondo em causa a sua importância nem a sua realização, parece-nos que existem aspectos importantes que merecem a atenção e a reflexão de todos nós professores de Matemática. Seria uma tarefa essencial analisar as provas de forma a perceber em que medida elas reflectem os aspectos essenciais dos programas em vigor e as competências essenciais, presentes no Currículo Nacional do Ensino Básico, e são um instrumento equilibrado enquanto avaliador das aprendizagens dos alunos. Esse é um procedimento natural em qualquer processo de aferição tendo em vista os ajustes e aperfeiçoamento dos seus instrumentos.

Os objectivos de uma aprendizagem são orientadores da elaboração de qualquer prova de aferição/avaliação. O conjunto das questões colocadas procurará abranger todos eles e cada questão, em particular, terá um papel bem definido quanto aos conhecimentos a aferir, devendo ser clara a hierarquia de relevância para eles estabelecida nessa mesma questão. Para permitir distinguir as dificuldades dos diversos alunos e para tornar as provas acessíveis a alunos que não tenham desenvolvidas por igual as suas capacidades, as questões também se devem diferenciar umas das outras pela forma como possam depender da capacidade de interpretação de um texto, da capacidade de raciocínio, da capacidade de observação e da capacidade de concentração.

Observa as igualdades seguintes.

$1^2=1$
$11^2=121$
$111^2=12321$
$1111^2=1234321$

Indica o valor de $111\ 111^2$.

*Questão 18, prova de aferição 2° ciclo, 2006*

Figura 1.

Observa a seguinte sequência de números.

5 11 9 15 13 ___ ___ ...

Quais são os dois números que vêm a seguir?

Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

*Questão 10, prova de aferição 1° ciclo, 2006*

Figura 2.

Os enunciados devem ser claros e precisos, a resolução das questões deve implicar conhecimentos adquiridos no percurso de aprendizagem visado (por exemplo, contraponha-se a questão 18 da prova de 2°ciclo de 2006 com a questão 10 da prova de 1°ciclo de 2006 [figuras 1 e 2]) e todas as possíveis resoluções devem ser antecipadamente validadas. Por exemplo, o enunciado da questão 10 da prova de 1°ciclo de 2006 pressupõe erradamente que o conhecimento de 5 termos de uma sucessão de números é suficiente para determinar os termos que lhes sucedem. Seria preferível o seguinte enunciado:

Observa a seguinte sequência de números 5, 11, 9, 15, 13,.... Explica como podes obter o segundo número a partir do primeiro. Como podes obter o terceiro? E o quarto? E o quinto? De acordo com a regra que acabaste de descobrir indica os números que ficam em sexto e sétimo lugares.

Este enunciado resolve o problema da falsa unicidade da resposta esperada, a qual também vem reflectida nos critérios de classificação apresentados. Aí dever-se-ia contemplar a possibilidade de outras respostas para além de 19, 17 (como é o caso de 21, 19).

Logicamente, os critérios de classificação devem estabelecer-se paralelamente à concepção da prova de aferição e reflectir a hierarquia de relevância dos conhecimentos envolvidos em cada questão (tal impediria que, por exemplo, na questão 3 da prova de 2°ciclo de 2007 (figura 3) se atribuísse o mesmo peso à resposta errada 7 ($21 : 3 = 7$) e a uma resposta obtida correctamente a partir de uma contagem errada de amêndoas ($20 \times 2/3 \times 13$). Os critérios de classificação não devem suscitar ambiguidades nem situações desiguais; vejam-se como exemplos de critérios a ser revistos os indicados em:

— no código 3 para a questão 8 da prova de 2°ciclo de 2006 não é aceitável que se aceite como totalmente correcta a resolução que inclui $3{,}14 \times 1{,}2 = 3{,}7$;

— no código 2 para a questão 9.2 da prova de 1°ciclo de 2006 equipara-se uma resolução que denota uma compreensão total da descrição do desenho e onde a única incorrecção se pode dever a uma falta de percepção de que o triângulo é isósceles, com resoluções erradas onde não foi entendida a descrição do desenho;

— no código 3 para a questão 7.2 da prova de 1°ciclo de 2004 (figura 4), deveria ser relevante a distinção entre resolver o problema com os dados fornecidos e resolver o problema alterando um dos seus dados mesmo quando nos dizem que é um valor aproximado (se 44 Kg é o valor dado no enunciado, deve ser entendido como o que melhor se aproxima ao aumento de peso diário e portanto como o único a dever ser usado).

Como instrumento regulador o papel das provas de aferição será tanto mais importante quanto maior for a predisposição dos professores à reflexão, à auto-avaliação e maior a sua flexibilidade de adequação e/ou mudança da prática lectiva. O procedimento dos professores relativamente às provas de aferição, bem como a qualquer outro instrumento de avaliação dos seus alunos, deveria contemplar os seguintes passos:

— análise das provas dos seus alunos com vista a um levantamento de dificuldades e erros evidenciados;

— compreensão dessas dificuldades e justificação desses erros;

— procura de modos de actuação capazes de levar os alunos a superar essas dificuldades e a corrigir esses erros e, simultaneamente, retrospectiva da prática lectiva com vista a identificar, se for esse o caso, actuações que pudessem ser ajustadas de modo a evitar as dificuldades e os erros encontrados.

As provas de aferição serão assim capazes de regular a leccionação dos professores, mas não deverão ser tomadas como

Figura 3.

O Gil comprou amêndoas da Páscoa, umas eram azuis e outras brancas. As amêndoas compradas pelo Gil estão representadas na figura. Dois terços das amêndoas que comprou eram azuis. Quantas amêndoas azuis comprou o Gil?

Nota: estavam representadas 21 amêndoas

*Questão 3, prova de aferição 2ºciclo, 2007*

Figura 4.

Uma baleia azul nasceu com 2700 kg e engordou cerca de 44 kg por dia.

Quanto pesava, aproximadamente, esta baleia azul com uma semana de idade?

Escreve todas as contas que fizeres.

*Questão 7.2, prova de aferição 1ºciclo, 2004* únicas ou absolutas. Por exemplo, as provas de aferição confirmam a necessidade de investir na resolução de problemas, na realização de actividades capazes de desenvolver a capacidade de raciocínio e na comunicação. Esse investimento não deve ser feito umas semanas antes dos alunos realizarem a sua prova de aferição; o desenvolvimento de raciocínio, a agilidade mental, a desenvoltura oral e escrita na expressão do pensamento requerem tempo. Mas também não se deve tornar a resolução de problemas e o desenvolvimento de raciocínio os únicos motores da nossa leccionação. O papel regulador das provas de aferição pode ir mais além, proporcionando uma reflexão também ao nível da formação inicial de professores. Em que medida é que essa formação proporciona aos futuros professores o adequado conhecimento matemático e desenvolve neles a necessidade e a capacidade de analisar, de reflectir, de ajustar, de investir na sua prática lectiva? Em que medida é que essa formação os ajuda a não se tornarem reféns de manuais escolares e a procurar tirar partido de todos os recursos disponíveis?

As provas de aferição podem ainda dar informações importantes sobre os programas e currículo nacional. Por exemplo, os piores resultados nas provas de aferição de 2°ciclo de 2004 face aos resultados obtidos na prova de 1°ciclo desse ano, podem indiciar uma perda de exigência na passagem de um ciclo para o outro.

No que diz respeito ao 3° ciclo, as provas de aferição foram substituídas pelo exame nacional de Matemática do 3° ciclo do Ensino Básico. Esta prova tem por referência o Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais e o Programa de Matemática em vigor.

Este exame realizou-se pela primeira vez no ano lectivo 2004/2005 e os seus resultados foram objecto de uma análise publicada pelo Gave em Janeiro de 2006.

Nesse documento podemos ler:

"Os desempenhos dos examinandos foram, em média, muito fracos, aliás, na continuidade dos relativos às Provas de Aferição do 3° ciclo, realizadas desde 2002. Globalmente, pode afirmar-se que, na prova, a média dos resultados dos examinandos foi de 38 pontos percentuais."

Nas ilações finais do relatório afirma-se que:

"Os aspectos da competência matemática em que o desempenho médio é *satisfatório* restringem-se a Conceitos e Procedimentos e Raciocínio, desde que os raciocínios requeridos sejam simples. [...] Em Resolução de Problemas, o desempenho dos examinandos é *fraco*, independentemente do domínio temático. [...] Os examinandos revelam um desempenho *muito fraco* no raciocínio dedutivo. Aparentemente, o exercício deste tipo de raciocínio é raro, ou está ausente das práticas de sala de aula, apesar de constar do programa do ensino básico. [...] De uma forma geral, pode afirmar-se ainda que os alunos reagiram negativamente à mobilização dos seus conhecimentos em situações da vida real".

Estas conclusões não nos surpreendem. Analisando a 1ª chamada deste exame (2005) deparamo-nos com um conjunto de questões que testam as capacidades dos alunos em detrimento dos seus conhecimentos. Não é pois de estranhar as grandes dificuldades sentidas por um aluno médio, que domina essencialmente um conjunto de procedimentos em que se centram, aliás, muitas práticas lectivas. Interrogamo-nos sobre o significado de um exame de fim de ciclo com estas características. Será que uma prova de exame deve esquecer o que é ensinado aos alunos na escola e testar apenas o que, na sua perspectiva, deveria ter sido ensinado?

Acresce que, tal como se referiu anteriormente a propósito das provas de aferição, o exame deve ter um enunciado claro e correcto.

Ora também no caso desta prova nacional há reparos a fazer: a questão 8 (figura 5) está mal formulada pois pressupõe que num rectângulo o comprimento pode ser menor do que a largura. Este facto tem como consequência a impossibilidade de preencher correctamente a tabela pedida — já

8. Existem vários rectângulos, de dimensões diferentes, com 18 cm² de área.

8.1. Completa a tabela que se segue, indicando, em cm, o comprimento e a largura de três rectângulos diferentes (A, B e C) com 18 cm² de área.

| | Rectângulo A | Rectângulo B | Rectângulo C |
|---|---|---|---|
| Comprimento (cm) | 4 | | |
| Largura | | 0,5 | |

*Questão 8.1, exame 9ª ano, 1ª chamada, 2005*

Figura 5.

**11.** Arrumaram-se três esferas iguais dentro de uma caixa cilíndrica (figura 1).

Como se pode observar no esquema (figura 2):

- a altura da caixa é igual ao triplo do diâmetro de uma esfera;
- o raio da base do cilindro é igual ao raio de uma esfera.

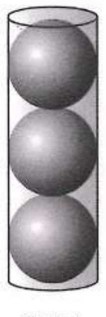


Figura 1

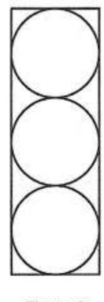


Figura 2

Mostra que:

*O volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.*

**(Nota:** designa por $r$ o raio de uma esfera.)

Figura 6.

que não existe nenhum rectângulo com área igual a 18 $cm^2$ tendo 4 cm de comprimento — e a impossibilidade de seleccionar, de entre 4 opções, qual o gráfico que pode representar a relação entre o comprimento e a largura de rectângulos com 18 $cm^2$ de área — já que nenhum dos gráficos apresentados representa essa relação.

Retomando as conclusões do relatório, a constatação da raridade ou mesmo da ausência do raciocínio dedutivo na generalidade das práticas lectivas em contraponto com as orientações curriculares, parece-nos muito preocupante. Mas será que esta prova permite tirar essa conclusão?

Debrucemo-nos sobre a questão 11 (figura 6) que foi, segundo este relatório, uma das que criou maiores dificuldades aos alunos.

Esta questão envolve a comparação de dois volumes, ambos calculados em função do raio $r$ de uma esfera. Da forma como o problema está formulado não é necessária a presença de qualquer número. Este facto, por si só, constitui uma dificuldade para a generalidade dos alunos, já que os cálculos são feitos em função de um parâmetro. Acresce que, na situação apresentada, a comparação não depende de $r$. O problema seria mais enriquecedor se, depois de calculada a relação entre os volumes para um determinado valor de $r$, por exemplo, $r = 3$, se questionasse o aluno sobre se esta se mantém para outro valor de $r$. Globalmente o problema ficaria facilitado mas testando exactamente as mesmas competências e a questão adicional obrigaria o aluno a reflectir sobre um resultado.

Também nos critérios de correcção relativos a esta questão se indica que um aluno que use um valor aproximado de Pi para resolver o problema deve ser penalizado. Acontece que, neste caso, a solução é independente de Pi, pelo que lhe poderia ser atribuído qualquer valor. Não é aceitável que os critérios de correcção oscilem entre rigores despropositados, como neste caso, e benevolências inadmissíveis, como nas situações referidas a propósito das provas de aferição do 1° e 2° ciclo.

A propósito desta questão, escreve-se no relatório: "Neste item, o desempenho muito fraco dos examinandos pode advir de uma ausência de familiaridade dos alunos com o raciocínio dedutivo. Não é claro, também, que muitos alunos saibam distinguir entre o significado de uma demontração e uma verificação de uma igualdade num caso particular."

No nosso entender, a questão 11 não evidencia o raciocínio dedutivo. Evidencia sim o afastamento desta prova relativamente às questões que figuram na generalidade dos manuais para o 3° ciclo do Ensino Básico e que constam dos testes de avaliação na generalidade das escolas. Quanto à constatação de que muitos alunos possam não saber distinguir uma demonstração da verificação de uma igualdade num caso particular, concordamos em absoluto. Mas como poderiam saber distinguir se nunca fizeram uma demonstração? Acresce que neste caso a igualdade a estabelecer não depende do valor atribuído a $r$, pelo que seria legítimo escrever: sem perda de generalidade e para facilitar os cálculos, tomamos $r = 1$. Como é que procederia o corrector de uma prova que contivesse esta afirmação?

Nas conclusões do relatório escreve-se: "De uma forma geral, pode afirmar-se ainda que os alunos reagiram negativamente à mobilização dos seus conhecimentos em situações da vida real".

Será que esta prova é susceptível de diagnosticar a melhor ou pior relação dos alunos com a vida real? Mas o que se entende por vida real? Será que quando quatro amigos se encontram para resolver um problema de matemática temos uma situação da vida real? Será que para identificar posições relativas de rectas e planos tem sentido recorrer à armação (provavelmente torta e empenada) de uma tenda de circo? Não seria preferível considerar, por exemplo, um sólido composto por um prisma hexagonal encimado por uma pirâmide hexagonal e fazer as mesmas perguntas?

Este conjunto de interrogações não significa que se considere satisfatório o nível atingido com nove anos de escolaridade obrigatória. A ausência do raciocínio dedutivo na generalidade das práticas lectivas é uma realidade facilmente constatável. Mas será que os autores dos exames e os professores leram programas diferentes? As demonstrações estão ausentes das orientações programáticas e dos manuais, inclusivamente no Ensino Secundário. Colocá-las num exame para o 3° ciclo é incompreensível.

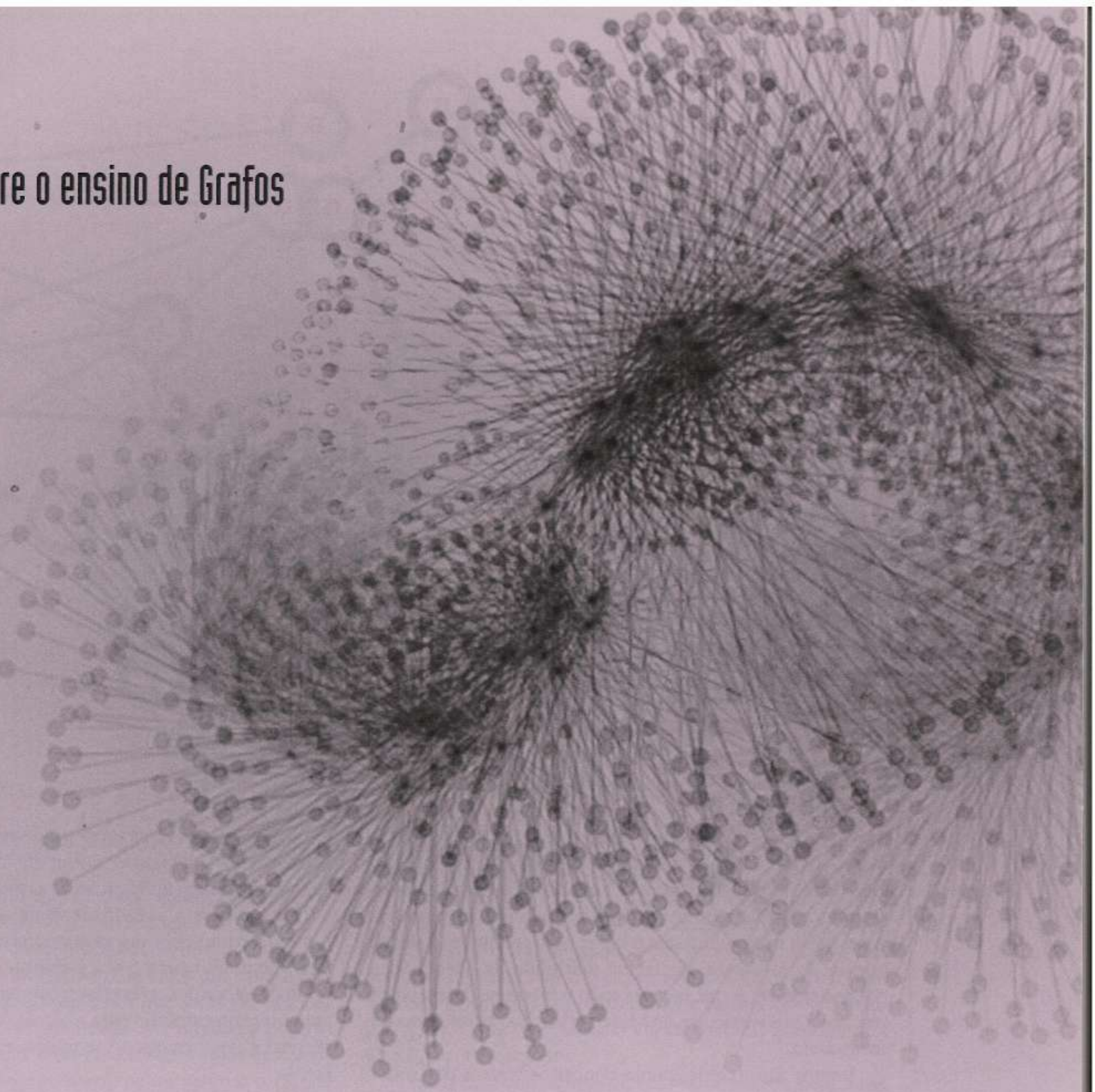
Já no que diz respeito à mobilização de conhecimentos em situações da vida real trata-se de uma orientação curricular. Mas é necessário reflectir sobre o que se entende por *situações da vida real*. As más questões de *vida real*, e existem muitas, podem levar os alunos a duvidar da *utilidade* da Matemática. O que é realmente importante é que um aluno, quando confrontado com uma determinada situação num contexto concreto ou abstracto, seja capaz de mobilizar os conhecimentos que adquiriu e as capacidades que desenvolveu de forma a obter uma solução.

Tanto as provas de aferição como o exame nacional são instrumentos potencialmente muito ricos para a melhoria do desempenho em Matemática e cuja realização é para nós inquestionável. Mas para preencherem cabalmente este papel, a sua concepção deve ser alheia ao papel rotulador que posteriormente assumem, deve ser autónoma relativamente a provas anteriores e que invariavelmente são tomadas como modelo, devem conservar um considerável grau de independência de outras provas internacionais de referência porque devem ser ajustadas à nossa realidade escolar e aos currículos em vigor, os quais, por sua vez, deveriam ser alvo de reflexão e ser conduzidos pelas características intrínsecas da Matemática. As provas de aferição e o exame nacional não podem tornar-se apenas reguladores de *rankings* de escolas e servir de mote para alimentar controvérsias inúteis acerca da sua utilidade.

**Maria João Gouveia**
**Suzana Nápoles**
**Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências**
**Universidade de Lisboa**

# Reflexões sobre o ensino de Grafos

Marília Pires
Viktor Kravchenko



## Introdução

A diferenciação dos currículos de matemática nos diferentes cursos do ensino secundário é um imperativo quando se procura adequar a matemática a ensinar às necessidades da formação face ao percurso que se antevê para estes alunos. A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais insere-se claramente nesta estratégia.

Entre os vários temas a abordar, o capítulo de modelos de grafos ajusta-se com particular evidência ao carácter generalista da disciplina. A Teoria de Grafos, ainda que seja uma área de estudo de grande complexidade, apresenta vantagens que fundamentam a sua inclusão no currículo desta nova disciplina. Referimos, por exemplo, a possibilidade de ser trabalhada a diversos níveis de profundidade. Quando a abordagem é de nível introdutório, como é preconizado no programa, torna-se acessível à maioria dos alunos dado que não requer conhecimentos específicos de outros temas de matemática, o que permite a muitos alunos entrar activa e efectivamente no processo de descoberta de conceitos abstractos da Teoria de Grafos a partir de exemplos simples e, às vezes, divertidos. Não menos importante é o facto de constituir uma ferramenta importante na resolução de um vasto conjunto de situações problemáticas da vida real.

Como é salientado no programa "está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos". Esta perspectiva, para além de possível e interessante, assente na construção de representações e esquemas, favorece o desenvolvimento de novos modelos. Este processo de construção apela permanentemente à criatividade de alunos e professores.

Neste artigo serão apresentados alguns exemplos que nos parecem oportunos como ponto de partida para a construção de alguns modelos de grafos.

A partir de uma simples representação gráfica podemos chegar facilmente a muitos dos conceitos e definições elementares. Desta forma, os alunos poderão efectivamente ensaiar a construção destes novos conceitos e ser capazes de os sentir. Como pretendemos mostrar ao longo do texto,

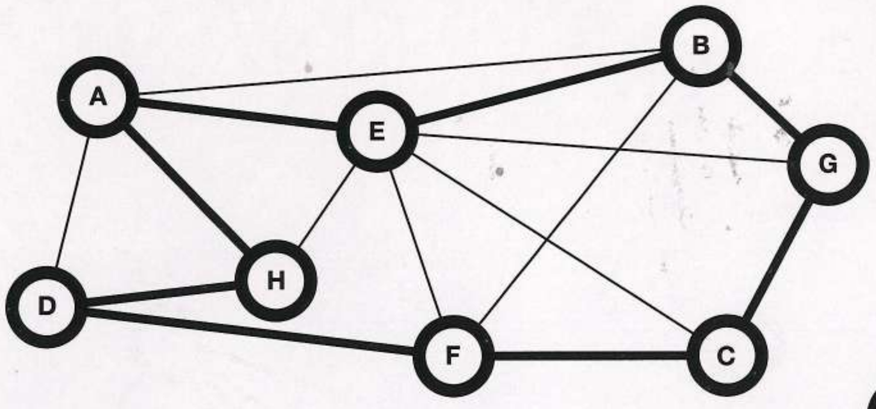
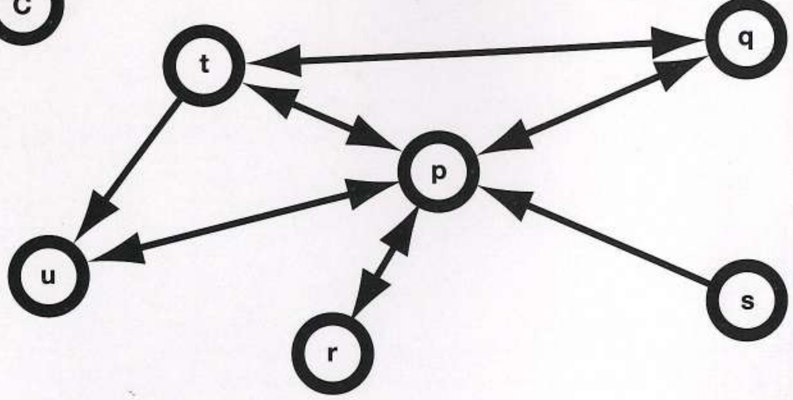



Figura 1. Entregar pizzas

Figura 2. Quem gosta de quem?




a passagem de conceitos espontâneos para os conceitos formais pode ser realizada de uma forma bastante natural. Esta facilidade em integrar os novos conceitos contribui para aumentar o gosto e o interesse dos alunos por raciocínios abstractos. Em nossa opinião a falta de gosto e interesse está na origem do insucesso escolar na disciplina de Matemática, por isso pensamos que haveria todo o interesse de introduzir este tema nos curriculos de Matemática dos outros cursos do secundário.

Iremos aqui referir apenas conceitos básicos de Grafos, deixando em aberto a possibilidade de retomar este assunto com a exploração de algoritmos para a resolução de alguns problemas de optimização em Grafos.

## Conceitos iniciais

Um campo para construção de exemplos, que pode ser interessante para a generalidade dos alunos desta faixa etária, é o das relações humanas onde os Grafos podem representar muitas relações interpessoais, tais como: descendência; ascendência; afectos; organização empresarial; acessibilidades, circulação e tantos outros.

Para introduzir o conceito de *grafo* e chegar à representação "por um sistema de pontos e linhas unindo esses pontos" (do programa) nada melhor do que partir de uma situação que automaticamente leve a uma tal representação.

*Exemplo 1*. Propor que os alunos desenhem um esquema do bairro onde fica a sua escola, representando os cruzamentos e rotundas por pontos e as ruas e avenidas por linhas unindo esses pontos. Alguns vão a pé para a escola e, por isso, podem considerar um *grafo não orientado*, outros irão de carro e, tendo que considerar o sentido de circulação das ruas, o seu grafo tem que ser *orientado*.

*Exemplo 2*. No grafo construído no exemplo 1 cada aluno marca qual o percurso que faz até chegar à escola. Aparece, naturalmente, a definição de *caminho*.

Para tornar a actividade mais atractiva pode-se usar o mesmo grafo para um pequeno grupo de alunos em que cada um deles marca o seu caminho com uma cor diferente. Pode-se, então, averiguar quais os alunos que se podem encontrar no caminho para a escola (caminhos partilhando arestas) e quais os que só se podem encontrar à entrada da escola.

*Exemplo 3*. Desenhar um grafo em que os *vértices* representam os alunos e as *arestas* ligam os alunos que têm possibilidade de se encontrar a caminho da escola. O exemplo 3 pode ainda ser usado para a introdução do conceito de *grau dos vértices*, a partir do número de encontros que cada aluno pode ter a caminho da escola, pois por cada encontro haverá uma *aresta incidente* no vértice correspondente a esse aluno.

*Exemplo 4*. Na figura 1 representa-se o percurso de um entregador de pizzas que sai do restaurante localizado no vértice marcado com $A$, entrega 7 pizzas nos vértices marcados com $E$, $B$, $G$, $C$, $F$, $D$ e $H$ e regressa ao restaurante. Ele poderia ter feito outro percurso, entregando as pizzas noutra ordem, mas fosse qual fosse o percurso teria sempre que voltar ao vértice de saída, percorrendo um caminho fechado, isto é que começa e acaba no mesmo vértice.

O exemplo 4 permite introduzir o conceito de *circuito* e também deixar a ideia de que, geralmente, há várias hipóteses de formar um circuito e que se escolhe o que for mais conveniente de acordo com os objectivos.

*Exemplo 5*. *Quem gosta de quem?* pode ser uma pergunta que se faz a cada uma das pessoas de um grupo. As respostas vão ser representadas num grafo orientado.

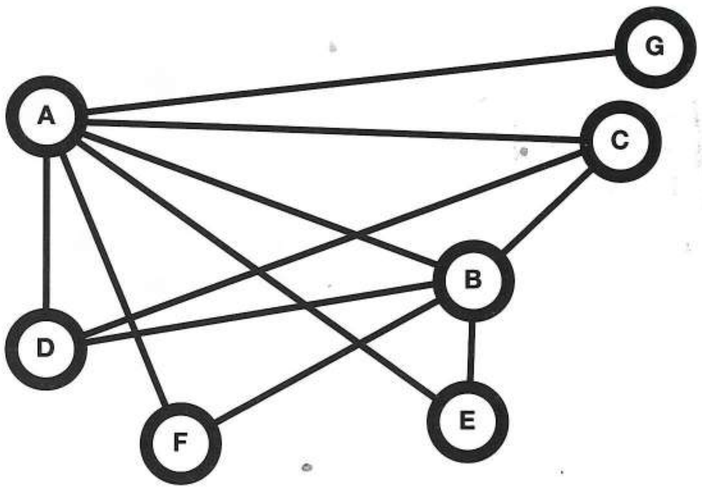
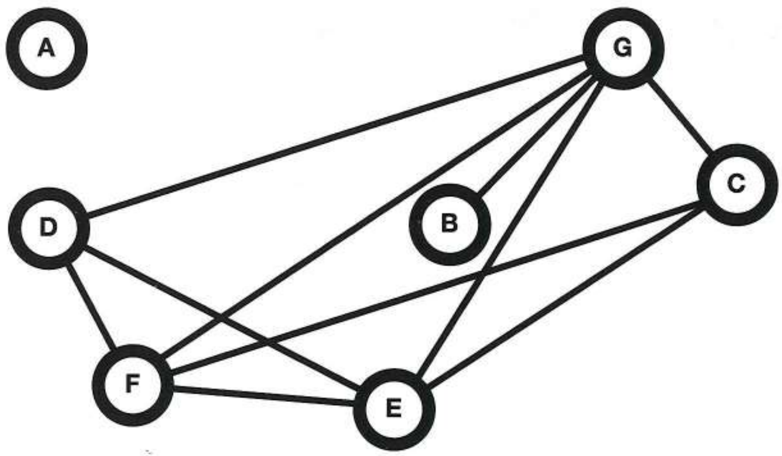



Figura 3. Grafo dos jogos

Figura 4. Jogos que faltam




Este exemplo não deve, obviamente, ser construído a partir de respostas dos alunos É mais simpático se for fornecido um grafo como o da figura 2 como sendo o resultado de um inquérito que se fez num grupo de 6 pessoas.

A partir da análise deste grafo pode-se introduzir os conceitos de *semigrau interior* (número de arcos que chegam ao vértice) e *exterior* (número de arcos que saem do vértice) e relacioná-los com a popularidade dos membros do grupo. Um vértice com um semi-grau interior nulo representa alguém de quem ninguém gosta, pelo contrário o vértice com maior semi-grau interior representa o membro do grupo mais popular de quem toda a gente gosta. No exemplo apresentado, o vértice $p$, com semi-grau interior 5, corresponde à pessoa mais popular, enquanto que o vértice $s$, com semi-grau interior nulo e semi-grau exterior 1, corresponde à pessoa mais impopular.

Se os afectos forem todos recíprocos, isto é se a cada arco corresponder outro de sentido contrário, pode-se representar o resultado do nosso inquérito por um grafo não orientado. No exemplo apresentado esta situação não acontece, pois há arcos que não têm o seu correspondente em sentido contrário. Por exemplo, existe um arco de $s$ para $p$ mas não de $p$ para $s$.

Ainda sobre esta ideia, pode-se pedir aos alunos que desenhem um grafo em que os vértices representem as personagens da série Morangos com Açúcar. Quase todos os adolescentes conhecem o enredo desta série e são capazes de construir o grafo dos afectos da série.

Embora o conceito de grafo completo não seja referido no programa, pensamos que pode ser abordado até porque se presta a ser tratado através de exemplos que os alunos conhecem bem, como é o caso da organização de campeonatos. Pode-se começar com exemplos de futebol, normalmente bem conhecidos pelos alunos.

*Exemplo* 6. O grupo de qualificação para o mundial 2006 a que pertencia Portugal tinha 7 equipas, quantos jogos se realizaram? O grupo de qualificação para o euro 2008 a que pertence Portugal tem 8 equipas, quantos jogos se irão realizar? E na primeira liga portuguesa de futebol com 18 equipas, quantos jogos se realizam em cada volta? E se tivermos uma liga com $n$ equipas?

Provavelmente, muitos saberão responder às perguntas, mas é importante que reflictam sobre o processo pelo qual chegaram a esse número. A ideia de que cada uma das $n$ equipas tem que jogar com as outras $n - 1$ leva ao conceito de grafo completo em geral. A dedução da expressão $n(n-1)/2$ para o número de arestas de um grafo completo com $n$ vértices é muito intuitiva. Pode-se ainda fazer notar que todos os vértices têm o mesmo grau, $n - 1$.

*Exemplo* 7. Numa Escola Secundária organiza-se um campeonato de Futsal entre as 7 turmas do 11° ano. Cada turma deve jogar uma única vez com cada uma das outras. A certa altura sabe-se que: a turma A já fez 6 jogos; a $B$ fez 5 jogos; a C e a $D$ fizerem 3 jogos cada uma; a $E$ e a $F$ fizeram 2 jogos cada uma e a G ainda só fez 1 jogo. Será possível saber que jogos fez a turma C? E quantos jogos faltam ainda fazer ao todo?

Vamos desenhar um grafo em que cada vértice representa uma das 7 turmas. Vamos identificar os vértices com o nome da turma correspondente, temos assim os vértices $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$. A relação *jogar com* é simétrica, pois, se $A$ joga com $B$, então $B$ joga com $A$, por isso pode-se representar os jogos por arestas e obtém-se um grafo simples não orientado. Deste grafo conhecemos os graus dos vértices,

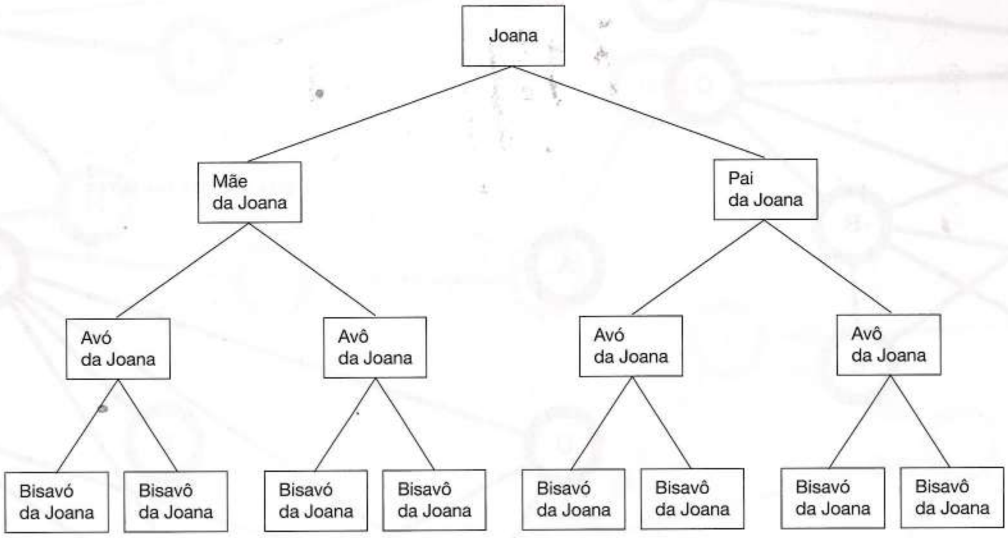



**Figura 5. Os antepassados da Joana**

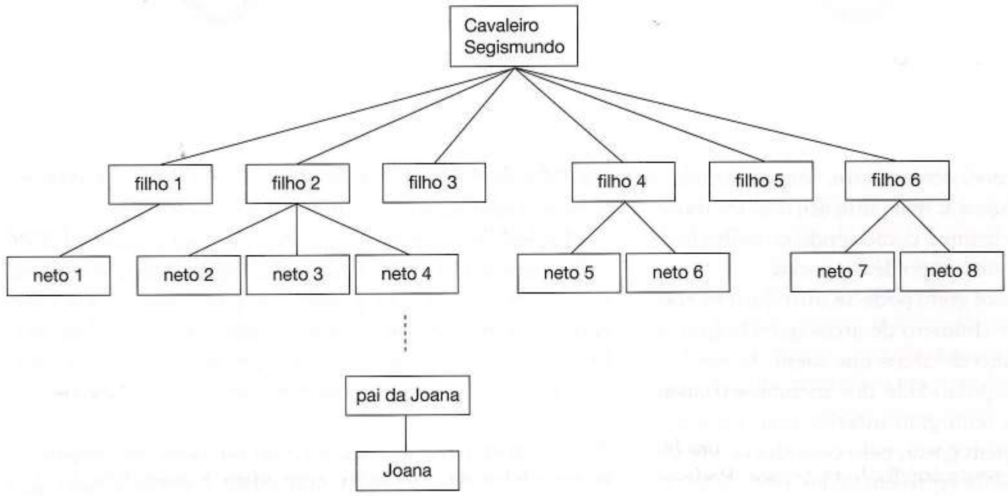



**Figura 6. Os descendentes do Cavaleiro Segismundo**

correspondentes ao número de jogos que cada turma efectuou: $\text{gr}(A) = 6$; $\text{gr}(B) = 5$; $\text{gr}(C) = \text{gr}(D) = 3$; $\text{gr}(E) = \text{gr}(F) = 2$ e $\text{gr}(G) = 1$. A soma dos graus dos vértices é $6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 22 = 2 \times 11$. Deste modo sabemos que já se realizaram 11 jogos. Se se tivessem realizado todos os jogos todos os vértices teriam grau 6 (grafo completo) e o número de arestas seria $((7 \times 6)/2) = 21$. Sabemos assim que ainda faltam jogar 10 jogos.

Como a turma $A$ fez 6 jogos, isso significa que ela já jogou com todas as outras, isto é, existem as arestas $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{A, F\}$ e $\{A, G\}$. Já sabemos que um dos 3 jogos da turma $C$ foi com a $A$. Também sabemos que o único jogo da turma $G$ foi com a $A$. Como a turma $B$ fez 5 jogos e não jogou com a $G$, ou seja, existem as arestas $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$ e $\{B, F\}$. Ficamos assim a saber que a turma C também jogou com a B. As turmas $E$ e $F$ só fizeram 2 jogos cada e já sabemos com quem: $A$ e $B$. Como as turmas $C$ e $D$ fizeram 3 jogos cada uma, como já sabemos todos os jogos das outras turmas, temos que concluir que jogaram entre si. Isto é a aresta $\{C, D\}$ está no grafo.

Obtivemos assim os 3 jogos da turma $C$: com a $A$; com a $B$ e com a $D$.

Na figura 3 apresenta-se o grafo correspondente aos 11 jogos já efectuados.

Se desenharmos agora um grafo com as arestas que faltam a este para ser completo (*grafo complementar*) ficamos a saber quais os 10 jogos que faltam.

Um outro conceito que deve ser introduzido a partir de exemplos é o de *grafo conexo*. Facilmente se percebe o conceito: de cada vértice tem que ser possível chegar a todos os outros. Muito rapidamente se podem desenhar grafos orientados ou não orientados que sejam ou não conexos. A este nível não nos parece ser necessário introduzir o conceito de conexidade forte e, por isso, sugerimos que nos grafos orien-

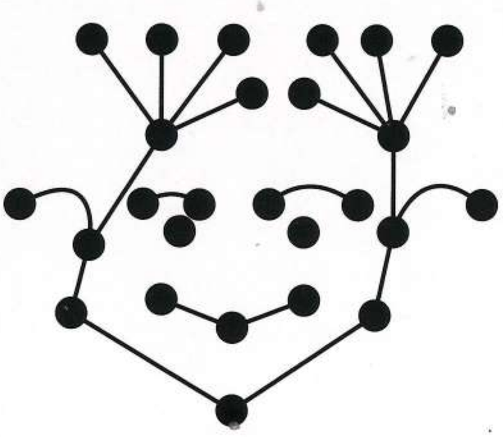


Figura 7. Uma Floresta

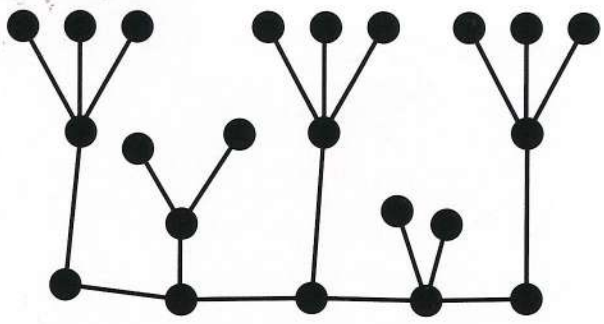


Figura 8. Árvore ou floresta

tados se chame conexo aquilo que em rigor se deveria chamar fortemente conexo: de cada vértice existe um caminho para cada um dos outros.

## Árvores

Uma boa maneira de introduzir o conceito de *árvore* é através das relações de descendência e ascendência. Alguns alunos saberão o nome dos avôs e avós e alguns talvez saibam o nome de alguns dos bisavôs. Cada um pode construir a árvore dos seus antepassados até onde saiba os nomes.

*Exemplo 8.* A Joana pesquisou na Torre do Tombo os seus antepassados até ao século XVII. Para organizar a informação, a Joana construiu um esquema em que se coloca a si num vértice depois liga esse vértice a outros dois vértices que representam o seu pai e a sua mãe, depois cada um destes com o seu pai e mãe e por aí fora até aos antepassados que viveram no século XVII, entre estes encontra-se o cavaleiro Segismundo.

O que é este esquema que a Joana fez? Uma *árvore binária*. Na figura 5 desenha-se o início desta árvore. Pode-se aproveitar para deduzir quantos nós há em cada nível. Não é difícil levar os alunos a perceber que o número de nós de um nível é o dobro do número de nós do nível anterior.

*Exemplo 9.* Podemos construir outra árvore com a descendência do cavaleiro Segismundo (figura 6). Esta já não é uma árvore binária, pois o grau de cada nó dependerá do número de filhos que cada descendente do cavaleiro tiver.

O conceito de *floresta* está intimamente ligado ao conceito de árvore. Ao definir uma floresta como um conjunto de árvores os alunos perceberão imediatamente o conceito.

*Exemplo 10.* Na figura 7 desenhamos um grafo, com aspecto divertido, que é uma floresta: Grafo não conexo em que cada componente conexa é uma árvore.

*Exemplo 11.* Na figura 8 pergunta-se: é uma árvore ou uma floresta? Alguns, mais distraídos, vão responder floresta, uma vez que não reparam que na realidade o grafo é conexo, isto é, há uma única árvore.

## Conclusão

Propomos, neste artigo, alguns exemplos que podem ser usados na construção dos conceitos iniciais da teoria de Grafos.

É claro que há um grande espaço de manobra para a criação de bons exemplos que podem surgir na aula de matemática tanto pela mão do professor como pela contribuição dos alunos. O fundamental é que os bons exemplos devem ser construídos de modo a que não sejam uma aplicação imediata dos conceitos mas que requeiram um trabalho intelectual que proporcione aos alunos o prazer da descoberta. Ao constituírem o contexto para a construção de conceitos, os exemplos não são meras ilustrações mas antes o ponto de partida para a discussão e para a introdução dos aspectos teóricos que se pretendem abordar.

Deste modo as aprendizagens decorrem de um processo de discussão, interpretação e compreensão de situações concretas. A definição e a formalização constituem o derradeiro passo deste percurso. Este é um caminho que procura dar maior significado aos modelos de Grafos.

O papel dos bons exemplos não se esgota na fase de introdução e apresentação dos conceitos, estes devem também constituir um ponto de partida para a construção de exercícios de aplicação, com vista à consolidação das aprendizagens.

## Bibliografia


http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/mac_homologacao.pdf

Paulo Netto, Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos, Editora Blücher, 2003

L. R. Foulds, Graph Theory Applications, Springer, 1992

R. Diestel, Graph Theory, Springer, 2000

O. I. Melnikov, Problemas Divertidos de Teoria de Grafos, Minsk, 2001 (em russo)



Marília Pires
Viktor Kravchenko
Departamento de Matemática
FCT — Universidade do Algarve

# Augusto Franco de Oliveira A primeira última lição de um Mestre

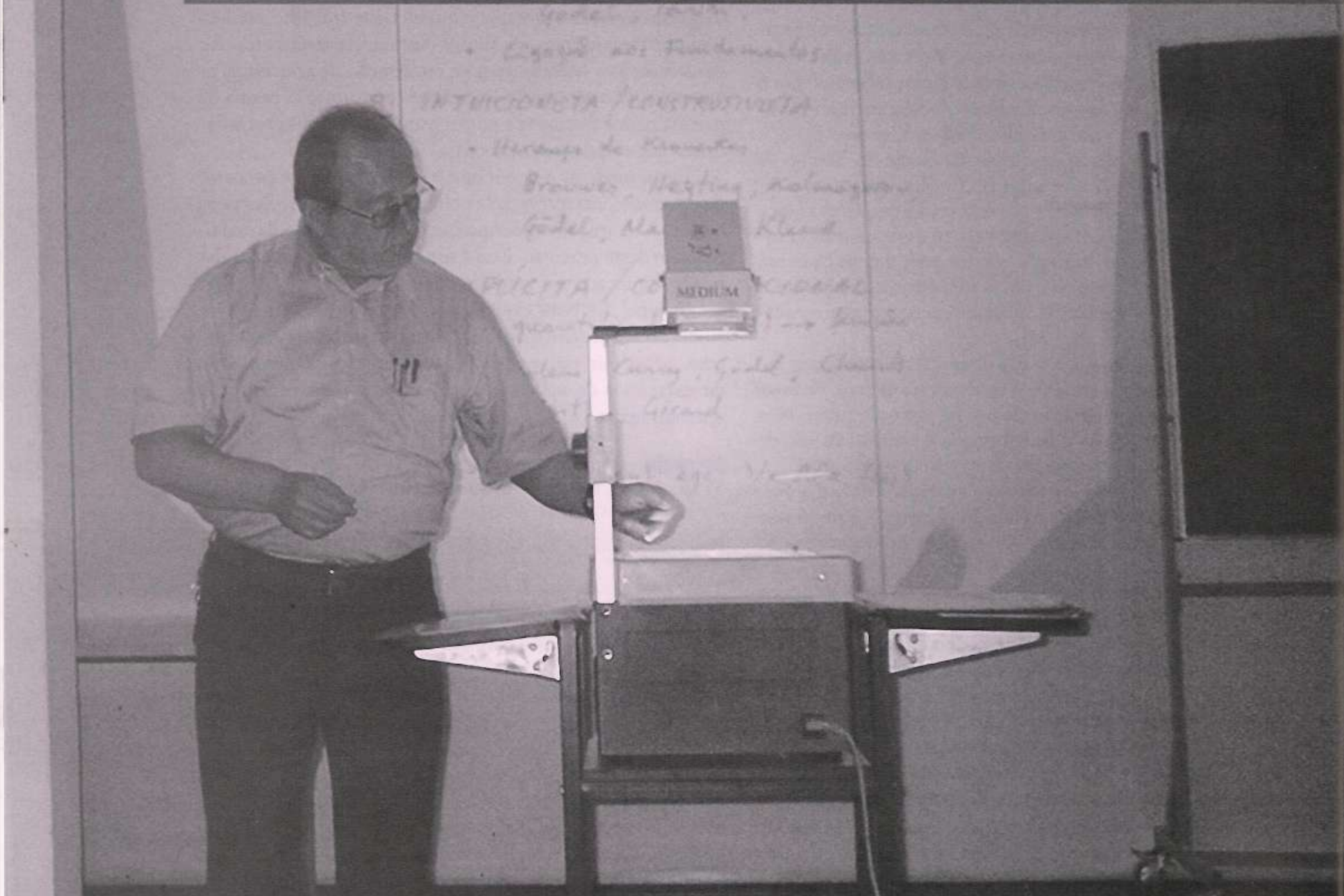
António M. Fernandes

No passado dia 18 de Junho rumei a Évora, com dois outros colegas, para assistir a uma acontecimento que já sabia a priori, não ir acontecer. Não ia acontecer pois era impossível que acontecesse e este facto podia estabelecer-se usando somente a lógica.

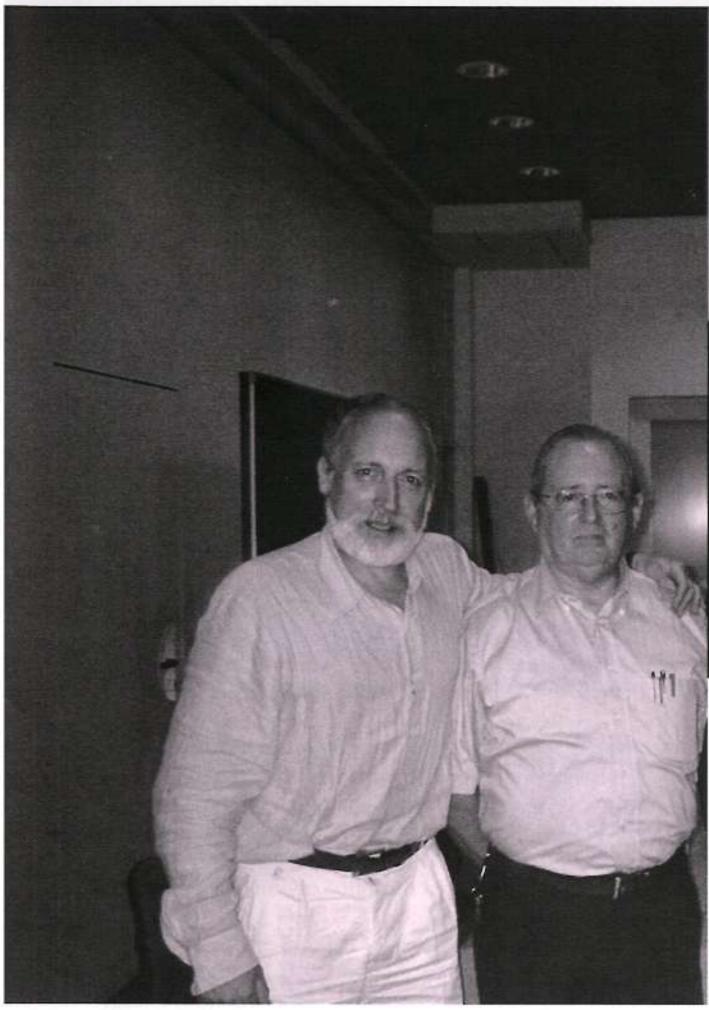
Dias antes tinha recebido um e-mail anunciando a Última Aula do Professor Augusto Franco de Oliveira. O autor da mensagem terá ele próprio sentido alguma desadequação entre o tipo de homenagem e o homenageado, pelo que havia sido cuidadoso na redacção, anunciando-a como "a última aula formal". Criando esta distinção entre o essencial e o acessório acabou por ser mais realista.

Quando, pelo meio-dia, nos juntámos um número muito razoável de pessoas, no anfiteatro 2 do Colégio Luís António Verney, estávamos lá apenas e simplesmente para ouvir Franco de Oliveira. Era mais uma ocasião para respirar essa atmosfera comunicacional cristalina, que com ele é possível vivenciar. Uma atmosfera à qual, aqueles de nós que fomos, e sempre seremos seus alunos, temos necessidade de regressar de quando em quando, como quem procura o ar puro da montanha. Trata-se de um grande Mestre, não apenas aqui, nesta terra onde o padrão regra geral encolhe; sê-lo-ia assim em qualquer lugar do mundo e, atrevo-me a dizê-lo, em qualquer tempo também.

Franco de Oliveira é uma dessas raras pessoas que livrou do lastro que representava o país em que nasceu. Um país que desperdiçou talento e, pior que isso, se atrasou voluntária e inexoravelmente. Felizmente, para as escolas de Lógi-




Franco de Oliveira durante a primeira última aula



Com Eduardo Veloso, de quem foi aluno

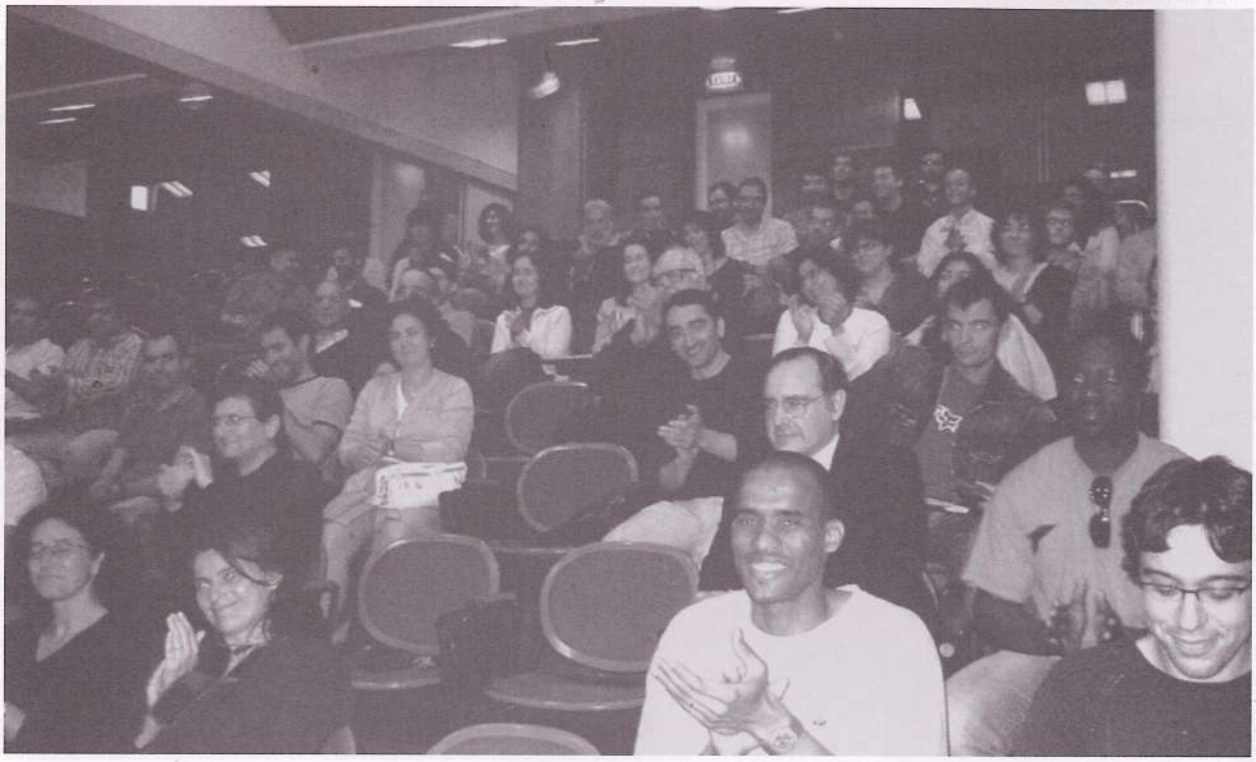
Com o grande amigo Paulo Almeida

ca Matemática e de Análise não Standard que actualmente existem em Portugal ele apaixonou-se pelos fundamentos da matemática. Desbravou solitariamente esses caminhos, entre nós praticamente desconhecidos. Fez-se Lógico Matemático por si próprio o que, em si, é já um feito notável. Não teve a oportunidade de trepar para cima dos ombros de gigantes, algo que os grandes vultos da matemática humildemente reconheceram. Se aquelas áreas de investigação têm hoje alguma importância, até alguma importância internacional, deve reconhecer-se que isso se deve a Augusto Franco de Oliveira, ou a uma mistura dele com quase nada.

Se a compreensão dos resultados fundamentais da lógica matemática do século XX já requer um esforço significativo, a sua divulgação requer ainda mais. Trata-se de uma etapa que a maioria cumpre mal e, perante a qual, uma parte substancial do restante hesita. Franco de Oliveira fá-lo magistralmente, tornando absolutamente claras as ideias fundamentais. Parece coisa simples, este propósito que, no entanto, só é alcançável através de uma profunda generosidade intelectual e de um activo empenho e esforço.

A difusão do conhecimento, encara-a sempre Franco de Oliveira, como uma missão, um dever ao qual dedicou e continua a dedicar enorme esforço. Não uma difusão burocratizada, antes uma "liturgia" de racionalidade e de grandes ideias. A Educação, enquanto um percurso para a formação do Homem Universal, ou como diria Caraça, a formação cultural integral do indivíduo, está sempre no seu horizonte e tem nele uma metodologia viva. A sua pedagogia é simples, reduz-se a um profundo respeito pela argumentação racional e pelos seus interlocutores.

Essa mesma generosidade que já referi, associada a esse espírito de missão, levou-o e ainda o leva a prescindir do trabalho em proveito próprio, para se dedicar à recuperação e divulgação do trabalho de outros. Cito apenas dois exemplos, uma tese inédita de José Sebastião e Silva sobre lógica que, não fora ele, continuaria inédita e também es-



Aspecto geral da assistência

quecida e, mais recentemente, a recuperação da obra lógica de Edmundo Curvelo. Estes são apenas dois episódios de uma luta desigual contra um país que metodicamente cultiva uma atitude hostil à sua própria memória situando-se sistematicamente de costas voltadas para os grandes vultos da sua cultura, ignorando-os.

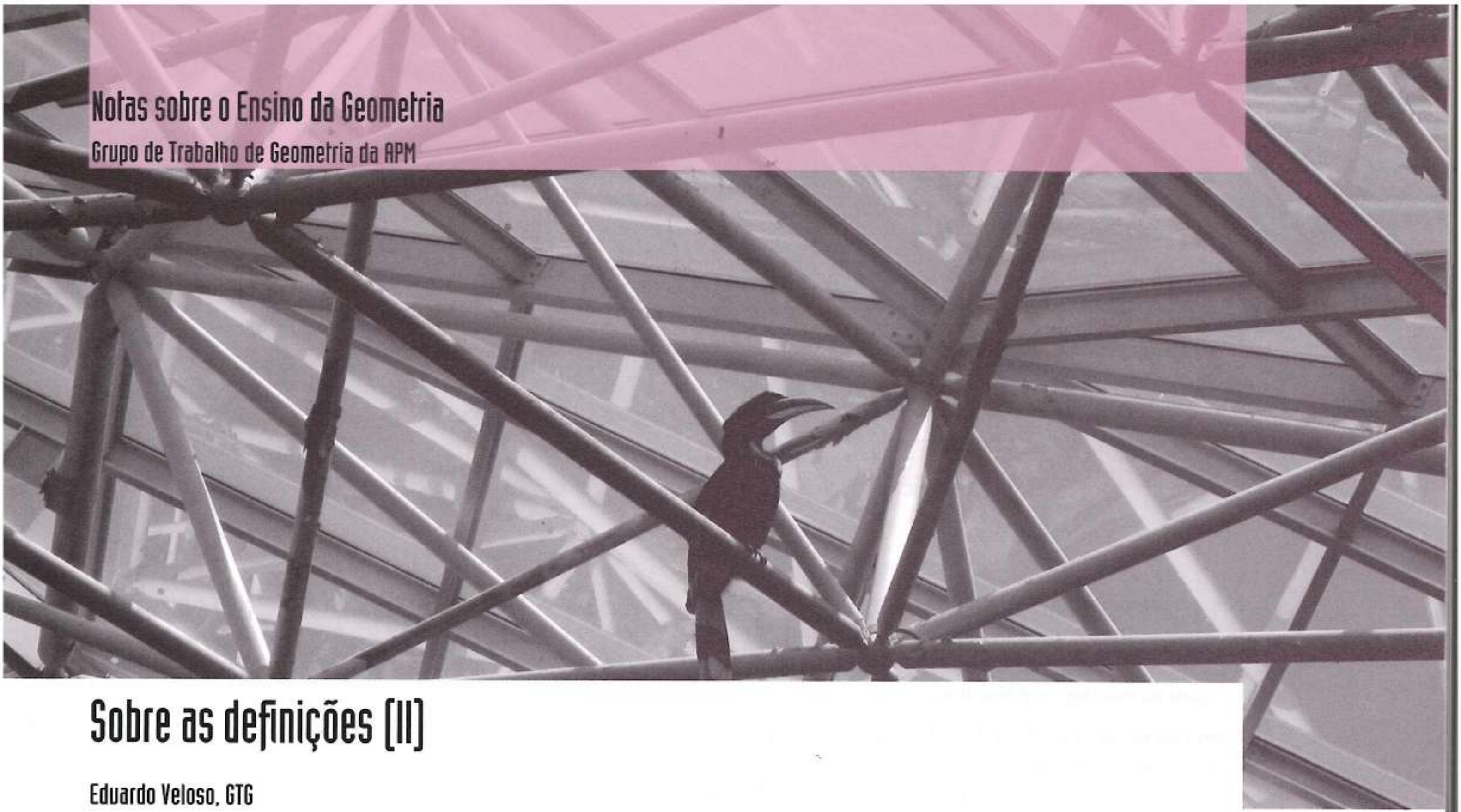
Augusto Franco de Oliveira colaborou com a APM em diversas ocasiões recordo a sua participação em alguns ProfMat e também num evento importante, revestido de uma certa aura fundacional, refiro-me ao Seminário de Milfontes. Essa colaboração mantém-se ainda hoje, de facto, ele é um dos colaboradores da revista Educação e Matemática, encontrando-se a preparar o número temático deste ano, do qual é editor convidado. É, de resto, no contexto desta última colaboração que me foi pedido que escrevesse algumas linhas sobre o evento que me levou a Évora. Lamento, mas não me é possível dizer nada num estilo mais institucional. Franco de Oliveira marcou-me indelevelmente, costumo dizer que me condenou ao estudo da Lógica Matemática. A este propósito foi interessante ouvi-lo agradecer publicamente ao Eduardo Veloso (que foi professor dele e também esteve presente em Évora) o facto de, de certa maneira, o ter inquietado, mesmo desencaminhado, sugerindo-lhe uma dessas leituras não recomendadas (que também existem em matemática). Foi um momento em que me senti muito próximo dele, que também me desencaminhou a mim. Ambos parecemos ter mais a agradecer àqueles que nos desencaminharam que aos que nos tentaram indicar o caminho certo. Apetece citar Álvaro de Campos: "O que eu adoro nos meus versos não é o sistema filosófico que me dizem que se pode tirar de lá. É o sistema filosófico que não se pode tirar de lá."

No final do evento, Franco de Oliveira estava livre. Livre da encenação burocrática em que a Universidade (não me refiro em particular à Universidade de Évora, mas à Universidade enquanto figura institucional) se tornou. Esta Universidade que aos poucos se transforma em repartição prestadora de serviços já não o merece. Mesmo assim, ele nunca regateou o seu labor em prol do Conhecimento. Quero crer que teve agora o prémio merecido—a liberdade e a paz de espírito para conduzir a bom termo os seus projectos, que são da maior relevância e que, aqui, na Educação e Matemática desejamos que incluam a continuação desta colaboração. Estas coisas terminam, regra geral, com desejos. Não o farei! Qualquer desejo contém em si, em maior ou menor grau, um pouco de ilusão. Franco de Oliveira é como devia ser, não há pois, nele, qualquer necessidade de ilusão[*].

[*] Como diria Alberto Caeiro!

*Agradecimento:* Agradeço a Paulo Almeida (um dos raros espécimens vivos da raça de Franco de Oliveira) a disponibilização das fotografias que ilustram este texto.

António M. Fernandes
Dep. Matemática, IST



# Sobre as definições [II]

Eduardo Veloso, GTG

...
*" — a educação é um processo de vida e não uma preparação para a vida futura."*
...
*" — a educação fracassa em grande parte porque despreza um princípio fundamental: a escola como forma de vida comunitária [real e presente]. Concebe a escola como um lugar onde deve ser fornecida certa informação, aprendidas certas lições e formados certos hábitos. O valor dessa informação, dessas lições e dos hábitos assim adquiridos é visto como residindo em grande parte num futuro [mais ou menos] longínquo; a criança deve ser sujeita a estas aprendizagens em ordem a qualquer coisa que virá a fazer: são meras preparações. Em consequência, não se tornam parte da experiência de vida da criança e não são verdadeiramente educativas."*
...

**John Dewey**, *O Meu Credo Pedagógico*, 1897

## Construção natural dos conceitos geométricos

Nos primeiros anos de vida, e antes de qualquer escolarização, todas as crianças fazem aprendizagens fundamentais. Aprendem a andar e a falar, e constroem uma quantidade enorme de conceitos que passarão a utilizar de forma eficiente no resto da sua vida. Essas aprendizagens decorrem naturalmente da sua vida na comunidade familiar e, para alguns, em creches e jardins de infância, que procuram prolongar ambientes familiares.

É importante constatar que não existe qualquer tentativa de formalizar essas aprendizagens. Por exemplo, como refere Dewey, é através das reacções (em particular da mãe) "ao seu balbuciar instintivos que a criança passa a saber o seu significado e progressivamente os transforma em linguagem articulada, e que desta forma é introduzida nas ideias e emoções que acabam por ser expressas na sua língua materna". Observações análogas se poderiam fazer relativamente às outras aprendizagens naturais dos primeiros anos de vida.

Por outro lado, a ninguém ocorreria (espero eu!) submeter uma criança, digamos aos cinco anos, a uma bateria de testes para saber se ela fez as aprendizagens esperadas dessa primeira fase da sua vida: se sabe distinguir uma porta de uma janela ou um garfo de uma colher, ou se confunde uma bicicleta com um automóvel, ou o Sol com a Lua, ou a mãe com o pai...

Aos seis anos, a criança vai para a escola. Se fosse a escola em que Dewey acreditava, essa mudança iria apenas inseri-la numa vida comunitária mais ampla "mas tão vitalmente real como a familiar, a do bairro ou a do parque de recreio." Com a sua mesma curiosidade e energia superabundante, a criança passaria a viver num ambiente que lhe proporcionaria um leque muito mais amplo de experiências, onde iria construindo da mesma maneira natural novos conceitos e novos modos de pensar e de se relacionar com os outros e com o mundo, iniciando uma nova fase na sua apropriação da herança cultural deixada pelas gerações passadas, nos vários domínios: social, científico, artístico, tecnológico, etc. Mas não, infelizmente o mais provável é que a escola onde entra não seja uma comunidade de vida, mas um sítio de onde mais tarde lhe apeteça fugir. Talvez a melhor caracterização da transformação que a escola "normal" vai operar nessa criança é uma frase, de que tive conhecimento recentemente, proferida por uma professora do 1° ciclo.

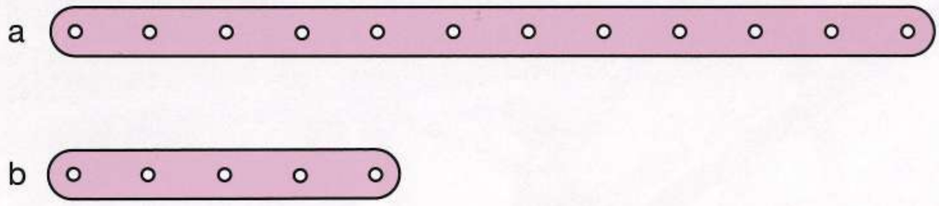



Figura 1.

Não sei reproduzir *ipsis verbis*, mas a professora *congratulava-se* com essa transformação, dizendo qualquer coisa como:

— eles entram cheios de curiosidade e a fazer muitas perguntas, mas depois passa-lhes...

Como fez notar um colega do GTG, talvez não seja correcto dizer que as aprendizagens se fazem na escola da "mesma maneira natural" que as dos primeiros anos de vida, antes da entrada para o 1° ciclo. Para já, o professor tem uma atitude diferente da mãe de uma criança, pois tem uma muito maior consciência — que me atrevo a dizer que muitas vezes é contraproducente —, de que "está ali para ensinar". No entanto, o que se deve esperar é que a sua formação para professor, inicial e depois ao longo da sua vida profissional, o leve a respeitar o percurso próprio da experiência de cada aluno. No caso da matemática, nomeadamente da geometria, o desejável é que a sucessão de experiências dos alunos acompanhe o desenvolvimento da sua maturidade, ao longo de toda a escolaridade.

Nos primeiros anos — digamos 1° ciclo e 5° ano, ou mesmo 6° ano — o aluno vai construindo naturalmente os conceitos, sem uma apresentação formal de definições por parte do professor. Os novos termos, e serão muitos, aparecerão naturalmente durante as múltiplas explorações de materiais manipuláveis de diversos tipos. O professor, sem receio pelo facto de o aluno estar a ouvir pela primeira vez termos que não conhece *nem lhe foram explicados de antemão*, emprega esses termos de forma correcta — diz *vértice* em vez de "bico" ou *ângulo* em vez de "cantinho". Ao mesmo tempo, aceita o "balbuciar geométrico" dos alunos e segue com atenção e muita paciência o seu percurso.

Nos anos intermédios, digamos o terceiro ciclo, as experiências aprofundam-se e os alunos começam a entender que, para se compreenderem uns aos outros, quando estão a trabalhar em geometria, têm que ter algum cuidado na sua linguagem com as palavras que usam. Percebem por exemplo o que o professor quer dizer com a frase: "daqui para a frente, até eu dizer o contrário, nos polígonos os lados não se intersectam, ou seja, os únicos pontos que podem ter em comum são os vértices". Começam assim a compreender o duplo carácter que têm as definições em matemática: por um lado são fundamentais para a compreensão do que estamos a dizer e para podermos saber se as afirmações que fazemos são correctas, por outro lado não são absolutas, isto é, definições diferentes do mesmo conceito podem ser adoptadas se isso se torna conveniente para a nossa comunicação.

No ensino secundário os alunos deveriam aprofundar a sua compreensão da natureza da matemática, e do papel das definições e das demonstrações na construção desta ciência, através de experiências e de projectos próprios de uma maturidade matemática construída nos anos anteriores.

## Um exemplo: os paralelogramos

### Primeiros anos

Tal como muito provavelmente a primeira ideia de *janela* que uma criança teve foi ao ver a mãe dirigir-se a uma janela e abri-la, enquanto dizia

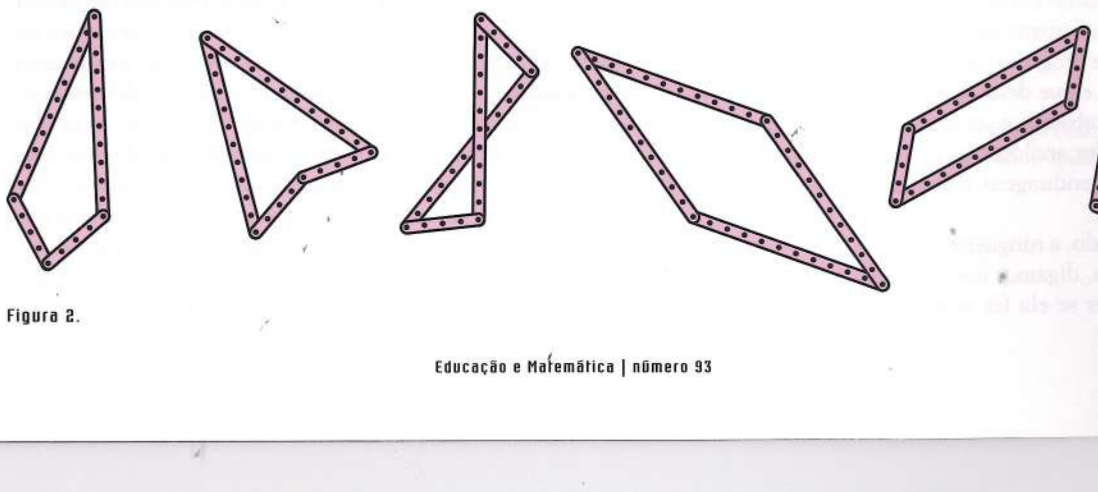


Figura 2.

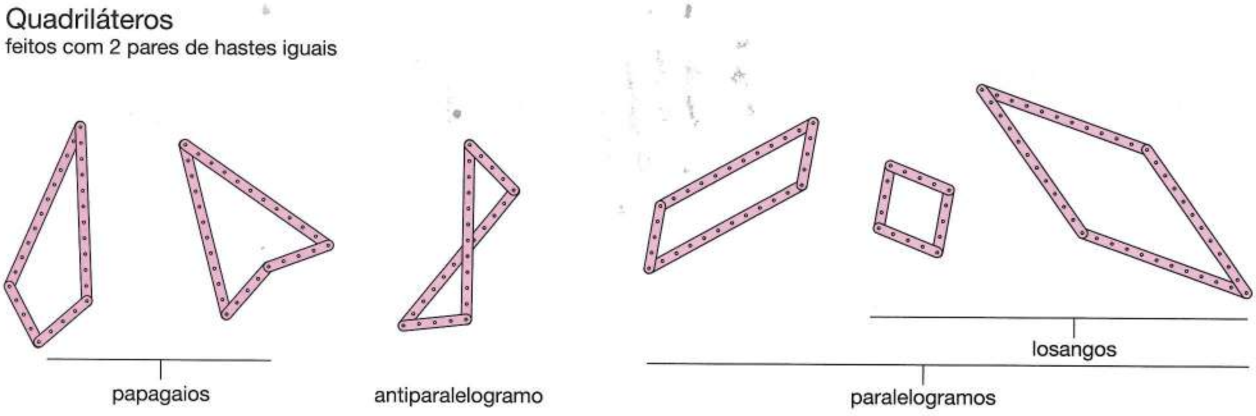



Figura 3.

— está aqui muito calor, vou abrir a *janela*...
essa mesma criança ouvirá pela primeira vez a palavra *paralelogramo* quando o seu professor, no começo de uma aula, disser:

— hoje vamos construir quadriláteros apenas com hastes de dois comprimentos e descobrir os *paralelogramos*.

Não sei que materiais existem hoje para construir paralelogramos. O Meccano da minha juventude, feito de hastes metálicas perfuradas, de diferentes comprimentos, era ideal para o efeito. Seja com que material for, nesse dia o professor formou numa grande mesa dois montes de hastes: num dos montes hastes maiores — chamemos-lhes hastes a, todas do mesmo comprimento 11 — e noutro monte hastes de menor comprimento — chamemos-lhes hastes b, todas de comprimento 4 (ver figura 1).

Depois disse que para fazer os quadriláteros tinham que utilizar ou quatro hastes de um dos montes ou duas de cada monte. E exemplificou, fazendo um quadrilátero em cada um dos casos, ligando as quatro hastes umas às outras em cadeia, sendo a extremidade da quarta ligada à origem da primeira.

E propôs aos alunos que construíssem, com aquelas hastes, e obedecendo sempre aquela regra, todos os quadriláteros diferentes que fossem capazes[1].

Passado algum tempo, os alunos tinham construído os quadriláteros da figura 2.

Segue-se a habitual discussão depois de uma exploração deste tipo: não há mais nenhum diferente? em que é que são diferentes? etc. etc. Novas palavras aparecem inevitavelmente: consecutivos, intersecção, etc. etc. Pode até surgir a palavra *paralelo*, por onde os alunos podem já ter passado em geometria ou que até já conhecem da vida "real": ruas *paralelas*...

A certa altura, o professor pergunta: quais destes quadriláteros vos parece que é natural chamar *paralelogramos?* e o seguimento desta pergunta depende das reacções dos alunos, do que já tinha sido dito, etc., etc.

Mais tarde, alguém pode perguntar como se chamam os outros, ou pode o professor sugerir que façam um cartaz para colocar na parede da sala, com os nomes por baixo de cada quadrilátero que possa ser feito com 2 pares de hastes iguais... Os *papagaios* (formas mais usadas para a construção de papagaios de papel e cana, porque voam bem...), os *paralelogramos*, e o *antiparalelogramo*. Muito provavelmente, estes alunos nunca mais ouvirão falar do antiparalelogramo, mas que importa? Finalmente, o professor indica dois — a que já tinha chamado paralelogramos — que também se chamam losangos, especiais porque têm os quatro lados iguais. Uma boa ocasião de ficarem dois nomes por baixo da mesma figura... (figura 3)

### Anos intermédios [3º ciclo]

Numa aula do 9º ano (ou poderia ser do 8º, está claro), num projecto relacionado com as semelhanças, os alunos viram e usaram um pantógrafo mostrado pelo professor de Educação Visual. Depois utilizaram um *applet* na Internet (endereço `http://www.ies.co.jp/math/java/geo/panta/panta.html`) (figura 4).

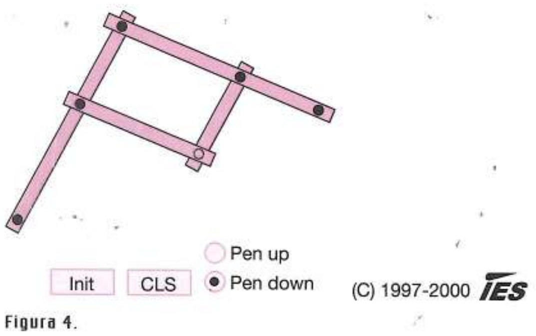



Figura 4.

Na continuação do projecto, um grupo de alunos resolveu fazer um modelo de pantógrafo no *Sketchpad*, e ao mostrar aos colegas o modo como o tinham feito, surgiu como ponto chave a construção de um paralelogramo. Foi aí que o professor resolveu aproveitar esse momento para esclarecer o conceito de paralelogramo, pelo que perguntou a toda a turma:

— Sabem dizer-me exactamente o que é um paralelogramo?

Seguiu-se uns momentos de silêncio e um aluno mais corajoso respondeu:

— É um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Ao que o professor respondeu:

— Tudo isso é verdade num paralelogramo, mas será preciso dizer sempre tudo isso para dizer o que é um paralelogramo?

Então ouviu-se a voz da Susana:

— Parece-me que basta dizer uma das coisas... mas não tenho a certeza.

O professor propôs então a seguinte tarefa em duas partes:

1. Construir um quadrilátero no *Sketchpad* utilizando apenas a condição de ter os lados opostos paralelos; verificar experimentalmente no *Sketchpad* que os lados opostos ficam então iguais.
2. Construir um quadrilátero no *Sketchpad* utilizando apenas a condição de que os lados opostos tenham igual comprimento; verificar experimentalmente no *Sketchpad* que os lados opostos ficam então paralelos.

Na discussão que se seguiu às experiências dos alunos com o *Sketchpad*, ficou bem esclarecido que realmente qualquer das condições (paralelismo dos lados opostos ou igualdade dos lados opostos) implicava a outra pelo que existiam (pelo menos) duas definições de paralelogramo, cada uma impondo apenas uma das condições. O professor explicou que na matemática se procurava sempre ter definições simples, que chegassem para definir um determinado conceito sem ambiguidade, e não incluindo condições supérfluas.

Como a conclusão era experimental, Susana ficou encarregada, com o grupo dela, de encontrar duas demonstrações que provassem que cada condição implicava a outra, o que conseguiu baseando-se em factos que já conheciam relativos à igualdade de triângulos.

## Ensino Secundário

Normalmente, o secundário deveria servir, em geometria, para aprofundar e sistematizar a experiência dos alunos nos ciclos anteriores. Infelizmente, o pequeno período dedicado à geometria sintética neste ciclo não permite fazê-lo. Por isso não me vou alongar neste ponto, dando apenas algumas indicações do que poderia ser feito noutras condições, para seguir ainda o caso concreto dos paralelogramos.

Freudenthal, o grande teórico da educação matemática no século XX, defendia justamente que toda a tradição de tentar ensinar a geometria à maneira dos *Elementos* de Euclides devia ser abandonada. E propôs que, em lugar de tentar levar os alunos a compreender a natureza da Matemática e a estrutura axiomática das suas teorias dessa forma, se utilizassem experiências de axiomatização local com o mesmo fim.

Os quadriláteros, e em particular o conjunto de propriedades dos paralelogramos, são campos ferteis para experiências desse tipo. Prometendo que numa futura nota abordaremos a questão importante das axiomáticas locais em geometria, limito-me a referir que na Adenda às Normas *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*, traduzida para português e publicada pela APM em 1993, existem no capítulo 10 diversos exemplos de experiências que podem ser feitas no campo das axiomáticas locais.

Uma delas consiste precisamente em tomar como postulados os casos de igualdade de triângulos e a igualdade dos ângulos alternos internos e partindo daí e da definição de paralelogramo, como *um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos*, provar os seguintes teoremas:

- Uma diagonal divide um paralelogramo em dois triângulos congruentes.
- Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.
- Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.
- As diagonais de um paralelogramo bissectam-se.
- As diagonais de um losango são perpendiculares.

Para mais detalhes, ver a publicação indicada. São também muito interessantes os trabalhos de Michael de Villiers sobre quadriláteros e a sua organização, em particular a publicação *Some Adventures in Euclidean Geometry*, publicada em 1996 em Durban, pela University of Durba-Westville. Ver também o excelente artigo de Michael Keyton, *Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica*, no livro *Geometria Dinâmica* (tradução feita pela APM do livro *Geometry Turned On*, org. por james King e Doris Schattschneider).

Julgo que neste último artigo se pode compreender bem como alunos que tivessem passado por uma experiências em geometria do tipo das que indicámos para os primeiros anos e para o terceiro ciclo, poderiam apreciar e entusiasmar-se no secundário com as actividades que aí são propostas de invenção e utilização de definições para novos objectos da geometria.

## Nota

1. Esta proposta é apenas indicativa. Um colega professor do 1° ciclo encontrará certamente com facilidade uma formulação mais apropriada para este nível etário, de que não tenho qualquer experiência.

**Eduardo Veloso**

**Grupo de Trabalho de Geometria da APM**

# Resultados dos exames de Matemática do 9º ano "vão ser teste ao trabalho das escolas"

## Resultados dos exames de Matemática do 9.º ano "vão ser teste ao trabalho das escolas"

**Isabel Leiria**

Ministra da Educação acredita que os benefícios do plano para a disciplina vão sentir-se já este ano

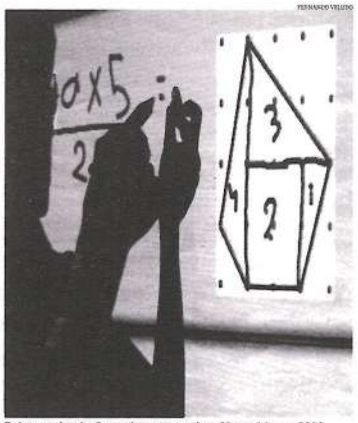
● Quando, dentro de pouco mais de um mês, os alunos do 9.º ano se sentarem à frente da prova nacional de Matemática não serão apenas eles que estarão em exame. "Pela primeira vez, o país associará os resultados não apenas à *performance* dos alunos mas também ao trabalho das escolas e dos professores, para o melhor e para o pior", defendeu ontem a ministra da Educação, Maria de Lurdes Rodrigues, durante o balanço do primeiro ano do Plano de Acção para a Matemática.

Foi em Junho de 2006 que o Ministério da Educação (ME) lançou mais uma iniciativa destinada a melhorar os catastróficos resultados à disciplina: no primeiro ano dos exames nacionais, 71 por cento dos alunos tiveram negativa na prova, resultado que melhorou ligeiramente em 2006. Mesmo assim, dois em cada três ficaram abaixo dos 50 por cento.

Os resultados foram devolvidos às escolas e os professores convidados a reflectir sobre as causas do insucesso. Mais tarde definiram planos de melhoria, estabeleceram metas a cumprir no espaço de três anos e solicitaram apoios ao ME. E é o fruto desse trabalho e dos 2,5 milhões de euros já investidos, através da celebração de contratos com as escolas do 3.º ciclo, que Maria de Lurdes Rodrigues espera ver reflectido nos resultados dos exames nacionais.

"Se houve mais trabalho e mais dedicação, e se acreditamos que só assim se conseguem melhorar os resultados, então vamos ter melhorias. Esse dia vai ser um estímulo para continuar a trabalhar", afirmou a ministra, na Escola Secundária José Gomes Ferreira, em Lisboa, perante uma plateia de dezenas de docentes.

FERNANDO VELUDO



**Dois em cada três alunos tiveram negativa a Matemática em 2006**

Para já, o balanço possível diz respeito apenas à adesão das escolas ao Plano de Acção para a Matemática. Quase 300 mil alunos e mais de dez mil professores estiveram de alguma forma envolvidos no programa, posto em prática em 1070 estabelecimentos de ensino.

**59 mil** foi o número de alunos que, num universo de 92 mil a prestar provas, tiveram negativa no exame de Matemática

De acordo com os números do ME, apenas três por cento das escolas básicas com 9.º ano e 21 por cento das secundárias com 3.º ciclo não contratualizaram ainda um plano com a tutela. Simultaneamente, 4500 docentes do 1.º ciclo e 800 do 2.º ciclo frequentaram o programa de formação contínua em Matemática, em articulação com instituições de ensino superior.

Ao todo, o ME prevê gastar nove milhões de euros ao longo dos três anos do Plano de Acção para a Matemática. Neste primeiro ano, a tutela não aceitou o pedido de muitas escolas para desdobrar turmas e trabalhar com menos alunos na sala de aula, mas permitiu o reforço de professores, horários de trabalho e contratação de outros peritos.

E é por isso que Maria de Lurdes Rodrigues acredita que o sonho recorrente que teve pouco tempo depois de iniciar funções, em 2005, não irá concretizar-se. "Quando cheguei ao Governo tive várias vezes um sonho, que era mais um pesadelo, de que todos os meninos chumbavam no exame. Isso não se concretizou, mas não há grande diferença entre chumbarem todos e haver 70 por cento dos alunos com negativa", contou a ministra, reforçando a ideia de que estes resultados não são aceitáveis e que vão melhorar.

**2,5 milhões de euros para equipamento**
Candidaturas a partir de 14 de Abril

A partir da próxima segunda-feira e até final do mês, as escolas com 3.º ciclo poderão candidatar-se a receber quadros interactivos, computadores portáteis e outro material tecnológico que demonstrem ser necessário ao seu projecto, no âmbito do Plano de Acção para a Matemática. Para este programa, o Ministério da Educação tem disponíveis 2,5 milhões de euros, anunciou ontem a ministra. O formulário de candidatura estará disponível *on-line*, no *site* da Direcção-Geral de Desenvolvimento e Inovação Curricular. A falta de equipamento foi uma das principais dificuldades expressas pelas escolas aquando do lançamento dos planos de acção e a tutela espera agora que no início do próximo ano lectivo os estabelecimentos de ensino já contem com este material. **I.L.**

In Público, 12 de Maio de 2007.

*Resultados dos exames de Matemática do 9º ano "vão ser teste ao trabalho das escolas"*, é o título do artigo do Público de 12 de Maio de 2007.

De acordo com o artigo, a Ministra da Educação, defendeu durante o "balanço do primeiro ano do Plano de Acção para a Matemática" que "Pela primeira vez, o país associará os resultados não apenas à performance dos alunos mas também ao trabalho das escolas e dos professores, para o melhor e para o pior".

Ainda segundo o artigo, o balanço do Plano de Acção para a Matemática passa pelo envolvimento de "quase 300 mil alunos e mais de dez mil professores", "foi posto em prática em 1070 estabelecimentos de ensino", ao todo o "ME prevê gastar nove milhões de euros" e apesar de "não aceitar o pedido de muitas escolas para desdobrar turmas e trabalhar com menos alunos na sala de aula, permitiu o reforço de professores, horários de trabalho e contratação de outros peritos.

"Se houve mais trabalho e mais dedicação, e se acreditamos que só assim se conseguem melhorar os resultados, então vamos ter mais melhorias" afirma a Ministra enquanto confessa esperar que o sonho recorrente que teve quando chegou ao Governo" de que todos os meninos iam reprovar no exame", não se concretize.

A Direcção da APM, reagiu a esta notícia, em comunicado que foi também noticiado na imprensa (`http://www.apm.pt/files/_APM_PAM_Exames_4649e1a1e07bd.pdf`) e do qual destacamos apenas algumas ideias:

- mudanças duradouras em educação não acontecem num ano e há muitos factores que influenciam a aprendizagem;
- projectos em curso nas escolas têm que ser avaliados por indicadores mais adequados do que os exames;
- o processo dos PAM tem vários níveis de responsabilidade, e se o empenhamento dos professores e das escolas superou as expectativas do próprio Ministério já o apoio a que este se tinha obrigado demorou a chegar.

Esta tomada de posição pública por parte da APM desencadeou uma reacção surpreendente por parte do Director Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular que convidou a associação a abandonar a Comissão de Acompanhamento (CA) dos Planos da Matemática, alegando que a APM, pelo facto de estar na Comissão, não podia criticar publicamente o programa do Ministério da Educação.

Na sequência destes acontecimentos a direcção da APM deixou de integrar a CA considerando "princípio fundamental e inquestionável a sua independência e liberdade de expressão" (`http://www.apm.pt/portal/index.php?id=68357`).

Não é a primeira vez que temos Ministros com a obsessão dos resultados pelos resultados, e com um apetite voraz para culpar de tudo os professores, recordam-se da célebre frase da Ministra Ferreira Leite no Parlamento de que as provas globais teriam, pelo menos, a vantagem de obrigar os professores a cumprir os programas.

Parece-nos que, ontem como hoje, o que está em causa são visões simplistas contaminadas por incompreensão e desconfiança. A ideia de que os exames podem medir tudo é simplista, como simplista é a leitura de que os resultados só não são bons por incumprimento por parte das escolas e dos professores. Estas ideias revelam, do nosso ponto de vista, incompreensão do processo educativo e desconfiança no trabalho dos professores.

Continuamos convictas que há mudanças que são necessárias e que sem o verdadeiro envolvimento dos professores é impossível fazê-las. O que não nos parece é que seja esta abordagem de desconfiança e de cobrança desajustada e extemporânea o bom caminho para conseguir esse envolvimento.

Consideramos incompreensível que o poder político tente impor o silêncio a uma Associação pelo facto de estar representada numa qualquer comissão. Felicitamos a direcção da APM, porque fez o que devia ser feito. No entanto, questionamonos se não haverá muito mais a discutir sobre os PAM: O que está a correr bem? E mal? O Ministério está ou não a cumprir? Que balanços podem ser feitos? Que posições públicas queremos que a APM tome?

**Ana Luísa Paiva e Adelina Precatado**

# Desenvolvimento do cálculo mental

O cálculo mental é uma competência de natureza prática. As destrezas de cálculo desenvolvem-se com uma prática sistemática e prolongada. Assim, é desejável que durante as nossas aulas sejam proporcionadas oportunidades para praticar o cálculo mental. Actualmente, já há muito material direccionado para esse objectivo mas, o material por si só não ensina estratégias.

Nesta revista, há um conjunto de artigos dedicados ao cálculo mental. Em *13 ideias sobre o cálculo mental* João Janeiro fala-nos sobre o significado de cálculo mental e mostra possíveis estratégias para o seu desenvolvimento. O artigo de Sara Monteiro apresenta-nos uma experiência realizada na escola com a utilização dos *testes de 1 minuto* e inclui dois exemplos desses testes. A actividade da secção Materiais para a sala de aula, foi seleccionada da brochura *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares*, está direccionada para o 1° ciclo e tem como objectivo ajudar os alunos a perceber que, na resolução do problema em causa e nos cálculos subjacentes, há várias estratégias possíveis.

Encontramos, noutros números da Educação e Matemática, artigos dedicados ao desenvolvimento do cálculo mental e da estimativa. Por exemplo, na revista 10 números antes desta, Dulce Araújo e João Janeiro questionavam-se sobre o desenvolvimento do currículo e faziam propostas "(...) Decidimos então reflectir sobre que tipo de jogo poderia ser importante, no contexto português actual e no da nossa escola, para o desenvolvimento do currículo nacional de Matemática do ensino básico (3° ciclo). Que competências nele preconizadas estariam na prática a ser inconscientemente mais desprezadas por nós próprios e a ser menos trabalhadas com os nossos alunos, face a outras directamente relacionadas com os novos conteúdos curriculares dos programas para cada ano de escolaridade? Pensamos ter encontrado uma resposta: as competências de cálculo mental e de estimativa. Assim, por paradoxal que possa parecer, decidimos criar um Campeonato de cálculo mental e estimativa para as duas turmas do 9° ano".

E se fizermos uma retrospectiva das actividades que costumamos realizar para desenvolver o cálculo mental e a capacidade de estimar dos nossos alunos, o que concluiremos? Serão apropriadas e suficientes?

Pense nisto.

**Cláudia Fialho, Isabel Rocha e Manuela Pires**

## Materiais para a aula de Matemática

Esta tarefa pensada para o final do 2.° ano de escolaridade procura sistematizar uma organização dos procedimentos de cálculo linear de modo a melhor compreender a adição, a subtracção e a relação inversa entre estas duas operações.

O desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque estas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles. Uma das características das estratégias de cálculo mental é a sua flexibilidade e variabilidade.

Esta tarefa pode, por um lado, ajudar os alunos a perceber que não existe uma considerada a melhor, mas que são várias as estratégias disponíveis ajustáveis aos números em causa (dando saltos de dez em dez e/ou saltar até à dezena mais próxima e depois saltar pelos múltiplos de dez). Por outro lado, a utilização da linha numérica vazia, proposta na tarefa, como uma ferramenta didáctica, pode apoiar os alunos a explicitar muitas das estratégias de cálculo mental e ajuda a promover o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

A relação inversa entre adição e subtracção pode ser explorada na linha numérica com as soluções da Rita e do Zé ou da Ana e do Rui porque utilizam os mesmos números e os mesmos saltos, mas em sentido inverso.

**Equipa do Projecto Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares**

# Como é possível?


O Vasco paga esta camisa com uma nota de 50 euros.
Quanto recebe de troco?

**A solução do Zé**
32 + 10 = 42 → uma nota de 10 euros
42 + 8 = 50 → 8 euros
O Vasco recebe 10 + 8 = 18 euros de troco

**A solução da Ana**
32 + 8 = 40 → 8 euros;
40 + 10 = 50 → uma nota de 10 euros
18 de troco: 8 + 10 = 18

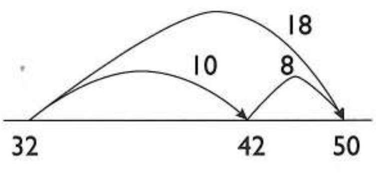
**A solução do Rui**
A diferença entre 50 e 32 é 50 – 10 = 40
(uma nota de 10) e 40 – 8 = 32, 8 euros
Logo 18 de troco: 10 +8 = 18

**A solução da Rita**
A diferença também é de 50 – 8 = 42 e
42 – 10 = 32 → 10 + 8 = 18 de troco

**A solução da Margarida**
50 – 30 = 20; 20 – 2 = 18
18 de troco

1. O Zé, a Ana, o Rui, a Rita e a Margarida seguem caminhos diferentes para saber qual é o troco que o Vasco recebe. Procura compreender como eles pensam desenhando as suas soluções com saltos na linha numérica. Como exemplo, vê como se representa a solução do Zé.

A solução do Zé



# Desenvolvimento do cálculo Mental

## O "teste de 1 minuto"

Sara Monteiro

No ano lectivo 2004-2005 começou a leccionar-se, na Escola Secundária Josefa de Óbidos, em Lisboa, uma disciplina de oferta de escola, para o 7.° ano, denominada "*Matemática Elementar*". A proposta foi da Isabel Fevereiro, professora do Departamento de Matemática da escola, que também sugeriu objectivos e metodologias a aplicar.

A disciplina tinha como objectivos principais o desenvolvimento do cálculo mental, a resolução de problemas e o trabalho prático com recurso à geometria elementar. Para qualquer um destes objectivos procuraram-se tarefas elementares sem a intenção de estarem directamente relacionadas com os conteúdos curriculares que estavam a ser leccionados. Deste modo procurou-se também promover a autonomia e o gosto dos alunos pela Matemática.

Neste documento apenas será abordado o desenvolvimento do cálculo mental.

Com o intuito de desenvolver o cálculo mental foram aplicadas tarefas a que chamámos *testes de 1 minuto*, cujas características e metodologias de aplicação específicas foram, na sua maioria, definidas pelo grupo de matemática da escola. Assim, deveriam ser aplicados semanalmente, um por aula, preferencialmente no início desta; os primeiros testes deveriam conter apenas cálculos com operações elementares, utilizando números racionais, mas não na forma fraccionária; o tempo de resolução seria apenas de 1 minuto e seria controlado rigorosamente; o teste deveria ser corrigido pelo professor e entregue na aula seguinte; os professores que iriam leccionar a disciplina ficariam encarregues de elaborar os testes.

Nem todos os professores que leccionavam 7° ano manifestaram disponibilidade para participar. O colega José Carlos aceitou logo e, com a orientação da Isabel, elaborámos à vez os testes, discutindo em conjunto, previamente, o tema de cada um. Só com este trabalho conjunto foi possível manter a iniciativa até ao final do ano lectivo.

Como se tratou do ano experimental, algumas das nossas iniciativas na sala de aula foram tomadas intuitivamente e nem sempre obtiveram o mesmo tipo de resultados quando aplicados depois a outros alunos.

Nas turmas que me estavam atribuídas comecei por lhes dizer que poderiam resolver a lápis. Contestaram a sugestão pois achavam que daria azo a *batota*. Disse-lhes que confiava neles e que não acreditava que alguém o fosse fazer. Inicialmente, a maioria dos alunos utilizou o lápis mas no final do ano já quase todos resolviam a esferográfica — afinal chamava-se teste!

Para a realização dos testes controlei o tempo ostensivamente, dando ordem para virarem o rosto da folha para cima ou para baixo exactamente no início e no fim da prova. Inicialmente foi-lhes difícil obedecer às orientações. Depois, até levou a que deixassem de chegar atrasados uma vez que, se chegassem durante o teste tinham apenas o tempo restan-

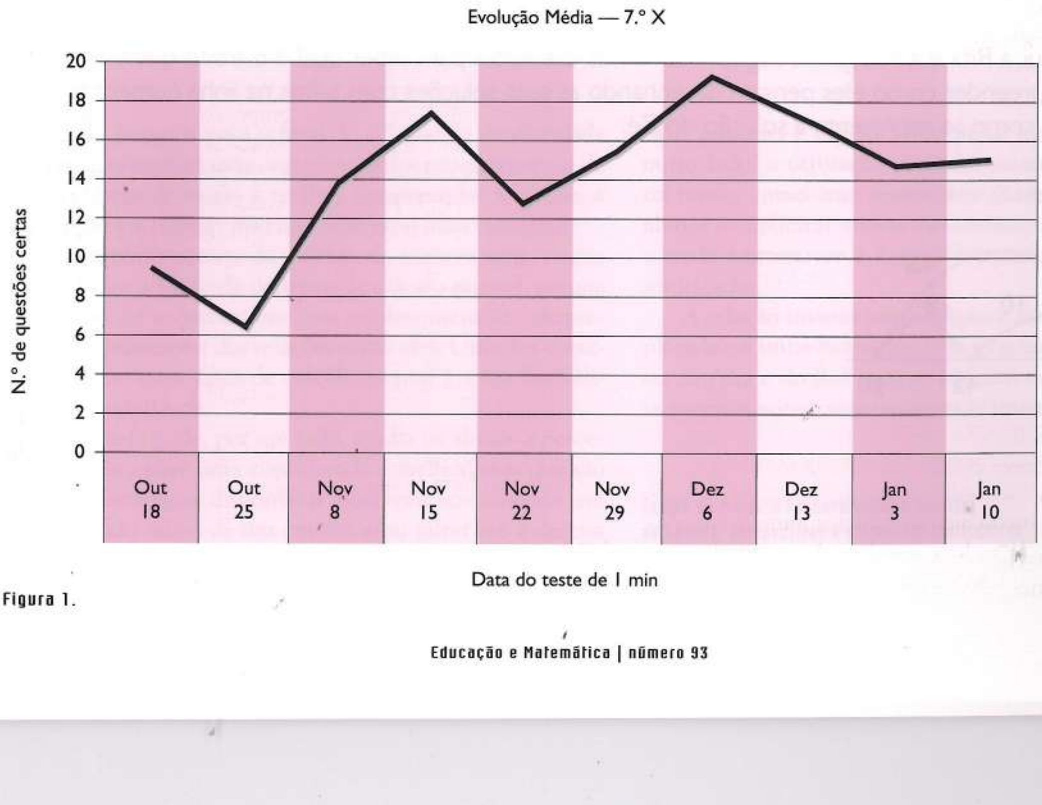



Figura 1.

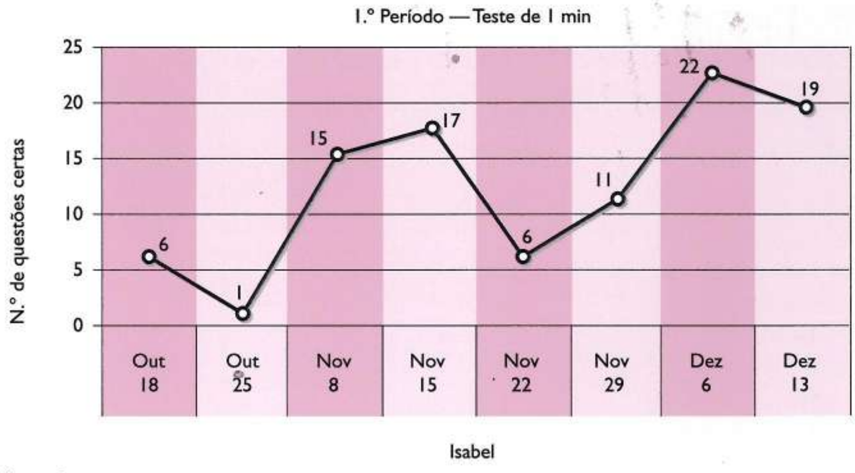



Figura 2.

te para o fazer e, se só chegassem depois de terminado não o poderiam repetir.

Os alunos começaram a ver os testes como um jogo, com regras bem definidas, em que o objectivo principal era conseguir acertar em mais questões do que no teste anterior e, eventualmente, acertar em mais do que um determinado colega. Esta última situação só pareceu ser importante para os alunos com melhor rendimento escolar a Matemática. Uma das razões foi o facto de o aluno que melhores resultados obtinha (geralmente resolvia todas as questões e tinha tudo certo) não tinha aproveitamento positivo na maioria das disciplinas e, até mesmo a Matemática, os seus desempenhos eram irregulares e geralmente pouco satisfatórios. Assim, especialmente para dois dos alunos tornou-se quase uma questão de honra ser melhor do que o colega nos testes de 1 minuto mas não o conseguiram.

No final dos períodos fiz gráficos individuais (figura 2) com a evolução das respostas certas dos alunos. Em todos eles se verificou que tinha havido um crescimento positivo quando se comparavam os resultados iniciais com os finais. Essa variação não era idêntica em todos os alunos pois as suas prestações foram muito variáveis. Porém, como os gráficos eram individuais puderam comparar-se consigo próprios e ver que tinham melhorado, o que pareceu satisfazê-los. Os gráficos foram depois enviados aos encarregados de educação, na caderneta do aluno, para que tomassem conhecimento. Mais uma vez, como a evolução só era respeitante ao seu educando e não havia juízos de valor, mostraram algum agrado.

Quando aumentámos o grau de dificuldade dos testes verificámos que a duração dos mesmos era insuficiente para a sua resolução pelo que tivemos de optar por diminuir o número de questões ou aumentar a sua duração. Escolhemos a segunda hipótese por facilitar a elaboração dos gráficos. Porém, esta alteração nunca foi feita durante a realização do teste, era sempre decidida previamente e em conjunto.

No final do ano, ao analisarmos os resultados, chegámos à conclusão que havia alguns aspectos a melhorar. Assim, o tema dos testes não deve ser alterado semanalmente uma vez que os alunos não poderão aplicar com brevidade os conhecimentos adquiridos no teste anterior. Sempre que considere oportuno, o professor deverá utilizar parte da aula para desenvolver estratégias de cálculo mental pois estes testes, por si só, não são suficientes.

Os resultados obtidos nas turmas foram diferentes. Nas minhas, os alunos empenharam-se e verificou-se uma evolução (figura 1). Na turma do José Carlos os alunos eram mais velhos e pouco empenhados na sua aprendizagem escolar pelo que a sua evolução não foi tão positiva. Relativamente às restantes duas turmas não houve informação. Desde então a escola continua a manter a utilização de testes de 1 minuto como uma das estratégias para melhorar o cálculo mental, aplicando-os aos 7.° e ao 8.° anos, com conteúdos muito diversificados.

Desta experiência considero que há algumas ideias chave a reter:

— É muito importante o controlo rigoroso do tempo uma vez que a competência de cálculo mental não abrange só o saber calcular mas também o fazê-lo num período de tempo admissível.

— O feedback atempado, da evolução do aluno, que é proporcionado ao próprio e ao seu encarregado de educação possibilita uma maior compreensão e envolvimento de todos nesta actividade escolar e, consequentemente, uma maior colaboração com o próprio professor. O feedback de final de período deverá ser sob a forma de gráfico pois proporciona uma fácil leitura. Este trabalho fica simplificado se o registo dos dados for sendo feito numa folha de cálculo.

— O controlo ostensivo do tempo e o facto de terem conhecimento dos resultados do seu esforço de forma clara e rápida faz com que os alunos vejam na tarefa um certo factor lúdico e de competição mais consigo próprios do que com os outros, procurando sempre evoluir de modo a melhorarem as suas prestações.

**Sara Monteiro**
**Escola Básica 2.3 Luís António Verney**

## Cálculo, adição e subtracção de números

Nota: Assim que o professor der o sinal de partida tens UM MINUTO para fazer o máximo de contas possível.

| | | |
|---|---|---|
| 4 + 9 = | 7 – 4 = | 12 + 38 = |
| 18 + 9 = | 9 – 5 = | 28 – 10 = |
| 25 + 7 = | 18 – 7 = | 25 + 25 = |
| 8 + 13 = | 16 – 4 = | 46 – 36 = |
| 27 + 23 = | 15 – 8 = | 8 + 24 = |
| 19 + 5 = | 25 – 9 = | 45 – 36 = |
| 62 + 7 = | 17 – 11 = | 17 + 14 = |
| 9 + 38 = | 43 – 23 = | 23 – 5 = |
| 61 + 58 = | 17 – 8 = | 103 + 19 = |
| 13 + 22 = | 23 – 4 = | 100 – 18 = |

## Cálculo, multiplicação e divisão de números decimais

Nota: Assim que o professor der o sinal de partida tens TRÊS MINUTOS para fazer o máximo de contas possível.

| | | |
|---|---|---|
| 4 × 0,2 = | 0,8 ÷ 2 = | 2 × 0,23 = |
| 5 × 1,1 = | 0,5 ÷ 5 = | 4,8 ÷ 4 = |
| 3 × 4,2 = | 9,9 ÷ 3 = | 0,2 × 0,23 = |
| 2 × 9,234 = | 21,7 ÷ 7 = | 4,8 ÷ 0,4 = |
| 6 × 0,3 = | 5,2 ÷ 2 = | 0,2 × 2,3 = |
| 7 × 0,81 = | 19,8 ÷ 9 = | 80 ÷ 0,2 = |
| 0,9 × 0,1 = | 0,8 ÷ 0,4 = | 3,6 × 0,3 = |
| 0,4 × 0,2 = | 0,16 ÷ 0,8 = | 80÷ 0,02 = |
| 0,8 × 1,1 = | 0,036 ÷ 6 = | 2,5 × 0,4 = |
| 0,3 × 0,9 = | 0,30 ÷ 0,05 = | 0,19 ÷ 0,019 = |

# 13 ideias sobre o cálculo mental

João Janeiro Esc. Sec. Padre António Vieira

**1** O cálculo mental não deve ser encarado como uma forma de cálculo que é todo feito mentalmente. Mais do que ser o *cálculo de cabeça*, deve ser entendido como o *cálculo com a cabeça*.

**2** O cálculo mental é simultaneamente:

o *oposto do cálculo algorítmico escrito*, feito com papel e lápis, aplicando o algoritmo conhecido que é usado tradicionalmente;

o *cálculo flexível*, em que diferentes pessoas podem, com rapidez e eficiência, utilizar estratégias diferentes.

**3** Para calcular mentalmente **7x28**, eis algumas estratégias possíveis baseadas na propriedade distributiva da multiplicação:

i) **(7x20) + (7x8)**, ou seja, 140 + 56, que é 196.

ii) **(7x30) – (7x2)**, ou seja, 210 – 14, que é igual a (210 – 10 – 4), isto é, 196.

iii) **(7x25) + (7x3)**, ou seja, 175 + 21, que é (175 + 20 + 1), que dá 196.

**4** Muito frequentemente o cálculo mental é utilizado, não para calcular o resultado exacto, mas sim para determinar a sua *ordem de grandeza* ou para fazer uma *estimativa* de um resultado.

**5** O cálculo mental é uma *competência essencial* e o seu desenvolvimento deve ser um objectivo na aprendizagem da Matemática.

- Porque tem uma *importância prática* no dia-a-dia;
- Porque tem um *valor pessoal, individual*;
- Porque tem um *valor matemático*;
- Porque pode ser um *pré-requisito* de muitas outras aprendizagens, dentro e fora da Matemática.

**6** A competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo do ensino básico inclui "a aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação" e também "a aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado" (CNEB, 2001).

**7** Existem diversas *estratégias de cálculo mental*. Os alunos devem conhecê-las, compreendê-las e aplicá-las, com alguma *rapidez e eficiência*. Faz, portanto, sentido que os alunos realizem testes de cálculo mental com tempo limitado. E também que, em certas ocasiões do trabalho em sala de aula, o professor não permita o uso da calculadora. É claro que, nas primeiras vezes, os alunos irão reagir…

**8** Ao calcular de cabeça, em pensamento, imaginando a execução do algoritmo não no papel mas sim "no tecto", estamos a fazer um cálculo mentalmente sem que se trate verdadeiramente de cálculo mental.

**9** Pensemos na adição e subtracção. Uma característica do método de cálculo usando os algoritmos destas operações é *trabalhar com os algarismos* que compõem os números individualmente segundo certos procedimentos pré-definidos. É possível calcular-se sem ter a mínima noção da ordem de grandeza dos números. De facto, *trabalha-se por colunas* e o número de colunas não tem qualquer importância, pois calcula-se em todas as colunas do mesmo modo. *É esse carácter automático* que é o ponto forte do cálculo com papel e lápis mas é também esse o seu ponto fraco.

a) Experimente calcular (**1001 – 98**) com papel e lápis, usando o algoritmo habitual, e verá o seu ponto fraco: o que é de natureza simples torna-se de repente difícil.

b) Experimente calcular (**1743 – 997**) e compare, neste caso, o cálculo algorítmico escrito com o cálculo mental, quer em rapidez, quer em eficiência. Ficou convencido? (o uso da "recta numérica vazia" é uma estratégia simples e útil para o cálculo mental destas situações – veja nesta revista a secção *Materiais para a aula de Matemática*).

**10** O primeiro método de cálculo mental usado na adição e subtracção é parecido com o cálculo com papel e lápis, pois o cálculo é feito *por colunas* mas é feito *da esquerda para a direita*.
Ao calcular (**378 + 257**) é imediato que a soma será superior a 500 e quase imediato que a soma será inferior a 700. Este *enquadramento* é da maior utilidade no uso diário, mas nem sempre temos consciência deste facto…

**11** O objectivo do cálculo é resolver problemas e a competência em realizar cálculos com papel e lápis não pode continuar a dominar o currículo de Matemática. Na era tecnológica em que vivemos, é importante ensinar uma variedade de formas de calcular, entre as quais as que recorrem a calculadoras e computadores. Porém, o cálculo mental é, pelo menos, tão importante como as restantes. Para *avaliar a plausibilidade dos resultados obtidos numa calculadora* e *controlar erros de digitação*, o cálculo mental e a estimação são essenciais e devem merecer uma ênfase especial quando os alunos usam calculadoras.

**12** Saber a *tabuada elementar da multiplicação* é, indiscutivelmente, uma componente essencial da fluência no cálculo mental. Mas saber a tabuada não é só *memorização* e *recitação* de factos. Assim, o professor deve ajudar e incentivar as crianças a desenvolver *estratégias* para aprender a tabuada, pois isso habilita-as a compreender relações numéricas úteis e a raciocinar matematicamente.

**13** Há conhecimentos relacionados com relações e propriedades dos números — *factos numéricos básicos* — que são essenciais para que as crianças desenvolvam o cálculo mental.
Por exemplo, saber que 1+9=2+8=3+7=4+6=5+5=10 permite calcular mentalmente (62 + 47), pois esta soma é equivalente a fazer (6+4) dezenas e juntar (2+7) unidades.

Para a secção "Pontos de vista, reacções e ideias. . ." da revista nº 93, a redacção pediu a professores e professores acompanhantes um depoimento, onde descrevessem a

## Vivendo o Plano da Matemática: uma experiência

Os 2° e 3° Ciclos do Ensino Básico estavam um pouco esquecidos. Os Planos da Matemática vieram, de alguma forma, agitar as filosofias de muitas escolas e as concepções dos professores sobre o que é a Matemática e o que é ensinar e aprender Matemática.

O nosso projecto tem três pontos que eu considero importantes enquanto desafios aos professores da equipa no seu desenvolvimento profissional: a codocência em todas as aulas de Matemática do Ensino Básico, a diversificação dos instrumentos de avaliação e o trabalho colaborativo.

A codocência assume três dinâmicas distintas: nas aulas de trabalho individual, a cargo do professor *titular* fica a dinamização e gestão da aula, enquanto que o *segundo* professor apoia, em tempo real, os alunos com mais dificuldades e potencia as capacidades dos alunos com melhor desempenho; nas aulas dinamizadas em pequenos grupos, os dois professores assumem o mesmo papel, isto é, têm o mesmo tipo de intervenção, percorrendo todos os grupos; nos debates, a condução fica por conta do professor *titular* com o apoio do *segundo* professor. Contudo, surgem dificuldades de gestão destas aulas, dado que os professores têm concepções diferentes sobre o ensino-aprendizagem da Matemática. Todos temos percursos diferentes e isso é evidente na dinamização e gestão das aulas. Mas temos feito um esforço enorme por aprendermos uns com os outros.

A avaliação é encarada por nós como mais uma oportunidade para o aluno aprender; daí termos adoptado um conjunto de instrumentos diversificados: teste dito tradicional (um por período), teste em duas fases (um por período), composições (duas por período), relatório (um por período), entre outros.

Com a codocência e a diversificação dos instrumentos de avaliação, o trabalho colaborativo apresenta-se como uma necessidade na nossa prática. De facto, seria impraticável dois professores partilharem duas aulas de 90 minutos por semana sem trabalharem em conjunto na sua preparação. Todas as semanas reunimo-nos para partilharmos as nossas experiências e ideias, e trocarmos materiais. A propósito de aprendermos uns com os outros, aquando da elaboração e implementação dos testes em duas fases, foram levantadas muitas questões: o que perguntar? como perguntar? como corrigir? como classificar? Mas com o apoio de um colega que já tinha experiência nesta matéria, e apesar dos nossos receios, fomos capazes de o implementar. Um colega tinha alguma apreensão em implementar tarefas investigativas: dizia que *tinham outra dinâmica*, mas, pelo facto de estarmos dois na sala de aula, as coisas tornaram-se mais simples.

A mudança das práticas é uma tarefa difícil e a reflexão é um processo complexo e lento, mas, quando trabalhamos em colaboração com colegas da escola numa perspectiva reflexiva, todos temos a ganhar, em especial o ensino-aprendizagem da Matemática. Permanece, todavia, a certeza de que ainda temos um longo caminho a percorrer.

**Cristina Natália da Fonseca**
**Escola Secundária de Valongo**

## Acompanhamento do PAM

Quando em Novembro de 2006 me candidatei à função de professora acompanhante dos Planos da Matemática, não tinha plena consciência do que era esperado de mim. Tinha lido o edital e sabia que iria acompanhar a implementação dos projectos em várias escolas, mas na prática, qual seria o meu papel? O que iria fazer para ajudar as escolas? De que forma poderia contribuir, positivamente, para o sucesso dos PAM das várias escolas que iria acompanhar? E, enquanto coordenadora do projecto na escola, onde trabalho, o que poderia fazer?

Em Dezembro fui seleccionada para acompanhar 13 escolas, e em Janeiro iniciei o meu trabalho. Tive formação enquanto professora acompanhante e fui construindo/clarificando a ideia do papel de um professor acompanhante. Neste momento sinto que esse papel está clarificado, apesar de poder vir a sofrer alguns ajustes nos próximos anos, porque estou a acompanhar um projecto e como tal tenho, também, uma função dinâmica. Para mim, esse papel é não só o de ajudar as escolas a implementarem os projectos, mas sobretudo, o de proporcionar a troca de ideias, experiências, de materiais, entre os professores das diferentes escolas, contribuindo, também, para uma reflexão mais rica e profunda sobre as práticas lectivas. Os PAM são uma excelente oportunidade para que, nós professores, comecemos a trabalhar mais em conjunto nas nossas escolas, e o Acompanhamento é uma excelente oportunidade para que possamos trocar as nossas experiências com colegas de outras escolas, contribuindo assim, de um modo efectivo, para o nosso desenvolvimento profissional.

Nas escolas que acompanho são diversas as estratégias implementadas. As mais frequentes são as parcerias pedagógicas, num bloco semanal, na aula de Matemática, e a atribuição do Estudo acompanhado, também, à disciplina de Matemática. Essas estratégias parecem-me boas, mas temos que aproveitar ao máximo as oportunidades. Por exemplo, nas aulas com parcerias temos dois professores na sala de aula, o que pode ser um grande apoio, especialmente nas turmas mais indisciplinadas. Mas se a aula for uma aula tradicional, com explicação teórica e exercícios estamos a perder uma grande oportunidade. Com dois professores na sala de aula, temos mais apoio para realizar aulas, com actividades de investigação, e/ou com o uso de novas tecnologias que, possivelmente, nunca experimentámos, por nos sentirmos um pouco inseguros em experimentar uma estratégia diferente, numa turma com 28 alunos. Agora temos essa oportunidade, não a deixemos escapar. Porque é modificando o modo como trabalhamos na sala de aula, com os nossos alunos, que poderemos fazer a diferença.

Eu sou, naturalmente, uma pessoa optimista, e, acho que vamos conseguir atingir os objectivos a que nos propusemos, em Julho de 2006, quando elaborámos a nossa primeira versão de projecto nas nossas escolas. Não me refiro ao preenchimento de tabelas com percentagens de sucesso. O objectivo dos Planos é "melhorar o sucesso dos alunos em Matemática". Na minha opinião melhorar o sucesso dos alunos não é só diminuir a percentagem de insucesso nos exames do 9° ano. Essa é apenas uma pequena parte, muito redutora do que deve ser a aprendizagem da Matemática. Infelizmente é a parte mais visível e à qual os políticos, por várias razões, dão demasiado valor. Nós, enquanto professores de Matemática, temos de resistir à vontade de, perante este discurso político, trabalhar com os alunos com o único objectivo de prepará-los para o exame.

Ainda temos um longo caminho a percorrer e nós, professores acompanhantes, temos uma grande responsabilidade em tornar o nosso trabalho, com as escolas, significativo para todos.

Mas uma coisa é certa, quase no final deste primeiro ano de trabalho, considero que a existência do PAM tem sido extremamente positiva e pelo que já proporcionou, nas escolas, já valeu a pena existir.

**Ana Cristina Tudella**
**Escola Secundária Frei Gonçalo de Azevedo, Cascais**

## O PAM da "minha" escola...

No final de Junho de 2006 o Ministério da Educação, através do gabinete de avaliação educacional (GAVE), convocou as escolas para uma reunião, onde foram informadas da *obrigatoriedade* da realização de um projecto cujo objectivo final era a melhoria dos resultados dos alunos na disciplina de Matemática. Simultaneamente o Ministério da Educação prometia *mundos e fundos* a ideia era: devidamente justificado quase *tudo* era possível...

Lecciono numa escola secundária, com terceiro ciclo, do interior alentejano onde muitos dos seus alunos estão desmotivados para a escola no geral e, em particular, para a Matemática. A preocupação perante os elevados níveis de insucesso na disciplina de Matemática não é de hoje, tendo já sido identificado, no projecto educativo da escola, dificuldades ao nível da Matemática. O projecto educativo contempla medidas de acção diversificadas que, até hoje, por diferentes motivos não se conseguiram implementar. Assim, e apesar da *obrigatoriedade* o PAM foi visto como uma possível solução para alguns dos nossos problemas e, apesar do pouco tempo que nos foi dado para a sua elaboração, pusemos *mãos à obra* e o projecto foi realizado.

Apostámos no reforço da Língua Portuguesa. Em nosso entender o domínio da Língua Portuguesa é fundamental para o sucesso da Matemática, o estudo acompanhado passou a ser leccionado em co-docência, por um professor de Matemática e outro de Língua Portuguesa. Propusemo-nos alterar práticas lectivas, diversificando ao máximo as estratégias utilizadas em sala de aula e consequentemente as práticas de avaliação, apostando fortemente numa avaliação formativa. Em algumas turmas a disciplina de Matemática passou a ser leccionada em co-docência, uma grande *aposta* do nosso projecto era o trabalho colaborativo entre professores.

Se para alguns elementos do grupo disciplinar o PAM era a oportunidade de iniciar em conjunto um trabalho mais *produtivo* com objectivos muito definidos, para outros este era só mais uma *invenção* do Ministério da Educação que pouco interesse despertava. Ainda mais complicado foram os que no inicio do ano lectivo entraram de novo para a escola e nunca assumiram o projecto como deles, o que até me parece natural, mas dificulta muito o processo. Mas as dificuldades não foram só essas, aquando da realização dos horários pouca coisa se podia fazer, nesta altura ninguém sabia o que ia acontecer ao PAM, o Gave já não era responsável e a direcção geral da inovação curricular (DGIDC) ainda não conseguia estar preparada para responder às muitas perguntas que todos os dias lhes eram colocadas. Em suma, o *caos* nas escolas estava instaurado, iniciava-se o ano lectivo e ninguém sabia o que fazer, muitas das medidas propostas nos projectos não estavam previstas na legislação e como tal não puderam ser postas em prática. Outras foram postas com a total *boa vontade* dos professores, na *minha* escola estamos todos com, no mínimo, 26 horas lectivas sem espaço para trabalhar colaborativamente.

Em relação ao material pedido, foi feito um levantamento exaustivo de tudo o que achámos necessário para equipar o laboratório já existente, mas nem isso foi respeitado. Independentemente disso o Ministério da Educação mandou para as escolas tranches *fechadas* que pouco cumprem os objectivos do levantamento das necessidades feitas por cada escola.

Quanto ao acompanhamento local ainda nem me consigo pronunciar, é verdade que tenho alguma opinião sobre o assunto, mas prefiro deixar que o processo avance um pouco mais, por enquanto ainda só tivemos uma reunião, o que permite retirar poucas ilações. No entanto, não posso deixar de levantar algumas questões relacionadas com todo este processo: Será que é possível acompanhar 16 escolas *distantes*, inclusive geograficamente? Um professor, com o seu horário completo, conseguirá ter tempo para estudar os planos, de forma a poder contribuir para a sua execução? Será que faz sentido que estes professores estejam em formação ao mesmo tempo que os planos *arrancam* nas escolas? É possível alguém esperar que, durante o presente ano lectivo, estes professores consigam dar algum contributo às escolas que acompanham?

Com o que escrevi podem pensar que não concordo com o PAM, tal facto não corresponde à realidade. Concordo com o PAM mas de maneira alguma concordo com a forma como este foi e está a ser implementado. O Ministério da Educação prometeu "quase tudo e ainda não deu quase nada", mas já afirmou que espera "ter melhorias". Será possível num projecto com objectivos, já difíceis de cumprir, em três anos esperar-se o que quer que seja ao fim do primeiro ano?

Em minha opinião o presente ano lectivo serviu para: (i) perceber as limitações do actual projecto; (ii) perceber o que o Ministério prometeu e não vai cumprir; (iii) tentar motivar professores; (iv) motivar encarregados de educação; e (v) assinar o contracto que legaliza todo este processo.

No final deste ano lectivo, sinto que finalmente começo a estar em condições de pôr o PAM na *minha* escola a funcionar verdadeiramente. O Ministério da Educação afirma que o projecto tem três anos de duração mas, para mim na melhor das hipóteses terá dois, pois como qualquer *bom* projecto este também necessita de um tempo de preparação antes da implementação, tempo esse que, em minha opinião, foi o presente ano lectivo.

**Elsa Barbosa**
**Esc. Sec. Conde Monsaraz, Reguengos de Monsaraz**

## Mudança das práticas lectivas dos professores, primeiro caminho para o combate ao insucesso

A implementação de Planos de Acção da Matemática em mais de mil escolas do país tem como principal objectivo combater o insucesso em Matemática. A discussão sobre o que significa combater o insucesso é importante e levanta várias questões directamente relacionadas com as concepções sobre o ensino da Matemática e sobre o que é ser matematicamente competente, mas não é este o foco da minha reflexão neste momento. Vou, por isso, tomar como ponto de partida que o principal objectivo dos planos é o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos que os conduzam ao sucesso em qualquer desempenho destes que envolva a Matemática.

Sendo acompanhante de 17 escolas dos concelhos do Barreiro e da Moita na implementação dos Planos, posso testemunhar o envolvimento que os professores de Matemática tiveram, primeiro, na sua concepção e, depois, na sua concretização. Este envolvimento foi partilhado na maioria das escolas pelos seus órgãos de gestão (nestas 17 escolas foram pontuais os casos em que estes órgãos dificultaram a concretização do Plano).

As estratégias propostas pelos professores foram semelhantes nas diversas escolas e apostam maioritariamente na oferta aos alunos de mais tempo de trabalho na disciplina, de um acompanhamento mais personalizado em aulas de apoio e/ou de aprofundamento e na presença regular de outros professores na sala de aula em regime de assessoria. Tendo começado com algum entusiasmo e acreditando, sem esperar milagres, que os resultados iriam melhorar, é visível um certo desencanto por tal não se ter verificado da forma esperada, até ao final do 2° período. Urge, então reflectir sobre os porquês desta situação e de se verificar que, à excepção de um número muito reduzido de alunos, a maioria dos casos de insucesso se manteve em todas as escolas.

Uma primeira reflexão levou-me a colocar uma questão: *Será que os planos dão resposta aos problemas diagnosticados nas nossas turmas?*, ou seja, *Será que as estratégias implementadas são adequadas ao perfil da maioria dos nossos alunos que têm insucesso?* Sendo a indisciplina e o desinteresse dos alunos o maior problema apontado pela maioria das escolas, parece-me comprovado que estratégias que assentam num maior empenho dos alunos não são eficazes, pois os alunos não estão motivados para este trabalho, que é do mesmo tipo daquele que sempre lhes foi proposto nas suas aulas.

Assim, parece-me que tem que se investir, em primeiro lugar, na motivação dos alunos e na resolução dos problemas de indisciplina. Como? Acredito que o passo fundamental a ser dado é a alteração efectiva das práticas lectivas, assentes num trabalho conjunto dos professores que leccionam cada ano, que corresponda a uma planificação das aulas com metodologias diferentes das habituais a que corresponderá uma avaliação adequada ao trabalho desenvolvido pelos alunos. Esta mudança das práticas não é de modo nenhum compatível com o trabalho dos professores nos moldes individuais em que este é feito pela maioria. A utilização de metodologias diferentes exige por exemplo, um espaço para discussão, para tomada de decisões oportunas e para escolha de materiais, que só é viável se for feito em conjunto. As dificuldades inerentes a todo este processo convidam à desistência por parte do professor se este estiver a trabalhar sozinho.

Paralelamente, a esta mudança das práticas lectivas dos professores, parece-me importante investir numa maior participação dos Encarregados de Educação na escola e na sua efectiva responsabilização pelo percurso escolar dos seus educandos. Sei que esta é uma aposta difícil, mas se considerarmos que uma parte da desmotivação dos alunos é provocada por uma visão negativa que a sociedade em geral desenvolveu sobre a escola, compreenderemos a importância de trazer os Encarregados de Educação à escola, não para nos queixarmos dos seus educandos, mas para os tentarmos envolver e fazer acreditar no papel que ela desempenha na sua formação.

Ainda me parece importante que a escola coloque em funcionamento as suas estruturas para garantir o cumprimento de regras de conduta básicas sem as quais a concretização de um trabalho válido em cada disciplina se revela muito difícil. Os conselhos de turma têm um papel decisivo na definição de estratégias de actuação, de acordo com o Regulamento Interno da escola, adequadas à turma, bem como na promoção de trabalho conjunto entre os professores das diferentes disciplinas.

Não pretendo que este trabalho seja fácil e que se possa realizar com um toque de magia, mas acredito que só um caminho que contemple o trabalho conjunto de professores com o principal objectivo de mudar as suas práticas lectivas, acompanhado de um envolvimento dos Encarregados de Educação e do estabelecimento efectivo de regras de conduta cumpridas por todos, poderá começar a fazer sentir uma alteração significatica nos níveis de sucesso dos nossos alunos.

**Teresa Olga Duarte**
**Escola Secundária Alfredo da Silva, Barreiro**

## Plano de Acção para a Matemática

O *Plano de Acção para a Matemática* (PAM) inscreve-se num conjunto de iniciativas que a nossa escola tem vindo gradualmente a promover no sentido de melhorar o sucesso escolar na disciplina de Matemática, acelerado e reforçado pelos recentes normativos emanados pelo Ministério da Educação

Com este Plano pretende-se promover o sucesso educativo dos alunos em Matemática, reduzindo o insucesso na disciplina, reforçando os conhecimentos ao nível da Matemática numa perspectiva integradora de saberes, utilizando o espaço das áreas curriculares não disciplinares e fomentando actividades de enriquecimento curricular de carácter lúdico-didáctico.

Tendo por base o diagnóstico de dificuldades realizado pelos docentes de Matemática, definiram-se dois níveis de acção para o plano: *prevenção* e *intervenção*. Por *prevenção* entendemos medidas que possam prevenir casos de futuro insucesso; por *intervenção* entendemos medidas específicas para combater as dificuldades de alunos com insucesso na disciplina.

A intervenção está a ser efectuada nas aulas de Matemática e no Estudo Acompanhado numa turma do 6° ano, duas do 8° ano e duas do 9° ano, privilegiando actividades que implicam a interacção nas aulas, o reforço dos conteúdos leccionados através de fichas de trabalho e actividades experimentais, o acompanhamento mais individualizado dos alunos, recorrendo a assessorias e a apoio pedagógico acrescido, e ainda à prática de reflexão do trabalho desenvolvido, através da auto e hetero-avaliação. Quanto à prevenção está a ser iniciada no 5.° ano, no espaço dedicado ao Clube da Matemática e, sempre que possível, no Estudo Acompanhado.

Quando elaborámos o PAM não houve tempo suficiente para efectuar uma discussão e reflexão conjunta por parte de todos os professores de Matemática dos 2° e 3° ciclos. Decorrido, praticamente, um ano, feitas as avaliações semestrais do PAM em cada turma, antevê-se como resultado da avaliação de final de ano, a necessidade de alterar algumas estratégias. No entanto, algumas das implementadas por nós têm sido visíveis na dinâmica da escola e na prática lectiva. É o caso da formação de professores e das assessorias a aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado, efectuadas por professores de Ciências Físico-Químicas e de Língua Portuguesa ou de área afim, consoante as dificuldades diagnosticadas à turma e as prioridades definidas.

No que diz respeito à formação de professores frequentámos a oficina *O Papel da Modelação no Ensino Experimental das Ciências*, dinamizada pelo grupo *T³ — Teachers Teaching with Technology* da APM. Nesta formação participaram professores de Matemática do 2° e 3° ciclos, de Física, de Química, de Ciências da Natureza e de Biologia/Geologia. Este trabalho teve algum impacto na escola dado que, durante a Semana da Ciência, sob a orientação de professores em formação, alguns alunos dinamizaram actividades com sensores para a comunidade escolar.

Por outro lado, todos nós desenvolvemos nas aulas, com alunos do 6°, 9°, 11° anos e CFC, algumas actividades em que recorremos à utilização de sensores. Todos os alunos, em especial os mais jovens, mostraram-se muito interessados e empenhados nas actividades experimentais realizadas. No âmbito da Matemática os alunos do 9° ano realizaram actividades com o sensor de pressão e com o CBR, actividades preparadas e aplicadas em conjunto por professores de Matemática e de Ciências Físico-Químicas.

As assessorias, de acordo com o *feedback* obtido até ao momento, manifestam-se produtivas, têm decorrido bem e com muito boa aceitação por parte dos alunos. Em minha opinião, esta tem sido a estratégia que mais se tem destacado no Plano, pela dinâmica que criou entre os professores envolvidos e por permitir aos alunos a realização de mais actividades e uma maior diversificação das mesmas. Poder-se-á questionar se foi a melhor opção para os alunos e se tem contribuído para a redução do insucesso escolar. Não dispomos de dados suficientes objectivos para poder dar resposta a essa questão. No entanto, e por experiência própria, posso garantir que contribuiu para uma mudança de atitude, bastante positiva dos alunos de uma turma relativamente à disciplina. No início do ano lectivo, na qualidade de professora de Matemática da turma conjuntamente com a professora assessora, deparámo-nos com uma situação problemática. Os alunos da turma de 9° ano mencionada nunca tinham sido nossos alunos, revelavam uma grande ausência de pré-requisitos e pouca autonomia na resolução das tarefas. Sempre que lhes era proposta uma actividade, praticamente toda a turma aguardava que a resolvêssemos. Com duas professoras na sala de aula foi possível proporcionar aos alunos um acompanhamento mais individualizado. Gradualmente foram adquirindo maior segurança e a situação descrita foi-se invertendo, criando-se uma dinâmica de aula mais interactiva e eficaz.

O PAM constituiu-se como um projecto de escola e não apenas dos professores de Matemática do 2° e 3° ciclos. Temos tido a colaboração de todos os professores solicitados, independentemente do grupo disciplinar a que pertencem, e o total apoio do Conselho Executivo, estando todas as intervenções devidamente enquadradas no Projecto Educativo.

**Margarida Santos**

**Coordenadora do grupo de Matemática da EB 2,3 e Secundária de Maceira, Leiria**

**A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.**

# Grande concurso 20 Anos APM

**José Paulo Viana**

Para comemorar os 20 anos da Associação, organizámos um concurso em que o problema proposto foi *Objectivo 100*:

*Usando apenas os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 uma e só uma vez e todas as divisões que se quiser, obter o resultado mais próximo de 100.*

O prazo de entrega das respostas acabou por ser muito apertado, o que fez com que o número de concorrentes não fosse tão grande como poderia ter sido. Será uma situação a rever para o próximo ano.

Pedia-se que o resultado fosse indicado com seis casas decimais e nunca imaginámos que a luta pelos primeiros lugares fosse tão renhida: o desempate teve de ser feito à décima milionésima.

Nos primeiros lugares ex-aquo, o Alexandre Silva e a Teresa Fernandes propuseram:

$$763201 : 954 : 8 = 100{,}000\ 131\ 027$$

Nos terceiros lugares, também empatados, o Fernando Gonçalves e o Vanderlei Monteiro apresentaram:

$$762401 : 953 : 8 = 100{,}000\ 131\ 165$$

O melhor aluno foi o Gonçalo Telo, da E.S. Padre António Macedo, de V. N. de Sto André com:

$$130798 : 654 : 2 = 99{,}998\ 471$$

Note-se que o Gonçalo, na classificação geral, ficaria em 10° lugar.

### Classificação Geral

1° Alexandre Mota da Silva (Bajouca) 100,000 131 027
Calculadora TI-84 Plus[1]

Teresa Paula Fernandes (ES Padre António Macedo)
Calculadora TI-84 Plus[1]

3° Vanderlei M. Monteiro (Chaves) 100,000 131 165
Colecção História da Vida Privada[2]

Fernando Bento Gonçalves
Diciopédia 2006[3]

5° Ana Sofia Monteiro (Chaves) 100,000 157
Diciopédia 2006[3]

6° Matheus Franco Cortês (Salvador, Brasil) 100,000 185
Dicionário de Matemática Elementar[2]

7° Alice Bárrios 100,000 205
2 Livros Desafios [2]

8° Célia Rodrigues 100,000 211
2 Livros Desafios[2]

9° João António Alves (Chaves) 100,000 569
4 Livros Mundo das Letras[3]

10° Cecília Mira (ES Santo André, Barreiro) 100,002 894
4 Livros Mundo das Letras[3]

### Classificação "Alunos"

1° Gonçalo José Telo (ES Pe António Macedo, V. N. de Sto André) 99,998 471
Diciopédia 2006[3]

2° Fábio Rodrigues (EBIS Jean Piaget, V. N. Campo, Viseu) 100,002 674
Diciopédia 2006[3]

3° Henrique M. Silva (ES Camões, Lisboa) 100,003 138
Diciopédia 2006[3]

4° Fábio Caldas (ES Alcaides de Faria, Barcelos) 100,004 960
4 livros da colecção Eureka[4]

5° João Sant'Ana (ES de Alcácer do Sal) 99,990 411
4 livros da colecção Eureka[4]

6° Joana Serro (ES D. João V, Damaia) 99,989 796
2 Livros Desafios[2]

7° Nuno Miguel Pereira (ES Camões, Lisboa) 99,988 633
2 Livros Desafios[2]

8° Beatriz Lança (ES de Alcácer do Sal) 99,984 337
4 Livros Mundo das Letras [3]

9° Daniel Pereira (ES de Alcácer do Sal) 99,945 766
4 Livros Mundo das Letras[3]

10° Bruno Pereira (EB 2,3 Alto do Moinho, Catujal) 100,060980
1 Livro Desafios [2]

(1) Oferta Texas Instruments
(2) Oferta Edições Afrontamento
(3) Oferta Porto Editora
(4) Oferta Editora Princípia

# Os mealheiros da Patrícia e do Luís

A Patrícia e o Luís têm cada um seu mealheiro, onde vão juntando as moedas de 1€ que lhes dão. Quando as economias se aproximam dos mil euros vão ao banco depositá-las.

No domingo passado verificaram que a Patrícia tinha uma quantia que era múltipla da do Luís. Como cada um tinha recebido um euro dos pais, colocaram-nos nos respectivos mealheiros e o dinheiro da Patrícia continuou a ser um múltiplo do do Luís.

Na segunda feira, novamente cada um arranjou um euro, continuando a quantia da Patrícia a ser múltipla da do Luís.

A situação foi-se repetindo ao longo de toda semana, até hoje, domingo: todos os dias cada um colocou um euro no seu mealheiro e a quantia da Patrícia foi sempre múltipla da do Luís.

Quanto é que eles têm agora no mealheiro?

*(Respostas até 30 de Setembro)*

## Quantos sócios tem a APM?

O problema proposto no número 91 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| B | | | | |
| C | | | | |
| D | | | | |

*Horizontais: A — Múltiplo de 89; B — Tem quatro algarismos consecutivos por ordem crescente; C — Potência de expoente 6; D — Potência de base 6.*

*Verticais: E — Capicua, ou melhor, para os matemáticos: palíndromo; F — Número primo cujos algarismos somam 19; G — Múltiplo de 11; H — Número de sócios da APM.*

*Quantos sócios tem a APM?*

Bem, a verdade é que a resposta a este problema aparecia logo na página 8 dessa revista, no artigo da Ana Paula Canavarro *APM: quantos sócios tem?*

Recebemos 13 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios, Augusto Taveira (Faro), Cristina Ortins, Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilça Cruz (Amadora), João Alves (Chaves), João Barata (Castelo Branco), Lindinalva Maciel (Itaquara, Brasil), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sónia Abrantes (Portalegre) e da turma de Didáctica da Matemática da UBI (Covilhã): Alina Vaz, Ana Martins, Carla Miranda, Carla Neves, Cecília Fonseca, Cláudia Ramos, Cristina Ferreira, Daniel Saraiva, Joaquim Mateus, João Lourenço, Raquel Silva, Ricardo Portugal e Manuel Saraiva.

Algumas das respostas traziam apenas a grelha preenchida mas outras indicavam a sequência de descoberta dos números que permitiam chegar à solução. Vejamos então, seguindo as indicações da Alice.

C = Potência de expoente 6. A única hipótese é $4^6$, que é 4096.

D = Potência de base 6. Há duas possibilidades: $6^4=1296$ ou $6^5=7776$, mas o segundo algarismo de D é o último de F. Como F é primo, não pode terminar em 2. Logo, D=7776.

E = Capicua. Como termina em 47 terá de ser E=7447.

B = quatro algarismos consecutivos por ordem crescente. Como começa por 4, temos B=4567.

F = Número primo cujos algarismos somam 19. Já conhecemos os três últimos algarismos (507). Só pode ser F=7507, que é primo! Nota: o enunciado nem precisava de incluir a indicação de ser número primo...

A = Múltiplo de 89. Como A é do tipo 77xx, com a calculadora faz-se a divisão 7700/89 = 86,51..., arredonda-se o resultado por excesso e multiplica-se novamente por 89. Vem $A = 89 \times 87 = 7743$.

A grelha já está completamente preenchida e confirmamos que G = 4697 é um múltiplo de 11.

Conclusão: a APM tem 3766 sócios.

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 7 | 4 | 3 |
| B | 4 | 6 | 6 | 7 |
| C | 4 | 0 | 9 | 6 |
| D | 7 | 7 | 7 | 6 |

A Sónia interroga-se: *Como é que a APM tem 3766 sócios e eu sou o nº 9221?* Bem, a resposta é que alguns deixaram de ser sócios e muitos não têm pago as quotas...

Os alunos da turma de Didáctica da Matemática da UBI admitiram que os números podiam começar por 0 e obtiveram uma segunda solução, com A=7476, B=0123, C=0729, D=7776 e o número de sócios da APM igual a 6396. Assim, de forma bem imaginativa, concluiram que: *A APM tem 6396 sócios, mas só 3766 deles é que têm a quota em dia!*

# À terceira é de vez!

Apesar do título, não é sobre o ProfMat 2007 que estou a escrever, mas sim sobre a final do 3° Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM3). Este ano decorreu na bela cidade de Évora, no dia 9 de Março, num ambiente excelente. A começar pela temperatura estival, que só ajudou a animar ainda mais os cerca de 700 participantes e os respectivos professores acompanhantes. E também pelo local de realização do campeonato: o Palácio D. Manuel, dentro do aprazível Jardim Público.

Estiveram em competição os mesmos seis jogos do campeonato anterior e um sistema de organização semelhante. A grande diferença em relação à final de 2006 foi ter-se eliminado a recepção informatizada dos participantes. Os alunos receberam crachás com um código numérico, correspondente à escola, ciclo de ensino e jogo (a completar com o nome do jogador), tendo depois que aguardar junto dos Pontos de Encontro correspondentes ao seu nível de ensino, até que um monitor os viesse buscar.

E, facto curioso, como alguns alunos e professores chegaram bastante cedo, foi possível dar início às eliminatórias às 9h30, meia hora antes do prazo previsto! Desta vez os participantes estavam bem mais janotas, envergando *t-shirts* especialmente criadas para esta final, de acordo com o jogo em que competiam.

As eliminatórias decorreram toda a manhã, prolongando-se pela hora de almoço, durando um pouco mais do que o previsto. Há sempre mesas de jogo que levam mais tempo... jogadores concentradíssimos, claro!

No exterior havia plasmas que disponibilizavam a informação relativa às pontuações.

As finais decorreram após o intervalo de almoço. Tal como na edição anterior, optou-se pelo apuramento dos vencedores através do mesmo processo das eliminatórias, em vez do método da eliminação sucessiva. O processo é mais longo, mas permite encontrar os vencedores com maior rigor.

Como é hábito, a organização contou com o apoio inestimável de um grande número de monitores, este ano foram alunos da Universidade de Évora (UE), e dos nossos colegas do Núcleo de Viseu da APM, como júris: Cláudia Pinto, Cristina Ferreira Loureiro, Fernanda Graça, Fernanda Tavares, Graça Gonçalves, Isabel Cortez, Isabel Duarte, João Cavaleiro e Margarida Abreu.

Durante o dia decorreram actividades paralelamente ao campeonato. O Departamento de Desporto da UE organizou um Peddy paper para dar a conhecer a cidade, além de dinamizar aulas de aeróbica no Jardim. O 1° ciclo também pôde dispor de actividades organizadas por alunas do curso de Psicologia da UE.

Além disso, esteve patente no Mercado Municipal a exposição *Matemática em Jogo*.

## Números

167 Escolas confirmaram a inscrição na final, num total de 837 alunos. No entanto, os registos de dia 9 referem a participação de 154 Escolas e 699 alunos, com a seguinte distribuição:

*Pontos e Quadrados:* 1° ciclo = 43
*Semáforo:* 1° e 2° ciclos = 95 (33 + 62)
*Ouri:* 1°, 2° e 3° ciclos = 200 (27 + 62 + 111)
*Hex:* 2° e 3° ciclos e secundário = 204 (60 + 96 + 48)
*Amazonas:* 3° ciclo e secundário = 128 (88 + 40)
*Go:* secundário = 29.

Em termos de número de participantes nas finais nacionais, a evolução tem sido positiva: aumentou 30% da primeira para a segunda e 10 % da segunda para a terceira.

## Entrega de prémios

Estiveram presentes na cerimónia da entrega de prémios o ministro da Ciência e Ensino Superior, o reitor e o director do Departamento de Matemática da UE, a vereadora da Educação, além de Jorge Nuno Silva, da comissão organizadora.

Este ano os prémios foram alargados ao terceiro classificado. Assim, foram distribuídos computadores portáteis, câmaras fotográficas digitais e leitores de mp3.

Quem quiser saber mais acerca deste campeonato, em particular sobre quadros de resultados, pode consultar as páginas em `www.dmat.uevora.pt/CNJM`. Ou então poderá consultar o site oficial dos CNJM, em `www.ludicum.org`, que inclui fotos relativas à final 2007.

Foi cumprida a promessa feita na notícia que escrevi para a revista acerca do CNJM2: desta vez foi mesmo melhor! Parabéns a todos os envolvidos, muito em particular aos alunos e professores que não se poupam a esforços para estarem presentes. Por último, uma palavra de apreço pelo trabalho da organização local, a cargo dos colegas do Departamento de Matemática da UE, Manuel Branco, Paulo Infante e Sandra Vinagre.

**Luís Reis, Comissão Organizadora do CNJM3**

## Premiados

| | | |
|---|---|---|
| P & Q 1° ciclo | 1° | C. Teixeira — Colégio do Sagrado Coração de Maria |
| | 2° | Diogo Carvalho — EB1/JI de Alcácer do Sal |
| | 3° | Sara Quertel — Colégio do Vale, Charneca da Caparica |
| Semáforo 1° ciclo | 1° | Miguel Lino — EB1 Encosta do Sol, Caldas da Rainha |
| | 2° | Patrícia Igreja — Colégio Cesário Verde, Moscavide |
| | 3° | Pedro Carapau — Externato Oratório S. José, Évora |
| Ouri 1° ciclo | 1° | Miguel Carvalho — Colégio do Vale, Charneca da Caparica |
| | 2° | Tomás Fazenda — Colégio Sagrado Coração de Maria |
| | 3° | Margarida Baptista — EBI/JI de Santa Catarina, Caldas da Rainha |
| Ouri 2° ciclo | 1° | Nuno Noritake — Escola Salesiana de Manique |
| | 2° | Ana Sousa — Colégio de Quiaios |
| | 3° | Cristiano Silva — Instituto D. João V |
| Semáforo 2° ciclo | 1° | João Gomes — EB 2,3 Visconde de Juromenha, Tapada das Mercês |
| | 2° | Cristiana Duarte — EB 2,3 c/S de Penacova |
| | 3° | Luís Oliveira — Colégio de Quiaios |
| Hex 2° ciclo | 1° | Diogo Mesquita — EB 2,3 Eugénio de Castro, Coimbra |
| | 2° | José Perdigão — Col. Laura Vicunha, Vendas Novas |
| | 3° | André Santana — EBI de Santa Maria, Beja |
| Ouri 3° ciclo | 1° | Manuel Pereira — Didáxis Coop. de Ensino, Riba de Ave |
| | 2° | Jorge Miranda — Externato das Neves, Mujães |
| | 3° | Luís Freixinho — Colégio Cesário Verde, Moscavide |
| Hex 3° ciclo | 1° | Luís Maduro — EB 2,3 Eugénio de Castro, Coimbra |
| | 2° | Fabio Costa — Colégio de Quiaios |
| | 3° | Tiago Azevedo — ES c/ 3° ciclo de Oliveira do Douro, V. N. de Gaia |
| Amazonas 3° ciclo | 1° | Rui Machado — ES c/ 3° ciclo de Tondela |
| | 2° | João Oliveira — EB 2,3 de Santana, Sesimbra |
| | 3° | Hugo Domingues — Colégio Dr. Luís Pereira da Costa, Leiria |
| Hex secundário | 1° | Pedro Jorge — Colégio Luís Pereira da Costa, Leiria |
| | 2° | Caio Rodrigues — ES Amadora |
| | 3° | Joana Lúcio — ES Caneças |
| Amazonas secundário | 1° | Cristóvão Gomes — Colégio Luís Pereira da Costa, Leiria |
| | 2° | Rui Ferreira — ES c/ 3° ciclo José Estevão, Aveiro |
| | 3° | Ruben Mendes — INETE, Instituto de Educação Técnica, Lisboa |
| Go secundário | 1° | João Oliveira — Escola Profissional de Ourém |
| | 2° | Sara Ramos — ES c/ 3° ciclo de Oliveira do Douro, V. N. de Gaia |
| | 3° | André Alexandre — ES Leal da Câmara, Rio de Mouro |

# O problema das marés... ao sabor das TIC ou ao sabor da maré... com as TIC

Um dia, já lá vão talvez mais de 10 anos, olhando para a Revista *Educação Matemática* N° 23, editada em Outubro de 92, deparei com o, a partir de agora, apelidado *problema das marés* (EM N° 23, p. 23). O ponto de partida foi uma tabela de valores das alturas das águas do mar, registadas no porto de Leixões ao longo das 24 horas de dois dias consecutivos. A sua representação gráfica induz-nos a considerar uma função trigonométrica (composta de seno ou co-seno) ... e é aí que tudo começa. A expressão que me veio à cabeça foi $a + b^*\cos\,(c^*x + d)$.

Procurei pensar no problema e resolvê-lo, utilizando para o efeito três ferramentas computacionais que conhecia e que me pareceram apropriadas para a abordagem deste desafio: o *Geometer's Sketchpad* (GSP), a Folha de Cálculo e o *Modellus*. Seguidamente, contextualizei-o e integrei-o numa *webquest* e a partir daí tenho-o utilizado das mais variadas formas na formação de professores de Matemática, com recurso às Tecnologias de Informação e Comunicação.

## A abordagem através de um Ambiente de Geometria Dinâmica

Com o *Geometer's Sketchpad* (versão 4) começo por fazer a representação dos valores reais da tabela (menu *Graph – Plot points*). Em seguida, posso utilizar um de dois processos: construir 4 segmentos de recta ($a, b, c$ e $d$) e sobre cada um deles marcar um ponto ($A, B, C$ e $D$) e pedir a respectiva abcissa que passa a funcionar como o valor de cada um dos parâmetros da expressão algébrica acima; ou através do menu *Graph – Plot New Function*, introduzindo aí a expressão que define a função e que depende simultaneamente dos 4 parâmetros a, b, c e d. Agora, manipulando directamente os pontos sobre os segmentos de recta (no 1° caso), ou escolhendo no menu, *Display – Show Motion Controller* e seleccionando cada um dos parâmetros (no 2° caso), podemos tentar fazer coincidir os gráficos (do modelo, com o dos valores reais), procurando ajustar o modelo, encontrando os valores mais adequados para os parâmetros.

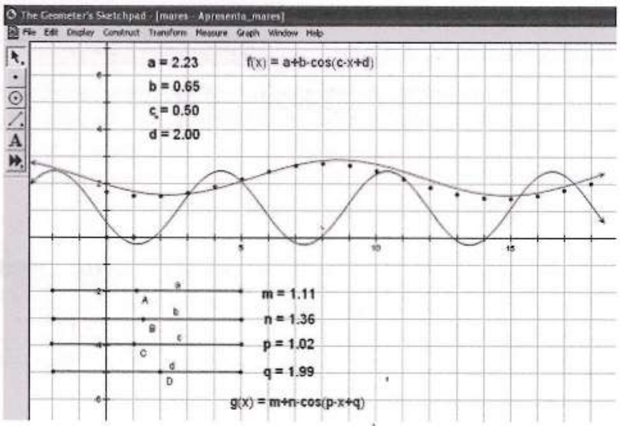
## A abordagem com uma folha de cálculo

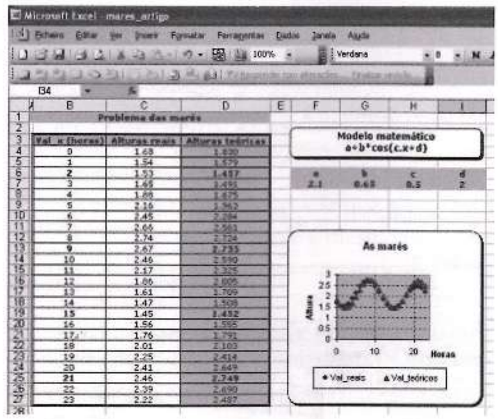
Com a folha de cálculo, representei em duas colunas os valores reais e os valores teóricos, estes calculados a partir da expressão algébrica acima, função dos parâmetros $a, b, c$ e $d$, partindo de um conjunto de valores iniciais que fixei de forma mais ou menos aleatória (com uma certa intuição à mistura, claro).

Seguidamente mandei representar um gráfico de dispersão, sobrepondo simultaneamente os valores reais e teóricos, em função das horas do dia. Agora, sempre que altero os valores nas células que representam os parâmetros $a, b, c$ e $d$, posso obter sucessivas aproximações do modelo, mais ajustadas aos valores reais.

## A abordagem com um programa de modelação

No *Modellus* (versão 2.5), escrevo a expressão na janela *Modelo* e interpreto (para me certificar da correcção sintáctica), defino um conjunto de condições iniciais (com 2 ou 3 casos, para poder sobrepor e comparar), configuro e ajusto escalas na janela de *Gráfico* (em Ajustar e Opções) e peço uma tabela onde assinalo os valores de $x$ e $y$. Agora pondo a funcionar o modelo na janela de *Controlo*, posso ver o desenvolvimento dos valores das variáveis na tabela e o respectivo gráfico que se desenha. Aqui, o ajuste do modelo apenas se faz por comparação dos valores da tabela com os valores reais que tenho.



## Uma abordagem mais sistémica

A *webquest*, dirigida a professores, diria que é uma proposta de trabalho sobre o mesmo problema, podendo eventualmente envolver todas as ferramentas computacionais referidas anteriormente, mas oferecendo um contexto real e mais marcadamente interdisciplinar e de trabalho de projecto. Questões como, o que significa o fenómeno das marés, o que as influencia, a sua relação com os fenómenos de atracção lunar e solar, o que provoca as marés 'vivas', como se obtêm os registos sobre a evolução das marés ao longo do dia, etc., constituem desafios complementares para obter uma compreensão mais global sobre o fenómeno.

Esta abordagem, pode permitir ao professor de Matemática, para além de resolver o problema do ponto de vista matemático, interagir com colegas de disciplinas como as Ciências, a Geografia ou outras, permitindo uma abordagem sistémica ao fenómeno.

Na introdução da *webquest* pode ler-se que (...) as marés constituem um fenómeno natural com o qual nos confrontamos, particularmente no Verão quando vamos à praia. Quantas vezes uma praia pequena quase *desaparece* na maré cheia (preia-mar), para passadas umas horas surgir de novo um areal onde podemos passear. E se gostarmos de apanhar conquilhas (com o pé e com a mão) teremos de esperar pela maré vazia (baixa-mar) para o fazer. Também os amantes da pesca desportiva têm em conta as tabelas de marés para procurarem o melhor momento para a sua prática, enquanto que os barcos de pesca devem tê-las em conta para poderem entrar e sair dos portos ou navegar algumas zonas baixas dos estuários dos rios (...).

Quanto à tarefa, para os professores, ela pode ser (...) construir uma actividade, com um conjunto de questões dirigidas aos alunos, com vista à exploração de modelos matemáticos adequados que lhes permitam uma melhor compreensão do fenómeno das marés. Para o efeito, devem começar por aceder à tabela da Revista *Educação Matemática* 23 (p. 23) e procurar modelar a situação, utilizando uma das três ferramentas computacionais vossas conhecidas: a Folha de Cálculo, o *Geometer's Sketchpad* e o *Modellus* (...).

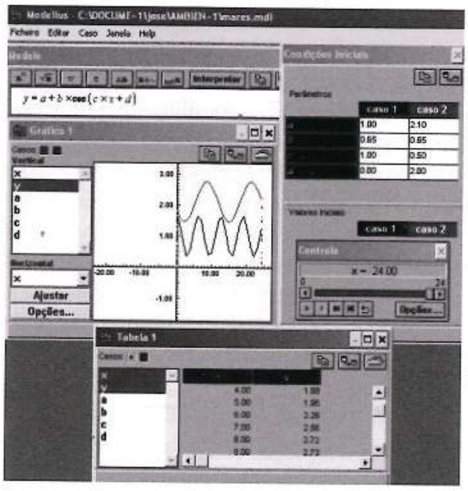
## E finalmente ....

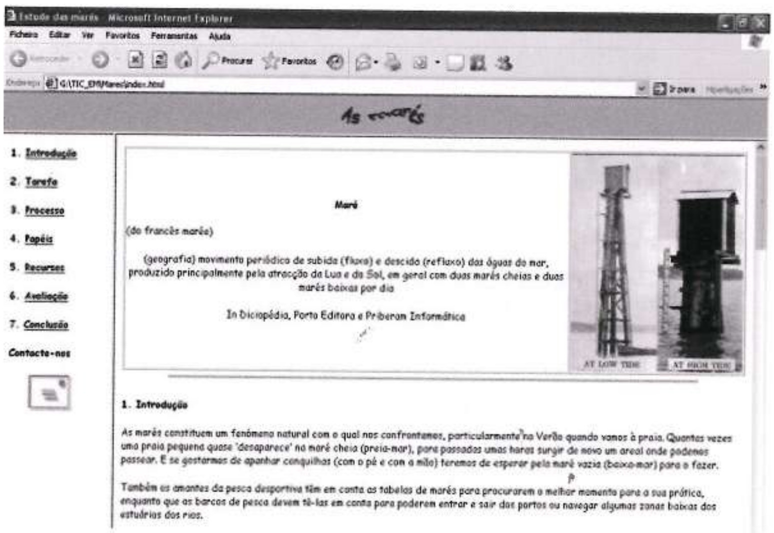
Aquilo que gostaria de partilhar com os colegas que conhecem algum deste *software* e são utilizadores, mesmo que pontualmente, das TIC no ensino da Matemática, pode traduzir-se nas seguintes questões:

1. Conhecendo as potencialidades destas ferramentas (ou apenas, de alguma delas), que *ganhos* podemos obter, do ponto de vista das competências matemáticas envolvidas, com a abordagem deste desafio? Na visualização do fenómeno? Numa melhor compreensão do papel dos parâmetros no *andamento* do gráfico? Na valorização particular de algum dos diferentes tipos de representação: numérica, algébrica e gráfica? No lidar com estes diferentes tipos de representação em simultâneo?
2. Com este *software*, que outras abordagens entendem poder ser realizadas, de modo a promover a aprendizagem dos alunos no domínio da compreensão de fenómenos naturais como este, sua modelação e exploração das funções que os podem representar?

Aguardo as vossas reacções e contribuições para o endereço jaduarte@ese.ips.pt.

**José Duarte**



# XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática

Margarida Graça

O XVI Encontro de Educação Matemática com o tema *Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios*, uma iniciativa da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, decorreu nas Termas de S. Pedro do Sul, no fim-de-semana de 12 e 13 de Maio, e foi organizado por um grupo de professores da Escola Superior de Educação de Viseu e representantes da Secção de Matemática da SPCE.

Os discursos e debates sobre a avaliação estão cada vez mais na ordem do dia, sendo este domínio fundamental para a regulação dos processos de ensinar e aprender; contudo, ela não é neutra em relação a esses processos. O modo como se perspectiva a avaliação e as práticas de sala de aula desenvolvidas podem ter importantes consequências na forma como se ensina e aprende em Matemática, quer ao nível dos alunos dos diversos níveis de ensino, quer na formação inicial e contínua de professores.

Neste seminário, que reuniu cerca de uma centena de investigadores, professores e outros agentes educativos que se interessam pelo trabalho de investigação no âmbito da avaliação em Matemática, decorreu uma animada discussão entre as distintas abordagens, metodologias e paradigmas na área da avaliação em Matemática.

Neste Encontro foram apresentados trabalhos de investigação, divididos por três grupos de discussão, de acordo com as seguintes perspectivas:

— A avaliação das aprendizagens

— A avaliação de manuais escolares

— A avaliação na formação de professores

Quatro importantes conferências, realizadas durante os dois dias de trabalho, enquadraram a temática em análise e permitiram uma discussão mais rica e útil por parte dos participantes, tendo sido apresentadas por:

— Candia Morgan, da Universidade de Londres, *Avaliação formativa; apoio ou regulação dos alunos e dos professores?*;

— Christine Keitel, da Universidade Livre de Berlim, *Teacher-based assessment and self-assessment modes — outdated models?*;

— Mar Moreno, da Universidad de Lérida, *Competencias, evaluación y desarrollo profesional para un cambio en la enseñanza de las matemáticas de nivel superior*;

— Leonor Santos, da Universidade de Lisboa, *Dilemas e desafios da avaliação reguladora.*

A fechar os trabalhos deste Encontro foram apresentadas, em Sessão Plenária, e por cada um dos Grupos de Discussão, as conclusões do trabalho realizado.

No Grupo de Discussão responsável pela temática A *Avaliação das Aprendizagens*, foram apresentadas as comunicações: *Avaliação: um momento privilegiado de estudo ou um acerto de contas?* (Borges e outros); *Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback* (Leonor Santos e Sónia Dias); *Avaliação do desempenho de alunos do 2º ciclo, na resolução de problemas envolvendo padrões* (Ana Barbosa, Pedro Palhares e Isabel Vale); *Autoavaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios* (Anabela Gomes); *À procura de explicação para o desempenho dos alunos portugueses, nas competências matemáticas avaliadas no estudo PISA* (Borralho e Cachucho); *Avaliar?... Como?* (Filomena Nunes e Maria Nunes); *Avaliação de competências de alunos em Geometria* (Ilda Lopes, Ana Breda e Nilza Costa); *Reflectir antes de agir, a avaliação reguladora em Matemática – B* (Leonor Santos e Paulo Dias).

Neste grupo, coordenado por José Manuel Varandas, Paulo Dias e Domingos Fernandes (que por motivos de natureza pessoal não esteve presente), sublinhou-se a importância do *Feedback*, da Regulação e da Reflexão nas práticas de uma avaliação reguladora, nomeadamente a adequação do tipo de *feedback* a dar ao aluno e a apropriação dos critérios de avaliação no favorecimento da aprendizagem, a valorização do modo como o aluno compreende e comunica o seu raciocínio para melhorar a sua aprendizagem, e a importância da metacognição no processo de avaliação do aluno e da sua aprendizagem. Foram ainda ressaltados aspectos relacionados com as práticas avaliativas em contexto de sala de aula, como, por exemplo, a importância da diversificação de tarefas, de formas de trabalho dos alunos e de instrumentos de avaliação, para compreender a respectiva influência no desempenho dos alunos, e foram ainda estabelecidas algumas comparações com processos de avaliação utilizados em estudos em larga escala (Estudo Pisa), como, por exemplo, a mediação do professor entre o currículo em acção e o currículo avaliado, no desenvolvimento de competências do aluno, e as relações entre as competências matemáticas avaliadas nas provas globais e as competências matemáticas avaliadas no PISA.

A nível da investigação, foi ressaltado por este Grupo de Discussão o desenvolvimento de trabalhos que permitam estudar práticas avaliativas na realidade portuguesa, identificar boas práticas de avaliação reguladora, e ainda estudar instrumentos alternativos de avaliação. No que se refere ao trabalho com os professores, considerou-se fundamental a partilha de um significado comum de avaliação formativa, a divulgação de resultados de investigação, e a criação de instrumentos de avaliação alternativos. Relativamente à intervenção a nível social este Grupo de Discussão ressaltou a importância da credibilização do processo da avaliação interna.

No Grupo de Discussão em que se discutiu A *Avaliação de Manuais Escolares* foram apresentadas três comunicações: *Modelo para análise dos problemas de optimização nos manuais escolares do século XX e XXI*, por Ana Santiago; *O conceito de derivada nos manuais escolares do século XX*, por Ana Paula Aires, e *Avaliação de Manuais de Matemática nas décadas de 30, 40 e 50: Uma história por contar, um contributo para uma reflexão actual*, por Isabel Cristina Dias.

João Pedro da Ponte, Manuel Vara Pires e Cláudia Nunes coordenaram este grupo e dinamizaram uma discussão em torno da avaliação de manuais escolares, a partir da análise do tema *Números reais e inequações*, em três manuais do 9° ano de escolaridade, relativamente aos domínios científico-didáctico, texto e ilustrações, construção da cidadania, aspectos editoriais e manual do professor. Nos referidos domínios foi definido um total de 9 critérios eliminatórios e 31 não eliminatórios.

As aprendizagens de História da Matemática foram analisadas, desde os anos 40, por este grupo de discussão, tendo permanecido a interrogação "Serão as preocupações pedagógicas dominantes no passado as mesmas dos dias de hoje?"

No Grupo de discussão que se debruçou sobre o tema A *Avaliação na Formação de Professores*, coordenado por Ana Paula Canavarro, Cristina Martins e Isabel Rocha, foram apresentadas as seguintes comunicações: *Estudo histórico sobre a avaliação do conhecimento dos alunos mestres do Magistério Primário de Lisboa, 1955–75. Forma e instrumentos — Exames.* (Rosimeire Borges e Cecília Monteiro); *Implicações da implementação dos novos programas de Matemática do secundário para a Formação de Professores* (Isabel Tavares e Isabel Cabrita); *Aspectos emergentes da análise dos portefólios sobre a avaliação com vista à regulação das práticas de formação* (António Guerreiro e Carlos Ribeiro); *Perspectivas dos professores sobre a relevância dos portefólios para o seu desenvolvimento profissional, e aspectos mais valorizados* (Luís Menezes); *Apreciação de uma professora sobre diversos aspectos da formação (papel da formadora, interacção formadora-formanda, papel do portefólio, reflexão sobre a prática)* (Filomena Leite Pinto), e *Reflexão sobre as práticas da equipa de formação sobre diversos aspectos da formação praticada — papel das formadoras, metodologias de trabalho, formas de avaliação* (Maria Manuel Nascimento, Cecília Costa e Paula Catarino).

Do trabalho realizado por este grupo emergiram as seguintes principais conclusões:

— A formação de professores deve incidir sobre domínios específicos do respectivo conhecimento profissional, tomando a sala de aula como lugar privilegiado de desenvolvimento desse conhecimento.

— A avaliação na formação deverá reflectir as aprendizagens do professor sobre o conhecimento necessário ao exercício da sua profissão (matemático, curricular, didáctico, processos de aprendizagem dos alunos).

— A importância do desenvolvimento de uma atitude profissional responsável, que integre o auto-questionamento e a reflexão como parte integrante da vida profissional; como avaliar esta dimensão do profissionalismo docente?

— A importância da utilização do portefólio na formação de professores, como um instrumento de avaliação que conjuga os pressupostos inerentes ao desenvolvimento do professor e à sua avaliação reguladora, em especial no que diz respeito ao desenvolvimento da capacidade de reflexão.

Este Grupo de Discussão considerou que deveria ter lugar uma reflexão sobre alguns temas fundamentais no processo de avaliação na formação de professores, como, por exemplo, a função reguladora das aprendizagens do professor, as fases do trabalho de planificar, leccionar e avaliar, a promoção da reflexão sobre a prática, a atitude de auto-questionamento, o papel do formador, o portefólio como instrumento de desenvolvimento profissional e sua avaliação: conceito, potencialidades, processo de construção, acompanhamento do formador, ..., e que deveriam ser desenvolvidas mais investigações sobre avaliação na formação de professores.

Este ano, a comissão organizadora presenteou todos os participantes com uma foto de grupo e passou o testemunho para os professores da ESE de Leiria, que anunciaram a realização do próximo EIEM nos dias 19 e 20 de Abril de 2008 em Vieira de Leiria — praia.

**Margarida Graça**
**Escola Secundária José Gomes Ferreira**


Transferências
de Crédito Habitação
ACHA QUE O SEU CRÉDITO HABITAÇÃO É BOM?
Na Caixa a prestação é mais baixa.
Exclui condições promocionais de outros Bancos.
Caixa Geral de Depositos
HÁ MAIS NA CAIXA DO QUE VOCÊ IMAGINA.
Válido para transferências contratadas até 31/08/07. TAE 4.725%; financiamento de €200.000 a 45 anos com diferimento de 30% e carência de 10 anos. Euribor a 3 meses acrescida de spread de 0.25%. Não dispensa a consulta do folheto.
www.cgd.pt
Caixadirecta: 707 24 24 24


# Le Modulor por Le Corbusier

Luís Reis

## Corpo e medida

Nenhuma civilização terá existido sem medir. Se o acto de medir é, por um lado, prático e utilitário, certamente com origem na experiência quotidiana, também não deixa de ser simbólico. Os egípcios atribuíram a criação da medição aos deuses Tot e Sechat, os gregos a Hermes e os judaico-cristãos a Caim (o primogénito de Adão e Eva), por conseguinte, aos primórdios da civilização.

Na antiguidade, apesar das diferenças de nomenclatura, era no corpo humano que se baseava o sistema de medida: o dígito (a largura da parte média da primeira falange do dedo indicador) era 1 parte, a palma (largura da mão) 4 partes, o palmo 12, o pé 16, o côvado (ou cúbito) 24, o passo 80 e uma braça (distância entre as pontas dos dedos dos braços entendidos) 96 partes. As alternativas a um sistema antropométrico eram raras.

Os antigos gregos aperceberam-se de que, para além das palavras, as qualidades podiam ser descritas pelos números, aos quais Pitágoras atribuiu propriedades especiais. Por exemplo, 6 é um número perfeito porque "contém repartições que se ajustam a esse número"[1], ou seja, 6 é a soma dos divisores próprios. E não só: porque o pé do homem tem a sexta parte da sua estatura. O número 10 agradou a Platão, que o considerou perfeito porque "se obtém a dezena a partir das coisas singulares que entre os gregos se dizem *monades*".[1,2]

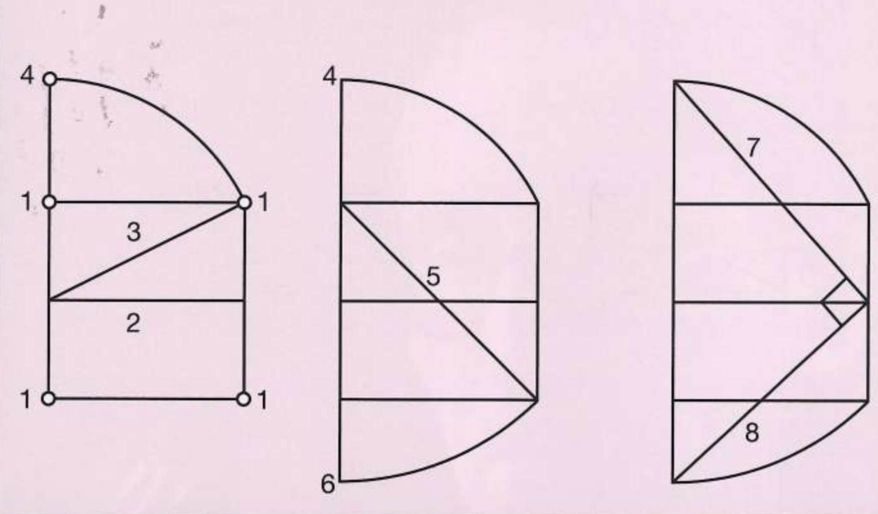




Figura 2. Solução de Hanning

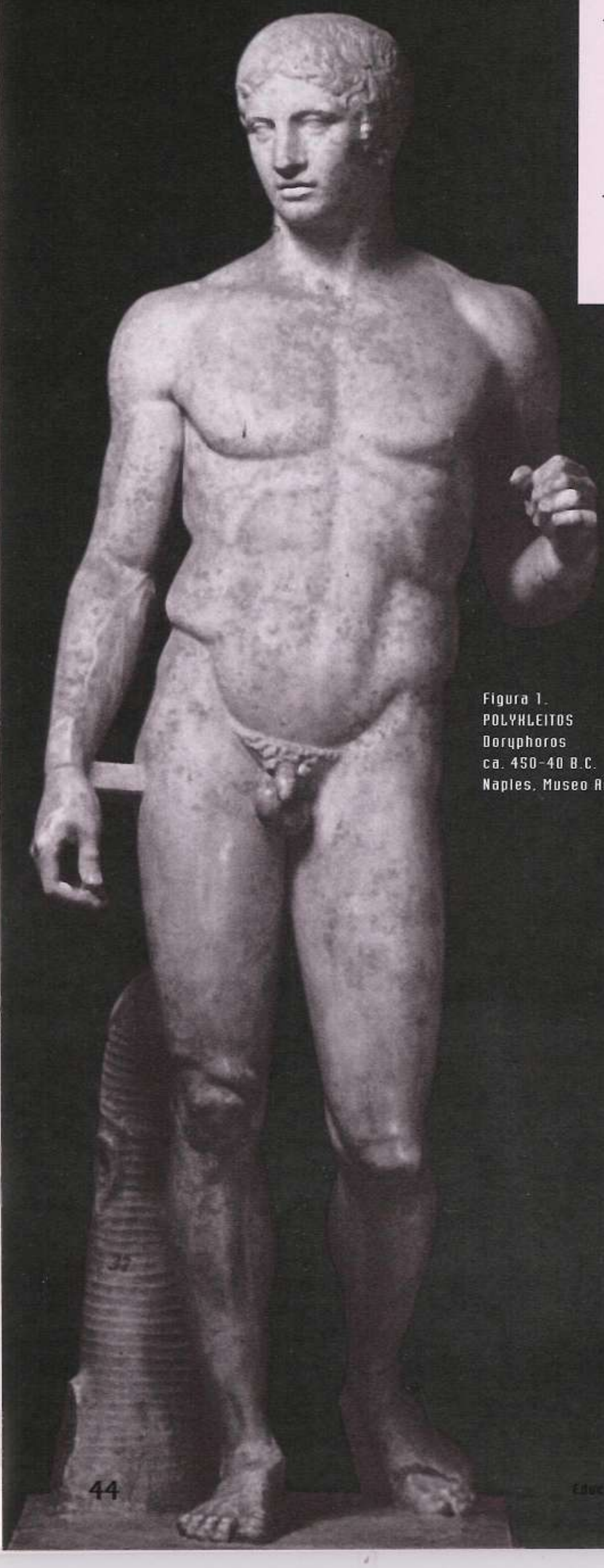


Figura 1.
POLYKLEITOS
Doryphoros
ca. 450-40 B.C.
Naples, Museo Archaeologico

Polykleitos de Sikyon, escultor grego do séc. 5 a.C., deu forma a este sistema de perfeição numérica criando a escultura de um homem em que as partes estavam em correspondência harmoniosa com o todo (figura 1). Fosse através da perfeição visual ou pelas relações entre números ideais, este sistema tornou-se conhecido posteriormente como o *cânone* das proporções perfeitas, assim permanecendo ao longo de dois milénios, atravessando a antiguidade grega e romana e a Renascença europeia. E continua a ser um ponto de referência fundamental para noções de proporção (e distorção) artística na arte e design contemporâneos.

Na cultura grega, a filosofia, a matemática e a arte atingiram uma tal união, que ela esteve na base do sistema de pesos e medidas no mundo antigo. Vitrúvio, o arquitecto romano, absorveu esta tradição e afirmou que os melhores edifícios da antiguidade reflectiam na sua forma as proporções humanas do cânone grego, de acordo com a visão pitagórico-platónica. Portanto, corpo, arquitectura e o mundo natural estavam em perfeita comunhão e o corpo humano era olhado como um microcosmo simbólico do universo harmonioso.

Com o Iluminismo, a ciência deixou de reconhecer a relevância da perfeição corporal para um sistema universal de medidas. O racionalismo da ciência ultrapassou o subjectivismo da arte. De reflexo e encarnação da harmonia universal, o corpo humano passou a objecto de investigação, para dissecar, analisar e quantificar cada vez mais microscopicamente.

As medidas do sistema métrico são quantidades abstractas, verificadas cientificamente, sem referência à experiência do dia-a-dia ou à arte ou simbolismo, e sem relação óbvia com a forma humana, ideal ou outra. Foram desenvolvidas a partir das preocupações científicas iluministas de precisão e de uniformização internacional, e das exigências da população — no início principalmente em França — de um sistema equitativo que providenciasse uniformidade no mundo civilizado. Na procura de medidas racionais e universais adequadas, o metro foi concebido como uma representação

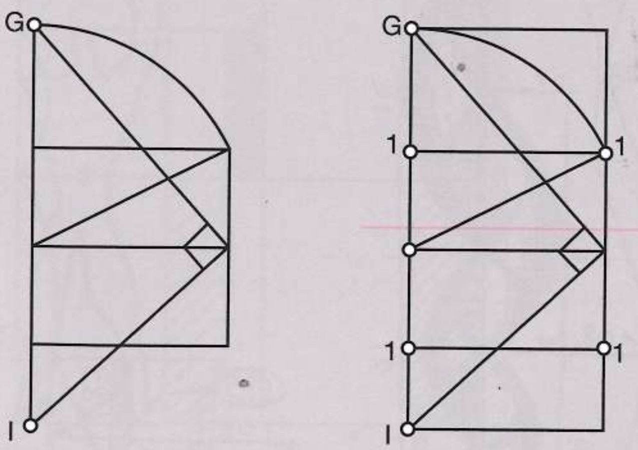



Figura 3. Solução de Maillard

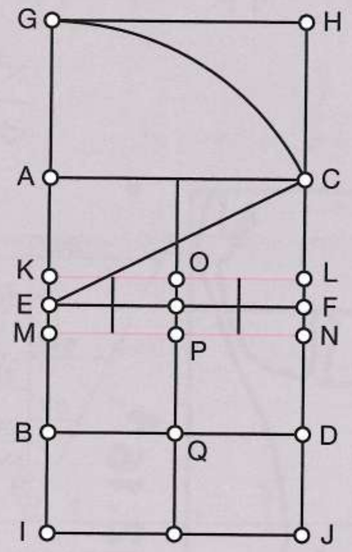



Figura 4. Elementos da solução de Maillard

fraccionária das dimensões físicas da Terra em relação às leis mecânicas que se entendia controlarem as forças da natureza e do universo. Nunca se atingiu uma concepção científica racional. A Terra não é uma esfera perfeita e o metro não é uma fracção exacta da circunferência terrestre, como pretendiam os cientistas franceses.

Duzentos anos após a sua origem, o sistema métrico tem sofrido redefinições. A versão actual parte de elementos insubstanciais, luz e gás, e de instrumentos técnicos de invenção científica. É uma medida sem valor tangível.[3]

## Um sonho e um problema

Durante o século 20, alguns artistas e teóricos questionaram a procura científica de exactidão através da abstracção, separando o corpo da medida, e desafiaram a adequação do sistema métrico às necessidades quotidianas da maior parte da sociedade.

Um deles foi o arquitecto suíço Le Corbusier[4]. Criou um sistema intitulado O *Modulor*, com o qual arquitectos e engenheiros humanizariam o sistema métrico, combinando-o com geometria clássica e antropometria moderna. O sistema foi desenvolvido essencialmente durante a ocupação nazi de Paris, no estúdio na Rue de Sèvres, 35, no caminho para o laboratório do Bureau International de Pesos e Medidas, em Sèvres!

Em 1943, Le Corbusier exprime o seu sonho a um jovem colaborador, Hanning: "A AFNOR [Associação Francesa de Normalização] propõe a normalização de todos os objectos usados na construção de edifícios: (...) O meu sonho é montar, nos terrenos de construção que um dia irão surgir por todo o país, uma 'grelha de proporções', desenhada na parede ou feita em ferro, que servirá de regra para o projecto todo, uma norma que ofereça uma série infindável de combinações e proporções diferentes; o pedreiro, o carpinteiro, o marceneiro irão consultá-la sempre que tiveram de escolher as medidas para o seu trabalho; e todas as coisas que fizerem, por mais diferentes e variadas que sejam, estarão unidas em harmonia."[5]

Propõe a Hanning um problema: "Tome um homem com o braço levantado, altura de 2,20 m, inscreva-o em dois quadrados justapostos, 1,10 por 1,10 metros cada; coloque um terceiro quadrado encaixado nestes dois. O terceiro quadrado deveria fornecer-lhe uma solução. A *localização do ângulo recto* vai ajudá-lo a decidir onde colocar o terceiro quadrado. (...) tenho a certeza que obterá uma série de medidas que reconciliam a estatura humana (homem com braço levantado) com a matemática..."[6]

## Primeiras soluções

Em 25 de Agosto, Hanning surgiu com uma primeira proposta (figura 2): quadrado — secção áurea do lado — diagonal — ângulo recto com vértice na mediana do quadrado inicial.

A historiadora de arte Elisa Maillard, envolvida na Associação ASCORAL, tal como Le Corbusier, surge (26/12/1943) com outra solução (figura 3): quadrado — secção áurea do lado – o ângulo recto marcado sobre a mediana do quadrado original dá o ponto $I$ – da mediatriz de $GI$ resultam dois quadrados *iguais* ao quadrado inicial.

Le Corbusier sugere a seguinte leitura (figura 4):

— $ABCD$ = quadrado inicial;

— $EF$ = mediana;

— a perpendicular a $FG$ em $F$ determina $I$ na recta $GB$;

— $BDJI$ = rectângulo, em que $BI$ e $DJ$ estão em relação $\phi$ com $IQ$ e $QJ$ ($\phi$ é a razão de ouro, ie, aproximadamente 1:1,618);

— a mediana horizontal de $GHJI = KL$;

— $MN$ é a imagem de $KL$ em relação a $EF$;

— $KLNM$, dividido em dois pela mediana vertical $OP$, determina $KOPM$ e $OLNP$, a diagonal e metade dos quais estão em relação $\phi$ entre si.[7]

Em $GI$ observa-se uma sequência crescente de elementos: $KM$; $KA = MB = BI$; $GA = AM = KB$; $GK = KI$; $GB$.[8]

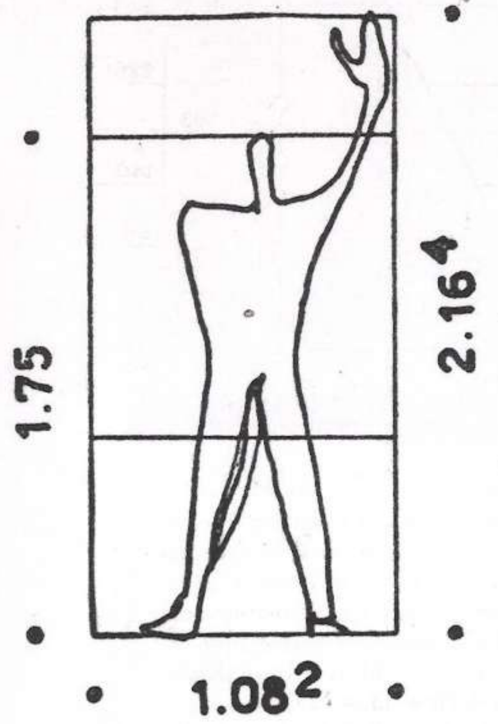



Figura 5. Grelha adaptada à estatura humana

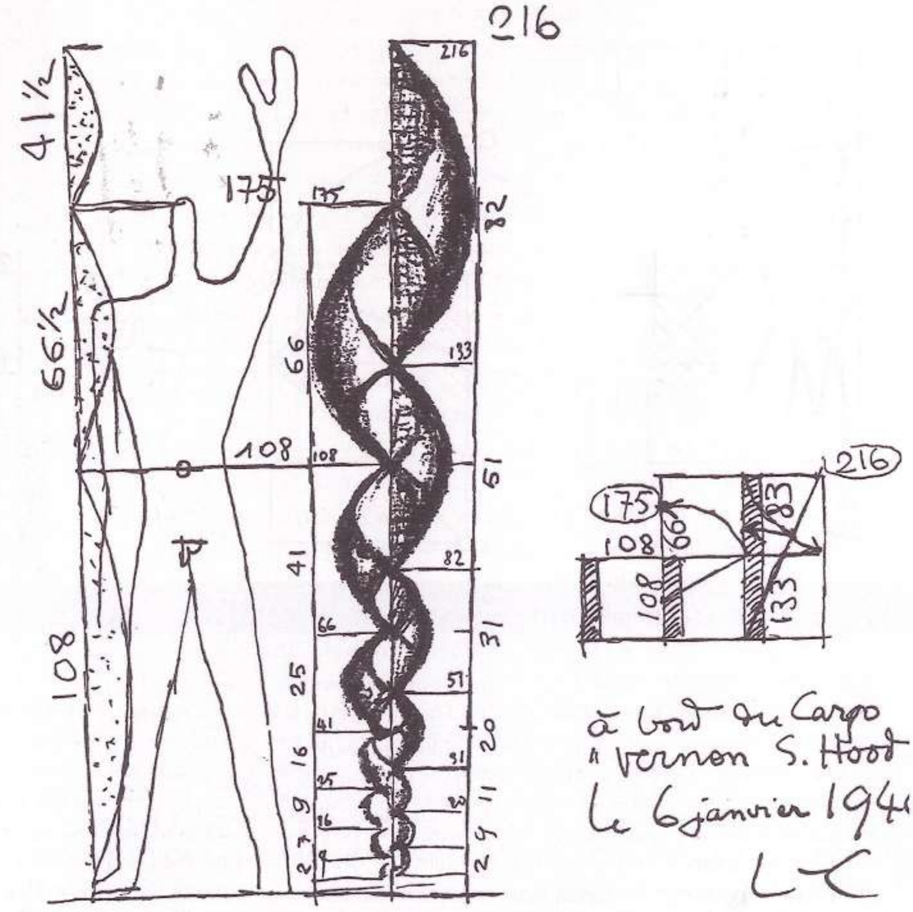



Figura 6. Esquema de Le Corbusier mostrando as séries vermelha e azul

## Modulor

E assim nasceu a Grelha, na qual a ordem matemática se adapta à estatura humana. Apesar das dúvidas ainda existentes, Le Corbusier afirma que ela deu uma grande segurança na determinação das dimensões dos objectos nos seus projectos. Mas faltava ainda uma *definição* da invenção!

No final da Guerra, retomou-se este trabalho. Foi atribuído um valor humano à combinação geométrica, adoptando para tal a altura de um homem de 1,75 m. Assim, à Grelha foram dadas as dimensões 175 – 216,4 – 108,2 (figura 5).[9]

Segundo Le Corbusier, estes valores correspondem à sequência na tabela 1, e chama a atenção para o facto desta sequência ser de Fibonacci: a soma de dois termos consecutivos dá o termo seguinte.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 25,4 cm | *KM* |
| 2 | 41,45 cm | *MB* |
| 3 | 66,8 cm | *AM* |
| 4 | 108,2 cm | *AB* |
| 5 | 175 cm | *GB* |
| 6 | 283,2 cm | |

Tabela 1

Neste ponto, seguiu-se o registo da patente e a concessão a um agente para colocar a ideia no mercado. Após os contactos por todo o mundo, o agente acaba por dizer a Le Corbusier: "Os números são demasiado rígidos. Não se podem adaptar aos números 'redondos' do sistema métrico ou do pé-e-polegada e não se ajustam aos valores da AFNOR. Mas se concordasse em permitir uma pequena latitude na sua escala de números — não mais do que 5% para cada lado — então tudo seria mais fácil, todos estariam de acordo..."[10]

Le Corbusier dispensa, então, a organização comercial e a publicidade e renuncia aos direitos de autor. Se fosse, de facto, uma coisa boa, então seria o uso pelos arquitectos e o estudo pelas revistas da especialidade que tornariam a grelha conhecida. E "se for permitido que os obstáculos e obstruções, a rivalidade e oposição criada pelo antagonismo dos dois sistemas de medida agora em uso (...) cheguem um dia ao fim, então a nossa medida poderá unir aquilo que outrora se dividiu..."[11]

Le Corbusier aproveitou uma longa viagem de barco aos Estados Unidos para desenvolver as suas ideias e encontrar uma explicação para a regra de ouro. Interrogava-se também se as posições do corpo humano em pontos decisivos de ocupação do espaço apresentavam uma relação privilegiada com a matemática.

As suas conclusões estão resumidas no desenho que traçou "a bordo do navio de carga Vernon S. Hood", em 6 de Janeiro de 1946 (figura 6).

Na figura do homem há quatro pontos principais: 0, 108, 175, 216. A sequência de Fibonacci que surge da relação ba-

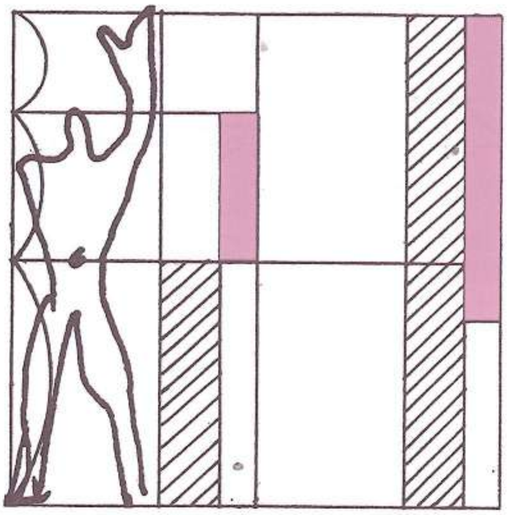


Figura 7. Marca registada de Modulor

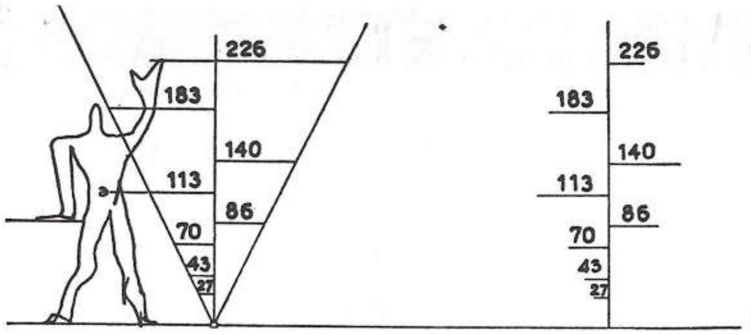



Figura 8. A Grelha e a estatura humana

seada na unidade 108 chamou Le Corbusier série vermelha (à esquerda); à sequência baseada na dupla unidade 216, série azul.

Foi no regresso ao seu estúdio de Paris que a regra de ouro ganhou o nome de Modulor e se criou a marca registada, induzida pelo próprio desenho (figura 7).

O que é, pois, o Modulor? "Um instrumento de medida baseado no corpo humano e na matemática. Um homem de braços levantados fornece, em pontos determinantes da sua ocupação do espaço — pé, plexo solar, cabeça, pontas dos dedos do braço levantado — três intervalos que originam uma série de secções de ouro, chamada série de Fibonacci."[12]

Correspondendo a um pedido de arredondamentos dos números, de modo a aproximar este sistema dos outros em uso, um dos colaboradores chama a atenção: "Os valores do Modulor na forma actual são determinadas pelo corpo de um homem de 1,75 m de altura. Mas não será uma altura francesa? Já repararam que nas histórias de detectives inglesas, os homens bem parecidos, como os polícias, têm sempre 6 pés de altura?"[13]

A partir deste novo padrão para a altura do homem, seis pés = 6 × 30,48 = 182,88 cm, a tradução para os restantes sistemas de medida trouxe resultados que entusiasmaram a equipa, que sentia estarem automaticamente resolvidas as diferenças que separam os utilizadores do metro dos do pé-e-polegada.

Quais são agora os pontos principais do Modulor?

"1. A Grelha fornece três medidas: 113, 70, 43 (em cm), em relação $\phi$ (secção de ouro); a sequência de Fibonacci fornece 43 + 70 = 113 ou 113 – 70 = 43. Todos somados temos 113 + 70 = 183, 113 + 70 + 43 = 226.

"2. As três medidas (113 – 183 – 226) definem a ocupação do espaço por um homem com 6 pés de altura.

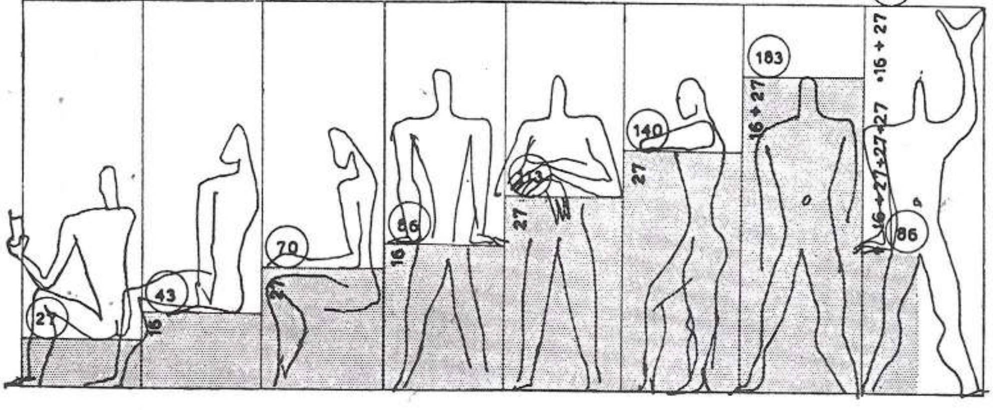
"3. A medida 113 fornece a secção de ouro 70, que origina uma nova sequência, chamada série vermelha: 4 – 6 – 10 – – 16 – 27 – 43 – 70 – 113 – 183 – 296...

"A medida 226 (2 × 113), dupla unidade, fornece a secção de ouro 140 – 86, que origina a segunda sequência, chamada série azul: 13 – 20 – 33 – 53 – 86 – 140 – 226 – – 366 – 592..."

4. Alguns destes valores de medidas podem ser descritos como caracteristicamente relacionados com a estatura humana"[14] (figuras 8 e 9).

Em Agosto de 1948, já na fase de escrita do livro "Le Modulor", Le Corbusier recapitula o problema inicial e os sucessivos desenhos e repara nos pontos de intersecção dos lados do ângulo recto com os lados do quadrado. Em Outu-

Figura 9. A Grelha e a ocupação do espaço pela figura humana



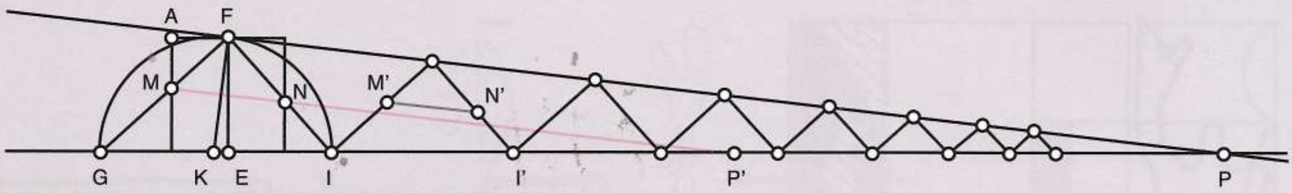



Figura 10. Novo estudo da solução Maillard

bro, escreveu a Elisa Maillard, colocando algumas questões e pedindo-lhe uma resposta entre os seus colegas da Sorbonne. M. Taton respondeu, com as seguintes conclusões (figura 10):

1. Tomando para unidade o lado do quadrado inicial, $GK = KI9\sqrt{5}/20 \approx 1,006$ ($K$ é o ponto médio de $GI$: centro da circunferência que passa por $G$, $I$ e $F$, logo circunscrevendo o ângulo recto $GFI$). Portanto, embora em termos visuais os quadriláteros de lados $GK$ e $KI$ sejam quadrados, eles são, matematicamente falando, rectângulos com a forma aproximada de um quadrado.
2. A razão entre $KF$ e $EI$ é $9\sqrt{5}/20 \approx 1,006$ (porque $KF =$ = raio da circunferência). A razão entre $KF$ e $EI$ é $(9\sqrt{5}/20) : (2\sqrt{5}/5) = 9/8 = 1,125$.
   A tangente em $F$ e a recta oblíqua são paralelas: formam um ângulo de 6°19' com a horizontal.[15] São perpendiculares ao raio $KF$. A tangente intersecta a recta $GI$ num ponto $P$, com $EP = 4\sqrt{5} = 10 \times EI \approx 8,94$. A recta $MN$ intersecta a recta $GI$ num ponto $P'$ com $EP' = (8\sqrt{5} - 9)/2 \approx 4,44$.
3. Considerando os sucessivos triângulos decrescentes semelhantes ao inicial, as respectivas rectas do tipo $MN$ são paralelas entre si e à tangente; os pontos de intersecção com a recta $GI$ vão-se aproximando de $P$. A razão de semelhança dos triângulos é igual a $4/5$.

Em 4 de Dezembro desse ano, Elisa Maillard produziu um novo desenho. O traçado definitivo e rigoroso do Modulor foi feito em 1951 no estúdio da rua de Sèvres por dois jovens colaboradores — Justin Serralta, uruguaio, e Maisonnier, francês — e apresentado nesse mesmo ano, com destaque, na exposição *Divina Proportione* na trienal de Milão.

## Coda

Le Corbusier aplicou o Modulor pela primeira vez a um conceito de habitação inovador, a Unité d'Habitation, em Marselha. Afirma o arquitecto que só foram necessárias 15 medidas da escala.

O Modulor gerou muitas paixões, mas não é uma história de sucesso. Com o passar dos anos, o interesse desvaneceu-se. O próprio Le Corbusier aplica-o selectivamente e abandona o seu uso quando ele não se revela adequado, como é o caso das dimensões muito grandes ou muito pequenas.

Apesar das inconsistências e críticas ao Modulor, o sistema não deixa de ser uma referência nas relações entre matemática e arquitectura. Traduz uma viagem quixotesca em busca de um sistema universal unificador do sistema métrico e do sistema imperial de medidas, através do corpo humano, reunindo tradição e modernidade. Numa era com tendência para a especialização e a separação entre arte e ciência, Le Corbusier possuía as qualidades de um homem universal.

## Notas

1 Maciel, p. 110.

2 Mónadas ou unidades: são os quatro primeiros números, cuja soma é igual a 10: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

3 O metro é o caminho percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299\ 792\ 458$ de um segundo.

4 Charles-Édouard Jeanneret-Gris, nasceu a 6 de Outubro de 1887 em La Chaux-de-Fonds, Suíça, mas viveu a maior parte da sua vida em França. Com a publicação de *Vers une Architecture* (1923) adoptou o nome Le Corbusier. Morreu em 27 de Agosto de 1965.

5 Le Corbusier, vol. 1, p. 36.

6 Idem, p. 37.

7 Idem, p. 39.

8 Algumas igualdades são aproximadas. Partindo de um quadrado de lado 1, tem-se

$$KM = \sqrt{5}/10;$$
$$KA = MB = (10 - \sqrt{5})/20 \approx BI = (4\sqrt{5} - 5)/10;$$
$$GA = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx AM = KB = (10 + \sqrt{5})/20;$$
$$GK = KI = 9\sqrt{5}/20;$$
$$GB = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi.$$

9 Inverteu-se o rectângulo da figura anterior. A altura do homem é o segmento $GB$. Partindo da correspondência $\varphi \leftrightarrow 175$, a unidade toma o valor aproximado 108,2. A altura 216,4 pressupõe que o rectângulo é um duplo quadrado.

10 Idem, p. 46.

11 Idem, p. 47.

12 Idem, p. 55.

13 Idem, p. 56.

14 Idem, p. 65.

15 Valor que aparece no livro *The Modulor*. Usando uma calculadora gráfica obtém-se 6°22'46".

## Bibliografia

Tavernor, Robert (2002). Measure, Metre, Irony: Reuniting Pure Mathematics with Architecture. *Nexus: Architecture and Mathematics*. Florença: Kim Williams Books

Le Corbusier (2004). *The Modulor: a Harmonious Measure to the Human Scale Universally applicable to Architecture and Mechanics e Modulor 2 (Let the User Speak Next)*. 2 volumes. Basel: Birkhäuser [Facsimile da 1ª edição inglesa de Faber and Faber, 1954].

Maciel, M. Justino (2006). *Vitrúvio, Tratado de Arquitectura*, Lisboa: IST Press.

Luís Reis

Grupo de Trabalho T3. Centro de Competência CRIE UCP-ESB

# Junte-se à APM em 2007

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

**Quadro 1**

| Sócio | Sócio residente no estrangeiro | Sócio Estudante | Sócio Aposentado | @-Sócio* |
|---|---|---|---|---|
| 47,50€ | 51,60€ | 33,50€ | 37,00€ | 37,00€ |
| Revista *Educação e Matemática* impressa e *on-line* (saem 5 números por ano e uma delas é temática) | | | | Revista *Educação e Matemática on-line* |
| APM*informação* impresso e *on-line* (4 números por ano) | | | | APM*informação on-line* |
| Opção de assinatura da revista *Quadrante* impressa (2 números por ano — 11,00 €) | | | | |
| Acesso à zona *on-line* para sócios | | | | |
| Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%) | | | | |
| Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa<br>Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público | | | | |
| Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições | | | | |
| Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento | | | | |
| Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção | | | | |

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa.**

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

## Instituições

**Quadro 2**

| Opções | | | Valor |
|---|---|---|---|
| Opção 1 | Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números) | | 36,50€ |
| Opção 2 | Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números) | | 21€ |
| Opção 3 | A | Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática) | 47,50€ |
| | B | Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números) | 15,50€ |
| Opção 4 | A | Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* — 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática) | 68€ |
| | B | Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números) | 15,50€ |

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

## Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

# índice

## Editorial



## Artigos



## Secções