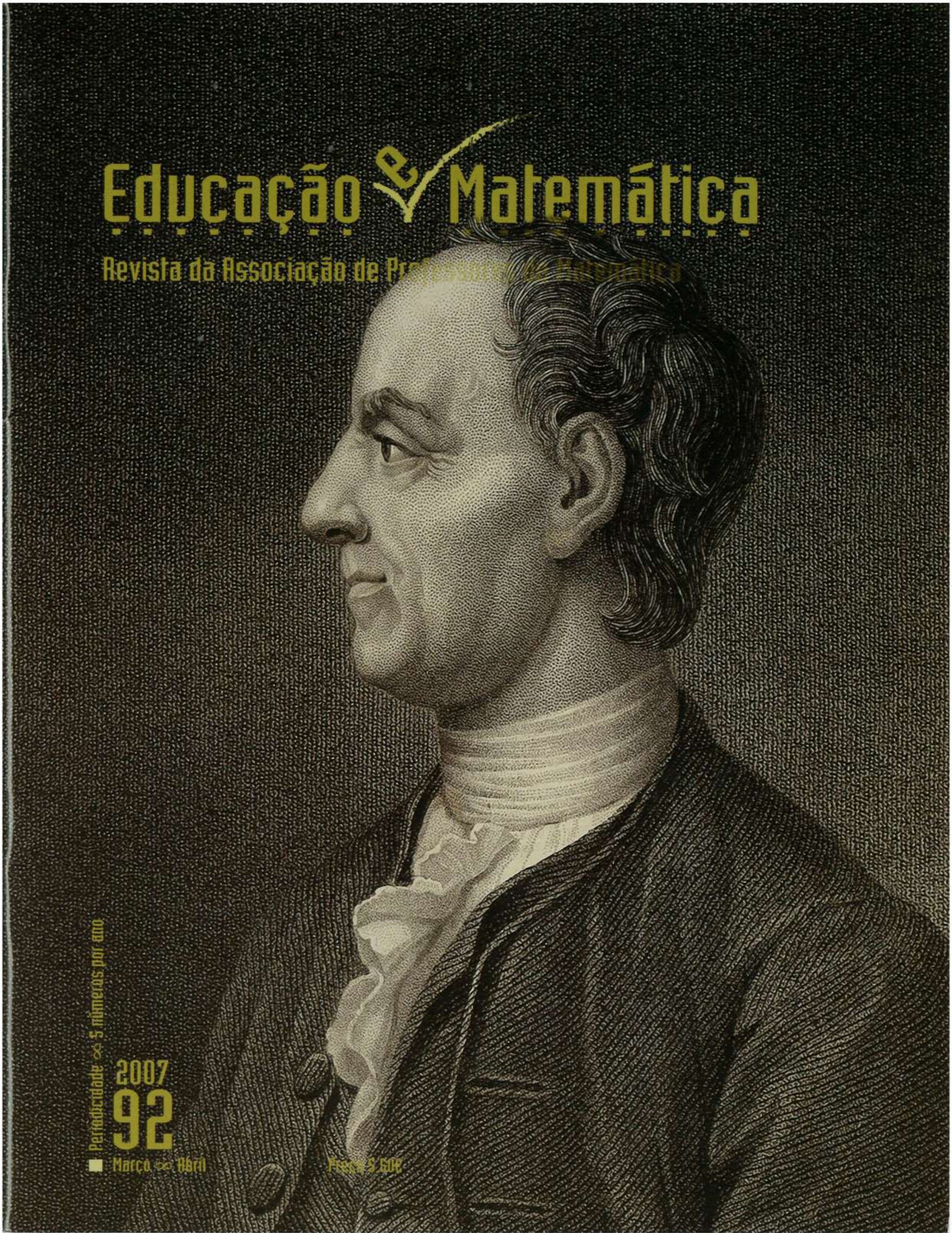
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2007

92

Março ∞ Abril

Preço 5.60€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Claúdia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
João Torres
Lina Brunheira
Mânuela Pires
Maria José Boia
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2007
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
Porte Pago

Sai da redacção

A Fátima Guimarães deixa de integrar a redacção da revista *Educação e Matemática*. O nosso agradecimento à Fátima que muito contribuiu para a qualidade da revista.

Mudança de Colaborador

O nosso colaborador permanente na área das *Tecnologias na Educação Matemática* é a partir deste número José Duarte. À nossa anterior colaboradora, Branca Silveira, expressamos o nosso agradecimento por estes anos em que assegurou a publicação da respectiva secção.

Sobre a capa

A capa deste número reproduz uma gravura retratando Leonar Euler (1707–1783). Comemora-se este ano o tricentésimo aniversário do nascimento deste influente matemático com obra notável e diversificada. Foi dos primeiros incorporar de forma sistemática a utilização de argumentos envolvendo a noção de infinito e até, como se pode constatar através do conteúdo do seu *Introductio ad Analysin Infinitorum* (1748), a utilizar *números infinitos* para obter resultados acerca dos *números ordinários* aquilo que constitui, de certo modo, uma antecipação da análise não-standard do Séc XX.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Maria Boavida, Andreia Sénica, Carlos Miguel Ribeiro, José Manuel dos Santos dos Santos, José Manuel Matos, Luísa Gago da Silva, Luísa Solla, Luís Reis, Pedro Macias Marques, Sara Pedro, Susana Carreira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Reformulação dos programas: uma oportunidade para intervir

Ana Luísa Paiva e João Vítor Torres

As comemorações permitem celebrar, reflectir, organizar balanços, perspectivar caminhos. Foi isso que fizemos ao longo do ano passado e no início deste ano. Nas páginas desta revista o Gabinete dos 20 anos foi trazendo à memória os principais marcos da história da APM. Na primeira revista deste ano marcámos os 20 anos da Educação e Matemática.

A discussão em torno das orientações para o ensino da Matemática foi uma temática sempre presente no seio da APM. Desde o tão marcante Seminário de Milfontes até hoje realizaram-se muitos encontros e seminários em que se debateu o currículo e o programa de Matemática. A APM publicou vários textos sobre este tema quer na forma de artigos quer em livros.

A revista Educação e Matemática tem dado relevo a esta temática acompanhando de perto as mudanças curriculares quer no que respeita à concepção de novos programas, quer no que respeita à sua implementação e ajustes de natureza diversa.

Logo nos primeiros números da revista publicámos vários artigos marcantes que, reflectindo a época, se focavam na importância da resolução de problemas e questionavam o peso habitualmente conferido ao cálculo.

Precedendo a reforma de 91, os artigos focados nas ideias centrais a serem incluídas nos novos programas, ocuparam um certo relevo. As recomendações de atribuir uma importância central à resolução de problemas, de incluir o estudo da Estatística e das Probabilidades nos anos mais elementares ou de dar maior ênfase à Geometria, foram bastante debatidas nas páginas da Educação Matemática. As primeiras experiências de trabalho com os novos programas passaram também pelas páginas da revista. Demos voz a autores dos programas e a muitos colegas que reflectiram sobre as mudanças propostas e relataram experiências de sala de aula.

Durante a reformulação dos programas do ensino secundário publicámos vários artigos e opiniões sobre que Matemática para este nível de ensino. Também acompanhámos de perto o *Ajustamento dos novos programas do ensino secundário*.

Com a introdução da disciplina de Métodos Quantitativos todos os alunos passaram a ter matemática nos seus currículos. Que conteúdos para esta disciplina? Qual o sentido dos Métodos Quantitativos no currículo? A discussão em torno destas e de outras questões marcaram presença nas páginas desta revista.

Acompanhando a reorganização curricular de 2001 e a publicação do *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*, discutimos a gestão flexível do currículo, demos a palavra a professores que nos explicaram como organizavam de modo flexível o currículo ou como trabalhavam centrados no desenvolvimento de competências. Fizemos reportagens e alguns colegas contaram-nos experiências interessantes de trabalho nas áreas curriculares não disciplinares.

Neste momento está a decorrer a reformulação dos programas de Matemática do Ensino Básico. Em Maio deverá ser divulgado um primeiro documento para discussão pública. Desde Janeiro que a APM abriu uma lista de discussão sobre esta temática. E nós, aqui na Educação e Matemática, apelamos ao leitor para reflectir e participar por vários meios neste debate. Nós interrogamo-nos sobre:

Em que aspectos é importante investir no sentido de articular verticalmente os três ciclos?

De que modo se deve organizar o programa? Por anos? Por ciclos? Por temas?

Como pensar o cálculo? E a geometria? E os números?

O tema análise de dados deve expressamente ser incluído no 1º Ciclo? E os números fraccionários?

E o leitor? Quais são as suas interrogações? Que experiências realizou e que podem dar achegas a esta discussão? Quais são as suas propostas?

Ana Luísa Paiva
ESE de Setúbal

João Vítor Torres
ESE de Setúbal

Fátima Guimarães deixa a redacção da revista Educação e Matemática

Durante 10 anos a nossa colega Fátima Guimarães integrou a redacção da revista Educação e Matemática. Contar com as suas sugestões, com os seus textos, com as suas críticas foi um privilégio para toda a redacção. A Fátima, com um jeito que lhe é muito característico, foi um elemento essencial para conceber e concretizar muitas das opções que fizemos aqui, na revista. É disto um exemplo a sua activa participação na comemoração dos 20 anos da APM incluída nos números de 2006 e na revista temática com que comemorámos os 20 anos da Educação e Matemática.

Queremos agradecer à Fátima Guimarães a sua participação activa neste grupo de trabalho e dizer-lhe que, embora de outra forma, continuamos a contar com as suas ideias e artigos.

Ou então, tentando dar uma imagem do tal jeito especial da Fátima: (Em)bora lá! O que sugeres?

A redacção

Muda o responsável da secção Tecnologias na educação matemática

A partir deste número da revista Branca Silveira deixa de ser a responsável pela secção *Tecnologias na educação matemática*. A Branca tem participado activamente na revista *Educação e Matemática* sendo responsável por esta secção desde o número 71 de Janeiro/Fevereiro de 2003.

A redacção quer expressar o seu muito obrigada pela dedicação com que a Branca desempenhou esta tarefa. A procura de temáticas diversificadas e a preocupação em seguir o que de mais significativo ia acontecendo no âmbito da temática da secção de que era responsável, marcaram estes 4 anos de colaboração especial da Branca. Foi muito bom poder contar com o conhecimento e a experiência desta colaboradora permanente com quem continuamos a contar para continuar a colaborar regularmente na revista.

Neste número o nosso colega José António Duarte inicia a sua participação como responsável da secção *Tecnologias na educação matemática*. José Duarte é professor na Escola Superior de Educação de Setúbal e está desde há muito tempo ligado a projectos relacionados com a introdução das tecnologias na educação.

Esta secção esteve inicialmente a cargo do colega Eduardo Veloso e é precisamente com uma entrevista aos dois colegas que o antecederam que José Duarte inicia a sua colaboração como responsável da secção.

Resta dar as boas vindas ao José Duarte que, temos a certeza, trará para as páginas desta revista novidades e reflexões em torno de uma temática sempre tão actual.

A redacção

Pense nisto

O que diria sobre o nosso sistema educativo?

O que diria se lhe pedissem para caracterizar o nosso sistema de ensino?

Provavelmente diria que até ao 9° ano a escolaridade é obrigatória e vigora um sistema de via única. Por outras palavras, poderia dizer que até ao final do 3° ciclo a escolaridade é igual para todos. Esta é aliás uma das características que se costuma indicar para marcar a diferença entre o sistema educativo vigente durante a ditadura e o que lhe sucedeu com a implementação da democracia. Todos os alunos passaram a ter uma formação igual nos 9 primeiros anos da escolaridade.

Actualmente o total de jovens matriculados no 3° ciclo no ensino regular é de 359317.

Para além destes, existem hoje em Portugal 25693 alunos matriculados no 3° ciclo em Cursos de Educação Formação (CEF) e 1136 alunos a frequentar cursos profissionais (nível de qualificação 2).

E agora? Ao falar do nosso sistema educativo, teremos de o caracterizar como incluindo uma via profissionalizante e uma outra, a que, vá-se lá saber porquê, se denomina como *regular*?

Pense nisto!

Ana Luísa Paiva e João Vítor Torres

Do Castelo de Marvão à Cidade do Sado — Trilhos da Matemática Escolar

Susana Carreira

Do castelo de Marvão... à cidade do Sado: 1986—2006

Mais do que destacar dois pontos geográficos (Marvão, nos arredores de Portalegre, e Setúbal à beira do Sado), quero assinalar dois marcos no tempo e usá-los para cumprir dois propósitos: analisar e discutir a Matemática escolar e prestar o meu tributo pela ocasião dos vinte anos da APM.

O ProfMat de Portalegre foi o meu primeiro ProfMat e dele mantenho vivas boas recordações. A apresentação de uma comunicação sobre um programa de computador — o Proban, que era um misto de simulação e de jogo — o coro que esteve em plena actividade ao longo das várias noites e o passeio que nos levou a Castelo de Vide e a Marvão... O castelo de Marvão continua lá, na sua tenacidade granítica, o coro da APM tem vindo a registar um notável desenvolvimento profissional... e o Proban (abreviatura de Problemas na Banheira), guardo-o como relíquia dos tempos da programação no Spectrum.

Partamos, então, de Portalegre ou de Marvão e desse ano de 1986. O que me impulsionava a mim, que estava a iniciar o meu trajecto profissional no ensino da Matemática, tal como aos professores que se juntaram para discutir e partilhar ideias e propostas, exteriorizando críticas e descontentamentos pelo estado dos currículos e das aulas, da actividade dos alunos e dos objectivos da Matemática que se ensinava na escola? Se o quisesse resumir numa linha, diria que o sentimento geral era o de uma urgente e impreterível necessidade de mudar a Matemática escolar. E a forma de o fazer desdobrava-se numa multiplicidade de direcções. Estratégias, experiências, recomendações, sugestões, uma avidez — diria — de alterar as práticas, os currículos, as aulas, as formas de avaliação. Tudo estava desactualizado, enquistado, obsoleto. Tudo era francamente desmotivador, árido e pobre e exigia mudanças de toda a sorte. Neste contexto e nesta que era a tonalidade dominante em 1986, irrompe a Associação de Professores de Matemática que viria a tornar-se num motor vigoroso das muitas mudanças que ocorreram, desde então, no ensino da Matemática em Portugal.

E de lá até 2006? Decidi procurar pistas, indicadores e sinais que me permitissem tecer uma imagem, decerto incompleta e muito provavelmente estreita, de como se imprimiram os trilhos da Matemática escolar, de há vinte anos para cá. Seleccionei, entre tantas possíveis, duas vias de leitura dos factos. A primeira consiste em estabelecer um contraponto entre os 3 primeiros números (de 1987) e os 3 últimos números (de 2006) da revista *Educação e Matemática*; a segunda rota é a dos exames nacionais de Matemática do ensino secundário, com vista ao confronto entre os de 1986 e os de 2006.

Nos trilhos da Educação e Matemática

Vejamos, pois, o que se dizia, escrevia e discutia nas páginas da revista *Educação e Matemática* nos seus três números iniciais, os números de arranque de um projecto claramente significativo da Associação e que, em certa medida, exprime muito do seu rosto e da sua voz. De cada um dos números considerados, escolherei dois ou três artigos e apresentarei uma pequena síntese da sua mensagem. Tento, captar-lhes o sentido primordial e, assim, enquadrar no tempo aquilo que se diz e se pensa sobre a Matemática escolar.

A revista número 1 abre com um editorial de Paulo Abrantes onde se sublinha o desajustamento cada vez maior entre o ensino da Matemática prevalecente e as necessidades individuais e sociais da época. Era indubitável um desejo crescente de renovação e afirmava-se o início de um movimento liderado pela APM. A viragem deveria dar lugar a mudanças expressivas e passaria por novas orientações para a Matemática escolar: um papel mais activo dos alunos, objectivos mais amplos para a Matemática na escola, uma alteração do tipo de actividades na sala de aula, a importância do recurso às tecnologias, nomeadamente aos computadores, uma maior ênfase na resolução de problemas, nas aplicações e nas relações da Matemática com outras disciplinas escolares.

Neste primeiro número, Leonor Moreira escreve um artigo sobre a resolução de problemas em que dá eco a muitas das ideias de George Polya, chamando a atenção para a atitude negativa dos alunos perante a Matemática escolar e criticando um ensino excessivamente agarrado à resolução de exercícios rotineiros e ao treino de técnicas mais ou menos redutoras do raciocínio e da criatividade dos alunos. A actividade de resolução de problemas é qualificada como uma prioridade do ensino da Matemática, já que se apresenta como um modo de pensar e de aprender a lidar com o mundo e com as situações problemáticas da vida real.

Na selecção que fiz, trago também um artigo de José Duarte em que se descreve e se convida o leitor a experimentar um programa de computador (o tal Proban!...) que simula uma situação real: encher uma banheira com o auxílio de duas torneiras relativamente às quais podemos decidir a temperatura e o caudal da água que deitam. José Duarte faz notar a importância da interpretação da situação real e destaca a possibilidade de se visualizarem aspectos do comportamento das funções envolvidas no problema e das relações entre as múltiplas variáveis presentes naquela simulação.

Do número 2, seleccionei o editorial de João Pedro da Ponte, intitulado *Os professores e a revolução informática*. Critica-se a falta de capacidade manifestada pela Escola de acompanhar as mudanças tecnológicas, em grande medida devido à resistência dos professores em relação ao uso do computador e a novas aprendizagens. Não obstante, o artigo deixava claro que o papel do professor iria sofrer mudanças substanciais face à necessidade de desenvolver nos jovens capacidades cognitivas de nível mais elevado e de perseguir objectivos sociais e afectivos mais ambiciosos para o ensino da Matemática.

No mesmo número, há um artigo sobre o LOGO e a Educação Matemática, de João Filipe Matos. Esta foi uma época em que a linguagem LOGO e as ideias de Seymour Pappert ganharam muitos adeptos e em que se realizaram diversas experiências, especialmente em escolas do 1° ciclo, com base na programação em LOGO. João Filipe Matos mostra a importância de envolver os alunos em projectos na aula de Matemática, não esquecendo que a construção de boas situações de aprendizagem exigirá do professor trabalho e criatividade.

Assinalo, também, um outro artigo, da autoria de Conceição Mesquita, sobre o programa de computador Recordes e a sua utilização educacional, quer como veículo para a interpretação de conceitos estatísticos quer como estímulo à atitude crítica dos alunos. Discute-se a importância de questionar os resultados e de lidar com respostas que não estão previamente determinadas. Ao mesmo tempo, faz-se alusão à necessidade de contemplar a Estatística nos currículos de Matemática, à semelhança do que já se passava em muitos outros países.

Na secção *Problemas, Ideias, Sugestões*, incluída no número 2, fala-se da premência de aliviar os currículos da excessiva carga da Aritmética e lamenta-se a pouca atenção dada à Geometria. Sugere-se a utilização de materiais manipuláveis com os alunos, avança-se com a ideia de ser o aluno a efectuar construções e a trabalhar em grupo em problemas e actividades ligadas à Geometria.

Ao desfolhar o número 3 da revista, considerei o artigo de Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes sobre os desígnios das aplicações da Matemática na escola secundária. As autoras tratam brevemente o papel do ensino secundário, reconhecendo o grave problema da falta de motivação dos alunos. No seu artigo, propõem a introdução de aplicações da Matemática como um meio para alterar as atitudes dos alunos face à disciplina e como forma de melhorar a capacidade de utilização da Matemática em contextos da vida real.

Aparece igualmente neste número um pequeno texto de um dos Grupos de Trabalho para a reforma dos currículos que então se começava a delinear. Fala da importância de incluir as Probabilidades e a Estatística em todos os níveis de escolaridade e de desenvolver nos alunos o raciocínio probabilístico. Trata-se de uma recomendação que procura colmatar uma falha na formação matemática dos jovens e ter em conta uma área da Matemática que proporciona muitas aplicações interessantes.

Também no número 3, prendeu-me a atenção outro artigo de Paulo Abrantes acerca de um programa de computador, o Estimatemp, com carácter de simulação de uma situação real. Aborda-se a exploração do programa na sala de aula e sugerem-se diferentes etapas de trabalho, onde se inclui a experiência autónoma dos alunos bem como a sistematização, discussão e síntese das actividades com toda a turma. É impossível não fazer referência à nota de rodapé deste artigo: o programa podia ser copiado em disquete ou em cassete! De facto, o gravador de áudio era um dos periféricos muito pouco cómodos da altura. Uma boa ilustração do tempo e dos recursos tecnológicos disponíveis há vinte anos...

Hoje é tudo bastante diferente. Já não carregamos os tais gravadores pouco funcionais, ainda que outras coisas muito mais portáteis, como *pen-drives*, possam causar-nos grandes dissabores nos nossos dias...

Mas voltemos à revista e saltemos para a actualidade. Da frente para trás, irei sondar os números 88, 87 e 86 da *Educação e Matemática*.

No número 88, temos um artigo de Rita Bastos que nos conduz à ideia de simetria, apontando o estudo das simetrias como uma importante aplicação das isometrias. Rita Bastos critica o insuficiente tratamento das transformações geométricas nos currículos e a ausência da sua aplicação na resolução de problemas. Aconselha, por último, a pensar na realização de projectos interdisciplinares, tendo como pontos de partida a análise de objectos artísticos ou de cristais. Em certo sentido, portanto, vê-se que a Geometria continua a não satisfazer no âmbito da Matemática escolar.

Percorrendo as páginas do número 88, detenho-me no artigo de Rui Feiteira sobre Programação Linear e Teoria de Jogos. O autor realça a importância e a actualidade destes dois ramos da Matemática Aplicada, dá diversos exemplos de como se poderão tratar no ensino secundário e, em especial, advoga a sua introdução no currículo de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Em 2006, volta-se a ouvir a sugestão de novos temas para a Matemática escolar.

No número 87, o editorial é da responsabilidade da APM e debruça-se sobre o 3º Ciclo e a aventura de aprender. Constata-se o facto de que a escolaridade obrigatória continua por cumprir, propõe-se a leccionação conjunta por dois professores ante a heterogeneidade dos alunos e recomenda-se maior atenção à realidade de cada escola e de cada turma, além da concepção de projectos que abranjam o ciclo completo.

Ainda neste número, encontramos um artigo de António Menino e Graça Zenhas sobre o estudo de volumes e o desenvolvimento de competências, com base na resolução de situações-problema. Além de descreverem e analisarem a forma como os alunos desenvolvem estratégias variadas perante uma situação, os autores pesam a relação entre a noção de competência e a de saber, lembrando que a automatização de procedimentos não pode ser descurada e que a maior exigência de tempo impõe a revisão e o redimensionamento do programa de Matemática para o ensino básico.

Passando ao número 86, seleccionei um artigo sobre a demonstração em Geometria com o Geometer's Sketchpad em que se discute a formulação de conjecturas e a importância de ensinar os alunos a explicar porque é que uma relação não é válida. Sílvia Machado, a autora desse artigo, considera haver um lugar fundamental para a demonstração matemática na aula com os meios tecnológicos de que dispomos hoje, como é o caso dos programas de geometria dinâmica.

Por último, considero o artigo de Manuel Lagido sobre as actividades matemáticas num clube de astronomia. Aqui, coloca-se a tónica nas actividades de experimentação e na modelação matemática com base em dados reais obtidos pelos próprios alunos. Além de oportunidades para uma aprendizagem significativa, trata-se de criar condições para desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e de intervenção no real, na linha do que é preconizado nos currículos de Matemática dos ensinos básico e secundário.

Antes de entrar numa outra via de análise das mudanças na Matemática escolar, quero resumir algumas das ideias que me parecem emergir desta revisão obviamente curta e parcelar dos primeiros e dos últimos números da *Educação e Matemática*. Sob diversos ângulos, fica a ideia de quão diferentes são as condições, os processos e os recursos da Matemática escolar, entre estes dois momentos espaçados de vinte anos. Contudo, é igualmente nítida a sensação de que muitas das propostas e das recomendações de há duas décadas permanecem actuais, vivas e veementes. Continuamos, como se percebe, a pugnar por currículos mais adequados à realidade dos nossos dias, a defender o papel das tecnologias para um trabalho mais rico e mais significativo em Matemática, chamamos a atenção para a necessidade de envolver o aluno na sua aprendizagem e voltamos a alertar para o cuidado a pôr na escolha e na construção das tarefas para a aula de Matemática. Temos a percepção de que cada sala de aula e cada escola tem as suas especificidades e de que se pode apostar no desenvolvimento de competências e de capacidades de nível superior, ao mesmo tempo que reconhecemos a necessidade de tempo e de continuidade no trabalho com os alunos.

Nos trilhos dos exames nacionais

Vejamos agora que retrato nos salta à vista quando olhamos para um exame de Matemática do ensino secundário de 1986 e para um de 2006. O que nos poderão mostrar esses dois exames, com vinte anos de distância entre si?

Começarei pelos aspectos de carácter formal, comparando a respectiva estrutura e os tópicos abordados.

Em 1986, o exame é composto por seis grupos de questões, havendo a opção de escolha entre dois dos grupos. Está bem destacada uma única advertência: "indique todos os cálculos que tiver de efectuar". Neste exame, os temas contemplados são: indução matemática, números complexos, sucessões e limites, noções topológicas, estruturas algébricas, cálculo diferencial e cónicas. O tipo de verbos que predomina nos enunciados das questões é bastante homogéneo e claramente virado para a execução de procedimentos ou para a aplicação de teoremas ou resultados: prove que, represente, resolva a equação, estude quanto à convergência, determine, calcule, justifique que se verifica... A formulação das questões é predominantemente curta, não excedendo três linhas; verifica-se uma total ausência de figuras, gráficos ou ilustrações; não há qualquer formulário e nota-se a abundância de simbologia matemática nos enunciados da prova.

Em 2006, temos dois grupos de questões, um dos quais composto por itens de escolha múltipla (sem justificações) e o outro por itens de resposta aberta. Neste exame, encontramos diversas orientações e indicações explícitas. Não apenas se pretende o registo dos cálculos efectuados mas também a apresentação de justificações. É pressuposto — e obrigatório, em certas questões — o recurso à calculadora gráfica e importa que o aluno saiba retirar da calculadora os elementos e os resultados úteis. Simultaneamente, apela-se à capacidade de comunicar em Matemática, pedindo-se a escrita de uma composição em que se desenvolva determinada ideia ou resolução de uma questão. Os temas também são outros, distribuindo-se por geometria analítica, gráficos de funções, probabilidades, números complexos, cálculo diferencial e situações de aplicação e modelação. É visível a preocupação em contemplar o processo de aplicação da Matemática e em incluir a interpretação e a utilização de modelos matemáticos. Quanto ao tipo de linguagem presente, os verbos são um pouco diferentes, além de se notar uma feição algo mais interrogativa: escreva na forma, determine, mostre que, interprete o resultado, qual é a probabilidade, indique e justifique, explique por que é que... A formulação das questões é frequentemente longa, com uma grande explicitação de condições e dados. Surgem diversas figuras, gráficos, tabelas e esquemas e é disponibilizado um formulário; há muita informação expressa em linguagem corrente e vê-se amiúde uma combinação entre linguagem corrente e simbologia matemática.

Vinte anos volvidos: 1986—2006

A leitura que faço dos confrontos que fui estabelecendo parece indicar duas coisas de certa forma antagónicas. Por um lado, ao escrutinarmos as páginas da *Educação e Matemática*, entre o passado e o presente, somos levados a pensar que muito pouco haverá mudado. O discurso parece repetir-se e ressoar. Antes, como agora, o insucesso em Matemática e o insucesso na Escola. Mantém-se o espectro da difícil relação dos alunos com a Matemática, continua a pedir-se a inclusão de novos tópicos curriculares, estamos de novo a reclamar a ligação da Matemática à realidade, a valorizar o desenvolvimento de capacidades e de competências de nível mais elevado, a querer tornar a aprendizagem da Matemática significativa. Voltamos a chamar a atenção para a importância das estratégias, dos materiais, dos recursos e dos meios. Queremos alinhar a actividade na sala de aula com o desenvolvimento tecnológico e dar maior relevo à Matemática como instrumento de interpretação, de resolução de problemas e de promoção de formas de pensamento crítico. Por seu turno, o contraste flagrante entre os dois exames nacionais de Matemática ilustra como foi considerável a mudança ocorrida. Em 2006, espera-se qualquer coisa de muito diferente de um aluno que conclui o ensino secundário. Muito mais do que conhecer e saber usar um conjunto de técnicas, muito mais do que mecanizar certos tipos de demonstrações, muito mais do que saber resolver, muito mais do que entender a simbologia matemática, muito mais do que conhecer teoremas e saber representar, com papel e lápis, algumas funções *bem comportadas*... pretende-se que compreenda os conceitos e que os saiba utilizar, que relacione ideias matemáticas, que seja capaz de lidar com diversas formas de representação, que tire partido dos recursos tecnológicos, que saiba conjecturar, que saiba interpretar, que saiba mostrar e explicar, que saiba comunicar, que reconheça a aplicabilidade dos conceitos matemáticos e que esteja apto a trabalhar com modelos matemáticos em problemas de aplicação. Tudo muito menos *pré-definido*, muito menos preso ao conhecimento de procedimentos e de regras e ao treino de técnicas. A Matemática escolar parece ter recebido uma grande lufada de ar novo. Claro que uma coisa é essa dos exames nacionais e outra coisa é aquela da prática, no dia a dia, da aula de Matemática. Em todo o caso, dizer que nada mudou seria um equívoco colossal.

Novos trilhos para a Matemática escolar? — Por exemplo, um copo de sumo e uma palhinha

É fácil reconhecer que muito do que se tem proposto e se tem defendido para a Matemática escolar está ainda por alcançar e por concretizar. Ao mesmo tempo, parece evidente que hoje podemos ir mais longe do que ontem, que temos hoje ao nosso alcance mais possibilidades e porventura mais urgência, do que ontem, de recriar e de renovar a Matemática na escola e na sala de aula.

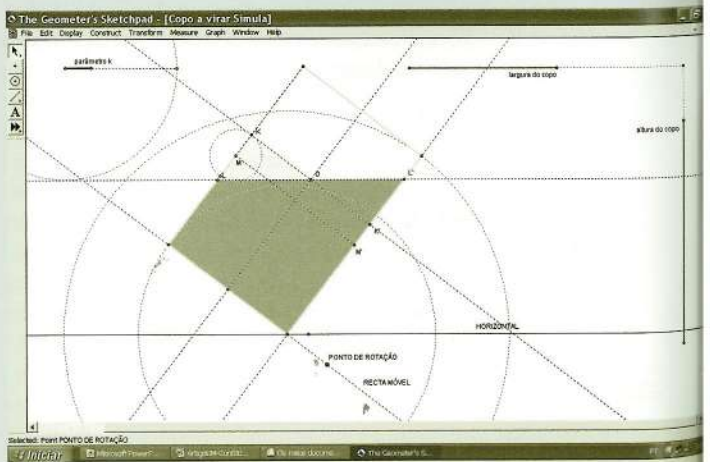
Desde há vinte anos mantenho o gosto e o interesse pelos problemas de aplicação da Matemática, uma certa simpatia pelas simulações de situações da realidade e a consciência da importância de ver a Matemática imersa nos fenómenos do mundo real. Por isso, continuarei no trilho da utilização das tecnologias, na demanda de questões e processos interpretativos e a dar uma atenção redobrada aos modos de representação que presentemente podemos incluir na experiência matemática dos alunos.

Proponho, portanto, uma simples situação do quotidiano e dois problemas que dela se podem extrair, num breve relance sobre um dos lados da Matemática escolar que importa ter em conta, hoje como ontem.

Com "um copo de sumo e uma palhinha"...

1) Um copo cilíndrico contém uma quantidade de sumo que ultrapassa metade da sua capacidade. Ao inclinarmos o copo, quando é que o sumo se derrama?

Comecemos pela abordagem de *papel e lápis*. Primeiro, há que definir umas quantas variáveis. Escolhe-se h para altura do copo, r para o raio da base, k para altura do líquido acima do meio da altura, α para o ângulo de inclinação do copo.



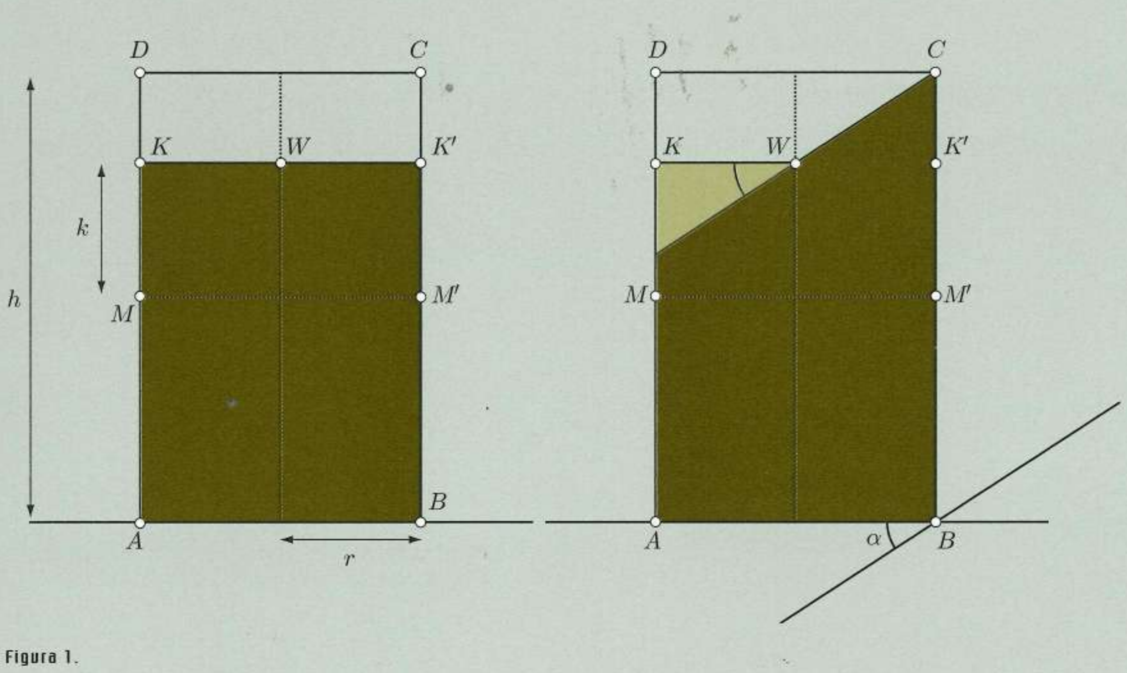


Figura 1.

Naturalmente, o que queremos é saber como depende o ângulo α das restantes variáveis e determiná-lo para a situação em que o copo está inclinado e o líquido, ao escorregar, fica exactamente no limite do bordo. A duas dimensões, o nosso copo cilíndrico é um rectângulo; o líquido é um rectângulo se o copo está direito e um trapézio se o copo está inclinado. (Figura 1)

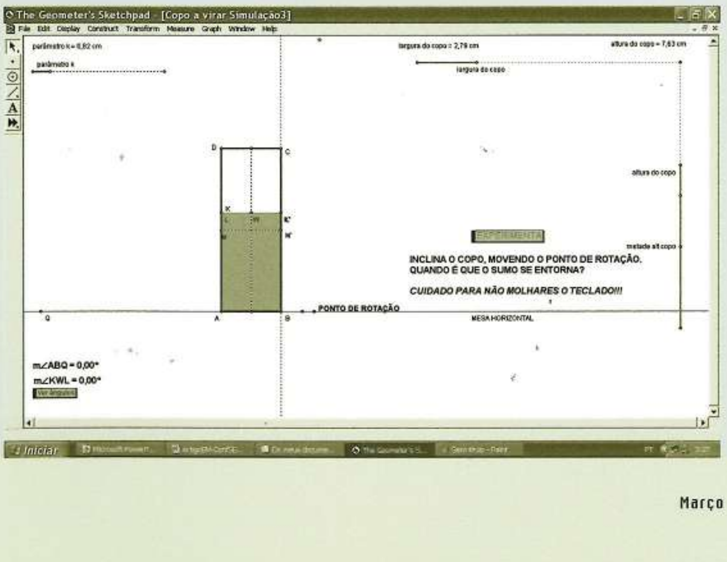
Um pouco de trigonometria permite-nos chegar ao valor do ângulo de inclinação máxima do copo sem que o líquido se derrame:

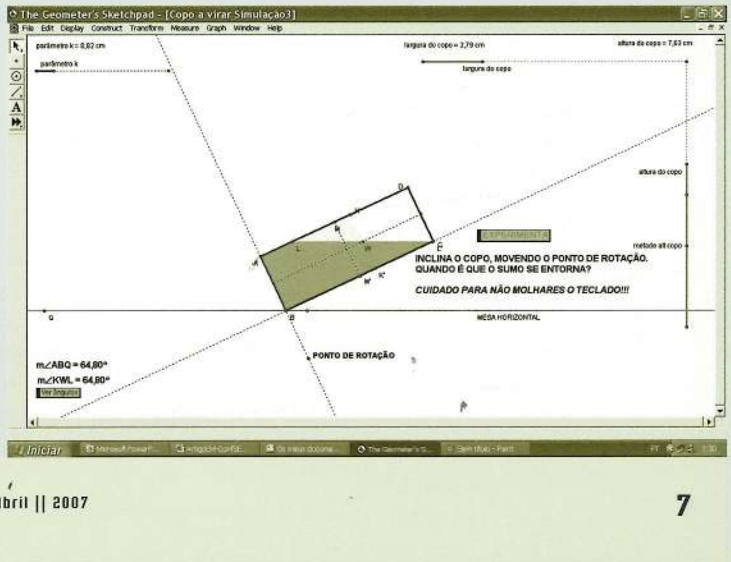
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{h}{2} - k}{r} = \frac{h - 2k}{2r}$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{h - 2k}{2r}\right)$$

Eis como o ângulo de inclinação máxima do copo depende da altura do copo e do raio da base e ainda da quantidade de líquido que ultrapassa a metade da capacidade do copo. Algumas experiências, uma calculadora gráfica, a função $\operatorname{tg}(x)$, a função $\operatorname{tg}^{-1}(x)$, fixar o raio da base e a altura do copo, como varia o ângulo com o nível de sumo no copo, etc.

Há uns anos atrás fazer uma simulação do copo a tombar e gravá-la numa cassete, seria um bom desafio. Agora, a mesma tarefa pode ser realizada no Sketchpad e de maneira muito mais prática e eficaz. Podemos manipular o plano onde o copo assenta, alterar a altura do copo, a largura do copo e o parâmetro k que representa o nível do sumo acima do meio da altura. Depois, é experimentar, observar, analisar, interpretar...





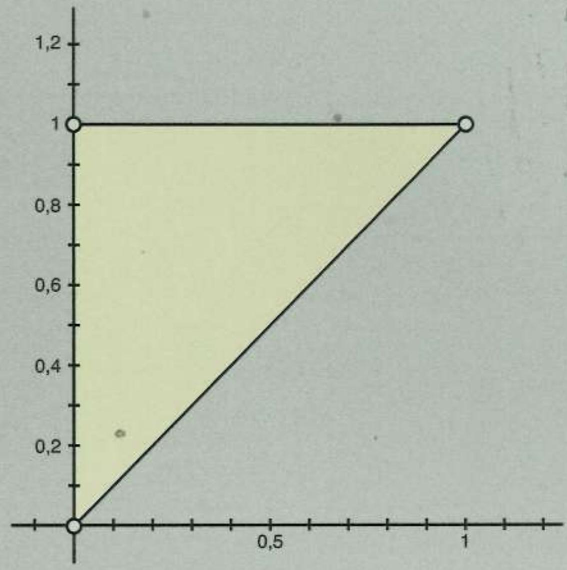


Figura 2.

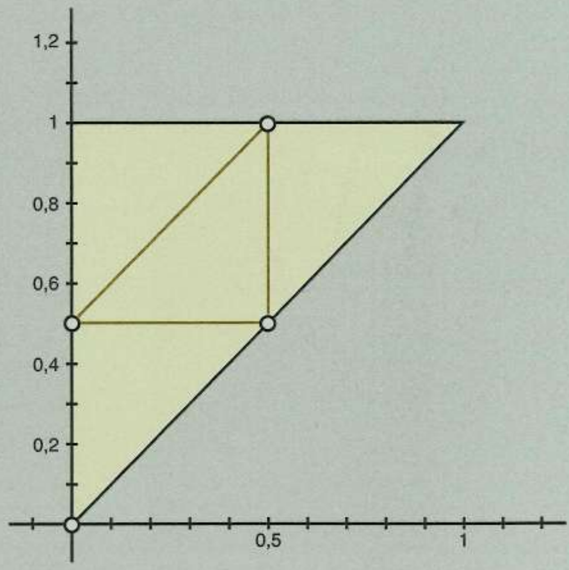


Figura 3.

2) E a palhinha? Cortamo-la em dois pontos escolhidos ao acaso, de modo a ficarmos com 3 pedaços. Qual é a probabilidade de que os três pedaços formem os lados de um triângulo?

De novo, o papel e o lápis e alguns pressupostos. Vamos tomar o comprimento da palhinha como unitário. A seguir, podemos imaginar que temos a palhinha na horizontal e que fazemos os dois cortes da esquerda para a direita. Designamos por x a distância à extremidade esquerda do ponto em que é feito o 1° corte e por y a distância à extremidade esquerda do ponto em que é feito o 2° corte. Deste modo, ficamos com três pedaços de palhinha de comprimentos: x, $y-x$ e $1-y$. Sabemos ainda que x é menor do que y, ou seja, o primeiro corte é feito num ponto à esquerda do segundo corte.

As condições a que devem obedecer as variáveis x e y são as seguintes:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ x < y \end{cases}$$

Se tomarmos o par ordenado (x, y) como um ponto do plano, o conjunto de pontos correspondentes aos possíveis cortes feitos na palhinha fica representado pela região do plano que se vê na figura 2.

Agora, é preciso ver em que condições os três pedaços formam um triângulo e para isso basta que seja verificada a desigualdade triangular:

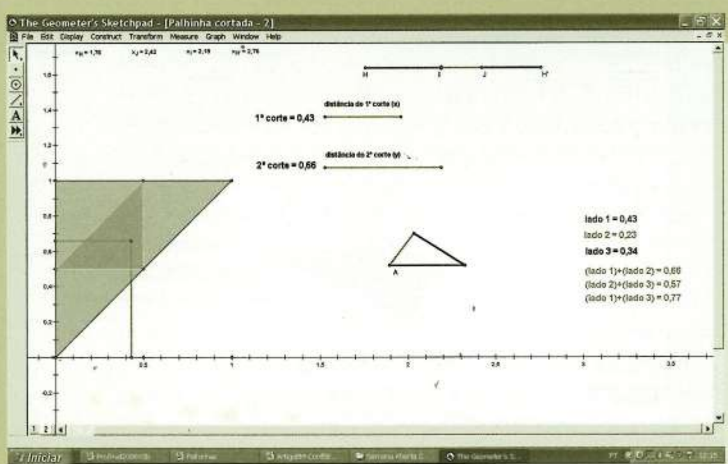
$$x + (y - x) > (1 - y) \Leftrightarrow y > 1 - y \Leftrightarrow y > \frac{1}{2}$$

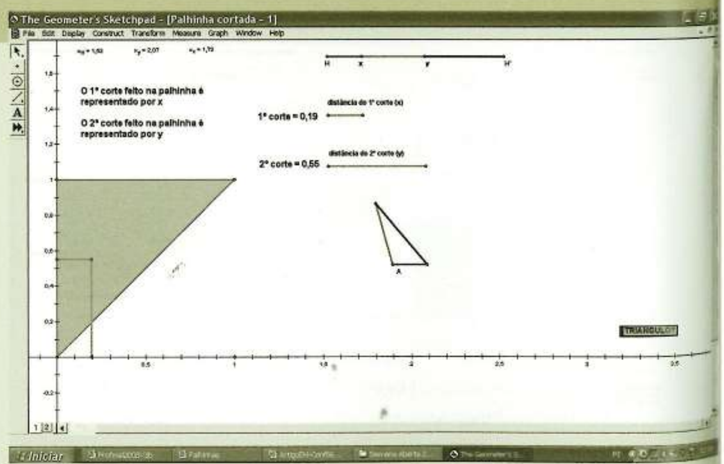
$$x + (1 - y) > (y - x) \Leftrightarrow -2y > -2x - 1 \Leftrightarrow y < x + \frac{1}{2}$$

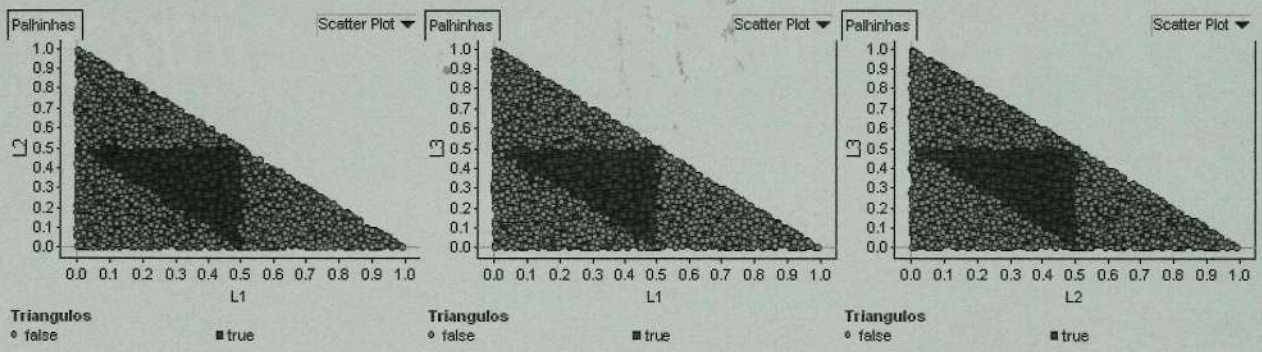
$$(y - x) + (1 - y) > x \Leftrightarrow 1 - x > x \Leftrightarrow$$

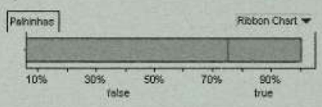
$$\Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Deste modo, encontramos a região do plano que nos dá os casos favoráveis e a probabilidade de se obter um triângulo vem dada pelo quociente entre as duas áreas, que é 1/4 (figura 3).









O problema é divertido. Permite pedir aos alunos que façam a experiência ao vivo; basta uma embalagem de palhinhas e umas tesouras. A tendência, em princípio, é a de que os cortes feitos *aleatoriamente* sejam muito mais *favoráveis* do que deveriam ser. Os alunos são ludibriados por esse exercício. A probabilidade de se obter um triângulo parece grande, talvez 50% ou até mais...

É possível fazer uma simulação no Sketchpad e trabalhar o problema, mesmo sem a formalização matemática que está associada ao facto de termos variáveis contínuas. Podemos arrastar os pontos x e y ao longo do segmento que representa a palhinha, observar as coordenadas do ponto (x, y) moverem-se dentro da região do plano assinalada, quando se forma um triângulo e quando não se consegue construir um triângulo.

E, além disso, pode-se verificar que só há triângulo numa determinada zona dessa região, também ela correspondente a um triângulo menor. E concluir, de forma intuitiva, que a razão entre as duas áreas dá o valor da probabilidade e notar que falha o triângulo quando uma das desigualdades não é respeitada...

Mas esta não é a única via possível pois há outras ferramentas vigorosas que permitem ainda outras formas de representação e de interpretação do problema. O programa Fathom oferece uma outra perspectiva de simulação dos cortes na palhinha.

Também com algumas características dinâmicas interessantes e com uma paleta muito variada de formas de representação, dá-nos a capacidade de simular, num ápice, um número de experiências bastante grande. Num abrir e fechar de olhos, conseguimos partir em pedaços 5000 palhinhas e gerar uma colecção de dados, com base na construção de uma tabela. Para cada palhinha destruída, temos os comprimentos de cada um dos pedaços cortados, L_1, L_2, L_3 (note-se que não é bem o mesmo do que ter as distâncias a que se fazem os cortes na palhinha). Na mesma tabela, é possível fazer um teste em que ficamos a saber se dá para formar um triângulo (True) ou se não dá (False). Também podemos representar os pares de pontos (L_1, L_2), (L_1, L_3), (L_2, L_3) e ainda pedir que estes pontos sejam *catalogados* de acordo com a tabela em "true" e "false". Mais simplesmente, podemos pedir um gráfico em barra com a representação do número de falsos e de verdadeiros. A proporção entre ambos é muito evidente e corrobora a questão da relação entre as áreas.

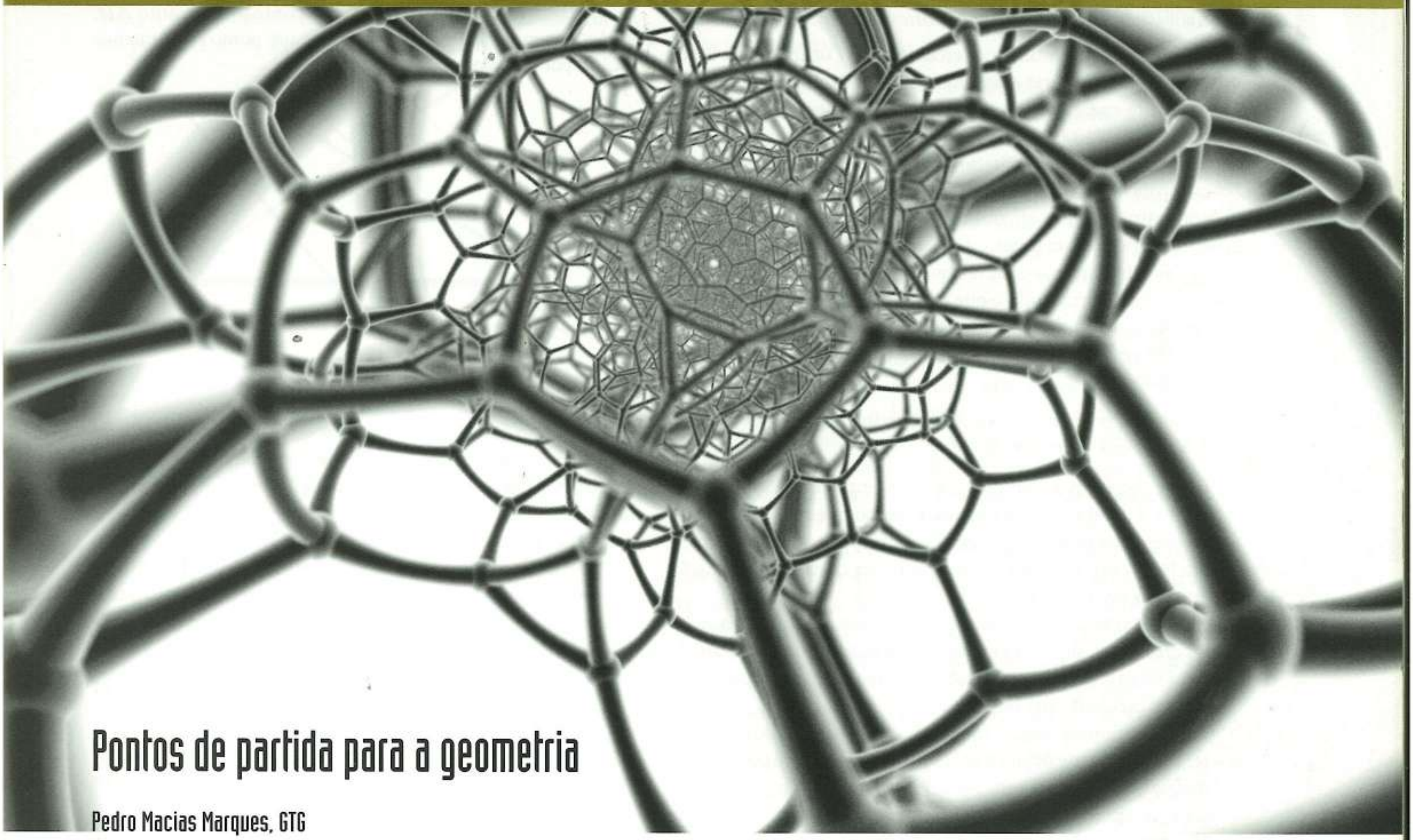
Prosseguindo nos trilhos...

Os dois problemas que achei oportuno trazer para esta parte final não pretendem ser mais do que simples ilustrações, ideias, possibilidades. De certo modo, não se afastam muito da perspectiva com que nasceram muitas outras propostas e sugestões há vinte anos atrás. Contudo, pretendem mostrar que, no presente, é possível integrar na sala de aula de Matemática, com os alunos, problemas e situações realistas, recorrendo a ferramentas tecnológicas diversas e cada vez mais multifacetadas, capazes de suscitar múltiplas formas de representação e interpretação de conceitos e de promover o pensamento matemático.

Os trilhos da Matemática escolar denotam mudanças, e algumas delas profundas, nas duas últimas décadas. Decerto que não nos conduzem a um cenário de contentamento mas também não significam que tudo mudou para pior. Aliás, fazer tábua rasa do muito que se tem realizado e delapidar o mais que pode ser conquistado e melhorado na Matemática escolar parece ter-se tornado uma moda enfadonha.

Persisto em admitir que, entre muitas outras coisas possíveis e necessárias, um copo de sumo e uma palhinha poderão ajudar a enriquecer a experiência dos alunos (e dos professores) na Matemática e na escola.

Susana Carreira
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

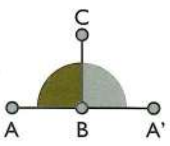


Pontos de partida para a geometria

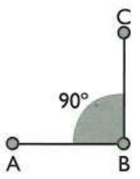
Pedro Macias Marques, GTG

Quando lidamos com conceitos geométricos no estudo de algum assunto (ou quando estamos a quebrar a cabeça com um dos problemas com que o José Paulo Viana nos brinda), podemos, em geral, utilizar abordagens diversas para um mesmo conceito. Por exemplo, reparemos nestas duas formas bem distintas de definir ângulo recto:

Definição 1.
Um ângulo ABC é recto se for congruente com o seu suplementar.



Definição 2.
Um ângulo ABC é recto se a sua amplitude for 90°.



Ambas são definições correctas (e podemos encontrar muitas mais), mas baseiam-se em pontos de partida distintos: a primeira utiliza a noção de congruência e a segunda a de amplitude. Isto significa que podemos utilizar qualquer uma, mas estaremos a trabalhar em ambientes muito diferentes um do outro. O que esta nota pretende é ajudar a desvendar o que está por trás desta diferença.

Distintas axiomáticas

Estamos habituados a olhar para os axiomas que usamos nas diversas áreas da matemática como regras para um jogo. Quando alteramos as regras, obtemos um jogo diferente. Na geometria, um dos exemplos mais conhecido disto é do axioma das paralelas: se o negarmos, obtemos as geometrias não euclidianas: a hiperbólica e as elípticas. (Para estas últimas são necessárias mais alterações, mas quem quiser ver isto em pormenor, tem no livro de Judith Cederberg [1989] um bom sítio para começar.)

O que pode parecer um pouco estranho é a possibilidade de alterarmos os sistemas de axiomas e obtermos a mesma teoria. Mas acontece, e é até bastante comum. Ora, sendo as consequências as mesmas, interessa saber no que diferem, então, os diversos pontos de partida. Uma das principais diferenças está no caminho que nos leva dos axiomas que escolhemos aos resultados que obtemos.

A geometria euclidiana, que nos é a mais familiar, é um óptimo exemplo disto. Podemos abrir um livro de geometria e deparar com uma demonstração de um teorema espantosamente mais simples do que aquela que havíamos visto noutro livro uns dias antes. Poderá ser habilidade do autor da segunda demonstração, mas muitas vezes a diferença está nos axiomas escolhidos numa abordagem e na outra.

A utilização dos números reais

Um ferramenta muito poderosa quando utilizada na axiomática da geometria euclidiana é a existência de uma bijecção entre cada recta e o conjunto dos números reais. Os números reais já têm a sua axiomática própria (também estes admitem várias axiomáticas, é claro). Ou podem mesmo ser construídos a partir dos racionais, no contexto da teoria dos conjuntos, usando a axiomática destes últimos. Enfim, isto daria pano para mangas.

Se admitimos a existência de uma bijecção assim, estamos a transportar tudo o que sabemos sobre os números reais para cada recta do espaço euclidiano.

Olhemos para um resultado simples, que ilustra muito bem isto.

Dados dois pontos distintos A e B, existe um ponto C, na recta AB, que está entre A e B.

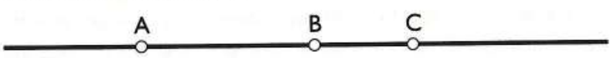
É um daqueles resultados tão evidentes que ninguém se atreve a demonstrar nos ensinos básico e secundário, só nos atrevemos a fazê-lo no superior. Mas, por ser tão simples, é um bom exemplo para observar o poder que tem a utilização dos reais na axiomática.

Observemos como se pode demonstrar este resultado, recorrendo a duas axiomáticas distintas: uma apresentada por Hilbert, onde não são usados os reais, e outra apresentada por Birkhoff, que os utiliza.

Em primeiro lugar, temos de ter presente que *ponto* e *recta* são termos primitivos. Tal como os axiomas são afirmações que se admitem sem demonstração, os termos primitivos são noções que são apresentadas sem uma definição. Quanto à noção de *estar entre*, podemos encontrar abordagens da geometria euclidiana que a tomam como termo primitivo, e outras que a definem a partir de noções anteriores. Vejamos como isto é feito.

No seu livro *Grundlangen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*, 1962, ou na mais recente tradução para português, 2002), David Hilbert não define a noção de *estar entre* e apresenta axiomas que postulam como esta noção se *comporta*, chamados axiomas de ordem, aqui reproduzidos, a partir da tradução referida:

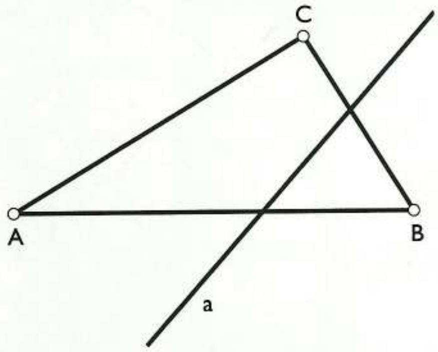
II 1. Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então A, B e C são três pontos distintos duma mesma recta, e B está também entre C e A.



II 2. Para cada dois pontos A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a recta AC tal que C está entre A e B.

II 3. Dados três pontos quaisquer duma recta, não há mais do que um que está entre os outros dois.

II 4. Sejam A, B e C três pontos que não estão em linha recta e a uma recta no plano ABC que não encontra nenhum dos pontos A, B, C; se a recta a passa por um ponto do segmento AB, então, seguramente, passa também por um ponto do segmento AC ou por um ponto do segmento BC.



Neste último axioma, são referidas duas outras noções: a de *passar por* e a de *segmento*. A primeira é também um termo primitivo, mas a de *segmento* é definida como um sistema de dois pontos A e B. Diz-se então que os pontos que estão entre A e B são interiores ao segmento AB.

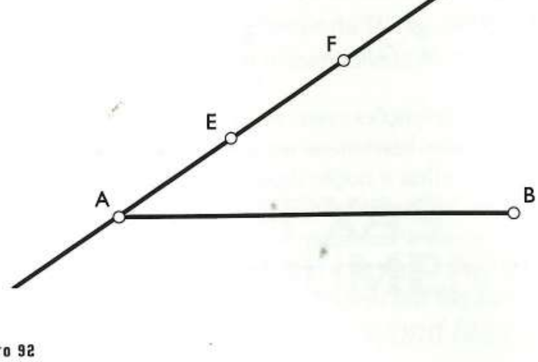
Vejamos como é que, com a axiomática que Hilbert apresenta, podemos demonstrar aquele resultado. Vamos utilizar os axiomas de ordem II 2, II 3 e II 4 e ainda os axiomas de incidência

I 1. Para cada dois pontos A, B, há sempre uma recta a que está associada com cada um dos dois pontos A, B.

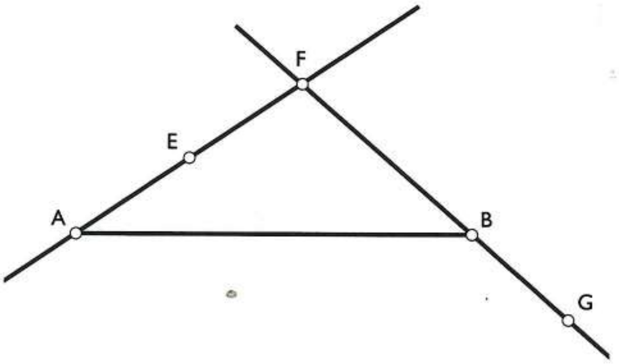
I 3. Sobre uma recta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma recta.

Dados estes pontos de partida, Hilbert demonstra aquele resultado da seguinte forma: utilizando o axioma I 3, toma um ponto E, exterior à recta AB. Embora não o refira na sua demonstração, Hilbert está também a utilizar o axioma I 1 para garantir a existência de uma recta que contenha os pontos A e B. Irá utilizar implicitamente este axioma ao longo da demonstração.

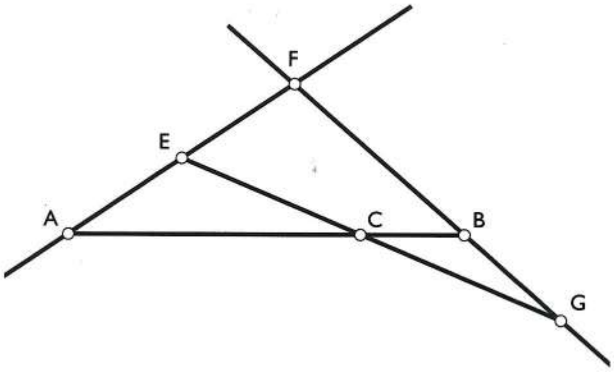
Em seguida, utiliza o axioma II 2 para garantir a existência de um ponto F sobre a recta AE tal que E está entre A e F.



Volta a usar o mesmo axioma para garantir a existência de um ponto G sobre a recta FB tal que B está entre F e G.



Como B está entre F e G, o ponto G não pode estar entre F e B, pelo axioma II 3. Por último, utiliza o axioma II 4, que garante que a recta EG passa pelo segmento AB.

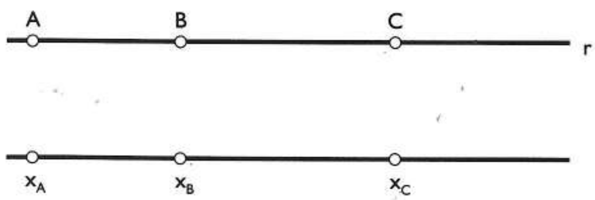


Assim, temos um ponto C, que está entre A e B.

Vejamos agora como, com a axiomática apresentada por George Birkhoff [1932], podemos obter o mesmo resultado. Birkhoff toma como termo primitivo "distância entre dois pontos A, B", designada por $d(A, B)$, dizendo apenas que se trata de um número real não negativo, com a propriedade de, para cada dois pontos A e B, termos $d(A, B) = d(B, A)$. Apresentado este termo primitivo, Birkhoff define a relação de *estar entre*, ao contrário de Hilbert, que a tomou como primitiva. Dados dois pontos distintos A e B, um ponto C está entre A e B se e só se $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$.

Na demonstração daquele resultado, utilizaremos os axiomas:

Postulado I. Os pontos $A, B, \ldots$ de qualquer recta r podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais x de tal forma que $|x_B - x_A| = d(A, B)$, para qualquer pontos A, B.



Postulado II. Dados dois pontos P, Q (com $P \neq Q$), existe uma única recta r que os contém.

Partindo destes axiomas, para mostrarmos aquele resultado, basta usar o postulado II para garantir a existência de uma recta AB e o postulado I para obtermos uma bijecção entre esta recta e o conjunto dos números reais. Como entre cada dois números reais, há sempre outro número real, podemos tomar x entre x_A e x_B e considerar C o ponto de r associado a x. Como $|x_B - x_A| = |x_B - x| + |x - x_A|$, temos $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$, portanto C está entre A e B.

Neste seu artigo de 1932, Birkhoff apresenta apenas quatro axiomas para a geometria euclidiana do plano. A informação transportada dos reais, tanto para a medida das distâncias, como para a dos ângulos, é de tal forma rica, que estes axiomas bastam para mostrar todos os resultados que conhecemos. No caso do resultado que vimos, é até mais que a necessária: bastava, por exemplo, uma bijecção com os racionais.

Estas comparações entre diferentes pontos de partida para a geometria, para além de curiosas, são úteis. Permitem-nos perceber o que é que tem de estar por trás de cada resultado. Isso diz-nos em que condições um resultado é ou não válido. Se soubermos em que axiomas se pode basear um teorema da geometria euclidiana podemos ficar a saber se ainda seria verdadeiro nas não euclidianas, por exemplo. E ficamos a conhecê-lo muito melhor.

Ficamos também mais capazes de escolher a abordagem que queremos utilizar nas nossas aulas. Os alunos (dependendo do grau de ensino) provavelmente não se darão conta destas diferenças, nem é importante que dêem. No entanto, mesmo não trabalhando axiomática com os alunos e não dando definições de cada conceito, cada professor tem de saber qual a abordagem que está a usar, para ser coerente no que faz. Sobre o tratamento das definições nas aulas, assunto deveras delicado, aconselho a leitura da última nota e da que se seguirá a esta (*Sobre as definições (I) e (II)*) e da secção 5 do capítulo VII do livro do Eduardo Veloso (1998).

É opinião do GTG que o ponto de partida apresentado por Birkhoff é o mais adequado, no caso de se querer dar uma ideia do que é um sistema axiomático e de como funcionam as demonstrações, nos ensinos básico e secundário. Desde muito cedo, os alunos estão habituados às noções de distância e de amplitude. Mesmo antes de conhecer o conjunto dos números reais como tal, trabalham com alguns irracionais como o π ou alguns radicais. Deve ser simples, portanto, partir daqueles conceitos para compreender as primeiras definições da geometria.

O desafio que aqui deixamos para o estudo das diferenças entre estas abordagens pode levar a um percurso longo e apaixonante. O GTG terá todo o gosto em discutir estas ideias com professores que o desejem, quer através de correio electrónico, quer pela participação nas nossas reuniões.

Bibliografia

George Birkhoff e Ralph Beatley, *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, 1959.

George Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on a scale and protractor*, Annals of Mathematics, 33: 339–345, 1932.

Judith Cederberg, *A Course in Modern Geometries*, Springer Verlag, 1989.

Eduardo Veloso, *Geometria: temas actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

David Hilbert, *Grundlangen der Geometrie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1962.

David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 2003, tradução revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira, com suplementos por Paul Bernays, Federigo Enriques e Henri Poincaré.

Pedro Macias Marques

Grupo de Trabalho de Geometria da APM

gtg@apm.pt

Materiais para a aula de Matemática

A tarefa *Explorando relações entre fracções, números decimais e percentagens* é uma ligeira adaptação de outra apresentada por Stein, Smith, Henningsen, & Silver, E. (2000). A esta apresentação, segue-se a descrição da sua exploração com duas turmas do 7° ano de escolaridade cujos alunos tinham já algum conhecimento sobre os conceitos de fracção, percentagem e de números representados sob a forma decimal, mas não tinham aprendido algoritmo algum que lhes permitisse responder a questões do tipo "6 que percentagem é de 40?". Ao propor-lhes a tarefa, o professor pretendia que trabalhassem, simultaneamente, com as várias formas de representação de números racionais, que estabelecessem relações entre representações e conceitos com que tinham anteriormente lidado e que as respostas solicitadas se apoiassem em raciocínios centrados nos conceitos e na análise do diagrama e não, fundamentalmente, em procedimentos de cálculo.

A observação da referida descrição ilustra, claramente, que as potencialidades matemáticas da tarefa advêm, antes de mais, de evitar que os alunos alterem a ordem das questões. Com efeito, na turma em que primeiramente foi explorada, o professor para fazer face a dificuldades que surgiram perante a alínea a), sugeriu-lhes que começassem pela alínea c). Sem dificuldade alguma, responderam correctamente 6/40. Em seguida, através de uma divisão, transformaram a fracção num número decimal — alínea b) — e, rapidamente, usando o procedimento de *deslocar* a vírgula duas casas para a direita, representaram este número sob a forma de percentagem.

Na perspectiva do professor, a referida sugestão foi inibidora do desenvolvimento da compreensão conceptual que visava e perverteu as suas intenções pedagógicas. Face a esta constatação, decide que na segunda turma não a apresentaria e que lidaria com eventuais dificuldades dos alunos direccionando a sua atenção para o diagrama e para o que significa sombrear 6 quadrados tendo em conta o número total de quadrados do rectângulo e o modo como estão organizados em linhas e colunas.

Esta decisão fez surgir diferentes estratégias de resolução da alínea a), intimamente relacionadas com as escolhas feitas pelos alunos para sombrear os quadrados. Por exemplo, alguns sombrearam uma coluna e meia. Repararam que como há 10 colunas no rectângulo, cada uma representa 1/10 ou 10% e, por isso, coluna e meia é 15%. Outros sombrearam 6 quadrados justapostos de uma mesma linha ou dispersaram-nos pelo rectângulo. Alguns destes, consideraram que o rectângulo representa 100%, que como há 40 quadrados cada um corresponde a 2,5% e, por isso, 6 quadrados sombreados são $6 \times 2{,}5\%$ ou 15%. Outros, ainda, sombrearam um rectângulo de 3×2, descobriram que no diagrama há 6 destes rectângulos e que sobra uma coluna. Indicaram que o conjunto destes rectângulos representa 90% do diagrama, pois a coluna não ocupada por eles corresponde a 10%, e que, por isso, para obter a percentagem da área sombreada basta dividir 90% por 6. Tal como aconteceu com a primeira questão da tarefa, também a exploração da segunda se apoiou significativamente no diagrama e, além disso, nas estratégias usadas pelos alunos para representarem a área sombreada sob a forma de percentagem.

Os raciocínios referidos são meramente ilustrativos e não esgotam todos os seguidos pelos alunos. Apresentei-os, por um lado, com o propósito de sublinhar que a exploração da tarefa mantendo a ordem das questões permitiu deslocar a ênfase da aula da simples execução de procedimentos de cálculo para a compreensão dos conceitos e representações em jogo e suas relações. Por outro lado, pretendi evidenciar que, no contexto dos actuais currículos portugueses, a experiência matemática que a tarefa pode proporcionar é, perfeitamente, adequada e legítima no 2° ciclo do ensino básico e, além disso, favorável a uma aprendizagem significativa da Matemática pelos alunos deste ciclo.

Referência

Stein, M., Smith, M, Henningsen, M, & Silver, E. (2000) *Implementing standard-based mathematics instruction — A case for professional development*. Reston, VA: NCTM e Teachers College Press.

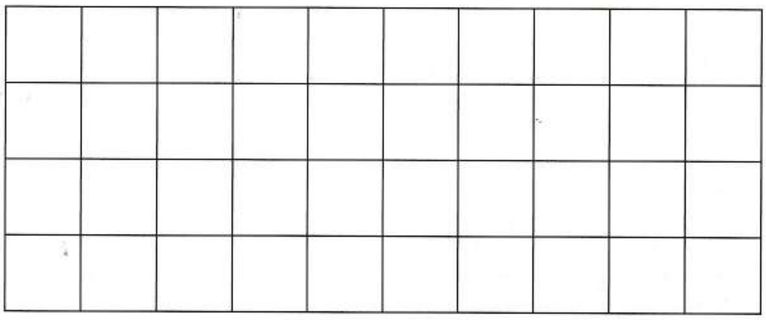
Ana Maria Roque Boavida

ESE de Setúbal

Explorando relações entre fracções, números decimais e percentagens

Sombrear seis dos quadradinhos do rectângulo abaixo desenhado:

Usando o diagrama , explicar como determinar:

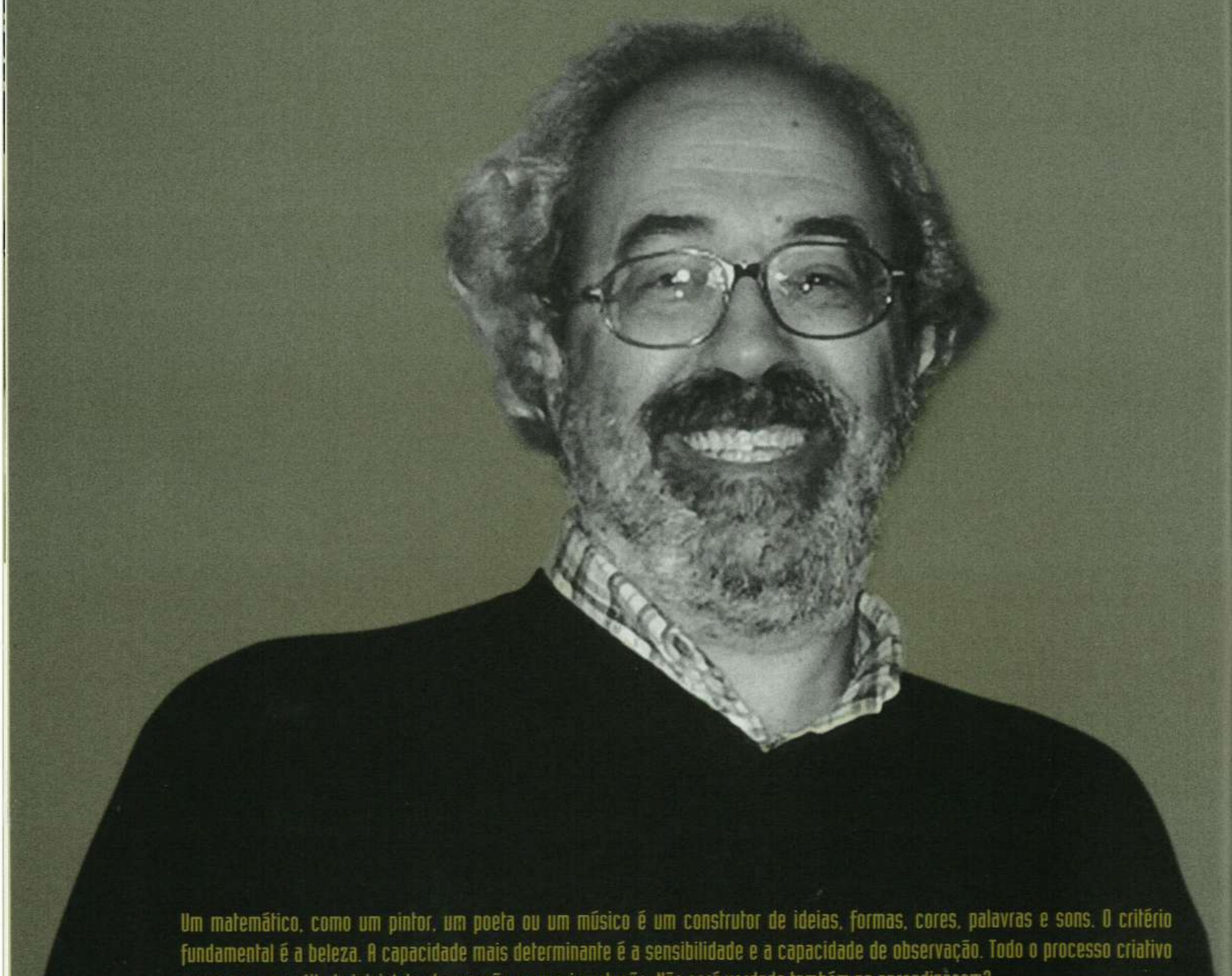


a) a percentagem de área que está sombreada;
b) a representação decimal da área que está sombreada;
c) a representação fraccionária da área que está sombreada.

Fazendo e refazendo matemática

a arte de José Sousa Ramos [1948—2007]

José Manuel Matos



Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação. Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem?

[José Sousa Ramos, 1997, p. 7]

Estávamos nos idos de 1979 ou 1980 quando conheci José Sousa Ramos. Eu tinha acabado o Bacharelato e estava a iniciar os anos que faltavam para completar a Licenciatura em Matemática, ramo de Matemática Aplicada, e ele era Assistente na Faculdade de Ciências de Lisboa responsável por quase metade das disciplinas daquele ramo. Mal sabia eu que durante esses dois anos iria tomar contacto com um modo de estar na matemática e no ensino da matemática diferente de tudo o que então conhecia.

Uma forma de começar a explicar essa experiência é afirmar que, definitivamente, Sousa Ramos não *dava* aulas comuns. Citando Sousa Ramos, "na Matemática o homem busca a forma, a ideia e joga com ela; no estudo da Natureza o homem sente o seu ritmo e procura apropriar-se da sua música, da sua dinâmica, do seu caos" e os temas das suas aulas eram apropriações simultâneas da Matemática e da Natureza. Contrariamente à visão usual da aquisição do saber, ele acreditava que a melhor forma de formar matemáticos profissionais era em ambiente de seminário de investigação, desafiando-nos através de exposições, experimentações e da discussão das ideias centrais da temática das suas disciplinas. E que temática! Sob o guarda-chuva genérico de Física-Matemática, eram discutidos temas actuais e fascinantes, na fronteira da ciência e visceralmente híbridos, interligando a matemática, a física, a estatística e outras áreas. Recordo, por exemplo, as aulas baseadas no livro de V. I. Arnold (1976) explicando como os distintos paradigmas da mecânica podiam ser descritos através de variedades específicas, cada uma com os seus grupos de transformações. Discutiam-se textos originais de autores como Weinberg, Bruter, Thom, Mandelbrot, Smale, etc., enchia-se o quadro com as expressões da teoria unificada do campo, problematizando a possibilidade a utilizar as formas diferenciais criadas por Poincaré para representar todas as forças básicas do universo (as forças fracas, as fortes, o campo electromagnético e a gravitação), tratava-se da Teoria de Yang-Mills, da Teoria de Gauge, das Álgebras de Lie, das geometrias diferenciais que (de)formam o espaço-tempo, dos sistemas ergódigos, o caos, dos sistemas dinâmicos com os seus atractores estranhos, etc., etc. Tratava-se, em suma, de um segundo curso completo em matemática, mas desta feita abordado de um modo inseparável dos seus problemas, das suas incertezas e das suas aplicações.

Os métodos de ensino condiziam com esta multiplicidade de temas. Circulavam *pré-prints* das principais revistas científicas, o tom era informal, o estímulo e a disponibilidade constantes, a afabilidade imensa. Embora eu não fosse um aluno tradicional (já dava aulas na altura) e tivesse preocupações com a qualidade do ensino, foi a abordagem descomplexada e entusiasta de Sousa Ramos que me fez compreender a viabilidade de confiar na capacidade de investigação matemática dos alunos, e a inutilidade de entender a matemática apenas como uma enorme tautologia lógica que se inicia com axiomas e continua com teoremas. Revelou-me o exagero de pretender que o conhecimento matemático está todo ele hierarquizado e que só se pode chegar ao mais avançado após ter percorrido o mais simples em todos os seus detalhes. Mostrou-me finalmente como o ponto de partida para investigar em matemática são os problemas.

E recordo sobretudo o entusiasmo. O seu entusiasmo contagiante sobre todos os tópicos matemáticos e físicos que nos levava a entusiasmar também por essa enorme aventura do conhecimento humano chamada matemática. É talvez esta visão da investigação científica que levou muitos dos seus alunos a permanecerem fascinados pelos temas que lhes foram inspirados no 4° ou 5° ano da licenciatura, e que seguiram mesmo para lá dos respectivos doutoramentos. Suspeito que, mesmo aqueles que, como eu, a vida levou para outros caminhos, ainda hoje recordam estas aulas, estes temas, e a enorme explosão caótica de criatividade científica que elas constituíam.

Encontrei anos mais tarde nas páginas desta revista uma explicitação concisa da sua visão do que é a matemática, o seu ensino e aprendizagem que quase podia ser um poema, e que não resisto a transcrever. À pergunta como aprender matemática? ele responde:

> Aprender, fazer e refazer Matemática.
> Como se aprende? Refazendo a *Matemática* que outros já fizeram.
> É tarefa bem mais fácil que ensinar mas, como tudo, exige *motivação*, *gosto* e *esforço*. O ter ou não capacidade é menos preocupante, pois esta existe na maioria das pessoas.
> O *fazer Matemática* é indispensável para compreender os mecanismos da exploração do desconhecido, do exercício da imaginação e da actividade criativa.
> E o *refazer* treina-nos no exercício lógico do pensamento dedutivo. Na capacidade de provar e de sentir a segurança, a certeza de uma proposição ser verdadeira ou falsa.
> Como se faz Matemática? Como a fazem os matemáticos? *Formulando e resolvendo problemas.*
>
> [Ramos, 1998, p. 22, itálicos no original]

A razão próxima destas recordações é que, a 1 de Janeiro deste ano, faleceu José Sousa Ramos, professor durante muitos anos na Faculdade de Ciências de Lisboa e depois no Instituto Superior Técnico. Nascido na Quarteira em 30 de Agosto de 1948, licenciou-se em Física na Faculdade de Ciências de Lisboa em 1972 e doutorou-se em Matemática em 1990 pela mesma Faculdade.

Depois daqueles dois anos em que fui seu aluno, 1980 a 1982, a vida afastou-nos e optei por me dedicar à educação matemática em detrimento da Teoria de Gauge para a qual Sousa Ramos me tinha encantado. Ele, entretanto, cria em 1983 o primeiro *Laboratório de Matemática Experimental* no Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa. Reencontrámo-nos pouco depois, provavelmente em Outubro de 1984, durante o *Encontro sobre Microcomputadores no Ensino da Matemática*. Em meio do grande entusiasmo suscitado pelo aparecimento dos computadores de baixo custo, o ZX 81 e o ZX Spectrum, Sousa Ramos realiza pequenas sessões, quase *happenings* em volta de uma mesa, mostrando as potencialidades de investigação quase laboratorial do computador para os entusiastas da educação matemática que então se reuniam na Faculdade de Ciências de Lisboa. Recordo, em particular a sua ilustração do comportamento de funções simples quando se lhes aplicava um algoritmo recursivo. Mais do que quaisquer considerações teóricas, o

centro das suas apresentações era dado às potencialidades do computador enquanto instrumento de experimentação, pesquisa e visualização de eventos matemáticos. Como ele vai afirmar mais tarde, "ensinar é criar as condições para aprender, isto é, refazer a descoberta dentro de cada aluno (Ramos, 1998, p. 21) e por isso estas suas intervenções eram menos a ilustração de propriedades conhecidas, e mais um entender a matemática quase como um fenómeno do mundo real do qual importava observar os fenómenos, encantar-se com as regularidades, formular problemas, procurar explicações, "refazê-las" logicamente, e recomeçar de novo o processo matemático criativo. Como ele escreveu premonitório, ainda antes da explosão da Internet, "o computador e a rede Internet, permitem hoje, e de ano para ano sempre mais, trabalhar e comunicar em condições nunca antes imagináveis, o que leva necessariamente a uma renovação do método experimental da matemática. Os modos de ensinar terão também de se renovar" (Ramos, 1997, p. 8).

Esta sua forte convicção sobre as vantagens pedagógicas e científicas da tecnologia emergente apoiada por ilustrações práticas ajudou muitos educadores, em especial de matemática e de física, a compreenderem como os computadores se poderiam transformar em poderosos auxiliares para a aquisição de conhecimentos significativos por parte dos alunos. As suas pequenas intervenções do princípio dos anos 80, normalmente discretas, vão conduzir ao convite para proferir uma das três conferências plenárias do primeiro ProfMat em 1985 e que tinha o título *O uso da inteligência artificial na investigação e no ensino da matemática*. Esta sua grande intervenção foi seguida por muitas outras dedicadas aos professores de Matemática e de Física, interligando normalmente as duas ciências, recorrendo aos computadores e explorando as suas ligações a outras áreas da cultura, como a arte, por exemplo. A sua presença passa a ser habitual nos ProfMats e em encontros regionais da APM, nos encontros da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Sociedade Portuguesa de Física, em iniciativas do Ciência Viva. Percorrendo os títulos das suas contribuições para o Educação e Matemática bem como das suas conferências e sessões em Profmats ou noutras que estão listadas em anexo, revela-se a sua visão experimental, laboratorial da investigação em matemática com um forte recurso ao computador. Revela-se ainda um cientista (não consigo saber se matemático, se físico) que além de fazer ciência, reflecte sobre ela e divulga apaixonadamente o seu trabalho mostrando aos outros a beleza e a construção de ideias, formas, cores, palavras e sons de que ele fala na citação com que começa este artigo.

Até aqui referi o passado. Mas os escritos de Sousa Ramos estão carregados de futuro e é um exemplo dessa sua visão quase-profética e optimista que deixo ao leitor:

> A *Matemática anterior ao nosso século* [XX], aquela que é ensinada nas nossas Escolas Secundárias, deve o seu aparecimento quase exclusivamente ao estudo do mundo físico, e neste o das regularidades, das simetrias e das grandezas invariantes, perante os grupos de transformação que exprimem essas simetrias. A *Matemática deste século* [XX] tem duas componentes importantes: uma, a abstracção, a formalização e extensão da matemática anterior [. . .]. A outra componente, a que introduziu mais novidade, explora, contrariamente aos séculos anteriores, o irregular, o aperiódico, o assimétrico, o complexo — estuda o Caos, os Fractais, os atractores Estranhos, os Quasi-cristais, o DNA, Fenómenos Não-lineares, a caracterização das Complexidades, etc.
> Para o próximo século [XXI], somos levados a esperar a formalização e extensões destas novidades e o desenvolvimento tecnológico correlacionado. Quanto às novidades futuras, essas, não as podemos prever. Se me fosse pedido que adivinhasse, então aí, apostaria na maior das esperanças — compreender a inteligência humana a tal ponto que realizássemos o computador e o *robot* inteligente.
>
> [Ramos, 1998, p. 21, itálicos no original]

Referências

Arnold, V. I. (1976). *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Moscovo: Mir.

Ramos, J. S. (1997). Matemática experimental, Educação e Matemática, 45, 7–10.

Ramos, J. S. (1998). Os objectivos do ensino da Matemática para 2001: ensinar ou aprender? Educação e Matemática 50, 21–24.

Anexo

Algumas intervenções de José Sousa Ramos na área da educação e divulgação científica.

- O uso da inteligência artificial na investigação e ensino da matemática. ProfMat 1985.
- O caos em Física, 1° Encontro Regional de Lisboa sobre o Ensino da Física, 1988.
- Utilização do microcomputador no controlo de experiências em mecânica[2], 5ª Conferência Nacional de Física, 1986.
- Aprender com a máquina a resolver problemas e a descobrir leis em Física[1], 5ª Conferência Nacional de Física, 1986.
- Introdução à computação, curso no Mat — Açores 88.
- Matemática experimental: caos, fractais e autómatos celulares[3], ProfMat 2001.
- A ordem do caos e a geometria dos fractais, ProfMat 1992.
- Entropia: sua evolução e ensino[1], 8ª Conferência Nacional de Física, 1992.
- Ordem do caos, complexidade e inteligência[1], Colóquio *Caos e meta-psicologia*, 1992.
- Máquinas matemáticas e complexidade, Encontro Regional da SPM, 1993.
- Dinâmica caótica e geometria fractal, ProfMat 1994
- Formas fractais, informação, complexidade e caos[1], curso no ProfMat 1995.
- Ensino experimental da matemática, Ciência Viva, 1996.
- Introdução à Matemática Experimental com o recurso à Linguagem mathematica, curso no ProfMat 1996.
- O que a teoria do caos e a geometria fractal tem a dizer sobre a teoria da informação e da complexidade, curso no Encontro Nacional da SPM, 1996.
- Matemática experimental no ensino da matemática, Encontro de professores no Funchal, Universidade da Madeira, 1996.
- Introdução à matemática experimental no âmbito dos novos programas do ensino secundário, dois cursos Prodep, 1996.
- A matemática experimental, Forum Ciência Viva, 1997.
- O que é e o porquê da matemática discreta, ProfMat 1997.
- Matemática experimental, Educação e Matemática, 45, 7–10, 1997.
- Os objectivos do ensino da Matemática para 2001: ensinar ou aprender? Educação e Matemática 50, 21–24, 1998.
- A necessidade da matemática discreta e experimental, Porto Santo, 1998.
- Anatomia e fisiologia do infinito, em Conceitos fundamentais da matemática, Bento de Jesus Caraça, P. Almeida (ed.), Gradiva, 1998.
- Da complexidade da natureza à complexidade da Matemática, ProfMat 1999.
- O lugar da matemática no novo século, 2° Encontro Regional de Prof. de Matemática, Porto Santo, 2000.
- Informação e complexidade: caos, fractais e DNA, 2° Encontro de Ensino da Matemática, Universidade da Madeira, 2001.
- A matemática e a natureza, a forma e o ritmo[1], Educação e Matemática 64, 15–20, 2001.
- Números primos e dinâmica caótica[4], Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, 2002.
- Computer experiments with Newton's method[5], Integrating Technologies into Math. Education, 2003.
- Discrete dynamical system with CAS[5], Computer Algebra in Math. Education, 2003
- Access to discrete dynamical systems through technology5, 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 2003.
- Computer experiment with bifurcation diagram[5], 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 2003.
- Teoria do caos e complexidade — DNA e internet, Encontro Regional de Física, Matemática e Tecnologia, Porto Santo, 2005.
- O contínuo (espaço–tempo relativo) e o discreto (quântico), o caos e a ordem[1], Educação e Matemática 82, 15–18, 2005.
- Muitas outras conferências de matemática discreta e sistemas dinâmicos discretos: caos, fractais e teoria da complexidade em geral, acções de divulgação e formação para alunos e professores do Ensino Secundário nas Escolas de Moura, Viana do Alentejo, Lisboa (Camões, Cidade Universitária, Eça de Queiroz, Algés), Almada, etc..

[1] Com Maria das Mercês Ramos.
[2] Com Maria das Mercês Ramos e António Pedro.
[3] Com Maria José Soares.
[4] Com C. Correia Ramos.
[5] Com Orlando Freitas.

José Manuel Matos, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Conversar com quem sabe ...

A primeira ideia que tive para iniciar a minha colaboração como editor desta secção, foi conversar com os colegas que assumiram essa responsabilidade anteriormente: o Eduardo Veloso e a Branca Silveira.

O tema da conversa, como não poderia deixar de ser, incidiu sobre a evolução das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nos últimos dez anos, tempo de vida da secção, os usos que delas se fazem e os seus impactos nos currículos e nas aprendizagens dos alunos. Como a conversa foi longa e há sempre mais que fica por dizer, optámos por integrar nesta revista apenas a 1ª parte, deixando para uma próxima, as restantes questões.

Participantes	Eduardo Veloso (EV)
	Branca Silveira (BS)
Moderador	José Duarte (JD)

Então, vamos às duas primeiras questões que lhes foram colocadas, procurando identificar o seu sentir e partilhar a sua reflexão, fruto da sua experiência como professores utilizadores de TIC a nível pessoal, mas também com os seus alunos, como formadores em variados cursos e contextos e também como investigadores.

JD A Secção Tecnologias na Educação Matemática surgiu pela primeira vez na Revista Nº 42, publicada em Março de 1997, sob a responsabilidade do nosso colega Eduardo Veloso. Aí ele antevia um movimento de retorno do uso das tecnologias no ensino da Matemática, após uma longa 'travessia no deserto' decorrente da morte do Projecto MINERVA.

1ª Pergunta Dez anos depois, que mudanças se operaram? Ao nível das tecnologias? Ao nível das ideias para a sua integração no currículo? Ao nível da sua real integração nas práticas dos professores?

EV Ao nível das tecnologias, não tenho qualquer dúvida, por experiência própria, que a evolução foi enorme, como é já habitual em cada década. Comunicações mais rápidas, banda cada vez mais larga, *wireless* mais simples, computadores mais rápidos e tudo mais barato!!!. Mais lentamente, deve esperar-se que esses progressos atinjam os equipamentos escolares. Uma evolução tecnológica pouco referida, parece-me, é o aumento vertiginoso da acessibilidade e uso da fotografia digital, que poderia ser uma componente forte de muitos projectos nas escolas — e também na Matemática, está claro. Enfim, tudo mais fácil e acessível, muito maiores possibilidades de tornar a vida na escola mais interessante e variada, mais intensa, onde o estudo, o trabalho e o esforço pessoais se intensificassem também, mas fossem melhor aceites porque desenvolvidos num ambiente menos cinzento e rotineiro.

Ideias para utilização das tecnologias também têm continuado a ser propostas de várias formas (nos ProfMat's, revistas, cursos, etc, etc.) Para apenas citar um exemplo ligado ao ambiente computacional que mais utilizo, foi publicada pela APM há quatro anos a tradução de um livro maravilhoso: *Geometria Dinâmica*, uma colectânea de artigos organizada por James King e Doris Schattschneider. Estão aí ideias para usar o *Sketchpad* ou o *Cabri* durante vários anos, no ensino básico, secundário e superior. Mas sem querer ser muito pessimista, estou convicto que os 1000 exemplares publicados estão longe de se terem esgotado... e que poucas ou nenhumas dessas ideias tiveram concretizações nas aulas do ensino básico e secundário (e ainda mais seguramente, do superior).

Quanto à integração das tecnologias nas práticas dos professores, e para continuar com o exemplo dos programas de computador para geometria dinâmica, os dados de um inquérito realizado pelo Grupo de Trabalho de Geometria durante o ProfMat2001 revelaram que é diminuta. Dos 228 professores que responderam (e os participantes no ProfMat eram certamente três ou quatro vezes mais), cerca de 75% já tinham frequentado acções de formação sobre este tipo de programas. No entanto, apenas 43% tinha utilizado algum tipo de software nas suas aulas de geometria no ano lectivo anterior. Presumo que este exemplo, de fraca integração dos computadores nas aulas de Matemática, mesmo num tipo de programas com uma enorme oferta, tanto em cursos de iniciação como em cursos mais avançados, na formação contínua e na formação em encontros de professores, revela uma situação que possivelmente está em melhoria lenta, mas que ainda é extremamente desajustada das necessidades reais de um ensino actual da Matemática.

BS De facto, depois da morte do Projecto MINERVA, assistiu-se a um período de pouca actividade nas escolas, no que respeita ao uso dos computadores. As Escolas, como que se sentiram abandonadas, com materiais desactualizados e principalmente sem apoio. Três anos depois surge o Programa

Nónio, praticamente com os mesmos objectivos do Projecto MINERVA mas com uma filosofia totalmente diferente. Foi uma oportunidade para as Escolas que concorreram e tiveram projectos aprovados, de actualizarem o parque informático, adquirirem *software* e terem um novo impulso na utilização das TIC. Até porque tinham um projecto a desenvolver e teriam que prestar contas no final dos três anos de duração do mesmo. Alguns hábitos se ganharam nesta altura que em algumas escolas felizmente se enraízaram. Mas nem tudo correu bem depois. Na maior parte dos casos os computadores estavam fixos em salas que passaram a ser ocupadas com as disciplinas de informática. Os professores começaram a queixar-se de não terem horas para levar os alunos a essas salas e em alguns casos as salas estarem mesmo *fechadas* para outras disciplinas que não as da área da informática, principalmente no que se refere às salas TIC, que foram entretanto criadas com tudo perfeitamente actualizado, mas *inacessíveis* à maioria dos professores.

Quando falo de professores, estou a referir-me à generalidade e não só aos de Matemática, pois nos últimos anos o meu trabalho não tem sido dirigido a professores de Matemática, mas sim a professores das várias áreas disciplinares.

Na Matemática, a tecnologia mais utilizada é, sem dúvida, a calculadora, que tem vindo a ser melhorada ao longo dos anos. A sua portabilidade e custo não se compara com o computador, mas o *boom* a que se assistiu nas Escolas está, sem dúvida, relacionado com a obrigatoriedade imposta pelos programas. Creio que ninguém tem dúvidas quanto a isso.

Agora voltamos a um período de grande movimentação nas escolas de regresso à tecnologia (volto a falar em computadores) em ambiente de aula, com a iniciativa *Escolas, Professores e Computadores Portáteis*.

Esta ideia de as escolas terem que elaborar um projecto para obter equipamento, continua a deixar-me bastante dividida. Sempre pensei que todas as Escolas têm o direito de estar bem equipadas, de possuírem todo o material necessário ao seu bom funcionamento, sem terem que estar a pedir isto ou aquilo. As coisas deviam estar na Escola disponíveis para serem utilizadas. Mas a realidade é outra e todos sabemos de casos onde há equipamento que não é utilizado, ou não é rentabilizado como poderia e deveria ser. A solução de recorrer a projectos para equipar as escolas tem o mérito de o equipamento vir para as Escolas com uma finalidade muito concreta, o que de algum modo as responsabiliza pelo que vão fazer com ele.

JD A nossa colega Branca Silveira durante os cerca de 4 anos em que esteve responsável por esta secção, manteve uma posição privilegiada para discutir estas questões: professora de Matemática, utilizadora das TIC e formadora de professores, nomeadamente no âmbito da utilização das TIC em contextos curriculares, enquanto membro da equipa do Centro de Competência Nónio da Escola Superior de Biotecnologia da Universidade Católica do Porto.

2ª Pergunta Podemos dizer que as TIC aparecem com alguma regularidade nas nossas aulas de Matemática ou encontramos apenas algumas *ilhas de experiência*? Onde aparecem, o que se faz, fundamentalmente? Surgem em projectos continuados ou em iniciativas dispersas? E se não aparecem muito, que factores para isso contribuem? A falta de computadores? A falta de formação dos professores? A falta de orientações precisas sobre como introduzir a tecnologia no currículo?

BS Como já disse não tenho estado particularmente ligada aos professores de Matemática, mas sim aos professores de um modo geral. A pergunta que colocas só pode ter uma resposta. Há de tudo! Conhecemos escolas onde há uma utilização continuada da tecnologia, onde a tecnologia veio para ficar e onde está perfeitamente integrada. Surge, não como uma coisa nova para fazer uma experiência, mas sim como algo adquirido que se utiliza como e quando conveniente. Não é o caso geral tanto quanto me apercebo. Acho que a maior parte da utilização continua a ser em iniciativas dispersas. Não me parece que seja por falta de computadores; neste momento grande parte das escolas, principalmente as secundárias têm um bom número. O que me parece é que a sua distribuição é, muitas vezes, desadequada. A concentração em salas específicas dificulta tudo. Dois ou três computadores em cada sala, parecer-me-ia muito mais conveniente. É uma ideia que defendo há muitos anos pois só assim o computador pode ser visto como uma coisa normal, que está ali à mão para quando se tem necessidade de recorrer a ele. Não necessita daquela previsão a longo prazo, de ter que se reservar a sala para aquela hora específica. A turma está a trabalhar um tema na sala de aula normal e surge uma ideia que poderia ser explorada nesse momento com recurso à Internet, ou uma dúvida que ficaria rapidamente esclarecida com uma simulação simples num programa de Geometria, por exemplo. O computador na sala rapidamente resolvia o problema. De outro modo, é preciso ver quando a sala está disponível, adiar a solução, organizar o trabalho de outro modo, para aproveitar os tempos em que a sala está disponível.

Repara que não excluo a existência de salas onde toda a turma possa trabalhar nos computadores ao mesmo tempo, o que lamento é que só existam essas salas. Os portáteis vêm resolver este problema? Acho que não, mas podem dar uma ajuda.

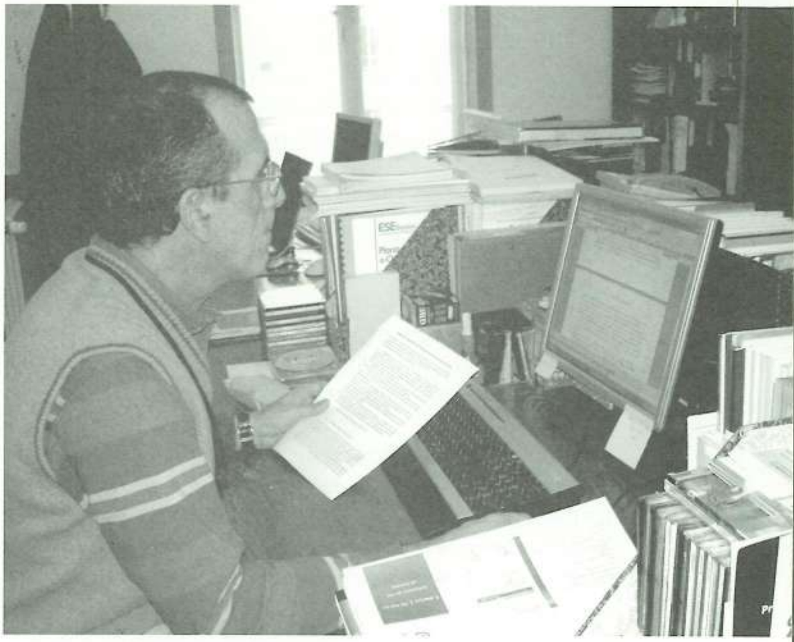
Quanto à formação dos professores, vai havendo formação, pelo menos até agora havia. Há um facto que os Centros de Formação referem em todas as reuniões que temos: ao fazerem o plano anual fazem uma consulta às escolas para organizarem a formação de acordo com as necessidades sentidas. As acções de didácticas específicas são sempre referidas pelos professores como uma prioridade. Sai o plano e estas acções são as primeiras a cair por falta de inscrições! Claro que no Centro de Formação da APM isto não se verifica porque é um Centro com características muito particulares. Eu só faço formação integrada no Centro da APM e mais particularmente dentro do grupo de trabalho T3. Aqui as coisas passam-se de modo diferente. Fazemos a formação quando os colegas se juntam e nos contactam para irmos às escolas fazer a formação que eles necessitam. Como não estamos dependentes do financiamento normal, podemos realizar as acções em qualquer altura sem estarmos sujeitos aos prazos do PRODEP.

Falta de orientações concretas... talvez nos programas essas orientações não sejam muito precisas, mas desde que os professores saibam que este ou aquele *software* existe e o que se pode fazer com ele, que podem encontrar na Internet quase tudo sobre qualquer coisa, que saibam que têm alguém a quem pedir apoio em caso de dúvida e principalmente que tenham um pouco de criatividade, as grandes orientações não me parecem necessárias.

EV Não tenho tido contacto com o que se passa concretamente nas escolas para poder ser muito objectivo nas respostas às primeiras subperguntas desta segunda questão. Da minha experiência na formação contínua de professores, deduzo que a utilização das tecnologias no ensino de matemática, excepto no que diz respeito às calculadoras gráficas, é muito fraca e feita de modo não sistemático.

Em relação às causas desta situação, a minha convicção básica é que a principal causa não é nem (i) a falta de computadores, nem (ii) a falta de formação dos professores, nem (iii) a falta de orientações precisas sobre como introduzir a tecnologia no currículo. Gostava, apesar disso, de referir, em relação a estes três pontos, que:

(i) Faltam computadores, mas sobretudo o que se passa é que estão mal distribuídos. Embora possam, e talvez ainda devam, existir algumas *salas de computadores*, no caso da matemática e de outras disciplinas o que devia acontecer era existirem alguns computadores (numa proporção de, por exemplo, 1 para cada 4 ou 5 alunos) em cada sala de aula ou de trabalho. Isso levaria a considerar *naturais* e não *excepcio-*



nais as aulas com computadores... Não era *à sexta-feira, de quinze em quinze dias*, que se ia para a sala dos computadores (se estivesse livre!), mas todos os dias que os computadores estavam presentes e disponíveis, para o que fosse preciso! Além disso, deviam existir salas com computadores disponíveis para trabalho individual ou em pequeno grupo, salas sempre abertas e não ocupadas com aulas. Só assim poderemos tentar compensar o facto de muitos alunos não terem computador em casa.

(ii) Nunca conheci ninguém que estivesse à vontade a trabalhar com computadores e que tivesse conseguido isso num curso de formação em computadores. Os professores que querem trabalhar com computadores aprendem por si. Os que não estão interessados fazem vários cursos de iniciação e ficam sempre analfabetos. O que faz imensa falta é que os futuros professores de Matemática aprendam matemática nas Universidades e nas ESE's usando computadores, mas isso ainda não acontece, a não ser excepcionalmente. Dezasseis anos ocupados a ver os seus professores escrevendo com giz num quadro preto e a resolver exercícios-tipo em cadernos quadriculados, dificilmente levam alguém a pensar que os computadores servem para alguma coisa numa aula de matemática.

(iii) Um dos maiores erros que foram cometidos nas reformas do início dos anos 90 foi o facto de se terem elaborado os novos programas sem ter em qualquer consideração o Projecto MINERVA. Os currículos dessa época ignoraram completamente a riquíssima experiência daquele projecto, que foi progressivamente caindo no esquecimento. No ajustamento do secundário, uns anos depois, houve alguma preocupação com a utilização das tecnologias, mas não foi suficiente para inverter a situação criada anteriormente.

Por mim, estou convencido que uma das causas principais da fraca utilização dos computadores e dos programas dedicados ao ensino da Matemática tem a ver com o tipo dominante de instrumentos — testes e exames — com que se pretende avaliar as aprendizagens dos alunos. No caso das calculadoras gráficas, por exemplo, embora a acção de um grupo de professores da APM em defesa da utilização dessas calculadoras tenha sido muito importante, a situação só ficou resolvida e massificada, do ponto de vista da sua utilização na sala de aula, quando as calculadoras passaram de proibidas a obrigatórias nos exames. Ora, no que diz respeito aos computadores e tomando como exemplo, uma vez mais, a geometria dinâmica, o tipo privilegiado da sua utilização diz respeito à resolução de problemas e às investigações em geometria. Em qualquer dos casos, a característica educativa principal e comum destas duas actividades é habituar o aluno a pensar demoradamente numa situação que lhe é proposta, a inventar caminhos de resolução não conhecidos a priori, a ter até prazer de modificar os dados, generalizar as questões, demonstrar ou refutar as suas conjecturas, etc. etc. Ou seja, a fazer verdadeiro trabalho matemático. Mas qualquer professor no seu perfeito juízo sabe que os hábitos que foram descritos no período anterior são a receita ideal para um fracasso no teste ou no exame! Aí o que é necessário é não perder tempo a pensar, conhecer receitas para todo o tipo de situações que apareçam, é numa palavra "ter as respostas na ponta da língua", como dizia a propaganda recente de uma colecção de livros para a preparação dos alunos portugueses. Enquanto existir esta contradição tão grande entre a qualidade do trabalho educativo que se pode fazer com computadores no ensino da Matemática e os objectivos pretendidos para ter êxito nas avaliações habituais, os computadores não serão nunca uma primeira prioridade.

Considerações finais

Das palavras dos nossos entrevistados, parecem decorrer três grandes ideias:

- Existe um maior acesso às tecnologias por professores e alunos e há cada vez mais (e mais diversificados) recursos informáticos de qualidade para a aprendizagem da Matemática;
- O acesso às TIC, nomeadamente aos computadores, deve ser fácil e estes não têm que estar necessariamente em laboratórios. A existência de algumas soluções de poucos computadores, num ambiente natural de sala de aula, pode favorecer a sua utilização e integração no currículo.

- A avaliação à base de testes e exames, provas de tempo limitado, condiciona fortemente o recurso regular a ferramentas computacionais como o *Geometer's Sketchpad*, o *Cabri* e outras, vocacionadas para um trabalho mais exploratório, investigativo, reflexivo e de duração mais prolongada.

Uma dúvida . . .

O Eduardo reconhece que os programas de Matemática *passaram ao lado* da rica experiência de integração curricular das TIC vivida, ainda que em escala reduzida, no Projecto MINERVA. Mas ele, como a Branca, acham que não serão precisas muitas orientações curriculares nos programas, desde que os professores conheçam o *software*, estudem e aprendam por si (a verdadeira formação) e tenham apoio quando precisam. Afinal, faz ou não falta integrar nas orientações metodológicas dos programas, indicações mais precisas sobre o uso das TIC (que TIC e de que forma?), reflexo dos projectos inovadores nacionais com foi o MINERVA ou resultantes da investigação internacional e nacional que se tem feito?

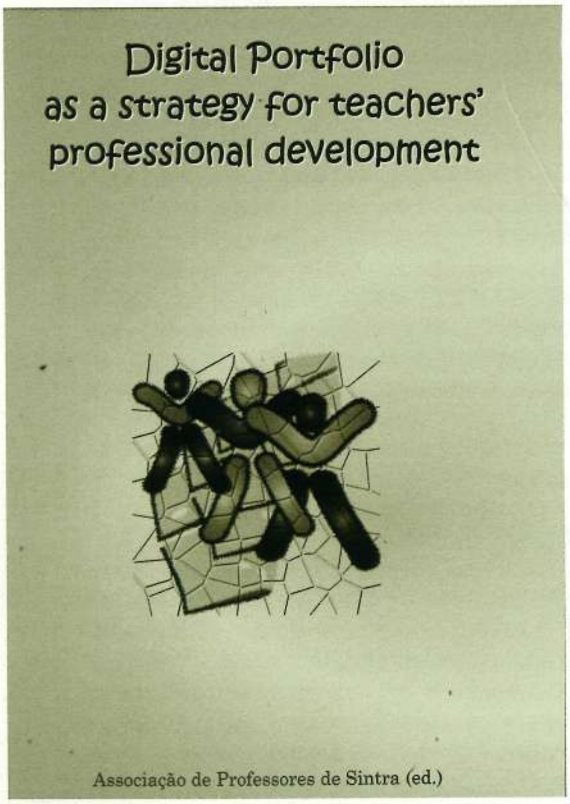
E os nossos leitores, o que acham?

Encontrarão estas ideias algum eco nos nossos leitores? Partilharão algumas destas preocupações ou, pelo contrário, podem testemunhar experiências bem diferentes? Têm exemplos de boas práticas que possam relatar em defesa das ideias do Eduardo e da Branca sobre as possibilidades de trabalho com uma turma normal, como soluções de 4 ou 5 computadores?

Ficamos à espera... enquanto aguardamos pela(s) próxima(s) Revista(s)

Portefolio digital e desenvolvimento profissional

Digital portfolio as a strategy for teachers' professional development



Este é o título de uma publicação recentemente editada (2006) pela Associação de Professores de Sintra, no âmbito do trabalho realizado no primeiro ano de um projecto europeu (SOCRATES): o Projecto DigiFolio.

O trabalho envolveu oito instituições de cinco países europeus, entre os quais Portugal e o seu objectivo foi estabelecer um quadro teórico comum sobre o papel dos portefolios digitais nos sistemas educativos dos países participantes.

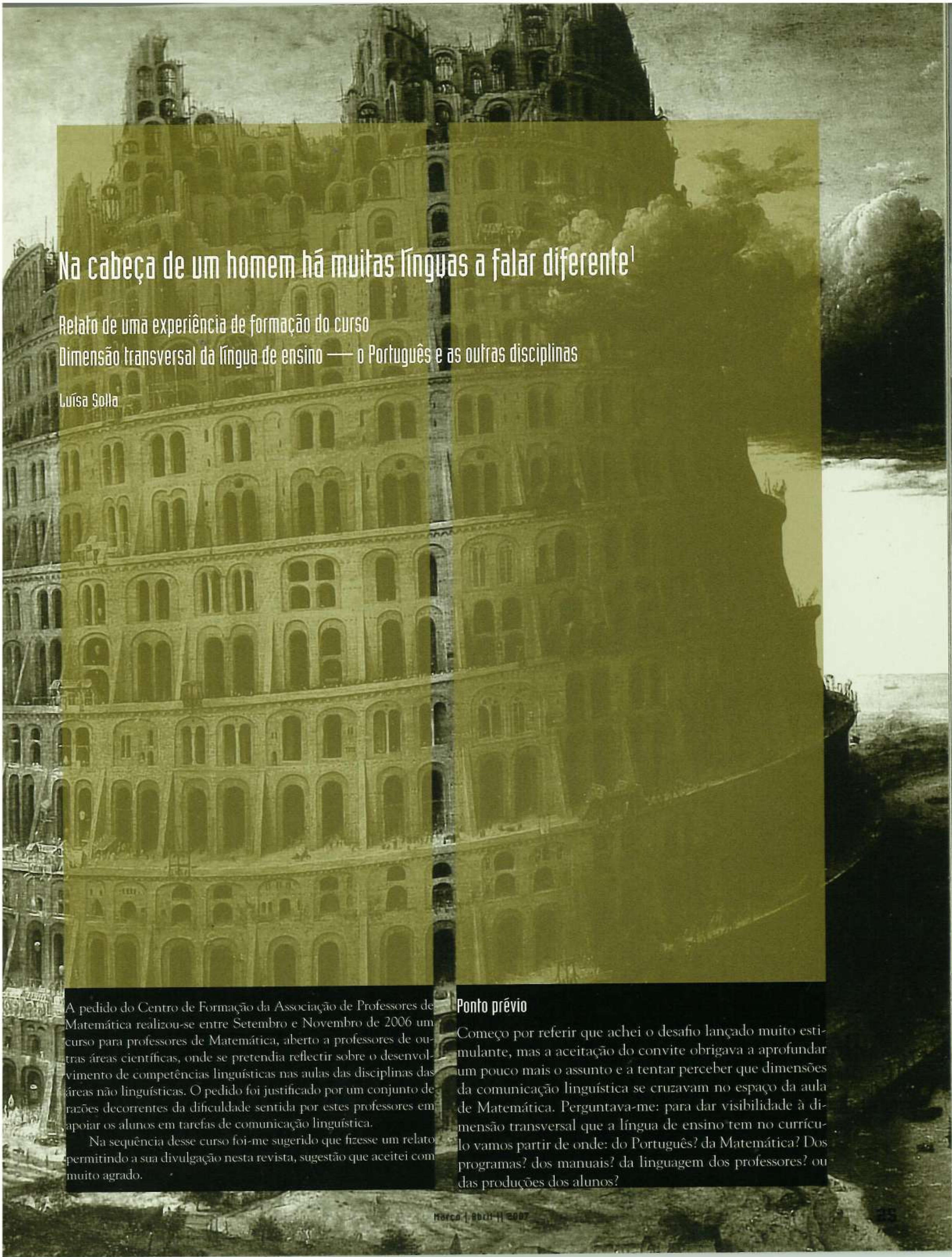
No Capítulo 1, dá-nos conta de uma síntese comparativa dos relatórios nacionais dos cinco países, em torno de quatro aspectos: o acesso às TIC, as medidas políticas nesta área, o uso das TIC na educação e, em particular, o uso dos portefolios digitais para fins educativos.

No Capítulo 2, inclui um artigo sobre diferentes estratégias de ensino e aprendizagem e sua relação com o uso dos portefolios digitais.

O Capítulo 3, integra um artigo sobre a avaliação da aprendizagem a partir de diferentes abordagens e o capítulo 4 é dedicado aos portefolios digitais e ao desenvolvimento profissional dos professores.

O Capítulo 5, refere o potencial das TIC identificado a partir dos relatórios nacionais e, finalmente, no último capítulo, num artigo de três professores da Universidade de Lisboa, reflecte-se sobre os desenvolvimentos recentes das tecnologias como ajuda ao desenvolvimento do pensamento e da reflexão.

Os professores de Matemática, em particular aqueles que se encontram envolvidos em oficinas de formação em regime de *blended-learning*, com suporte em plataformas a distância, como o *moodle*, encontram aqui algumas leituras de apoio a uma reflexão sobre o uso que está a ser feito dos portefolios digitais.



Na cabeça de um homem há muitas línguas a falar diferente[1]

Relato de uma experiência de formação do curso Dimensão transversal da língua de ensino — o Português e as outras disciplinas

Luísa Solla

A pedido do Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática realizou-se entre Setembro e Novembro de 2006 um curso para professores de Matemática, aberto a professores de outras áreas científicas, onde se pretendia reflectir sobre o desenvolvimento de competências linguísticas nas aulas das disciplinas das áreas não linguísticas. O pedido foi justificado por um conjunto de razões decorrentes da dificuldade sentida por estes professores em apoiar os alunos em tarefas de comunicação linguística.

Na sequência desse curso foi-me sugerido que fizesse um relato permitindo a sua divulgação nesta revista, sugestão que aceitei com muito agrado.

Ponto prévio

Começo por referir que achei o desafio lançado muito estimulante, mas a aceitação do convite obrigava a aprofundar um pouco mais o assunto e a tentar perceber que dimensões da comunicação linguística se cruzavam no espaço da aula de Matemática. Perguntava-me: para dar visibilidade à dimensão transversal que a língua de ensino tem no currículo vamos partir de onde: do Português? da Matemática? Dos programas? dos manuais? da linguagem dos professores? ou das produções dos alunos?

Era preciso começar por algum lado. Nesse meu trabalho exploratório, falei com alguns professores de Matemática e encontrei boas *entradas*, que passo a apresentar.

Para começar, verifiquei que *os programas de Matemática exigem aos alunos o uso da competência comunicativa oral e escrita para comunicar resultados ou para ler textos de alguma complexidade*. O Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, por exemplo, apresenta como uma das finalidades da disciplina, "Desenvolver a capacidade de interpretar textos escritos em linguagem matemática, a capacidade de comunicar e o espírito crítico" e como Objectivos gerais e competências a desenvolver, " Desenvolver a capacidade de comunicar e transmitir a informação organizada: comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e rigor (...) Apresentar os textos de forma clara e organizada." Estava pois confirmada a legitimidade da questão inicial: os textos programáticos mostram que a comunicação linguística tem espaço na aula de Matemática. Assim sendo, têm razão os professores de Matemática quando reconhecem ter um papel a desempenhar na gestão deste processo.

Analisei, em seguida e de forma superficial, alguns manuais e não só de Matemática. Confirmei que a linguagem neles utilizada, em especial a linguagem das instruções para a realização de tarefas, nem sempre é clara ou adequada. Procedi de igual forma para alguns testes ou tarefas de sala de aula. Também aqui o terreno se mostrava duvidoso no que respeita à clareza da linguagem de instrução. Parecia, de facto, que havia legitimidade para dar razão às dificuldades na comunicação linguística de que os professores se queixavam.

Mas encontrei outras razões que justificam e fundamentam a formação que foi realizada e que passo a enunciar.

A diversidade linguística e cultural na escola portuguesa tem contribuído para uma constituição linguística das turmas mais heterogénea e esta nova situação de plurilinguismo, já muito comum hoje, tem levado a que o Português conviva, de forma mais ou menos explícita, com diferentes línguas e culturas. Esta realidade trouxe a todos os professores, incluindo aos professores das outras disciplinas, *maiores dificuldades em fazer ler e compreender textos de relativa complexidade e em fazer mobilizar, oralmente ou por escrito, conhecimentos que exigem competências linguísticas mais elaboradas*.

Não retirando aos professores de Português a maior intervenção e responsabilidade no ensino da língua e na gestão da diversidade linguística, é minha convicção que os professores das outras disciplinas também podem contribuir positivamente para a melhoria das aprendizagens em Português.

Uma outra justificação pode ser encontrada na leitura e análise das propostas do documento *Reflexão dos docentes do 3° ciclo sobre os resultados do Exame de Matemática de 2005*. Deste texto, retiro a parte que se refere às "Propostas exequíveis" em relação a Sala de aula — situações de aprendizagem, onde pode ler-se: "insistir em comunicação, tarefas em que os enunciados envolvam interpretação de textos/gráficos, sínteses orais dos conteúdos, sínteses escritas dos conteúdos/raciocínios escritos". Em relação ao item Currículo do ensino Básico, identifica-se a "Necessidade do reforço da Língua Portuguesa" e no que diz respeito à Escola e aos professores, aponta-se para a importância do "trabalho conjunto entre professores de níveis de ensino/ciclos/outras disciplinas".

Finalmente, mas quanto a mim não menos importante, encontrei aqui, nesta ideia do trabalho conjunto, a possibilidade de explorar a articulação entre as várias disciplinas em especial entre o Português e a Matemática — ponto chave para o desenvolvimento de trabalho no âmbito do conselho de turma, ancorado no Projecto Curricular de Turma. Lembrei-me com alguma satisfação do conceito de competência colectiva que Le Boterf (2005) apresenta para o meio empresarial mas ainda assim perfeitamente transferível para o meio escolar. Dizer que "A economia do saber exige partilha do saber. O saber cria-se partilhando" (86) parece-me adequado à escola, à turma e à evidência do papel que o conselho de turma, sob a condução do professor de Português, pode desempenhar na resolução dos problemas trazidos pela exigência de uma boa comunicação linguística em todas as disciplinas. Parecem-me muito inspiradoras para o trabalho do conselho de turma ideias como "a gestão transversal torna-se essencial na produção do valor" (Le Boterf, 2005: 84), ou "Cada um tem a necessidade do contributo do outro. A resposta a um problema torna-se uma resposta de rede; a sua pertinência dependerá da qualidade da cooperação entre os actores, da sua troca de saberes" (idem: 84) e ainda, "É em relação a uma *assinatura colectiva* que poderá situar e diferenciar a sua própria *assinatura individual*" (86).

Defendo, portanto, que a consciência destes pressupostos exigirá que todos os professores identifiquem com clareza o seu espaço de intervenção perante as três dimensões da língua de ensino, a saber, 1) objecto de estudo, 2) meio de comunicação interpessoal e 3) meio de aprendizagens curriculares; e que o conhecimento destas três dimensões, por parte de toda a comunidade educativa, mostrará que todos os professores são, no âmbito das suas disciplinas e de forma mais ou menos consciente, professores de Português nas dimensões 2) e 3). Falta assumir que a sua acção seja desenvolvida no seio do conselho de turma e enquadrada, sempre que possível, pelo professor de Português, a quem cabe, em pleno, o desenvolvimento da dimensão 1).

A observação do esquema 1 poderá mostrar com mais clareza o que acabei de enunciar.

Foi este o ponto de partida que apresentei no curso que passo, em seguida, a descrever.

O curso Dimensão transversal da língua de ensino — o Português e as outras disciplinas

1. Inscreveram-se neste curso 28 professores, 2 de Física/Química, 1 de Biologia e os restantes de Matemática. Quanto aos níveis de ensino, 20 eram do Ensino Secundário e 8 do 3° ciclo do Ensino Básico. No que diz respeito à frequência, 21 formandos completaram o curso realizando os trabalhos propostos para avaliação final.

2. Para este curso foram definidos os seguintes objectivos

- Identificar as questões chave da relação da língua de ensino com as outras disciplinas.
- Conhecer e mobilizar a dimensão transversal da língua de ensino.
- Potenciar o papel da língua de ensino no favorecimento de atitudes de diálogo, de aprendizagem e de compreensão do mundo.
- Contribuir para a flexibilização e actualização das práticas dos professores e das professoras, procurando uma melhor adequação aos contextos de heterogeneidade em que trabalham.
- Promover o conhecimento e a partilha de práticas de ensino.

Complementarmente, considerou-se ainda como desejável e útil estimular o desenvolvimento do trabalho colaborativo entre professores e a elaboração de dispositivos pedagógicos que permitissem apoiar, do ponto de vista da comunicação linguística, as actividades dos alunos.

3. Os conteúdos da acção foram organizados de modo a analisar e discutir, de forma articulada e coerente, quatro questões: (i) Espaço e funções do professor de Português e dos professores das outras disciplinas; (ii) Conceitos base da língua e do ensino da língua; (iii) Identificação e discussão dos problemas da comunicação linguística que surgem nas aulas das outras disciplinas; (iv) Elaboração de instrumentos de apoio à comunicação linguística em situação de ensino e aprendizagem.

Foram tratados quatro grandes temas e respectivos conteúdos, cujo desenvolvimento foi feito ao ritmo que um trabalho deste tipo proporciona. Não houve a preocupação de esgotar o programa, mas apenas de evidenciar e tratar o que da língua e do seu ensino poderia ser importante para os professores que não são professores de Português.

A língua de ensino e as outras disciplinas: espaço e funções

A língua, o aluno e o contexto.
A língua como objecto de estudo, meio de comunicação e de acesso ao saber curricular.
Competências e funções do professor de Português e dos professores das outras disciplinas em relação à língua de ensino: levantamento de questões e contributos para a elaboração de um quadro de referência.

Língua e Escola

A diversidade linguística nas escolas portuguesas e o Currículo Nacional.
Transversalidade da língua de ensino: onde e como se mobiliza.
Princípios orientadores para o ensino da Língua Portuguesa no Ensino Básico.

Língua, Comunicação e linguagens

Ouvir/Falar; Ler/Escrever: competências de recepção, de produção e de interacção.

Esquema 1. A Língua Portuguesa no Currículo.

Competência comunicativa e respectivas componentes.
O Português das outras disciplinas — uma outra língua? Uma outra gramática?

Práticas linguísticas nas outras disciplinas

Oralidade: actividades de interesse interdisciplinar curricular.
Leitura e escrita: actividades de interesse interdisciplinar curricular.
Dispositivos pedagógicos de apoio linguístico ao trabalho dos alunos: metodologias e instrumentos.

4. Quanto à metodologia de trabalho, pretendeu-se que as sessões tivessem uma componente de informação teórica e outra de intervenção e trabalho prático. Em ambos os casos, a discussão esteve sempre presente. Foram contempladas a análise e reflexão de questões decorrentes das temáticas em estudo, fundamentadas na leitura e discussão de documentos do âmbito da relação *língua de ensino e outras disciplinas* e, sempre que os formandos e a formadora assim o entenderam, apoiadas nas práticas de sala de aula.

Foi estimulado o trabalho colaborativo não só nas sessões, como nas respectivas escolas, em especial com os professores de Português. Os formandos foram incentivados a fazer recolhas de materiais ou *episódios* de sala de aula que se integrassem nesta temática, de forma a permitir uma reflexão sustentada pelas leituras que foram propostas e a abrir perspectivas para os trabalhos de avaliação do curso.

Disponibilizei e estimulei a construção, adaptação e partilha de instrumentos de apoio às actividades de cariz linguístico dos alunos (dispositivos pedagógicos) que permitissem melhorar as suas competências comunicativas, orais e escritas, nas aulas de todas as disciplinas.

Proposta de tópicos para o trabalho

Título/Tema
Introdução (Onde se identifica/ apresenta o que se pretende fazer. Justificam-se as opções)
Caracterização do contexto (Breve caracterização do contexto de intervenção)
Objectivos (Resultados esperados)
Intervenientes (Identificação dos autores/executores e destinatários)
Desenvolvimento da proposta (Operacionalização : procedimentos, fases, calendarização...; metodologia utilizada e justificação)
Conclusões/Reflexões (Resultados obtidos. Explicação.) Uma parte colectiva e outra individual
Referências bibliográficas
Anexos (Materiais utilizados: adaptados, elaborados, etc...)

Além dos materiais trabalhados nas sessões e de livros de interesse mais imediato, foi disponibilizada uma Bibliografia para leitura complementar ou de aprofundamento.

As primeiras sessões decorreram em Setembro e as restantes em Outubro e Novembro.

A meio percurso foi criado um espaço onde todos os grupos falaram dos seus projectos de trabalho para a avaliação final.

5. Em relação aos trabalhos desenvolvidos pelos formandos, foi consensualmente decidido, no início do curso, que os formandos realizariam, em grupo ou individualmente, um trabalho que reflectisse as aprendizagens proporcionadas pelo curso, e que desse também respostas úteis ao quotidiano da sala de aula e às motivações inicias que os tinham levado a inscrever-se no curso. Sendo o formato e os conteúdos da responsabilidade dos seus autores, ainda assim foi sugerida uma *Proposta de tópicos para o trabalho* de modo a ajudar que eventualmente precisasse de ideias e também dar alguma unidade ao processo de avaliação.

Ficou também combinado que seria apresentado um projecto global que permitiria fazer uma avaliação prévia, de modo a salvaguardar os parâmetros previamente definidos.

No último dia do curso todos os grupos apresentaram e discutiram os seus trabalhos, alguns na sua versão definitiva e outros em versões a finalizar.

Passo agora apresentar e a comentar globalmente os trabalhos realizados pelos formandos.

Todos os trabalhos se centraram na temática do curso e consideraram, nas propostas apresentadas, a importância da comunicação linguística em contexto de ensino e aprendizagem, realçando a utilidade dos guiões de ajuda aos alunos. Foram produzidos guiões com diferentes objectivos: para pesquisa na Internet e organização da informação pesquisada; para análise de anúncios publicitários; para realização de pequenas actividades de investigação e de resolução de problemas; para a redacção de relatórios e de textos para explicar raciocínios; para ajudar os alunos a tirar apontamentos e ainda para organização do caderno diário; para a apresentação de Notas de leitura e Tópicos orientadores da comunicação oral.

Alguns grupos juntaram os materiais produzidos pelos alunos exemplificando as actividades realizadas e evidenciando a utilidade prática da aplicação dos guiões.

Apreciei muito ter verificado que todos os guiões mostravam como a mensagem tinha sido bem recebida e integrada: ajudavam os alunos na concretização da tarefa, proporcionavam de forma progressiva autonomia na sua realização e contribuíam para o sucesso da aprendizagem.

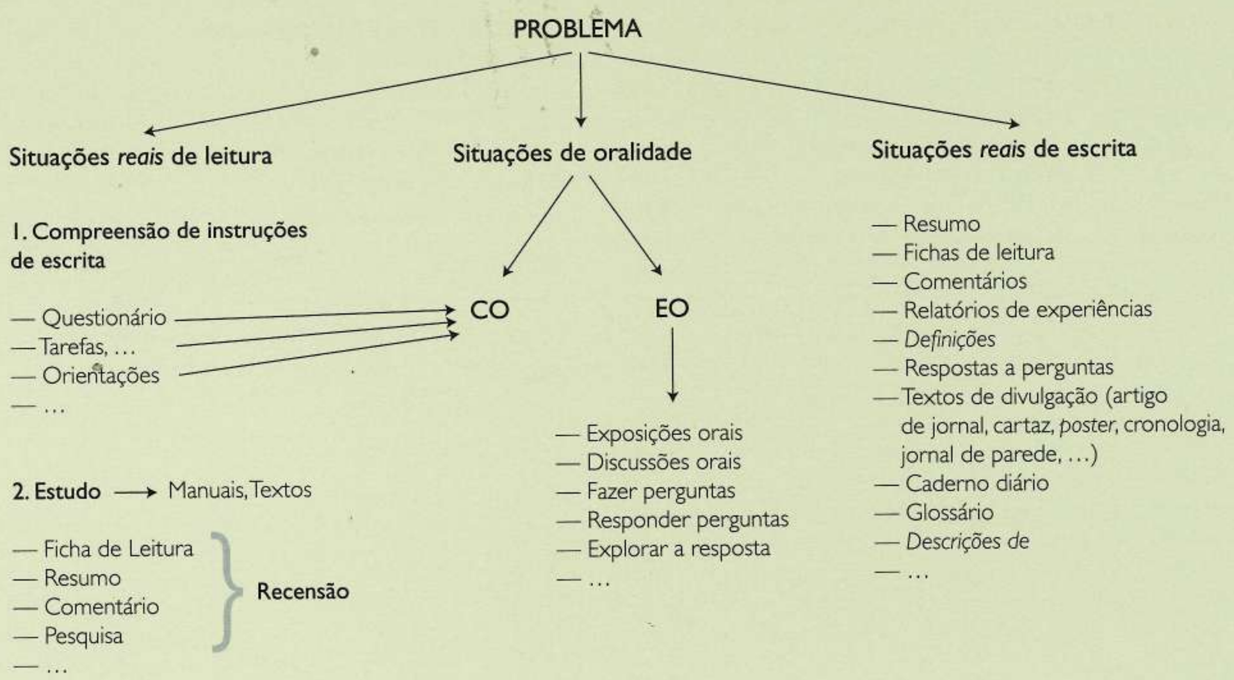
Dois trabalhos reflectiram projectos em desenvolvimento nas escolas a que os formandos pertenciam, mostrando que o curso permitiu enriquecer, do ponto de vista teórico, algumas dimensões ou segmentos de percurso dos projectos. Considerei muito adequada essa contribuição e apreciei a capacidade que tiveram em usar e partilhar com os colegas das respectivas escolas a reflexão que o curso proporcionou.

Um trabalho também interessante mas de um outro cariz foi a aplicação de um questionário a um grupo de vinte e dois professores de diferentes disciplinas do ensino básico e secundário, procurando saber o que pensavam sobre as questões da comunicação linguística na sala de aula. Os resultados sublinharam algumas das análises que foram feitas ao longo do curso e permitam ao formando partilhar com outros colegas a experiência de formação do curso. Acredito que esta seja também uma forma de espalhar a semente.

A diversidade das produções evidenciou a diversidade dos percursos profissionais dos formandos e confirmou o que ao longo do curso se tinha revelado como preocupação de todos: vontade de alterar práticas que se mostravam pouco produtivas, desejo de experimentar novos caminhos, nomeadamente utilizando guiões de apoio linguístico aos trabalhos dos alunos e reflexão individual e colectiva, mostrando que este curso tinha aberto algumas portas que uma vez transpostas talvez trouxessem aos alunos mais sucesso e aos professores melhores resultados.

Reflexões finais

Em rigor penso poder afirmar que os formandos estavam inicialmente motivados e por isso conseguiram ultrapassar a fase inicial centrada nos contributos teóricos da língua, área distante do seu quotidiano de professores de Matemática, Biologia ou Física, mas que seria fundamental para a apropriação dos conceitos de base. Não resisto a recuperar de



Esquema 2. **A dimensão transversal da língua de ensino — o Português e as outras disciplinas**
Síntese da sessão de 28/10/06 (Registo feito pela colega Margarida Graça)

uma reflexão de uma formanda, um extracto de um poema de António Gedeão ilustrativo do sentir inicial de todos: "Dobrados sobre os textos/deslizam devagar o dedo indicador/nas brancas entrelinhas./ A ruga entre os sobrolhos denuncia/ o concentrado esforço. (...)/Pára na dúvida, e o rosto se confrange/no sempre nebuloso entendimento."[2]

Ao longo das sessões o interesse foi crescendo, evidenciado pela progressiva intervenção nas discussões, pelo levantamento de novas questões e pela apresentação cada vez mais adequada dos problemas que a comunicação linguística coloca nas suas aulas.

A *Síntese da Avaliação do Curso* e que consta do Relatório final, mostrou uma avaliação global muito positiva e revelou um espírito de trabalho colaborativo que o curso potenciou, mostrando ser possível abrir e cultivar espaços de partilha, reflexão e diálogo entre linguagens que habitualmente não se frequentam de forma consciente ou assumida: o Português e a Matemática. Mostra ainda que os formandos fizeram *descobertas* que era importante não deixar perder no quotidiano ruidoso e pesado das escolas. Foram dadas muitas sugestões para outros cursos que, por falta de espaço, não poderei tratar aqui.

Farei ainda mais alguns comentários que poderão ser úteis, designadamente em relação à continuidade que pode ser dada ao estudo desta temática em acções futuras.

1. Apesar das opiniões manifestarem, consensualmente, satisfação com a utilidade e interesse do trabalho desenvolvido e com as aprendizagens realizadas, o que é sempre gratificante, devo alertar que a dimensão desta temática é mais ampla do que o número de horas deste curso permitiu tratar. Por exemplo, o trabalho sobre a *linguagem dos professores*, os seus escritos (testes, orientações, instruções ...) e o seu discurso oral na sala de aula, foi apenas aflorado porque exige um tempo mais dilatado para recolha, organização e tratamento. Quando pretendemos, sem sucesso, que os alunos leiam textos aparentemente simples ou curtos e tentamos perceber por que não os conseguem ler, damos conta que nos textos se encontram muitos implícitos, falsas evidências e conhecimentos que pensamos estarem adquiridos, mas não estão, e que deveriam até resultar da aprendizagem (Astolfi, 1987). O professor subestima muitas vezes esta situação que é frequente quando se utilizam os chamados *textos autênticos*, como por exemplo, os textos de imprensa.

2. O incentivo à procura do *diálogo com todos os colegas nas escolas e em especial com os que leccionam Português* é fundamental neste âmbito. Convém sublinhar que isto exige não só tempo como também, vontade, persistência e alguma estratégia. Mas também só a experiência bem sucedida nos mostra como este caminho é o mais produtivo, solidário e gratificante. Volto a Le Boterf (2005: 86), "As prescrições nunca podem saber tudo e as situações de trabalho definem-se cada vez mais como acontecimentos aos quais é necessário fazer face. É, pois, importante, para um profissional saber o que os colegas fariam no seu lugar, em tais circunstâncias, perante tal dificuldade. Sem esta possibilidade de referência colectiva, o profissional é remetido para a sua solidão e riscos que aquela acarreta em relação ao saber agir".

3. A afirmação frequente dos professores das áreas científicas (e não só destes!) que *os alunos "não sabem ler, nem escrever"* é uma falsa evidência, como sabemos, mas não vale

a pena contestá-la. O que é preciso é ajudar os professores a serem capazes de identificar as *marcas* desta falsa evidência e a conhecer e situar as dificuldades de leitura e de escrita que habitualmente são subestimadas.

Logo, nas primeiras sessões, analisámos essa situação e o modo como ela se costuma apresentar, ou seja, tentámos identificar e caracterizar as *queixas* dos professores. Reconheço que a explanação de alguns conceitos base em línguas e ensino de línguas foi, neste âmbito, necessária e útil. O resultado, uma síntese oral e colectiva (esquema 2), registada no quadro (à boa maneira antiga!) e, mais tarde, gentilmente escrita em computador por uma das formandas e distribuída a todos foi reveladora de apropriações várias.

Esta síntese permitiu identificar, com muita clareza, o âmbito do trabalho que há a fazer e abriu o caminho para o que os professores podem realizar: conhecer, adaptar ou elaborar *dispositivos pedagógicos* que incluem estratégias de trabalho diversificadas e apoiadas em instrumentos de ajuda às actividades com componente linguística, quer sejam orais ou escritas, de recepção ou de produção. Creio poder afirmar que esta aprendizagem foi muito produtiva para os formandos.

4. A análise dos *escritos dos alunos* é também um campo a explorar futuramente, pois dará maior visibilidade ao espaço de intersecção entre o trabalho do professor de Português e o dos professores das outras disciplinas, ao mesmo tempo que permitirá dinamizar o papel da língua da escola no desenvolvimento de competências transversais várias.

5. Fundamental é também a identificação e estudo das *linguagens dentro da língua*. E não me refiro só ao vocabulário específico de cada disciplina. Raquel Delgado Martins e Hugo Gil Ferreira (2006) alertam-nos para o próprio estilo dos textos que também pode ser específico.

6. Em conclusão, e em relação ao trabalho futuro, parece ter sido consensual que o curso abriu uma porta e várias janelas mas que o caminho à frente delas apenas começou a ser vislumbrado e percorrido, desta feita com um grupo de professores de Matemática, Física e Biologia que perceberam por que são também professores de Português e aceitaram desenvolver mais essa competência. Assim se justifica o título deste relato.

Quero agradecer-lhes por me terem proporcionado um tempo muito interessante de discussão e reflexão e por terem partilhado comigo saberes que não são os meus. Como desejei que tivessem sido meus professores de Matemática!

Termino com um poema cheio de significado linguístico e matemático. Espero que gostem e leiam o resto do livro para se deliciarem com a *desmatemática* do poeta.

Notas

1 Mutimati Barnabé João, *As Linguagens. Eu, o Povo*. Edições Frelimo, Maputo, 1975.

2 António Gedeão, *Poema dos Textos*, Antologia organizada pelo autor. Edições Sá da Costa, 1998, 4ª ed.

3 Manuel António Pina, *Pequeno Livro de desmatemática*. Assírio e Alvim, Lisboa, 2001.

Os conselhos do matemático prudente[3]

Soma

Não te fies em balelas
nem somes mais do que a conta.
Às vezes muitas parcelas
dão soma de pouca monta...

Subtracção

Cuidado com a subtracção!
Se subtrais soma alheia
podes ir ter à cadeia!
Tenta outra operação...

Multiplicação

Multiplica, multiplica,
que é o que faz a gente rica!
Peixes por pães é que não:
é muita multicomplicação!

Divisão

A divisão é a arte
de ficar com a melhor parte.
Se duvidas não dividas!
Ou divide só as dívidas!

Referências

Astolfi, Jean-Pierre (1987). Lire dans un manuel: pas si facile pour les élèves! *Cahiers Pédagogiques* n°254–255.

Delgado-Martins, Raquel, Ferreira, Hugo Gil (2006). *Português Corrente. Estilos do Português no Ensino Secundário*. Lisboa: Caminho. Série Linguística.

Duvert, R., Zakhartchouk, J.-M. (1999). *52 outils pour un travail commun au collège*. Français-Mathématiques. Amiens : Centre Régional de Documentation Pédagogique de l'Académie de Amiens.

Gouveia, Adelina, Solla, Luísa (2004). *Português Língua do País de Acolhimento*. Lisboa: ACIME — Alto Comissariado para a Imigração e Minorias Étnicas.

Le Boterf, Guy (2005). *Construir as competências individuais e colectivas. Resposta a 80 questões*. Porto: Edições ASA.

Milian, Marta (2006). As Actividades de escrita nas áreas curriculares não –linguísticas, In, CAMPS, Anna, *Propostas didáticas para aprender a escrever*. Porto Alegre: Artmed.

Moreira, Darlinda Educação Matemática, Língua Materna e Língua de Escolarização: três linguagens em interacção, In, Gouveia, A., Solla, L.(2004). *Português Língua do País de Acolhimento*. Lisboa: ACIME — Alto Comissariado para a Imigração e Minorias Étnicas.

Luísa Solla
Escola Superior de Educação de Setúbal

"Asad-Abu-Carib, rei do Iémen, ao repousar, certa vez, na larga varanda do seu palácio, sonhou que encontrara sete jovens que caminhavam por uma estrada. Em certo momento, vencidas pela fadiga e pela sede, as jovens pararam sob o sol causticante do deserto. Surgiu, nesse momento, uma formosa princesa que se aproximou das peregrinas, trazendo-lhes um grande cântaro cheio de água pura e fresca. A bondosa princesa saciou a sede que torturava as jovens, e estas, reanimadas, puderam reiniciar a jornada interrompida. Ao despertar, impressionado com esse inexplicável sonho, determinou Asad-Abu-Carib que viesse à sua presença um astrólogo famoso, chamado Sanib, e consultou-o sobre a significação daquela cena a que ele — rei poderoso e justo — assistira no mundo das Visões e Fantasias. Disse Sanib, o astrólogo: 'Senhor! As sete jovens que caminhavam pela estrada eram as artes divinas e as ciências humanas: a Pintura, a Música, a Escultura, a Arquitectura, a Retórica, a Dialéctica e a Filosofia. A princesa prestativa que as socorreu simboliza a grande prodigiosa Matemática.' Sem o auxílio da Matemática — prosseguiu o sábio — as artes não podem progredir e todas ciências perecem."

— Malba Tahan, 2001, *O Homem que sabia contar*, Lisboa: Editorial Presença p. 63

Depois do TEMPO a ARTE que o imortaliza

A passagem do livro *O homem que sabia contar* de Malba Tahan parece-nos um mote interessante para pensar as ligações da Matemática à Arte. Na verdade é a reflexão em torno destas ligações que ao longo deste ano vos proporemos a partir de uma secção intitulada Matemática e Arte cujo editor será o colega Luís Reis.

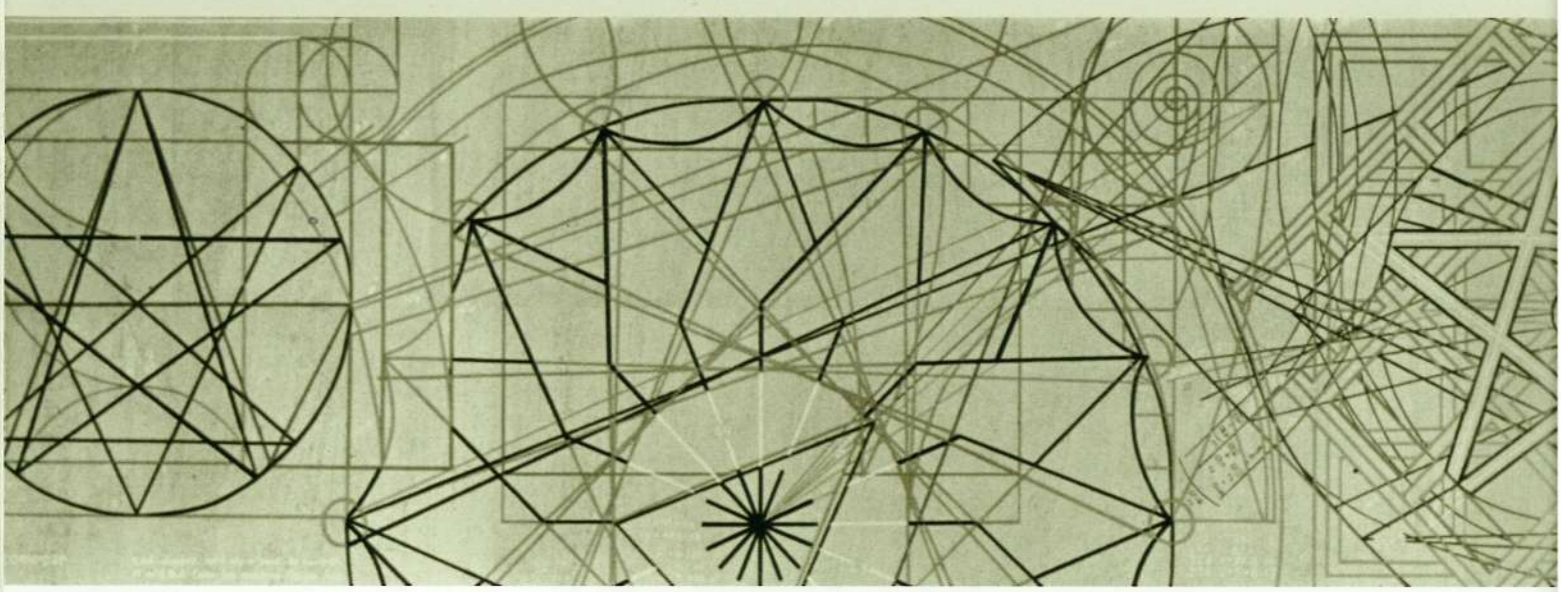
A criação desta secção na *Educação e Matemática* enquadra-se no Ano temático escolhido para este ano pela APM, a que a revista se associa.

Contamos com a colaboração de todos os leitores que encorajamos a enviar artigos, relatos de experiências, pontos de vista, …

A redacção

Começar por Almada Negreiros ou Ode à Geometria

Luís Reis



O cânone

O painel *Começar* (figura 1) é a derradeira grande obra de Almada Negreiros (São Tomé, 1893 – Lisboa,1970). Está no átrio da sede da Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa. É uma obra extensa, gravada em calcário polido, com 12,87m de comprimento e 2,31 m de largura. Almada projectou a obra em 1968 e acompanhou de perto a sua execução no ano seguinte, por uma equipa de operários especializados. A obra foi inaugurada em Outubro de 1969.

À primeira vista trata-se de uma sucessão de traçados geométricos, com profusão vertiginosa de linhas e arcos (secundados por texto, números e relações matemáticas mais discretas) que valem pelo equilíbrio estético e pelo jogo de cores.

Em 12 de Fevereiro de 1969, Jorge de Sena proferiu uma conferência sobre *Almada Negreiros Poeta*. Almada, presente, pediu a palavra no fim, tendo a certa altura dito: "Eu acabei agora de fazer um trabalho de vários meses, oito meses consecutivos, trabalho obcecante, a ter de fazer. Em pormenor, basta dizer que o médico todos os dias me dizia: Você está-se a matar! e eu respondia-lhe: Mas se não fizer isto, morro! [...] Vou simplesmente dizer o título da obra que eu concluí, que é uma obra síntese de tudo o que eu fiz na minha vida: é a Geometria. O título é *Começar*..."[1]

Este painel aperfeiçoa e aprofunda a mensagem já transmitida na tapeçaria O *Número*, executada por Almada para o Tribunal de Contas de Lisboa (1958). É uma viagem às raízes da cultura, na procura do cânone, o conjunto de regras que atravessa tempos e civilizações.

Declarou Almada numa entrevista ao Diário de Notícias (16.06.1960):

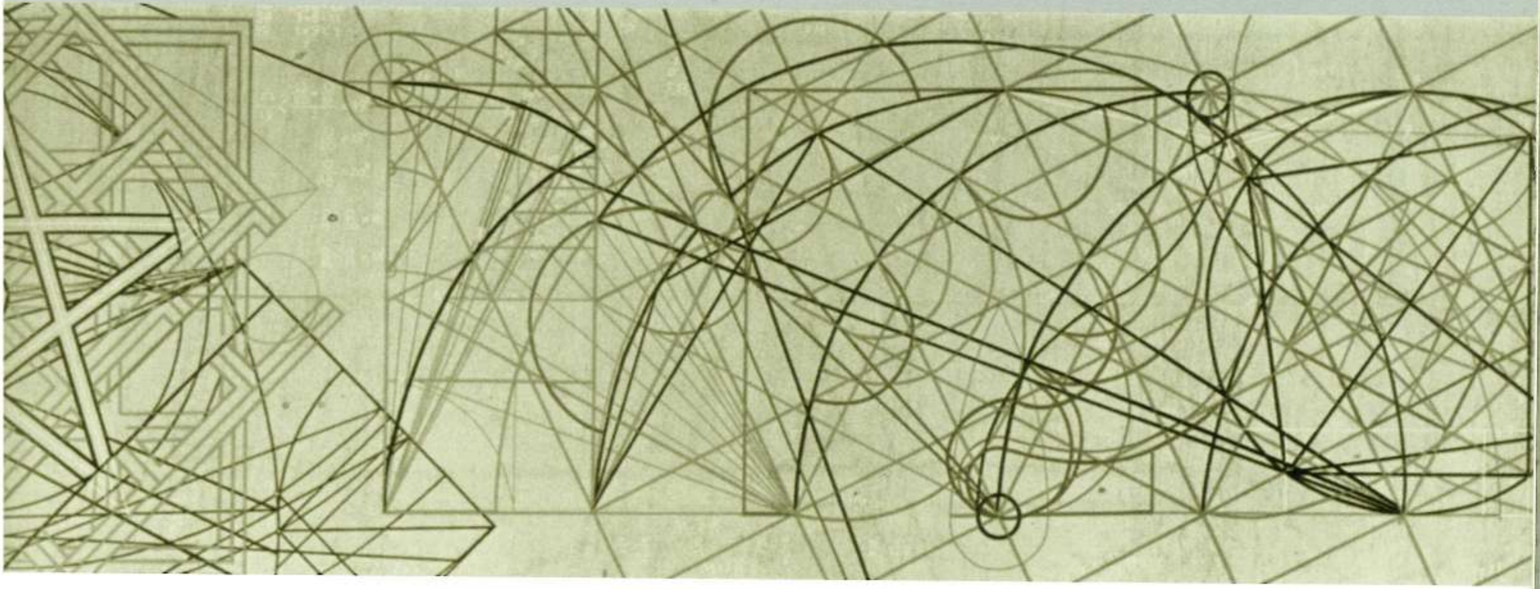
> Nós não pretendemos senão encontrar o cânone e não supusemos nunca que determinada época fosse a exclusiva. E assim é que, hoje, uma vez terminado o trabalho, uma vez chegado ao resultado, assim acontece. O cânone não está exclusivamente nos exemplos da Idade Média, não está só nos exemplos da Suméria, não está só nos de Creta, Gregos, Bizantinos, Árabes, Hebraicos, Romanos ou Góticos. Ele está sempre e é por isso mesmo que ele é cânone. E cada época tira do cânone as suas regras. As leituras feitas de documentos antigos confirmam o que eu digo.

O estudo deste cânone absorveu Almada. Desde 1916, quando se interessou pela primeira vez pela tábua quatrocentista *Ecce Homo*, (da Escola) de Nuno Gonçalves, nunca mais abandonou o desenvolvimento das intuições e descobertas que então lhe ocorreram. O painel *Começar* é, pois, o seu legado espiritual às gerações vindouras. O título escolhido foi como se nos quisesse dizer que o seu último esforço não era mais do que um ponto de partida nesta demanda cósmico-filosófico-artística.

O painel

A descrição e análise que se apresenta segue de muito perto a proposta de João Furtado Coelho no artigo *Os princípios de Começar*. Assim, e apesar da sua interpenetração física e orgânica, é sugerida a divisão da composição em cinco partes, a saber, da esquerda para a direita: P1— dominada por um círculo C_1; P2 — dominada por um círculo C_2, de raio duplo

Figura 1. Painel *Começar*.



do de C_1; P3 — parte central, na qual aparece novamente um círculo C_1; P4 — dominada por círculos C_2; P5 — dominada por um círculo C_1. Importa ainda sublinhar que, neste texto, as referências a cores devem entender-se como dizendo respeito ao painel original.

Parte P_1

No círculo C_1 estão inscritos três pentágonos: um pentágono estrelado (ou pentalfa), a preto, proveniente da divisão do círculo em 5 partes iguais e, portanto, relacionado com a divisão em 10 partes; os outros dois pentágonos côncavos, em beringela[2] e vermelho, têm que ver com determinações de nonas partes do círculo.

Do pentalfa tirou Almada uma maneira muito prática de obter a nona parte do círculo. Aqui aparece já um invariante canónico,

$$2R = 2 \times \frac{\delta}{9} + \frac{\delta}{10},$$

na notação de Almada, que significa: o diâmetro é igual a duas vezes a corda da nona parte mais a corda da décima parte, ou ainda, o diâmetro é igual a duas vezes o lado do eneágono regular mais o lado do decágono regular (figura 2).

Esta é uma das razões por que Almada usa a expressão *relação nove/dez* tanto para designar uma constante canónica como para designar o próprio cânone.

Ao tomar as cordas pelos arcos na divisão do círculo cometem-se erros. Porém, os erros absoluto e relativo vão diminuindo com o arco. Quando se chega às nona e décima partes do círculo, então a razão das cordas já é praticamente

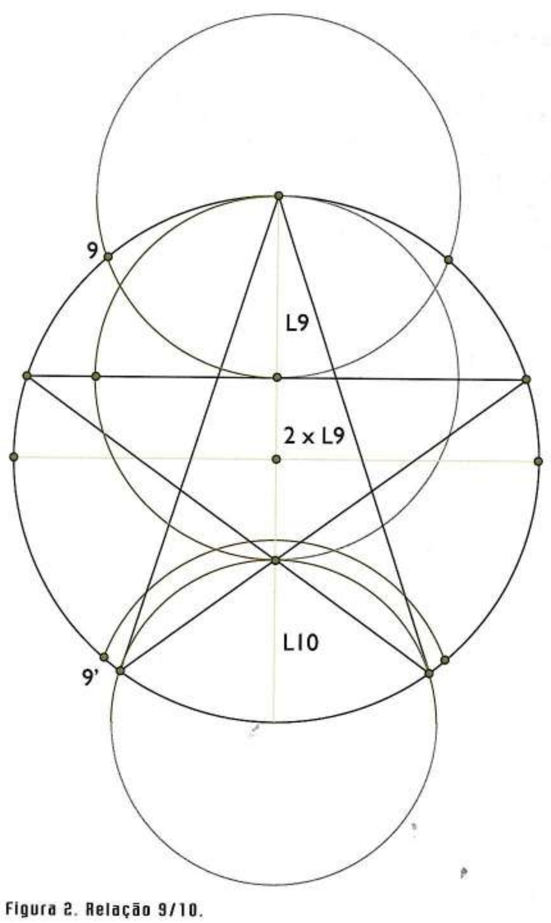


Figura 2. Relação 9/10.

igual à razão dos arcos. Esta é 9/10; a das cordas pode-se dizer que é igual, com um erro inferior a 4‰.

Por isso Almada chamou ao seu sistema *relação nove/dez* em vez de *razão nove/dez*, querendo frisar a diferença entre relação e proporção.

Esta parte do painel contém ainda três rectângulos a azul, determinados por nonas partes da circunferência. O menor é o rectângulo $\sqrt{\phi}$, o médio é o rectângulo $\sqrt{2}$ e o maior o rectângulo ϕ.[3]

Parte P_2

Nesta secção, Almada baseia-se na *Figura Superflua Ex errore*, uma estrela de 16 pontas geralmente atribuída a Leonardo da Vinci. As pontas da roseta estão unidas por arcos de círculo cujo raio parece ser a corda da nona parte do círculo de P_1.

A azul está um rectângulo de ouro, com as mesmas dimensões do de P_1. Duas linhas vermelhas finas sobem na direcção do centro para o canto superior do quadrado circunscrito, determinadas por *relações nove/dez*. Prolongando para baixo a linha vermelha mais grossa e mais inclinada que estas duas, atingimos o ponto sul da roseta. Esta linha corresponde à diagonal de um rectângulo ϕ^2, cujo lado maior é vertical.

À direita da roseta, em baixo, dispõem-se, verticalmente, os números 16, 32, 64, 128 e 256, estando em frente a cada um a soma dos respectivos dígitos. Note-se que nesta parte existe parcialmente um reticulado que divide o quadrado circunscrito em $16 \times 16 = 256$ quadrados iguais.

Parte P_3

Esta parte é dominada por um pentágono estrelado central, melhor dizendo, por um triplo pentágono estrelado, emblema da confraria pitagórica. Almada não ignorava que este símbolo aparece numa das faces de uma das moedas mandadas cunhar por D. Afonso Henriques. Furtado Coelho sugere que no centro da composição se pode descobrir um conjunto de linhas que simbolizam, ao mesmo tempo, uma cruz e uma espada, a outra face da moeda afonsina.

Por detrás dos pentágonos temos três quadrados concêntricos, de lados horizontais e verticais, subdivididos em 16 quadrados iguais. Estes quadrados rodam 45°, mas os lados estão incompletos, junto dos vértices.[4]

Desenhados a azul, tornamos a encontrar o conjunto de rectângulos $\sqrt{\phi}$, $\sqrt{2}$ e ϕ.

Todo este conjunto aparece enquadrado por um rectângulo 2 (duplo quadrado) a preto, disposto a 45°, com um dos lados maiores tangentes à *Figura Superflua*. Junto a este lado, encontramos alguns dos invariantes canónicos (relativos ao semicírculo inscrito no rectângulo 2).

Parte P_5

Analisemos a última parte do painel antes de P_4. No círculo C1 aparecem os elementos daquilo que Almada entendia ser o Ponto de Bauhütte.

Disse Almada ao Diário de Notícias (07.06.1960):

Ao arquitecto Prof. Ernest Mössel, para a reconstituição do antigo conhecimento que é o mesmo dos nossos estudos para os painéis, na impossibilidade de encontrar os documentos históricos eruditos que parecia ficarem afinal enterrados para sempre no resultado de estratagemas epocais do sigilo, serviu-lhe uma quadra popular corrente entre os entalhadores de pedra para a construção de catedrais no Sacro Império Romano. A quadra é esta:

Um ponto que está no círculo
E que se põe no quadrado e no triângulo.
Conheces o ponto? Tudo vai bem.
Não conheces? Tudo está perdido.

Esta quadra era a ligação reconhecida por quantos colaboravam na construção e edificação de uma obra. O seu grémio de construtores chamava-se Bahütte [...] Ora acontece que o ponto a que a quadra se refere é precisamente um que determina ⊙/7. Esse ponto e o extremo ⊙/7 determinam-se reciprocamente. E esse ponto e o extremo ⊙/7 dividem o diâmetro respectivamente em 10 e nove partes iguais, e também em cinco e em três partes iguais.

Na configuração de Almada (ver figura 3) encontramos o círculo, o quadrado e o triângulo. Este último não é equilátero, mas sim *pitagórico*, ou seja, triângulo rectângulo nas proporções 3:4:5. Gravados na pedra, junto aos lados do triângulo, estão os números 6, 8 e 10. Na figura 3 estão também representados o quadrado circunscrito ao círculo e o polígono de 7 lados inscrito no círculo, que não estão no painel.

Recorde-se que o tema do Ponto de Bauhütte tinha já sido tratado por Almada numa bela composição a preto e branco, de 1957 (figura 4).

Dentro do quadrado preto está um par de quadrados vermelhos e, dentro destes, um par de quadrados azuis, mas de tamanhos diferentes: o lado do maior está associado a M e o menor a m. A razão M:m é (aproximadamente) o número de ouro. M e m aparecem diversas vezes na composição, mas nem todos têm que ver com estes.

O círculo C_1 aparece abrigado por um círculo C_2. Almada indica modos de obter as 7ª, 11ª, 13ª, 14ª, 17ª e 19ª partes de C_2.

Andando para a esquerda, vemos mais semicírculos C_2. Passamos para

Parte P_4

Chama-se a atenção apenas para o extremo esquerdo de P4, onde Almada apresenta outros modos de dividir C_2 em 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 38 e 76 partes.

Furtado Coelho fornece uma análise mais exaustiva e completa do painel, para o qual remetemos os interessados.

Observações finais

As questões sobre (im)possibilidade de divisão exacta do círculo eram do conhecimento de Almada, mesmo que não o fossem os pormenores teóricos. Mas, como artista, ele par-

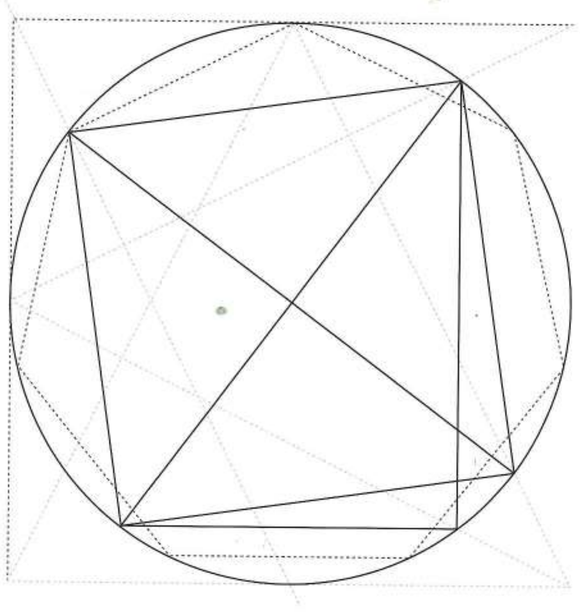


Figura 3. Elementos da parte 5 do painel.

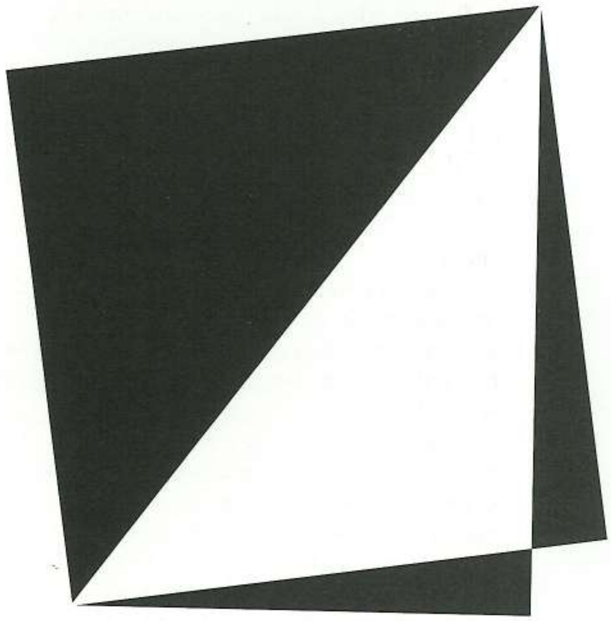


Figura 4. O Ponto de Bauhütte [1957].

te da sabedoria visual para a geometria, a qual precede a aritmética. Escreveu Almada, "a arte precede a ciência, a perfeição precede a exactidão"[5] afirmação que reforça dizendo, "A perfeição contém e corrige a exactidão." (Diário de Notícias, 16.06.1960).

O painel *Começar* é uma impressionante obra de arte abstracta, que o tempo e a localização tornaram um clássico. Além de revelar o interesse do autor pelas questões da geometria secreta dos artistas antigos, é paradigmático de um espírito sedento de verdade e beleza, qualidades intemporais.

Notas

1 Obras Completas, Vol 1 — Poesia (1990). Lisboa: INCM. Citado em J. Furtado Coelho.

2 O pentágono beringela encontrou-o Almada num espelho chinês.

3 A expressão rectângulo ϕ significa um rectângulo cujos lados estão na proporção ϕ:1, ou seja, se o lado menor medir 1, o lado maior mede ϕ. Comentário idêntico para outros números.

4 Figura que se encontra desenhada no terreno, com grandes dimensões, a cerca de 100 km de Lima, Peru, vestígio de uma civilização pré-incaica.

5 Catálogo da Primeira Retrospectiva da Pintura Não-Figurativa Portuguesa, Associação de Estudantes da FCUL, 1958, citado em Rui-Mário Gonçalves.

Bibliografia

Coelho, João Furtado (1994). Os princípios de Começar. *Revista Colóquio/Artes*, n.° 100, pp. 8–23+75.

Freitas, Lima de (1977). *Almada e o Número*. Lisboa: Editora Arcádia

Gonçalves, Rui-Mário (2005). *Almada Negreiros*. Lisboa: Editorial Caminho.

Vieira, Joaquim (dir.) (2006). *Fotobiografias Século XX — Almada Negreiros*. Lisboa: Bertrand Editora.

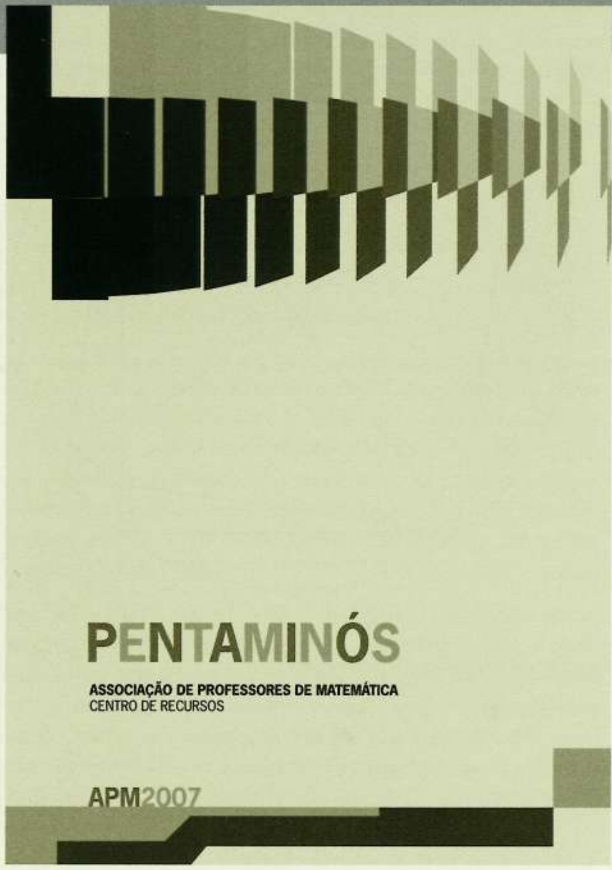
Agradecimento

À Fundação Calouste Gubenkian pela permissão de reproduzir o painel *Começar*.

Luís Reis

Grupo de Trabalho T3

Centro de Competência CRIE da UCP-ESB



Pasta de Actividades — Pentaminós (reformulada)

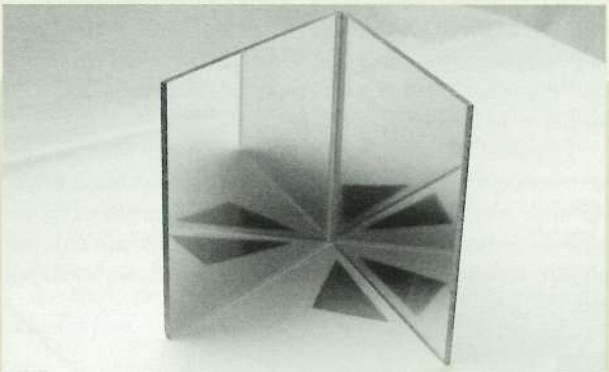
Edição APM, 2007
Sócio 15,00€ | *PVP* 22,50€

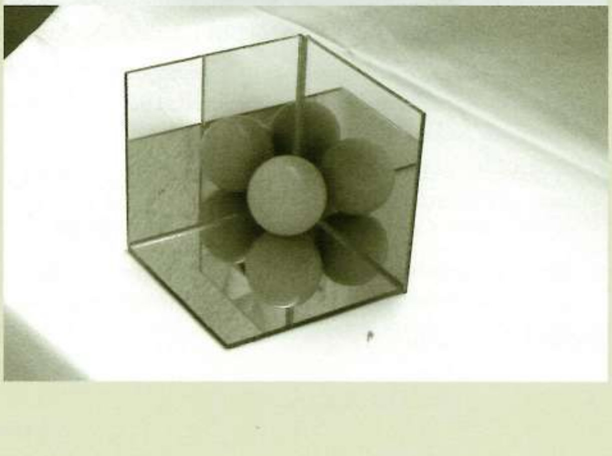
Os Pentaminós são um fantástico quebra-cabeças. Pelos desafios que proporcionam, constituem um material muito interessante na exploração da Geometria no primeiro e segundo ciclos do ensino básico.

Cada peça é formada por 5 quadrados, unidos pelos lados. Excluindo formas equivalentes, por rotação ou simetria, existem 12 pentaminós diferentes, denominados de acordo com as letras com que se parecem, que permitem a criação de inúmeros problemas e suas soluções.

Esta pasta reúne um conjunto de propostas de trabalho, que podem ser prontamente utilizadas com os alunos, que vão permitir desde a construção de formas geométricas, com a utilização de algumas ou todas as peças do jogo, à reprodução de peças noutra escala e ao preenchimento de áreas.

Uma pasta didáctica, com novo formato e os princípios de sempre. Uma reedição APM.



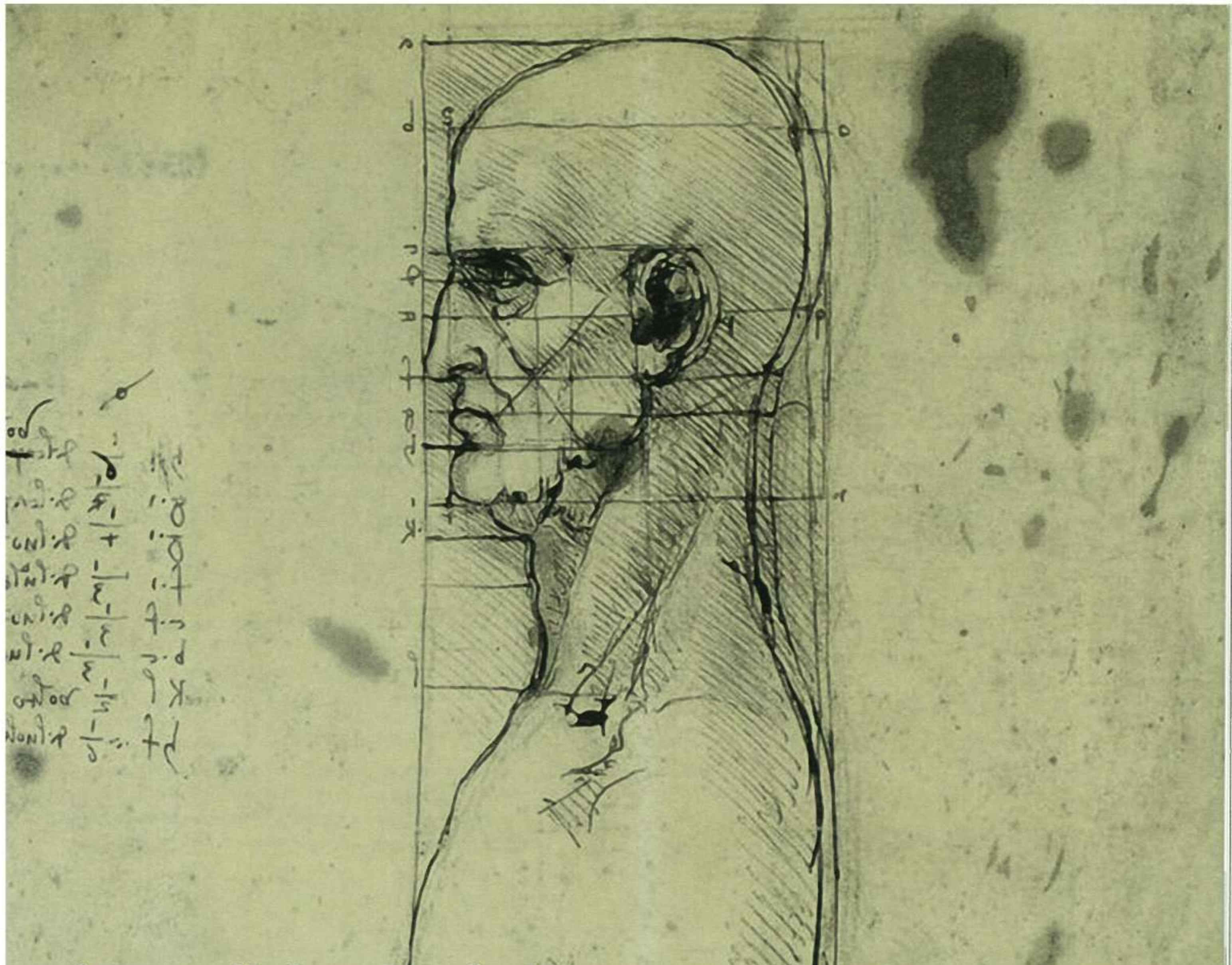


Conjunto de 3 espelhos de 10 cm x 10 cm, em acrílico

Sócio 3,50€ | *PVP* 4,50€

Este conjunto constituído por um espelho e um livro de espelhos destina-se ao estudo da simetria no plano ou no espaço, desde o jardim de infância ao ensino secundário.

As publicações do Atractor, também à venda na APM, *Simetria jogos de espelhos* e *O ritmo das formas* constituem um bom auxiliar do professor para a abordagem do tema Simetria, com recurso a espelhos e outros materiais.



A medida da Arte

José Manuel dos Santos Dos Santos

Pretende-se com este texto contribuir para a divulgação das proporções associadas a algumas obras e trabalhos desenvolvidos no campo artístico. A proporção áurea é já sobejamente conhecida, porém uma outra proporção é por ventura menos conhecida, a proporção radiante que está associado a um número que em conjunto com o número de ouro integram o conjunto dos números mórficos. Facto ainda talvez menos divulgado é que este conjunto tem apenas dois elementos: o número de ouro e o número de prata. Aqui tentaremos caracterizar os números mórficos, apresentar algumas das suas propriedades e ilustrar alguma evidência da sua utilização no campo artístico.

Uma das escalas de comparação das grandezas dos números são as sequências em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{n-1}, p_n, \ldots; p_n - p_{n-1} = r$$

As progressões aritméticas de números inteiros podem servir-nos para ordenar números naturais. As mais comuns estão relacionadas com a propriedade hereditária dos naturais (progressão aritmética de razão um cujo primeiro elemento é a unidade; a progressão dos múltiplos de um número, entre outras).

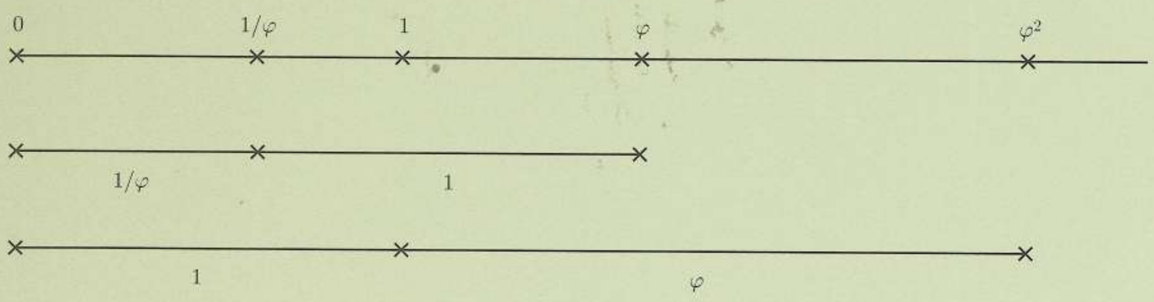


Figura 1.

Outras progressões, não aritméticas, tiveram muita influencia na arte ocidental, é o caso da sucessão de Fibonacci (progressão definida por recorrência à custa de dois termos anteriores sendo os dois primeiros termos iguais a um). A força desta progressão está relacionada com outra forma de comparação.

Ao comparar medidas geométricas bidimensionais e tridimensionais somos levados a utilizar uma progressão geométrica:

$$\ldots, p^{-2}, p^{-1}, 1, p, p2, \ldots (p > 1)$$

que é uma escala bastante intuitiva. Neste tipo de escala o quociente:

$$(p^{k+1} - pk)/(p^{k+1} + p^k)$$

é constante, não depende do valor de k. (Figura 1)

Considerando p o número de ouro, a sequência geométrica assume outras duas propriedades interessantes:

a) a soma entre dois elementos consecutivos é igual ao próximo elemento da sequência

$$(p^{k+1} + pk = p^{K+2}, k \in \mathbb{Z})$$

daqui resulta que $1 + p = p^2$;

b) a diferença entre dois elementos consecutivos é igual ao elemento anterior

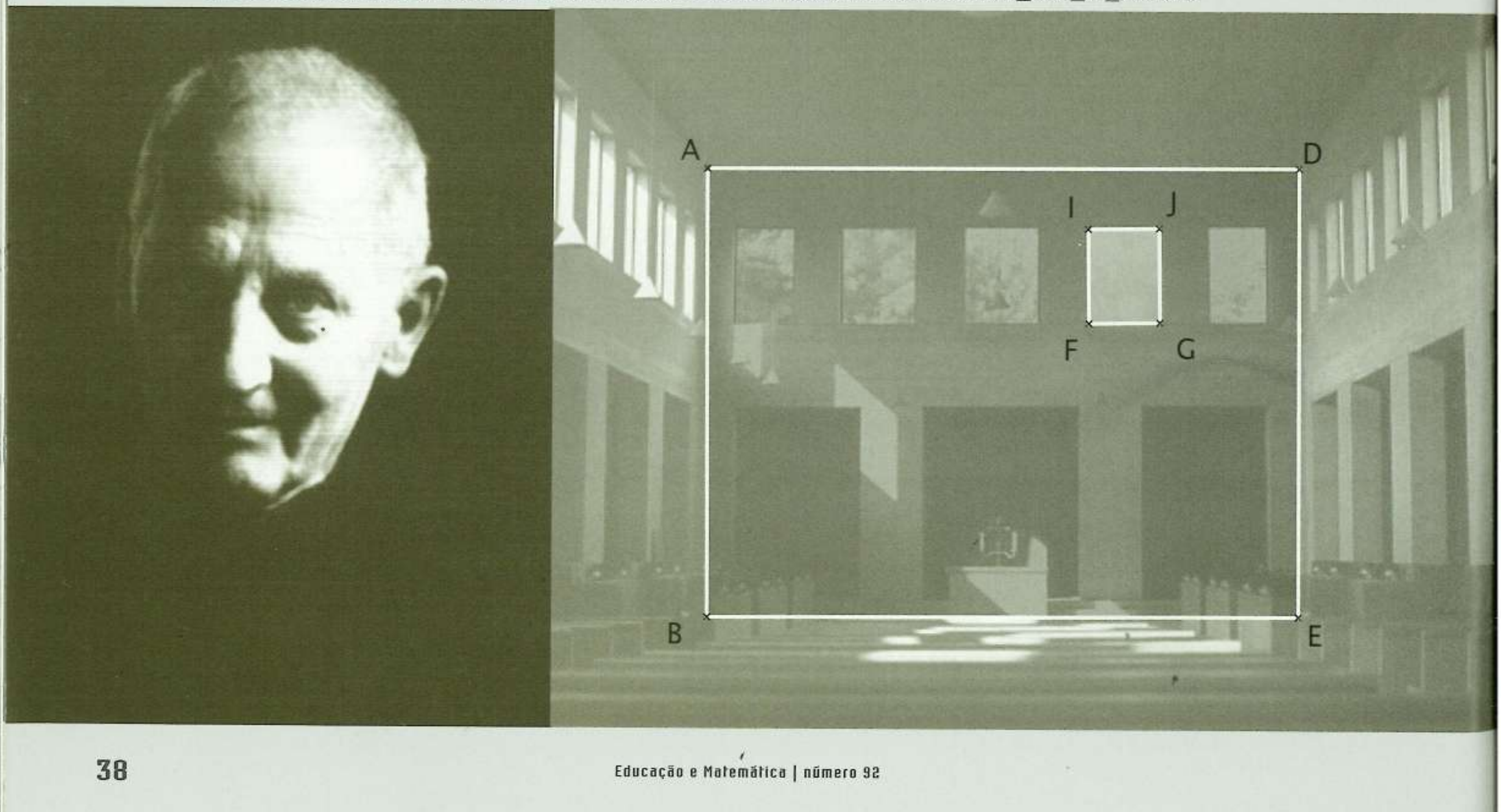
$$(p^{k+1} - p^k = p^{K-1}, k \in \mathbb{Z})$$

daqui resulta que $p - 1 = p^{-1}$;

As propriedades do número de ouro podem sugerir o seguinte problema:

Para que números reais $p > 1$ existem números naturais k e l de modo que: $p - 1 = p^{-l}$ e, $p + 1 = p^k$ (1).

Figura 3. Laan. DOM Hans van der [1904-1991]. In http://www.classic.archined.nl/news/0111/dom_hans_vd_laan.html



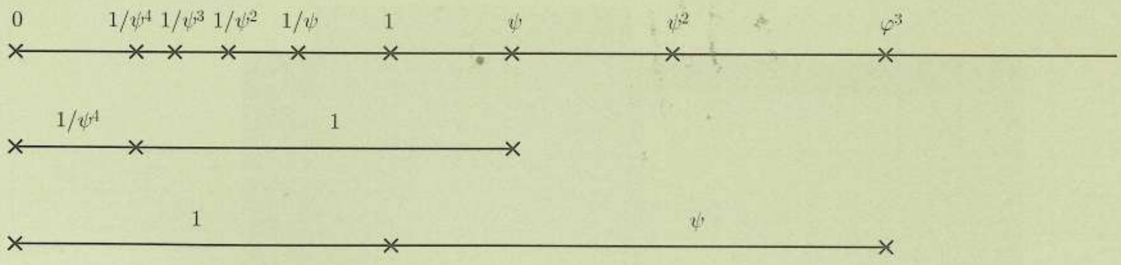


Figura 2.

Pelo que atrás referimos o número de ouro é uma solução do problema, mas haverá outras?

O esquema da figura 2 faz antever que poderá existir um número x tal que:

$$x - 1 = x^{-4} \text{ e } x + 1 = x^3.$$

O monge e arquitecto beneditino Dom Hans van der Laan encontrou um outro número que satisfaz a estas condições[1]. Este sistema de proporções apresentado é a retoma de um outro sistema ofuscado pelo entusiasmo do renascimento onde a proporção áurea foi valorizada por melhor servir a ideia do Homem como centro e medida do mundo[2].

Hans van der Laan aplicou este conhecimento nas proporções usadas na construção da igreja da abadia *Sint Benetdictusberg* em Mamelis na Holanda, como se ilustra na imagem do centro da figura 3 onde os rectângulos $[ABED]$ e $[IFGJ]$ respeitam o sistema de proporções propostos pelo arquitecto.

Hans van der Laan designou as soluções do problema atrás referido por números mórficos encontrando um outro número nestas condições, para além da razão áurea, designando-o por número plástico. Segundo este autor, os números mórficos seriam as escalas geométricas ideais para a concepção de objectos espaciais.

O número plástico de Hans van der Laan é solução da equação:

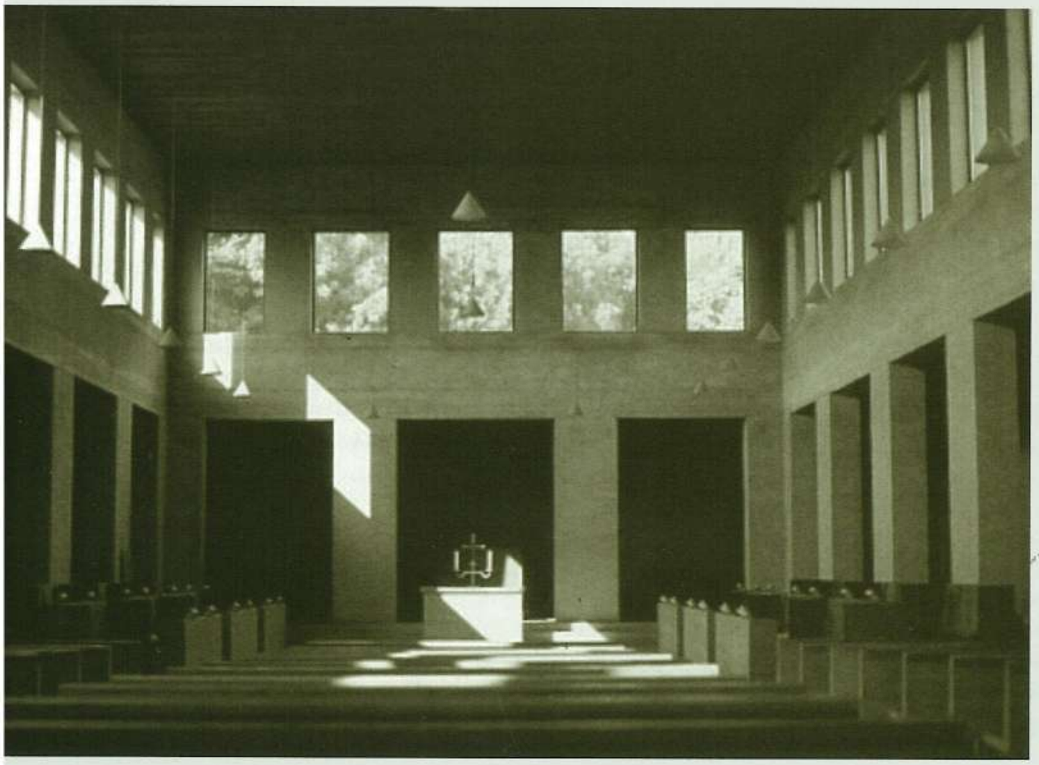
$$x^3 - x - 1 = 0 \; (2)$$

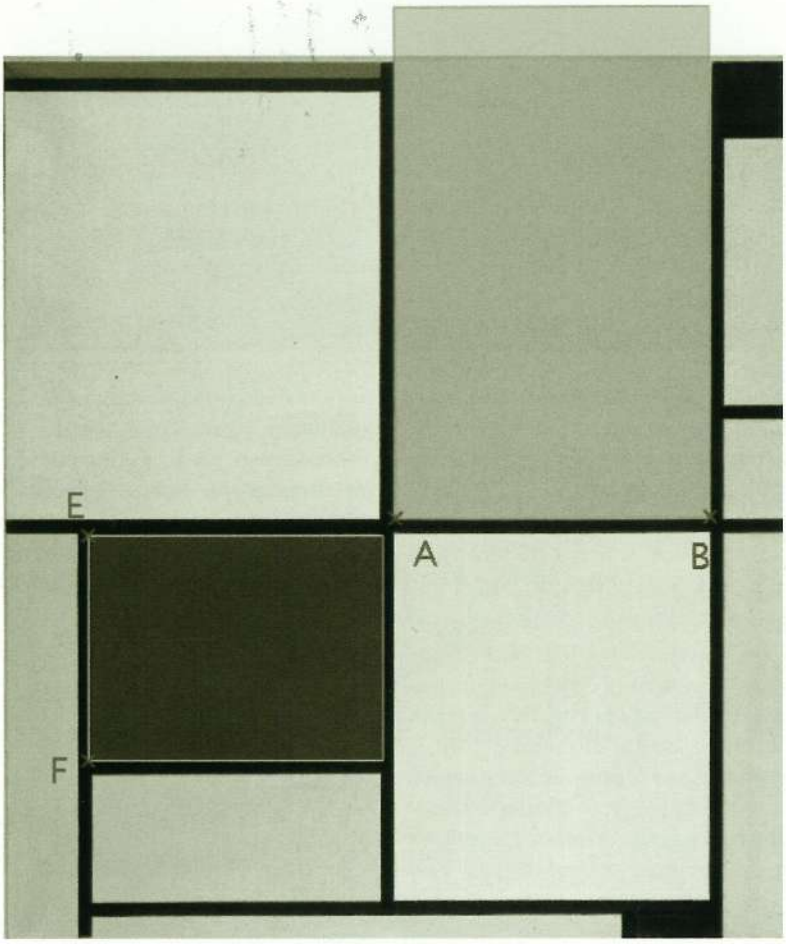
Como podemos escrever

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1),$$

segue que a solução de (2) satisfaz a condição $x - 1 = x^{-4}$,

Abadia "Sint Benetdictusberg". Mamelis. Holanda in http://rempei.web.infoseek.co.jp/photo/e-kiji/007laan.html





isto é, a solução real da equação superior a um é o número plástico tomando em (1) $k = 3$ e $l = 4$.

Determinando a solução real da equação (2) obtemos o número de Prata P:

$$\psi = \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9+\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} \approx 1,32471795$$

A descoberta deste número foi realizada em simultâneo pelo estudante de arquitectura francês Gérard Cordonnier[3]. Este autor designou este número por número radiante e usou a letra ψ. Em 1998 Kruijtzer[4] conjecturou que existiriam apenas dois números mórficos que seriam o número de ouro, φ, e o número radiante, ψ.

Se observarmos a composição de Piet Mondriam (ver figura nesta página) verificamos que o rectângulo radiante (de lado $[EF]$) aparece no rectângulo azul da composição.

Poder-se-ia tentar ajustar um rectângulo áureo (de lado $[AB]$) nos diferentes rectângulos da composição, o que dificilmente se consegue.

De seguida demonstrar-se-á que existem apenas dois números mórficos, os números φ e ψ tais que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ e $\psi^3 = 1 + \psi$.

Um número mórfico é solução das duas equações seguintes:

$$x^n - x - 1 = 0 \text{ e } x^m - x^{m-1} - 1 = 0, n, m \geq 2.(3)$$

O primeiro membro de cada uma das equações anteriores é um polinómio de três monómios. O trinómio $x^n - x - 1$, $n \geq 3$ não pode ser decomposto como produto de polinómios de grau inferior que não seja a unidade e ele próprio, isto é, é irredutível[5]. Por outro lado é possível estender o resultado anterior ao trinómio $x^m \pm x^K \pm 1, m \geq 3$ e $1 < k < m$. Este trinómio ou é irredutível ou pode ser escrito ou é o produto de dois polinómios, neste caso o primeiro é irredutível (ou constante) e o segundo polinómio tem raízes de módulo 1.[6]

Assim o trinómio $x^m - x^{m-1} - 1$, $m \geq 3$, ou é irredutível ou o produto de um irredutível pelo polinómio $x^2 - x + 1$. No caso de ser redutível os zeros do polinómio

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...	Fn
F	1	2	1,5	1,666666667	1,6	1,625	1,615384615	1,619047619	1,617647059	1,618181818	1,617977528	1,618055556	...	φ

Quadro 1.

1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	...	Pn
	1	1	2	1	1,5	1,333333333	1,25	1,4	1,285714286	1,333333333	1,333333333	1,3125	1,333333333	1,321428571	1,324324324	...	ψ

Quadro 2.

tem módulo 1, então os zeros do trinómio satisfazem a equação $|x|^{m-1} = 1/|x-1|$. Porém se a raíz tem módulo 1 ela é um número complexo que se encontra equidistante da origem e do número real 1, a distância de 1. Assim, resulta que uma raíz é o número complexo

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3i}.$$

Mas então o trinómio é divisível por $x^2 - x + 1$.

Pretendíamos encontrar números reais superiores a um que satisfizessem a condição (3). Para $n = m = 2$ os trinómios são idênticos e as duas soluções é o número de ouro e o simétrico do seu inverso. Por outro lado, se m e n são superiores ou iguais a três e se um zero existir ambos os trinómios devem ter um factor comum. Ora, como o primeiro trinómio é redutível isto só pode acontecer se o primeiro dividir o segundo. Em virtude do resultado do parágrafo anterior a existência de um zero comum implica que ocorra a factorização:

$$(x^n - x - 1)(x^2 - x + 1) = x^m - x^{m-1} - 1.$$

Expandindo verificamos que $n = 3$ e $m = 5$. Neste caso a solução é o número plástico de Hans van der Laan.

À semelhança do que acontece com a sucessão de Fibonacci o número de prata também se obtem como limite de uma sucessão definida por recorrência.

De facto desde a edição do Liber Abaci de Leonardo Pisano, também conhecido por Fibonacci, foi estudada a relação entre a sucessão conhecida pelo nome deste autor e o número de ouro. A sucessão definida por:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ldots$$

é tal que $\lim(F_{n+1}/F_n) = \varphi$. De um modo semelhante podemos obter o número radiante, ou plástico, ψ, este pode ser obtido como o limite da razão de dois termos consecutivos de qualquer uma das duas sucessões seguintes:

Sequencia de Padovan

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, \ldots, P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \ldots$$
$$\lim(P_{n+1}/P_n) = \psi$$

Sequencia de Perrin

$$P'0 = 3, P'1 = 0, P'2 = 2, \ldots, P'n = P'_{n-2} + P'_{n-3}, \ldots$$
$$\lim(P'_{n+1}/P'_n) = \psi$$

Facilmente podemos obter a sequência de Fibonacci e aproximações de φ (quadro 1). E o mesmo podemos fazer para o número radiante ψ (quadro 2).

Com esta informação podemos encontrar boas aproximações destas duas razões que surgem com alguma regularidade na concepção de obras de arte desde períodos remotos até os nossos dias.

Notas

1 Laan, H. van der, Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'Ordonnance architectonique, Brill, Leiden, 1960.

2 Richard Padovan, "Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number", pp. 181–193 in *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, eds. Kim Williams and Jose Francisco Rodrigues, Fucecchio (Florence): Kim Williams Books, 2002.

3 Padovan, R., Dom Hans van der Laan, Modern Primitive, Amsterdam, 1994

4 Kruijtzer, G., Ruimte en Getal. Het plastische Getal en het gulden-Snedegetal, Architectura & Natura, Amsterdam, 1998.

5 Demonstração pode ser encontrada em: Selmer, E. S., On the irreducibility of certain trinomials, Math. Scand. 4 (1956), 287–302.

6 Demonstração pode ser encontrada em: Tverberg, H., On the irreducibility of the polynomials $x^n \pm x^m \pm 1$, Math. Scand. 8 (1960), 121–126.

José Manuel dos Santos Dos Santos
Escola Superior de Educação do Porto

Impossível ou Certo?

Primeiras noções de acontecimento

Sara Pedro e Carlos Miguel Ribeiro

Neste artigo, pretendemos mostrar que, partindo de situações e afirmações rotineiras e do dia-a-dia dos alunos podemos fazer com que estes construam conhecimentos matemáticos significativos, que no presente caso se referem ao conceito de acontecimento certo e acontecimento impossível.

No âmbito do Programa de Formação Contínua de Matemática, que decorreu no ano lectivo de 2005/2006, inúmeras actividades foram elaboradas, resolvidas e preparadas por todas as formandas do grupo nas sessões de formação para ser aplicadas em contexto de sala de aula.

Um dos objectivos das já referidas actividades prendia-se com o facto de serem os alunos a construir e/ou reforçar o seu próprio conhecimento matemático sobre os assuntos trabalhados. Uma das muitas actividades trabalhadas nas sessões conjuntas tinha como objectivo introduzir os conceitos de acontecimento certo e acontecimento impossível. É de notar que estas actividades foram sempre discutidas, resolvidas e contextualizadas aos alunos aos quais iam ser propostas. É também de referir que, embora o tema das Probabilidades não se encontre mencionado no programa do 1°

Ciclo, consideramos que quanto mais ricas e diversificadas forem as experiências matemáticas proporcionadas aos nossos alunos maior será o gosto pela matemática e, consequentemente, maior a vontade de aprender.

Assim, o objectivo era, principalmente, que os alunos tomassem uma posição, a partir das suas experiências/conhecimentos pessoais (nomeadamente nos casos dos cartões azul e laranja), relativamente a um conjunto de situações e as classificassem sempre com base em justificações convenientes como acontecimentos certos, impossíveis, ou ... nem uma coisa nem outra, de forma a que se consciencializassem de que existem situações que não se situam em nenhum destes extremos. Ou seja, desejava-se que os alunos tomassem consciência de que existem acontecimentos que podem ser (apenas) quase impossíveis ou quase certos ou, mesmo ainda, que não são nem impossíveis nem certos, permitindo, deste modo irem, de forma quase empírica construindo o conceito de probabilidade.

Descrição da actividade

Dividiu-se uma turma do 3° ano em grupos de 5 alunos (4 grupos). A cada grupo foi entregue uma folha de papel manteiga onde apenas estava desenhado um segmento de recta, o qual tinha escrito numa extremidade *Acontecimento certo* e na outra *Acontecimento impossível*:

Acontecimento Certo — Acontecimento Impossível

Foram também entregues, a cada grupo, cinco cartões rectangulares de diferentes cores que continham as seguintes afirmações: Os gatos podem voar (cartão verde); Neva no Algarve no próximo ano (cartão vermelho); A equipa de Portugal vai ganhar o Mundial (cartão amarelo); Um de nós hoje não vai lanchar (cartão azul); Um dos alunos da escola faz anos hoje (cartão laranja).

Os cartões coloridos tinham marcado numa das extremidades uma seta para que os alunos pudessem indicar, com maior clareza, o local do segmento de recta, escolhido para colocar o referido cartão. (Esta opção mostrou-se útil quando as decisões tomadas não correspondiam a acontecimentos certos e os grupos queriam mostrar aos outros em que local da recta se situava a sua escolha. — veja-se adiante a justificação apresentada pela aluna Patrícia relativamente ao cartão: A equipa Portuguesa vai ganhar o mundial).

A sequência seguida para a colocação dos cartões foi a supracitada por se considerar que o nível de discussão seria, desta forma, gradual o que conduziria a uma mais profunda interiorização dos conceitos de acontecimento certo e acontecimento impossível bem como da percepção da existência de situações que não se enquadram em nenhum destes extremos o que obriga a uma justificação da tomada de decisão.

Início da actividade

Depois de distribuído o material pelos diferentes grupos e explicada a actividade, com o objectivo de contextualizar os alunos e eliminar possíveis dúvidas, foram colocadas algumas questões para o grande grupo ficando, como é habitual, a cargo dos alunos a resposta a alguma das dúvidas quer dos colegas quer das levantadas pela professora (será de referir que, pelo menos quando trabalham em grupo, todos os alunos se entre-ajudam e só se passa para o momento seguinte da actividade quando todos percebem o que lhes é pedido).

Vejamos o início da tarefa:

Professora — Todos os grupos têm à vossa frente uma folha com uma linha que tem nas extremidades uma coisa escrita que é...

Alunos (em coro) — *Acontecimento certo* e *acontecimento impossível!*

Professora — Alguém sabe dizer o que é um acontecimento?

Fábio (voltando-se para uma colega que abanava a cabeça expressando desconhecimento) — Vou dar um exemplo... quando tu nasceste foi um acontecimento.

Patrícia — Acho que assim é mais fácil: se dividires a palavra em dois o que obténs? Aconte, que faz lembrar o acontecer, assim acontecimento é algo que acontece.

Embora a aluna não tivesse explorado toda a composição da palavra, todos os outros compreenderam o que ela quis dizer.

Professora — Muito bem! E alguém me sabe dizer o que é uma coisa impossível?

Alunos — É uma coisa que nunca, nunca, nunca, ... mas mesmo nunca pode acontecer.

Ana — É uma coisa que só acontece se for milagre.

Professora — Então um acontecimento impossível é...

Alunos (em coro) — Um acontecimento que nunca pode acontecer.

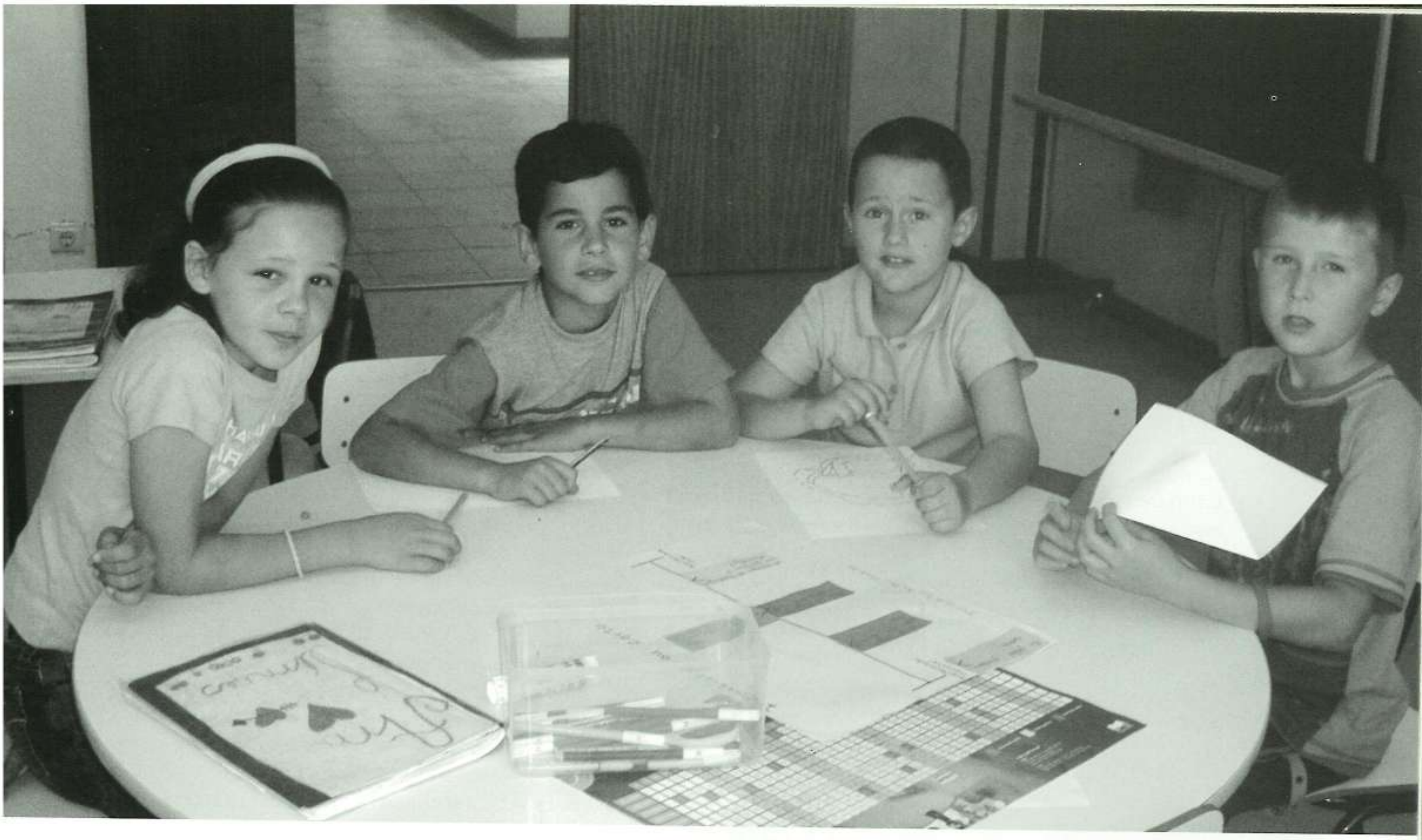
Professora — E o que é certo?

Alunos — É aquilo que acontece de certeza absoluta.

(também houve quem dissesse que era o que estava bem feito, uma clara alusão às suas experiências: os certos marcados!!!)

Depois de clarificados os novos termos que iriam ser o foco da actividade, foi explicado que deveriam colocar cada um dos cartões sobre o segmento de recta, na posição que, segundo a opinião do grupo, reflectisse a posição do mesmo relativamente a cada uma das afirmações dos diferentes cartões.

Após um momento de discussão e da tomada de decisão dentro do próprio grupo, o porta-voz de cada um deles deu a conhecer à turma as conclusões, apresentando sempre, tal como aconteceu ao longo do ano, em outras actividades, pelo menos uma justificação da escolha da posição em que tinham colocado cada um dos cartões coloridos no segmento de recta.



Será de referir que, em algumas situações outros elementos do grupo intervieram nas justificações à turma, com o objectivo de reforçar a tomada de decisão do grupo (em colocar o cartão em determinado ponto) pelo que apenas salientaremos as justificações não repetidas.

Resultado da discussão em grande grupo

Relativamente ao primeiro cartão: *Os gatos podem voar*; todos os grupos partilharam da opinião de que os gatos não podem voar, colocando assim o cartão na extremidade correspondente ao acontecimento impossível. Esta reacção seria de esperar uma vez que este é um facto que é conhecido por todos os alunos.

Argumentaram os alunos:

Susana — O gato não tem asas, não voa e nunca voará.

João — O gato não tem asas e não diz se é de meio de transporte ou não.

Catarina — Eles não conseguem voar, só se houver um milagre.

Ricardo — O gato não é pássaro.

André — Só as renas do Pai Natal e os pássaros é que podem voar.

No que se refere à segunda afirmação: *Neva no Algarve no próximo ano*, a escolha já não foi tão homogénea quanto a primeira, como aliás seria de esperar.

Um dos grupos justificou a sua escolha afirmando:

Susana — Está mais ou menos para o certo, porque já nevou no Algarve.

Cristina — Colocámos quase no certo, porque nevou este ano em Monchique, por isso também pode nevar para o próximo ano. Não temos muita certeza, mas é provável que sim, depende das condições meteorológicas!

Um outro grupo colocou o cartão quase no impossível apresentando a seguinte justificação:

Jessica — No Algarve não há frio o suficiente para nevar. Não é completamente impossível, porque não sabemos bem, mas achamos que não vai nevar.

Catarina — Não somos mágicos para saber se vai nevar ou não, não podemos adivinhar o futuro mas é capaz de não nevar porque há muito calor.

Houve ainda um grupo que optou por colocar o cartão exactamente a meio do segmento de recta alegando:

Ricardo — Não temos a certeza se poderá nevar, ou não, por isso colocámos o cartão mesmo no meio.

Nesta situação, e durante a discussão, em alguns grupos, verificou-se a necessidade de clarificar onde colocar um cartão com uma afirmação que não era impossível, uma vez que este ano efectivamente nevou no Algarve. No entanto também não era totalmente certa dadas as características da região. Por tudo isto os alunos não poderiam afirmar com toda a certeza que aquele seria um acontecimento certo, revelando assim consciência de que existem acontecimentos que se encontram numa situação intermédia.

No que se refere ao cartão: *A equipa Portuguesa vai ganhar o mundial* os alunos apresentaram diversas justificações para o local onde colocaram os cartões:

Susana — Está mesmo no meio da recta porque não temos a certeza se vai ganhar ou não.

Ricardo — Está mais perto do certo porque temos quase a certeza que isso vai acontecer, porque temos uma boa equipa... e queremos muito que Portugal ganhe!

Francisco — Está quase no certo porque não sabemos se vai ganhar, também foi por não termos a certeza que não está mesmo no certo... mas gostávamos muito que ganhassem!

Patrícia — Temos quase a certeza que a nossa equipa vai ganhar por isso ficou a 5 cm do acontecimento certo! (O segmento de recta media 40 cm.)

A forma como o grupo da Patrícia resolveu a situação, utilizando a referência ao sistema métrico, suscitou algumas perguntas por parte dos colegas ao que ela simplesmente respondeu:

Patrícia — Estes são os 5 cm de dúvida de poderem ganhar ou não.

Da explicação dada por esta aluna, poder-se-á inferir que já existe um grau quantificável de compreensão e apropriação dos conceitos de acontecimento certo e impossível bem como do facto da necessidade de quantificar o *quanto lhe falta de certeza* para que o acontecimento seja certo.

Este cartão foi incluído para discussão por se ir iniciar brevemente o campeonato do mundo e também pelo facto de, na turma, existirem alguns alunos de origem estrangeira, o que poderia provocar uma discussão mais acérrima no seio do pequeno grupo, entrando em linha de conta com os seus sentimentos relativamente ao desejo de verem a equipa do seu país ganhar o campeonato do mundo, o que efectivamente se verificou.

A discussão em pequeno grupo decorreu normalmente e após algum burburinho inicial, nos grupos onde existiam alunos de outros países, estes mesmos acabaram por afirmar que queriam que ganhasse Portugal, revelando assim o seu desejo por ser o seu local de residência e por Portugal ter uma boa equipa, composta por elementos como o Figo, o Ronaldo, o Deco... revelando assim a capacidade dos alunos criarem juízos de valor.

O cartão que continha a frase *Um de nós não vai lanchar hoje* suscitou inicialmente alguma discussão relativamente ao seu sentido, provavelmente por ser uma frase escrita na negativa, algo que alterava a sequência a que vinham habituados. Talvez daí tenha advindo a grande discussão que surgiu em seu redor, quer a nível de grupos (em quase todos os grupos se gerou uma grande discussão) quer, posteriormente, a nível da turma, e consequentemente no que se refere à posição onde colocar o cartão.

Francisco — Nós não sabemos se alguém vai ficar sem lanche ou não... por isso fica no meio!

Catarina — Mas é que eu tenho a certeza que há meninos que não têm lanche...não é no meio que deve ficar... é no acontecimento certo!

Para o grupo da Susana não houve qualquer dúvida quanto ao local onde colocar o cartão, o que deixou os outros alunos admirados, mas rapidamente perceberam a ausência das dúvidas:

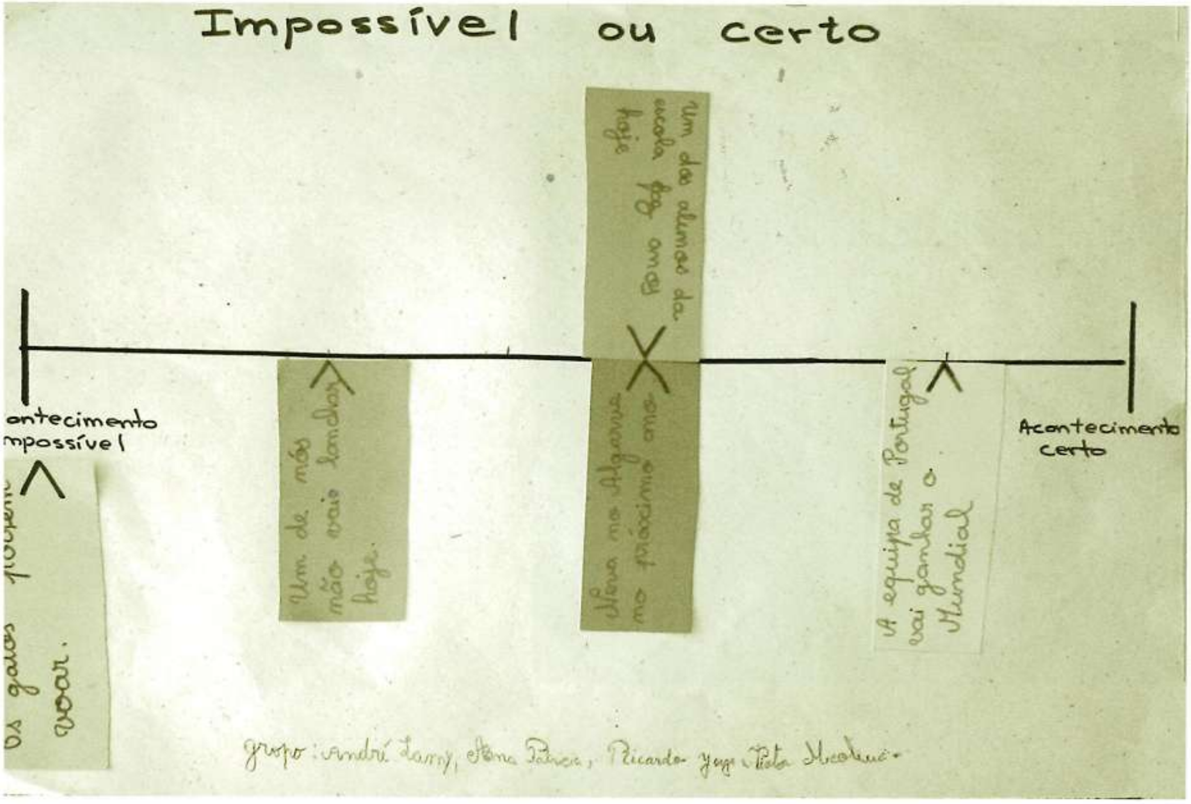
Susana (a rir) — Eu hoje não trouxe lanche, por isso de certeza que é um acontecimento certo!

Também para os grupos da Cristina e da Patrícia o acontecimento é certo, mas para estes a justificação está directamente relacionada com o número total de alunos da escola.

Cristina — Para nós é certo porque pensamos que na escola há muitos meninos, e de certeza que há um que não vai lanchar.

Patrícia — Temos a certeza que há meninos que nunca lancham, por isso é um acontecimento certo.

Note-se que, o mesmo grupo que sentiu necessidade de quantificar, utilizando o sistema métrico, a sua dúvida na situação anterior (que se referia à possibilidade de Portugal ganhar o campeonato), nesta situação considera o número total de alunos da escola para justificar o facto de existir pelo menos um aluno que não lanche. Poder-se-á considerar que indica uma percepção da existência de uma relação entre o número total de alunos existentes na escola e a possibilidade de um desses alunos não lanchar.



No grupo do Ricardo o cartão foi colocado perto do impossível.

Ricardo — Está quase no impossível porque não sabemos se alguém não vai lanchar... mas é provável que lanchem, porque achamos que todos devem lanchar; mas também não temos a certeza, por isso fica quase no impossível!

Mais uma vez foram levados em linha de conta os sentimentos visto que este grupo apenas considerou para a resposta o facto de todos os meninos deverem lanchar.

Na última situação apresentada os grupos tinham de decidir onde colocar o cartão *Um dos alunos da escola faz anos hoje*, assinalando deste modo que tipo de acontecimento o consideram.

O grupo da Patrícia e da Cristina colocaram o cartão mesmo no meio do segmento de recta e para tal mediram com uma régua o comprimento total e encontraram o ponto médio do segmento, considerando mais uma vez que é de extrema importância indicar exactamente o local onde colocar o cartão.

Cristina — Está no meio porque não é um acontecimento nem certo, nem impossível!

Patrícia — Nós consideramos que o cartão deve ficar mesmo no meio porque não sabemos se há, ou não, alguém que faça anos hoje na escola!

Este grupo percebeu claramente que colocando o cartão no ponto médio do segmento de recta a afirmação tanto poderia pender para certa como para impossível.

Para o grupo da Susana, o cartão não ficou mesmo no meio:

Susana — A seta ficou quase no meio, mas um bocadinho para o lado do certo, porque há muitos alunos na escola, mas também nós não sabemos se algum faz anos ou não.

Mais uma vez houve alunos que para justificarem as suas opções o fizeram considerando o número total de alunos existentes na escola, ou seja, toda a população possível (casos possíveis).

No grupo do Francisco, o cartão estava muito perto do certo.

Francisco — Está quase a chegar ao certo, porque há muitos meninos na escola e quanto mais pessoas houver, na escola, mais probabilidades há de alguém fazer anos; quanto menos pessoas houver, menos probabilidades há!

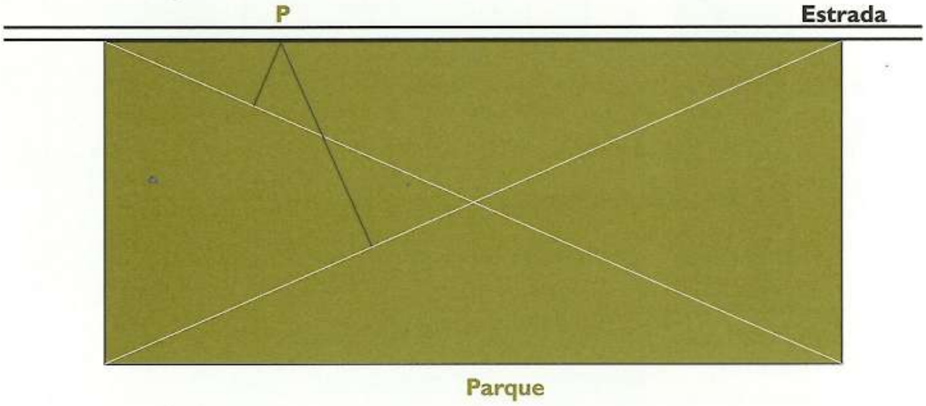
Apesar de noutras situações, e por outros grupos, terem sido levadas em linha de conta o número total de alunos existentes na escola, a justificação do grupo do Francisco superou qualquer objectivo traçado inicialmente para a actividade, pois o grupo conseguiu ir mais além do que o que nos tínhamos proposto, verbalizando um dos conceitos base das probabilidades.

Com esta actividade pretendia-se que os alunos tomassem um primeiro contacto, construíssem *per si* e se apropriassem das noções de acontecimento certo e acontecimento impossível bem como interiorizassem o facto de uma mesma situação poder ser classificada, em termos de certa ou impossível, de modos diferentes, dependendo do conhecimento que cada um tem da mesma. Ao longo da sua realização pudemos constatar que os alunos se apropriaram daqueles conceitos o que conduziu à construção de aprendizagens matemáticas significativas.

Sara Pedro
EB1 Lagoa

Carlos Miguel Ribeiro
Escola Superior de Educação da Universidade do Algarve

Uma manhã no parque, com as bicicletas



Resolvi levar a Rita e a Carolina, duas simpáticas miúdas filhas de uns amigos meus, a um parque dos arredores de Braga, junto a uma estrada. O parque é rectangular e tem dois caminhos que o atravessam segundo as diagonais. Cada uma das miúdas escolheu uma das diagonais para andar de bicicleta. Quanto a mim, resolvi ficar na estrada, de tal modo que a soma das distâncias a cada um dos caminhos fosse mínima.

Em que locais me poderia ter colocado?

(Respostas até 30 de Junho)

Um saco com pauzinhos

O problema proposto no número 89 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Num saco estão vários pauzinhos, todos com comprimentos iguais a um número inteiro de centímetros. O maior dos paus tem 140 cm. Retirando quaisquer três pauzinhos, nunca é possível construir um triângulo com eles.

No máximo, quantos pauzinhos há no saco?

Recebemos as respostas de Alberto Canelas (Queluz), Augusto Taveira (Faro), Daniel Castanho (Vialonga), Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e da turma de Didáctica da Matemática da UBI (Covilhã): Alina Vaz, Ana Martins, Bruno Garcia, Carla Miranda, Carla Neves, Cecília Fonseca, Cláudia Ramos, Cristina Ferreira, Daniel Saraiva, Joaquim Mateus, João Lourenço, Raquel Silva, Ricardo Portugal e Manuel Saraiva.

O processo seguido por quase todos foi, sem dúvida, a melhor maneira de resolver o problema. Trata-se de começar pelos paus mais pequenos, atribuindo sempre a cada comprimento o menor valor possível nesse momento.

Assim, o primeiro pau terá 1 cm, e o segundo também (não há menores valores inteiros possíveis).

Vamos, a partir de agora, garantir que não se verifica a desigualdade triangular: o maior lado é menor que a soma dos outros dois. Então, o terceiro pau terá, no mínimo 1+1=2cm. Só assim não formará triângulo com os anteriores.

O quarto pauzinho terá de ser, no mínimo, igual à soma dos dois anteriores de maior comprimento, ou seja 1+2=3cm. Continuando assim, vamos obtendo a seguinte série de comprimentos que é, nem mais nem menos, que a famosa sucessão de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

O termo seguinte (144) já ultrapassa o valor máximo permitido, que é 140. Temos de parar e alterar o último valor para 140. Portanto, no saco há no máximo 11 pauzinhos. Uma possível solução para os seus comprimentos é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 140.

Claro que, sempre com 11 pauzinhos, muitas outras soluções seriam possíveis. A turma da Covilhã apresenta alguns exemplos curiosos. Num deles, todos os paus, excepto os dois primeiros e o último, são números primos: 1, 1, 2, 3, 5, 11, 17, 29, 47, 79, 140.

Resolvido o problema (os pauzinhos são 11), alguns leitores levantam outra questão:

Interessante será agora, numa extensão do problema, descobrir quantas soluções diferentes existem (Augusto Taveira).

O Alberto Canelas é quem vai mais longe neste aspecto, impondo limites aos comprimentos dos sucessivos pauzinhos: 1, 1, 2–3, 3–5, 5–8, 8–14, 13–23, 21–38, 34–59, 55–106, 140.

Mas nem todas estas combinações são possíveis. Por exemplo, existem 4491 soluções do tipo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21–38, 34–59, 55–106, 140.

Os números nas moedas

O problema proposto no número 90 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Rute colocou um autocolante redondo em cada uma das faces de três moedas. Depois escreveu um número em cada autocolante. Os seis números que escolheu eram inteiros e consecutivos. Lançou as três moedas ao ar e sairam as faces com os números 5, 6 e 7, cuja soma é 18. Repetiu isto mais três vezes e as somas obtidas foram 20, 14 e 13.

Que números estão em cada uma das moedas?

Foi com muito gosto que vimos alguns professores proporem este problema aos seus alunos. Por isso, desta vez, além das habituais resoluções dos nosso leitores, temos também outras vindas de estudantes de vários anos de escolaridade.

Recebemos 13 respostas: Alice Bárrios (Catujal), Augusto Taveira (Faro), Carlos Silva (Amadora), Francisco Branco (Ovar), Francisco Estorninho (Lisboa), Francisco Martins & Turma B do 9º ano (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), Inês Oliveira (São Brás de Alportel), José Paulo Coelho (Santana), Márcia Silva (Catujal), Pedro Melo (Amadora), Rogério Derlot & Marta Calçada (Vieira do Minho) e uma *assinatura ilegível* (Gavião).

Os processos seguidos foram muito parecidos.

1ª Parte: Quais são os seis números colados nas moedas?

Como já conhecemos o 5, o 6 e o 7, existem quatro hipóteses:

Hip. A) 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7
Hip. B) 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8
Hip. C) 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9
Hip. D) 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10

A hipótese A é de excluir porque não é possível obter a soma 20. As hipóteses C e D são de eliminar porque com elas não se consegue a soma 13.

Ficamos assim a saber os seis números colados:

3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8

2ª Parte: Que números estão em cada moeda?

A situação é a que se mostra na figura acima. Falta-nos colocar os números 3, 4 e 8. Para que a soma seja 13 é necessário que tenham saído obrigatoriamente os números 3, 4 e 6, cada um em sua moeda. Então, o 3 e o 4 não podem estar na parte de trás do 6. Conclusão: a 2ª moeda tem os números 6 e 8.

Para a soma 14, as possibilidades são:

$3 + 4 + 7$ ou $3 + 5 + 6$

Mas a primeira hipótese é de excluir porque um dos números 6 ou 8 tem de aparecer (são os da 2ª moeda). Fica então $3 + 5 + 6$.

O 5 e o 6 pertencem às duas primeiras moedas, logo o 3 é da terceira, oposto ao 7. Finalmente o 4 está na parte de trás do 5. A soma 20 é possível com $5 + 8 + 7$.

Organizar e viver um ProfMat com um olhar exterior

Ao longo da minha vida profissional muitas vezes me aconteceu ter de apoiar a organização de seminários e encontros e sempre constituiu um desafio interessante participar desses projectos e ajudar, na medida das minhas capacidades, a dar-lhes corpo.

Desta feita, o desafio foi qualitativamente diferente: ser membro da equipa organizadora, ser responsável, conjuntamente com outros, por um projecto desta dimensão, participar na concepção e execução do seminário... muitas vezes me interroguei sobre como tinha acontecido estar ali e como me iria desenvencilhar até ao fim...eu que até nunca fui brilhante em Matemática!

Afinal até que nem era preciso perceber de Matemática, bastava ter bom senso, espírito de camaradagem, capacidade de encaixe, bom humor... e não ter medo de muito trabalho!

Ao ser-me pedido que escrevesse um testemunho sobre o Profmat, um olhar talvez mais exterior sobre essa iniciativa, comecei por pensar que é difícil elaborar uma opinião realmente isenta quando fizemos parte de uma equipa a quem ficámos unidos por laços de grande amizade e companheirismo.

Posso no entanto dizer que parte das dificuldades que pessoalmente senti se prenderam com um modelo muito espartilhado que dificulta e condiciona a inovação, que não permite o "fazer diferente", como muitas vezes nos apetecia!

Não posso deixar de ressaltar o espírito de equipa — excelente — a facilidade com que se criaram laços, o enorme prazer e camaradagem com que trabalhei, não só com os colegas e amigos, mas também com aqueles que só aí conheci e que hoje também fazem parte dos bons momentos vividos.

O balanço final é francamente positivo! Valeu a pena termos aberto as portas da nossa Escola, termos aberto os nossos corações a novos amigos, as nossas inteligências a novos desafios, e termos abarcado esta tarefa sem medo das muitas horas de trabalho que nos ficavam pela frente.

Foi bom ter sido parte do Profmat!

Luísa Gago da Silva

Como cascata que sacia a sede

Para quem acabou a licenciatura e teve como prática somente o ano de estágio pedagógico é como se tivesse naufragado e tivesse ido parar a uma ilha deserta, onde teria de sobreviver. A nossa tarefa enquanto jovens professores pode-se assemelhar a tal panorama. Somos jovens, sem a experiência, mas temos a nosso favor a força, a criatividade e a vontade de mudar o sistema e de criar novos desafios.

Cada vez mais se exige a um professor que ensine, que os seus alunos aprendam, que seja criativo, que use tarefas diversificadas, que transforme a Matemática numa disciplina pronta a amar, que mostre o lado belo desta aos que tanto teimam em virar-lhe as costas. Com um grupo de alunos cada vez mais exigente e que procura outras ocupações e paixões que não os estudos, todos os professores devem procurar criar estratégias para cativar este mesmo grupo etário de jovens. É aí que encontramos a APM, é a tal cascata, perdida no meio da selva, que nos vai saciar a sede.

Quando começamos a carreira profissional não dispomos de materiais para usufruto próprio. Então, o que fazer? Temos duas hipóteses: criar tarefas e materiais diversos ou adaptar os que já foram feitos e que, de alguma forma, nos chegam. É sobre a segunda hipótese que quero reflectir.

Para jovens professores, em início de carreira, ter um leque de materiais diversos à disposição, assim como estar a par das práticas pedagógicas através do que a APM divulga e disponibiliza, é uma mais valia. Esta associação consegue motivar o professor e estimular, de certa forma, a sua criatividade, ao disponibilizar-lhe uma série de recursos que ele pode, ou não, modificar, com vista a aplicá-los na sua prática lectiva. Alguns dos recursos a que tenho recorrido, de modo a diversificar as minhas aulas, são a revista Educação e Matemática; o site que dispõe de uma variedade de propostas: problemas, tarefas de exploração, a *software* didáctico que recorre a pequenos *applets*; várias exposições temáticas que a APM disponibiliza às escolas ou aos encontros que a APM promove, do qual é exemplo o ProfMat, onde se trocam experiências, onde se contam desafios que enfrentamos diariamente enquanto docentes e onde se descobrem concepções, saberes, práticas, atitudes e vivências profissionais dos professores, que muito nos influenciam na forma como levamos os currículos à prática.

Vou-me centrar agora no que me levou, este ano, a recorrer à revista de Educação e Matemática. Era recém-licenciada, e fui colocada numa escola particular, nos arredores de Lisboa, a leccionar o 5° ano de escolaridade[1]. Dispunha apenas da minha vontade, já não tinha orientadores a quem recorrer e era da minha responsabilidade seguir o manual, ou procurar e criar tarefas interessantes que permitissem levar os alunos à descoberta dos conteúdos. Ia leccionar as propriedades da multiplicação. No manual, vinham explicadas as principais propriedades da multiplicação e, depois, seguiam-se exercícios diversos de aplicação.

Decidi dar um significado diferente a este subtema. Lembrei-me que, em tempos, tinha lido na revista Educação e Matemática, um artigo sobre uma tarefa proposta de exploração de um *applet* que explorava as Propriedades da multiplicação, intitulado Rã. No artigo vinha referido o *site* e foi assim que parti à descoberta de alimento para os meus alunos. Encontrei-o, provei, vi que era saboroso e decidi trazê-lo para, a sala de aula. Fomos, numa aula de 45 minutos, para a sala de informática. Cada dois alunos dispunha de um computador, foi explicado aos alunos o caminho para aceder ao delicioso alimento e, depois deles o encontrarem, foi-lhes dado a provar. Esta tarefa tinha duas fases, a primeira tinha como objectivo os alunos explorarem o programa, propondo um produto de factores com a respectiva resposta a uma Rã e esta propunha-lhes um outro produto, relacionado com o anterior, a que os alunos teriam de dar o resultado rapidamente. Como o fariam? Máquina de calcular: não podiam utilizar. Teriam de arranjar, portanto, uma forma rápida de obter a resposta. Como os alunos já tinham aprendido as Propriedades da adição, a ideia era deixá-los criar pontes entre as propriedades de que se haviam apropriado para as propriedades da multiplicação. Como os alunos, em situação de aula, estavam habituados a trabalhar em díade (aos pares) esta tarefa foi, naturalmente, bem aceite. Segundo César (2000a, 2000b), as interacções sociais facilitam o desenvolvimento socio-cognitivo e a apropriação de conhecimentos, por parte dos alunos, sendo também uma maneira de motivá-los e ajudá-los a desenvolver atitudes mais positivas face à Matemática. O trabalho colaborativo facilita a autonomia dos alunos, contribuindo para um melhor aproveitamento e para o seu próprio desenvolvimento. Nesta tarefa, foi visível a entre-ajuda e a partilha de estratégias para tentar ultrapassar os imensos desafios que a Rã lhes propunha e mesmo para realizar a segunda fase da tarefa que consistia no seguinte: um dos alunos propunha uma multiplicação e o seu parceiro, fazendo de rã, devolvia-lhe um outro produto relacionado com o anterior; cada aluno explicava ao colega a tarefa que tinham de desempenhar, caso surgissem dúvidas.

Após a exploração do programa, voltámos à sala de aula. Nos restantes 45 minutos, fizemos uma discussão geral, onde conseguimos descobrir todas as Propriedades da multiplicação e identificá-las com o rigor desejável. Foi feita, assim, uma actividade diferente com os alunos, cuja ambição é fugir à rotina diária das várias disciplinas.

Do meu ponto de vista, qualquer professor deve procurar ser flexível, aventureiro, activo e criativo. Devemos impor dinâmica na nossa metodologia de aula e recorrer sempre ao que temos ao nosso dispor. Obrigada por existires, APM!

Nota

1 Refira-se que leccionei, no ano de estágio, o 7° e o 9° anos de escolaridade

Referências bibliográficas

César, M. (2000a). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada. In J.P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação e matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da escola de verão em educação em matemática — 1999* (pp. 5–46). Lisboa: SPCE — Secção de Educação Matemática.

César, M. (2000b). Interacções na aula de matemática: mm percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J.P. da Ponte, J.M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de matemática* (pp. 13–34). Viseu: SPCE — Secção de Educação Matemática.

Andreia Sénica

ProfMat 2007

O ProfMat 2007 realiza-se, nos dias 7 a 9 de Novembro, na Escola Secundária Jerónimo Emiliano de Andrade, bem no centro de Angra do Heroísmo. No sitio oficial do evento, em <http://www.profmat2007.com>, poderá encontrar informação relevante sobre o encontro nacional de professores de matemática e fazer a sua inscrição.

SIEM XVIII

O XVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática realiza-se este ano nos dias 5 e 6 de Novembro nos Açores, na Ilha Terceira. Mais informações poderão ser obtidas em <http://www.profmat2007.com/siem.htm>.

Junte-se à APM em 2007

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

Quadro 1

<table>
<tr><th>Sócio</th><th>Sócio residente no estrangeiro</th><th>Sócio Estudante</th><th>Sócio Aposentado</th><th>@-Sócio*</th></tr>
<tr><td>47,50€</td><td>51,60€</td><td>33,50€</td><td>37,00€</td><td>37,00€</td></tr>
<tr><td colspan="4">Revista Educação e Matemática impressa e on-line
(saem 5 números por ano e uma delas é temática)</td><td>Revista Educação e Matemática on-line</td></tr>
<tr><td colspan="4">APMinformação impresso e on-line (4 números por ano)</td><td>APMinformação on-line</td></tr>
<tr><td colspan="5">Opção de assinatura da revista Quadrante impressa (2 números por ano — 11,00 €)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acesso à zona on-line para sócios</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa
Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento</td></tr>
<tr><td colspan="5">Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção</td></tr>
</table>

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Instituições

Quadro 2

Opções			Valor
Opção 1	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)		36,50€
Opção 2	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)		21€
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	47,50€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15,50€
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* — 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	68€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15,50€

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções