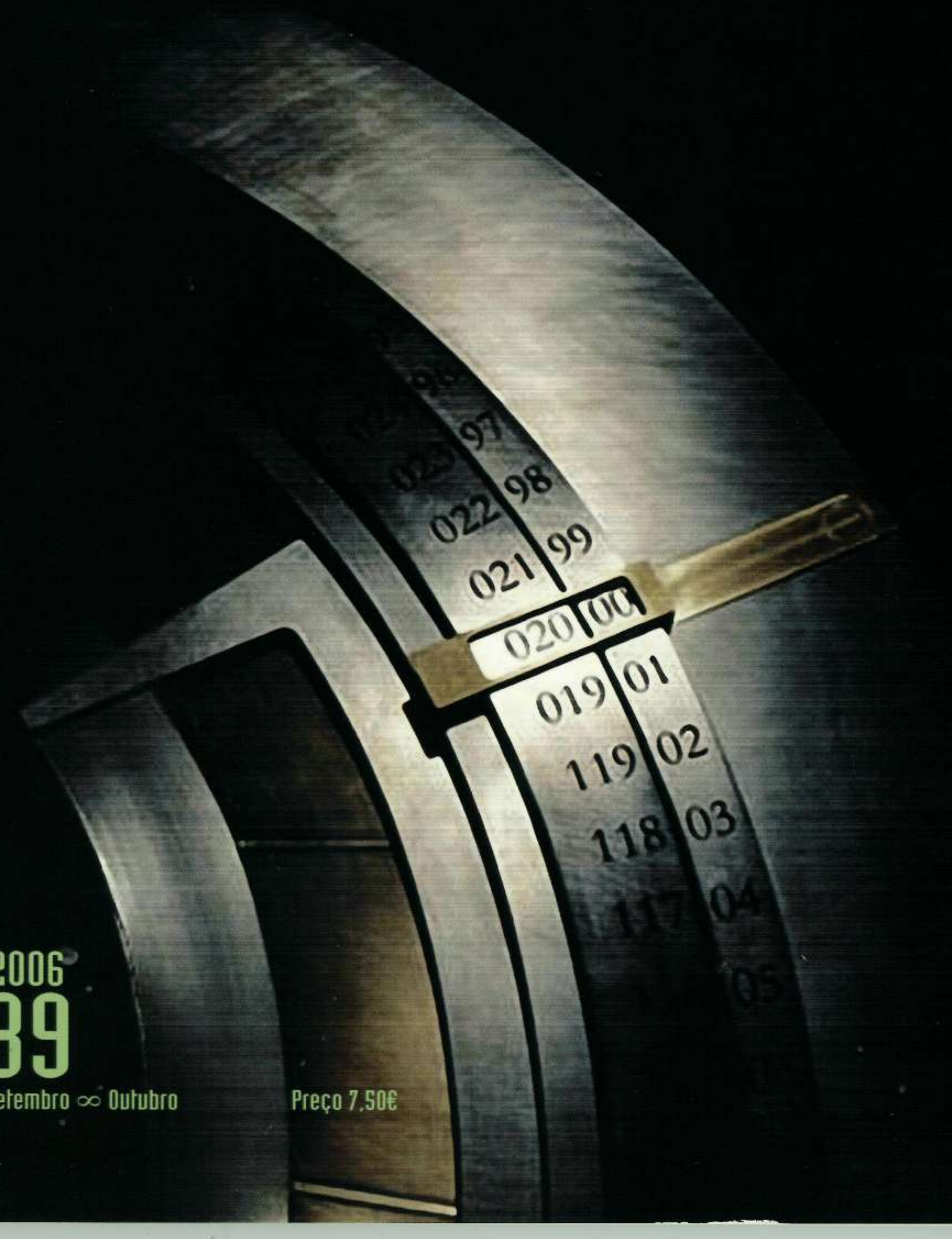
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2006

89

Setembro ∞ Outubro

Preço 7,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Outubro 2006
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Etigráfe, Artes Gráficas Lda.
Montemor — 2670-502 Loures

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
Porte Pago

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado à *Matemática e Tempo*, o tema escolhido pela APM em 2006.

O nome do Luís Reis para editor convidado surgiu de imediato dado o gosto que sabíamos ter pelo tema. Agradecemos a forma entusiasta como aceitou e se envolveu neste desafio e também o Tempo colocado na preparação desta revista.

Para além do editorial, da condução da entrevista ao professor Rui Agostinho, da tradução do artigo *Calendários modernos e fracções continuadas*, o Luís integrou e liderou a equipa responsável por este número, tendo um papel determinante em todo o processo da sua construção.

Sobre a capa

A capa deste número (dedicado ao tempo) foi concebida em torno de uma imagem de um detalhe de um relógio mecânico construído para marcar o tempo com precisão durante 10000 anos.

A ideia da construção partiu de Danny Hillis, um especialista em teoria da computação, que pretendeu fazer deste objecto um ícone do pensamento a longo prazo. Esta ideia conduziu a um programa filosófico completo que pode ser consultado no site da Long Now Foundation,

`http://www.longnow.org`

Este grito contra uma certa trivialidade e um certo carácter efémero do pensamento moderno, ambos fruto de uma actividade frenética, cada vez mais irreflectida e distanciada dos aspectos fundamentais, tem todo o cabimento. Chama a atenção para a necessidade de retomar a discussão das questões e das tarefas essenciais que, pela sua natureza requerem um tempo apenas acessível à humanidade como um todo.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Emília Nogueira, Ana Mendes, Ana Paula Silva, Ana Vieira Lopes, Carlos Correia de Sá, Carlos Fiolhais, Cristina Castro, Cristina Loureiro, Dora Esteves, Eduardo Veloso, Fernando Nunes, Henrique Manuel Guimarães, Henrique Varandas, Isabel Cristina Dias, Joaquim Félix, Luís Filipe Marques Pinto, Luís Reis, Manuel Lagido, Matilde Almeida, Pedro Miguel Oliveira, Rita Bastos, Rosário Monteiro, Rui Agostinho, Sandra Faria, Sandra Rodrigues, Sofia Galvão, Teresa Barandela.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: `revista@apm.pt`

Nota

Editorial

Tema e variações

Luís Reis

2006: 20 anos da APM, 6º ano temático. Os algarismos clamavam pelo Tempo, era óbvio. E é um tema fascinante, convenhamos. O conceito oferece diferentes leituras, conforme as áreas de estudo e as representações. O tempo do astrónomo, do filósofo, do historiador, do poeta, do psicólogo, do artista... E, claro, o tempo do professor, a escola é tão marcada pelo tempo.

Não sou seguramente um exemplo de professor que gere bem o seu tempo. Sempre o senti como um forte constrangimento. O cumprimento dos programas, a selecção de estratégias adequadas, a devida atenção a todos os alunos, a duração e o rendimento das aulas — que teima em não ser aquele que pretendemos — a correcção de testes e trabalhos, a produtividade das reuniões, enfim, são muitos os exemplos em que o tempo é um factor relevante. "Não há tempo", "precisava de mais tempo", "perde-se tanto tempo" são expressões comuns entre os professores. Para não falar do toque da campainha, símbolo por excelência do ritmo do tempo na escola.

O tempo é, efectivamente, um elemento fundamental na estruturação do trabalho dos professores. A questão é que pode ter um papel inibidor na geração da mudança e inovação, ambas requerem tempo. Como é que cada um de nós encara o seu tempo: horizonte de possibilidades ou constrangimento opressivo? Oportunidade ou desculpa?

A minha carreira profissional tem sensivelmente a mesma idade que a APM, comecei a leccionar no distante ano lectivo de 1985/86. Nestes cerca de 20 anos, a natureza e as exigências da profissão de professor mudaram muito. As alterações curriculares têm sido constantes no sistema educativo. Surgiram novas disciplinas e áreas curriculares. O perfil da população escolar modificou-se; em particular, alunos com necessidades educativas especiais passaram a frequentar as aulas regulares. A escola abriu-se mais ao exterior e aumentou a comunicação com os encarregados de educação. Também a comunicação e colaboração com colegas se tornaram mais frequentes. A tecnologia entrou na escola e na sala de aula, colocando continuamente novas exigências. As estratégias e os instrumentos de avaliação modificaram-se. A formação contínua tornou-se obrigatória. E por aí fora...

Nestes 20 anos, as responsabilidades do professor alargaram-se. Mas também se tornou mais difuso o seu papel. O tempo melhorou ou piorou a profissão?

O nosso tempo é de globalização, competitividade e comparação o que, aliado à situação nacional de crise económica (e cultural?), gera insegurança e propicia o pânico sobre o modo como estamos a preparar as futuras gerações. À educação, em geral, e às escolas, em particular, vêm parar todos os problemas da sociedade, com ou sem solução. Haverá poucos que saibam fazer muito pela economia, mas todos — desde o político ao cidadão comum, passando pelo comentador — sabem fazer algo pela educação.

A receita para a regeneração do nosso contexto precário assenta em dois vectores, a avaliar pelo que se diz. Por um lado, a escola tem de pôr a tónica na ciência e na tecnologia, motores do progresso. Por outro lado, há que melhorar os resultados em competências básicas e restaurar padrões académicos tradicionais. Tudo bem controlado por exames. A ideia implícita é que temos de subir degraus nos *rankings* internacionais, espelhos da nossa vergonha.

Adivinhem: se a solução passa pela ciência, qual a melhor área para a simbolizar?

Este é um tempo em que a tutela se aproveita do complexo de culpa que os professores consciente ou inconscientemente carregam sobre os ombros, de acharem que não fizeram o suficiente, ou que não fizeram suficientemente bem. E de aproveitamento de uma opinião mais ou menos generalizada de que os professores trabalham pouco ou que pouco se interessam pelos alunos. O sentido da política educativa tem sido, pois, a da intensificação: do tempo do professor na escola, do trabalho burocrático e da prestação de contas (*accountability*, como se diz em inglês). Tudo isto num cenário de crescente instabilidade na carreira. Esse aumento de quantidade significa aumento de qualidade? O tempo o dirá.

Perdi-me no tema, não é nada disto que este número temático aborda. Pois aqui o Tempo é essencialmente tratado como grandeza físico-matemática: o percurso histórico e a medição. Poderá ler, por exemplo, sobre calendários — construções científicas e culturais — e, inevitavelmente, sobre relógios de sol.

A sabedoria popular está também ela repleta de metáforas e ditos sobre o Tempo.

Para terminar escolho apenas um: "Atrás do tempo, tempo vem". Encerra a esperança de tempos melhores. Para todos, muito especialmente para os professores.

Luís Reis
Centro de Competência CRIE da UCP-ESB

Publicações APM

Agenda do Professor 2006-2007
Dia-a-dia com a Matemática

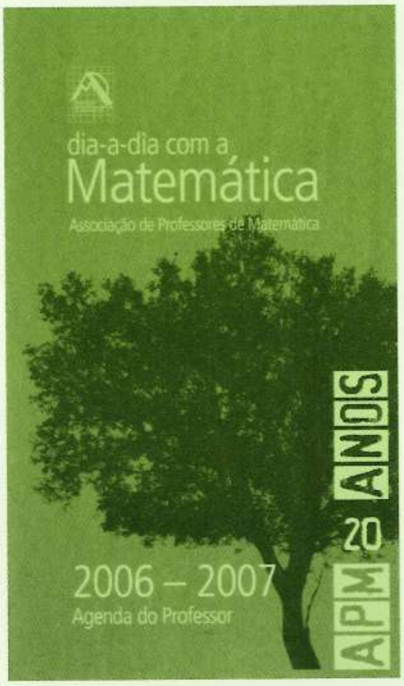
Edição APM
Organizadores Anabela Gaio, Idália Pesquita e Ilda Rafael
156 pp., Setemrbo de 2006
Sócio 4,00€ | *PVP* 5,60€

Agenda comemorativa dos 20 anos de vida da APM. Nota de abertura: "Nos últimos anos, por ocasião do mês de Setembro, tem acontecido o lançamento da agenda Dia-a-Dia com a Matemática. Dando continuidade a este aspecto da linha editorial da APM mais uma agenda está pronta, visando proporcionar aos sócios um meio de organizarem o trabalho do ano lectivo que agora começa disponibilizando, como vem sendo hábito, um conjunto de actividades de carácter simultaneamente lúdico e educativo que, esperamos, seja do seu agrado. Este número da agenda associa-se igualmente às comemorações dos 20 anos da APM. Os separadores dos meses contém diverso material gráfico que, de um modo ou de outro, retrata aspectos importantes da associação. Quer sejam aspectos ligados à sua criação, quer sejam publicações e realizações de destaque, ou até aspectos inerentes à sua própria organização, de que se destaca o papel dos núcleos regionais. Como é de calcular, 20 anos de vida associativa, só podem ser retratados de modo subjectivo e parcial ao longo de 13 separadores. Deste modo, muitos aspectos de relevo ficam necessariamente por assinalar, em particular o papel central que é desempenhado pelos grupos de trabalho da APM. A equipa da agenda gostaria de felicitar todos aqueles associados que, com o seu esforço e dedicação, tornaram possíveis estes 20 anos de vida da APM, desejando que este esforço em prol da Educação e da Matemática possa ter continuidade."

Edição especial comemorativa dos 20 anos da APM
Relógio de pulso

Sócio 20,00€ | *PVP* 30,00€

Relógio de pulso, em tons de azul, concebido no âmbito do Ano Temático *A Matemática e o Tempo*, especialmente para assinalar os 20 Anos da APM. Design da autoria de Nuno Carvalho.



Pasta de Actividades
Materiais para o 1° ciclo

Edição APM
Versão reformulada, 2006
Sócio 12,50€ | *PVP* 18,75€

Continuando com a preocupação de produzir materiais para apoiar o trabalho dos professores nas Escolas, a APM reeditou a pasta de materiais do 1° ciclo, desta vez em versão reformulada.

Consiste em dois cadernos com actividades para a sala de aula, no 1°ciclo, utilizando materiais manipuláveis (tangram, cubos, geoplano, lápis, fósforos, entre outros) e a calculadora. Estes cadernos são uma reformulação das pastas de Actividades para o 1° Ciclo(I) e (II).

Um relógio analemático na ESE de Setúbal

Rita Bastos e Eduardo Veloso

Quando os participantes no ProfMat 2006 começarem a chegar à ESE de Setúbal, na tarde do dia 14 de Novembro, encontrarão, se tudo correr como esperamos, uma grande elipse desenhada num dos pátios da escola, com marcas assinalando as horas do dia. No eixo menor da elipse estará espetada uma vara vertical que projectará uma sombra que irá intersectar a elipse na marca que corresponde (por exemplo) às 17 horas e 45 minutos. Olhando para o seu relógio de pulso e fazendo alguns ajustes indicados num painel perto da elipse, cada participante poderá constatar (esperamos!) a exactidão deste relógio de Sol (chamado) analemático. No Centro de Ciência Viva de Constância existe um relógio do mesmo tipo cuja foto, amavelmente cedida pelo Centro, publicamos aqui. Neste artigo descreveremos o que é um relógio analemático e tentaremos demonstrar porque razão funciona. As razões do seu nome e a sua origem são obscuras e sobre isso remetemos os leitores para uma nota final.

Nos relógios de Sol existe quase sempre um mostrador graduado (indicando as horas do dia) e uma haste ou vara (o gnómon) que projecta a sombra do Sol sobre o mostrador. No relógio analemático o mostrador é uma elipse desenhada no chão (supostamente plano e horizontal) e o gnómon é vertical e a sua posição depende do dia do ano (ao longo de um segmento contido no eixo menor da elipse). Para compreender o seu fundamento é essencial ter uma ideia clara do que é a esfera celeste.

Uma esfera celeste de 10 metros de raio, porque não?

É irresistível, mesmo depois de tudo o que sabemos, não pensar que a Terra onde vivemos é o centro de uma enorme esfera celeste onde estão incrustadas as estrelas e sobre cuja superfície vagueiam o Sol, os planetas do sistema solar, os cometas, os satélites artificiais, etc. Excluindo os satélites artificiais, todos os outros objectos celestes estão a distâncias enormes da Terra, se as compararmos com o raio da Terra. Portanto, a Terra é mesmo o centro pontual T dessa esfera celeste imaginária. Para localizarmos os seus pontos, projectamos os círculos e pontos fundamentais que usamos sobre a Terra na esfera celeste, a partir do centro da Terra, e acrescentamos o nome *celeste*. Obtemos assim o *equador celeste* ($Eq - Eq'$), os *pólos celestes* (P_N e P_S), os *meridianos celestes* e os *paralelos celestes*. E ainda o *horizonte celeste* (*hor. cel.*) (associado à nossa posição sobre a Terra) e o *Zénite* (Z) e o *Nadir* (Na) (respectivamente o ponto exactamente acima da nossa cabeça na esfera celeste e o seu antípoda). Colocando, como é *normal*, o horizonte horizontal a figu-

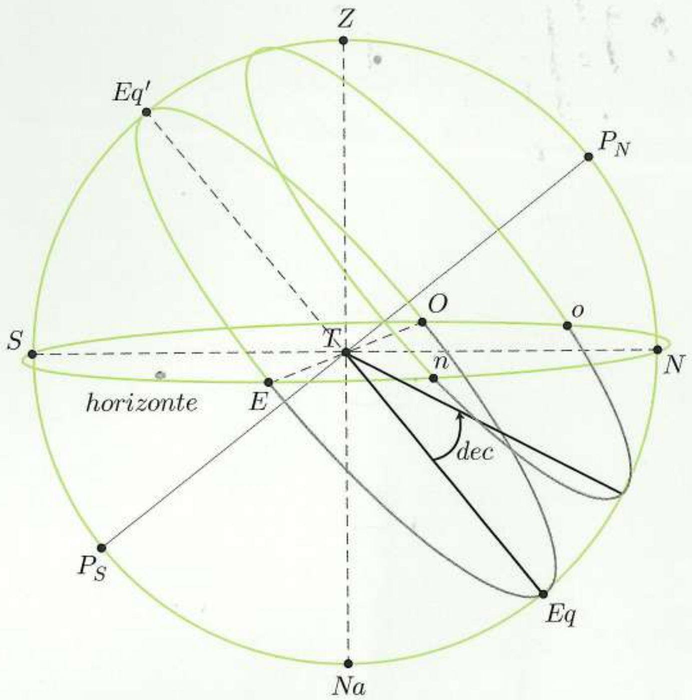


Figura 1.

ra 1 dá conta dessa nossa imaginária esfera celeste, em que a latitude escolhida (ângulo $Eq'TZ$) foi 38° — aproximadamente a de Setúbal. Acrescentámos na figura os pontos cardeais sobre o horizonte N, S, E, e O (pense o leitor um pouco como decidimos essa localização dos pontos cardeais). É certo que nós sabemos que a Terra não é o centro do Universo, que o Sol não se move em torno da Terra mas o contrário é que é verdadeiro, etc.. Mas, do ponto de vista matemático, essa verdade física não é muito importante, podemos abstrair do que não interessa, e neste caso a disputa entre o heliocentrismo ou o geocentrismo é-nos indiferente, o nosso modelo geocêntrico é mais conveniente e intuitivo e não vai afectar as conclusões. Sabemos também que as distâncias a que estão os astros da Terra pode ser muito diferente: a luz demora mais de 4000 anos a chegar à Terra quando vem da *Proxima Centauri* (estrela mais próxima da Terra se excluirmos o Sol) e apenas cerca de 9 minutos quando vem do Sol! Portanto, a esfera celeste está longe de ser uma esfera ... Mas a matemática e em particular o estudo das projecções centrais ajuda-nos a compreender que isso não tem importância, por assim dizer cada astro na esfera celeste é *mais uma direcção do que um ponto*. O astro pode estar mais perto ou mais longe, o que interessa para nós é a direcção de onde recebemos a sua luz! Portanto, se imaginarmos uma esfera em torno de nós com um raio de 10 metros, digamos, o ponto em que o raio de luz vindo de cada astro intersecta essa esfera pode ser para nós a *verdadeira* posição do astro. Ou seja, do ponto de vista do seu funcionamento, tanto dá considerar a esfera celeste de dimensão *infinita* ou considerá-la com 10 metros de raio. Matematicamente, do ponto de vista do movimento dos astros em torno de nós, é tudo equivalente. Mas devemos ter em conta um ponto importante, pois se o desprezarmos o modelo ficará inutilizável: não podemos considerar que o astro é uma *lâmpada* a 10 metros de distância, pois então os seus raios ao chegar à Terra num dado momento não seriam paralelos! Estando o astro, em particular o Sol, a enorme distância de nós, os seus raios num dado instante são todos paralelos entre si. Isto é fundamental para o que se segue.

A direcção do Sol, em cada momento, é dada pela recta que une o Sol na *esfera celeste* com o centro da esfera. Nesse momento, e em *qualquer outro ponto* da Terra, a luz do Sol tem a mesma direcção.

Precisamos também de compreender bem o movimento do Sol no modelo que estamos a utilizar. Devido ao movimento diurno de rotação da Terra (em torno do eixo P_NP_S), em cada dia o Sol descreve uma circunferência paralela ao equador celeste e centrada no mesmo eixo. Também é conhecido que, devido ao movimento de translação e à inclinação do eixo da Terra relativamente ao plano da sua órbita, essa circunferência varia ao longo do ano. Nos equinócios, o Sol descreve exactamente o equador celeste no sentido negativo (o dos ponteiros do relógio para quem olha do P_N para o equador: parte de Eq, passa por E, por Eq' e por O, voltando a Eq). Os equinócios ocorrem cerca do dia 21 de Março (equinócio da Primavera) e do dia 21 de Dezembro (equinócio do Inverno). Nesses dias a declinação do Sol (ângulo dec) é muito próxima dos 0° (ver figura 1). Como se compreende claramente na figura, o Sol nasce (passa para cima do horizonte) ao passar no ponto cardeal *Este* e tem o seu ocaso quando passa no ponto cardeal *Oeste*. Assim, nessa data, a noite é igual ao dia (daí a palavra equinócio). No solestício de Verão, que ocorre em 21 de Junho, o Sol tem cerca de 23,5° de declinação positiva e percorre no sentido negativo um paralelo celeste, representado na figura, e correspondente ao Trópico de Cancer. Como se depreende da figura, esse é o dia do ano em que o Sol está mais tempo acima do horizonte (nasce no ponto n e tem o seu ocaso no ponto o).

Portanto, *se imaginarmos um modelo de esfera celeste com 10 metros de raio* (o raio a escolher vai depender do espaço que vamos utilizar no pátio da ESE para traçar a elipse), o que vamos fazer na próxima secção é, usando a sua representação em duas vistas, mostrar como chegamos à elipse para mostrador do relógio analemático, e como marcamos as horas nessa elipse.

Traçado de um relógio analemático válido nos equinócios

Está claro que nós queremos um relógio válido para todo o ano, e não apenas para dois dias ... O que vamos fazer é descrever a construção e marcação de um relógio *em princípio* válido apenas para os equinócios e depois mostrar que, variando a posição do gnómon, ele será válido para todos os dias do ano.

Na figura 2 apresentamos os elementos fundamentais dessa construção e marcação (naturalmente feita num programa de geometria dinâmica, como o *Sketchpad*, modo ideal de compreender o que se passa). Seja em que dia for do ano, o Sol verdadeiro descreve uma circunferência em torno do eixo da esfera celeste, e portanto o ponto de partida que adoptámos foi construir em esquema essa circunferência (no topo da figura), marcar as horas (0 h a 24 h, com intervalos de 15°) e colocar um Sol (S_1) a rodar em sentido retrógado (para quem esteja a ver essa rotação a partir do Pólo Norte celeste). Para fixar ideias, a posição de S_1 indica que, em termos de Sol verdadeiro, estamos neste momento entre as 9 e as 10 horas da manhã, digamos 9 h 40 min. A figura inclui também a vista de frente (a meio) e a planta (projecção no plano do horizonte) da tal esfera celeste com 10 metros de raio. Observe bem as duas figuras e compare-as com a vista em perspectiva cavaleira da figura 1 (na figura 2 também a latitude do lugar considerada é 38° N). Identifique na vista de frente os pólos celestes e o equador celeste, o Zénite e o Nadir, o horizonte celeste, um paralelo de declinação (dd'), e os paralelos de declinação correspondentes aos solestícios de Verão (declinação positiva máxima do Sol, $\delta \approx 23{,}5°$) e de Inverno (declinação negativa mínima do Sol, $\delta \approx -23{,}5°$) — estes paralelos são identificados pelas designações Can e Cap pois correspondem aos trópicos de Cancer e Capricórnio na Terra. A circunferência na vista de frente é o meridiano celeste do lugar (círculo máximo passando pelo Zénite e pelos pólos). Em planta apenas estão representados o horizonte (uma circunferência) em verdadeira grandeza, sobre ele os respectivos pontos cardeais N, S, E e O, e ainda a projecção do equador celeste sobre o horizonte — uma elipse que vai ser o mostrador do relógio analemático a construir no pátio da ESE. Como se transfere a posição do Sol e das horas da circunferência inicial para a elipse final?

1. o ângulo correspondente à posição S_1, indicado a sombreado, transfere-se para a circunferência exterior da vista de frente, marcando-o também em sentido directo a partir do ponto Eq. Note-se que estamos no equinócio, o Sol está a percorrer o equador celeste e a circunferência exterior pode representar também (além de ser como já dissemos o meridiano celeste) o equador rodado de 90° em torno do segmento $EqEq'$, e assim tem sentido marcar-se aí o ângulo, também indicado a sombreado. Obtemos assim o ponto S_2.
2. por meio de uma perpendicular ao segmento $EqEq'$ tirada por S_2, obtém-se a posição do Sol sobre o equador celeste visto de frente, seja S_3;
3. finalmente, transfere-se a posição do Sol S_3 para a planta (por meio de uma linha auxiliar vertical não representada na figura), e obtém-se assim o Sol S_4 sobre a elipse.

No documento Sketchpad correspondente à figura 2 (de que pode fazer o download em `www2.apm.pt`), se arrastar o ponto S_1 na circunferência inicial, simulando a rotação do Sol em torno do eixo da esfera celeste, poderá ver o movimento resultante do Sol sobre o equador celeste, tanto na vista de frente como na planta, ou seja, do ponto S_4 sobre a

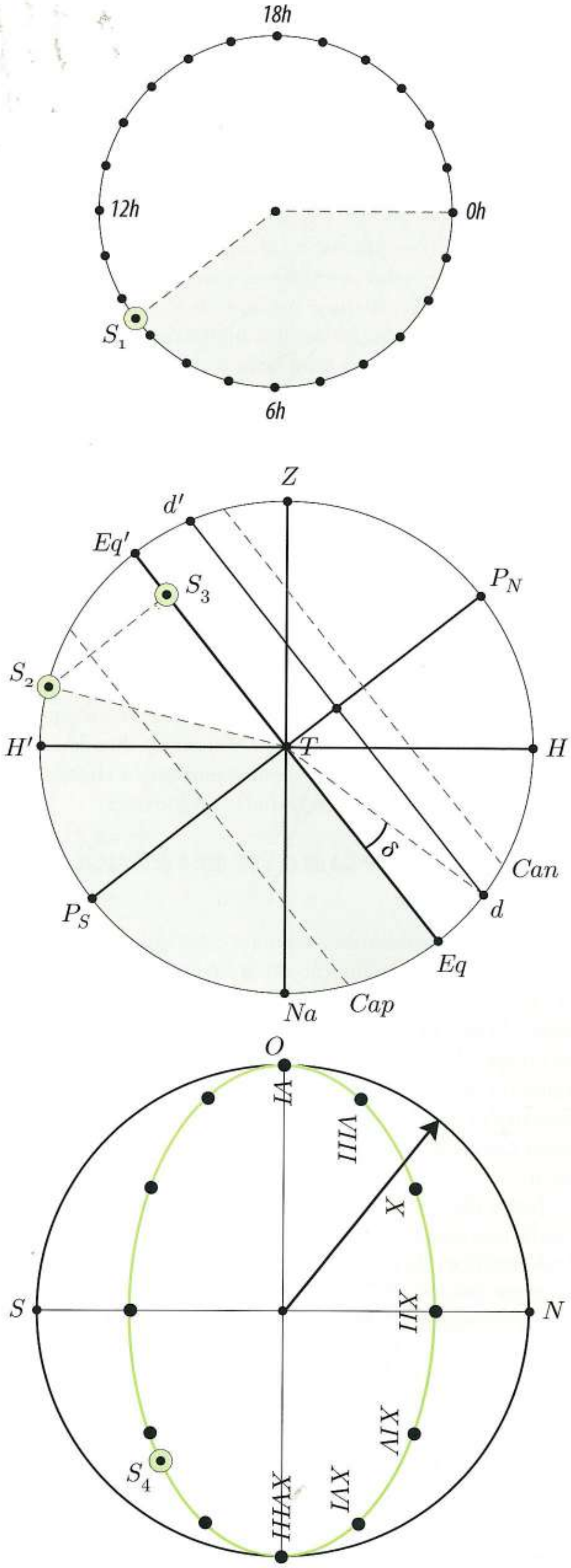


Figura 2.

elipse. Note que o nascimento do Sol se dá quando na vista de frente o Sol passa para cima do horizonte, e isso ocorre precisamente no ponto cardeal E (ver isto na planta da esfera celeste). O transporte das marcas das horas (da circunferência inicial para o mostrador elíptico) faz-se exactamente pelo mesmo processo, repetindo a construção para cada marca. As marcas obtidas na elipse correspondem, no entanto, às posições do Sol, e nós queremos ver as horas através das intersecções da sombra de um gnómon, colocado no centro da elipse, sobre a própria elipse. Por isso as marcações das horas sobre a elipse necessitam de mais um quarto passo — obtida a posição de uma marca de hora pelos três passos anteriores, há que fazer uma meia-volta (rotação de 180°) em torno do centro da elipse para obter a marca final da hora sobre a elipse. Para a posição do Sol às 9 h 40 min, a seta indica a sombra do gnómon e as horas são lidas na intersecção da seta com a elipse. Sobre esta, na figura, apenas marcámos algumas horas para não sobrecarregar a figura.

Como se pode agora perceber, traçar uma elipse no chão, marcar sobre ela as horas do dia e utilizar a intersecção com a elipse da sombra de um gnómon (ou mesmo de uma pessoa) para saber que horas são dá algum trabalho, mas teoricamente não tem nada de transcendente. Simplesmente, a solução que encontrámos e a construção que fizemos apenas é válida para dois dias do ano, correspondentes aos equinócios da Primavera e do Outono ... Nos outros dias do ano, o Sol não percorre o equador celeste e portanto a elipse a traçar seria outra (uma para cada dia!) ... Que fazer?

Análise da situação num dia do ano em que a declinação do Sol não seja 0

Hoje, dia em que estamos a escrever estas linhas, é 20 de Julho (de 2006) e a declinação do Sol é cerca de 20°. Vamos refazer a figura 2 para comparar a direcção das sombras, à mesma hora, entre um Sol nesta declinação e um Sol com declinação 0. Como a figura 2 já nos dá essa direcção no segundo caso, vamos sobre essa figura (simplificada sem as construções anteriores) traçar a direcção da sombra no primeiro caso. Obtemos assim a figura 3, que passamos a explicar.

Neste dia, o Sol está a percorrer também uma circunferência, mas agora trata-se do paralelo de declinação 20°, dd'. À mesma hora da figura 2, às 9 h 40 min, a sua posição sobre o paralelo de declinação encontra-se de modo análogo ao que fizemos para o Sol sobre o equador celeste, servindonos agora da circunferência a tracejado, que representa em verdadeira grandeza o paralelo de declinação. Obtemos assim a posição do Sol S_3'. Ou seja, se olharmos para o céu a essa hora veremos o Sol nessa posição. Podemos então imaginar um círculo máximo, passando pelo Zénite, pelo Nadir e pelo Sol (chamado círculo de alturas do Sol e na figura representado por uma elipse na vista de frente) e imaginar também a sua intersecção A com o horizonte. Se transportarmos o ponto A para a circunferência, que em planta representa o horizonte, obtemos o ponto B. Podemos então traçar a direcção das sombras a essa hora relativas ao Sol

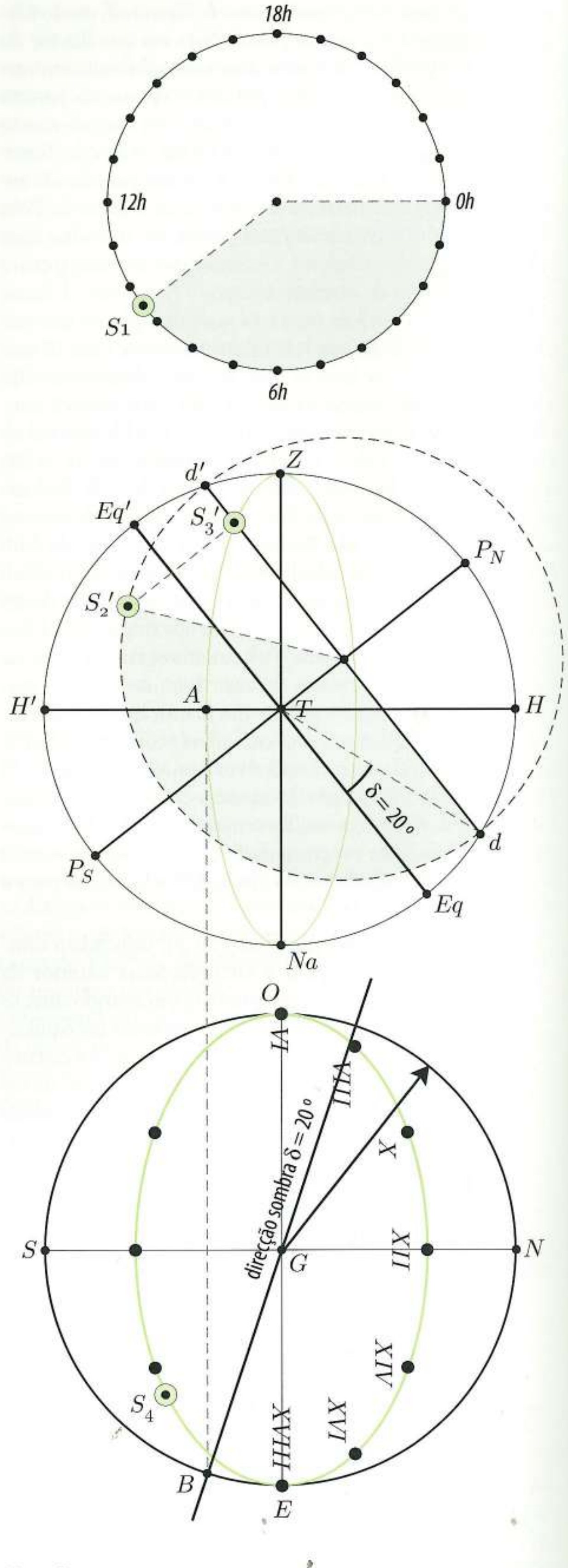


Figura 3.

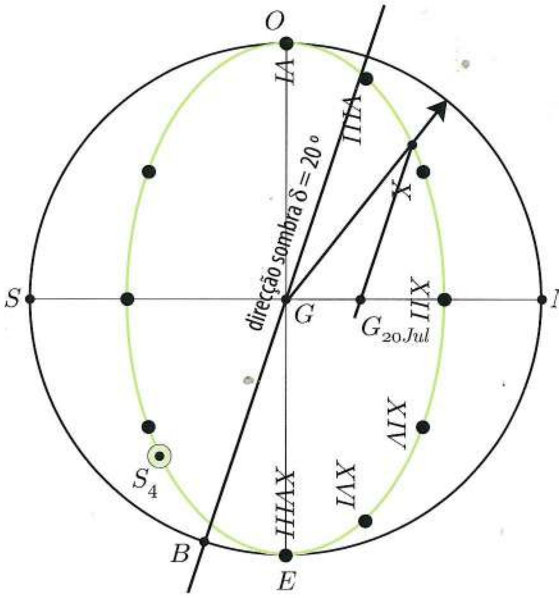


Figura 4.

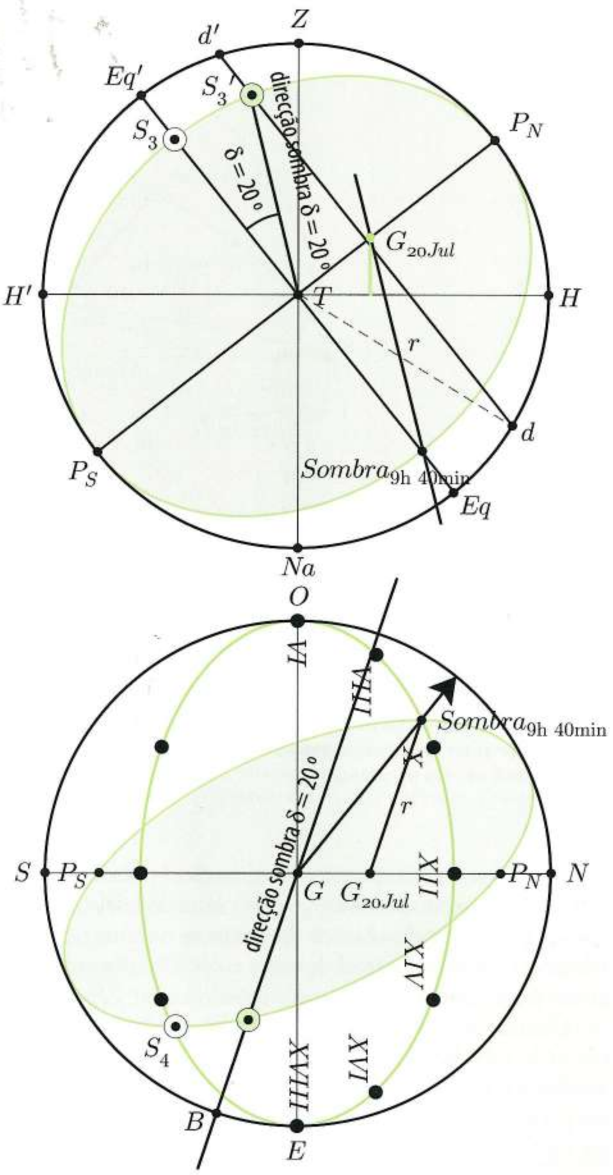


Figura 5.

com declinação igual a 20° e ver que *se usássemos um gnómon situado no centro da elipse*, como fizemos para o Sol no equinócio, a hora obtida *com a mesma graduação* seria muito errada — onde antes tínhamos 9 h 40 min, agora ainda não seriam 8 da manhã ...

Para obter a mesma intersecção com a elipse, e obter a mesma hora, dado que as sombras de gnómons paralelos são paralelas, o gnómon deveria estar mais para a direita, no ponto $G_{20\text{Jul}}$ (o que significa posição do gnómon para ver as horas no dia 20 de Julho!) da figura 4. Esse ponto foi obtido tirando pela hora pretendida uma paralela à direcção da sombra do Sol ($\delta = 20°$) e intersectando-a com o semi-eixo menor da elipse. Mas se o leitor está a seguir com atenção esta descrição, certamente levantará algumas questões: isso é válido para uma certa hora, será válido ao longo do dia, para as outras horas? Além disso, poderemos afirmar que as horas marcadas sobre a elipse (e que, recordemos, se referem ao Sol no equinócio) *continuam a valer para outros dias em que a declinação seja diferente de zero?* Se o leitor tem possibilidade de experimentar o documento *Sketchpad* citado, constará experimentalmente que isso é verdade durante todo o dia 20 de Julho, desde que coloquemos o gnómon no ponto $G_{20\text{Jul}}$: arrastando o ponto S_1, e variando assim as horas ao longo do dia, obtemos sempre pela construção da figura 4 o mesmo ponto $G_{20\text{Jul}}$. Pode ainda constatar que isto é verdade qualquer que seja o dia do ano. Ou seja, existe uma posição do gnómon para cada dia do ano, tal que, se for utilizada, a elipse feita para o equinócio e com as horas marcadas para esses dois dias do ano serve também para o resto do ano.

No ponto seguinte, explicaremos este facto.

Sobre a localização do gnómon

Observe agora, na vista de frente da figura 5, a mesma construção que fizemos na planta, ou seja, no plano do horizonte, na figura 4. Consideremos agora o plano do meridiano celeste do Sol, que contém os pólos celestiais (P_N, P_S), o Sol à hora a que nos referimos (S_3') e o Sol equinocial à mesma hora (S_3). O plano do meridiano, representado pelas elipses sombreadas nas duas vistas, não está em verdadeira grandeza em nenhuma das vistas, é um plano que roda 360° em torno do eixo P_NP_S durante o dia, levado pelo movimento do Sol no paralelo, e só fica de frente para o observador às 0 e 12 horas. É nesse plano que está a recta que nos dá a direcção da sombra no dia 20 de Julho às 9 h 40 min ($S_3'T$) e a recta r, paralela a essa direcção passando pelo ponto do equador que corresponde à sombra à mesma hora ($Sombra_{9\,h\,40\,min}$) no dia

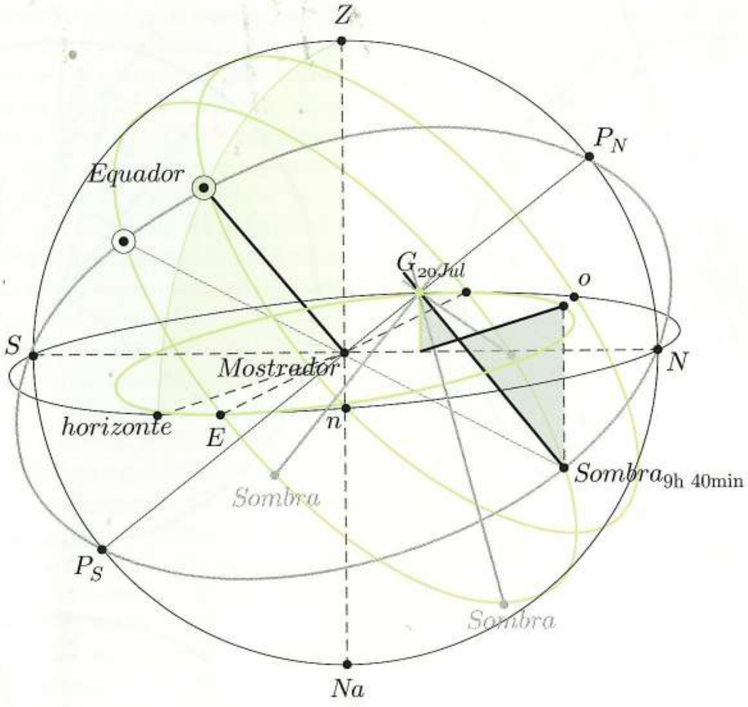


Figura 6.

do equinócio, ou seja quando a declinação é nula. Como é a projecção do ponto $Sombra_{9\,h\,40\,min}$ no plano do horizonte que vai ser indicada pela sombra do gnómon no mostrador do relógio, o gnómon vertical deve ser colocado passando pelo ponto $G_{20\mathrm{Jul}}$, de intersecção de r com o eixo P_NP_S.

Quando o Sol se desloca no paralelo de latitude 20°, o plano do meridiano roda em torno do eixo P_NP_S e o ponto *Sombra* vai percorrer o equador. As rectas r, traçadas por esses pontos, mantêm a inclinação de 20° e, por isso, vão gerar uma superfície cónica de vértice em $G_{20\mathrm{Jul}}$ que tem por curva directriz o equador. O ponto onde deve ser colocado o gnómon vertical é, portanto, invariante para cada valor da declinação do Sol. Na prática, consideramo-lo invariante para cada dia do ano, porque consideramos que, em cada dia, o Sol percorre um paralelo ao equador celeste. No mostrador do relógio vão ficar assinaladas datas, com intervalos iguais, por exemplo, de 10 em 10 dias, para colocação do gnómon, o que já nos dá uma aproximação bastante aceitável.

Na figura 6 pode ver em perspectiva a ilustração da explicação que acabámos de fazer para a posição do gnómon.

Nota histórica

Até ao fim da Idade Média, na Europa, a duração de cada hora dependia da estação do ano, uma vez que a duração do dia-luz, isto é, do nascer ao pôr do sol, era dividida em doze partes iguais, tanto no Inverno como no Verão.

No fim da Idade Média apareceram os relógios solares com gnómon paralelo ao eixo polar (trazidos provavelmente pelos cruzados, dado o seu contacto com os árabes), que permitiram a definição da hora verdadeira — correspondente a um ângulo de 360° : 24 = 15° no movimento aparente do Sol. Surgiram assim novas técnicas de construção de relógios de Sol, mais sofisticadas, que possibilitaram a leitura directa da hora verdadeira. É o caso dos relógios designados por analemáticos, que envolvem conhecimentos aprofundados do modelo do movimento do Sol na esfera celeste, e de geometria projectiva, e permitem a leitura da hora com uma precisão excepcional.

Não se sabe quem inventou este tipo de quadrante solar. O relógio analemático mais antigo de que se tem conhecimento é o da catedral de Brou, em Bourg-en-Bress, França. A data de construção é desconhecida, mas terá sido certamente na primeira metade do século XVI. Os textos mais antigos sobre este tipo de relógio solar são do matemático francês Vaulezard e datam de 1640 e 1654, mas foi Lalande, astrónomo nascido em Bourg-en-Bress no século XVIII, que, preocupado com o estado de deterioração do relógio da catedral de Brou, o restaurou por sua conta, e apresentou à Academia de Ciências uma comunicação sobre o traçado e a justificação do relógio analemático, como sendo "uma das mais complicadas de toda a Gnomónica" (Lalande, 1757, citado por Sawyer III).

Não se sabe grande coisa acerca da origem do nome *analemático* atribuído a estes quadrantes solares. O termo analema tem tido vários significados ao longo da História, e há várias justificações plausíveis para estar associado a este tipo de relógio de sol. Para o arquitecto e engenheiro militar ro-

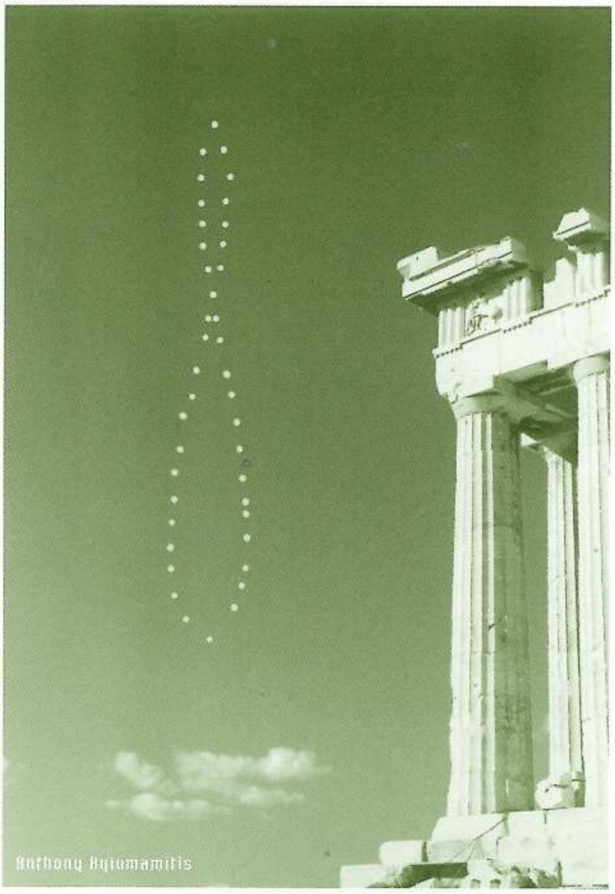


Figura 7. Esta imagem de um analema foi cedida à E&M por Anthony Ayiomamitis, que fez uma montagem de 41 fotografias tiradas na Grécia, junto ao Partenon, durante um ano, ao meio dia. http://jedi.hq.usra.edu/archive/epodviewer.php3?oid=123104.

mano Vitrúvio, no seu tratado *De Architectura* (séc. I a.C.), "O analema é um processo cuidadosamente procurado no curso do Sol e encontrado pela observação da sombra em crescendo até ao solestício de Inverno, pelo qual é possível descobrir o funcionamento da abóbada celeste, através de cálculos arquitectónicos e traçados de compasso". Também Ptolomeu escreveu, no séc. II, o livro *De Analemmata*, em que desenvolvia os métodos de projecção da esfera celeste num plano. Alguns intérpretes destas obras afirmam que Vitrúvio e Ptolomeu designavam por *analema* o método que hoje se designa por projecção ortográfica, que estaria na base da construção da generalidade dos relógios de sol na antiguidade, e que posteriormente foi aplicado, por Vaulezard e Lalande, entre outros, no traçado do relógio analemático.

A partir do século XVIII até à actualidade, a palavra *analema* passou a designar uma curva em forma de 8 que é uma representação gráfica da equação do tempo — isto é, da diferença entre a hora verdadeira e a hora média. Essa curva pode ser obtida de várias maneiras: por exemplo, fotografando o Sol, sempre à mesma hora (hora média, dos relógios actuais), todos os dias de um ano; ou marcando a sombra do extremo de um gnómon vertical, ao longo do ano, sempre à mesma hora também. Por isso, a curva designada por *analema* começou a aparecer no design de vários relógios de sol, com o objectivo de permitir a leitura directa da hora média, embora sem grande sucesso, ou apenas como elemento decorativo.

O célebre relógio de Brou, quando foi restaurado por um artesão amador da gnomónica, em 1902, *ganhou* um analema no eixo menor da elipse. Talvez tenha sido este facto que resultou na crença de que posicionando o gnómon na curva e não no eixo menor, se poderia ler directamente a hora média na elipse. Talvez seja por isso que o relógio se designa por analemático. Mas a verdade é que a introdução desta curva no mostrador não tem qualquer justificação científica, introduz até um erro considerável.

Bibliografia

Gayá, Rafael Soler. *Diseño y Construcción de Relojes de Sol y de Luna — Métodos Gráficos e Analíticos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Rohr, René R.J. *Sundials: History, Theory and Practice*. New York: Dover, 1996.

Sawyer III, Frederick W. *Of Analemmas, Mean Time and the Analemmatic Sundial*, Bulletin of the British Sundial Society, Junho de 1994, 94(2), p. 2-6, e Fevereiro de 1995, 95(1), p. 39-44.

Vitrúvio. Tratado de Arquitectura. Lisboa, IST Press, 2006.

Sítios na Internet

The North American Sundial Society — `http://sundials.org/`

Earth Science Picture of the Day — `http://epod.usra.edu/`

Rita Bastos

Eduardo Veloso

Uma brevíssima história do tempo

Carlos Fiolhais

O título de cima presta homenagem ao livro popularíssimo de Stephen Hawking [1] do qual há até uma recente versão abreviada [2]. Mas, ao contrário dessa obra, não se trata aqui de contar a história do Universo desde o seu início, há cerca de quinze mil milhões de anos, mas antes de contar muito abreviadamente a história da visão do tempo nas ciências físicas, desde que estas se iniciaram há cerca de quatrocentos anos.

E forçoso é começar essa história com o italiano Galileu Galilei [3]. Para Galileu o tempo era, como ainda hoje, uma grandeza que se podia medir com um relógio, tal como o espaço é uma grandeza que se pode medir com uma régua. Medir é, sempre foi, conhecer. Os relógios usados por Galileu eram muito rudimentares. Os primeiros relógios mecânicos, baseados no pêndulo, só puderam ser construídos na sequência dos desenvolvimentos da mecânica. Galileu foi o descobridor da lei do isocronismo das pequenas oscilações de um pêndulo (segundo a qual, o tempo de uma pequena oscilação não depende do ponto exacto de partida), mas só dezenas de anos mais tarde o holandês Christiaan Huyghens usou esse conhecimento para construir um primitivo relógio de pêndulo. Mas Galileu tinha à sua disposição ampulhetas e também um relógio que ainda hoje pode ser usado por qualquer pessoa: o pulso. O sábio italiano não tinha um relógio de pulso, mas tinha um pulso de relógio e é, de facto, fantástico, que tenha descoberto a referida lei e outras, como a da queda dos graves, que relaciona a distância d percorrida por um grave com o tempo t decorrido,

$$d = \frac{1}{2}gt^2,$$

com g uma contante (chamada aceleração da gravidade, $g = 9,8m/s^2$) usando o seu próprio ritmo cardíaco (que não se alterou com a iminência do momento de *eureka*, pois isso teria impedido até a própria descoberta ...).

Isaac Newton [4], o inglês que nasce no ano em que Galileu morre, segue a tradição inaugurada por Galileu de descrever a Natureza com a ajuda da matemática (Galileu tinha dito que "o Livro da Natureza está escrito em caracteres matemáticos"). A segunda lei de Newton, que relaciona directamente força F com aceleração a

$$F = ma,$$

com m a massa, uma grandeza que mede a inércia do corpo ao movimento, é uma maneira geral de expressar leis particulares como a lei do isocronismo das pequenas oscilações

Figura 1. Galileo Galilei (1564-1642).

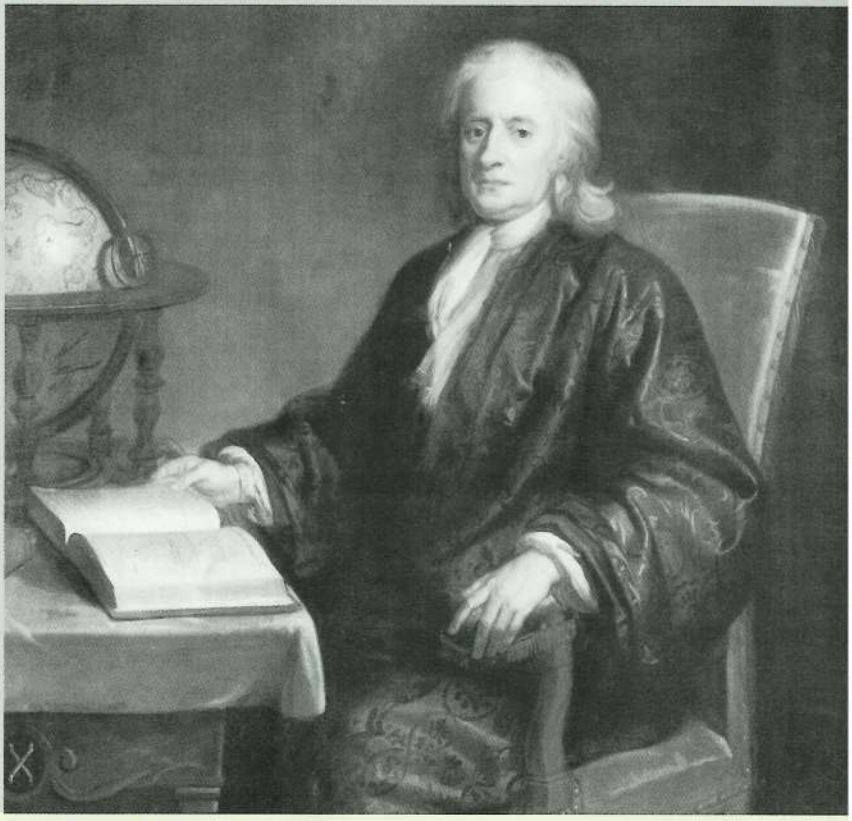


Figura 2. Isaac Newton (1642-1727).

ou a lei da queda dos graves. A aceleração traduz a mudança no tempo da velocidade, que por sua vez traduz a mudança no tempo da posição. A mecânica que Galileu e Newton inauguraram (o segundo criando para o efeito a ferramenta matemática necessária — o cálculo infinitesimal) trata afinal de mudanças no tempo. E o que é o tempo? Pois, como Santo Agostinho disse, todos sabemos se não formos obrigados a explicitar o que é, mas já não sabemos se o tivermos de fazer (um humorista, perante essa dificuldade, saiu dela definindo o tempo como "o que impedia que tudo acontecesse em simultâneo"). Newton procurou, nos seus *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, definir o tempo. E deixou claro que existia um tempo absoluto, igual para todos, isto é, que todos os relógios marcavam o tempo da mesma maneira [5]:

"O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração".

Por sua vez, o espaço era outro conceito absoluto, isto é, todas as réguas mediam as distâncias da mesma maneira. Seja de novo dada a palavra a Newton [5]:

"O espaço absoluto, na sua própria natureza, sem uma relação com o que quer que seja exterior, permanece sempre igual e imóvel ..."

O tempo e o espaço, conceitos dissociados, funcionavam como cenários iguais para todos, onde se passavam todos os acontecimentos. Os movimentos cujas leis Newton descreveu com a ajuda da matemática eram uma alteração das posições de um corpo no espaço ao longo do tempo.

A mecânica newtoniana triunfou. Ela, tem, porém, uma grande dificuldade ao lidar com o tempo: não consegue distinguir passado de futuro. As leis de Newton não fazem essa importante distinção: são invariantes relativamente a inversões do tempo. No entanto, todos sabemos que o futuro é diferente do passado, que muitos fenómenos indicam claramente uma "seta do tempo". No século XIX desenvolveu-se um outro ramo da física, a termodinâmica. Ora, a segunda lei da termodinâmica, estabelecida pelo alemão Rudolph Clausius, ao contrário da segunda lei de Newton, fala da diferença entre futuro e passado: define uma grandeza para sistemas macroscópicos, chamada entropia, S, e afirma que a entropia de um sistema isolado tende para um máximo. Nos processos irreversíveis em sistemas isolados, a entropia cresce necessariamente. Essa lei exprime-se por uma inequação [6]:

$$\Delta S > 0$$

e não por uma equação.

Um problema que chegou até aos nossos dias é precisamente o de fundamentar a termodinâmica na mecânica newtoniana (ou, mais em geral, na mecânica quântica). A mecânica estatística procura, de facto, ligar o microscópico e o macroscópico, mas tem dificuldades em explicar como é que, no primeiro nível, não há diferença entre passado e futuro, ao passo que no segundo nível já há. Pois não é o macroscópico feito a partir do microscópico?

Uma grande evolução no conceito de tempo dá-se no início do século XX com o alemão, mais tarde suíço e norte-americano, Albert Einstein [7]. Além de se ocupar da mecânica estatística, Einstein preocupou-se com a ligação entre a mecânica clássica, de Galileu e Newton, e o electromagnetismo, de Faraday e Maxwell, este estabelecido tal como a termodinâmica ao longo do século XIX.

Figura 3. Albert Einstein (1879-1955).

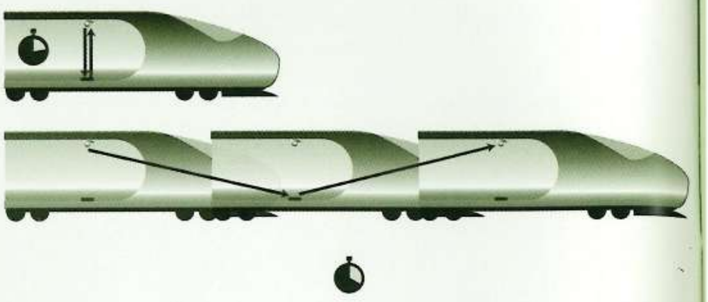


Figura 4. O tempo é relativo: Flui mais lentamente para um observador a bordo do comboio, porque a velocidade da luz tem o mesmo valor para os dois observadores.

Na mecânica havia um princípio da relatividade, já descoberto por Galileu, segundo o qual todos os observadores de sistemas de inércia viam da mesma maneira um dado fenómeno físico (há invariância ao passar de um referencial de inércia para outro, entendendo-se por referencial de inércia aquele onde são válidas as leis de Newton; encontrado um, qualquer outro com velocidade constante em relação ao primeiro será também de inércia). Mas no electromagnetismo já não era visível esse princípio, parecendo existir um sistema de referência privilegiado, o chamado éter. Einstein defendeu, numa tentativa de unir os dois ramos da física, a existência de um princípio da relatividade tanto para a mecânica como para o electromagnetismo. Mas, para isso, teve de modificar a mecânica, deixando intacto o electromagnetismo. Ou melhor, este não ficou intacto: o conceito de éter "evaporou-se"...

Einstein partiu, para estabelecer uma nova mecânica, a mecânica relativista, que engloba a mecânica de Galileu e Newton no limite das pequenas velocidades (assim como Newton viu mais longe por ter subido aos ombros do gigante Galileu, também Einstein viu mais longe ainda porque conseguiu subir para os ombros de Newton). Partiu do princípio de que existia um princípio da relatividade para todas as leis da física e não apenas para as leis da mecânica. E — outro postulado essencial — partiu também do princípio de que a velocidade da luz é um invariante, isto é, tem o mesmo valor para todos os observadores.

Este último postulado parece, à primeira vista, estranho. É fácil, com efeito, supor que um raio de luz lançado de dentro de um comboio viaje não à velocidade da luz $c = 300\ 000$ km/s, que aparecia nas equações do electromagnetismo escritas por Maxwell, mas a essa velocidade mais a velocidade do comboio. Mas Newton admitiu que não, que a velocidade do raio de luz lançado de dentro do comboio não depende, visto do cais, da velocidade do comboio! (Figura 4.)

As consequências são, de facto, extraordinárias. Uma das mais imediatas e também das maiores é que o tempo flui de maneira diferente para quem vai no comboio e para quem está no cais. Suponhamos uma experiência, que tem de ser mental, de um comboio a viajar com um velocidade comparável à da luz. (No tempo de Einstein já havia comboios, embora muito lentos ...) Uma lâmpada eléctrica acende-se no tecto do comboio, um feixe de luz parte para baixo, é reflectido por um espelho no chão do comboio e regressa à lâmpada. (A lâmpada eléctrica foi inventada por Edison no

Figura 5. Paradoxo dos gémeos. A gémea que viaja a uma estrela distante não

ano em que Einstein nasceu). Do ponto de vista de um observador dentro do comboio, o movimento da luz dá-se em linha recta e na vertical. Mas, do ponto de vista de um observador no cais (supomos o comboio transparente para facilitar a observação), o movimento é ainda em linha recta, mas não vertical, mas sim oblíquo. O feixe desce propagando-se para a frente, no sentido do comboio, bate no espelho e sobe, sempre propagando-se para a frente. A distância percorrida é obviamente maior pois a soma dos dois lados iguais de um triângulo isósceles é maior do que a altura do triângulo. Agora, como a velocidade da luz é a mesma para os dois observadores e a distância percorrida é maior para o observador externo, só há uma conclusão a tirar: o tempo marcado no interior do comboio é diferente do que o tempo marcado fora do comboio, ou, mais precisamente, o tempo decorrido dentro do comboio entre a emissão e a recepção da luz pela lâmpada é menor. Ou, dito ainda de outra forma, relógios em movimento atrasam-se! Este é o conhecido fenómeno da dilatação do tempo, que pode ser descrito matematicamente com a ajuda apenas do teorema de Pitágoras [8].

Este fenómeno já foi verificado experimentalmente com relógios atómicos, os relógios mais precisos que hoje existem (e que se baseiam no processo quântico de emissão e absorção de luz por átomos): um relógio ficou fixo em terra e outro deu a volta à Terra, a bordo de um avião. Comparados os dois relógios no fim da viagem, o relógio que tinha viajado marcou um tempo um bocadinho menor. Marcaria bastante menos se houvesse tecnologia para o colocar a grande velocidade, a uma velocidade comparável com a da luz. Quase à velocidade da luz, o tempo praticamente não passa ...

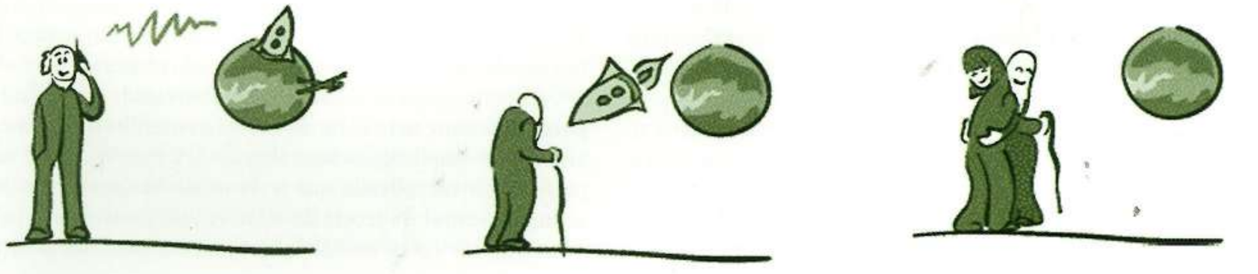
Com Einstein cada observador passou, portanto, a medir intervalos de tempo diferentes entre os mesmos acontecimentos, consoante a sua própria velocidade. Caiu o tempo absoluto de Newton, igual para todos, para passar a haver um tempo relativo. Cada um passou a ter o seu próprio tempo!

E o mesmo se passou relativamente ao espaço: para o espaço, em vez do fenómeno da contracção do tempo, previu-se e verificou-se o fenómeno da contracção do espaço: réguas em movimento parecem encolhidas quando vistas de fora. Tal como o tempo, também o espaço, que se julgava absoluto, passou a ser relativo!

Ficou, porém, alguma coisa de absoluto, algo sobre o qual todos podem concordar (além da velocidade da luz). Foi possível construir matematicamente uma nova entidade à custa do espaço e do tempo: o espaço-tempo. Por outras palavras, juntando o espaço (com três dimensões) ao tempo (com uma dimensão) ficou uma entidade (com quatro dimensões) onde se podem definir intervalos invariantes. O espaço e o tempo são relativos mas no espaço-tempo, há absolutos! A geometria do espaço-tempo não é euclidiana, se o espaço e o tempo forem consideradas grandezas reais (no sentido matemático do termo: descritos por números reais). Mas, curiosamente, se o tempo for considerada um imaginário puro, um número real multiplicado pela constante imaginária i, que se define como a raiz quadrada de -1, então o espaço-tempo tem uma geometria euclidiana. Este espaço a quatro dimensões foi chamado espaço de Minkowski do nome do matemático alemão (nascido na Rússia) Hermann Minkowski, que descreveu pela primeira vez o novo espaço. Minkowski tinha sido professor de Einstein na Escola Politécnica Federal de Zurique, mas se conseguiu encontrar uma expressão matemática conveniente para as ideias de Einstein, não conseguiu quando lhe dava aulas descortinar as qualidades intelectuais fora de comum do seu hoje famoso discípulo.

A revisão dos conceitos de espaço e tempo (que só assume verdadeira importância para velocidades próximas das da luz, sendo suficientes as ideias de Galileu e Newton para as velocidades baixas) não se fez sem dificuldades científicas e até filosóficas. Uma das mais famosas encontrou expressão no *paradoxo dos gémeos* (figura 5), do nome do físico francês Paul Langevin. Segundo Langevin (um físico que visitou Portugal nos anos 30 do século XX, ajudando na difusão entre nós das ideias relativistas), um par de gémeos que fosse colocado numa situação assimétrica de movimento, isto é, um enviado numa viagem de ida e volta a uma velocidade próxima da da luz a uma estrela distante enquanto o outro permanecia no nosso planeta, envelheceria de maneira assimétrica: o gémeo em Terra estaria muito velho, enquanto o gémeo que viajou pareceria ter tomado um elixir da juventude. Esse paradoxo — paradoxo porque do ponto de vista do gémeo em viagem é o seu irmão que viaja e, portanto, deveria ser ele a ficar mais jovem — encontra-se hoje resolvido. Mas ilustra bem as dificuldades que a teoria da relati-

envelhece tanto como o seu irmão.



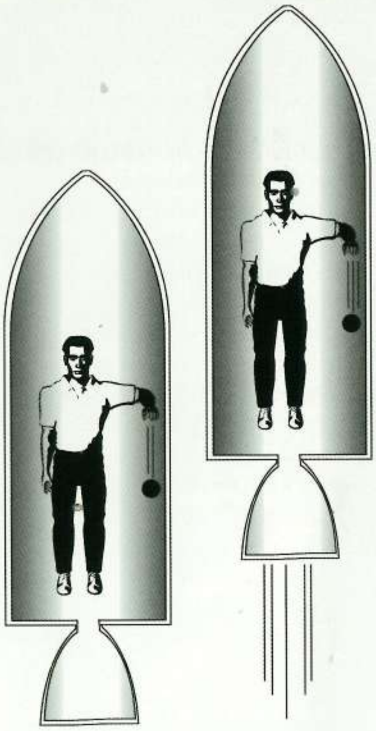


Figura 6. Uma força gravitacional a actuar na nave parada é equivalente a uma aceleração.

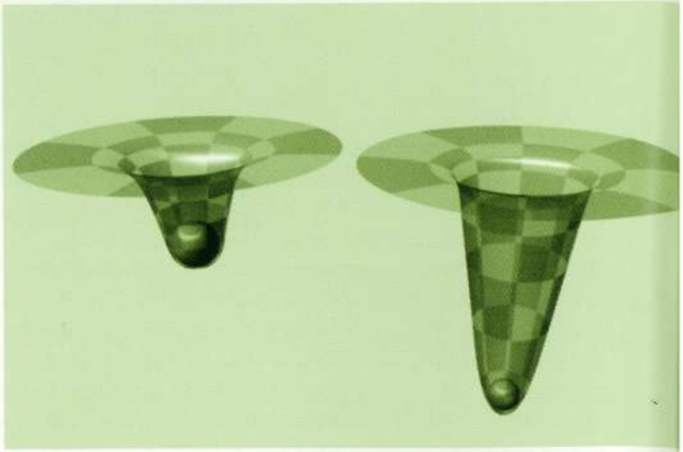


Figura 7. Deformação do espaço-tempo (aqui representado a duas dimensões) nas proximidades de corpos com massa. Uma estrela normal não atrai tanto como um buraco negro.

vidade restrita (assim se chama a mecânica de Einstein) representa para o senso comum.

Einstein conseguiria ainda uma generalização da sua teoria da relatividade restrita, que ficou conhecida como teoria da relatividade geral [9]. O grande físico considerou então sistemas não inerciais, isto é, acelerados. Partiu de uma ideia de Galileu: que um corpo grande e um corpo pequeno, na ausência de resistência do ar, caem ao mesmo tempo. O facto de o tempo de queda ser independente da massa do objecto atraído, mas tão só das propriedades do objecto atractor, explica-se porque a massa que descreve a resistência ao movimento — a massa inercial — é exactamente igual à massa que descreve a intensidade da atracção — a massa gravitacional. Na segunda lei de Newton, a força gravitacional, ou peso — a massa gravitacional m_{gr} multiplicada pela aceleração da gravidade g — tem se ser igual à massa inercial m_{in} (que antes designámos apenas por m) multiplicada pela aceleração.

$$m_{gr} g = m_{in} a.$$

Como as duas massas nos dois lados da equação são iguais, segue-se que a aceleração é uma constante,

$$a = g,$$

o que traduz o facto de todos os corpos caírem da mesma maneira. Se todos os corpos caem da mesma maneira num certo sítio, é intuitivo pensar que a queda de um grave num sítio tem a ver com as propriedades do espaço nesse sítio. Mas que propriedades?

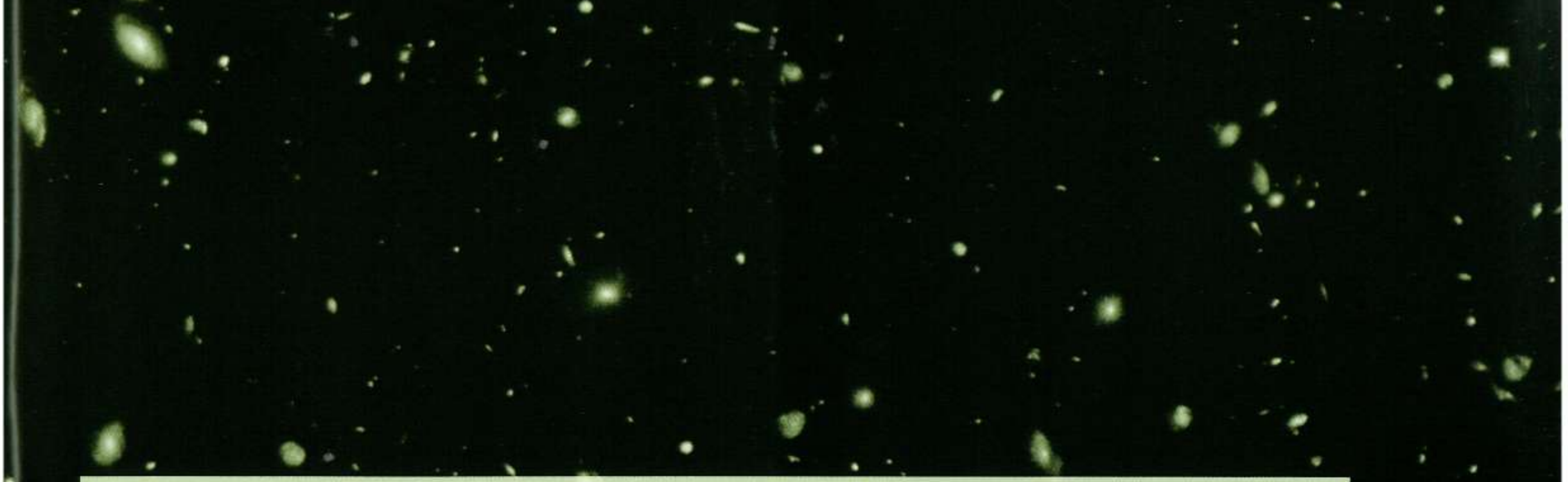
Einstein descobriu que a força gravitacional, responsável pela queda dos graves, tem uma origem geométrica, como vamos ver. A segunda lei de Newton diz que a força gravitacional é equivalente a uma aceleração (figura 6), o que todos nós sabemos porque, quando um carro acelera, sentimos uma força a puxar-nos para trás (e, quando o carro trava, sentimos uma força a puxar-nos para a frente). A atracção sentida numa nave fechada e parada devida à proximidade de um planeta é, portanto, equivalente a uma aceleração, devida eventualmente a um foguete em funcionamento, sem que exista um planeta próximo. Mas, numa nave acelerada tudo deve ficar para trás, incluindo um feixe de luz. E, se a nave acelerada é como uma nave puxada por um planeta, a luz deve "sentir" a força da gravidade. Einstein pensou que a luz devia ir pelo caminho mais curto e, se a luz se encurva perto de um corpo com grande massa, concluiu que o espaço (também o tempo, já que o espaço e o tempo estão inextrincavelmente ligados) tem uma geometria curva, perto desse corpo. Concluiu que o espaço-tempo tem uma geometria curva perto de um corpo com uma grande massa. E que a força gravitacional resulta afinal dessa curvatura (figura 7).

Concluiu bem, porque no ano de 1919 num eclipse do Sol medido na ilha do Príncipe, que então era território português, e na ilha de Sobral, já então como hoje território brasileiro, que os raios luminosos provenientes de estrelas por detrás do Sol eram encurvados ao passar perto do Sol. "A luz pesa" foi o título de uma pequena notícia no jornal O *Século* quando, passados uns meses, a descoberta foi anunciada na Royal Society de Londres [10].

Tal significa que um relógio e uma régua marcam, respectivamente, tempos e distâncias diferentes perto e longe de um astro com uma grande massa. O efeito é mais visível para os objectos astronómicos com maior massa, como os buracos negros, esses sítios do cosmos onde o tempo e o espaço acabam, pois os tempos e as distâncias são radicalmente alterados. Este fenómeno está hoje confirmadíssimo, sendo de resto utilizado como tecnologia, pois os relógios atómicos situados a bordo dos satélites que asseguram o sistema de posicionamento global (GPS) marcam, a cerca de 20 000 km de distância da superfície da Terra, um tempo diferente dos relógios à superfície do nosso planeta.

As consequências da teoria da relatividade geral foram, porém, bastante mais além do que dá a entender a referência anterior às implicações tecnológicas. A matemática é um pouco mais complicada que a da relatividade restrita. Na equação central da teoria da relatividade geral de um lado está o tensor (uma entidade matemática com $4 \times 4 = 16$

Figura 8. De acordo com a teoria do Big Bang, as galáxias afastam-se, em média, umas das outras.



números) que descreve a métrica do espaço-tempo e do outro o tensor que descreve a matéria e a energia (de acordo com a famosa fórmula $E = mc^2$, energia e massa são grandezas equivalentes). A geometria do espaço-tempo depende da presença da matéria-energia. Numa imagem útil, ainda que seja necessariamente grosseira, o espaço-tempo assemelha-se a um lençol estendido onde se coloca um objecto de grande massa: o lençol fica mais esticado perto desse objecto. A força gravitacional é afinal essa deformação geométrica do espaço-tempo.

A questão que se pode colocar à escala cosmológica é a seguinte: que tipo de geometria tem o Universo todo? Segue-se das equações de Einstein que o Universo pode estar em expansão, mas o sábio não foi na altura suficientemente sábio ... Decidiu acrescentar, à mão, um termo, chamado constante cosmológica, que permitia tornar o Universo estático. Depois das observações do astrónomo norte-americano Edward Hubble nos anos 30 do século passado sabe-se que o nosso Universo está em expansão, tornando dispensável a constante cosmológica de Einstein. De acordo com observações dos últimos anos, parece até que está em expansão acelerada [11], pelo que a questão da constante cosmológica permanece ainda em aberto. Einstein chamou a essa sua ideia o "maior disparate" da sua vida e a sequência veio mostrar que há, por vezes, disparates geniais ...

Qualquer que seja o valor e a origem da constante cosmológica, o facto conhecido hoje é que o Universo teve um início há quase quinze mil milhões de anos. Nessa altura (o *Big Bang*, um "buraco branco", uma espécie de buraco negro ao contrário) surgiu o espaço-tempo, isto é, surgiu o espaço e o tempo ligado a ele. Há só tempo depois do *Big Bang*. Quer dizer, não há um tempo anterior a esse evento (já Santo Agostinho sabia isso pois recusava a ideia de um tempo eterno antes da criação do mundo por Deus). De então para cá ocorreu toda uma sucessão de processos astrofísicos de auto-organização, para não falar já (o espaço e o tempo não o permitem...) dos processos físico-químicos, que estão na base da vida que apareceu pelo menos num planeta, o nosso ...

Esta auto-organização (aumento da ordem) parece estar em contradição com a segunda lei da termodinâmica (aumento da desordem). É uma contradição apenas aparente, pois a termodinâmica aplica-se a sistemas delimitados e é perigoso considerar todo o Universo como um desses sistemas (a pergunta é metafísica: delimitado de quê?). A origem da seta do tempo, descrita pela segunda lei da termodinâmica, permanece hoje ainda por explicar ... Einstein explicitou de forma clara esse problema quando, poucos meses antes de ele próprio morrer, tomou conhecimento da morte do seu amigo Michele Besso. Escreveu então à viúva uma frase que ficou famosa [12]:

"... para nós, que acreditamos na física, a separação entre passado, presente e futuro é apenas uma ilusão, ainda que persistente."

É essa ilusão que os físicos, e não só, persistem em conhecer melhor.

Bibliografia

[1] S. Hawking, *Breve história do tempo. Do Big Bang aos Buracos Negros*, Gradiva, Lisboa, 1ª edição, 1988.

[2] S. Hawking e L. Mlodinow, *Uma nova história do tempo*, Ediouro, Rio de Janeiro, 2005.

[3] S. Drake, *Galileo*, Dom Quixote, Lisboa, 2ª edição, 1081.

[4] J.-P. Maury, *Newton e a mecânica celeste*, Civilização e Círculo de Leitores, Lisboa, 1992.

[5] S. Hawking (coord.), *On the shoulders of giants. The great works of Physics and Astronomy*, Runnig Press, Philadelphia e Londres, 2002. Está a ser preparada uma tradução portuguesa, a publicar pela Dom Quixote.

[6] J. Güemez, C. Fiolhais e M. Fiolhais, *Fundamentos de termodinâmica do equilíbrio*. Fundação Gulbenkian, Lisboa, 1988.

[7] A. Pais, *Subtil é o Senhor. Vida e Pensamento de Albert Einstein*, Gradiva, Lisboa, 2ª edição, 2004.

[8] C. Fiolhais *et al.*, *F12*, Texto Editores, Lisboa, 2005.

[9] M. Kaku, *O Cosmos de Einstein*, Gradiva, Lisboa, 2005

[10] C. Fiolhais (coord.), *Einstein entre nós*, Imprensa da Universidade, Coimbra, 2005.

[11] O. Bertolami, *O livro das escolhas cósmicas*, Gradiva, Lisboa, 2006.

[12] A. Calaprice (coord.), *The new quotable Einstein*, Princeton, University Press, Princeton, 2005.

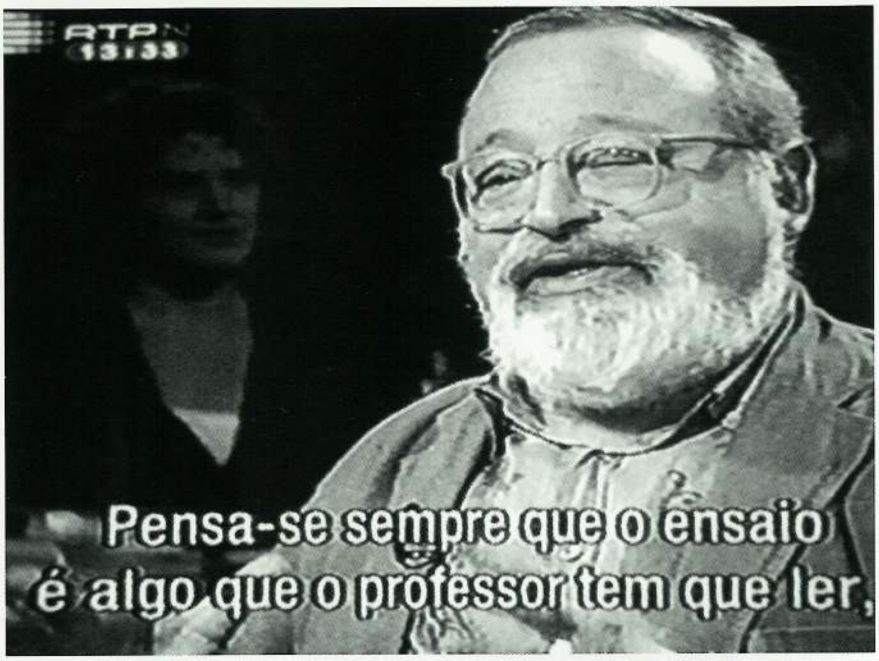
Carlos Fiolhais

Centro de Física Computacional e Dep. de Física da Universidade de Coimbra

O valor de educar — Uma entrevista na RTP2

Fernando Savater, escritor e filósofo espanhol, que escolheu a Ética como disciplina de investigação e ensino, esteve, no início de Outubro, no programa *Por outro lado*, da RTP2. Na entrevista que deu à jornalista Ana Sousa Dias, este professor universitário, título pelo qual prefere ser conhecido, veio reafirmar que, nesta época de grandes inquietudes, educar é, cada vez mais, uma tarefa valiosa e valorosa cujo propósito se deve procurar clarificar.

"O que queremos com a educação? Queremos apenas que as crianças aprendam a fazer coisas para ganhar dinheiro e para ganhar a vida, ou queremos formar cidadãos, ou queremos formar seres humanos".



Fernando Savater veio lembrar que "ninguém nasce humano", que cabe à "Educação transmitir a humanidade e desenvolver nos outros essa humanidade, [que], naturalmente, isso implica aprender os ofícios e conhecimentos, mas também valores e sentimentos" e que, nessa grandiosa e imensa tarefa, o papel do professor, fundamentalmente, de crianças e jovens, é fulcral e insubstituível.

"[Estes] professores são os mais importantes! A mim chegam-me jovens de 20 e tal. Se não os educaram, já eu não posso educá-los. Posso ajudá-los a desenvolver a sua vocação, mas a educação fundamental, o que é de fundamental na sua vida, ler, escrever, os primeiros conhecimentos e a curiosidade de que falámos, tudo isso tem a ver com os nossos professores primários."

Considera, pois, paradoxal que esta profissão seja tão desvalorizada, entendendo-se das suas palavras que mal vai a sociedade que desconsidera, desvaloriza, desprestigia os seus professores!

"O professor primário é alguém, na nossa sociedade, sem importância. Tu, por exemplo, que fazes entrevistas, quantos professores primários cá tiveste? Nas televisões vemos catedráticos e senhores que tocam flauta, que dançam. Nunca há um professor primário. Ninguém se interessa, e, não obstante, os nossos filhos, as crianças, o futuro estão nas suas mãos e ninguém lhes pergunta nada!... Como é possível que se lhes dê tão pouca importância"

Mas este docente da Universidade de Computense veio, da mesma forma, evidenciar também a grande responsabilidade do professor, principalmente das idades mais jovens, chamando à atenção para as graves consequências do ensino que frequentemente se pratica.

"Todos as crianças fazem perguntas. Todos perguntam porque as estrelas não caem, porque os mortos não se mexem. (...). Quando uma criança nos pergunta, está a pedir-nos para lhe darmos o mundo, porque é a forma de se apropriarem do mundo. O mundo são as estrelas e os mares, e os conhecimentos, as condutas e é isso que temos de tentar transmitir. (...)

Eu dou aulas na universidade há cerca de 20 anos. Como passámos dessa criança cheia de curiosidade e desejo de aprender etc. para a pessoa que olha o seu relógio para ir para casa comer? O problema é que, por vezes, somos nós os professores que lhes matamos a curiosidade. A maioria dos professores das crianças mais pequenas tem o problema de perguntar coisas e não os deixam falar. (...) Dar a resposta antes que a criança faça perguntas, determina-se logo o que pensar."

Mas, Fernando Savater quis, na entrevista que deu à RTP2, acima de tudo sublinhar que a responsabilidade na educação dos nossas crianças e jovens, futuros cidadãos é, sempre, partilhada. Preocupado com o eclipse da autoridade paternal, com a demissão da família, com os "pais que não querem ser pais", veio lembrar que sem adultos sentimentalmente implicados no desenvolvimento pessoal e cultural das crianças a sua educação ficará sempre comprometida. Lembrou que somos todos responsáveis pela educação "(d)aqueles em cujas mãos estarão os destinos da comunidade", reforçando a ideia de um espaço público de educação, no qual as famílias, em primeiro lugar, mas também a sociedade em geral devem assumir as suas próprias responsabilidades.

Fátima Guimarães e Lina Brunheira

Medir a sombra de uma estaca

Alice Carvalho e Sandra Rodrigues

Este artigo descreve como o estudo da variação do comprimento da sombra de uma estaca ao longo do dia poderá suscitar nos alunos do 4° ano de escolaridade momentos de aprendizagem que integrem conhecimentos das áreas de Estudo do Meio e de Matemática.

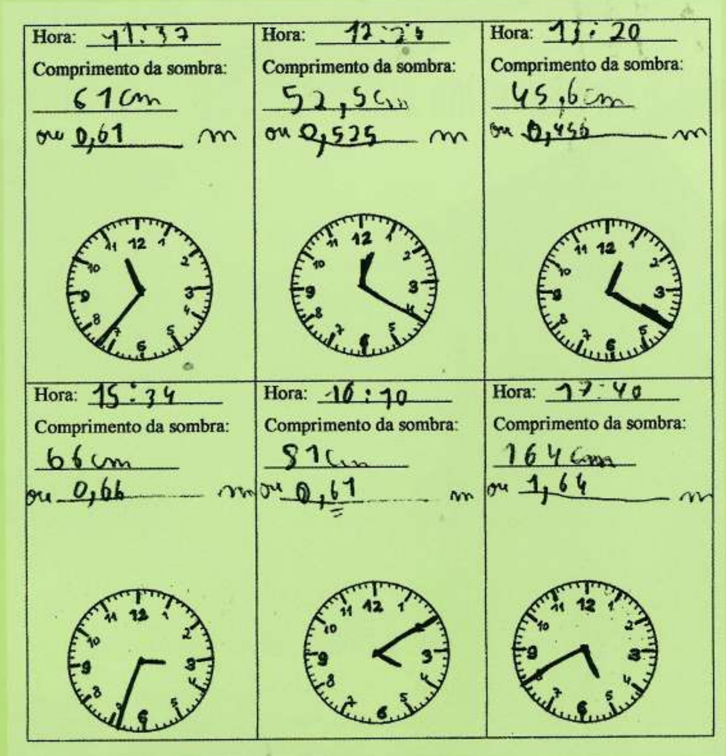
Na área de Estudo do Meio tivemos como objectivo desenvolver conhecimentos relacionados com o movimento aparente do Sol, a relação da altura do Sol com o comprimento das sombras, a projecção da sombra ao longo do dia, os pontos cardeais e algumas ideias associadas, como nascente, poente ou ocaso. É de salientar que os alunos já tinham estudado os movimentos de rotação e de translação da Terra, tendo feito uma visita de estudo ao Planetário Calouste Gulbenkian.

Na Matemática quisemos desenvolver conceitos nas áreas das Grandezas e Medidas e Estatística ao proporcionar a realização de actividades que implicavam a leitura e registo de horas, a medição de sombras, a estimativa de diferenças entre o comprimento da sombra e o da estaca, o estabelecimento de relações entre as unidades de medida, o desenvolvimento de processos de recolha de dados, a elaboração de gráficos, a utilização dos dados recolhidos na redacção da conclusão da experiência, desenvolvendo a comunicação matemática, e a resolução e formulação de problemas a partir dos dados recolhidos.

Nas atitudes e comportamentos pretendemos que os nossos alunos desenvolvessem o gosto pela observação de fenómenos naturais e que tomassem consciência da necessidade de efectuar várias observações e recolha de dados para os compreender. Quisemos também desenvolver o espírito de cooperação e de organização entre os alunos e professoras, na medida em que este trabalho envolveu a colaboração de duas turmas (uma do horário normal e outra da tarde), de modo a recolher os dados da variação do comprimento da sombra das 9 às 18 horas.

Durante o momento da recolha de dados, de forma a rentabilizar o tempo de trabalho dos alunos, optámos por diversificar as actividades, ficando uma parte da turma a trabalhar na sala de aula com a sua professora, desenvolvendo actividades relacionadas com o tema, e um grupo restrito de alunos deslocava-se ao pátio da escola, acompanhado pela professora do horário contrário, para observar a posição e altura do Sol, a direcção da projecção da sombra da estaca, passar com giz por cima da sombra e delimitar com uma pedra onde terminava, medir o seu comprimento e fazer os respectivos registos: hora da medição, comprimento da sombra e posição do Sol. Estas observações terminaram quando todas as crianças tinham passado pela experiência. Assim, como eram poucos os alunos que estavam no pátio, foi possível a quem os acompanhava supervisionar a forma como mediam, pedir que explicitassem as unidades utilizadas e o resultado da medição e verificar se os registos eram feitos correctamente. Em pequenos grupos foi também mais fácil levar todas as crianças a observar a posição e altura do Sol de forma segura, usar o movimento aparente do Sol para assinalar os pontos cardeais e, através dos registos feitos pelos grupos anteriores, constatar a forma como variava o comprimento da sombra da estaca nas diferentes horas do dia. Esta metodologia implicou que cada professora ficasse o dia inteiro na escola, mas o contacto com os alunos da outra turma e as aprendizagens que lhe proporcionámos foram compensadores do esforço suplementar.

Esta abordagem permitiu também que as crianças confrontassem as suas observações e registos, feitos pelos vários grupos, com as ideias prévias que tinham expresso: alguns pensaram que o comprimento da sombra da estaca era igual ao comprimento da estaca; outros acharam que a sombra era menor no início da experiência, às 9h, aumentava à medida que o Sol ficava mais alto e tornava a diminuir quando o Sol estava próximo do ocaso.



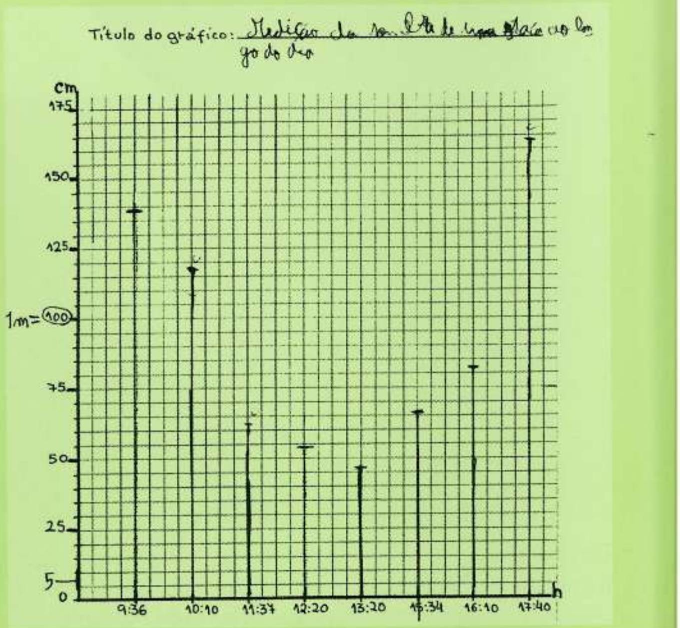


Figura 1. Segunda parte de uma folha de registo.

Figura 2. Gráfico de um aluno.

Nos dias seguintes, cada turma partilhou os dados recolhidos pelos diferentes grupos e prosseguiu a realização das tarefas, com a elaboração de gráficos e resolução de problemas. Neste momento os alunos trabalharam individualmente para que fosse possível analisar as estratégias usadas e as dificuldades sentidas. Depois do trabalho individual seguiram-se momentos de discussão na turma e partilha de ideias pelos alunos e professora.

Algumas estratégias e dificuldades observadas nas produções dos alunos

Para completar o gráfico, os alunos tinham de seleccionar da folha da experiência os comprimentos da sombra da estaca e registá-los no gráfico nas horas correspondentes (figuras 1 e 2).

Completar o gráfico não era uma tarefa muito fácil, na medida em que envolvia, por um lado, coordenar a leitura do eixo das horas com o dos comprimentos, e por outro, descobrir o valor de cada traço no eixo dos centímetros, porque só estavam escritos os números de 25 em 25, de zero a 175 (ver figura 2). Os outros traços estavam marcados, permitindo a contagem de cinco em cinco, mas estavam omitidos os respectivos valores. Por fim, tinham de escrever o título do gráfico.

Como a escala dos centímetros era de 5 em 5, a dificuldade mais sentida foi no registo de 45,6 cm. A tendência foi marcar entre 45 e 50, no ponto correspondente a 47,5 cm. Uma análise posterior permitiu que os alunos observassem que este valor não chegava a 46 cm. Um dos alunos completou todos os números no eixo dos centímetros, facilitando imenso o completamento do gráfico (figura 3).

Este deveria ter sido um procedimento usado por todos, como verificaram na discussão da tarefa. Alguns alunos também erraram os registos de 119 cm, 61 cm, 66 cm, 81 cm e de 164 cm porque não foram rigorosos na marcação da barra do respectivo comprimento, fazendo, por exemplo, 165 cm em vez de 164 cm. Quase todos os alunos escreveram bem o título do gráfico. Estas dificuldades fizeram-nos notar a necessidade de trabalhar mais a ordenação de números decimais, situando-os em réguas onde só alguns números estão marcados.

Na redacção da conclusão da experiência a maioria dos alunos usou o gráfico e os dados da folha de registo para elaborar o seu texto. No entanto, muitos alunos, embora tenham redigido um texto com alguma estrutura, fizeram sobretudo constatações, pois não relacionaram a altura do Sol com o comprimento da sombra da estaca e sua variação ao longo do dia.

Na conclusão escrita por uma das crianças, podemos observar que esta não estabeleceu relações com a posição e altura do Sol, mobilizou pouco os dados da folha de registos e não comparou os comprimentos das sombras com o comprimento da estaca: "A medida da sombra nunca era igual. Quando era de manhã o comprimento da sombra diminuía, mas à tarde a medida da sombra aumentava. O menor com-

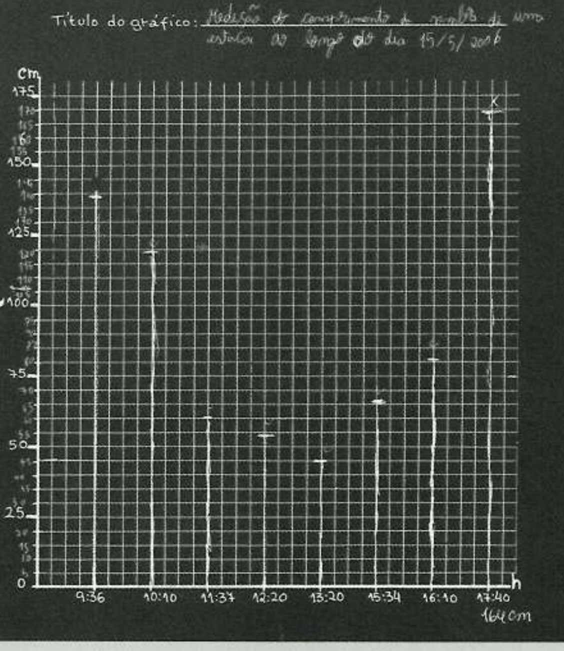


Figura 3. O aluno optou por preencher o eixo dos centímetros.

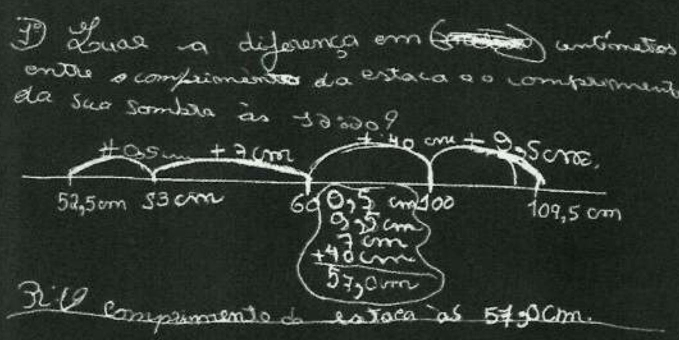


Figura 4. Um problema de subtracção — uso da linha numérica.

primento foi às 13:20 e o maior foi às 17:40." Na discussão foi relevante ter tomado consciência de como se torna impreciso escrever que a sombra de manhã tinha diminuído e à tarde tinha aumentado. Às 13:20 ainda é manhã? À tarde o comprimento da sombra começou a aumentar a partir de que horas? E quais eram as medidas das respectivas sombras? Que relação havia com a altura do Sol?

Outro aluno centrou-se no gráfico para elaborar a sua conclusão e, talvez porque na folha do gráfico tenha situado no eixo dos comprimentos 1 metro (figura 2), tomou como ponto de referência um metro para comparar a variação dos comprimentos da sombra. "Observando o gráfico eu digo que a parte do dia em que a sombra ficou maior foi às 17:40 porque tinha 164 centímetros. Vendo também pelo gráfico observamos que existem três horas do dia em que a sombra ficou com mais de 1 metro. Foi às 9:36, às 10:10 e às 17:40." Na discussão sugeriu que se tivesse escrito o valor das sombras, a sua conclusão ficava mais completa.

Outra criança recorreu aos dados da experiência, embora também não tenha estabelecido a relação da variação com a altura do Sol: "O comprimento da sombra da estaca começou grande, mas às 11:37 a sombra da estaca começou a descer e voltou a subir às 15:34. O comprimento da sombra da estaca das 13:20 foi o que mediu menos, porque mediu 45,6 cm, e a hora em que esteve mais longa foi às 17:40 porque mediu 164 cm, a coisa estranha foi que o comprimento da sombra nunca foi igual à da estaca era sempre maior ou menor." Na discussão prévia, a criança achou que logo no início da experiência o comprimento da sombra era igual ao comprimento da estaca.

Uma outra criança escreveu: "A estaca das 9:36 foi diminuindo sempre aos poucos até às 15:34. Começou a crescer a sombra da estaca porque o sol estava a Oeste. A menor estaca foi às 13:20 porque o Sol estava alto e a maior foi às 17:40 porque o Sol estava muito baixo ao final da tarde." Nesta conclusão verificamos que a criança relacionou a variação do comprimento da sombra com a posição e altura do Sol, embora se tenha enganado no momento em que a sombra começou a aumentar e tenha sido pouco rigoroso na linguagem usada. A sua correcção foi um elemento de aprendizagem para toda a turma.

Na resolução dos problemas que envolviam o conceito de diferença é de realçar que a maioria da turma os resolveu vendo que tinha de mobilizar a subtracção. Por exemplo, para calcular a diferença em centímetros entre o comprimento da estaca e o comprimento da sua sombra às 12:20, a maioria dos alunos usou o algoritmo da subtracção; no entanto, uma das alunas preferiu resolver o problema usando a linha numérica. Depois usou a adição para juntar todos os saltos. No entanto, a resposta não está de acordo com a pergunta do problema, o que foi objecto de correcção (figura 4).

Alguns dos alunos que usaram o algoritmo da subtracção nos problemas de diferença erraram a sua execução. Onde ocorreram mais erros foi na situação de subtracção de um número inteiro por um número decimal, como é o caso da figura 5. No entanto, na correcção foi salientado que o alu-

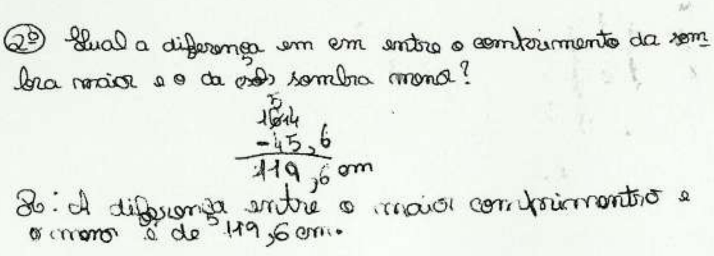


Figura 5. Um problema de subtracção: erro no algoritmo.

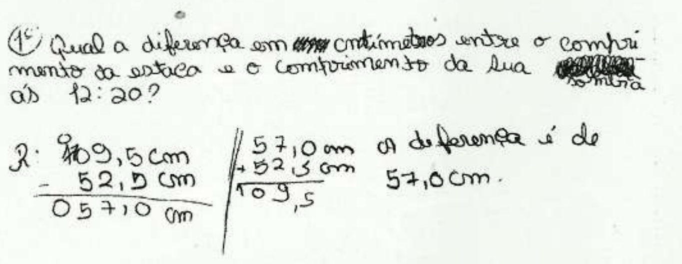


Figura 6. Um problema de subtracção: verificação do resultado pela operação inversa.

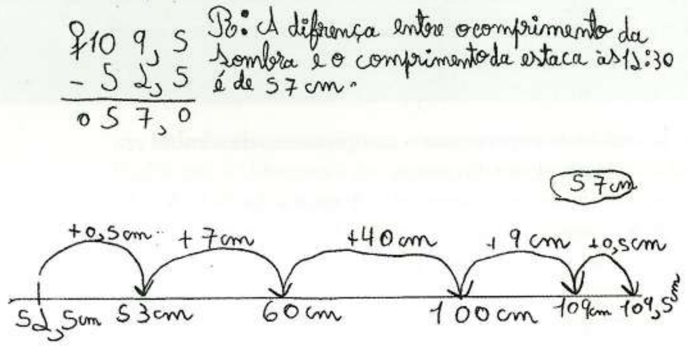


Figura 7. Um problema de subtracção : verificação do resultado pela linha numérica.

no tinha seleccionado da folha de registo da experiência os dados adequados para resolver o problema e tinha escolhido a operação conveniente, o que tinha errado era o algoritmo da subtracção.

Noutro problema de diferença, dois alunos usaram o algoritmo da subtracção, mas para se certificarem dos resultados obtidos usaram a operação inversa e a linha numérica respectivamente (figuras 6 e 7).

No momento de discussão e correcção dos problemas, foi importante para os alunos que erraram o algoritmo da subtracção terem visto que os processos de verificação dos resultados usados pelos colegas poderão evitar estes erros.

Foi também neste momento que a sistematização da experiência foi conseguida e que outras perguntas surgiram, como por exemplo: Nas observações efectuadas, alguma vez o comprimento da sombra foi o dobro do comprimento da estaca? E se tivéssemos realizado uma observação às 19 horas, como seria o seu comprimento?

Na parte da correcção das conclusões da experiência foi fundamental ter no quadro os dados recolhidos, um gráfico completo bastante ampliado, e ler as resoluções dos alunos que tivessem diferenças significativas, para que a turma se apercebesse de quem tinha conseguido transmitir maior informação. A discussão em grande grupo permitiu redigir uma conclusão colectiva que integrasse os três componentes: dados recolhidos, conhecimentos adquiridos na realização da experiência e partilha das ideias.

Pensamos que é este processo de análise e de correcção que permite progredir na aprendizagem desde o 1° ciclo. Na resolução de problemas de comunicação, é natural que a maioria dos alunos tenha ainda dificuldade em argumentar, interpretar o que lhes é solicitado e redigir um texto consistente. Este tipo de exploração proporciona momentos muito ricos para discutir a maneira como se deve analisar as folhas de registo para redigir um texto que mostre a interpretação da experiência, sustentada em observações e recolha de dados.

Alice Carvalho, Sandra Rodrigues
EB1/JI Orlando Gonçalves, Agrupamento de Escolas de Alfornelos

Materiais para a aula de Matemática

A tarefa *Experiência da sombra* destina-se a alunos do 4° ano de escolaridade. A propósito desta tarefa aconselha-se a leitura do artigo *Medir a sombra de uma estaca* publicado nesta revista. Chamamos, no entanto, a atenção para a vantagem de os alunos terem antes estudado os movimentos de rotação e de translação da Terra, para melhor compreenderem o movimento aparente do Sol. Durante a realização da experiência é fundamental levar os alunos a observar a posição do Sol, a sua altura, como é projectada a sombra e relacionar com os pontos cardeais.

Para compreender melhor o fenómeno será interessante efectuar a mesma experiência nas diferentes estações do ano.

Alice Carvalho
Sandra Rodrigues

Experiência da sombra

Vais estudar como varia o comprimento da sombra de uma estaca ao longo do dia. Para isso precisas de uma estaca, um relógio, fita métrica, giz, várias pedras e folha de registo.

1. Numa manhã de Sol espeta uma estaca no chão (depois de a medires).

   O Sol projecta uma sombra. Mede o comprimento da sombra, faz um traço de giz sobre a sombra e marca o seu fim com uma pedra.

   Repete este procedimento várias vezes ao longo do dia e faz os respectivos registos.

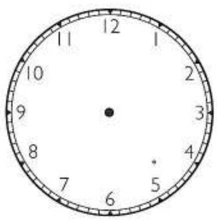
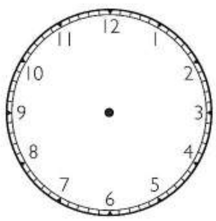
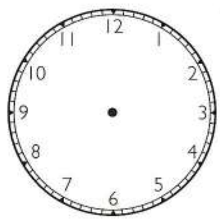
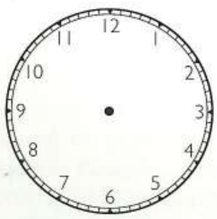
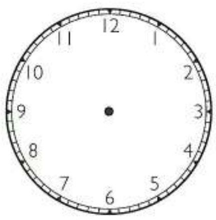
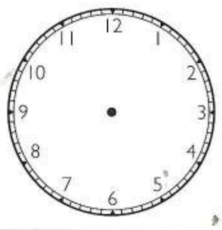
   Cuidado com os olhos, não se pode olhar directamente para o Sol.

2. Representa no gráfico os dados recolhidos ao longo do dia.
3. Observa os dados da experiência e o gráfico e escreve a tua conclusão sobre a variação do comprimento da sombra da estaca ao longo do dia.
4. Com base nos dados da folha de registo responde às seguintes questões:
   — Qual a diferença, em centímetros, entre o comprimento da sombra menor e o comprimento da estaca?
   — A que horas é que o comprimento da sombra era maior do que o da estaca?
   — Em algum momento o comprimento da sombra foi o dobro do comprimento da estaca?

Registo

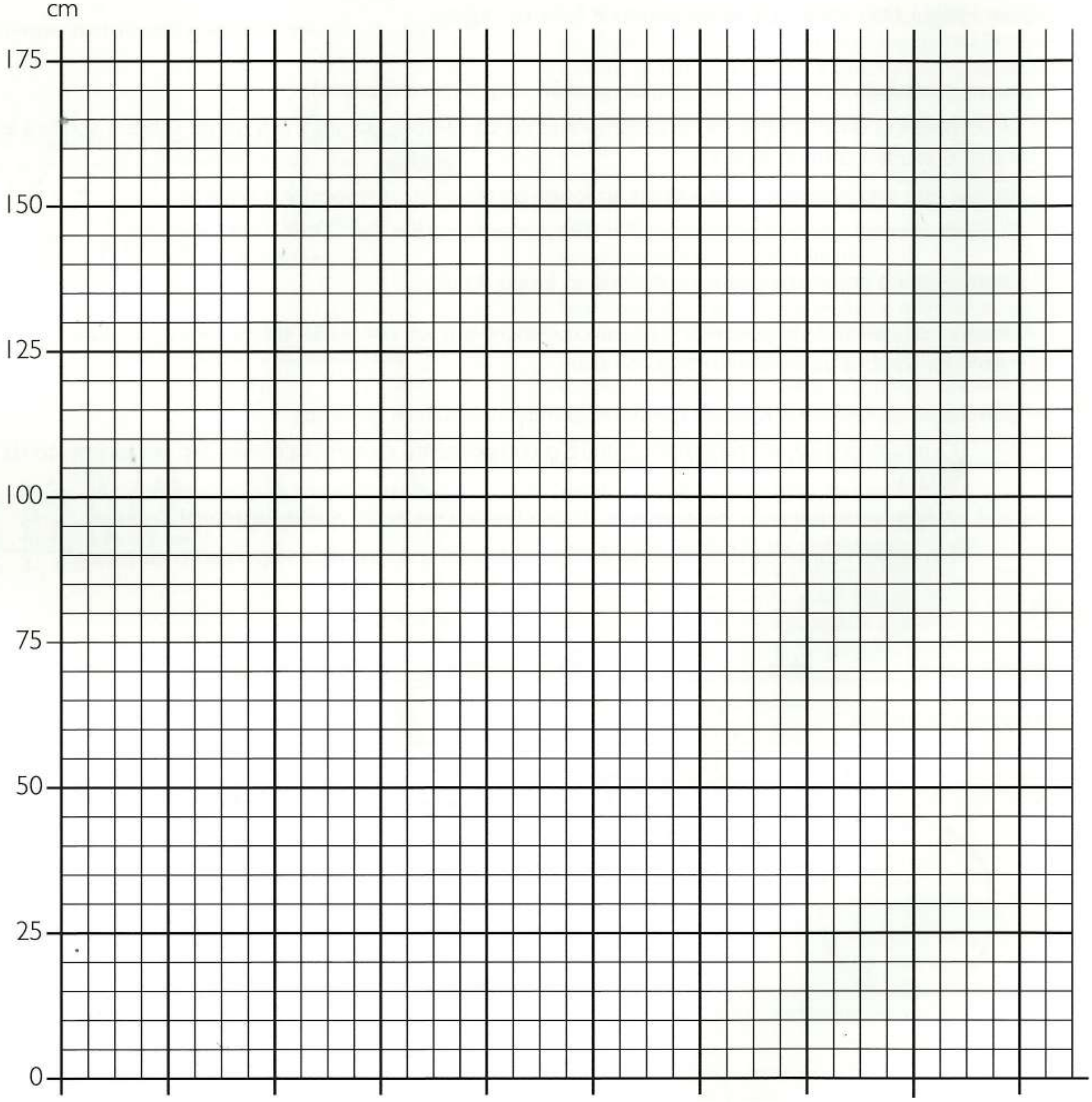
Comprimento da estaca:__________ cm ou ________________m. Dia da experiência__________________________

Horas e comprimentos da sombra

Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 	Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 	Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 
Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 	Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 	Hora_______________ Comprimento da sombra _________ 

Título do gráfico____

Horas								
Sombra em cm								



Conclusão:

Tibaldo e o buraco no calendário

Tibaldo Bondi é um rapazinho de onze anos que vive em Bolonha em 1582. Nesse ano, o Papa Gregório XIII ordena que as datas entre 5 e 14 de Outubro deixem de existir de modo a criar um novo calendário. Este *buraco* no calendário deixa Tibaldo profundamente infeliz porque apaga o dia do seu décimo segundo aniversário: 10 de Outubro de 1582.

Nesta novela científica, escrita numa linguagem simples, acessível e com notas de humor, o autor, narrando a batalha de Tibaldo para recuperar o seu dia de anos, dá-nos uma descrição viva do meio cultural e científico da Itália da época. Ficamos a saber, entre várias curiosidades, porque gripe se diz *influenza*, porque chamamos *lunáticas* a algumas pessoas e porque se devem lavar as feridas com vinho. Ficamos ainda a saber como era um dia na vida de um estudante e como se relacionava com a régua de pau de castanheira. Para além disso, o autor descreve o nascimento de um bebé e aborda questões de higiene associadas; reflecte sobre o contraponto astronomia — astrologia; aborda, embora de maneira muito leve, as perseguições levadas a cabo pela Igreja a quem seguisse as teorias *radicais* de Copérnico e a perseguição e imolação na fogueira a tantas mulheres acusadas de bruxaria; explica bem a necessidade da existência de calendários, a necessidade de mudança para o nosso actual, gregoriano, e faz um desenvolvimento histórico do nascimento e desenvolvimento do cristianismo até à reforma do calendário do Papa Gregório XIII em 1582.

Tibaldo e o buraco no calendário é uma novela dirigida a jovens curiosos mas que pode ser lida por todos com interesse, agrado e proveito.

O livro tem no início o texto do autor *Lembranças de Portugal — notas à edição portuguesa* que é interessante porque ficamos a conhecer um pouco da sua vida pessoal, da sua personalidade e das razões que o fizeram escrever esta novela. O livro termina com um apêndice *Mais e melhor Astronomia*, exterior à história de Tibaldo, onde são abordados diversos temas científicos.

As ilustrações de Jonathan Shimony, filho do autor, (pintor e ilustrador, actualmente professor em Paris), enriquecem a obra. É pena que não sejam coloridas como as da capa e da contracapa.

Livros como este são necessários e bem-vindos. A divulgação científica, servida por uma narrativa atraente, pode assim alcançar um público mais vasto e, em consequência, fomentar o gosto pelo conhecimento científico em geral.

O autor, Abner Shimony, nascido em 1928, em Ohio, EUA, é filósofo e físico conceituado (especialista em mecânica quântica). Foi professor no MIT, no Departamento de Humanidades e Filosofia, e entre outras, nas Universidades de Paris XI (Física), Genebra (Física) e ETH Zurique (Filosofia), sendo actualmente Professor Emérito de Filosofia e Física da Universidade de Boston. Entre os muitos artigos publicados em revistas de física e de filosofia conta-se o seu artigo sobre o Teorema de Bell na Enciclopédia de Filosofia Stanford. Com o livro *Search for a Naturalistic World View* ganhou, em 1996, o prémio Lakatos em Filosofia da Ciência. *Tibaldo e o buraco no calendário* é uma tradução do original publicado em 1998. Abner Shimony foi ainda presidente da Philosophy of Science Association, actualmente é co-director do Wellesley Peace Program e desenvolve actividade política para a paz e contra o nuclear.

Tibaldo e o buraco no calendário
Edição: Editora Replicação, Lda., Março 2001, 161 pp.
ISBN 972-570-263-8
Preço: €15,00 (sócio); €17,63 (não sócio)

Teresa Barandela
Escola Secundária de Garcia de Orta, Porto


CRÉDITO HABITAÇÃO DA CAIXA
100%
DAS PESSOAS
PREFERE NÃO
PAGAR A
1ª PRESTAÇÃO.
OFERTA DA
1ª PRESTAÇÃO,
A 1ª DE MUITAS
VANTAGENS DO
CRÉDITO DA
CAIXA.
Caixa Geral
de Depositos
HÁ MAIS NA CAIXA
DO QUE VOCÊ IMAGINA.

Como vamos de tempo?

Fernando Nunes

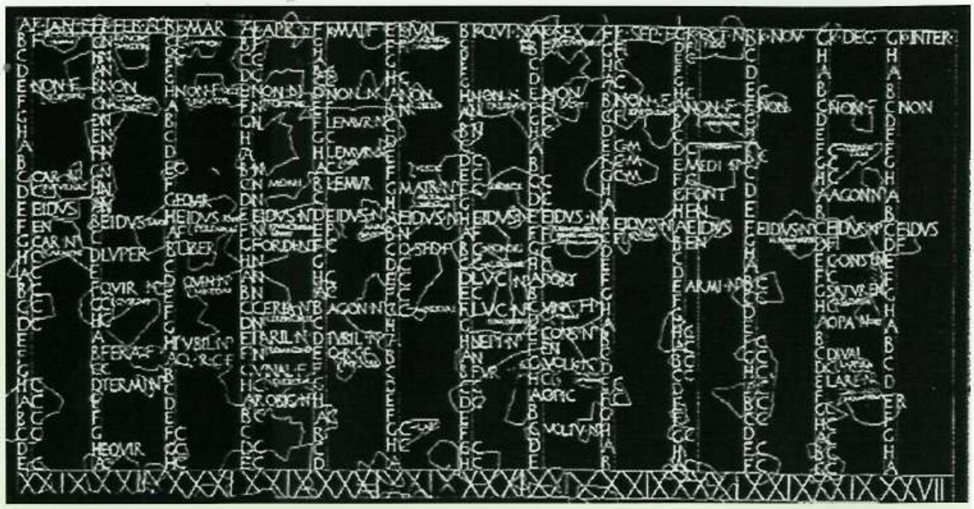
Uma sucessão de Rómulo [?] a Gregório, via César

Desde o início dos tempos, o tempo tem sido considerado um dos conceitos mais ricos e complexos, mostrando-se indispensável nos mais diversos contextos e assuntos. Existe o tempo subjectivo, o tempo poético, o tempo radicalmente pessoal, lado a lado com o tempo variável independente, o tempo universal e o tempo do nosso quotidiano que temos de gerir. Esta necessidade obrigou a uma organização, tentada por várias civilizações de modos diferentes, normalmente com base nos factos mais determinantes associados à sucessão de ciclos naturais que fazem parte do nosso envolvimento e com os quais nos relacionamos.

Os Calendários

A adopção de uma definição geral de calendário como um sistema de registo do tempo que estabelece o início, a duração e as divisões de um ano, sendo estas últimas normalmente o mês e a unidade básica que é o dia, permite a existência de uma variedade de calendários diferentes. De facto, desde a amplitude do próprio ano, passando pelo diferente agrupamento de dias nos meses, até à simples convenção do início e do fim do ano ou do dia, há um leque enorme de variações.[1]

Existem várias referências à possibilidade de existirem calendários desde há dezenas de milhar de anos, existindo autores que defendem a sua existência por volta de 30 000 a.C.. Os defensores desta teoria apresentam como provas ossos de animais com a representação do que parece ser a contagem referente ao número de dias, agrupados em ciclos lunares. A Lua foi então o astro que forneceu o ciclo adoptado nos primeiros calendários, juntamente com o dia. Ainda hoje existem calendários lunares, o islâmico, a par de solares, como o que utilizamos actualmente, e mistos, o hebraico ou o chinês e o mês é uma presença constante, sem dúvida espelho do ciclo lunar de 29 dias, 12 horas e 44 minutos, o tempo entre duas Luas Novas consecutivas.



Calendário Romano com um mês intercalar no final do ano.

O "Calendário Romano"

Diz a lenda que o calendário romano original foi concebido por Rómulo, o mítico primeiro rei de Roma, por volta do século VIII a. C.. Sujeito a imensas reformulações e sem haver uma certeza histórica sobre muitas delas, pode afirmar-se que foi primeiramente constituído por 10 meses, seis de 30 e quatro de 31 num total de 304 dias, e acabava em Dezembro. Estes 304 dias eram seguidos por um período de Inverno que não tinha nome e não era contado. Era um período considerado aziago e não propício a realizações. As pessoas que nasciam nesse período eram consideradas azaradas. O primeiro mês era Martius (do deus Marte), o nosso Março, e o primeiro dia do ano coincidia com o equinócio da Primavera. Os outros meses, até Junius, da deusa Juno, eram relativos a deuses, mas a partir do quinto mês (Quintilius) eram conhecidos pelo seu número de ordem, o que ainda hoje se nota bem (Setembro — sete; Outubro — oito; Novembro — nove; Dezembro — dez).

Terá sido Numa Pompílio, sucessor de Rómulo e segundo rei de Roma, quem, por volta de 700 a. C., acrescentou os meses de Janeiro no início e Fevereiro no final do ano. Foi só no século V a. C. que Fevereiro foi colocado entre Janeiro e Março.

A inclusão destes dois meses, totalizando 51 dias, foi um enorme melhoramento em relação aos 304 dias oficiais do anterior calendário. No entanto, estava ainda longe dos cerca de 365 1/4 dias do ano solar. As tentativas para acertarem o ano civil com o ano trópico, ou o tempo decorrido entre dois equinócios da Primavera, incluíram um mês intercalar — Mercedonius — de dois em dois anos e depois de oito em oito anos, depois de terem reparado que o ano civil era maior do que o necessário. Todas estas medidas eram um pouco avulsas e o próprio Colégio de Pontífices ampliava o ano o encurtava-o, conforme lhe agradasse a continuação, ou não, de algumas personalidades em cargos de administração de nomeação anual.

Podem tomar-se como correctas as palavras de Suetónio, cronista que viveu no século I da nossa era quando afirma que "... o Colégio dos Pontífices deixou o calendário cair numa tal desordem, inserindo dias ou meses consoante lhes dava jeito, que as festas das colheitas e das sementeiras já não estavam a acontecer nas épocas apropriadas." (96 d. C.)

O "Calendário Juliano"

Foi o célebre imperador Júlio César quem se encarregou de colocar alguma ordem na maltratada divisão temporal. Para o fazer chamou alguns dos melhores astrónomos do tempo, nomeadamente Sosígenes um astrónomo e matemático alexandrino que viajou até Roma. A estadia de Júlio César no Egipto deve ter tido alguma influência na escolha do sábio que defendeu o estabelecimento de um ano médio com 365 1/4 dias. Este valor seria obtido por ciclos de quatro anos, sendo três com 365 dias e um com 366. O rei do Egipto Ptolomeu III já tinha proposto uma solução idêntica em 235 a. C..

Esta solução iria aproximar a duração do ano do calendário com a duração do ano trópico e em princípio resolveria os problemas decorrentes da diferença acentuada entre estes dois valores, afastando as estações do ano da sua época real. Foi necessário eliminar os erros que se verificavam nessa altura. De facto, os astrónomos acharam que existia um avanço muito grande, da ordem das dezenas de dias, em relação ao equinócio da Primavera que se acreditava ser sempre a 25 de Março. Foi então decidido que o ano de 46 a. C. tivesse mais dois meses extraordinários de 33 e 34 dias, inseridos entre Novembro e Dezembro, e um mês intercalar

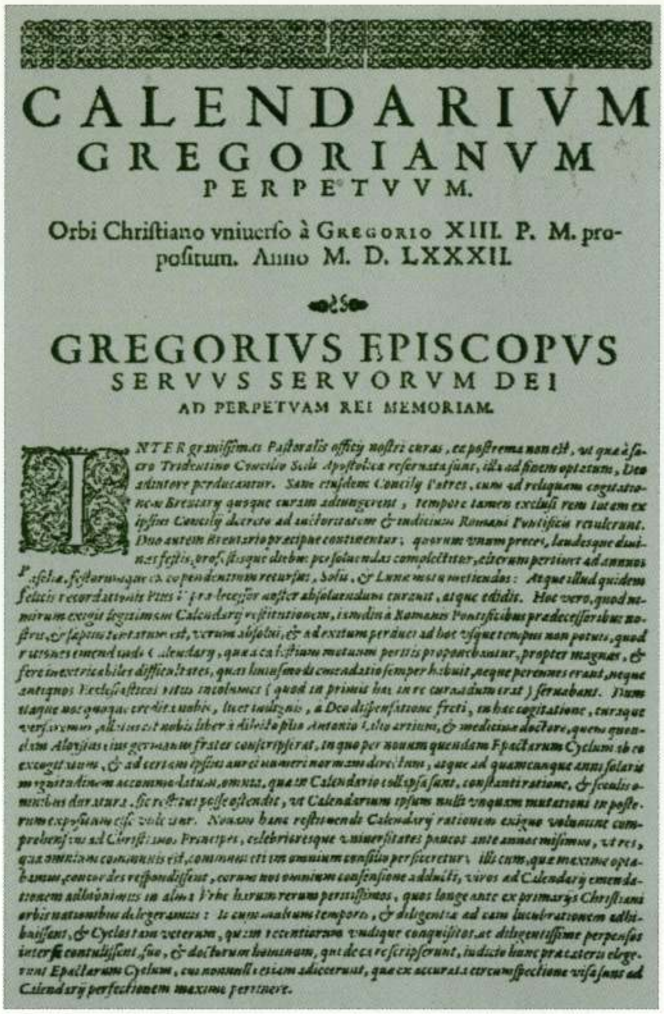
	Janeiro Agosto Dezembro	Fevereiro	Abril Junho Setembro Novembro	Março Maio Julho Outubro
1	Kalendis	Kalendis	Kalendis	Kalendis
2	postridie Kalendas a. d. IV Nonas	postridie Kalendas a.d. IV Nonas	postridie Kalendas a.d. IV Nonas	postridie Kalendas a.d. VI Nonas
3	a. d. III Nonas	a. d. III Nonas	a. d. III Nonas	a. d. V Nonas
4	pridie Nonas	pridie Nonas	pridie Nonas	a. d. IV Nonas
5	Nonis	Nonis	Nonis	a. d. III Nonas
6	postridie Nonas a. d. VIII Idus	postridie Nonas a. d. VIII Idus	postridie Nonas a. d. VIII Idus	pridie Nonas
7	a. d. VII Idus	a. d. VII Idus	a. d. VII Idus	Nonis
8	a. d. VI Idus	a. d. VI Idus	a. d. VI Idus	postridie Nonas a. d. VIII Idus
9	a. d. V Idus	a. d. V Idus	a. d. V Idus	a. d. VII Idus
10	a. d. IV Idus	a. d. IV Idus	a. d. IV Idus	a. d. VI Idus
11	a. d. III Idus	a. d. III Idus	a. d. III Idus	a. d. V Idus
12	pridie Idus	pridie Idus	pridie Idus	a. d. IV Idus
13	Idibus	Idibus	Idibus	a. d. III Idus
14	postridie Idus a. d. XIX Kalendas	postridie Idus a. d. XVI Kalendas	postridie Idus a. d. XVIII Kalendas	pridie Idus
15	a. d. XVIII Kalendas	a. d. XV Kalendas	a. d. XVII Kalendas	Idibus
16	a. d. XVII Kalendas	a. d. XIV Kalendas	a. d. XVI Kalendas	postridie Idus a. d. XVII Kalendas
17	a. d. XVI Kalendas	a. d. XIII Kalendas	a. d. XV Kalendas	a. d. XVI Kalendas
18	a. d. XV Kalendas	a. d. XII Kalendas	a. d. XIV Kalendas	a. d. XV Kalendas
19	a. d. XIV Kalendas	a. d. XI Kalendas	a. d. XIII Kalendas	a. d. XIV Kalendas
20	a. d. XIII Kalendas	a. d. X Kalendas	a. d. XII Kalendas	a. d. XIII Kalendas
21	a. d. XII Kalendas	a. d. IX Kalendas	a. d. XI Kalendas	a. d. XII Kalendas
22	a. d. XI Kalendas	a. d. VIII Kalendas	a. d. X Kalendas	a. d. XI Kalendas
23	a. d. X Kalendas	a. d. VII Kalendas	a. d. IX Kalendas	a. d. X Kalendas
24	a. d. IX Kalendas	a. d. VI Kalendas	a. d. VIII Kalendas	a. d. IX Kalendas
25	a. d. VIII Kalendas	a. d. V Kalendas	a. d. VII Kalendas	a. d. VIII Kalendas
26	a. d. VII Kalendas	a. d. IV Kalendas	a. d. VI Kalendas	a. d. VII Kalendas
27	a. d. VI Kalendas	a. d. III Kalendas	a. d. V Kalendas	a. d. VI Kalendas
28	a. d. V Kalendas	pridie Kalendas	a. d. IV Kalendas	a. d. V Kalendas
29	a. d. IV Kalendas		a. d. III Kalendas	a. d. IV Kalendas
30	a. d. III Kalendas		pridie Kalendas	a. d. III Kalendas
31	pridie Kalendas			pridie Kalendas

Meses no Calendário Romano.

de 27 dias, a seguir a Fevereiro, perfazendo um ano com um total de 445 dias! Estas grandes alterações causaram imensos problemas em vários sectores da vida de então, desde o cumprimento de contratos a datas de envio de mercadorias, passando pela própria recolha de impostos. Cícero, adversário político de César, chegou a afirmar que o imperador não contente com o governo da terra também queria mandar nos céus. O ano de 46 a. C. foi chamado pelo próprio César "ultimus annus confusionis" — o último ano de confusão e assim ficou conhecido historicamente.

Apesar de todas as mudanças, a maioria dos romanos achou positivo que tivessem um calendário estável, baseado em conclusões científicas, ao invés de estar à mercê dos humores dos sacerdotes e dos detentores do poder. Além das mudanças episódicas para o ano de 46 a, C., as principais alterações tinham a ver com o tamanho do ano (aumento do número de dias de vários meses, alternado entre 31 e 30, com excepção de Fevereiro nos anos comuns), e, principalmente, a sucessão dos anos comuns e bissextos, cada um deles com um número constante de dias. As alterações aos nomes dos meses (Quintilius para Julius e Sextilius para Augustus) para homenagear os imperadores Júlio César e Octávio Augusto foram ambas efectuadas posteriormente à morte de Júlio César.

Apesar de toda esta definição, após o desaparecimento de Júlio César, no ano de 44 a. C., os políticos e os sacerdo-



CALENDARIVM
GREGORIANVM
PERPETVVM.

Orbi Chriſtiano vniuerſo à GREGORIO XIII. P. M. propoſitum. Anno M. D. LXXXII.

GREGORIVS EPISCOPVS
SERVVS SERVORVM DEI
AD PERPETVAM REI MEMORIAM.

Bula do Papa Gregório XIII para a introdução do Calendário Gregoriano

tes fizeram valer a sua autoridade e introduziram anos bissextos de três em três anos, em vez do estabelecido ciclo. Este erro foi emendado por Augusto que mandou ignorar os três anos bissextos a seguir a 8 d. C..

Manteve-se a forma de indicar os dias de cada mês a partir de três pontos de referência: o primeiro dia do mês — calendas, de onde deriva a palavra calendário; o quinto ou sétimo dia — os nonos; o décimo terceiro ou o décimo quinto dia — os idos. Os idos ocorriam nove dias depois dos nonos, contando estes como o primeiro dia de contagem. Todos os outros dias eram referenciados em relação ao dia de referência mais próximo, dizendo quantos dias faltavam, com a mesma lógica de contar o próprio dia. Por exemplo, 24 de Fevereiro era o sexto dia antes das calendas de Março (24, 25, 26, 27, 28, 1). Como foi decidido que esse era o dia a inserir nos anos com 366 dias, haveria dois dias *sextos* e daí a designação de ano *bissexto* que actualmente é utilizada na língua portuguesa.

Originalmente, as calendas correspondiam ao dia de Lua Nova, os nonos ao Quarto Crescente e os idos aos de Lua Cheia, espelho de uma influência lunar no primitivo calendário romano, que acabou por se desvanecer num calendário que assumiria resolutamente o seu carácter solar.

O Calendário Gregoriano

O Calendário Juliano foi utilizado durante centenas de anos, desde 45 a. C. até ao ano de 1582, tendo a sua versão definitiva ficado estabelecida no consulado de Augusto, com a mudança de nome do mês Sextilius para Augustus e o rearranjo do número de dias de alguns meses. Por exemplo, o novo Augustus passou a 31 dias, apesar de Sextilius ter 30, e o Fevereiro, que originalmente tinha 29 ou 30, passou a ter 28 ou 29, desfazendo-se também a alternância entre meses de 30 e de 31 dias que Júlio César tinha estabelecido.

Um dos problemas que o calendário Juliano tentou resolver foi o de aproximar a duração do ano civil à do ano trópico. O facto de o ano trópico não ser múltiplo do dia, obrigou todos os que queriam ter um ano comandado pelo Sol a pensarem em formas de ter um ano médio aproximado o mais possível ao ano trópico. Nesse sentido, o Calendário Juliano deu um enorme passo em frente, passando da desorganização então existente a um ano civil de duração média 365 dias e 6 horas (ou 365,25 dias em decimal).

O ano trópico médio, para a nossa época, é 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos (aproximadamente 365,242190 dias). Existe portanto uma diferença de 11 minutos e 14 segundos para o ano gregoriano, o que equivale a dizer que durante a adopção dos ciclos de 4 anos nos atrasámos, em relação ao Sol, 11 minutos e 14 segundos em média, por ano. A acumulação deste atraso durante centenas de anos (atraso de um dia em 128 anos decorridos) e o rigor cada vez maior nas medições provocaram que várias cientistas, astrónomos, matemáticos e físicos, chamassem a atenção para a necessidade de modificar as regras do calendário.

O Papa Gregório XIII foi sensível a quem defendia alterações no calendário e nomeou uma comissão para estudar o assunto e propor alterações. Essa comissão trabalhou durante alguns anos, nas décadas de 70 e 80 do século XVI e teve como elemento, talvez o mais famoso, o padre jesuíta Clavius, um italiano de ascendência alemã que estudou na universidade de Coimbra onde teve Pedro Nunes como professor.

A proposta da comissão, da autoria de Luís Lílio, um médico e astrónomo italiano, que estudou as diversas estimativas existentes até à altura para a duração do ano trópico e concluiu que se deviam retirar 3 dias em cada grupo de 400 anos. De acordo com isso, a sua proposta redefinia os anos bissextos da seguinte forma:

Um ano será bissexto se for múltiplo de 4, mas se for múltiplo de 100 e não for de 400, esse ano não será bissexto.

Esta foi a proposta acrescentada pela comissão e aprovada pelo Papa Gregório XIII que a publicou. Assim sendo, a sucessão de anos no nosso calendário apresenta um período de 400 anos, em que 97 são bissextos. Se considerarmos o período de 400 anos que vai, por exemplo, de 1701 a 2100, todos os múltiplos de 4 são bissextos, com excepção de 1800,

Nº de ordem dos meses	Romano I (Rómulo?)	Romano II (N. Pompílio)	Juliano (Augusto)	Gregoriano
1	Martius (31)	Martius (31)	Ianuarius (31)	Janeiro (31)
2	Aprilis (30)	Aprilis (29)	Februarius (28/29)	Fevereiro (28/29)
3	Maius (31)	Maius (31)	Martius (31)	Março (31)
4	Iunius (30)	Iunius (29)	Aprilis (30)	Abril (30)
5	Quintilius (31)	Quintilius (31)	Maius (31)	Maio (31)
6	Sextilis (30)	Sextilis (29)	Iunius (30)	Junho (30)
7	Septembre (30)	Septembre (29)	Julius (31)	Julho (31)
8	Octobre (31)	Octobre (31)	Augustus (31)	Agosto (31)
9	Novembre (30)	Novembre (29)	Septembre (30)	Setembro (30)
10	Decembre (30)	Decembre (29)	Octobre (31)	Outubro (31)
11	--------------	Ianuarius (29)	Novembre (30)	Novembro (30)
12	--------------	Februarius (28)	Decembre (31)	Dezembro (31)

Evolução da estrutura dos meses nos calendários.

1900 e 2100, os múltiplos de 100 que não são de 400. Nestas condições o ano tem a duração média de 365 97/100 ou 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 20 segundos ou 365,2426 dias.

Era também necessário decidir como se devia recuperar o atraso acumulado nos últimos 1600 anos, que totalizava 10 dias. A alternativa era eliminar os 10 anos bissextos seguintes ou fazê-lo de uma só vez. Foi esta última a solução adoptada e a bula papal *Inter Gravissimas*, publicada em 1582, mandava que o dia a seguir a 4 de Outubro, uma quinta-feira, devia ser 15 de Outubro, sexta-feira, perdendo-se 10 dias no entretanto!

A bula especificava, além dos pontos anteriores, outros aspectos importantes num calendário, nomeadamente a forma de se saber quando era o domingo de Páscoa em cada ano, e outros dias importantes para o cristianismo. A sua aceitação foi muito diferenciada. Desde Espanha, Itália e Portugal (sob o domínio dos Filipes) que acataram imediatamente as directivas papais, até à Turquia que adoptou o calendário em 1927, existiram os países maioritariamente protestantes — "mais vale estar em desacordo com o Sol do que de acordo com o papa" — ou não cristãos que demoraram mais ou menos tempo a aceitarem oficialmente o Calendário Gregoriano, o que parece ser uma regra no mundo actual. Claro que existem países que continuam a acatar outros calendários, especialmente para fins religiosos.

E agora?

O calendário que utilizamos não é perfeito. Para estar de acordo com o Sol, utilizando a expressão dos protestantes do século XVI, é necessário outro calendário com outras regras. O nosso calendário adianta-se em média 26 segundos por ano, o que implica a eliminação de um dia ao fim de 3300 anos. Se aliarmos a isto o facto de os meses serem unidades de amplitude diferente, de 28 a 31 dias, e a amplitude do intervalo em que podem ser marcadas várias datas importantes, principalmente a Páscoa, existem algumas razões para que se possam propor alterações ao calendário que agora utilizamos.

Não quererá pensar nalguma sugestão que possa ser considerada pertinente, até com os seus alunos?

Nota

1 A semana foi uma divisão temporal que apareceu depois do mês.

Bibliografia

Duncan, D. E., 1999, *The Calendar*, Fourth Estate.

Reingold e Dershowitz, 1998, *Calendrical Calculations*, Cambridge University Press.

webexhibits.org/calendars/calendar-roman.html (26 de Julho de 2006)

wordnet.princeton.edu/perl/webwn (3º dia antes dos Idos de Sextilius, MMDCCLIX)

www.calendarhome.com/converter/ (13 de Julho de 2006)

www.calendario.cnt.br/intro_calendar01.htm (26 de Julho de 2006)

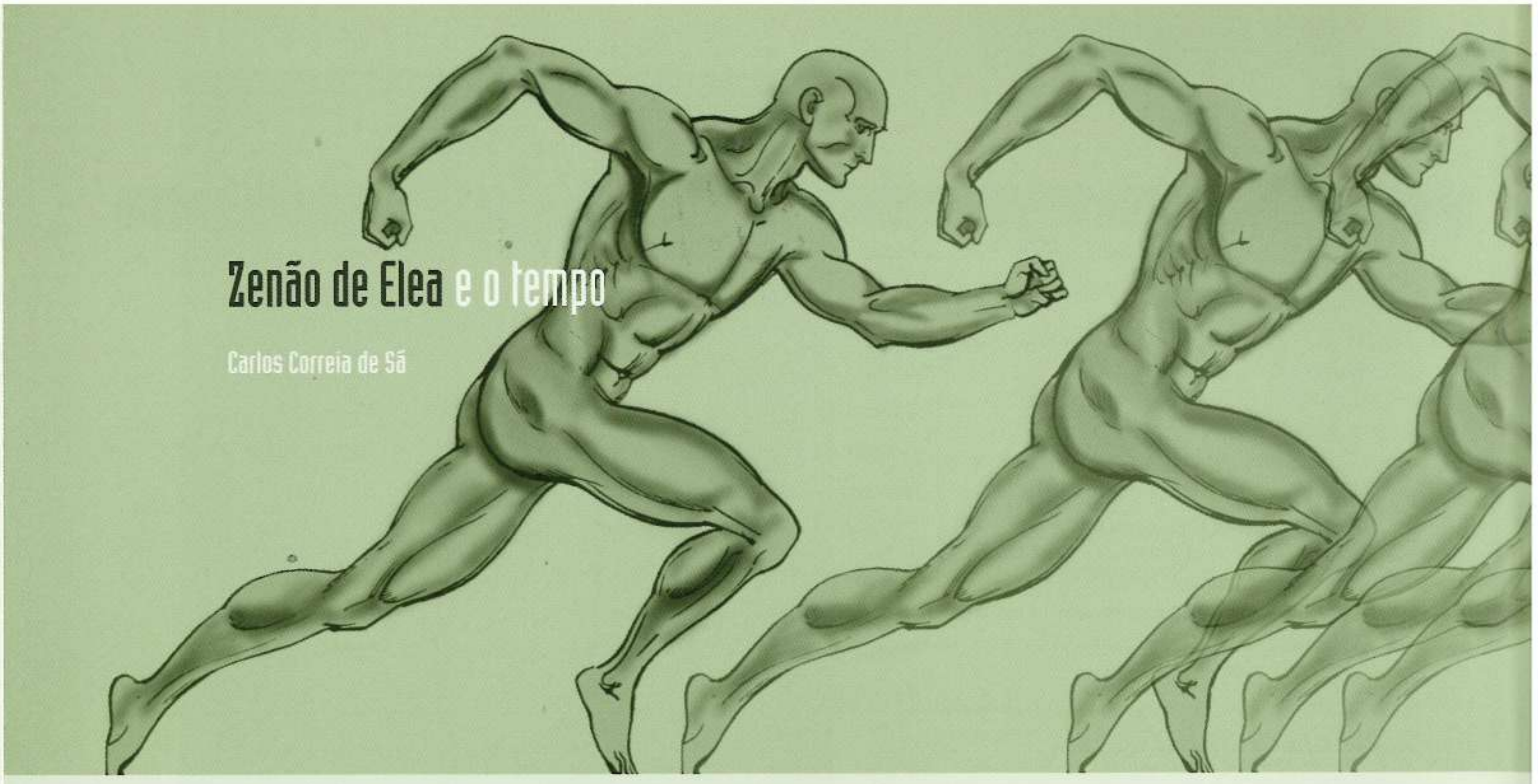
www.personal.psu.edu/users/w/x/wxk116/RomanCalendar/ (13 de Julho de 2006)

www.tondering.dk/claus/calendar.html (3º dia antes dos Idos de Sextilius, MMDCCLIX)

www.unrv.com/culture/early-roman-calendar.php (13 de Julho de 2006)

Fernando Nunes

Escola EB 2,3 de Fitares



Zenão de Elea e o tempo

Carlos Correia de Sá

Os quatro argumentos de Zenão de Elea "contra o movimento" gozam duma inegável popularidade. Conhecem-se oito ou nove argumentos que lhe são atribuídos (dos quarenta que, segundo Proclo de Lícia, teria concebido), mas os quatro que pretensamente demonstram a impossibilidade de movimento são os mais populares e os que mais têm estimulado o engenho de matemáticos, físicos e filósofos (quase sempre na tentativa de os desmontar, e não de os compreender). É impossível dar aqui uma ideia, mesmo que muito pálida, de tudo o que se tem escrito sobre estes quatro argumentos, pelo que me limitarei, após breves considerações introdutórias, a tentar expor a interpretação que deles deu Jean Zafiropoulo no livro *L'École Éléate* (Paris 1950).

Pitagóricos e Eleatas

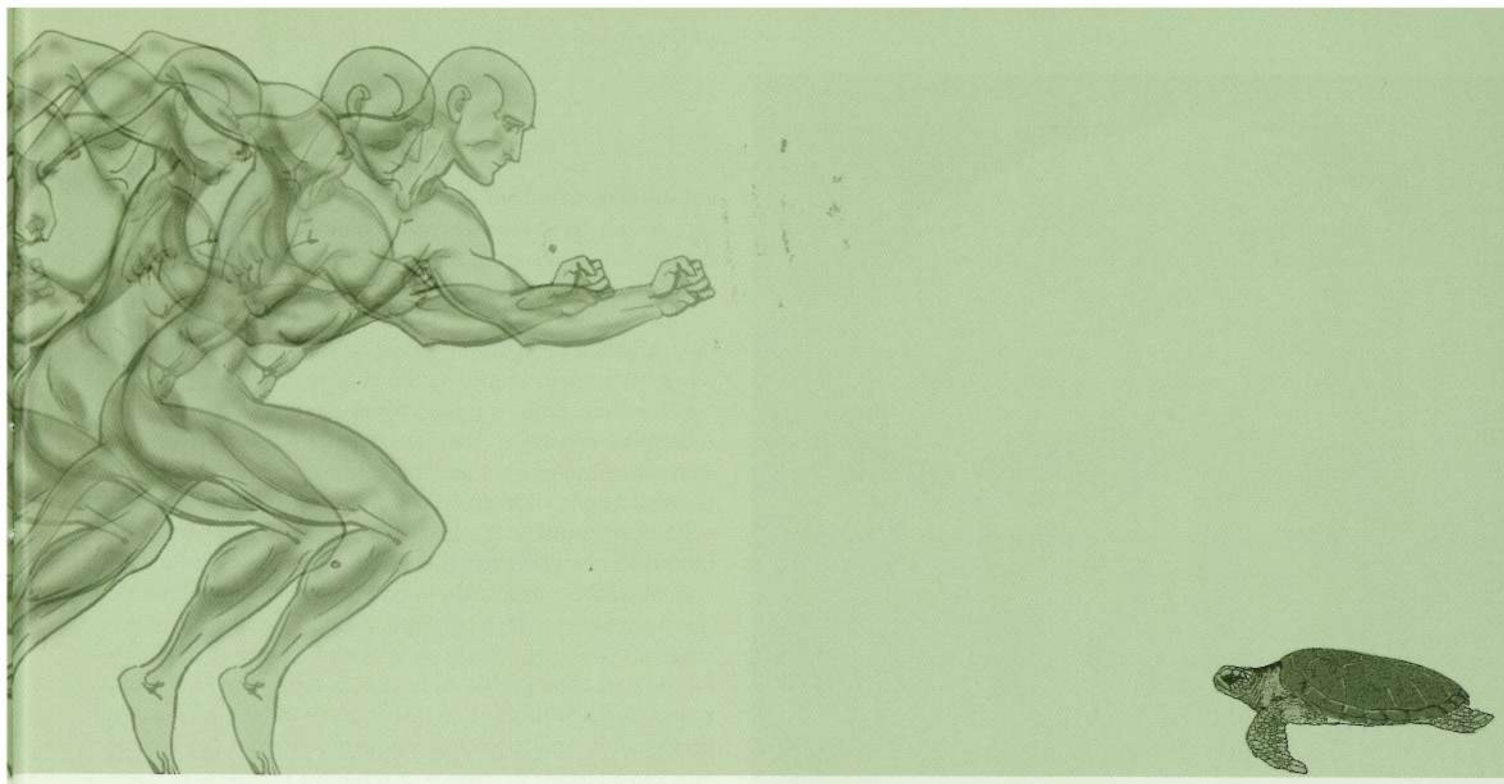
Por volta de 500 a. C., a cultura científica grega era dominada pela Escola Pitagórica, sediada em Crotona, na Magna Grécia. Os filósofos desta Escola concebiam qualquer objecto material como sendo constituído por uma quantidade finita de corpúsculos indivisíveis, a que chamavam *mónadas*, e estendiam esta concepção corpuscular da matéria também ao espaço e ao tempo. As mónadas pitagóricas tinham *tamanho*, dado que na composição de qualquer segmento de recta, de qualquer figura plana ou sólida, bem como de qualquer período de tempo intervinha apenas um certo *número* (isto é, uma quantidade *finita*) delas. Por exemplo, um segmento de recta seria constituído por *pontos* materiais com uma certa *extensão*, do mesmo modo que um intervalo de tempo seria constituído por *instantes* com uma certa *duração*.

Uma teoria alternativa terá tido origem na própria Escola de Crotona, com Anaxágoras de Clazomene. Para este filósofo, também ele pitagórico, a matéria seria ainda constituída por corpúsculos, mas sem tamanho (Leibniz diria: *infinitamente pequenos*) e em quantidade infinita. Portanto, as grandezas (quer espaciais, quer temporais) poderiam subdividir-se indefinidamente. Um traço, historicamente importante para a matemática, do sistema de Anaxágoras é a concepção *contínua* do universo, por oposição à concepção *discreta* dos primeiros pitagóricos.

Os filósofos de outra cidade da Magna Grécia, Elea, propuseram uma segunda alternativa ao sistema das mónadas indivisíveis. Enquanto que Anaxágoras representou apenas um desvio da ortodoxia da sua Escola, Parménides de Elea defendeu uma concepção radicalmente diferente da pitagórica. Para os eleatas, o universo é uno e indivisível, e não há nele lugar para as mónadas, tenham elas tamanho ou não.

A epistemologia de Parménides também é inovadora: o conhecimento obtém-se só por via intelectual; os sentidos conduzem ao erro, pelo que por via empírica não se obtém o verdadeiro conhecimento; a pluralidade e a mudança que constantemente se observam no mundo são aparências, resultado do carácter enganoso da percepção sensorial. Intimamente ligado à teoria eleata do conhecimento, está o *método dialéctico*. A primeira argumentação por *redução ao absurdo* da história (embora a propósito dum tema de filosofia, e não de matemática) aparece no poema didáctico *Da Natureza*, de Parménides. E é um discípulo deste, Zenão de Elea, quem desde a Antiguidade costuma ser considerado como o dialecta por excelência.

Segundo a tradição, Zenão argumentava indirectamente, como era típico dos eleatas: para combater uma tese, aceitava-a por momentos e demonstrava que ela era contraditória. Seguindo de muito perto Zafiropoulo, veremos que



os quatro argumentos de Zenão contra o movimento podem interpretar-se como uma excelente ilustração deste método dialéctico.

Os argumentos de Zenão contra o movimento

Dicotomia: Não há movimento porque, antes de um móvel percorrer um certo espaço, tem de percorrer metade desse espaço; mas, antes de percorrer metade desse espaço, tem de percorrer metade de metade desse espaço; e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode chegar sequer a começar.

Aquiles: Se Aquiles, o mais veloz corredor da Ática, der algum avanço a uma lenta tartaruga, então nunca conseguirá vencê-la numa corrida. Com efeito, quando Aquiles atingir o local de onde a tartaruga partiu, já esta terá avançado e se encontrará num outro local adiante dele; e, quando Aquiles atingir esse outro local, já a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim indefinidamente. Portanto, Aquiles nunca conseguirá atingir a tartaruga.

Seta: Uma seta voando para o alvo está, na realidade, parada. Com efeito, em cada instante, a seta ocupa uma só posição, ou seja, em cada instante, a seta está parada; portanto, a seta está sempre parada.

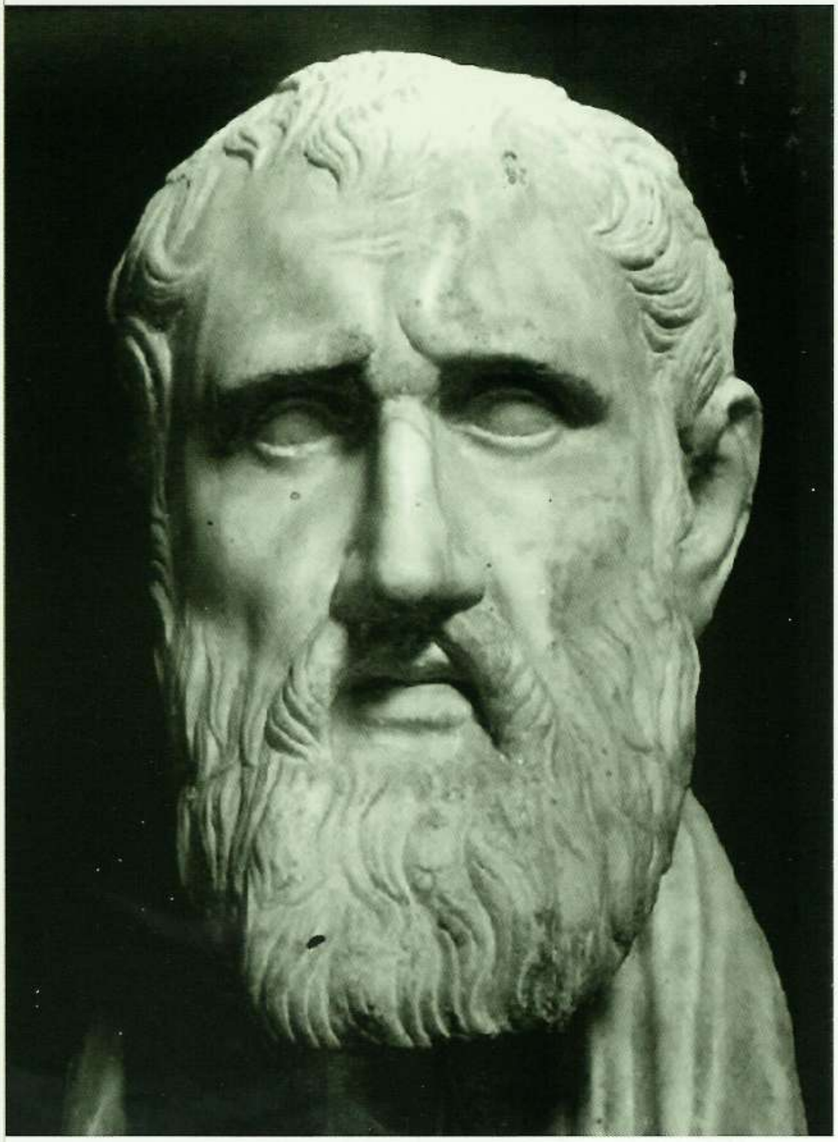
Estádio: Considerem-se três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel, outra correndo num dos sentidos, e a última correndo no sentido oposto. Se, numa unidade de tempo, cada um dos atletas em corrida passar por um dos atletas em repouso então um corredor duma fila passa por um corredor da outra fila em metade desse tempo. Portanto, a unidade de tempo é igual ao seu dobro.

Os dois primeiros destes argumentos são facilmente explicáveis em termos de convergência de séries reais, por neles se supor que o espaço é indefinidamente divisível. Na *Dicotomia*, a trajectória do móvel subdivide-se em infinitas partes, cada uma das quais é metade da anterior, e no *Aquiles*, o percurso da tartaruga até ser alcançada é também subdividido em infinitos "avanços", cada vez menores.

Contudo, esta explicação não envolve o tempo. Se a situação que Zenão considerava paradoxal se resumisse à decomposição dum espaço limitado numa infinidade de partes com grandeza, então seria desnecessário dar-lhe formulações que envolvessem movimento. Não é de crer que um dialecta da craveira de Zenão tenha cometido tal falta. Argumentar sobre o *movimento* implica discorrer sobre o *espaço* e também sobre o *tempo*; se Zenão se referiu ao movimento, e não apenas ao espaço, então uma explicação satisfatória dos seus argumentos deve levar o tempo em linha de conta.

A interpretação de Zafiropoulo

Para Jean Zafiropoulo (*L'École Éléate*, Paris 1950), Zenão pretenderia, com os quatro argumentos acerca do movimento, rebater todas as possibilidades de constituição corpuscular do espaço e do tempo, tanto na concepção de mónadas com grandeza, que tinha sido preconizada pelos primeiros pitagóricos, como na de mónadas sem grandeza, que era proposta por Anaxágoras. Não se restringindo aos casos em que as mónadas espaciais e as mónadas temporais tivessem ambas grandeza ou fossem ambas desprovidas dela, Zenão teria contemplado também a possibilidade de as estruturas dum segmento de recta e dum intervalo de tempo não serem "isomorfas" uma à outra. Assim, ter-se-ia visto na necessidade de considerar quatro casos distintos, todos teòricamente possíveis dentro do sistema corpuscular geral defendido pe-



Zenão [495?—435? a.C.]

las correntes pitagóricas, e de apresentar quatro argumentos distintos, a fim de os rebater a todos.

Estrutura do espaço e do tempo refutada por cada argumento		mónadas espaciais	
		extensas	não extensas
mónadas temporais	duráveis	*Estádio*	*Dicotomia*
	não duráveis	*Seta*	*Aquiles*

O argumento da *Dicotomia* destinar-se-ia a rebater a possibilidade de as mónadas espaciais serem inextensas mas as mónadas temporais serem duráveis. A inextensão das mónadas espaciais permitiria a indefinida subdivisão de qualquer segmento de recta; pelo contrário, qualquer decomposição do intervalo de tempo teria apenas um número finito de componentes. Portanto, se um segmento de recta fosse percorrido por um móvel num certo intervalo de tempo, bastaria considerar uma subdivisão suficientemente grande do espaço para ter forçosamente vários subintervalos percorridos durante um só instante. Mas isso permitiria *decompor o instante*, o que é absurdo.

Com o *Aquiles*, Zenão pretenderia provar que é absurda a hipótese de todas as mónadas (tanto espaciais como temporais) serem infinitamente pequenas. De acordo com esta hipótese, tanto o espaço como o tempo seriam indefinidamente divisíveis. Assim, se Aquiles fizesse uma corrida com uma tartaruga em que lhe concedesse um certo avanço, nunca mais a conseguiria alcançar. Com efeito, antes de a alcançar, Aquiles teria de passar pelo ponto de partida da tartaruga; mas enquanto o corredor fizesse esse percurso, o animal também avançaria (ainda que mais lentamente do que o seu perseguidor); portanto, quando Aquiles se encontrasse no ponto de partida da tartaruga, já esta se teria deslocado uma certa porção de espaço, conquistando assim um novo avanço (ainda que menor do que o inicial) sobre o seu perseguidor. Analogamente, enquanto Aquiles percorresse esta nova porção de espaço, a tartaruga continuaria o seu lento movimento, mantendo-se à frente dele. E assim sucessivamente. A tartaruga manteria *sempre* um certo avanço, isto é, Aquiles *nunca* a atingiria.

A concepção de mónadas espaciais com extensão e mónadas temporais sem duração seria rebatida pelo argumento da *Seta*. A explicação poderia ser inteiramente simétrica da do primeiro argumento acima. Com efeito, qualquer intervalo de tempo seria indefinidamente divisível, enquanto que qualquer decomposição dum segmento de recta teria apenas um número finito de componentes. Portanto, se uma seta fosse atirada a um alvo, bastaria considerar uma subdivisão suficientemente grande do tempo para ver que, sobre a trajectória da seta, haveria pelo menos uma posição ocupada durante vários instantes; ora, enquanto estivesse nessa posição, a seta estaria *parada* e não em movimento.

Finalmente, Zenão rebateria a que se supõe ser a mais antiga concepção da escola de Crotona, a das mónadas (tanto espaciais como temporais) com grandeza, através do argumento do *Estádio*. Este argumento mostra que a primitiva concepção pitagórica é incompatível com a noção de *velocidade relativa*. Considerem-se três móveis, um deles em repouso e os outros dois em movimento uniforme na mesma direcção e em sentidos opostos, e suponha-se que cada um destes tem, relativamente ao primeiro, uma velocidade tal que percorrem uma mónada espacial enquanto decorre uma mónada temporal. A velocidade do segundo móvel relativamente ao terceiro (ou do terceiro relativamente ao segundo) seria tal que, enquanto decorresse uma mónada temporal, seriam percorridas duas mónadas espaciais; uma vez mais, isso permitiria *dividir o instante*.

É costume denotar cada um dos móveis em causa por uma sequência de letras iguais, cada uma representando um corredor, o que é bem adequado ao modelo de mónadas extensas que se pretende considerar. Admita-se que, em cada instante (isto é, durante cada mónada temporal), cada um dos corredores *BB*… e *CC*… avança o espaço ocupado por um *A*; então, em cada instante, cada um dos corredores

BB... passa por dois dos corredores *CC*... . Portanto, os corredores passam da posição

$$\begin{array}{cccccc} & & A & A & A & A \\ B & B & B & B & \rightarrow & \\ & & & \leftarrow & C & C \quad C \quad C \end{array}$$

à posição

$$\begin{array}{ccccc} & A & A & A & A \\ B & B & B & B & \rightarrow \\ \leftarrow & C & C & C & C \end{array}$$

sem que os corredores *BB* ... e CC ... tenham de passar pela *posição intermédia* seguinte:

$$\begin{array}{cccccccc} B & B & B & B & \rightarrow & & & \\ & & & \leftarrow & C & C & C & C \end{array}$$

Esta situação era certamente considerada absurda. Uma outra formulação, com o mesmo efeito lógico, poderia ser a de que, como os corredores *BB*... e CC... tinham forçosamente de passar pela referida posição intermédia, a mónada temporal podia ser dividida em duas partes, conclusão contraditória com a noção de *mónada*.

Uma explicação pela Teoria dos Conjuntos

Se a interpretação de Zafiropoulo corresponder às verdadeiras intenções de Zenão, então o argumento *Aquiles* afigura-se como o único insatisfatório. Com efeito, é o único que repousa numa falácia que, uma vez desfeita, lhe tira quaisquer pretensões de destruir a hipótese pitagórica que estava destinado a rebater.

Qualquer um dos quatro argumentos admite uma interpretação segundo a qual a consideração dum certo movimento se reduz (em termos modernos!) ao estabelecimento duma bijecção entre dois conjuntos. Uma lei de movimento é uma correspondência entre o tempo e o espaço, que a cada instante faz corresponder a posição ocupada pelo móvel nesse instante. Todos os movimentos considerados por Zenão nestes argumentos se podem considerar como sendo injectivos (isto é, sem paragens nem recuos); portanto, qualquer deles definiria uma correspondência bijectiva entre *o conjunto das posições* ocupadas e *o conjunto dos instantes* em que essas posições são ocupadas.

É claro que não pode haver uma bijecção entre um conjunto finito e um conjunto infinito, e é a isso que se reduzem as argumentações tanto da *Dicotomia* como da *Seta*. Zenão terá dado a estes dois argumentos a forma que julgou mais espectacular, como verdadeiro dialecta que era, mas eles são essencialmente idênticos (ou duais, se se preferir). Do mesmo modo que a *Dicotomia* permite a conclusão absurda de que o instante pode ser dividido, também a *Seta* permitiria dividir a mónada espacial. É tão absurdo que uma seta voadora ocupe a mesma posição durante infinitos instantes, como que o móvel da *Dicotomia* (que também pode ser uma seta voadora!) consiga ocupar infinitas posições num só instante.

Este género de argumento só funciona bem quando se supõe que o espaço e o tempo têm estruturas diferentes. Se se supuser um intervalo de tempo isomorfo a um segmento de recta, então não se poderá obter um absurdo através dum só movimento. Por isso, nos dois argumentos restantes, destinados a rebater as duas hipóteses em que as estruturas do espaço e do tempo seriam idênticas, Zenão é forçado a considerar mais do que um móvel. Isso permite-lhe comparar os espaços entre si: conjugando duas leis de movimento (compondo uma das bijecções com a inversa da outra), obtém uma bijecção entre as duas trajectórias.

No *Estádio*, Zenão consegue, a partir de dois movimentos em sentidos opostos, considerar um "movimento relativo" a velocidade dupla da dos outros dois, pondo assim um mesmo conjunto finito de instantes simultaneamente em bijecção com dois conjuntos finitos (não vazios) de pontos, dos quais um tem o dobro dos elementos do outro. Isto é absurdo, porque implica uma bijecção entre estes dois últimos conjuntos, que têm cardinais diferentes.

Também no *Aquiles*, um mesmo conjunto de instantes está simultaneamente posto em bijecção com os conjuntos das posições ocupadas pelos dois participantes na corrida. Para cada instante, t, em que dura a corrida, designem-se por A_t e T_t as posições ocupadas por Aquiles e pela tartaruga nesse instante; por composição duma destas bijecções com a inversa da outra, podemos pôr em correspondência as posições A_t e T_t (para o mesmo t). Como a tartaruga parte com um certo avanço, nem todas as posições ocupadas por Aquiles são ocupadas pela tartaruga. Zenão pretende que, em consequência disso, também nem todas as posições ocupadas pela tartaruga podem ser ocupadas por Aquiles pois (se nos for permitido atribuir uma ideia errada a Zenão), havendo uma bijecção entre os dois conjuntos de posições, não poderia um deles estar estritamente contido no outro. Ora, supondo-se esses conjuntos infinitos, tal argumento não é válido! Portanto, a concepção de Anaxágoras não foi rebatida (se admitida tanto para o espaço como para o tempo).

Se se aceitar a interpretação sugerida por Zafiropoulo, os outros três argumentos de Zenão acerca do movimento são inatacáveis.

Bibliografia

António Andrade Guimarãis: O *Pensamento Matemático na Grécia Antiga* (1ª Parte: da Antiguidade Oriental até Zenão de Eleia), Porto, 1973.

Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921.

Paul-Henri Michel: *De Pythagore à Euclide. Contrtibution à l'Histoire des Mathématiques Préeuclidiennes*. Paris, 1950.

Jean Zafiropoulo, *L'École Éléate*, Paris 1950.

Carlos Correia de Sá
Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Centro de Matemática da Universidade do Porto

Um saco com pauzinhos

Num saco estão vários pauzinhos, todos com comprimentos iguais a um número inteiro de centímetros. O maior dos paus tem 140 cm.

Retirando quaisquer três pauzinhos, nunca é possível construir um triângulo com eles.

No máximo, quantos pauzinhos há no saco?

Adaptado de um problema da revista Mathematics Teacher

(Respostas até 31 de Dezembro)

A Beatriz e o Luís andam de bicicleta

O problema proposto no número 87 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Beatriz e o Luís gostam muito de fazer um passeio de bicicleta todos os domingos. Outro dia resolveram ir experimentar a nova pista de cicloturismo de Vila Verde, que forma um circuito fechado. Prepararam as bicicletas e lá partiram, cada um em sua direcção e as velocidades constantes.

Eram exactamente 10 horas quando se cruzaram do outro lado do circuito. Às 10h25 a Beatriz chegou ao ponto de partida e depois esperou 11 minutos até o Luís aparecer.

A que horas começaram o passeio?

Qual é a relação entre as velocidades da Beatriz e do Luís?

Recebemos 10 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Augusto Taveira (Faro), Daniel Castanho (Vialonga), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Francisco Estorninho (Lisboa), Francisco Martins (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Barata (Castelo Branco), Luís Ferreira (o tal de Vila Verde ...) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Apareceram resoluções variadas. Todas, excepto uma, são totalmente analíticas e, claro, completamente correctas. Destas, pela sua simplicidade, temos de destacar a do Alberto, que passamos a citar:

Sejam:

— velocidade da Beatriz: vB — velocidade do Luís: vL
— intervalo de tempo até ao cruzamento: t
— relação entre as velocidades da Beatriz e Luís:

$$r = \frac{vB}{vL}$$

Claro que a Beatriz vai percorrer depois do cruzamento o mesmo espaço que o Luís antes do cruzamento e vice-versa, ou seja

$$25vB = vL.t \quad (1) \qquad 36vL = vB.t \quad (2)$$

Dividindo as equações membro a membro, vem:

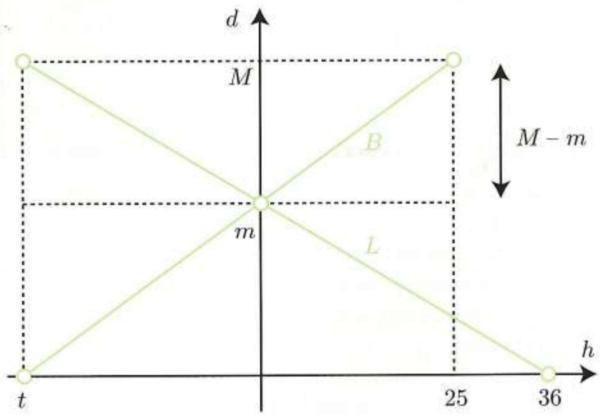
$$\frac{25}{36}r = \frac{1}{r} \text{ ou } r^2 = \frac{36}{25} \text{ ou } r = \frac{6}{5}$$

Substituindo vB/vL por $6/5$ em (1), obtém-se $t = 30$.

Conclusão: A relação entre as velocidades da Beatriz e Luís é de $6/5$ ou $1{,}2$ e a hora da partida foi 9 h 30 min.

O Francisco Estorninho partiu de uma representação gráfica, o que pode levar a uma resolução também simples do problema como a que se apresenta. Sejam:

— M: a extensão do percurso,
— m: a distância percorrida pela Beatriz até ao cruzamento com o Luís,
— t: o tempo desde os momentos de partida e de cruzamento.



As velocidades são dadas pela distância percorrida a dividir pelo tempo, ou seja, pelos declives das rectas no gráfico.

Considerando os dois percursos (antes e depois do cruzamento), temos que a velocidade da Beatriz é

$$vB = \frac{m}{t} = \frac{M-m}{25}$$

e a velocidade do Luís é

$$vL = \frac{m}{36} = \frac{M-m}{t}$$

Resolvendo estas duas equações em ordem a $M - m$ vem

$$M - m = \frac{25}{t}m \quad \text{e} \quad M - m = \frac{mt}{36}$$

Igualando os dois valores fica:

$$\frac{25m}{t} = \frac{mt}{36}$$

Donde $t^2 = 25 \times 36$ ou $t = 30$.

A partida verificou-se às 9h30. A Beatriz demorou $30 + 25 = 55$ minutos. O Luís demorou $30 + 36 = 66$ minutos. A relação entre as velocidades é $66/55$ ou $6/5$.

Medir o tempo com ampulhetas

Ana Mendes

A abordagem do tempo com crianças pequenas está muito ligada às suas vivências, às suas rotinas diárias e está relacionada com as suas impressões de duração, reguladas pelos seus interesses e motivações. O tempo é pois subjectivo e marcado pelas suas emoções e desejos.

Enquanto educadora de infância, considero importante proporcionar às crianças experiências variadas, que lhes permitam consciencializar-se da passagem do tempo, usando diferentes instrumentos e estratégias de medida e percepção do tempo. Na minha sala existem calendários, mapas de registo do tempo atmosférico, mapas mensais das presenças e faltas, relógios e outros instrumentos de registo ou actualização da data. Diariamente, são abordados aspectos referentes ao tempo, recorrendo a termos específicos, como os nomes dos dias da semana, dos meses e sua sequência. Observam-se e registam-se no calendário datas comemorativas e festivas ao longo do ano. Olha-se o tempo marcado no relógio, salientando dados momentos das rotinas diárias no Jardim de Infância — embora tenha consciência de que alguns termos usados não têm ainda significado para a maioria das crianças. Esta ideia é sugerida por Ames (1984, citado em Lovell, 1988) e Piaget (1955, citado em Lovell, 1988) que defendem que o conceito de tempo está relacionado com a capacidade da criança formar sistemas coerentes de pensamento lógico, competência ainda não verificada nas crianças desta idade.

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar (1997) referem as aprendizagens associadas ao tempo, mas não sugerem muitas pistas de como as concretizar. O projecto que a seguir apresento traduz uma tentativa de desenvolver nas crianças a ideia de que as actividades associadas às suas rotinas têm inícios e fins e correspondem a intervalos de tempo perceptíveis. Para tal explorei as ampulhetas, um instrumento não convencional de medida não estandardizada sugerido no Curriculum Guidance for the Foundation Stage (2000).

A ideia surgiu quando uma das crianças, Simão, levou para a sala de aula um relógio que tinha ganho como presente, e que despertou o interesse das outras crianças, a partir do momento em que afirmou: "O meu relógio anda mui-

Figura 1. Processo de construção da ampulheta com garrafas de 33 cl.

to depressa e é muito rápido". Questionei-a acerca daquela ideia, pedindo-lhe que nos explicasse melhor. Respondeu rapidamente, apontando para o ponteiro: "Então, este ponteiro aqui (o ponteiro dos segundos) anda muito, muito rápido, anda mesmo rápido. Queres ver?".

Esta questão proporcionou que a desafiasse a estabelecer relações de comparação entre a velocidade dos movimentos dos ponteiros do seu relógio e de outros existentes na sala: um na parede e outro junto ao computador, também com ponteiro dos segundos. Em resposta às questões colocadas continuou a afirmar que o seu relógio era mais rápido que os outros dois, mas não conseguiu explicitar melhor a sua ideia. Uma outra criança, muito atenta, ajudou-o. "Eu sei, o nosso [relógio de parede] anda mais devagar. O do Simão anda rápido e o da nossa sala anda mais devagar porque só serve para dizer as horas a que nós entramos, quando vamos lanchar, quando vamos almoçar e à tarde quando vamos embora".

Continuei a desafiar as crianças, questionando: "Está bem! Mas então o relógio mais pequeno que nós usamos para marcar o tempo dos dois meninos quando vão para o computador?" Este relógio tem um mostrador dividido em quatro partes, uma de cada cor, e cada criança pode usar o computador durante dois espaços, correspondendo a dois quartos de hora. De imediato, outra criança interveio: "Esse anda mais rápido do que o da sala ... porque também tem um ponteiro que anda rápido, mas só serve para ver o tempo que cada menino pode estar no computador e o do Simão serve para ele fazer muitas coisas." Pareceu-me que as crianças estavam a associar o movimento dos ponteiros e o tempo, ou intervalos de tempo, que cada relógio servia para medir. Questionei de novo as crianças: "Mas se o relógio do Simão tem um ponteiro que anda rápido e o do computador também tem, não acham que são os dois rápidos?" O Pedro respondeu imediatamente: "Não, o do Simão é mais rápido, porque o ponteiro dele anda muito rápido e faz muitas coisas mais rápido". Esta ideia foi apoiada pela maioria das crianças.

Na segunda-feira seguinte, mais crianças tinham levado o relógio para o Jardim de Infância, na maioria analógicos, mas nem todos com ponteiro de segundos. A motivação do grupo era elevada e todos queriam dizer as horas e marcar o tempo que despendiam em variadas situações, afirmando que os seus relógios também eram muito rápidos. Face a este interesse, propus que medissem com os respectivos relógios o tempo que gastavam nas actividades. Esta proposta gerou algumas dificuldades relacionadas com o movimento dos ponteiros. Por exemplo, para marcar o tempo da arrumação dos materiais, as crianças que usavam relógios com ponteiros dos segundos eram de opinião que se tinha gasto mais tempo do que os outros. Foi evidente o desacordo entre as diferentes posições.

Questionei então as crianças acerca da hipótese de se poder medir o tempo de outra forma, com outros instrumentos. Uma delas, referindo-se a um programa de televisão que tinha visto, afirmou: "Eu sei, eu vi na televisão, é com duas garrafas coladas uma na outra e despeja água uma para a outra". Mostrei-lhes então uma pequena ampulheta que fazia parte de um *kit* de materiais de um jogo que eu tinha guardado, e que media 1'30". Questionei-as acerca da finalidade daquele instrumento, ao que a mesma criança respondeu: "Eu sei, é a ampulheta igual à do computador que aparece quando estamos à espera que apareça o jogo". Outra criança acrescentou: "Quando aparece a ampulheta temos de esperar". Parece evidente que para estas duas crianças a ampulheta serve para medir um intervalo de tempo que medeia entre a chamada de um jogo, clicando no rato, e o seu surgimento no monitor.

O desenvolvimento do projecto

Apesar do grupo ser heterogéneo (25 crianças entre os 4 e os 6 anos), a motivação era grande e esta situação pareceu-me determinante para desencadear o projecto. Nos dias subsequentes ao contacto com a ampulheta, surgiram várias ideias de como a utilizar. Propuseram usá-la para medir o tempo que cada um podia estar no computador, quando jogavam a pares, mas rapidamente concluíram que não seria adequado dado que a areia escorria muito rapidamente e por isso só jogariam um período de tempo muito curto. Propuseram então utilizá-la para medir o tempo que cada par despendia a inscrever o seu nome na actividade e o relógio continuaria a ser usado para marcar o tempo para jogar.

Perguntei então a uma das crianças se aquela ampulheta serviria para dez meninos se inscreverem. Ela e outras crianças responderam que não, tendo uma sugerido que seriam necessárias mais: "Tinham de ser cinco", respondeu, e explicou melhor: "No computador só podem estar dois, por isso se forem dez, precisamos de cinco. Se forem dois só precisamos usar uma, se forem quatro precisamos usar duas, se forem seis precisamos usar três, se forem oito precisamos quatro e se forem dez ... (parou um pouco indeciso) precisamos usar cinco".

Surgiu então a ideia de construirmos uma ampulheta que desse para a inscrição do nome das dez crianças. Preparei algum material que me pareceu indispensável: garrafas de água de 33cl; garrafas de água de 1,5 l; areia da praia; alguns baldes pequenos; pás; crivos; fita-cola larga e ainda uma fita-cola larga muito resistente usada na construção civil; pequenos pedaços de cartão grosso. Chegou-se à conclusão que se iria usar garrafas de plástico pequenas, colocar-se-ia areia numa delas para "chover" para a outra vazia, que se "viraria ao contrário" quando a areia esgotasse. Trabalhando em pequeno grupo, as crianças perceberam que só podiam colocar areia numa das garrafas, pois se enchessem as duas, "não saía do mesmo sítio ao virar a ampulheta". Experimentaram colar com fita-cola as duas garrafas justapostas sem qualquer tampa ou divisória mas a ideia foi rejeitada por outra criança, uma vez que a areia escorria muito depressa, concluindo-se que era necessário colocar algo no meio. Sugeri um disco em cartão grosso com um furo. Verificaram, após experimentar, que a areia escorria ainda muito depressa. Afirmavam: "O buraco é mais grande"; "grande"; "o buraco é gordo".

Finalmente, uma criança comparou a ampulheta em construção com a pequena ampulheta antes observada e disse: "O problema é que a pequena tem um furinho pequeno e esta tem um furo grande. Tem que se pôr uma coisa com menos espaço, só assim vai mais devagar". Voltámos então a fazer um novo disco em cartão mas com um furo pequeno.

Diferentes trajectos do projecto

A construção da ampulheta progrediu lentamente. Ao colocar-se o cartão com o furo mais estreito, a areia, a dado momento, não passava. Uma criança comentou: "A areia não passa porque veio uma pedra e tapou o furo". A solução era peneirar a areia, uma vez que esta tinha pequenos paus e pedras um pouco maiores. Usaram-se então os crivos e, à terceira tentativa, a areia ainda não passava bem, apesar de peneirada. Tentei ajudar, referindo-me à quantidade de areia na garrafa que estava cheia, o que despoletou de imediato a descoberta do peso, surgindo a ideia de se encher só parte da garrafa, ou "pôr areia só até quase metade". À quarta tentativa, o fluxo de areia ainda continuava muito reduzido. Uma criança sugeriu: "Só se fizermos um furo maior, ou então 2+2".

A ampulheta foi assim sendo construída numa dinâmica de tentativa e erro até se conseguir o objectivo. Desta feita foi colocada a peça de cartão com cinco furos, não tendo sido alterada a quantidade de areia. Finalmente, a ampulheta funcionava e as crianças acreditavam que naquele momento já podiam medir o tempo que 10 crianças gastavam a marcar o nome.

Propus depois que estimassem o número de vezes que tinham que inverter a ampulheta pequena para medir um tempo igual à construída por eles. As respostas variavam entre as cinco e quatro vezes. Quem respondia quatro dizia que a primeira vez não contava, uma vez que a que eles tinham construído também se invertia uma vez. Verificou-se, finalmente, que a ampulheta daria para as 10 crianças marcarem o nome. A questão por mim colocada relacionava-se com a forma de utilização do computador, em pares. Como só havia um computador na sala e a ele acediam duas crianças de cada vez, a ampulheta pequena supria a necessidade ...

Figura 2. Construção da segunda ampulheta com garrafas de 1,5 l.

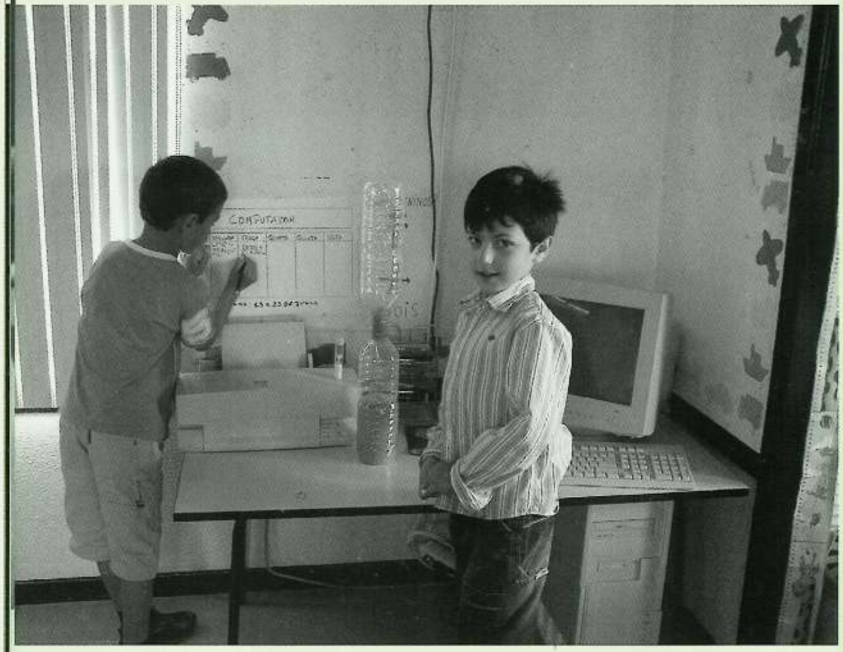


Figura 3. Crianças a usar a ampulheta mais pequena para medir o tempo de registo do nome.

Algumas crianças propuseram então que se utilizasse a ampulheta construída para marcar as presenças, mas a ideia foi contestada pelas mais velhas, justificando que se tratava de uma tarefa muito demorada. Na manhã seguinte experimentaram e verificaram que não resultava, teriam de a inverter pelo menos umas três vezes, propondo que se construísse uma maior.

Propus a construção desta ampulheta a outro grupo de crianças, que correspondeu bem ao desafio, usando garrafas de 1,5 l. Afirmaram que não podiam encher muito a garrafa, porque poderia ficar muito pesada e cair. A meio do processo, verificaram que as garrafas não eram bem iguais, uma delas era "mais gorda", e isso não era certo. Com uma tampa de cartão com cinco furos, o fluxo da areia era muito reduzido e parava. Foi sugerido fazer mais furos (nove, segundo uma das crianças), mas o espaço do cartão era pequeno: "Quatro com cinco não dá, são muitos, não é, Ana?". Foram sugeridos dois furos, mas só resultou com três e um pouco mais largos que os primeiros cinco. Experimentámos e a ampulheta resultou.

No dia seguinte experimentámo-la pela manhã, enquanto as 25 crianças da minha sala marcavam as presenças. Verificámos que a areia se esgotava antes de todos terem acabado, sendo proposta a colocação de mais areia. Nesse momento, a auxiliar da outra sala entrou e interessou-se pelo assunto, questionando se a ampulheta daria para os 20 meninos da sua sala. Rapidamente uma das crianças respondeu: "Para a tua é que dá, mas para a nossa não dá, não vês que ainda faltam cinco e já esgotou a areia?". Enchemos um pouco mais a garrafa, até metade, e no dia seguinte experimentámo-la de novo e verificámos que resultava!

Durante dois dias, as crianças foram experimentando autonomamente as ampulhetas em diferentes actividades. Esta experiência levou-nos a reflectir acerca da finalidade das ampulhetas e as respostas foram muito idênticas: "É para saber o tempo"; "É para marcar o tempo"; "Cada uma serve para uma coisa diferente: a grande é para ver o tempo de marcar as presenças; a média é para ver quanto tempo demoramos a arrumar a sala; e a mais pequena é para ver o tempo a marcar o nome quando vamos para o computador".

Reflexões finais

O conceito de tempo não é fácil de compreender e, de acordo com a literatura, as crianças têm dificuldade em aprender o seu significado, sugerindo-se que o ritmo de vida as ajuda a desenvolver esse conceito (Lovell, 1988).

Alguns dos excertos das interacções verbais apresentados neste trabalho parecem ilustrar como as crianças relacionam velocidade com passagem do tempo e intervalos de tempo, daí a importância de percepcionar a passagem do tempo e a comparação de períodos ou intervalos de tempo, usando unidades de medida não estandardizadas e que sejam perceptíveis para crianças desta faixa etária, usando instrumentos simples, como foi sugerido por Lemme (2000).

O projecto da construção das ampulhetas prolongou-se três semanas, ficando estas a fazer parte dos instrumentos de rotina da sala de aula, e também da relação escola-família, dado que algumas crianças transportaram a ideia para casa. Enquanto as crianças estiveram activamente envolvidas no projecto, foram abordados aspectos importantes relativos ao conceito de tempo; foram percepcionados raciocínios relacionados com estimação, estratégias de cálculo para operações elementares, ideias sobre medidas e grandezas e estratégias de resolução de problemas. Na interacção dos alunos em pequeno e grande grupo, salienta-se as relações implícitas no trabalho cooperativo, a discussão de ideias, a justificação de raciocínios, bem como a construção articulada de saberes.

Referências

Lovell, K. (1988) — O Desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos e Científicos na Criança. Ed. Artes Médicas: Porto Alegre, Brasil.

NCTM (1991) — Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM &IIE.

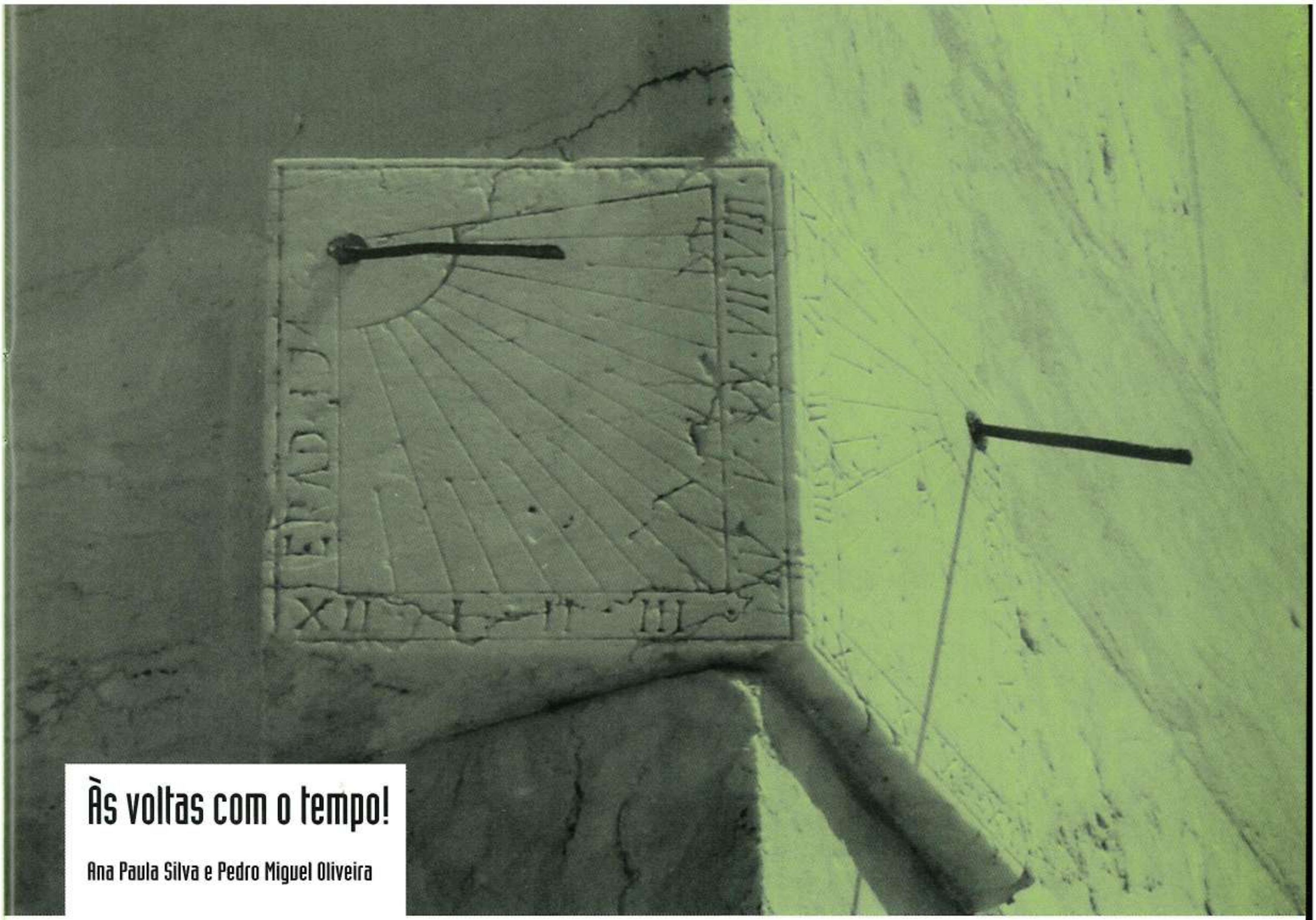
Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (1997) — Ministério da Educação DEB — Núcleo de Educação Pré-Escolar: Lisboa.

Qualifications and Curriculum Authority (2000) — Curriculum Guidance for the Foundation Stage, London: Qualifications and Curriculum authority. DFEE: London.

Lemme, B. (2000) — Integrating Measurement Projects: Sand Timers. Teaching Children Mathematics. Vol.7, n° 3 — Nov. 2000.

Ana Mendes
Jardim de Infância de Montelavar, Sintra

Joana Castro
ESE de Lisboa



Às voltas com o tempo!

Ana Paula Silva e Pedro Miguel Oliveira

Dia 9 de Setembro do ano 2000, fim de tarde numa praia da Costa da Caparica. Leitura de um artigo de divulgação científica, no *Expresso*, cujo tema era *De novo Marés Vivas*. O artigo mencionava o efeito da atracção da Lua nas marés, os estudos feitos por Galileu, Newton e Lorde Kelvin e os modelos matemáticos por detrás de fenómenos periódicos, como o são, por exemplo, as marés e finalmente mencionava a análise harmónica, ou análise de Fourier, utilizada hoje na previsão das mesmas.

Como não entender que a Matemática está presente em praticamente todas as situações da vida, em todos os fenómenos físicos com que a natureza nos presenteia? Séries de Fourier — seria um bom tema para explorar na Monografia Científica que teríamos de elaborar durante o ano de Estágio Pedagógico? Difícil seria de certeza, mas parecia deslumbrante apercebermo-nos da ligação da matéria teórica leccionada na Faculdade com a periodicidade de certos fenómenos físicos e naturais … .

Entretanto, e enquanto nos reuníamos, como dois grupos de estágio a funcionar na escola António Arroio, surgiam temas para o Trabalho de Projecto a desenvolver com os alunos. Uma colega nossa, a Ana Sofia, tinha no ano anterior construído um relógio de Sol numa sessão prática no Encontro de Estágios na FCUL. Daí o seu interesse num projecto que envolvesse a construção de um relógio de sol.

Quando falámos com as nossas orientadoras de estágio da Faculdade, apercebemo-nos de que gostariam que conseguíssemos conciliar a monografia científica com o tema do Trabalho de Projecto a propor aos alunos. Aí surgiu-nos a dúvida: qual a ligação possível entre tópicos tais como Séries de Fourier e Relógios de Sol? A Professora Adelaide Carreira, orientadora da componente científica do estágio, propôs-nos que considerássemos a Trigonometria como uma forte componente da nossa monografia. Ao estudarmos a evolução dos conhecimentos matemáticos relacionados com a Trigonometria, poderíamos culminar com o estudo das séries de Fourier e das suas aplicações. E na fase introdutória e não só do avanço desses conhecimentos surgiria, como grande força motivadora para o desenvolvimento da Trigonometria, a necessidade da Contagem e Medição do Tempo, logicamente relacionadas com a Astronomia. Assim, o objectivo da nossa monografia seria desenvolver e aprofundar o nosso conhecimento de um núcleo de conceitos matemáticos relacionados com a Arte, a Astronomia, a Medição e Contagem do Tempo, os quais mostrariam a profunda ligação entre a Matemática e a Natureza.

Desta forma seria, então, possível conseguir estabelecer as conexões entre a Trigonometria, como um dos ramos da Matemática, e outra ciência que estuda o Universo, a Astronomia: através de um Trabalho de Projecto relacionado com

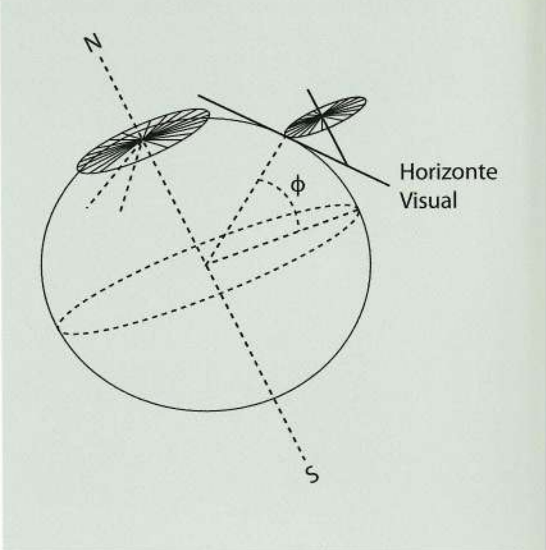


Figura 1. Mesa com relógios de sol.

a Construção de um Relógio de Sol. Sendo assim, propusemo-nos fazer uma ligação entre a nossa actividade docente e o trabalho científico. E, de facto, tudo se encaixava porque uma das unidades temáticas do 11° Ano de Métodos Quantitativos que iríamos leccionar era Trigonometria e Resolução de Triângulos e Geometria no Espaço. Ora, que melhor forma haveria de leccionar estes conteúdos a não ser fazê-lo através da resolução de diversos problemas ligados à navegação, à topografia, à astronomia, à história, relacionados com situações concretas onde se aplicariam conhecimentos trigonométricos?

Na verdade, e como posteriormente nos demos conta, a Trigonometria e a Astronomia têm, desde a Antiguidade, andado de *mãos dadas*. Não se conseguem estabelecer os limites da importância que cada uma delas teve no desenvolvimento da outra e, por conseguinte, foi nosso objectivo mostrar aos alunos como duas ciências que estudam assuntos aparentemente diferentes se relacionam tão intimamente.

E foi assim que a passagem do milénio nos encontrou na vivência de um estágio pedagógico com muita intensidade e satisfação e com o objectivo de desenvolvermos, em conjunto com outros colegas e com os alunos da escola António Arroio o projecto a que nos tínhamos proposto: o Estudo e a Construção de Relógios de Sol.

Na realização deste trabalho visitámos, com os alunos e com os nossos colegas, localidades na zona de Mafra e Sintra, apreciámos monumentos e retratámos sensibilidades artísticas. Desde a pesquisa à investigação, desde a crítica social à concepção e construção de relógios de sol, foram várias as etapas que resultaram numa pequena exposição de trabalhos na própria escola (figura 1) e numa comunicação no Encontro de Estágios da Faculdade de Ciências.

No entanto, a importância do tema nas aplicações matemáticas em sala de aula e o enriquecimento cultural que este proporcionava levaram-nos a partilhar a experiência do estágio pedagógico no ProfMat de Vila Real, denominando todo o projecto como *As Sombras do Tempo* .... A dinâmica em torno do projecto foi crescendo. Por exemplo, fomos convidados pelo Departamento de Matemática da FCUL para participar no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), realizado em Coimbra, a 6 de Fevereiro de 2002[1] sobre Ensino da Matemática, no qual tivemos o prazer de apresentar uma comunicação que abordou o trabalho desenvolvido com os alunos sobre a Construção de Relógios de Sol.

Novos convites foram surgindo, entre os quais o de conceber uma exposição itinerante para acompanhar um encontro mundial sobre arquitectura e matemática denominado NEXUS 2002, em Óbidos.

Podemos considerar que foi neste momento que *As Sombras do Tempo* ... se projectaram, dando oportunidade ao aparecimento de um conjunto de outras ideias, originais e não só, onde novos alunos puderam experimentar e viver um tema tão rico como os relógios de sol e consequentes estudos científicos e históricos.

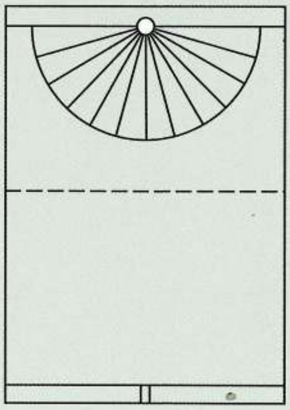
A riqueza que este projecto ainda hoje nos proporciona, tal como a partilhada, por exemplo, nas comunicações e sessões práticas bem participadas nos diferentes ProfMat's, leva-nos a destacar que este se encontra longe de estar esgotado pois continua a fazer sentido aplicá-lo na sala de aula e explorá-lo nos conteúdos temáticos envolventes.

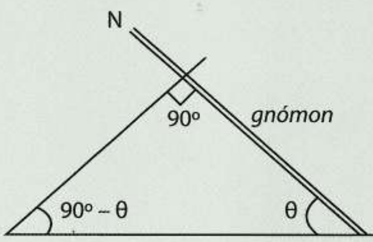
Relógio de Sol: um instrumento para medir o tempo

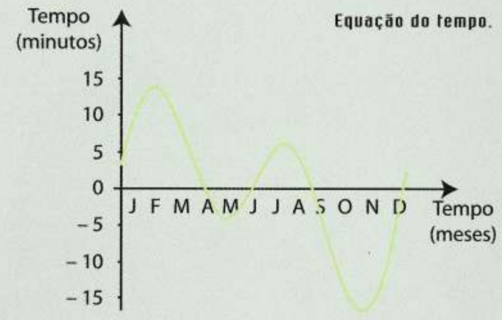
O início da contagem e medição do tempo reporta-se à observação dos movimentos dos corpos celestes. O Sol e as estrelas indicavam não só os vários momentos ao longo do dia e da noite, como também as estações ao longo do ano. A Lua indicava o momento do ciclo lunar.

A necessidade de registos indispensáveis para a marcação das sementeiras, colheitas e rituais religiosos, conduziu ao estudo e consequente registo das leis do movimento aparente do Sol. Assim surgiram os primeiros relógios de Sol.

Podemos dizer que o *Relógio de Sol* é um instrumento utilizado para medir o tempo através da observação da desloca-







Equação do tempo.

ção da sombra produzida pelo sol quando este incide numa haste, o *gnómon*. A sombra é lida numa base graduada denominada *mostrador* e determina a hora do dia.

O modelo mais simples de relógio de sol é o *equatorial*[2], que podemos considerar como uma miniatura da Terra. Neste tipo de relógio podemos reproduzir o plano equatorial terrestre (*mostrador*) e o respectivo eixo (*gnómon*), que simula, em termos de sombras, o efeito causado pelo movimento aparente do Sol. O Sol, no seu movimento aparente de Este para Oeste, faz com que a sombra do eixo incida no plano equatorial e se mova 15° por hora (360°:24 horas = 15°/hora). Ora, em qualquer disco paralelo ao plano do equador as marcas das horas podem ser determinadas, marcando ângulos de 15° a partir da marca correspondente às doze horas, ou seja, ao meio-dia solar, tomando para esta referência a posição da sombra no momento do dia em que o Sol atinge a sua altura máxima, isto é, quando passa no meridiano do lugar. Logo é lógico concluir que o *gnómon* tem que ser paralelo ao eixo da Terra e, consequentemente, perpendicular ao mostrador, e que tem de estar dirigido para o Pólo Norte Celeste (onde se situa aproximadamente a estrela polar). Além disso o *gnómon* deve fazer com o plano horizontal um ângulo igual à latitude (θ) do local onde se quer implantar o relógio de sol.

Os relógios de sol equatoriais têm um inconveniente. Como o mostrador é paralelo ao equador e o Sol está a norte deste apenas na Primavera e Verão, durante os meses de Outono e Inverno a sombra do sol é projectada na parte inferior do mostrador, onde é necessário fazer marcações horárias, tornando difícil a leitura das horas.

Como ver as Horas num Relógio de Sol?

A marcação horária observada num relógio de sol é a hora solar verdadeira, diferente da dada pelos nossos relógios, a qual se denomina hora solar média. Esta diferença deve-se fundamentalmente a três factores: *Horário de Verão, Longitude do Lugar* e *Equação do Tempo*, as quais passamos a detalhar.

Quando estamos no *horário de Verão*, que adianta os nossos relógios 60 minutos para aproveitar melhor a luz do sol, necessitamos *adicionar uma hora* à marcação horária indicada pelo relógio de sol. A hora indicada por este também necessita ser corrigida de acordo com a *longitude do lugar*. Por cada grau de longitude Oeste em relação ao meridiano de Greenwich, adicionam-se 4 minutos à hora observada no relógio de sol e por cada grau de longitude Este subtraem-se 4 minutos.

Como a órbita da Terra em torno do Sol não é circular e como o eixo da Terra não é perpendicular ao plano da órbita, a velocidade da Terra durante o movimento de translação não é constante ao longo do ano, provocando variações no dia solar que podem atingir os 31 minutos de diferença. Por questões de conveniência sobre o uso de relógios, faz-se a média destas variações para obter a hora média de Greenwich. Então para se *corrigir a marcação horária* do relógio de sol e obter a hora média de Greenwich (hora standard para o país) aplica-se uma correcção apropriada chamada *Equação do Tempo*, ou seja, um gráfico ou tabela que mostra quanto um relógio de sol está adiantado ou atrasado, em relação ao tempo solar médio.

Como exemplo consideremos que estamos a 1 de Julho, em Lisboa, onde a longitude é 9° Oeste, e que a hora solar verdadeira (lida no relógio de sol) é 11 horas. A hora solar média vai ser corrigida do seguinte modo: pelo horário de Verão adicionamos uma hora; pela longitude do lugar adicionamos 36 minutos — como 9° correspondem a 0,6 da hora, o Sol só passa no meridiano de Lisboa 36 minutos depois de passar pelo de Greenwich, o qual marca a nossa hora legal; e pela equação do tempo adicionamos 4 minutos. Em suma, a hora que um relógio de pulso normal vai marcar neste dia, no momento assinalado, será 12 horas e 40 minutos.

A construção de relógios de sol como área de projecto

Nos anos lectivos de 2003-2004 e 2004-2005[3], tive a oportunidade de leccionar a área curricular não disciplinar de Área de Projecto a alunos dos 8° e 9° anos, respectivamente nas escolas Básicas dos 2° e 3° Ciclos, Mouzinho da Silveira e Costa da Caparica. No primeiro ano consegui que estivesse patente ao público, na nossa escola, e durante a Semana de Actividades, a Exposição Itinerante de Relógios de Sol *As Sombras do Tempo* … . Realizei uma Workshop sobre o

Figura 3. Os alunos a medirem os relógios.

Figura 4. Um relógio de sol construído pelos alunos.

tema para docentes e restante comunidade escolar e desenvolvi com os alunos do 8°B o tema em questão, tendo os alunos construído os seus próprios relógios que ainda se encontram em exibição na escola.

No ano seguinte e como forma de motivar os alunos do 9° E da Escola Básica 2,3 Costa da Caparica para efectuarem a sua própria investigação sobre a Contagem e Medição do Tempo ao longo de séculos, dei a conhecer-lhes os trabalhos realizados em anos anteriores sobre o tema e efectuámos uma visita de estudo à região saloia — Terrugem, Sintra, S. João das Lampas, S. Julião, Carvoeira, St. Isidoro, Palácio de Mafra (onde nos foi concedida uma autorização especial para visitarmos o relógio em forma de cubo[4] que está na cobertura do Palácio), onde estão implantados, em adros de igrejas, campas ou monumentos comemorativos, vários exemplares de Relógios de Sol (figura 3).

No decorrer da visita e com o auxílio de um guião, os alunos fizeram um registo fotográfico dos relógios encontrados e anotaram as observações necessárias para desenvolverem o tema estabelecido de modo a aplicarem o conhecimento adquirido e construírem eles mesmos o seu Relógio de Sol (figura 4).

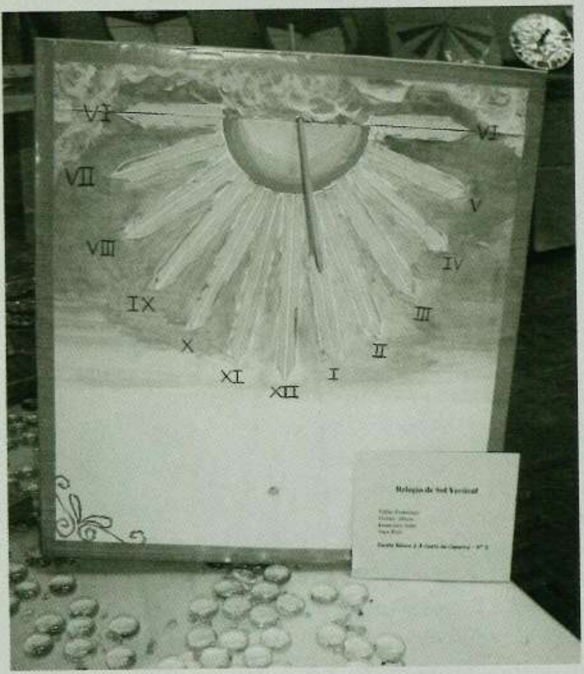
A visita pretendeu ajudá-los a compreender de que forma o encantamento associado aos Relógios de Sol, acumulado ao longo de muitos séculos de história do nosso país, ainda faz, actualmente, parte do nosso quotidiano, como o atestam as várias iniciativas culturais e didácticas, ligadas à construção de Relógios de Sol, desenvolvidas nos últimos anos em Portugal. Finalmente os alunos sentiram-se aptos a construir o seu próprio relógio e entusiasmaram-se para participar no Clube do Tempo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências (figura 5).

Exemplos históricos e Actividades a considerar com os alunos

A medição directa das distâncias torna-se problemática quando estas são praticamente inacessíveis. Por exemplo, como é que se pode localizar a posição relativa de um certo local na superfície terrestre ou como determinar a posição de certos corpos celestes? É útil que os alunos se apercebam que ao longo dos tempos foi necessário determinar medidas e distâncias que não eram passíveis de serem obtidas directamente. Por que não, então, abordar os excelentes exemplos ligados à história da astronomia e da trigonometria, que iniciaram o seu desenvolvimento no tempo dos gregos, tais como: Thales de Mileto (século VI a.C) determinou a altura das pirâmides do Egipto; Eratóstenes (século III a.C) conseguiu obter a medida do raio da Terra; Aristarco (século II a.C) comparou a distância relativa da Terra ao Sol e da Terra à Lua; Hiparco (século II a.C) utilizou a trigonometria para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e cálculos na navegação. Pessoalmente, temos utilizado muitos destes exemplos para mostrar aos nossos alunos que a Trigonometria, como ramo da matemática que se ocupa do estudo das relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de triângulos planos e esféricos, permitiu medir distâncias inacessíveis e resolver problemas de astronomia. O *estudo de triângulos semelhantes*, com ângulos iguais e lados proporcionais, conduziu à conclusão que as razões entre os lados dos triângulos estavam directamente relacionadas com as medidas dos ângulos. A Trigonometria, ao *transformar* medidas angulares em medidas de comprimento é o elo de ligação fundamental entre a matemática e a astronomia, a geodesia e a topografia. Na actualidade encontram-se aplicações para a trigonometria nas telecomunicações, na música, na determinação de distâncias entre estrelas, na medicina e em muitas outras áreas científicas.

Além destes e de outros exemplos, existem muitas actividades relacionadas com a construção de relógios de sol que envolvem conhecimentos de trigonometria, quer muito básicos, quer mais complexos, e que podem ser aplicadas em contexto de sala de aula e/ou na exploração de uma Área de Projecto, envolvendo disciplinas como a Matemática, a Geografia, a História, o Português, a Educação Visual e/ou Tecnológica ou outras. A título de exemplo mencionamos:

Determinação da hora do meio dia solar — Podemos colocar um pau na vertical e marcar com um giz ou lápis a extre-



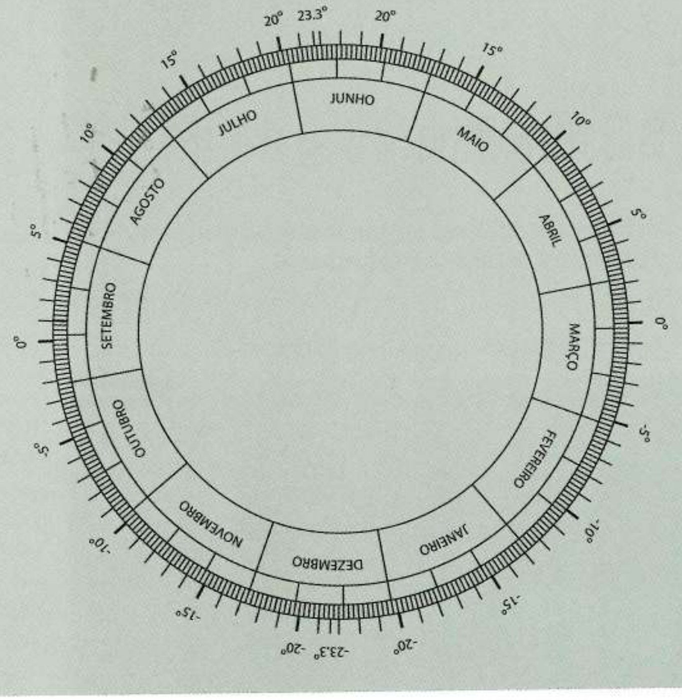


Figura 5. Outro relógio de sol construído pelos alunos. [http://mat.fc.ul.pt/pt/noticias/item/129]

midade da sombra do pau. O momento em que a sombra é a menor indica a hora do meio-dia solar.

Determinação da direcção do Norte Geográfico — A agulha da bússola indica aproximadamente a direcção do Pólo Norte. Em Portugal Continental, é necessário considerar um ajustamento de cerca de 5° para Este, para assinalar o Norte verdadeiro. Repetindo a actividade anterior sabemos que o sentido da sombra do sol ao meio-dia indica a direcção do Norte geográfico.

Determinação da latitude de um lugar — Devemos medir o ângulo que o Sol faz com o horizonte ao meio-dia solar e recorrer a uma tabela como as utilizadas pelos navegadores nos séculos XV e XVI, para efectuar a correcção a fim de obter a latitude do lugar onde é feita a medição: Latitude = 90° – (ângulo medido) + (ângulo de correcção). *Exemplo:* no dia 10 de Setembro o Sol ao meio-dia está na vertical do paralelo dos 3° Norte. No dia 30 de Novembro o sol ao meio-dia está na vertical do paralelo dos 18° Sul. Na tabela os valores negativos referem-se a latitudes do Hemisfério Sul.

Notas

1 http://www.mat.uc.pt/enspm02/sess_em_res.htm.

2 As instruções para a construção deste tipo de relógio (e também do relógio de sol horizontal e vertical) encontram-se no *site* http://www2.apm.pt/files/22209_Documento_para_Sessao_43ee12afb23ad.doc. Ver ainda sobre conceitos básicos que envolvem relógios de sol e instruções para a sua construção no *site* http://mea.proto.artenumerica.com/sobrar/.

3 Experiência pessoal de Ana Paula Silva.

4 Ver foto no *site* http://www2.apm.pt/portal/index.php?id=22209.

Referências Bibliográficas

Bivar Weinholtz, António — *Algumas Aplicações Históricas da Geometria* — Textos de Apoio, Departamento de Matemática-FCUL.

Brown, David e outros — *Make a Sundial*, 2ª Edição, British Sundial Society (1993).

Carreira, Adelaide; Silva, Ana Paula; Oliveira, Pedro Miguel; Nápoles, Suzana Metello — *As Sombras do Tempo* ..., Catálogo da Exposição de Relógios de Sol, 2002.

Embacher, Franz — *Relojes de Sol-Teoria Y Construccion*; Progensa, 1992.

Fonseca, Helena e Brunheira, Lina — *Uma experiência com Relógios de Sol*, Ensinar Matemática, Constância.

Kausmann III, William, J. — *Universe*, New-York, W.H. Freeman and company 4 th ed., 1994.

Pavanello, Gian Carlo e Trinchero, Aldo — *Relojes de Sol: Historia, Funcionamiento, Construcción*, Editorial De Vecchi, S.A. 1998-Barcelona.

Ransom, Peter (1994) — *Fun With the sun*, Curso ProfMat 94.

Silva, Ana Paula; Lopes, Ana Sofia; Saporiti, Cristina; Oliveira, Pedro; Bastos, Rita — *Sombras do Tempo*, ProfMat 2001.

Veloso, Eduardo — *Algumas Noções Elementares de Astronomia*, APM — Associação de Professores de Matemática, 1991.

http://www.cienciaviva.pt/latlong/ — Kit latitude e longitude que inclui relógio de sol.

http://perso.orange.fr/blateyron/sundials/shadowspro/gb/index.html — programa que efectua cálculos necessários à construção de um relógio de sol.

Ana Paula Rocha C.F. Silva, Escola Secundária da Amora, Seixal
Pedro Miguel Oliveira, Colégio S.João de Brito, Lisboa

Os 20 anos da APM na Educação e Matemática

Para comemorar os 10 da Agenda, a equipa responsável pela edição de 1998/1999, deu um contributo para uma história concisa da APM, através da voz dos seus Presidentes. Pela sua relevância vão ser republicados esses depoimentos.

Matemática 2001 — um projecto da APM

Quais os aspectos mais relevantes que marcaram a vida da APM entre 1995 e 1997 ... ?

Escolhi destacar o projecto Matemática 2001 que me parece ser uma iniciativa de grande importância em que a associação se envolveu e cujos primeiros resultados, já divulgados num relatório preliminar, constituem um elemento importante de reflexão e debate para os professores de Matemática.

A APM tem sido sempre um interveniente activo em todo o processo de renovação do ensino da Matemática, que no ensino básico, quer no ensino secundário. É um papel que assumiu desde a sua criação, e que tem vindo a aprofundar ao longo dos anos. Durante muito tempo, o foco da intervenção da APM centrou-se, naturalmente, nos programas que todos sabíamos desadaptados das necessidades actuais. Com a revisão curricular de 1991, que já incorpora muitas das novas perspectivas da educação matemática, continuamos a sentir que o nível de insucesso dos alunos é fortemente preocupante. Para além dos programas era preciso prestar atenção às práticas pedagógicas, às condições de trabalho e à formação dos professores. Não havendo estudos de conjunto, era importante fazer um diagnóstico da situação e das suas causas.

Envolver os professores nesta discussão reflectindo sobre a sua situação concreta, as suas dificuldades e as carências das escolas constituiu uma preocupação presente em todas as fases do seu desenvolvimento. Fez-se um inquérito e ouviram-se os professores nas escolas; discutiram-se os resultados dos inquéritos e das reuniões, elaboraram-se recomendações; alargou-se a discussão a todos os professores de Matemática interessados. Só pela dinâmica conseguida e pela qualidade do Relatório Preliminar, já teria valido a pena o esforço empreendido. Este é sem dúvida um projecto marcante na vida da APM.

Ana Vieira Lopes, Presidente da APM — 1995/97

APM — Idade adulta

Quem se recorda das primeiras reuniões em que se preparou a criação da APM, dos primeiros momentos da APM, não pode deixar de lhe associar alguma irreverência e vontade de afirmação. De certo modo atitudes análogas às da adolescência. Foram tempos interessantes, em que a envergadura das tarefas que planeávamos suscitavam dúvidas frequentes, porém facilmente ultrapassáveis pela enorme vontade de afirmação e de marcação da diferença. Então, pequenas conquistas geravam enormes alegrias e essa é também uma atitude própria da adolescência.

Hoje sentimos a solidez e a força das obras realizadas. Seguramente a ninguém passa pela cabeça que a *Educação e Matemática* não vai sair com a qualidade que lhe reconhecemos, ou que em algum ProfMat vão faltar intervenções activas dos participantes com o valor a que nos habituámos. A contribuição de mais de quatro mil sócios reais garante-nos um rendimento seguro que nos permite agir com grande confiança.

Surgem então as grandes responsabilidades da idade adulta. Hoje encaramos projectos da envergadura do *2001* que em 1998 vai alimentar uma reflexão alargada sobre a situação e perspectivas do ensino da Matemática em Portugal. Organizamos e desenvolvemos planos de formação arrojados, que envolvem muitos formadores e formandos, como o *T3* ou o do *1° Ciclo*, que cobrem quase todo o país e se inserem em protocolos com entidades exteriores tanto privadas como públicas. Temos vários núcleos e grupos de trabalho activos que nos garantem vários tipos de intervenções. Hoje sentimos o peso de uma imagem pública reconhecida e que por isso mesmo tem de ser cuidada. De uma gestão de recursos quase caseira passámos a uma gestão pesada de recursos vários. Dos pequenos desafios que nós próprios criávamos passámos a encarar muitos desafios que a escola e a sociedade nos colocam.

Sem qualquer ordem valorativa, temos de olhar para os próximos anos em várias frentes de trabalho: novos protocolos de cooperação; colaboração e pareceres em vários campos; intervenção sobre medidas educativas; melhoramento da organização e gestão dos recursos; criação de condições para ampliar a participação de mais professores; desenvolvimento dos núcleos; desenvolvimento de projectos educativos e da articulação com a investigação; publicações sobre o ensino da matemática e sobre a matemática. O ano 2000 será o ano internacional da matemática, será que a APM poderia ter melhor desafio para enfrentar na plenitude da sua idade adulta?

Cristina Loureiro, Presidente da APM — 1998/1999

Organização associativa da APM

"Nenhum processo de renovação do ensino terá êxito se não contar com um forte envolvimento dos professores. A APM pretende ser um movimento que baseie a sua actividade na iniciativa e na criatividade dos professores dos mais diversos pontos do país e de todos os graus de ensino. (...) Existem já núcleos locais e grupos a trabalhar em diversos temas (...) A APM existe e será o que todos quisermos".

Este extracto é de uma declaração de Outubro de 1986 da primeira Direcção da APM, publicada na contra-capa do número um da revista *Educação e Matemática*. Nele se podem reconhecer alguns dos princípios fundadores presentes na criação da APM e que também podemos encontrar na forma como se foi estabelecendo e desenvolvendo a estrutura e organização associativas, com mudanças importantes ao longo destes 20 anos.

Os Estatutos

Em Portalegre, na Assembleia Constituinte de 19 de Setembro de 1986 — onde é criada a APM e eleita a primeira direcção — são também aprovados os primeiros estatutos. Na véspera desta assembleia, até 'altas' horas, Eduardo Veloso, Henrique Manuel Guimarães, João Pedro da Ponte e, se não falha a memória, também Raul Carvalho, ultimaram a proposta de estatutos que viria a ser aprovada. Esta proposta tinha começado a ser preparada meses antes pelo "grupo dos estatutos", um dos grupos de trabalho criados na sequência da reunião na EP Marquesa de Alorna de Lisboa, em 5 de Fevereiro de 1986, tendo em vista os "novos passos a dar para a criação de uma associação" e onde João Pedro da Ponte foi escolhido como "elemento de ligação" desse grupo.

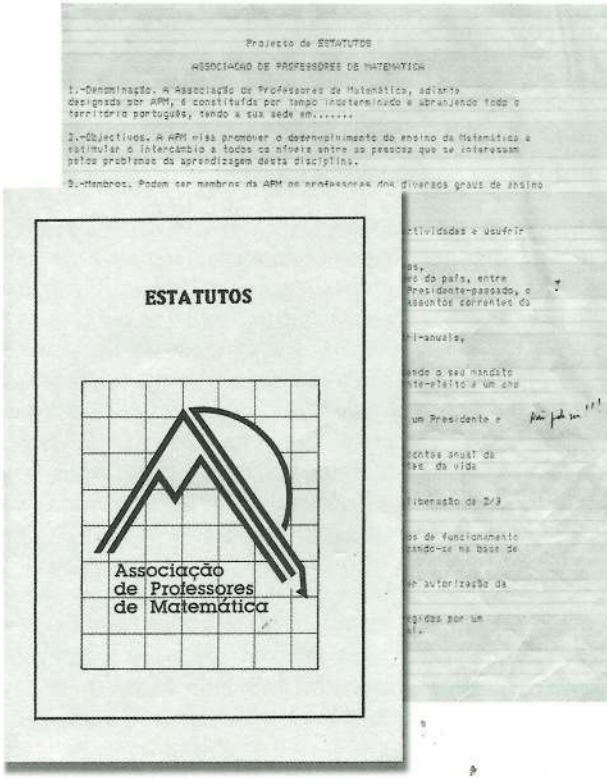
"A Associação de Professores de Matemática, adiante designada por APM", começava assim o texto do ponto 1 num dos primeiros projectos de estatutos que este grupo elaborou, consagrando já a actual denominação da Associação. No ponto 2, o projecto estabelecia que "A APM visa promover o desenvolvimento do ensino da Matemática e estimular o intercâmbio a todos os níveis entre pessoas que se interessam pelos problemas da aprendizagem desta disciplina".

Com algumas alterações, esta redacção viria a originar a formulação dos dois primeiros objectivos da APM nos estatutos apresentados para aprovação na assembleia de Portalegre, a par dos quais se estabeleceu como metas, apoiar e divulgar "actividades relevantes para a aprendizagem da Matemática", estimular a "participação activa dos professores em projectos de inovação e de investigação" e no desenvolvimento de "novas práticas pedagógicas" e "intervir na definição da política educativa" no campo do ensino da Matemática.

Se estes objectivos se mantêm, alguns aspectos dos estatutos foram sendo alterados tendo em vista a sua adequação à expansão da APM e ao desenvolvimento da dinâmica associativa.

Em 1990, na assembleia geral de sócios realizada no ProfMat de 7 de Novembro, nas Caldas da Rainha, são aprovadas as primeiras alterações aos estatutos, uma das quais consagra a criação do Conselho Nacional da APM, definindo-o como um dos órgãos da Associação, e reduz para 13 o número dos membros da Direcção da Associação, fixando em dois anos a duração do mandato do seu presidente. Para além disso, a alteração estatutária então realizada institucionaliza os núcleos regionais que desde há alguns anos tinham começado a ser criados e que eram já elementos organizativos importantes na dinamização associativa local.

A actual forma dos estatutos resulta, porém, de outras alterações subsequentes, umas aprovadas em 10 de Outubro de 1991, durante o ProfMat no Porto, e outras, as últimas, aprovadas em 11 de Novembro de 1999, no ProfMat de Portimão. Os aspectos principais das alterações mais recentes — que foram fruto de uma ampla discussão dentro da APM, e na própria assembleia que os aprovou — têm que ver com a constituição da Direcção, que passou a ter nove membros



Projecto de estatutos e da capa dos primeiros estatutos.


Primeira presidente na comemoração dos 10 anos em Portalegre

eleitos por dois anos, e com a institucionalização do que na realidade há muitos anos acontecia, a possibilidade de criação de grupos de trabalho na APM, clarificando que isso poderá ser feito por proposta de um grupo de sócios que queira desenvolver um projecto continuado. A constituição do Conselho Nacional foi também clarificada, estabelecendo que os seus membros passam a ser designados pelos grupos de trabalho da APM e pelos núcleos regionais, ou ganham esta qualidade por inerência dos cargos que desempenham: os elementos da Direcção, os directores das publicações periódicas, o presidente da Mesa da Assembleia Geral, do conselho fiscal e os sócios da APM designados para representar a associação em organismos nacionais e internacionais no âmbito da educação.

A Direcção e o Conselho Nacional

Desde 1999 que a Direcção é constituída por nove elementos. Até esse ano, no entanto, era composta por um número significativamente superior, treze desde 1990 e quinze desde a sua fundação em 1986. Era uma forma de conseguir que a composição da Direcção traduzisse a diversidade regional e a nível de ciclos de escolaridade que a 'jovem' APM reclamava e perseguia.

Na verdade, logo na primeira Direcção eleita, se uma boa parte dos seus quinze membros era oriunda de escolas da região de Lisboa, mais de metade provinha de escolas diferentes regiões do país — Bragança e Faro, Porto e Setúbal, Sines, Évora, Portalegre e Castelo Branco. Em termos de ciclos de escolaridade, esta diversidade era também patente abrangendo vários níveis de ensino, com uma forte presença dos primeiros anos através de professores de escolas ensino preparatório e das Escolas Superiores de Educação (ESE), na altura ainda muito recentes. Era o caso da primeira presidente da Direcção — Leonor Filipe — que pertencia à ESE de Lisboa mas que todo o seu trabalho e experiência de ensino tinha sido no ensino preparatório, tal como de Albano Silva, Elizabete Sousa, Leonor Moreira, Odete Bernardes e Henrique Manuel Guimarães, este último então já ligado ao ensino superior na Faculdade de Ciências de Lisboa. A este de nível de ensino pertenciam também Paulo Abrantes, igualmente nesta Faculdade e Ana Leitão Rodrigues, Gertrudes Amaro e José António Duarte professores em diversas ESE. Ao ensino secundário, pertenciam Carlos Próspero, Cristina Loureiro, Fátima Mendes, José Tiago Filipe e Margarida Queirós.

Esta primeira Direcção reuniu-se em Lisboa pouco depois da sua eleição, a 30 de Setembro de 1986, para iniciar todo o trabalho organizativo necessário e o lançamento da Associação recentemente criada. Vale a pena referir que, a par dos cargos obrigados pelos estatutos, a Direcção criou dois pelouros — Publicações e Grupos de Trabalho — ocupados no primeiro caso por Leonor Moreira e Paulo Abrantes, e, no segundo, por Cristina Loureiro e Odete Bernardes, justamente para valorizar o trabalho nestes domínios, muito importantes para a divulgação da Associação e para a expansão e dinamização da vida associativa. Não demorariam a sair as primeiras publicações da APM e o primeiro número da sua revista *Educação e Matemática*, nem iriam passar muitos anos para surgirem outros grupos de trabalho e os primeiros núcleos regionais.

No ano seguinte, um terço dos elementos desta Direcção saíram, para dar lugar a outros e permitir o que partir daí sempre aconteceria, cumprindo uma disposição estatutária: a renovação anual na composição da Direcção. Neste ano seria eleita a primeira Mesa da Assembleia Geral — Raul Carvalho (presidente), Isabel Quinta Santos e Manuel Saraiva — e o primeiro Conselho Fiscal — Lurdes Cangueiro (presidente), Alice Inácio e Ana Vieira Lopes — órgãos com mandato de três anos e que, logo a partir do segundo passaram a ser constituídos por sócios de um único núcleo regional, diferente para os dois órgãos.

Deste modo, ao longo destes 20 anos passaram por estes órgãos da APM perto de centena e meia de associados, cem dos quais na Direcção, alguns com presença em duas direcções diferentes, como o caso de Albano Silva, Cristina Loureiro que com seis anos foi quem mais tempo teve em cargos directivos, Fernando Nunes, Henrique Manuel Guimarães, Manuela Pires e Branca Silveira. Até agora, a Associação teve onze presidentes e Leonor Filipe, como já se disse, foi a primeira sendo reeleita no ano seguinte. Nos primeiros anos da APM, o cargo tinha um mandato de um ano e Paula Teixeira foi a primeira presidente a ser eleita para um mandato de dois anos (1991-1993), sendo também a primeira professora do ensino secundário a exercer estas funções. O mesmo aconteceu nos dois mandatos seguintes com Adelina Precatado e Ana Vieira Lopes e mais tarde com Fernando Nunes,

Mesa da Assembleia geral no ProfMat de Bragança.

Primeiro reunião do Conselho Nacional.

que era do ensino preparatório, e que viria a ocupar o cargo por três anos (2001-2003), por solicitação expressa dos sócios em Assembleia Geral.

O Conselho Nacional, dizia-se no APM*informação* em Outubro de 1990, "visa essencialmente alargar e diversificar a intervenção dos sócios das várias regiões do país e melhorar a comunicação entre as estruturas nacionais e regionais da APM". Assim se justificava a proposta de um novo órgão para a Associação num documento discutido em reuniões alargadas da Direcção, com extractos divulgados aos associados no referido boletim. Estava-se no ano em que a Assembleia Geral realizada durante o ProfMat das Caldas da Rainha iria reformular os estatutos, consagrando a criação do Conselho Nacional. Definiu-o como um órgão consultivo da Associação, com uma composição alargada aos diversos órgãos e estruturas locais, cuja primeira competência é "pronunciar-se sobre questões fundamentais no âmbito da vida associativa e, obrigatoriamente sobre decisões tomadas ou a tomar pela Direcção" a respeito de matérias diversas.

O Conselho Nacional teve a sua primeira reunião em Lisboa logo no início do ano seguinte, a 19 de Janeiro. Na carta da Direcção que o convocava, dizia-se: "Vai acontecer no próximo Sábado, como deves estar informado, a primeira reunião do Conselho Nacional da APM. Vai ser, não duvidamos, mais um momento importante para a APM e que constituirá, como esperamos, o início de uma nova etapa na nossa Associação, correspondendo a uma mais alargada, diversificada e aprofundada participação dos seus sócios no debate de questões educativas e dos aspectos mais relevantes da vida associativa. Por isso, e em primeiro lugar, contamos com a tua presença e, em especial, com tua contribuição atenta e crítica, indispensável para que tal aconteça."

A reunião realizou-se nas instalações da Faculdade de Ciências de Lisboa, na Av. 24 de Julho, 134, 1º andar e teve início às 14.30. Estiveram presentes 23 pessoas que, para além dos membros da Direcção da Mesa da Assembleia Geral e do Conselho Fiscal, incluíam os representantes dos núcleos de Almada/Seixal (Rita Vieira), do Algarve (Carlos Próspero), do Porto (Luís Reis), da Madeira (Maria da Graça Correia) e de Viana do Castelo (Domingos Fernandes), um representante da Redacção da Educação e Matemática (Eduardo Veloso) e o representante das Associações Pedagógicas no Conselho Nacional de Educação (Paulo Abrantes). Para esta reunião foram também convidados sócios de Santarém, Setúbal, Aveiro e Lisboa, correspondendo à intenção de uma maior dinamização nessas regiões, tendo apenas comparecido um elemento da zona de Lisboa (Helena Paradinha).

Os temas de trabalho na reunião foram o plano de actividades para esse ano e diversas questões da actualidade. O "acompanhamento e intervenção na reforma curricular" então em curso e a necessidade de "maior intervenção da APM junto do público em geral" foram algumas das recomendações registadas. Para além disso, diversas intervenções salientaram a importância de se realizarem mais encontros regionais e de se "procurar envolver mais professores do ensino primário" na Associação.

Vale a pena ainda salientar que, três anos depois do Seminário de Milfontes, recomendou-se nesta reunião do Conselho Nacional a realização de seminários do mesmo tipo tendo mesmo sido adiantado um tema: "O professor de Matemática".

A avaliação foi a única questão de actualidade abordada através da apresentação um documento redigido por Paulo Abrantes, a pedido da Direcção para o Conselho Nacional, contendo considerações críticas relativas ao projecto de diploma sobre avaliação então divulgado pelo Ministério.

Hoje, o Conselho Nacional tem cerca de três dezenas de membros, reunindo ordinariamente quatro ou cinco vezes por ano para analisar problemas da vida associativa e pronunciar-se sobre questões educativas em particular as que se relacionam com ensino da Matemática. Para melhorar a sua organização e funcionamento, foi criado um secretariado cujo

Jornal Nº 2

Associação de Professores de Matemática

Núcleo do Algarve

Janeiro 1990

ALGARMAT 90

Lagos, 15, 16 e 17 de Março

A organização do ALGARMAT 90 - II Encontro Regional de Professores de Matemática do Algarve - congratula-se com a receptividade que mereceu o lançamento das suas propostas de pré-inscrição.

Cento e dez professores, de todos os graus de ensino, responderam prontamente ao convite para se encontrar, debater e trocar ideias e experiências, reflectir sobre o ensino da Matemática.

Participação Activa

Até ao momento, e estamos numa fase de auscultação, há já propostas de cursos de formação, comunicações várias, sessões práticas, narrativas de experiências, demonstrações de material didáctico e até sessões de magia matemática e teatro, totalizando 24 diferentes intervenções de colegas.

Concurso na Júlio Dantas

A Escola Secundária Júlio Dantas, em Lagos, anfitriã deste ALGARMAT 90, abriu um concurso para adopção do cartaz do Encontro, do modelo de certificado de presença e da placa identificativa dos participantes.

Um júri constituído pelo Professor Florivaldo Abundâncio, responsável pela organização do ALGARMAT, um representante do Conselho Directivo da Escola, um professor de Educação Visual, um professor de Matemática, um professor de Informática, um professor de Jornalismo e um professor cooperante do Projecto Minerva apreciaram as obras a concurso e atribuiram prémios aos três melhores trabalhos em cada uma das modalidades.

Folha informativa do núcleo do Algarve de 1990.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA - PORTO

"Lança-se uma pedra à superfície de um lago. A toalha de água até esse instante lisa e serena, enruga-se em círculos concêntricos cada vez mais amplos."

Colega:

A quando do envio da nossa primeira circular (Dezembro p.p.) éramos, na APM-Porto, ainda muito poucos.

Hoje somos já cerca de sete dezenas...

Conforme o prometido, vimos comunicar-lhe:

APM-PORTO - 1º ENCONTRO DE TRABALHO

DATA: 1987/ABRIL/04

LOCAL DO ENCONTRO: ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO PORTO
RUA Dr. ROBERTO FRIAS
4200 - PORTO

PROGRAMA: 1ª PARTE - Das 9h 30m às 12h 30m.

Comunicações sobre:

- Situação actual da APM - por um elemento da Direcção.
- Curriculos e programas - Cristina Loureiro - E.S.Ferreira Borges- Lisboa.
- Clubes de Matemática - Albano Silva - Escola Preparatória de Brandoa - Lisboa.
- "Logo"- João Filipe Matos - Faculdade de Ciências de Lisboa.
- Projecto Minerva - Alberto Silva -Escola Superior de Educação do Porto.
- Novas Tecnologias

2ª PARTE - Das 14h 30m às 17h.

Formação de grupos de trabalho sobre os temas anteriores e ainda "Formação de Professores".

OBSERVAÇÃO: Uma vez que a Organização do Encontro acarreta despesas de vária ordem, somos forçados a fixar a cota de inscrição em 250$00.

Primeiro encontro organizado pelo núcleo do Porto

regulamento foi aprovado em Novembro de 2004. Possui cinco membros designados pelo Conselho Nacional, um deles obrigatoriamente da Direcção e por ela indicado, e tem por principais funções preparar as reuniões do Conselho e elaborar as suas actas.

Os Núcleos regionais e Grupos de trabalho

Poucos anos após a criação da APM, começam a surgir os primeiros núcleos regionais, fruto do manifesto interesse e dinamismo de grupos de sócios das regiões. Em Dezembro de 1986, realiza-se no Porto uma reunião de sócios na sequência da qual viria a ser criado o núcleo da região. No ano seguinte, nascem mais dois núcleos, o de Almada-Seixal e o do Algarve, e em Janeiro de 1990 é criado o núcleo regional de Leiria. A seguir, em 1991, é criado em Janeiro o núcleo regional da Madeira e, em Março, o núcleo de Viseu. Em Abril de 1992, o núcleo regional dos Açores é constituído no decorrer do 1° encontro regional destas ilhas, e, ainda em 1992, durante o ProfMat de Viseu, é formada uma comissão de sócios de Évora que irá lançar o núcleo APM desta região. Em Dezembro, seria a vez da criação do núcleo de Coimbra. Nos anos seguintes, assiste-se ao aparecimento do núcleo regional de Braga, em Fevereiro de 1993 no decorrer do MinhoMat, e, em 1995, do núcleo regional da Covilhã e o núcleo regional de Beja.

Hoje abrangendo todo o território nacional e envolvendo professores de todos os níveis de escolaridade, do ensino pré-escolar ao Ensino Superior, a APM conta com 18 Núcleos Regionais, a maior parte deles com sede própria: Açores, Algarve, Almada-Seixal, Aveiro, Beja, Braga, Bragança, Castelo Branco, Coimbra, Covilhã, Évora, Leiria, Madeira, Porto, Viana do Castelo, Vila Real, Viseu e Tomar.

Estas estruturas regionais da APM, cuja história está ligada às características de cada região e à dinâmica dos professores associados, têm tido uma acção insubstituível, dando visibilidade às experiências locais, lançando iniciativas e investindo em eventos para alunos e professores. Não lhes é fácil manter uma actividade regular ao longo dos anos, pelo que alguns núcleos têm tido momentos de cessação de actividade, mas há projectos que surgem e motivam os sócios para reiniciar o trabalho de promover a comunicação entre os sócios da sua região através dos boletins informativos (alguns têm página própria na Internet), de organizar o empréstimo, a professores, de materiais de ensino e aprendizagem e de realizar encontros regionais que constituem um importante estímulo para a dinamização da actividade local. Nos últimos anos, os Núcleos regionais, também empenhados no envolvimento em projectos dirigidos a todos os sócios da Associação, têm sido os impulsionadores dos Anos Temáticos lançados pela APM. Em 2001, o tema do ano foi a Matemática e Natureza e foi coordenado pelos núcleos regionais de Vila Real e Bragança. No ano seguinte, os núcleos de Almada-Seixal e da Madeira assumiram conjuntamente a coordenação do tema Matemática e Profissões. Em 2003, a Matemática e Tecnologia foi o tema do ano que os núcleos de Coimbra e Leiria dinamizaram e em 2004, a Matemática e Jogo", coordenado pelos Núcleos de Porto e Viseu. Tendo em conta a realização em 2005 do Ano Internacional da Física, a APM decidiu programar algumas iniciativas no âmbito da Física e da Matemática e em 2006 o tema lançado foi A Matemática e o Tempo ficando a sua coordenação a cargo dos núcleos de Castelo Branco e Beja.

A par dos Núcleos regionais, os Grupos de trabalho constituem na APM centros de actividade que, reunindo associados com interesses afins em algum tema, actividade, ou ciclo de escolaridade, promovem, organizam e desenvolvem realizações de natureza e âmbito muito diversificados que, ao longo dos anos têm contribuído para a formação das pessoas envolvidas e para o enriquecimento e dinamização da vida associativa.

Curiosamente, se o ProfMat nasceu antes da APM, assim também aconteceu com os primeiros grupos de trabalho. Uma associação "consistente, viva, verdadeira", diz-se na notícia que divulga as resoluções de uma reunião de 'lançamento' da APM, realizada no princípio de 1986 em Lisboa na EP Marquesa de Alorna, só será possível se "na sua base estiverem grupos de pessoas que (...) sejam capazes de dar corpo a actividades que pela sua relevância e qualidade consigam congregar os interesses e promover a participação activa dos professores de Matemática na discussão e problematização das questões mais importantes relacionadas com o ensino e aprendizagem desta disciplina; a APM será, de facto, o que estes grupos forem capazes de ser". Nesta reunião foram criados vários grupos de trabalho, cada um com o seu "elemento de ligação" — Clubes [de Matemática] (Maria João Costa), Programas (Odete Bernardes), Interdisciplinaridade (Cristina Zambujo), Computadores (Raul Carvalho), Acções de formação (Luís Alves Martins), Publicações (Leonor Moreira), Encontro [ProfMat]86 (Cristina Loureiro) e Estatutos [para a APM] (João Pedro da Ponte). A constituição destes grupos, que tiveram desenvolvimento e continuidade diferentes, revela algumas das características reconhecidas como mais importantes para a associação que se pretendia criar: "vitalidade interna", "diversidade das suas actividades" e "possibilidade de todos os seus membros se dedicarem aquilo que mais lhes interessa".

Hoje funcionam na APM cerca de uma dezena de grupos de trabalho, alguns ligados aos diferentes ciclos de escolaridade — 1°, 2° e 3° ciclos e ensino secundário — outros relacionados com actividades particulares — como o grupo da Internet e o das Publicações — ou temas específicos. Está neste caso o grupo de trabalho T^3, a funcionar na APM no quadro do projecto europeu *Teacher Teaching with Tecnology*. Este projecto tem como principal objectivo a formação de professores no uso da tecnologia gráfica no ensino e aprendizagem da Matemática e a sua criação em Portugal foi anunciada em 1996 numa sessão especial do ProfMat de Almada.

Centrando as actividades em temas específicos, existem presentemente os grupos de trabalho sobre História e Educação Matemática (GTHG), sobre Geometria (GTG) e sobre Investigação em Educação Matemática (GTI). O primeiro, constituído em 1992 e tendo a sua primeira reunião em Março do ano seguinte, desenvolve as suas actividades visando a (auto)formação em História da Matemática e o estudo da sua integração da Matemática. O GTG surgiu em finais de 1995 e pretende reflectir sobre a situação actual do ensino da Geometria e discutir sobre a renovação curricular neste tema e modos de a concretizar. Este grupo conta actualmente com cerca de duas dezenas de membros de várias zonas do país. O GTI, criado em 1991, é um dos grupos de trabalho da APM há mais tempo em funcionamento e norteia as suas

actividades por dois objectivos essenciais, a criação de um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da educação matemática e a promoção da articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. Promove um conjunto muito diversificado de realizações, como a publicação de uma colecção de teses no domínio da educação matemática, a organização anual do Seminário de Investigação neste domínio (SIEM) e a edição da revista de investigação *Quadrante*. Para além disso, no ano 2000 criou um grupo de estudos em torno da ideia da investigação do professor sobre a própria prática que já vai no terceiro ciclo de actividades. O primeiro ciclo foi sobre o tema "O professor como investigador" (2000-02), o segundo sobre "O professor e o desenvolvimento curricular" (2002-05) e o terceiro iniciou as suas actividades no final do ano passado.

O Centro de Recursos e o Centro de Formação constituem dois outros "grupos" que têm tido uma contribuição importante para o trabalho da APM. O primeiro data já de 1990, ano em que foi elaborado o seu regulamento que foi discutido em Conselho Nacional. O projecto para este grupo vinha de anos anteriores, contando com o apoio de sócios de Lisboa e, neste ano, com uma professora destacada na APM, que trabalharam no seu desenvolvimento no quadro dos objectivos que foram definidos: colocar ao dispor dos sócios diversos materiais para actividades curriculares e/ou animação escolar; promover o intercâmbio de ideias e experiências de forma a estimular os professores para a implementação de novas práticas pedagógicas; fomentar a descoberta da Matemática do Jogo.

O Centro de Formação foi criado em 1993, no âmbito das actividades do Grupo de Trabalho sobre Formação Contínua. Em Maio deste ano, realizou-se um Conselho Nacional onde se discutiu a estratégia de formação para o Centro que viria a ser formalmente criado em Junho pela Direcção da

Sede na ESE de Lisboa

APM que aprovou o seu regulamento e nomeou a sua comissão pedagógica. No mês seguinte viria a ser aprovado o Plano de formação do Centro divulgado no APM*informação* deste mês inteiramente dedicado ao Centro de Formação que era aí apresentado a todos os sócios como "um novo espaço de trabalho na APM". Neste ano, vários sócios disponibilizaram-se para trabalhar no Centro em áreas como "A resolução de problemas", "O extracurricular e a Matemática", "O trabalho de grupo e o trabalho de projecto" e "Aplicações da Matemática".

Participação no SIAP

APM vem participando no Secretariado Inter-Associações de Professores (SIAP) desde a sua fundação há cerca de 14 anos. Desde então, aquela organização, que agrega várias associações de professores, tem-se assumido como "uma plataforma de entendimento de várias associações nacionais de professores de natureza científico-pedagógica que actua no âmbito das questões pedagógicas comuns aos vários saberes e áreas disciplinares, interdisciplinares e transdisciplinares, de política educativa mais geral".

Identificando-se com os princípios que norteiam a acção do SIAP, a APM tem mantido dentro da organização um diálogo árduo mas indispensável, visando enfrentar de forma concertada e eficaz as questões com que o ensino e a aprendizagem da matemática se defrontam nas escolas portuguesas. Tem igualmente colaborado nas actividades do SIAP, nomeadamente na elaboração de pareceres sobre vários diplomas legais ligados à Reforma Educativa, sendo o mais recente sobre a actual proposta de Lei de Bases da Educação, na realização dos seus seis encontros Nacionais, entre 1994 e 1997 e 2000 e 2003 e dos seus encontros regionais em 1998 (Lisboa, Porto e Coimbra), e na discussão do Relatório sobre a Gestão Flexível dos Currículos levada a cabo em 1999.

Actualmente fazem parte do SIAP, juntamente com a APM, as seguintes associações de professores: Associação Nacional de Professores de Educação Visual e Tecnológica, de Electrotecnia e Electrónica, de Educação Técnica e Tecnológica, de Alemão, de Francês, de Ciências Económico-Sociais de Geografia, de História, de Português e ainda a Associação de Professores para a Educação Intercultural e o Conselho Nacional das Associações de Professores e Profissionais de Educação Física. Integrando o grupo coordenador do SIAP, a APM tem colaborado na organização e realização de encontros e seminários, na elaboração de pareceres, na indicação de representantes das associações profissionais de professores (por exemplo no Conselho Nacional de Educação, ou no extinto Instituto de Acreditação da Formação de Professores) e participa nas reuniões mensais de coordenação.

A sede

Quando a APM foi criada, em 1986, funcionou alguns anos sem um espaço próprio para sede. Sempre que era preciso tratar de algum assunto, os sócios mais antigos talvez se lembrem, era preciso deslocarem-se à Av. 24 de Julho, às instalações do Departamento de Educação da FCUL, onde a APM

Assembleia Geral que decidiu pela compra da nova sede.

tinha uma pequena sala emprestada, dando guarida a alguns materiais e ao trabalho de secretariado na altura auxiliado por uma estudante.

Depois, em 1992, a APM conseguiu do Externato Maristas, em Benfica, a cedência de uma sala onde a sua sede funcionou até 1994. Neste ano, em Agosto, a Associação viu-se novamente com as malas às costas e, desta vez, a mudança foi muito mais complicada, pois o volume de coisas era já enorme. O seu destino foi o edifício P2 na ESE de Lisboa, onde as duas assoalhadas de que passou a dispor foram na altura consideradas um luxo!

Seis anos depois, a APM é informada que a ESE de Lisboa não pode continuar a disponibilizar o espaço cedido, colocando-se a obrigatoriedade de ter de deixar essas instalações. Começa então a encarar-se a possibilidade de aquisição de espaço próprio, e a entrar no novo milénio, a APM avança para esta solução pois os seus sócios assim o decidiram em Assembleia Geral, convocada para discutir a situação.

Embora existam muitas centenas de sócios que, voluntariamente, dão a sua colaboração (nos grupos de trabalho e nos núcleos, na organização e realização dos encontros, nas publicações, no trabalho de apoio à direcção, etc.) muitas tarefas permanentes, na sede nacional, são asseguradas por algumas funcionárias que mantêm organizados os diversos sectores da associação. A funcionária mais antiga é a Celeste — Maria Celeste Ferreira — que está na casa desde 1991. Parecendo sempre calma, é grande, no entanto, a responsabilidade que tem sobre si: está encarregue de tudo o que envolve dinheiro, facturação, recibos, depósitos bancários, controlo das contas no banco, encomendas etc..

A partir de 1992, a APM passou a contar com uma nova e bem disposta funcionária, a Glória — Maria da Glória Garcia — que também faz de tudo um pouco, mas tem a seu cargo os cursos, o grupo de trabalho T³ e principalmente a responsabilidade dos assuntos relacionados com os sócios, pelo que é bem conhecida entre eles. Com crescimento do número de sócios e fundamentalmente com o aumento de actividades que a APM foi desenvolvendo, houve necessidade de contratar mais uma funcionária. Assim, em 1997, quando do lançamento do projecto Matemática 2001, passamos a poder contar com a discreta mas eficiente Susana, — Maria Susana Nunes — que ficou inicialmente afecta ao projecto. Hoje, o seu pelouro está ligado ao centro de formação da APM e aos cursos do PRODEP, dando também apoio à revista *Quadrante*. Finalmente, o elemento de contratação mais recente é a Ana — Ana Pereira. Em 1999, entrou a tempo parcial para colaborar com a expedição do correio, mas desde 2000, embora dando como as suas colegas, uma mãozinha a tudo, está a apoiar, a tempo inteiro, o Centro de Recursos da APM, tendo a seu cargo a verificação e manutenção de materiais e exposições, bem como o controlo das entradas e saídas destes e a gestão da sua base de dados.

Por fim, não se pode deixar de referir que, graças aos serviços diários de Clara Rodrigues, as instalações da APM estão sempre agradavelmente arrumadas e limpas.

1996

- No ano do seu décimo aniversário, a APM tem uma nova casa, um dos edifícios da Escola Superior de Educação de Lisboa. Neste novo espaço, o Centro de Recursos da APM e o Centro de Formação adquirem nova dimensão e pode dar-se continuidade à bem sucedida iniciativa das sessões de Fim de Tarde iniciadas no ano anterior.
- Surgem mais dois núcleos regionais em Bragança e Vila Real, contando assim a APM com 14 núcleos espalhados por todo o país.
- A Associação passa a ter correio electrónico com o endereço `apm@telepac.pt` que os seus já cerca de 3500 sócios podem utilizar.
- Em Março, a APM cria um grupo de trabalho para fazer um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nas escolas do ensino básico e secundário em Portugal. Este grupo adoptou a designação de MATEMÁTICA 2001, enfatizando a sua preocupação em contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática num futuro a curto prazo — simbolicamente no início do século XXI.
- Visando a formação de professores, que incidiu sobre calculadoras, especialmente nas gráficas, foi anunciada a participação de Portugal no T^3 EUROPE, *Teachers Training with Technology*, através da APM.
- Neste ano, foi criado um Boletim para o 1° ciclo do ensino básico e assistimos ainda ao lançamento de outras iniciativas para os professores como a criação do Grupo da Internet e de uma Linha de publicações de ideias e materiais para a sala de aula.
- A 22 de Setembro, no Colégio de Sto António em Portalegre, no dia e local da criação da APM, cerca de 140 professores juntam-se numa cerimónia comemorativa dos seus 10 anos de existência, onde para além de intervenções diversas sobre a efeméride e de um almoço com os presentes, foi inaugurada uma escultura alusiva ao aniversário.
- Em Almada, realiza-se o ProfMat96 e, neste evento, estiveram presentes cerca de 1200 professores. Os participantes puderam visitar a exposição *Dez anos da APM* através da qual puderam fazer uma ideia global do percurso e da actividade a nível nacional e regional, dos grupos de trabalho e dos núcleos regionais, que a Associação desenvolveu ao longo destes dez anos.
- Neste ano, também em Almada e, como habitualmente nos dois dias antes do ProfMat, decorre o VII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM).
- Dando continuidade às actividades que o SIAP, Secretariado Inter-Associações de Professores, se propõe desenvolver, teve lugar na ESE de Lisboa o 3° encontro de associações de professores que contou com a participação de cerca de 120 professores das várias agremiações que integram o SIAP.

1997

- Em Janeiro, a revista *Educação e Matemática* faz dez anos, passando a publicar cinco números por ano com um maior número de páginas em cada número. A revista *Quadrante*, já no seu quinto ano de vida, faz sair o seu número temático "Perspectivas culturais e sociais na aula de Matemática".
- São criados mais núcleos regionais, em Aveiro, Castelo Branco e Viana do Castelo.
- Com a presença de 385 participantes, realiza-se em Março o 1° Encontro Nacional do 1° ciclo do ensino básico, em simultâneo com o encontro regional LeiriMat.
- Foi apresentada pela APM a proposta de organização para os laboratórios de Matemática na reunião da Comissão de acompanhamento dos programas do Secundário onde estiveram presentes representantes da SPM, SPE, SPCE, DGEB, DGES e IIE.
- O 49° encontro da CIEAEM (*Comission Internationale pour l'Étude et Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) realiza-se em Portugal, na cidade de Setúbal. Para este encontro, o Grupo Trabalho de Investigação, GTI, da APM preparou uma apresentação nacional caracterizando os principais aspectos do sistema educativo e currículo portugueses e a evolução e impacto do movimento associativo dos professores de Matemática e do desenvolvimento da investigação em educação matemática em Portugal.
- Este ano, é a Figueira da Foz, na Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho, que acolhe o ProfMat97 onde participaram cerca de 1700 professores..
- Antes do ProfMat, e na mesma localidade, decorre o SIEM, este ano na sua 8ª edição.

1998

- A APM passa a ter um sítio próprio na Internet: `http://www.apm.pt` com informação relevante sobre a Associação.
- O boletim informativo dos sócios da APM, o APM*informação*, que é um veículo interno de informações e notícias da vida da Associação, ultrapassa o seu 30° número e passa a ter uma tiragem de 5000 exemplares.
- Publica-se o relatório final do projecto *Matemática 2001* que é distribuído para discussão e reflexão alargada nos núcleos e grupos de trabalho.
- A *Educação e Matemática* publica o seu 50° número, inteiramente dedicado ao tema "Educação, Escola e Matemática". A tiragem da revista atinge um número recorde de 5200 exemplares.
- Em Janeiro, respondendo ao crescente interesse em compreender melhor a complexidade da actividade de resolução de problemas de aplicação e modelação matemática e as implicações dessa actividade no ensino da Matemáti-

ca, formou-se o Grupo de Trabalho Aplicações e Modelação da APM (GTAM),

- Em Viseu, realiza-se o 2° Encontro Nacional do 1° ciclo que, para além da reflexão sobre problemáticas específicas do ensino e aprendizagem da Matemática neste ciclo, incidiu na articulação Pré-escolar–1° ciclo–2° ciclo e em aspectos da formação inicial e contínua dos professores.
- O ProfMat98 decorre em Guimarães com a participação de cerca de 1600 professores. Durante o encontro foi distribuído a todos os participantes o relatório final do projecto *Matemática 2001*.
- Nos dois dias que antecederam o ProfMat, realiza-se o IX SIEM.

1999

- É constituída a associação *Atractor — Matemática Interactiva* visando criar um Centro Interactivo dedicado à Matemática, da qual fazem parte APM, SPM, FCUL, FCUP, FCTC, UA, UP, CMAF de Lisboa e a Câmara Municipal de Ovar.
- É lançada a experiência da gestão flexível do currículo em 35 escolas. Na APM, é criado um grupo de apoio à experiência que elabora um documento para reflexão e discussão interna alargada.
- A APM integra o conselho consultivo do GAVE, do Ministério de Educação, juntamente com representantes de outras associações e sociedades científicas.
- Constitui-se um grupo de trabalho visando a elaboração de propostas concretas de alteração dos estatutos da Associação.
- A revista *Educação e Matemática* faz sair um número temático dedicado ao currículo.
- De novo no Algarve, é Portimão a cidade que acolhe o ProfMat99 que, juntando 1800 participantes, foi o maior encontro de professores de Matemática até então realizado.
- Na assembleia geral de sócios que se realizou neste ProfMat é, aprovada a alteração de estatutos da APM, possibilitando que a Direcção da Associação passasse de treze para nove elementos e alterando a duração dos mandatos do presidente e restantes elementos.
- O SIEM, seminário que se dirige a todos os professores interessados na investigação sobre os problemas do ensino e aprendizagem da Matemática, tem este ano a sua 10ª edição.

2000

- Ano Mundial da Matemática (AMM), a APM decide lançar um conjunto de iniciativas que são muito bem acolhidas pelas escolas, professores e alunos. De entre elas, destacou-se a proposta de realização simultânea da Semana da Matemática nas escolas, a construção de um sólido geométrico gigante a integrar a exposição "Um poliedro na escola" que esteve acessível na Internet e a elaboração de um cartaz comemorativo do AMM que foi enviado a todos os sócios e escolas do país, acompanhado de uma folha de exploração das actividades nele contidas.
- A revista *Educação e Matemática*, também no âmbito das comemorações do Ano mundial da Matemática, dedicou-lhe o seu número temático anual e uma secção permanente que fez sair em todos os números deste ano.
- Em Março, realiza-se, mais um encontro nacional de professores do 1° ciclo, juntando cerca de 250 participantes. Foi um grupo de escolas das Caxinas, em Vila do Conde, que tomou a iniciativa da organização do encontro.
- Organizado conjuntamente pela APM, SPM, SBH de Matemática do Brasil, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Centro de Matemática de Coimbra, realizou-se nesta cidade o III Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática.
- Visando a reflexão e debate entre professores de disciplinas diferentes, SIAP, Secretariado Inter-Associações de Professores organiza, na fundação Calouste Gulbenkian, mais um encontro desta vez focado na dupla temática, gestão flexível do currículo do ensino básico e diversificação do ensino secundário.
- Pela segunda vez, o ProfMat deixa o continente e vai este ano até ao Funchal, onde estiveram cerca de 1200 participantes com muitos acompanhantes, para mais um encontro que desta vez se realizou numa universidade. Neste ProfMat foi lançado o ano temático "Matemática e Natureza", desafio que a APM colocou para o ano 2001.
- O XI SIEM realiza-se também no Funchal, como sempre nos dois dias que antededem o ProfMat, com a participação de cerca de 90 professores.
- A revista *Quadrante* faz sair mais um número temático desta vez dedicado à Investigação e Conhecimento profissional do professor de Matemática.
- No Pavilhão do Conhecimento em Lisboa, realiza-se uma exposição que foi muito concorrida, Matemática Viva, a que a APM esteve ligada através do Grupo de trabalho do Atractor, organizador da exposição.
- No virar do milénio, a APM passa a ter a sua sede num espaço adquirido para o efeito. Colocando-se a obrigatoriedade de ter de deixar o local onde estava instalada, uma Assembleia geral de sócios realizada a meio do ano na ESE de Lisboa, tomaram a decisão de considerar de interesse para a associação a compra de um espaço próprio para a sua sede: rua Dr. João Couto, 27-A, em Lisboa.

Fátima Afonso Guimarães
Henrique Manuel Guimarães

Calculando do Calendário o Ontem desaparecido e o Amanhã novo

A contagem do Tempo no Islão

Isabel Cristina Dias

Astrolábio islâmico datado de 1310, provavelmente construído no Norte de África e em que é visível a linha das orações (Whipple Museum).

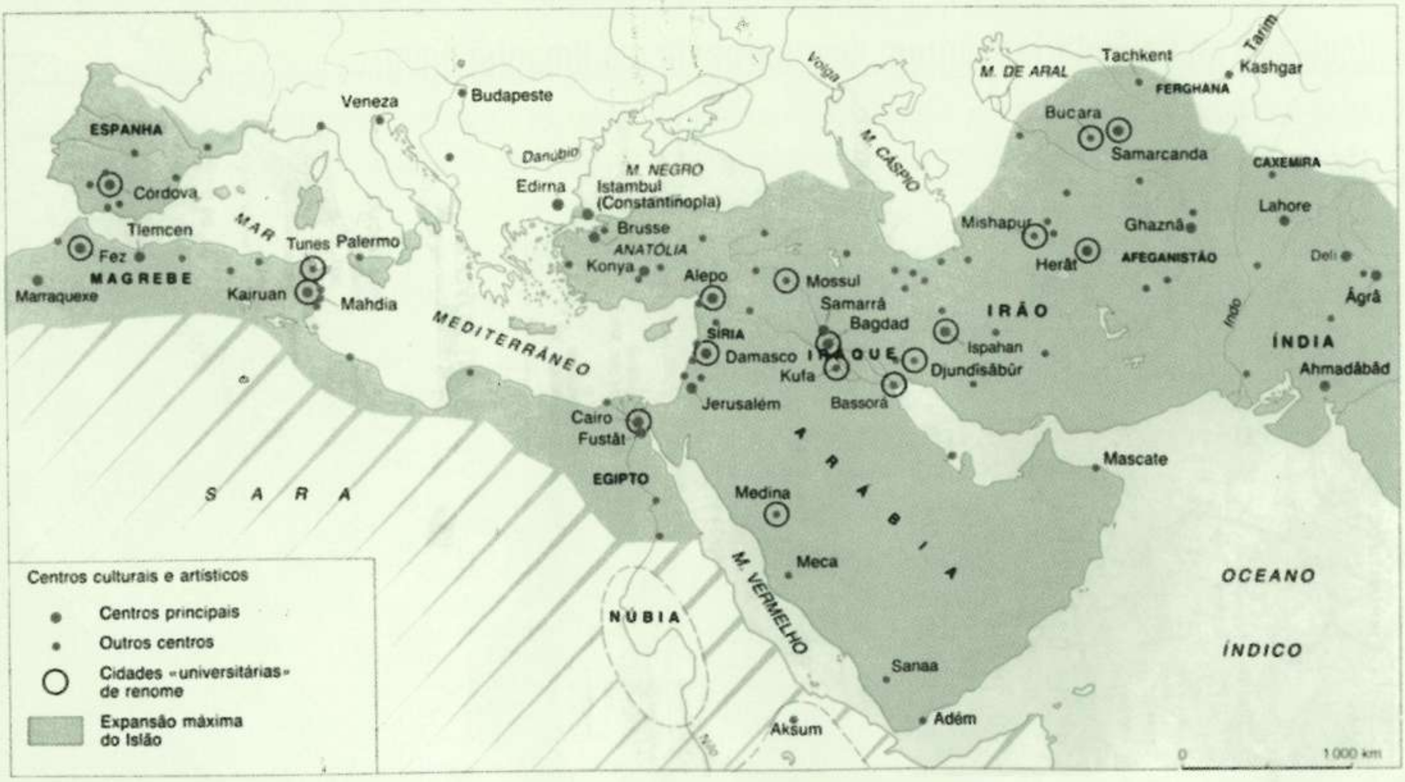
Num contexto em que são exploradas as relações entre as matemáticas e uma organização quantitativa do Tempo, a contribuição da cultura muçulmana teria, necessariamente, que ser considerada. Dada a vastidão dos conhecimentos envolvidos, este texto não tem, como se compreende, qualquer pretensão de aprofundar o tema. Mas, dado que a medição do Tempo teve sempre um lugar central na religião, na ciência e na sociedade islâmica, será significativo que aqui fiquem estas breves notas.

Em primeiro lugar, serão apresentadas algumas informações relativas à estrutura dos calendários muçulmanos e à contagem e duração dos dias e dos meses; depois, será referido o trabalho de dois astrónomos árabes que viveram em zonas geográfica e culturalmente muito distintas e cujo trabalho teve importância decisiva na história da contagem do Tempo.

Previamente, justifica-se uma curta introdução acerca da marcante civilização que surgiu na Arábia na primeira metade do séc. VII. Uma religião monoteísta, o Islão, iniciada pelo Profeta Muhammad bin'Abd illh, iria disseminar-se rapidamente. O impacto dessa nova religião foi enorme e, menos de um século depois de os exércitos muçulmanos terem conquistado Meca, cidadãos de toda uma extensa zona geográfica, desde a Ásia à Península Ibérica, professavam o Islamismo. Nos séculos VIII, IX e X esse império estava dividido em califados comercial e intelectualmente florescentes cujas cortes, em Damasco, Bagdad ou Córdova, se tornaram centros de estudo e de divulgação das ciências, das artes e da filosofia.

Uma questão existente desde então é a seguinte: dado que o Alcorão e o Hadith (descrição dos actos e palavras do Profeta) contêm numerosos incitamentos à actividade científica, de que ciência se trata? Numa entrevista publicada pelo jornal L'Humanité em 2001, o historiador da matemática árabe Professor Ahmed Djebbar, afirmou:

"Actualmente, é tempo de substituir uma visão exótica da civilização árabe-muçulmana por uma visão mais conforme com a história. Tal como é tempo de reavaliar a contribuição científica da Idade Média europeia. (...) Por exemplo, durante muito tempo pensou-se que o papel do Maghreb e da Espanha nas matemáticas tinha sido insignificante, mas as pesquisas dos últimos vinte anos têm revelado nessa região uma rica tradição científica: foram conhecidos novos instrumentos, foram discutidos modelos planetários, a combinatória enquanto disciplina



Mapa indicativo da máxima expansão política e cultural atingida pelo Islão [Santos Lopes, 2002]

deu os seus primeiros passos e, a partir do séc. XII, um simbolismo bastante elaborado foi introduzido na escrita da álgebra e da aritmética. (...) De Samarcanda, na Ásia Central, a Saragossa, em Espanha, dezenas de pólos se desenvolveram, fomentando um real intercâmbio entre os diversos grupos de sábios e criando entre eles múltiplas ligações científicas."

A astronomia e a sua ligação à organização das sociedades sempre foram muito importantes para os estudiosos do Islão. "Na sua procura da verdade, os cientistas Muçulmanos estavam basicamente interessados em adquirir conhecimento que pudesse suportar a prova do tempo. Esta procura deu-lhes o gosto pela investigação metódica." (Adamgy, 1998). Ficaram famosos, entre outros, os observatórios astronómicos de Samarcanda, Bagdade, Córdova, Toledo, Cairo e Isfahan. Para além do estudo da astronomia em geral, o aperfeiçoamento dos calendários era uma das tarefas prioritárias aí desenvolvidas.

O calendário islâmico segue os ciclos da Lua, não os do Sol e das estações, embora certos tipos de calendários solares tenham sido usados ao longo da história do Islão com propósitos agrícolas e administrativos. Como o mês lunar tem apenas 29.5 dias, o início de cada ano *avança* 11 dias em cada ano solar. Por exemplo, o ano 1427 H começou em 31 de Janeiro de 2006 e o ano seguinte, 1428 H começará em 20 de Janeiro de 2007. Na época pré-islâmica existiam calendários lunares que incluíam um mês extra *intercalar* com 11 dias, para compensar a diferença, mas esta prática foi abandonada pelo Profeta Muhammad. Nascido em Meca, haveria de emigrar para Yathrib, cidade a que foi dado o nome de Madînat al-Nabî, hoje Medina. O ano em que esse acontecimento se deu viria a ser considerado como o ano zero na contagem do Tempo na cultura islâmica, o ano da Hégira (622 d.C.). Tal decisão foi tomada por Omar I (o terceiro Califa dos Crentes, depois do Profeta Muhammad e do seu sucessor Abu Bakr).

Um modo de conversão entre o calendário islâmico e o gregoriano, que fornece resultados com uma boa aproximação, é o que consiste em subtrair 622 à data d.C. dividindo depois o valor obtido por 0,97 e determinando assim o ano da Hégira.

No calendário islâmico cada mês começa ao pôr-do-sol do dia em que é visível um novo crescente lunar, decisão que pode ser difícil já que a observação é afectada pelas condições meteorológicas ou pela localização. Os primeiros astrónomos muçulmanos seguiam um critério encontrado em fontes indianas: a nova lua seria vista se a diferença entre os ocasos da Lua e do Sol fosse de, pelo menos, 45 minutos. Mais tarde, à medida que se desenvolveram as teorias sobre

Ilustrações incluídas em História do Rei dos Reis de Mansur Shirazi [c. de 1000H/1590] representando o Observatório de Istambul

o movimento da Lua e foram melhorados os conhecimentos de geometria esférica, surgiram tabelas mais sofisticadas e condições de exactidão mais exigentes.

Compreende-se que seja de grande importância para todo o muçulmano saber o dia em que começam os meses, nomeadamente o Ramadão — 9° mês do calendário e mês sagrado em que o Alcorão foi revelado ao Profeta Muhammad — momento que assinala o início de um mês de oração e jejum. Muharram, Safar, Rabi al-Awwal, Rabi al-Akhir, Jumaada al-Awwal, Jumaada al-Akhir, Rajab, Sha'aban, Ramadan, Shawwal, Dhu al-Qi'dah e Dhu al-Hijjah são os 12 meses do ano de acordo com o calendário islâmico.

Outro problema de grande importância religiosa é o das horas das orações diárias que todo o crente muçulmano deve cumprir. Inicialmente, os métodos tradicionais para a sua determinação baseavam-se na astronomia popular e, por vezes, um simples gnómon ou relógio de sol era usado ao longo de todo o dia pelo muezzin (quem faz o apelo à oração, em geral a partir do minarete da Mesquita). Os estudiosos islâmicos combinaram estas tradições com conhecimentos de matemática e astronomia mais evoluídos tendo construído instrumentos e tabelas que permitiram cálculos mais exactos. E, por volta do século XIII, havia em grande parte das mesquitas um astrónomo profissional (muwaqqit) que calculava o momento em que cada oração deveria ser feita.

O dia muçulmano começa com a oração do pôr-do-sol, Mahgrib. Isha é a oração de quando a noite começa, ou seja, o final do crepúsculo. No começo do dia, meia hora antes de o sol nascer, Fajr. As restantes duas orações que o Alcorão estabelece como obrigações de um crente muçulmano são determinadas pelo comprimento das sombras: Zuhr quando a sombra é a menor possível, portanto imediatamente após o meio-dia solar e Asr quando a sombra é o dobro do gnómon. Tendo em consideração a necessidade religiosa e social do cálculo desses momentos, a maioria dos astrolábios islâmicos tinha uma linha que indicava as horas das cinco orações. Curiosamente, quando a Europa não muçulmana começou a usar astrolábios e estes começaram a ser construídos por cristãos, nem sempre a linha das orações desapareceu visto que o nascer-do-sol e o pôr-do-sol eram momentos de oração para os cristãos.

A já referida permeabilidade entre os conhecimentos científicos desenvolvidos por judeus, cristãos e muçulmanos foi uma característica dos séculos IX-XII em todo o espaço

Os relógios de água de Toledo

"Os relógios eram constituídos por dois recipientes, que se enchiam ou esvaziavam de água de acordo com o quarto crescente ou com o quarto minguante da lua. No momento em que a lua nova aparecia no horizonte, a água começava a correr para os recipientes através de canos subterrâneos, de modo que haveria, ao nascer do dia, um quarto da sétima parte e, ao pôr-do-sol, metade da sétima parte da água necessária para encher os recipientes. Na mesma proporção a água continuaria a correr até que tivessem passado sete dias e o mesmo número de noites do mês, momento em que os dois recipientes estariam meio cheios. O mesmo processo durante os sete dias e as sete noites seguintes encheria completamente os dois recipientes, no momento preciso em que a Lua estaria cheia. No entanto, na décima quinta noite do mês, quando a Lua começasse a minguar, os recipientes começariam também a perder cada dia e cada noite uma sétima parte da água, até que pelo vigésimo primeiro dia do mês estariam meio vazios e quando chegasse a vigésima nona noite nem uma gota de água restaria. É digno de nota que, se alguém fosse aos recipientes deitar água quando não estivessem cheios para acelerar o seu enchimento, os recipientes absorveriam imediatamente a água adicional e não reteriam mais do que a quantidade justa; e, se pelo contrário, quando eles estivessem quase cheios houvesse alguém que tentasse retirar parte ou toda a água, no momento em que isso acontecesse os recipientes iriam extrair água suficiente rapidamente para preencher a falta."

(O texto árabe foi escrito por al-Zuhri e traduzido para castelhano por Millas-Vallicrosa e para inglês por Ahmad Thompson; a presente tradução foi feita a partir da versão inglesa disponibilizada por *Foundation for Science, Tecnology and Civilisation.*)

Al-Zarqali construiu os relógios cerca de 1062 e estes estiveram em funcionamento até 1133 data em que Afonso VII autorizou Hamis Ibn Zabara a desmanchá-los para perceber como funcionavam; este não conseguiu voltar a montar a estrutura e assim se perdeu a técnica de al-Zarqali. Os relógios funcionavam como um calendário lunar muito preciso e, de certo modo, foram os antecessores de alguns peculiares instrumentos de astronomia tão em moda no séc. XVII.

do Islão e, nomeadamente, na Península Ibérica. Por exemplo, quando no final do séc. XII morreu Gerardo de Cremona (507-582H/1114-1187) os seus companheiros de ciência escreveram no elogio fúnebre que "por amor ao Almagesto [de Ptolomeu] que não se encontrava entre os latinos, veio para Toledo" (Jacquart, 1991, p.174). Esta informação, relativa a um dos expoentes máximos da designada "escola de tradutores de Toledo", leva ao questionamento das razões que teriam levado o estudioso da Lombardia a viajar para Toledo e a traduzir a obra de árabe para latim em vez de o fazer directamente do grego. Ainda segundo Danielle Jacquart (1991), terão sido duas as razões: 1) dessa forma teria acesso aos comentários e às novas interpretações que, na tradução árabe, melhoraram o sistema de Ptolomeu e 2) Toledo tinha uma extraordinária reputação em matéria de astronomia.

Nos séculos XI e XII, Toledo vivia "entre a barbárie ameaçadora dos cristãos do Norte, os vestígios da latinidade, o legado dos gregos e a filiação profética dos povos semíticos, judeu e árabe." (Gros, 1991, p. 190). Sendo um dos *taifas* (pequenos reinos independentes) em que ficara dividida a Espanha muçulmana após as tensões internas do califado omíada, Toledo ficou debaixo da dominação de uma família berbere de que o soberano al Ma'Mun (428-467 H / 1037-1075) haveria de ser o representante mais ilustre.

Nessa Toledo nasceu Abu Ishaq Ibrahim ibn Yahya al-Zarqali (420–480H / 1028–1087), designado em latim por Azarquiel, o mais importante astrónomo do seu tempo e também uma referência na álgebra e na astrologia. Foi na cidade onde nasceu que efectuou grande parte das suas observações astronómicas — deixou-a apenas no final da vida, quando a cidade foi subjugada pelos exércitos cristãos — e a ele se deveu, em larga medida, a supremacia de Toledo no campo da astronomia. Os seus trabalhos foram traduzidos para latim por Gerardo de Cremona (refira-se que o "período das traduções" chegou teoricamente ao fim nos finais do séc. XII embora, na prática, a tradução tivesse continuado, quase sem qualquer diminuição, até meados do séc. XVII).

Combinando conhecimento teórico com capacidade técnica, os principais contributos de al-Zarqali foram a construção de instrumentos de precisão para observação astronómica e a participação na elaboração das famosas Tábuas Toledanas. O seu mais conhecido instrumento foi um astrolábio plano, *Safiha Zarqalia*, considerado *universal* por permitir a utilização em qualquer latitude. No séc. XV, Regiomontanus haveria de publicar um manuscrito em que explicava as vantagens do *Safiha* relativamente a outros astrolábios. Azarquiel construiu também um relógio de água capaz de determinar as horas de dia e de noite e de indicar os dias dos meses lunares (ver caixa: *Os relógios de água de Toledo*).

Com base em dados que recolheu através das observações que efectuou entre aproximadamente 452H e 472H (1061 e 1080), escreveu um livro de tabelas astronómicas. Na época existiam muitos desses livros mas o seu almanaque (palavra actual que deriva do vocábulo árabe *al-manākh*, publicação geralmente anual que reunia informação sobre um assunto específico), para além de tabelas de latitude e longitude, de tabelas com a posição dos planetas em qualquer momento e de outras com informações que facilitavam a previsão de eclipses da lua e do sol, continha tabelas que permitiam saber em que dia começavam os meses nos calen-

Ilustração representando Al-Zarqali

Representação de Al-Khayyam num selo albanês de 1996

dários Copta, Romano, Persa e Lunar. Os dados compilados pelo astrónomo hispano-árabe influenciaram os astrónomos que, duzentos anos mais tarde, haveriam de elaborar as Tábuas Afonsinas (Afonso, rei de Castela, ordenou nessa época a tradução para castelhano de todos os trabalhos de Azarquiel) e foram, também, um instrumento indispensável da astronomia ocidental até à época de Copérnico, o qual, em *De Revolutionibus Orbium Celestium*, cita e menciona a dívida científica para com o astrónomo de Toledo. Para que se possa perceber a relevância de al-Zarqali resta acrescentar que foi o primeiro a provar o movimento do afélio (apogeu do Sol) relativamente às estrelas, calculando o rácio desse movimento em 12.04 segundos por ano (o valor actual é de 11.80 segundos) e que corrigiu dados geográficos incorrectos, nomeadamente o comprimento (*medida angular*) do Mar Mediterrânico; al-Kharizmi alterou para 52° o valor de 62° dado por Ptolomeu e Azarquiel indicou um valor muito próximo de 42°, actualmente o valor considerado correcto.

Tal como Sevilha se tornara famosa pela poesia e Valência pelas suas escolas corânicas, Toledo assumiu papel de relevo naquelas que eram então designadas por *ciências dos antigos*: matemáticas, astronomia, astrologia, alquimia, medicina. Na cidade viveram os matemáticos al-Waqqadi e al-Tugibi, o astrónomo Mohammad Assafar e os geómetras Ibn al-Attar e Ibn Hamis. Em 1085, Toledo era posto avançado militar da reconquista cristã, uma ilhota de tolerância, um local de saber com um papel complexo e paradoxal (Jacquart, 1991). De alguma forma, a cidade propunha-se seguir o modelo de Bagdad, a extraordinária capital da Pérsia do século IX, com a sua *Casa da Sabedoria* (Gros, 1991).

E foi na Pérsia, em Nishapur (no actual Irão), que nasceu um jovem (tal como seu pai fazia tendas, khyam em árabe) que haveria de se tornar um filósofo, um poeta, um linguista, um historiador, um matemático e um astrónomo: Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami (440-518H / 1048-1124?).

Assim como o contexto em que viveu foi decisivo na vida de al-Zarqali, também os acontecimentos políticos do séc. XI tiveram um papel determinante na vida de Khayyam. Os turcos seljúcidas, que tinham invadido o sudoeste da Ásia, conquistaram todo o nordeste do Irão e o fundador da dinastia, Toghrïl Beg, proclamou-se sultão de Nishapur na década de quarenta do séc. XI e entrou em Bagdad em 446H (1055). Foi neste império militarmente instável, em que uma ortodoxia religiosa se procurava afirmar, que Omar Khayyam cresceu.

Curiosos acontecimentos não comprovados (Katz, 1998) terão levado o poeta e astrónomo a Isfahan. Conta-se que três jovens amigos, Nizma al-Mulk, Hassan ibn Sabbah e Omar Khayyam terão feito um acordo no sentido de que o primeiro que conseguisse atingir uma boa posição na vida ajudaria os outros dois. Alguns anos passaram e Malik-Shah, neto de Toghril Beg, fez de Isfahan a capital do seu império e de Nizma al-Mulk o seu grão-vizir. Este não esqueceu a sua promessa e ofereceu aos seus amigos de juventude posições importantes na corte. Hassan haveria de trair a confiança do amigo junto do Sultão, sendo banido da corte, mas Omar rejeitou todas as honrarias aceitando apenas um modesto salário que lhe permitiu entregar-se completamente ao estudo (Katz, 1998). Certo é que, posteriormente, o poderoso Malik-Shah convidou-o a fundar e dirigir um observatório astronómico em Isfahan.

Omar Khayyam, acompanhado de um grupo de importantes astrónomos, passou 18 anos nesse observatório a reestruturar o calendário existente. Foi um período de paz que deu ao matemático a oportunidade para se devotar inteiramente ao seu trabalho. Nessa época, determinou a duração de um ano em 365,24219858156 dias. O extraordinário grau de aproximação mostra uma enorme confiança no resultado apresentado, confiança plenamente justificada já que no séc. XIX o valor considerado era de 365,242196 dias e, actualmente, é de 365,242190 dias. O actual calendário gregoriano tem um erro de 1 dia em cada 3330 anos, enquanto que o construído por Khayyam e seus companheiros tinha um erro de 1 dia em 5000 anos (não há aqui acordo entre os historiadores, afirmando alguns que o erro seria ainda menor).

Seria o Rubaiyat, a maior obra poética de Omar Khayyam, que o tornaria conhecido na Europa, em meados do séc. XIX, quando Edward Fitzgerald fez a primeira tradução para inglês. O poema, com perto de 600 quadras, encontra-se traduzido em dezenas de línguas, algumas tão inesperadas como o Basco ou o Yiddish. Mas, muito mais importante do que a obra poética de Omar Khayyam foram os seus trabalhos matemáticos, como o estudo acerca das equações de terceiro grau, a análise do postulado euclidiano sobre paralelismo e, naturalmente, a construção de um novo calendário.

Ah, mas os meus Cálculos, diz o Povo,
Ajustaram o ano ao compasso humano, eh?
Se assim é, foi calculando do Calendário
o Ontem desaparecido e o Amanhã novo.

Omar Khayyam, Rubaiyat (LIX)

Notas

1. As datas foram apresentadas de acordo com o calendário gregoriano e com o calendário muçulmano, surgindo em primeiro lugar a data relativa à Hégira e, entre parêntesis, a data relativa ao início da usualmente designada Era Cristã.

2. Saliento a importância da consulta efectuada nas seguintes páginas de Internet:

   Oxford Museum of the History of Science: `www.mhs.ox.ac.uk/students/97to98/exhibits/index.htm`

   Groupe de recherche *Science et Religion en Islam*: `http://www.science-islam.net`

   Foundation for Science, Technology and Civilisation: `http://www.muslimheritage.com`

Agradecimento

Ao Xheik David Munir, Imã da Mesquita de Lisboa, pela paciência e disponibilidade para ler este texto e me assegurar a correcção religiosa das afirmações aqui feitas. Qualquer erro histórico ou matemático será, naturalmente, da minha inteira responsabilidade.

Referências:

Adamgy, Y. (1998). *Fontes islâmicas da cultura ocidental*. Lisboa: Al Furqán.

Bergé, M. (1978). *Les Árabes*. Paris: Editions Lidis.

Djebbar, A.(2001). L'âge d'or de la science arabe. In *L'Humanité* (2001/06/08).

Estrada, M. F. (2000). A Matemática na Civilização Islâmica. In Estrada, M. F. & al, *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Fauvel, J. & Gray, J. (ed.) (1987). *The History of Mathematics — A Reader*. U.K.: The MacMillan Press Ltd, The Open University.

Gros, G. M. (1991). A primeira história andaluza das ciências. In Araújo, C. (dir.), *Toledo, séculos XII-XIII, Muçulmanos, Cristãos e Judeus: o saber e a tolerância*. Lisboa: Terramar.

Jacquart, D. (1991). A escola dos tradutores. In Araújo, C. (dir.), *Toledo, séculos XII-XIII, Muçulmanos, Cristãos e Judeus: o saber e a tolerância*. Lisboa: Terramar.

Katz, V. J.(1998). *A History of Mathematics: an introduction*. U.S.A.: Addison-Wesley Educational Publishers.

Santos Lopes, M. (2002). *Dicionário do Islão*. Lisboa: Editorial Notícias.

Stierlin, H.(2002). *Islão de Bagdade a Córdova — A Arquitectura primitiva do século VII ao século XIII*. Colónia: Taschen.

Isabel Cristina Dias
Esc. Sec./3 José Cardoso Pires
Sto. António dos Cavaleiros

Entrevista ao Director do Observatório Astronómico de Lisboa

No dia 2 de Junho de 2006, Luís Reis (LR) e Manuel Lagido (ML) entrevistaram o Professor Rui Agostinho (RA) no Observatório Astronómico de Lisboa (OAL). Foi uma conversa longa e muito viva tendo por tema o tempo, a qual aqui se publica apenas parcelarmente.

LR: Um dos objectivos do OAL é a determinação da hora legal. Como é que isso funciona?

RA: A ligação mais profunda e mais clara do Tempo é com a Astronomia. Nos dias de hoje é também possível fazer a ligação com outras Ciências, devido aos satélites e ao GPS.

A necessidade de marcar as horas decorre da sucessão do dia e da noite. A rotação da Terra constituiu o padrão de tempo ideal para regular a actividade humana. Como é que se mede essa rotação? Não se pode usar o Sol, o diâmetro tem meio grau. Uma hora são 15 graus, 1 minuto de arco são 4 segundos de tempo. Meio grau, 30 minutos de arco, são 120 segundos, é muito tempo a atravessar o meridiano. Daí as medições de precisão serem feitas com estrelas.

A observação sistemática do céu à noite é uma prática muito antiga. Conhecem-se registos escritos desde a antiga Babilónia.

A Astronomia dá um enorme salto de qualidade com a transição do geocentrismo para o heliocentrismo e as leis de Kepler. Chegar à conclusão que as órbitas são elipses e não circunferências é um feito que exige grande precisão. Kepler não convence porque era o único de posse de instrumentos e tabelas que podiam fazer a previsão da posição dos planetas com precisão inferior ao minuto de arco.

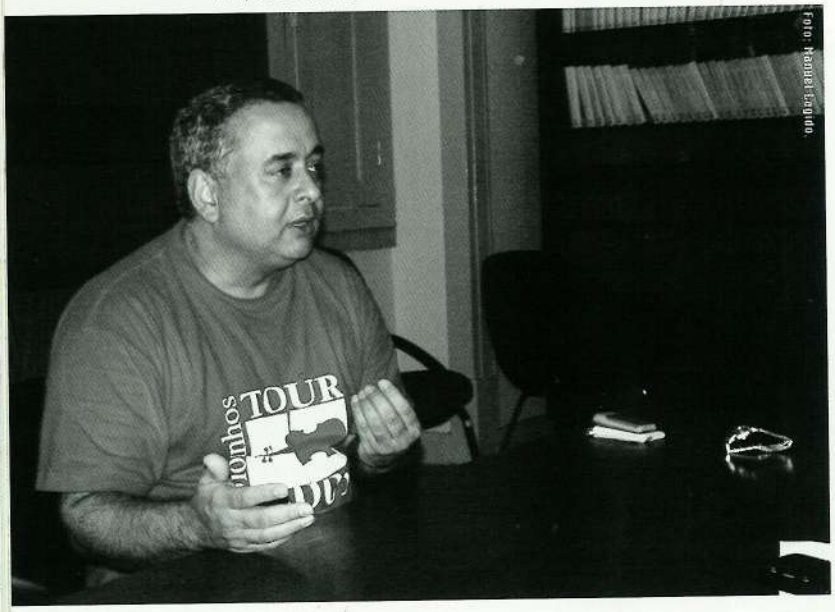
ML: Tycho Brahe fez excelentes observações.

RA: Kepler também e herdou as tabelas de Brahe, que tinha uns quadrantes murais enormes e atingia uma precisão ao minuto de arco. Brahe é um dos utilizadores do nónio de Pedro Nunes.

O grande salto seguinte na precisão das máquinas é no séc. XIX, quando aparecem estes telescópios. O Observatório era tão bom com os instrumentos, que publicava valores ao décimo do segundo de arco.

O Vice-Almirante Campos Rodrigues foi um dos directores. O seu trabalho é excepcional e foi reconhecido. A Academia de Paris deu-lhe o prémio Valz. Quem estava à

Professor Rui Agostinho.



frente da comissão deste prémio era o Poincaré. Este homem melhorou o mecanismo dos relógios mecânicos daqui, deixando espantados os construtores originais. Inventou a íris da máquina fotográfica (patenteada anos mais tarde por um francês, creio) porque tinha um telescópio para fazer observações de um eclipse solar e queria fazer sequências rápidas de fotografia; como o brilho vai variando durante o eclipse, ele criou esse mecanismo de várias lâminas que fecham e abrem... Inventou ainda um método para testar a verticalidade dos telescópios usando um banho de mercúrio. Também inventou um mecanismo para assegurar o instante exacto da passagem do pêndulo do relógio na vertical. Era um interruptor, uma obra de relojoaria minuciosa, que permitiu a esta gente publicar dados sobre o instante de passagem da estrela com a precisão do centésimo de segundo. A qualidade do trabalho daqui chegou ao ponto do Observatório de Berlim, antes de publicar o seu anuário, pedir a Lisboa para confirmar tudo.

Houve dois grandes trabalhos que notabilizaram esta casa. Em 1900-01, há a passagem do asteróide Eros, em oposição. Pretendia-se obter a distância da Terra ao Sol. O Observatório contribuiu para a construção do catálogo de estrelas fundamentais para medir com exactidão a posição de Eros. A conclusão do Observatório coordenador foi que estas observações eram as melhores: Lisboa foi o único Observatório sem dados rejeitados e com o peso máximo atribuído a todas as suas observações! Apesar do seu equipamento ultrapassado.

Em 1892 é a passagem de Marte, em oposição. Também estão nessa campanha e medem o diâmetro de Marte. Eu converti o resultado que eles publicaram (um ângulo) para quilómetros, utilizando a distância que hoje sabemos ser a Unidade Astronómica. Com a barra de erro do Observatório, ±101 km, obtive o valor actual do diâmetro de Marte, obtido pelas sondas espaciais! Tem-se descoberto cá imensa coisa...

LR: E quanto à importância actual desta casa e dos seus instrumentos? O relógio atómico...

RA: Deixe-me primeiro explicar um pouco a medição do Tempo. Ele é medido pela rotação da Terra. O Sol passa todos os dias pelo meridiano, marcando o meio-dia solar verdadeiro. Essa passagem corresponde a quase 361° da rotação do planeta, porque a Terra está muito próxima do Sol e durante este dia andou um bocadinho para a frente. Mas se eu medir a rotação em relação às estrelas, que estão muito longe, ao fim de 360° voltam a passar no meridiano.

ML: Por isso existe o tempo sideral.

RA: Exactamente. O dos 360° é o tempo sideral, medido pelos telescópios. Mas o que nos interessa para o dia-a-dia é o tempo solar. Portanto, os relógios fundamentais que aqui estão são relógios de tempo sideral, que depois é preciso corrigir com as observações de tempo solar, para dar à sociedade civil. Como é que isso é feito? À superfície da Terra temos coordenadas polares, latitude e longitude. As estrelas têm coordenadas equivalentes na esfera celeste, ascensão recta e declinação. A equação de ligação é a velocidade angular da Terra, é o Tempo, que me diz, em cada instante, onde é que o meridiano de Greenwich aponta para o céu. Para medir o ângulo de desfasamento era utilizado o telescópio da sala de lá. Eu sei exactamente a latitude e a longitude terrestre daquele telescópio. Todas as noites, desde que o tempo permita, vou observar 6 ou 7 estrelas para as quais conheço muito bem a ascensão recta e a declinação e vejo o momento em que elas passam pelo meridiano do lugar: isso vai-me dar o Tempo. Depois comparo o instante de passagem com a hora dada pelo meu relógio. As duas têm de estar sincronizadas.

Todas as noites se fazia isso para várias estrelas, por causa dos problemas de refracção da luz na atmosfera terrestre e dos tempos de reacção das pessoas. Este problema era tão importante que havia uma máquina (máquina de Kaiser) para calibrar o tempo de reacção dos astrónomos. Há histórias de matemáticos portugueses chumbarem no acesso à carreira de astrónomo no OAL por não serem pessoas de confiança. A quem não tivesse a capacidade de responder sempre com um atraso médio bastante regular, não lhe era dado o controle do telescópio para as mãos.

LR: Começou por dizer que a definição do tempo vem da Astronomia. Hoje isso parece desvirtuado com a definição de segundo.

RA: É uma época nova... O tempo que aqui defini é o tempo solar real, quando o Sol está no meu meridiano. O meio-dia de Lisboa é diferente do de Santarém, pois os meridianos são diferentes. No séc. XIX as trocas comerciais e as viagens são muito frequentes: temos a Revolução Industrial, a máquina a vapor, os barcos, os comboios. A questão do tempo começa a levantar problemas. Não podemos mudar de hora quando nos deslocamos de Lisboa para Santarém. Por isso, a primeira grande mudança na estrutura do tempo civil é a introdução do fuso horário.

A segunda grande mudança ocorre com a tecnologia: o aparecimento da electrónica e dos osciladores de quartzo. A

Vice-almirante Campos Rodrigues.

precisão de um oscilador deste tipo arrasa com a precisão de um relógio de pêndulo. Os relógios de pêndulo que aqui temos já eram muito bons, mas o desfasamento que o relógio fundamental tinha era de meio segundo por dia!

ML: Publicavam resultados ao centésimo de segundo com um relógio com essa diferença?

RA: Como todos os dias faziam a observação da verdadeira hora, sabiam o desfasamento deste relógio. Mas faziam mais: anotavam a pressão atmosférica, a temperatura e a humidade, porque o andamento do relógio é sensível a essas variáveis. E podiam corrigir com uma equação de regressão.

LR: Sem computadores...

RA: À unha, folhas e folhas de ajustes de mínimos quadrados! Na altura já havia algumas réguas de cálculo, isto era trigonometria esférica, senos e co-senos, tábuas logarítmicas, várias casas decimais. Para acelerar o processo chegaram ao ponto de criar métodos gráficos de solução das equações da trigonometria esférica. Esses métodos foram publicados, sei que o Observatório de Coimbra também utilizava.

Portanto, esta casa compra o primeiro relógio de quartzo. Nessa altura já havia emissoras europeias de Hora e o Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), em Paris, que detinha o padrão da Hora. Actualmente esse padrão está integrado no IERS[1] que mede a deformação da Terra usando sistemas de referência não só da Astronomia (as estrelas) mas também do sistema de satélites artificiais à volta da Terra.

No final dos anos 60, a União Astronómica Internacional, conjuntamente com o BIPM, decide fazer a definição de segundo dentro do Sistema Internacional de Unidades (SI)[2]. A partir daí já não tem nada a ver com a rotação da Terra, embora a tenha por base. A questão é que a rotação da Terra está a diminuir, devido à presença da Lua e do Sol. Ou seja, a duração do dia tem vindo a aumentar.

LR: Qual a ordem de grandeza?

RA: A desaceleração média da rotação da Terra é de cerca de 1,4 milissegundos por dia e por século, provocando um atraso em relação ao tempo atómico. Estudos modernos indicaram que a altura em que a duração do dia solar médio era de exactamente 86400 segundos SI (24 × 60 × 60) ocorreu por volta de 1820. Entretanto, o dia solar médio aumentou em cerca de 2,6 milissegundos (1,4 × 1,85 séculos — diferença de 185 anos desde 1820 até 2005). Ou seja, actualmente o dia solar médio dura 86400,0026 segundos. A diferença acumulada durante um ano é de quase um segundo.

De modo a manter a diferença acumulada entre o tempo civil e o tempo de rotação da Terra inferior a 0,9 segundos, acrescenta-se 1 segundo ao tempo atómico. Este segundo "bissexto" tanto pode ser positivo ou negativo, dependendo da rotação da Terra. Desde o primeiro segundo "bissexto", em 1972, já se intercalaram 23 segundos, todos positivos.

LR: Porque não usar a acumulação?

RA: Não foi essa a posição do IERS. Se 1 segundo hoje já começa a fazer diferença, daqui a algumas dezenas de anos maior diferença fará. Num segundo, quantas transacções entram nos bancos de todo o mundo?

LR: Se todos funcionarmos com o mesmo erro na Terra, as transacções comerciais não seriam um problema ...

RA: Pelo contrário, o problema é na vida civil. Suponha que tem de enviar um documento para um tribunal até às 24h00min00s de dia 31 de Dezembro. Envia um *scan* de casa para o tribunal, naquele segundo que foi acrescentado.

LR: E como o acrescentei? Só se o meu computador estiver alinhado...

RA: Exactamente. O que é que o nosso sistema fez no final de 2005? Chegou às 23h59min59s de 31 de Dezembro e em vez de passar para 24h00min00s, obrigando a propagar a mudança do mês e do ano, manteve-se a contar 59 durante mais 1 segundo. Só fez o update na transição de segundo, mudando para 1 de Janeiro de 2006. Agora imagine que o PC que está no tribunal a receber o seu documento, não fez isso.

LR: Voltamos à primeira questão: a hora legal é medida a partir dos relógios atómicos? Se há instituições civis a receber o tempo atómico, então temos que estar todos...

RA: Ora aí está. Umas estão e outras não. Há muita gente que acha que não é importante e que não sabe que está a penalizar os seus clientes. Ter a hora certa é fundamental. O substrato em que a nossa vida civil e social funcionam hoje está na Internet. A transacção electrónica. Já não é o papel.

ML: Então os computadores dos bancos têm uma ligação ao OAL?

RA: Têm. O que interessa é que os servidores centrais, onde as transacções entram, estejam sincronizados. Espero que actualmente não haja um Banco a cobrar juros a um cliente que efectuou um pagamento, só porque o servidor não tem a hora certa.

LR: Já reparou se as emissoras de rádio e de televisão estão a fornecer a hora exacta?

RA: O Observatório tem competência legal para lhes pedir que acertem a hora. Existe uma entidade, chamada Comissão Permanente da Hora (CPH), que dá pareceres ao Governo, que é quem tem competência para decidir qual é a Hora do país.

Há uma história interessante, também no século XX. A Hora passou a ser uma coisa tão importante para a sociedade que o fuso horário, por si só, já não chegava. Era preciso difundir a hora certa para toda a gente. A tecnologia era cara, os relógios eram caros, o relógio de pêndulo não era de confiança.

ML: Portanto, foi a rádio...

RA: Não, era o telégrafo. Emitia-se daqui o sinal das 13h tal como lá em baixo, no porto, por balão. Daqui telegrafava-se para uma série de pontos no país, chamavam-se estações semafóricas. E o Observatório tinha competência para fiscalizar e obrigar a acertar os relógios públicos.

ML: E os comboios?

RA: A história dos comboios é uma delícia. Eram eles que faziam as viagens rápidas. Em Portugal havia uma hora em cada linha-férrea (não é caso único, nos Estados Unidos e na França também, pelo que sei). Ao longo da linha as horas tinham que estar sincronizadas, mas entre linhas isso não era exigido. Para que as pessoas não fossem prejudicadas, no exterior de cada estação era obrigatório ter um relógio público adiantado de 5 minutos em relação à hora daquela linha! Assim dava tempo para não se perder o comboio.

ML: As emissoras de rádio têm a obrigatoriedade de ter a hora legal?

RA: Quando o Observatório pôs a Hora Legal na Internet (2000 ou 2001), comecei a notar que os desfasamentos nas emissoras de rádio foram diminuindo. Neste momento está muito bom. A televisão e a rádio públicas partilham mesmo uma infra-estrutura de relógios atómicos de rubídio, posso garantir que dão as horas correctas.

ML: Eles têm relógios desses?

RA: Precisam, por causa da Rádio Digital. É uma emissão tão avançada tecnologicamente que exige um sincronismo perfeito entre as várias estações ao longo do país. E a única maneira de o fazer é manter relógios de qualidade em vários pontos, sincronizados com o GPS.

O país despertou para o problema da Hora. A transição 2005-2006 foi grande, por um lado porque as firmas tiveram de começar a fazer a factura electrónica, que exige um sistema fidedigno de hora e data. Neste momento, há muitas firmas a contactar-nos, querendo acertar a hora. O erro de acerto é muito menor se for feito connosco, por estarmos todos na mesma rede interna. O applet na nossa página pergunta para aqui que horas são, a cada segundo. E há um *delay* de viagem de cá para lá.

ML: Microssegundos...

RA: Não, depende do tráfego que apanhar pelo caminho. Se estiver atrás de uma *firewall* que tem muito tráfego, imagino que o *delay* possa chegar ao segundo e tal. É diferente fazer o acerto com Portugal ou com outros países, tem que passar por servidores locais e cada um introduz atrasos. O protocolo que está por detrás disso chama-se NTP, Network Time Protocol. É um protocolo muito simples, aliás é atacável por piratas.

ML: Temos que ir à página do OAL?

RA: Sim, há dois endereços abertos ao mundo: `ntp02oal.ul.pt` e `ntp04oal.ul.pt`.

O público começa a preocupar-se. Surgem casos de pessoas zangadas porque lhes foi negado o acesso a um concurso que era para submeter via Internet, ou porque o fornecedor afiança uma data de envio anterior à real. Toda a gente sabe que no PC de casa se pode dizer que é 3 de Abril de 2006 e enviar um e-mail com essa data.

ML: As transacções na Bolsa...

RA: Exactamente, em que os câmbios variam de hora a hora e às vezes há grandes oscilações.

LR: A sociedade vive cada vez mais com a necessidade de precisão.

RA: Por causa disso a Hora tem de ser dada por uma entidade independente. O facto do OAL estar à frente da CPH foi para garantir duas coisas: a qualidade científica da Hora e a independência de interesses em relação à manutenção da Hora.

LR: Isto é comum aos Observatórios dos outros países?

RA: Há uma variedade de situações. Há países que têm estruturas como o nosso.

O mundo inteiro reconhece o IERS, a entidade mundial que diz, por exemplo, quando deve ser atrasada ou adiantada a Hora. Quanto aos relógios atómicos, eles estão espalhados pelo mundo inteiro. Há uma série de instituições que os têm e que contribuem para o valor médio da hora. Porque o próprio relógio atómico se pode atrasar ou adiantar. Claro, à escala diminuta. Há que fazer a média.

LR: O relógio atómico do OAL faz parte dessa rede?

RA: Ainda não, por uma razão: os relógios que estão ligados e a contribuir para essa média, são relógios que se deixam andar livremente. Neste momento, como temos só um, mantemo-lo sincronizado pela hora correcta.

Professor Rui Agostinho.

Foto: Manuel Lagido.

ML: Como se faz o acerto?

RA: Antigamente, décadas de 60 e 70, além da difusão via rádio, havia um relógio atómico, de Paris, que ia de instituição em instituição para aferir a diferença entre o relógio-padrão e os outros. Actualmente não é preciso, com a Internet, as telecomunicações e o GPS. Este relógio tem um receptor de GPS, recebe até 12 satélites em simultâneo (cada um tem 2 ou 3 relógios atómicos) e faz a média de todos esses sinais. Mas mesmo a recepção do GPS tem problemas. Um bom receptor de GPS para a hora, como o que temos, dá maior peso aos satélites que estão mais directamente por cima. A diferença de desvio máximo na frequência é da ordem de 10^{-11}. Quer dizer, se eu perdesse neste momento o sincronismo, no final de um ano inteiro ainda estava sincronizado na casa do milissegundo.

LR: Qual é o próximo método?

RA: O protocolo NTP já está obsoleto para as actuais necessidades. Vai ser substituído por uma versão com encriptação e segurança. E que vai permitir a sincronização de relógios fundamentais na casa do microssegundo. Portanto, aquilo que se está a fazer com o GPS vai ser possível fazer através da rede. Essa tecnologia vai aparecer nos próximos 5 a 10 anos.

Por outro lado, há nova tecnologia dos relógios atómicos de césio em fase experimental. Os novos relógios têm uma precisão 1000 vezes superior à dos actuais relógios de césio.

LR: E vamos abandonar a Astronomia no Tempo?

RA: Não, não vamos. A perda da rotação da Terra não é constante. A Terra não é um bloco sólido, é um bloco plástico, há alteração da sua forma, de modo que estes acertos têm de ser continuamente estudados. Isso envolverá sempre a Astronomia.

Notas

1 Serviço Internacional de Sistemas de Referência e Rotação da Terra - iniciou a sua actividade em 1 de Janeiro de 1988, substituindo o International Polar Motion Service e a secção de rotação da Terra do Bureau Internacional da Hora (BIH). As actividades do BIH sobre o tempo continuam no Bureau Internacional de Pesos e Medidas.

2 O segundo é a duração de 9192631770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

Luís Reis, Centro de Competência CRIE da UCP-ESB
Manuel Teles Lagido, ES/3 José Régio, Vila do Conde

Os portáteis na Escola

Como tinha sido anunciado decorreu a *Iniciativa Escolas, Professores e Computadores Portáteis*, da responsabilidade do CRIE — Ministério da Educação.

As escolas que concorreram a esta iniciativa tiveram que apresentar um projecto de trabalho e identificar nominalmente uma equipa de professores responsáveis por levar a cabo as actividades previstas no projecto. No edital dizia-se que seriam distribuídos catorze computadores para utilização de alunos e uma média de dez computadores para serem utilizados para trabalho dos professores, para as Escolas cujos projectos fossem aprovados.

Esta iniciativa teve uma grande adesão das escolas.

Candidataram-se 1181 escolas, e 1096 candidaturas viram o seu projecto aprovado, a que corresponde "um número total de 26047 computadores portáteis atribuídos em função do projecto apresentado, entre os que se destinam à utilização profissional de forma individualizada e os que se destinam ao uso em conjunto com os alunos, promovendo actividades práticas com TIC", como consta no site do CRIE. Cada uma destas escolas vai receber ainda um projector de vídeo e um ponto de acesso sem-fios (*wi-fi*).

O objectivo principal desta iniciativa prende-se, como disse o gestor do programa na entrevista publicada em E&M, com a questão recorrente das escolas: não é possível utilizar a sala dos computadores ... então vão os computadores à sala de aula!

Creio que a maior parte das pessoas estará de acordo com este princípio que parece responder aos problemas de muitos professores que não são da área das TIC e que querem utilizar os computadores nas suas aulas.

Mas uma boa ideia nem sempre é fácil de operacionalizar e neste caso os maiores problemas que os professores colocam são só de ordem essencialmente prática, o que faz prever resultados interessantes para o projecto.

Não são os alunos que se deslocam a uma sala fixa, mas sim os computadores que vão para as salas de aula normais.

Os problemas mais focados são do tipo: como se deslocam durante um intervalo 14 computadores, um projector de vídeo que acabou de ser utilizado, etc, de um andar para outro, às vezes de um pavilhão para outro? Qual a autonomia dos computadores? Se num dia estiver prevista a utilização dos computadores por vários professores, não há bateria que resista. Não há problema, responderão: ligam-se à corrente. E os professores perguntam: Onde? Ligam-se 14 computadores, mais o do professor, mais o projector de vídeo à única tomada de corrente existente na sala?, Com toda a parafernália de fios e extensões espalhados pelo chão da sala?

De facto tanto quanto tem chegado ao meu conhecimento os problemas que os professores colocam são *apenas* desta ordem. Tudo o resto, tal como prioridades ou normas de utilização, ficou definido previamente no regulamento que obrigatoriamente fazia parte da candidatura. Cada Escola vai ter que encontrar a melhor maneira de resolver as dificuldades práticas que naturalmente irão surgir.

Penso que uma das ideias interessantes desta iniciativa é a possível afectação dos computadores a professores para desenvolverem o seu trabalho, podendo levar o computador que lhes foi atribuído para casa, ou tendo prioridade de utilização, conforme o regulamento aprovado. É um modo de facilitar o trabalho ao mesmo tempo que responsabiliza o professor.

As escolas com projectos aprovados podem, se assim o entenderem, ter o apoio dos Centros de Competência.

Este projecto dos portáteis na Escola não é original. Já foi implementado em vários países e encontram-se muitas referências na Internet sobre projectos deste tipo.

Em Inglaterra, por exemplo, está bastante documentada uma iniciativa de atribuição de portáteis aos professores. Numa primeira fase os professores tiveram que adquirir os computadores tendo-lhes sido dados vários incentivos para isso, em termos de preços, impostos e seguros, mas nesta segunda fase do projecto, optaram por atribuir os computadores nominalmente aos professores a título de empréstimo, ficando sempre como propriedade da Escola, isto é, cessando as funções na Escola o professor terá que devolver o equipamento.

Vamos acompanhar com atenção o desenvolvimento desta iniciativa portuguesa e desejar bom êxito para os projectos das Escolas.

Navegando na Internet

olpc

One Laptop per Child em `http://laptop.org/`

À procura de projectos envolvendo portáteis encontrei este projecto que visa a construção de portáteis a um preço muito reduzido para serem distribuídos aos alunos das Escolas, principalmente nos países mais carenciados. Esta iniciativa foi comunicada em Janeiro de 2005 no Forum Mundial da Economia, Davos, Suíça, por Nicholas Negroponte. Os computadores que custarão apenas 100 dólares só poderão ser adquiridos por entidades governamentais que os distribuirão pelas Escolas e estão a ser desenvolvidos por uma organização sem fins lucrativos (*One laptop per child*) constituída por elementos do Media Laboratory do MIT.

O primeiro protótipo foi apresentado em Maio de 2006 e no início de Julho foi feita em las Vegas uma apresentação mais geral. Prevê-se que em Setembro sejam entregues os primeiros computadores.

No projecto piloto estão envolvidos países principalmente da América do Sul e da Ásia. Portugal encontra-se incluído no grande grupo de países que já manifestaram o seu interesse em participar neste projecto.

Kakuro

em: `http://www.kakuro.net/`

O Kakuro é um novo jogo, um pouco como uma espécie de mistura de Sudoku, com aquilo a que se poderia chamar *somas cruzadas*.

Existe em várias versões com diferentes níveis de dificuldade.

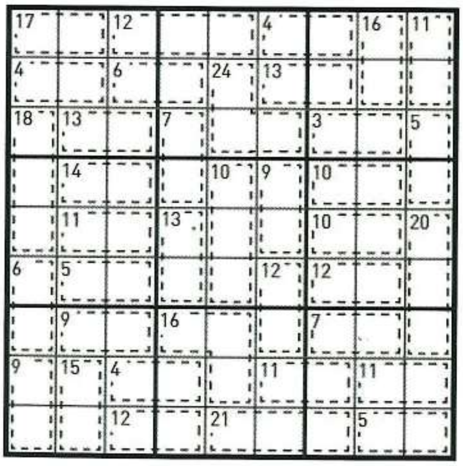
Se quiser tentar versões *mesmo* difíceis entre na página

`http://www.kakuropuzzle.com/impossible_cross_sums.html`

Na página do Kakuro aparece ainda um outro jogo chamado Addoku que é também uma forma de Sudoku e conhecido por Killer Sudoku.

Este jogo segue as regras do Sudoku mas à partida não há números já dados. Há uns blocos a tracejado onde aparece um número que é a soma de todos os números que são colocados dentro do bloco. Como no Sudoku, não pode haver repetições de números em cada linha e em cada coluna e o mesmo número não pode aparecer mais do que uma vez em cada bloco.

Este é um exemplo considerado fácil.



Calques3D

Em `http://www.professores.uff.br/hjbortol/calques3d/` encontra um *software* de geometria dinâmica no espaço, desenvolvido por Nicolas van Labeke da Universidade de Edinburgh.

Pode escolher a língua de instalação do programa. Existe a versão em português (do Brasil).

Indico este programa principalmente por ser de utilização livre e a filosofia de trabalho não diferir muito da de outros programas do género.

Algebra Lab

Em `http://www.algebralab.org/` está um *site* bastante completo onde pode encontrar, entre outros:

- Lições sobre vários tópicos
- Ajudas para auxiliar o estudo dos assuntos abordados
- Páginas com exercícios
- Actividades na área das Ciências que ilustram o uso da matemática nestas áreas
- Um glossário interactivo de termos das ciências e da Matemática, com definições e exemplos
- Artigos, problemas, gráficos

O PAI e o Tempo

Ana Emília Nogueira, Cristina Castro, Dora Esteves, Matilde Almeida, Rosário Monteiro, Sandra Faria, Henrique Varandas e Sofia Galvão

Ao longo deste ano lectivo de 2005/06 desenvolveu-se na Escola S/3 Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves, em Valadares, um projecto destinado aos alunos no 3° ciclo, dinamizado por algumas professoras de Física e de Matemática e contando com a participação do grupo de estágio de Matemática.

Este projecto, baptizado como Projecto Aprender a Investigar (PAI), procurou ser uma forma de proporcionar, aos cerca de sessenta alunos que a ele aderiram, experiências de aprendizagem diversificadas (utilização do computador, da calculadora, do vídeo, dos sensores CBL e CBR, dos instrumentos de medição e desenho, etc.), tendo como base actividades no âmbito destas duas disciplinas.

Entre todo o trabalho que foi desenvolvido, os alunos tiveram a oportunidade de contactar directamente com várias questões ligadas ao Tempo. Assim, tendo como ponto de partida a construção de um relógio de sol, o Tempo foi, a partir do final do 1° período e ao longo de todo o 2° período, o tema central do projecto.

Inicialmente foi pedido aos alunos que efectuassem pesquisas, nomeadamente recorrendo à Internet, com vista à obtenção de informação relativa aos relógios de sol. Esta investigação foi o ponto de partida para a realização, por parte dos alunos, de alguns trabalhos que permitiram perceber melhor a evolução dos instrumentos de medida de tempo, as tipologias de relógios de sol existentes e ainda os processos de construção desses mesmos relógios de sol.

Entretanto, os alunos tiveram a oportunidade de ver um filme acerca da medição do tempo ao longo dos tempos e também de participar num *workshop* de construção de um

relógio de sol equatorial, que decorreu no Visionarium, em Santa Maria da Feira.

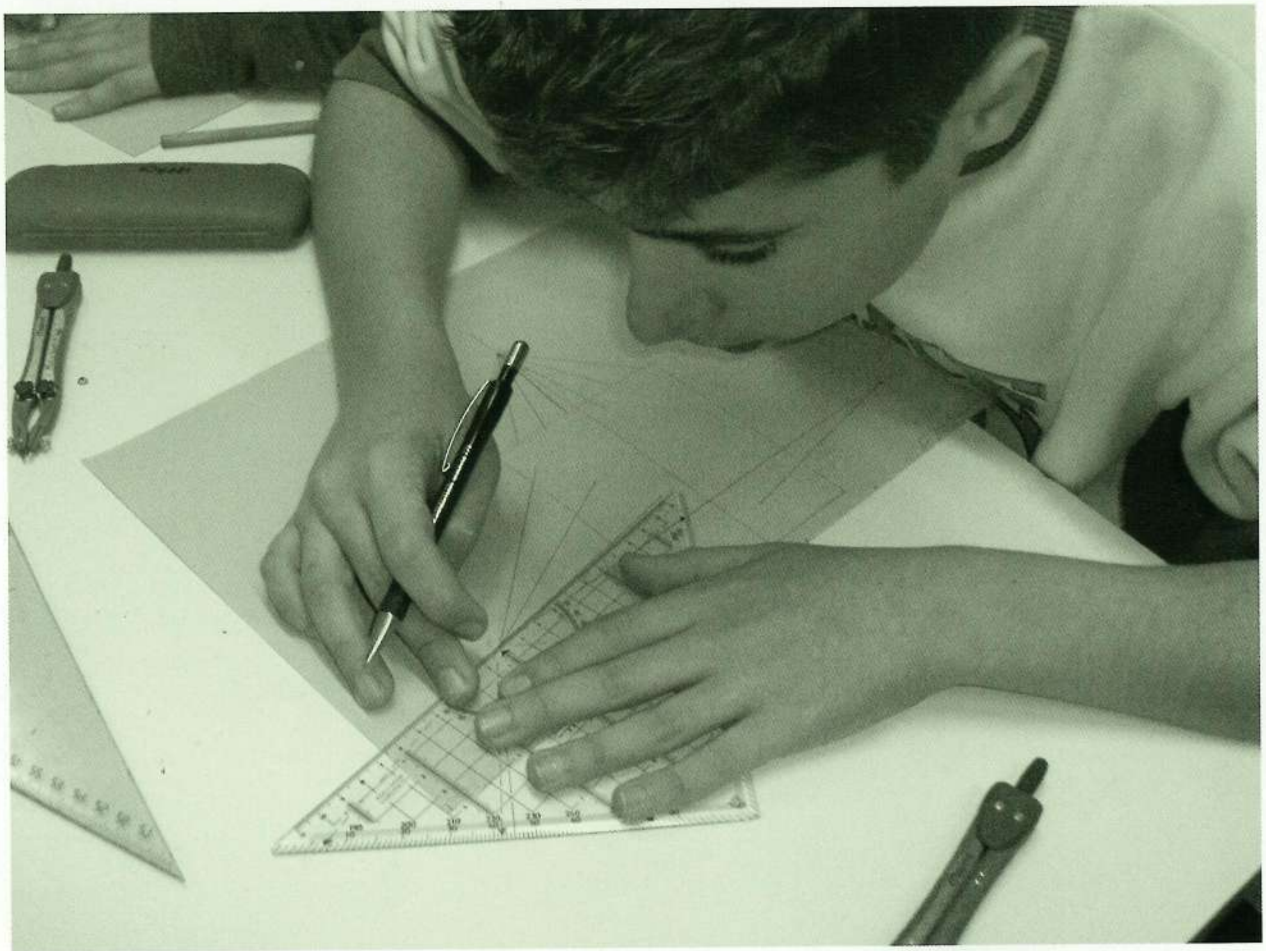
Foi então altura de cada aluno partir para a construção de um relógio de sol vertical, ao longo de algumas das sessões do projecto. Esta foi feita utilizando cartolina e instrumentos de medição e desenho, sendo apoiada por um dos guiões encontrados nas pesquisas, devidamente adaptado à latitude e longitude de nossa Escola.

Assim que os alunos se familiarizaram com a construção, foi-lhes lançado um novo desafio: um concurso de relógios de sol. Para participar, cada um deveria construir e decorar o seu relógio. Foi uma fase muito interessante na qual professores de outras áreas se disponibilizaram a colaborar, reforçando a interdisciplinaridade de todo o projecto.

Mas, depois de tanto trabalho, não poderíamos parar! Havia que mostrar a toda a comunidade o trabalho que estava a ser realizado! Surgiu então a ideia de organizar uma exposição, na qual se pudessem apresentar os relógios de sol dos alunos que participaram no concurso, divulgando o projecto aos restantes alunos, professores e encarregados de educação.

A exposição, realizada na Biblioteca da escola, contou com o apoio dos professores responsáveis pela mesma e, no sentido de se tornar mais abrangente, foi chamada de *Tempo dos Tempos*. Nela foram mostrados relógios de sol realizados nos mais variados materiais: tivemos relógios em papel, vidro, acrílico, pasta de modelar, azulejo e em materiais reciclados pelos alunos para o efeito. Além disso, expuseram-se os trabalhos resultantes da pesquisa inicial; diversas fotografias das actividades realizadas pelos alunos; uma apresentação multimédia ilustrando a evolução dos vários instrumentos de medida do tempo; frases, textos e poemas sobre o tempo e, por fim, um primeiro levantamento fotográfico de relógios de sol existentes no concelho de Gaia. Como foi o culminar de muitas semanas de trabalho, procurámos incluir um pouco de tudo o que tinha sido feito, para que se tornasse ainda mais atractiva.

A exposição esteve patente ao longo de toda a semana de 27 a 31 de Março, tendo sido endereçados convites aos restantes professores bem como aos encarregados de educação dos alunos envolvidos no projecto. Para quem nos visitasse tínhamos ainda panfletos informativos e até relógios de sol para oferecer!



Paralelamente à exposição, alargámos ainda mais a nossa acção, organizando em simultâneo um ciclo de palestras em torno desta temática. Foi uma oportunidade de poder contar com a participação de pessoas que sendo peritas na sua área, se disponibilizaram a vir à nossa Escola partilhar saberes e experiências.

Tivemos então a Dr.ª Carla Pereira, professora de Físico-Química, que no dia 27 de Março nos foi falar acerca de *Relógios de Sol*, suas características e funcionamento, apresentando ainda um levantamento de alguns exemplares muito antigos, espalhados por todo o país.

No dia 28 de Março contámos com a presença do Prof. Doutor Pereira Osório, cuja palestra, subordinada ao tema *Sistemas de Medida do Tempo: do Tempo Solar ao Tempo GPS*, foi deveras esclarecedora no que respeita aos tipos de sistemas de medida de tempo bem como à sua evolução.

A 29 de Março, o Arq.º Luís Filipe Marques Pinto, coordenador científico e autor das peças da exposição sobre relógios de sol, organizada pela Câmara Municipal do Porto, na Galeria do Palácio de Cristal, veio-nos falar acerca do *Funcionamento e Traçado dos Relógios de Sol*, apresentando maquetas e fotografias dos relógios por si construídos.

Finalmente, no dia 30, contámos com o Dr. Barbosa da Costa, para nos falar d'O *Tempo ao Ritmo do Outro Tempo*. Foi uma hora de muita interacção com todos os presentes, na qual se falou sobre tradições e costumes ligados ao tempo e seus instrumentos de medida.

Como escreveram os alunos no jornal da nossa escola: "Estas pessoas foram de uma simpatia sem fim, aceitando o convite para nos falar um pouquinho daquilo que eles tanto sabem." Acrescentando que: "a actividade desenvolvida, relacionada com a história e a construção de relógios de sol, foi uma novidade para os alunos do 7° C, 8° C, 8° D, 8° E, 8° F e 9° B, envolvidos neste projecto. Com estes trabalhos pudemos ampliar o nosso conhecimento sobre relógios de sol. Esta actividade foi cativante e o tema era muito interessante".

Em suma, este projecto permitiu que professores de diferentes áreas trabalhassem em conjunto e que alunos de várias turmas mostrassem sentido de responsabilidade, criatividade e empenho nas tarefas. Culminou ainda numa semana muito trabalhosa mas que encheu todos os participantes de muito orgulho e satisfação pela forma como se desenrolou. Além disso, mostrou que é possível fazer a Escola *mexer* e que, nesses momentos, todos ficam a ganhar!

Ana Emília Nogueira, Cristina Castro, Dora Esteves, Matilde Almeida, Rosário Monteiro, Sandra Faria, Henrique Varandas e Sofia Galvão (alunos da turma 8ºC). Escola Secundária com 3º Ciclo Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves

Relógios de Sol

O relógio equatorial e tipologias derivadas

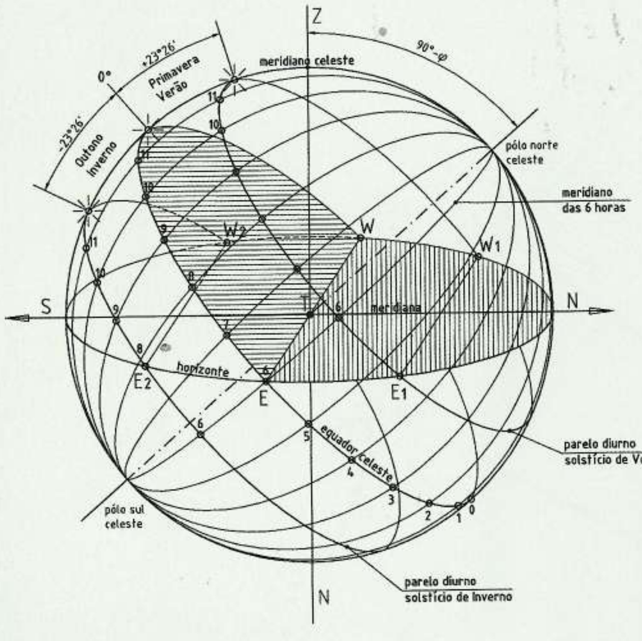
Luís Filipe Marques Pinto

A esfera celeste e o movimento aparente do Sol

A apreensão e a interpretação que o Homem faz do Universo são, naturalmente, consequência das suas capacidades e resultam do seu ponto de vista (a Terra).

Quando, à noite, contemplamos o espectáculo do céu repleto de estrelas, temos a sensação de estar no centro de uma esfera imensamente grande, em cuja superfície estão suspensos os astros. Esta superfície é designada por *esfera celeste*. Apesar de a Terra não se encontrar no centro do Universo e de os astros que contemplamos se encontrarem a distâncias muito variáveis do nosso planeta, a representação esquemática da *abóbada celeste* através de uma esfera, com a Terra no centro, simplifica, extraordinariamente, a localização e a representação dos astros no firmamento. Como a *esfera celeste* não tem dimensões definidas, a distância entre os pontos nela contidos é convertida em ângulos, com vértice no seu centro (local de observação).

Se fixarmos, através de uma fotografia, p. e., a imagem do céu estrelado, apenas um ano depois voltaremos a ter, exactamente, a mesma perspectiva do firmamento. No final de um ciclo de 24 horas, os astros reassumem, no firmamento, uma posição aproximada, mas não exactamente igual. Este facto resulta da conjugação dos movimentos de revolução da Terra, em torno de si mesma e em torno do Sol. A perspectiva mutável e cíclica do cosmos está na base do *sistema de coordenadas equatoriais horárias*, definido por um *eixo de referência* e por um *círculo primário* (figura 1). O *eixo de referência* é a projecção radial do *eixo polar* e o *círculo pri-*



T - terra
[90°-φ] - colatitude
N, S, E e W - pontos cardeais
Z e N - zénite e nadir
EW - percurso do sol, acima do horizonte, nos equinócios
E1W1 - percurso do sol no solstício de Verão
E2W2 - percurso do sol no solstício de Inverno

Figura 1. Percurso do Sol, relativamente ao equador celeste e relativamente ao horizonte.

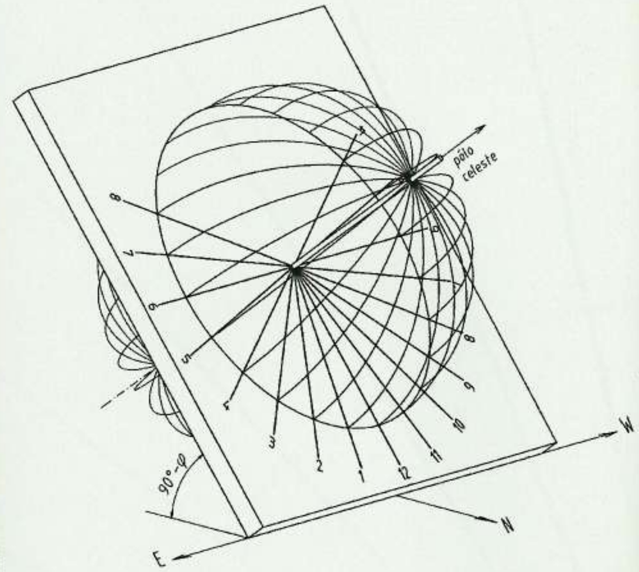


Figura 2. O relógio equatorial como réplica da esfera celeste.

mário é o *equador celeste* — projecção do *equador terrestre*. O *círculo de referência* do sistema designa-se por *meridiano celeste* do lugar e é o *meridiano horário* que passa pelo *zénite* do lugar. O *meridiano celeste* intersecta o *horizonte do lugar* nos pontos cardeais norte e sul, enquanto que o *equador celeste* intersecta o *horizonte do lugar* nos pontos cardeais nascente e poente.

A figura 1 ilustra o percurso do Sol relativamente ao *equador celeste* e ao *horizonte do lugar*. Podemos ver os *paralelos diurnos* que o Sol descreve na *esfera celeste* nos solstícios de Verão e de Inverno e a circunferência intermédia que coincide com o *equador celeste* e corresponde à trajectória do Sol nos equinócios da Primavera e do Outono.

Na construção da esmagadora maioria dos relógios, considera-se que o Sol, a uma determinada hora e nos diferentes dias do ano, se situa sempre no mesmo *meridiano celeste*[1] — acima do equador quando a *declinação* é positiva (na Primavera e no Verão) e abaixo do equador quando a *declinação* é negativa (no Outono e no Inverno).

Relógio solar equatorial

Por definição, os relógios solares medem o tempo em função do movimento do Sol. Embora exista apenas uma única tipologia de relógio de sol — a *esfera armilar* — que é, formalmente, uma representação da *esfera celeste*, todos os relógios de sol são réplicas mais ou menos abstractas da *esfera celeste*.

No relógio equatorial, o *eixo polar* é materializado pelo *estilete* e o *equador celeste* pelo *quadrante* (figura 2). As *linhas de hora* são as rectas de intersecção dos *meridianos horários* com o *equador* (plano do *quadrante*). Note-se que cada *meridiano horário* dá origem a duas horas, com o desfasamento rigoroso de meio-dia (o meridiano das 12 horas é, também, o das 24 horas, relativamente à superfície terrestre que está em sombra).

O equatorial é, provavelmente, o mais simples de todos os relógios de sol. Este tipo de relógio tem a particularidade de poder ser desenhado sem recurso a cálculos matemáticos

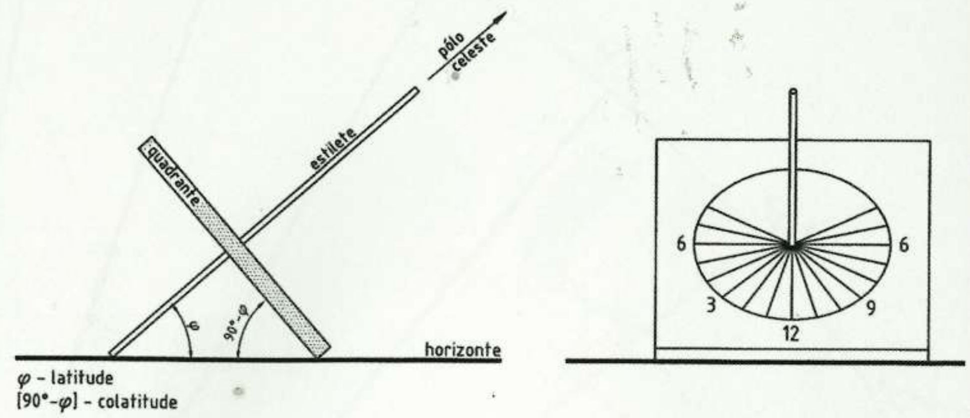


Figura 3. Vistas nascente e norte do relógio equatorial.

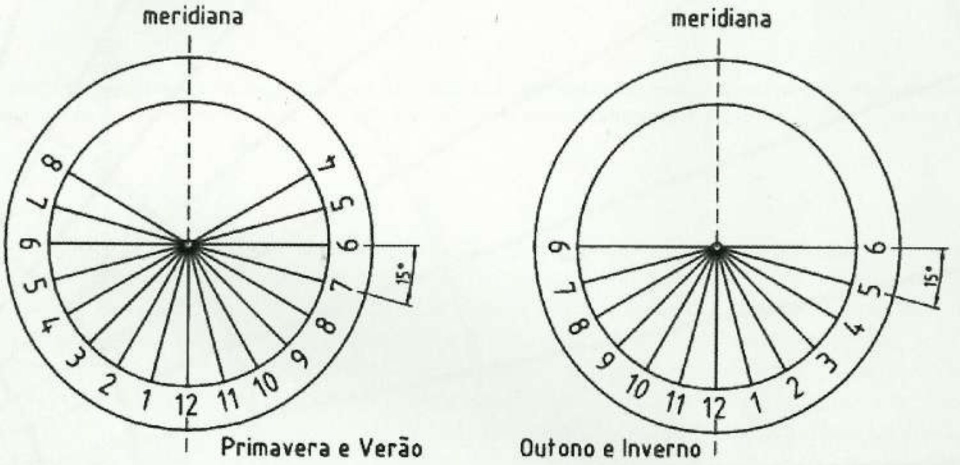


Figura 4. Vistas dos quadrantes superior e inferior do relógio equatorial.

ou traçados geométricos e, além disso, pode ser utilizado em qualquer latitude, desde que seja adequadamente instalado.

No relógio equatorial, o *estilete* é paralelo ao *eixo polar* (figura 3) e o *quadrante* é perpendicular, por conseguinte, paralelo ao *equador* — daí a designação de *relógio equatorial*.

Dado que o Sol, pressupostamente, se desloca na *esfera celeste*, em torno do *eixo polar*, a uma velocidade uniforme de 15° por hora (360°:24h=15°), as linhas de hora deverão ser espaçadas entre si de 15°, coincidindo a linha das 12h00 com a *meridiana*.

Dado que o *quadrante* é paralelo ao *equador* e o Sol se encontra acima do equador 6 meses do ano e abaixo do equador outros 6 meses, os raios solares incidirão na face superior do relógio apenas entre 20/21 de Março e 22/23 de Setembro. Se quisermos utilizar o relógio de sol durante todo o ano, teremos de duplicar os *quadrantes*.

No *quadrante* superior, para as latitudes de Portugal, deveremos inscrever 8 horas matutinas e 8 horas vespertinas (figura 4). Como o *quadrante* inferior se destina apenas aos meses de Outono e Inverno, altura em que o período nocturno é mais longo do que o diurno, bastará inscrever apenas 12 horas neste *quadrante*, das 6h00 às 18h00 (figura 4).

Tipologias derivadas do relógio de sol equatorial

Entendo que todos os relógios prismáticos ou cilíndricos, cujas *arestas* ou *geratrizes* sejam dispostas paralelamente ao *eixo polar*, podem ser encarados como variantes, mais ou menos complexas, do relógio equatorial.

Relógios prismáticos

Um prisma recto, cujas bases correspondam a *hexagramas*[2] pode ser utilizado como relógio de sol. Para funcionar, bastará assinalar as *linhas de hora* nas faces laterais e orientar a base superior para o *pólo celeste* (que, no hemisfério norte, se situa nas imediações da estrela polar).

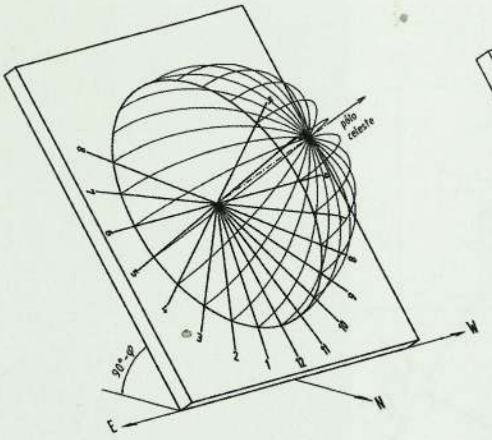


Figura 5. Determinação da direcção dos raios solares no [plano do] equador, a partir dos meridianos horários.

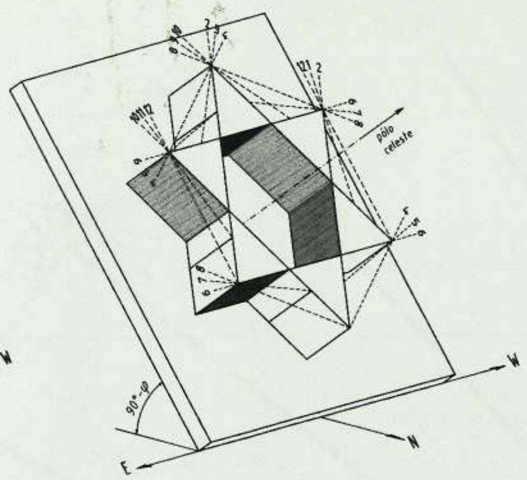


Figura 6. Determinação das linhas de hora, através de tangentes com direcção dos raios luminosos.

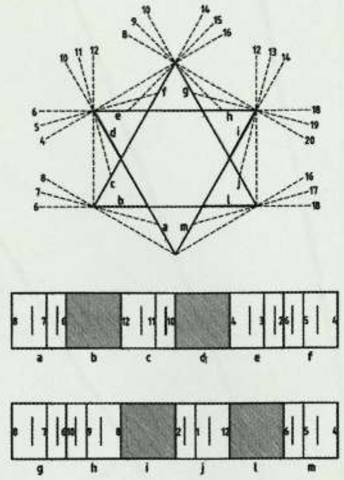


Figura 7. Determinação das linhas de hora e planificação das faces laterais do relógio.

Na figura 5, vê-se como podemos determinar, no plano do *equador*, a direcção dos raios solares às horas inteiras, a partir da intersecção dos *meridianos horários* com esse plano.

Neste tipo de relógio, não existe um único *gnómon*, como sucede na generalidade dos relógios de sol, verificando-se, durante o funcionamento, uma alternância de *gnómons*, que são as próprias arestas exteriores do sólido.

À medida que o Sol percorre a *esfera celeste*, a sombra auto-projectada do prisma incide, alternadamente, sobre as suas faces laterais (figura 6). Devido ao formato e proporções do *hexagrama*, cada face lateral do poliedro recebe a sombra de uma aresta vizinha durante, rigorosamente, duas horas. Quando a sombra projectada tiver varrido completamente uma face, outra mancha de sombra começará a formar-se em outra face, de forma que, enquanto o Sol estiver a brilhar no firmamento, haverá sempre uma face parcialmente ensombrada, cujo contorno assinalará a *hora solar*.

Estudemos a *escala de horas* a inscrever nas faces laterais do prisma, a partir do *plano equatorial* (bases do prisma) (figura 7).

Traçando as tangentes de 15° em 15° ao polígono estrelado, sabendo-se que a direcção das tangentes corresponde à dos raios solares de 60 em 60 minutos, determinamos as *linhas de hora* nas faces laterais do sólido. Para melhor compreensão, na zona inferior da figura 7, incluímos a planificação das faces laterais do prisma, com a respectiva *escala de horas*.

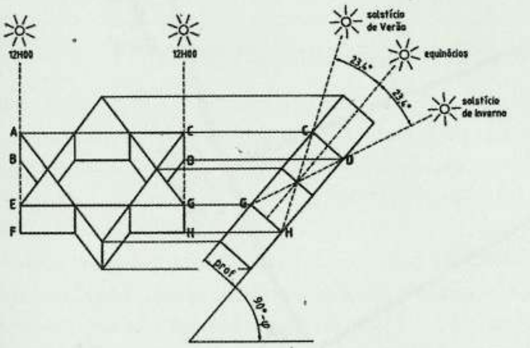


Figura 8. Determinação da profundidade mínima do prisma, a partir da vista lateral (poente).

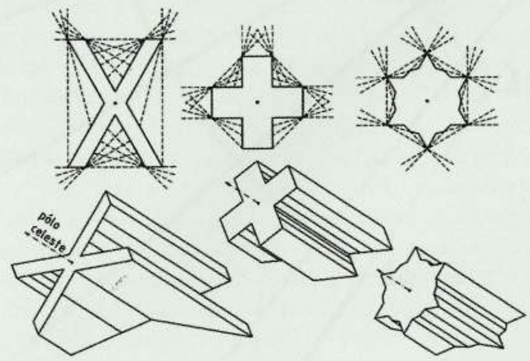


Figura 9.

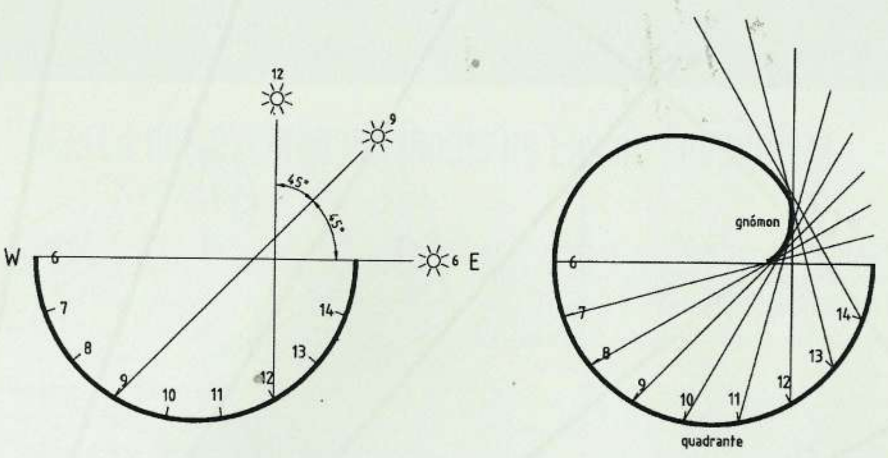


Figura 10. As tangentes ao gnómon são as rectas de intersecção dos meridianos horários e o equador. As linhas de hora são as rectas de intersecção dos meridianos horários e o quadrante.

Nas regiões polares, no período de Verão, os raios solares incidiriam, alternadamente, nas 12 faces laterais do prisma, durante um ciclo de 24 horas. No entanto, nas regiões temperadas, isso não sucede e, nas latitudes do território português, no dia mais longo do ano (solstício de Verão) dispomos de cerca de 15 horas de luz solar. Por essa razão, talvez se deva omitir as *linhas de hora* nocturnas, que seriam inscritas nas faces b, d, i e l (figura 7).

Se analisarmos a figura 7, perceberemos que a sombra auto-projectada do sólido percorrerá, sequencialmente, as seguintes faces, desde o nascer ao pôr-do-sol: f (das 4h00 às 6h00), a (6h00-8h00), h (8h00-10h00), c (10h00-12h00), j (12h00-14h00), e (14h00-16h00), m (16h00-18h00) e g (18h00-20h00).

Este tipo de relógio pode ser utilizado em qualquer *latitude*, desde que seja assente numa base com inclinação adequada e desde que seja orientado em função dos *pontos cardeais* (figura 6).

Ao meio-dia, a sombra projectada das arestas $[AB]$ e $[CD]$ incidirá nas arestas $[EF]$ e $[GH]$ (figura 8).

Atendendo à variação anual da *declinação solar* (de – 23°26' no solstício de Inverno a +23°26' no solstício de Verão), a profundidade mínima do prisma deverá ser determinada em conformidade com o desenho da figura 8. Se a profundidade do sólido for inferior, o relógio deixará de funcionar à medida que a *declinação solar* se aproximar dos limites máximo e mínimo.

Um número indeterminado de prismas pode estar na origem de outros tantos modelos de relógios de sol, cujos princípios de funcionamento são, essencialmente, os que acabam de ser explicados (figura 9).

Relógios cilíndricos

Os relógios cilíndricos têm o mesmo princípio de funcionamento dos prismáticos, (não fosse o cilindro um prisma com um número infinito de faces laterais ...). A *directriz* da superfície cilíndrica poderá ser uma linha curva qualquer, aberta ou fechada.

Nos relógios verticais orientados a nascente ou a poente, assim como nos relógios polares, as *linhas de hora* são paralelas entre si, embora se encontrem a distâncias variáveis.

Podemos autopropormo-nos o desafio de conceber um modelo cilíndrico em que, fazendo variar a curvatura das superfícies emissora (*gnómon*) e receptora (*quadrante*) da sombra, se logre obter um relógio em que as *linhas de hora* sejam equidistantes. Neste caso, a directriz terá de ser determinada matemática ou geometricamente.

Bernard Rouxel classifica de *epicicloidais* ou *hipocicloidais* estes relógios solares, devido à semelhança das equações das respectivas curvas[3].

Analisemos o traçado do relógio, geometricamente, a partir do *plano do equador* que, se o cilindro for recto, coincidirá com a base.

Se admitirmos uma superfície semicilíndrica como *quadrante* (figura 10), poderemos dividi-la em nove segmentos iguais, cada um correspondente a uma hora, para um trajecto do Sol de 135° (15° × 9h) na *esfera celeste*. Como a intersecção do plano equatorial com o meridiano das 6/18 horas é uma recta horizontal, começaremos por graduar as *linhas de hora* precisamente a partir das 6 horas (figura 10).

Em seguida, traçamos rectas com a inclinação correspondente à dos raios luminosos, a partir de cada *linha de hora*, e obtemos as tangentes a uma superfície cilíndrica de

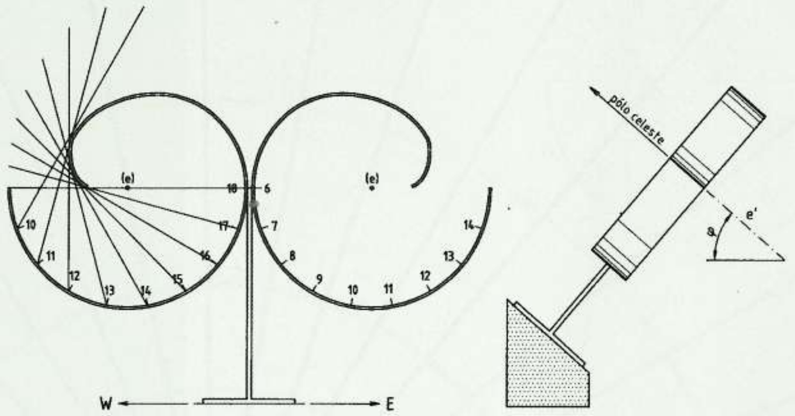


Figura 11. As duas abas do relógio. Uma virada a nascente e a outra a poente. Vista poente do relógio. O eixo da superfície deverá ser alinhado pelo eixo polar.

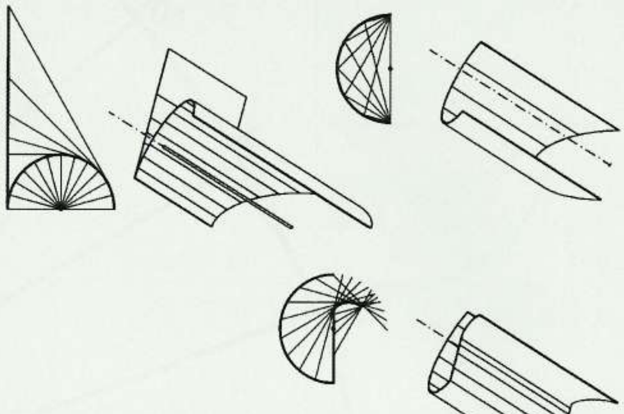


Figura 12. Os relógios cilíndricos podem assumir formas extraordinariamente variadas.

curvatura variável que funcionará como *gnómon* do relógio (figura 10).

Já desenhámos a aba do relógio exposta a nascente. Se pretendermos que o relógio registe igualmente as horas vespertinas, teremos de desenhar a aba virada a poente (figura 11).

Tal como sucede com os relógios prismáticos, as possibilidades de invenção de formas cilíndricas mais ou menos belas e ousadas são imensas, aparentemente inesgotáveis ... (figura 12).

Termino, propondo a seguinte reflexão: A *gnomónica* estará em regressão, como seria de esperar, ou, pelo contrário, estará em expansão?

Os relógios de sol deixaram, há muito tempo, de ser úteis, enquanto tal, ao homem contemporâneo, que dispõe de tecnologia cada vez mais sofisticada para medir o tempo que ele mesmo convenciona, divorciando-se dos ritmos da natureza. No entanto, assiste-se à disseminação, pelo mundo, de associações de estudo e divulgação do relógio de sol. Já não é tanto (ou apenas) o objecto, enquanto instrumento de medição do tempo, que nos interessa, mas sobretudo o objecto, enquanto ponto de confluência de saberes e de contemplação. Astronomia, trigonometria, geometria e design são algumas áreas de conhecimento que confluem para dar expressão à *gnomónica*.

Neste texto, centrei-me em três tipologias — *equatorial*, *prismáticos* e *cilíndricos*. A propósito dos relógios prismáticos e cilíndricos, procurei demonstrar que existe um leque infindável de formas possíveis por explorar. No entanto, estas duas tipologias nem sequer são referidas na maioria dos livros que abordam o tema, o que me leva a supor que o percurso que nos falta desvendar na *gnomónica* é, pelo menos, tão longo e deslumbrante quanto o trajecto que já foi percorrido pelo génio humano ao longo dos séculos...

Notas

1 No entanto, este pressuposto é falso, devido ao facto de o movimento aparente do Sol não ser uniforme. A irregularidade do movimento deve-se à conjugação de dois factos:

— a obliquidade da *eclíptica*: os paralelos celestes percorridos pelo Sol apresentam a inclinação de 23°26' relativamente ao equador, círculo onde o tempo, através dos meridianos, é medido uniformemente.

— a excentricidade da órbita terrestre: a terra desloca-se ao longo de uma elipse, varrendo áreas iguais em intervalos de tempo iguais e, tendo esses arcos diferentes comprimentos, não correspondem, naturalmente, a sectores iguais no equador.

2 A designação mais comum para o *hexagrama* é *Estrela de David* ou *estrela de seis pontas*.

3 Bernard Rouxel, *Cadran Solaires Epicycloïdaux ou hypocycloïdaux*, fascículo 5 do CADRAN-INFO, editado pela Commission des Cadrans Solaires de la SAF, Maio de 2002.

Luís Filipe Marques Pinto
Universidade Lusíada

Acerca dos exames nacionais no Ensino Secundário

Qualquer discussão ou reflexão sobre a existência de exames nacionais obrigatórios conduz, invariavelmente, ao aduzir de argumentos esgrimidos, com maior ou menor intensidade, a favor ou contra tal existência, sendo certo, porém, que tal situação, de obrigatoriedade dos exames, não induz *de per si*, melhores resultados ao nível das aprendizagens dos alunos. Numa sociedade como a portuguesa, com uma fraca cultura de avaliação em quase tudo o que faz, avaliação que sirva para melhorar o trabalho produzido e, portanto, nele integrada, o exame, qualquer que ele seja, encontra-se quase sempre associado mais à ideia de *salvo-conduto* para alguma coisa do que à ideia de aprendizagem, de aptidão ou de competência. Não interessa se se aprendeu a conduzir bem, interessa é *tirar a carta* e, portanto, ser aprovado no respectivo exame. Para a generalidade da opinião pública (bem ou mal informada...) uma escola sem exames é uma escola onde se trabalha pouco e onde impera a mediocridade. A sua não existência, de forma generalizada, pelo menos no final de todos os ciclos, é , para muitos, a raiz de todos os males do nosso sistema educativo.

Tenho assim, para mim, que na mente de alguns decisores políticos, a instituição de provas de avaliação externa, sejam sob a forma de exames ou de provas de aferição, tem muito a ver, antes de mais, com a ideia de credibilização social do sistema, ou, pelo menos, de credibilização junto de certa opinião pública.

Ao longo da minha carreira de professor do ensino secundário tive oportunidade de trabalhar com turmas em várias modalidades: sem qualquer tipo de exames, com exames de aferição (para efeitos de acesso ao ensino superior), com realização de provas específicas elaboradas pelas Universidades, e com exames nacionais com ponderação na classificação final do aluno.

Pessoalmente, da reflexão que faço sobre as minhas práticas, não creio que o facto dos alunos terem ou não estado sujeitos à realização de um exame, tenha tido influência na qualidade do trabalho com eles desenvolvido e, consequentemente, na qualidade das aprendizagens realizadas.

Admito contudo que, com a introdução, em 1993/94, das já defuntas provas globais nos 10° e 11° anos e do exame nacional obrigatório no 12° ano, se potenciou o trabalho conjunto dos professores ao nível do planeamento das actividades a desenvolver com as turmas de um mesmo ano de escolaridade e, com isso, se contribuiu também para o desenvolvimento profissional de cada um dos docentes. É, pelo menos, a experiência que tenho da Escola onde sempre tenho trabalhado e que se manteve, mesmo após terem sido extintas as referidas provas globais as quais, entretanto, mais efeito não tinham senão o de anteciparem o termo das actividades lectivas com os alunos.

Interrogo-me também se todo o processo de implementação de novos programas de matemática para o ensino secundário, iniciado a partir de 1997, e com eles a introdução de novas metodologias de trabalho e o apelo à mudança das práticas e à diversificação das situações de aprendizagem e dos instrumentos de avaliação, teria sido o mesmo se não existisse exame nacional obrigatório, onde o tipo e natureza de alguns dos itens começaram, também, a pressupor novos paradigmas de trabalho.

O que quero dizer é que a avaliação externa, se utilizada com instrumentos bem elaborados e equilibrados pode constituir-se como um importante factor de desenvolvimento curricular e de indução de determinadas práticas e metodologias.

No entanto, a avaliação externa consubstanciada num exame nacional que, no caso da Matemática, disciplina trienal, assume um peso na classificação final da disciplina que é superior ao da classificação interna relativa a qualquer um dos anos em que é leccionada, tem conduzido a um elevado número de casos de insucesso, de abandono e muitas vezes sendo o factor de não certificação de muitos estudantes.

Muitos dos alunos com que trabalhei quando o exame não era obrigatório e que concluíram a sua formação, são hoje cidadãos activos, profissionais reconhecidos nas suas áreas, pessoas satisfeitas consigo próprias. Alguns deles, se tivessem sido sujeitos a exames generalizados às diversas disciplinas, teriam eventualmente ficado pelo caminho...

Já durante o ano de 2006, com as alterações introduzidas ao Dec.-Lei 74/2004, os alunos dos cursos tecnológicos e dos cursos profissionais deixaram de estar obrigados à realização de provas de exame para conclusão dos seus cursos. Mas durante muitos anos, tantos quantos os de vigência dos planos curriculares definidos pelo Dec.-Lei 286/89, não foi assim. Para além disso, num sistema enviesado como o nosso, em que mais de 70% dos alunos frequentam, no ensino secundário, cursos não profissionalmente qualificantes o problema assume dimensões insustentáveis. (Penso frequentemente, a propósito disto, se, a pretexto da promoção da igualdade de oportunidades não se tem fomentado o insucesso e o abandono e, em consequência, o aprofundar de desigualdades.)

Outro problema que se coloca é o que tem a ver com o acesso ao ensino superior e com o duplo papel que os exames do ensino secundário assumem ao servirem também de provas para seriação dos alunos que pretendem candidatar-se à frequência de determinado curso do ensino superior. A este propósito sou levado a concordar com os argumentos expressos por Jaime Carvalho e Silva em recente artigo publicado no jornal a *Página da Educação*[1] onde defende, bem, que o facto de os exames do secundário servirem ao mesmo tempo de provas de ingresso no superior ajuda a promover a equidade no acesso.

Antes demais, porém, os exames têm que ser pensados em função da sua finalidade primeira: enquanto instrumentos de avaliação externa com relevância na classificação final dos alunos e, portanto, com consequências na sua certificação. Não devem por isso serem elaborados como se se tratassem de provas de seriação.

É importante também que nos actuais cursos científico-humanísticos se avalie, nos próximos tempos, os efeitos de uma estrutura curricular aberta, mas que, na prática, o é apenas do ponto de vista teórico uma vez que o funcionamento de disciplinas opcionais obedece a um número mínimo de alunos. Tal facto, conjugado com a obrigatoriedade de realização de exames às disciplinas bienais estruturantes e com o regime de precedências para a frequência de algumas disciplinas anuais de 12° ano pode conduzir a percursos formativos descaracterizados ou afastados daquilo que seriam os verdadeiros interesses vocacionais dos alunos.

Em conclusão:

É essencial, à entrada e durante o ensino secundário que os alunos disponham de uma correcta e eficaz orientação escolar e vocacional que promova percursos escolares gratificantes e de sucesso para os alunos e que as escolas, no quadro da sua autonomia organizacional possam ter capacidade de resposta aos desafios daí decorrentes.

Os exames, nos cursos científico-humanísticos, devem constituir-se apenas como mais um instrumento de avaliação dos alunos, neste caso de avaliação externa, com o peso que se encontra determinado nos normativos legais. A construção destes instrumentos deve ter isso sempre presente, implicando assim que as respectivas provas sejam devidamente equilibradas, permitindo, de entre as competências que são possíveis através delas avaliar, determinar, tanto quanto possível, as que o aluno domina e menos aquelas que não domina.

Também sempre presente deve estar a consciência de que o tipo e natureza dos itens das provas e respectivos critérios de classificação, são, quer se queira quer não, factor determinante do desenvolvimento e da gestão curriculares, direccionando, muitas vezes, as práticas lectivas. Por isso, as provas devem emanar, de forma clara e sem ambiguidades, dos programas das respectivas disciplinas, seja, obviamente, ao nível dos conteúdos, seja ao nível das correspondentes indicações metodológicas.

Qualquer que seja o olhar sério sobre os resultados dos alunos obtidos nas diversas provas de exame nacionais deve pois ter sempre presente que para esses resultados não contribuem apenas o trabalho realizado pelos alunos e pelos professores isoladamente considerados.

Nota

1 Silva, J. Carvalho e, (2006). Do secundário ao superior: a equidade. a Página da Educação, XV(159, Agosto/Setembro), 21.

Joaquim Félix
Escola Secundária Gabriel Pereira

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Materiais para a aula de Matemática

Os materiais apresentados destinam-se a alunos do ensino secundário. Trata-se de uma tarefa de modelação matemática que procura conhecer melhor como é a duração do dia, entendida enquanto o intervalo de tempo entre o momento em que o Sol nasce e o que em Sol se põe. Apesar de se tratar de um fenómeno familiar, que os alunos têm facilidade em compreender, algumas das questões ilustram aspectos muitas vezes desconhecidos da maior parte das pessoas.

Para a realização desta tarefa os alunos terão de obter dados sobre o horário do nascer e do pôr do Sol, para o que se recomenda a consulta do *site* `http://br.weather.com`, onde se encontram indicações completas para diversos locais do planeta. Uma parte do trabalho, em especial, a recolha dos dados, poderá ser feita autonomamente fora da sala de aula, embora seja conveniente discutir com os alunos questões como a quantidade de dados a usar e critérios para a sua selecção.

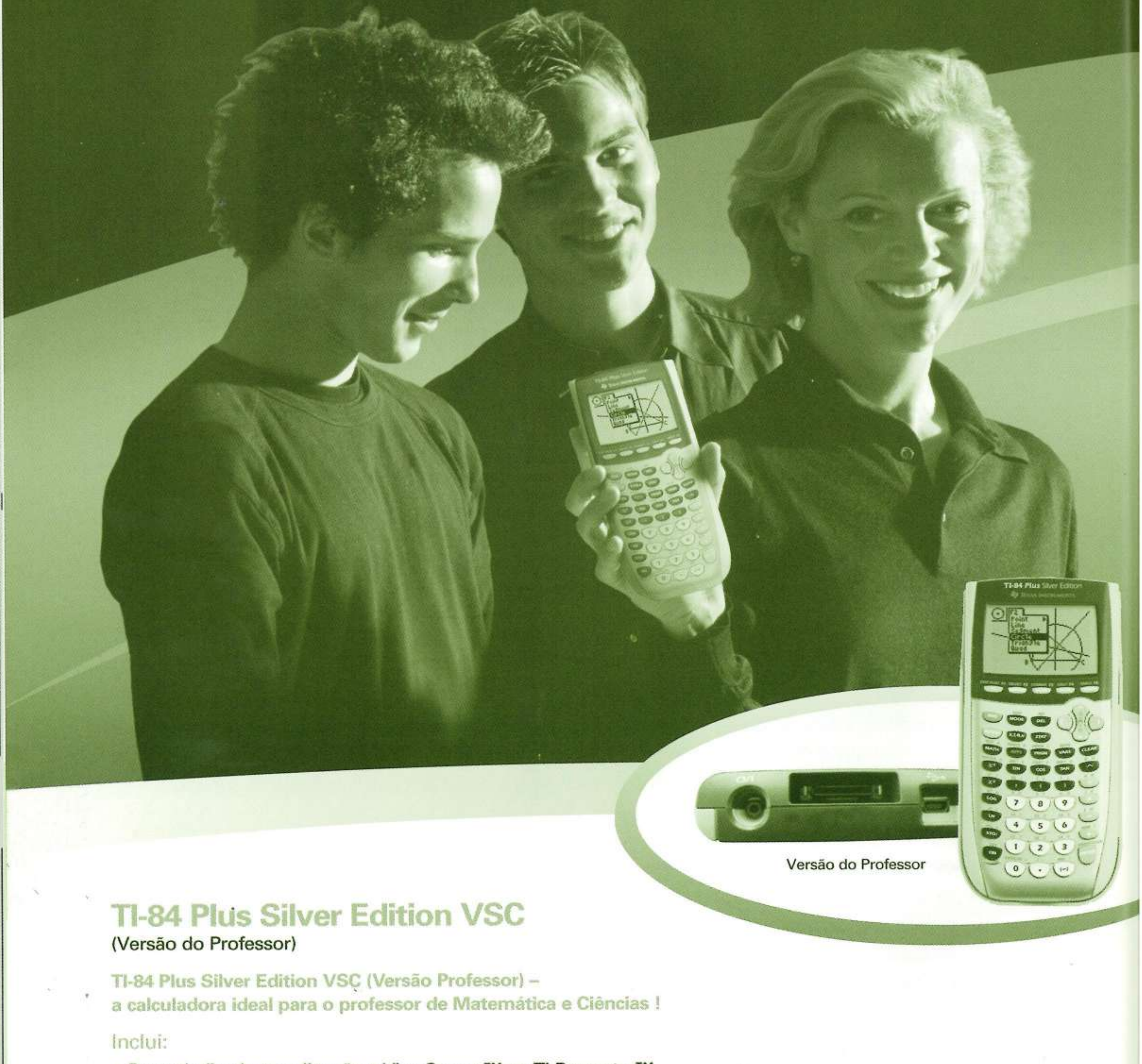
É fundamental o recurso à calculadora gráfica ou ao computador (com EXCEL, por exemplo) para o tratamento dos dados e para a procura e definição de modelos adequados. Pela natureza do trabalho a desenvolver, convém que a tarefa seja realizada em grupo. Além disso, diferentes grupos poderão ter opções distintas nas escolhas dos locais a estudar, o que permite enriquecer a discussão final do ponto de vista matemático e também um conhecimento mais fundamentado da variação do fenómeno da duração do dia em locais distintos da Terra.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Quanto tempo dura o dia?

Todos sabemos que o Sol nasce e se põe todos os dias. Também sabemos que o horário a que ele nasce e se põe vai variando ao longo do ano, com as diferentes estações e, consequentemente, vai variando também a quantidade de tempo diário em que dispomos de luz solar. Tempos houve em que o amanhecer e o anoitecer determinavam o ritmo da vida das pessoas mas actualmente, em especial a partir do acesso generalizado à electricidade, é possível prolongar a maior parte das actividades humanas para além do desaparecimento da luz do Sol. No entanto, conhecer os horários do Sol continua a ser muito importante em diversos domínios. É ao estudo das variações associadas à duração do dia que nos vamos dedicar.

1. Sabes a que horas nasceu hoje o Sol? E haverá outro dia do ano em que o Sol nasça à mesma hora? Para ficares a conhecer melhor o horário do nascimento do Sol no local onde vives e ao longo do ano, organiza um estudo matemático com base em dados reais. Para tal:
   a. Recolhe dados suficientes sobre as horas exactas do nascer do Sol e regista-os na tua calculadora gráfica ou computador (por exemplo, consulta o site `http://br.weather.com` e escolhe a cidade portuguesa mais próxima do lugar onde vives).
   b. Organiza os dados e escreve-os no sistema decimal, justificando a pertinência desta transformação.
   c. Visualiza a representação gráfica dos pontos correspondentes aos dados e discute-a. É como esperavas? Algo te surpreende?
   d. Procura encontrar um modelo matemático adequado para traduzir o horário do nascer do Sol, justificando a razão que te leva a optar pelo tipo de função escolhida.
2. Talvez saibas melhor a que horas se põe o Sol ... De qualquer modo, realiza um estudo semelhante ao do nascer do Sol para ficares a conhecer com rigor o horário do pôr do Sol no local onde vives e ao longo do ano. Segue as fases indicadas na questão 1.
3. Vamos agora estudar a duração do dia ao longo do ano, entendendo-a como o tempo que medeia entre o momento em que o Sol nasce e aquele em que o Sol se põe.
   a. Na realidade, o tempo de claridade diário é maior do que o que acima definimos como duração do dia. Porquê?
   b. Discute de que forma podes utilizar os modelos encontrados em 1 e em 2 para construir um modelo da duração do dia e testa a tua ideia na calculadora ou computador.
   c. A partir do modelo que encontraste, analisa a variação do dia ao longo do ano. Como evolui? Qual é a sua amplitude? O que significa?
   d. Sabes com certeza qual é o maior dia do ano, isto é, aquele em que existe mais tempo de luz solar. Coincide com o do teu modelo? Quantas horas de luz solar tem?
   e. É do conhecimento geral que o dia mais curto do ano é 22 de Dezembro e que, a partir daí, os dias começam a aumentar. A maior parte das pessoas pensa que os dias aumentam porque o Sol nasce mais cedo e põe-se mais tarde. Será verdade?
4. Escolhe um outro lugar da Terra, com coordenadas geográficas bastante diferentes de Portugal (pode ser Cancún, onde eventualmente gostarás de ir, ou a terra do Pai Natal, onde se fala do Sol da meia-noite ...) e organiza um estudo semelhante aos anteriores que te permita fazer comparações com a tua região e, no final, discutir com a turma o efeito da latitude e longitude na duração do dia.



Versão do Professor

TI-SmartView™

O software TI-SmartView™ é o emulador da TI-84 Plus Silver Edition para o seu computador, fácil de utilizar, para motivar a sala de aula a explorar os conceitos de matemática e ciências. Baseado na funcionalidade da família de calculadoras TI-84 Plus (compatível com a família TI-83 Plus), o TI-SmartView™ funciona como complemento da calculadora, na sala de aula, no laboratório e em casa.

Oferta "TI – Soluções com um Sorriso!"

Se é professor e lecciona com a sua TI-84 Plus Silver Edition (ou TI-83 Plus Silver Edition) versão professor, receba gratuitamente o software **TI-SmartView™**, o emulador da TI-84 Plus Silver Edition para o seu computador.

Para isso, partilhe connosco uma situação real e divertida com a sua calculadora na sala de aula, e enviar-lhe-emos o software **TI-SmartView™** para que possa explorar todas as potencialidades da TI-84 Plus Silver Edition, agora também no seu computador.

Destaque ou fotocopie o cupão abaixo, junte a sua história e envie-nos por **Fax** (21 088 21 22), **E-mail** (ti.smartview@gmail.com) ou **Correio** (Remessa Livre 52300, EC Campo Grande, 1721-962 Lisboa). Enviaremos gratuitamente o software **TI-SmartView™** a todos os participantes, e as experiências mais divertidas serão ainda publicadas no nosso website – **education.ti.com/portugal**.

Principais funcionalidades:

- Visualização simultânea de representações gráficas, tabelas e equações.
- Capturas de ecran com o pressionar de uma tecla, que podem ser utilizadas em software como o Microsoft® Word ou PowerPoint®.
- Historial de Teclas – À medida que as teclas são premidas, imagens das mesmas e a completa sequência podem ser projectadas para toda a sala de aula.

Requisitos do sistema: Microsoft Windows® XP, 2000, ME ou 98, Mac® OS 10.2 ou mais recente, drive CD ROM e mínimo 10MB livres no disco rígido.

OS MEUS DADOS:

Nome:

Morada:

Localidade: C. Postal:

Telef./Telem.: E-mail:

Professor de: ☐ Matemática ☐ Física/Química ☐ Biologia Nível: ☐ Básico ☐ Secundário ☐ Universitário

Escola: Localidade:

A minha calculadora é: Nº Série: Comprada em (mês/ano):

Oferta válida apenas para professores que possuam uma calculadora TI-83 Plus Silver Edition VSC ou TI-84 Plus Silver Edition VSC.
Oferta limitada ao stock disponível para esta promoção. Para mais informações consulte education.ti.com/portugal.
A Texas Instruments reserva-se o direito de alterar ou terminar esta promoção em qualquer altura, sem aviso prévio.

O artigo seleccionado para este número é de Yuri Grabovsky. O autor mostra como as fracções continuadas explicam os sistemas de calendário. A publicação desta tradução foi autorizada pelo autor. No seu site encontram-se as versões originais em html e pdf: `http://www.math.temple.edu/~yury/calendar/`.

Calendários modernos e fracções continuadas

Yury Grabovsky
Departamento de Matemática, Temple University
`yury@temple.edu`

1. História muito breve

Actualmente existem muitos calendários em uso: hebreu, chinês, hindu, etíope, etc.. Estes diversos sistemas parecem completamente artificiais, puro produto da escolha arbitrária do homem, como a linguagem. Contudo, na base de todos os calendários está a observação do movimento periódico do Sol e da Lua através dos céus. Eis os números. Um ano é $365,24219878$ dias e um mês lunar dura $29,530589$ dias. O quociente destes dois números é $12,368267$, igual ao número de lunações de um ano. Assim, percebe-se que o mês lunar dure entre 29 e 30 dias e que existam cerca de 12 meses lunares num ano. O mais antigo calendário babilónico era lunar, com 12 meses de 29 e 30 dias alternadamente, em acordo com estes números. Note-se que num tal calendário lunar o ano contém apenas 354 dias, uma subestimativa grosseira. Porém, por volta do quinto milénio a.C., pelo menos, este calendário foi substituído por um calendário egípcio de 12 meses, cada um com 30 dias.

Neste calendário, o ano possuía somente 360 dias e a discrepância foi reconhecida sem demora. Para o ajustar foram adicionados 5 dias, os epagómenos, no final do ano de 360 dias. Este calendário esteve em vigor durante mais de 3000 anos de Faraós, até 238 a.C.. O notável Decreto de Canopo, de Ptolomeu III, introduziu um sexto dia epagómeno de quatro em quatro anos. Denomina-se calendário de Alexandria e sobrevive nos dias de hoje nos calendários das igrejas Copta e Etíope.

O nosso calendário descende directamente do antigo calendário romano. Até 46 a.C. os romanos usavam o calendário de 365 dias. Durante a campanha no Egipto, Júlio César ficou a conhecer o calendário de Alexandria, com um ano bissexto por cada ciclo de quatro anos, muito mais rigoroso do que o calendário romano em vigor, de 365 dias. César trouxe consigo de Alexandria o astrónomo Sosígenes, em cujos conselhos baseou a reforma do calendário, criando o calendário juliano. A duração média do ano neste calendário é de $365,25$ dias, que é muito próxima do número mais exacto de $365,24219878$. O calendário juliano era tão bom que acumulava apenas um erro de 1 dia em cerca de 100 anos. Mesmo assim, durante o milénio seguinte a discrepância foi reconhecida e deram-se sugestões para a corrigir. Finalmente, em 1582, o Papa Gregório XIII reuniu uma comissão para planear um novo e mais rigoroso sistema de calendário. O principal autor deste novo sistema foi o astrónomo napolitano Aloysius Lilius. Seguindo as recomendações desta comissão, o Papa Gregório XIII decretou que o dia seguinte a 4 de Outubro de 1582 fosse 15 de Outubro, que os anos terminados em "00" fossem anos comuns em vez de bissextos — excepto os divisíveis por 400 — e que o Ano Novo começasse em 1 de Janeiro. O mundo não católico entendeu o decreto do calendário como uma usurpação católica. Foram necessários quase 200 anos para se operar a mudança. A Grã-Bretanha e as suas colónias efectuaram a alteração em 1752, seguindo-se a 2 de Setembro o dia 14 de Setembro e o dia de Ano Novo transitou de 25 de Março para 1 de Janeiro.

Se o seu computador possuir um programa de calendário que apresente os calendários de 1582 e 1752, poderá verificar-lhe a fé religiosa. Por exemplo, no meu sistema Linux os resultados são

```
    October 1582              September 1752
Su Mo Tu We Th Fr Sa      Su Mo Tu We Th Fr Sa
    1  2  3  4  5  6             1  2 14 15 16
 7  8  9 10 11 12 13      17 18 19 20 21 22 23
14 15 16 17 18 19 20      24 25 26 27 28 29 30
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31
```

tornando o meu computador protestante!

O ano 2000 é um dos raros anos bissextos que terminam em "00". Isso só voltará a suceder 400 anos depois. O calendário gregoriano tanto é rigoroso (erro de 1 dia em cerca de 3300 anos) como cómodo. Será arte alcançar um tal esquema ou existe ciência por detrás? As fracções continuadas fornecem precisamente essa ciência.

2. Fracções continuadas

A história das fracções continuadas remonta ao algoritmo de Euclides. Recordemo-lo. Suponhamos que queríamos determinar o máximo divisor comum dos números 75 e 33.

$$75 = 2\cdot 33 + 9 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{33}$$

$$33 = 3\cdot 9 + 6 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{3\cdot 9 + 6} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{9}}$$

$$9 = 1\cdot 6 + 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{1\cdot 6 + 3}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{6}}}$$

$$6 = 2\cdot 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{2\cdot 3}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

O último resto não nulo, no nosso caso 3, é o máximo divisor comum de 75 e 33. Contudo, não existem provas de que os gregos conhecessem a ligação entre as colunas acima, da esquerda e da direita. A primeira fracção continuada foi usada em 1572 por Bombelli para aproximar $\sqrt{13}$. A primeira fracção continuada infinita surge em 1659 na obra de Lord Brouncker, para expandir $4/\pi$. Foi o desenvolvimento sistemático da teoria por Euler, iniciado em 1737, que mostrou o valor do conceito tanto para a teoria de números como para a análise. Seguiu-se uma torrente de resultados. Nos séculos XVIII e XIX todos os que eram alguém na matemática deram o seu contributo. Se o número for racional, a fracção continuada termina, como em $75/33$. Se o número for irracional a fracção continuada continua infinitamente. Por exemplo, para o número irracional $\sqrt{2}$ podemos executar o algoritmo de Euclides, no fundo como se procurássemos o máximo divisor comum de $\sqrt{2}$ e 1. O algoritmo nunca irá terminar, dado que os números são incomensuráveis.

$$\sqrt{2} = 1 + 0.41421356\ldots = 1 + \frac{1}{2.41421356\ldots} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + 0.41421356\ldots} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}} = \ldots$$

concluindo

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

A beleza estética das fracções continuadas pode até derivar para a justificação do significado de alguns números da álgebra ou geometria. A expansão

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

poderia sugerir que o número $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ tem algum significado. De facto, este número não é mais nem menos do que a *razão áurea*.

Se terminarmos a fracção continuada infinita do número irracional α no passo n, iremos obter uma aproximação racional α_n de α. Ao número racional α_n chama-se o enésimo convergente de α. Por exemplo, os primeiros quatro convergentes dos números $\sqrt{2}$ e π são

$$\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356\ldots \qquad \pi = 3.141592654\ldots$$

$$\alpha_0 = 1 \qquad \pi_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad \pi_2 = \frac{333}{106} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$$

$$\alpha_3 = \frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \qquad \pi_3 = \frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$\alpha_4 = \frac{41}{29} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad \pi_4 = \frac{103993}{33102} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

O nome convergente provém do facto destes convergirem efectivamente para o número. Por exemplo,

$$\alpha - \alpha_4 \approx 4.2 \times 10^{-4} \qquad \pi - \pi_4 \approx 5.8 \times 10^{-10}$$

No gráfico relativo a $\sqrt{2}$, verifica-se que os convergentes se situam alternadamente acima e abaixo do valor exacto de $\sqrt{2}$ (ver gráfico 1).

No gráfico relativo a π, observa-se o mesmo padrão de aproximação (ver gráfico 2). Com efeito, isto é válido para qualquer número.

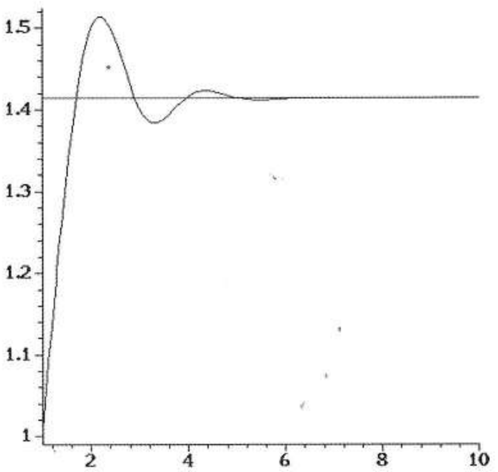


Gráfico 1.

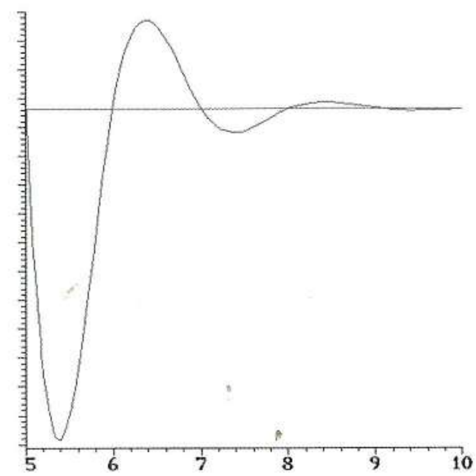


Gráfico 2.

A rapidez de convergência das fracções continuadas para o número que representam varia de número para número (mas é sempre muitíssimo grande). Eis uma comparação entre os erros de convergência para $\sqrt{2}$ (verde) e π. (Ver gráfico 3.)

As expansões em fracções continuadas têm muitas propriedades notáveis. Estamos interessados principalmente no seu poder de aproximação, pertinente para planear um bom sistema de calendário. Sucede que os convergentes α_n para o número irracional α apresentam propriedades superiores de aproximação. De seguida define-se rigorosamente o que se entende por uma boa aproximação.

Definição 1. *A fracção p/q diz-se uma boa aproximação de α se para qualquer $q' < q$ e qualquer inteiro p' se tem*

$$|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|.$$

As boas aproximações de $\sqrt{2}$ ocorrem quando $q = 2, 5, 12$ e 29. A boa aproximação seguinte ocorre quando $q = 70$. (Ver gráfico 4.)

As boas aproximações de π ocorrem quando $q = 7$, 106 e 113. A boa aproximação seguinte não ocorre antes de $q = 33102$ (ver gráfico 5).

Note-se que os números q são precisamente os denominadores dos convergentes para $\sqrt{2}$ e π, respectivamente. Não se trata de um acaso e verifica-se de modo geral para todos os convergentes e para todos os números α. Afirme-mo-lo rigorosamente e sem ambiguidades sob a forma de um teorema.

Teorema. *Todo o convergente é uma boa aproximação (no sentido da definição 1) de α e, inversamente, toda a boa aproximação de α é um dos números α_n, para algum $n \geq 1$. Com efeito, q_n é o menor inteiro $q > q_{n-1}$ tal que*

$$|q\alpha - p| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

para um inteiro p.

Tem-se também as desigualdades

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

A demonstração do teorema é dada no livro de Serge Lang. Não é muito difícil de seguir mas bastante astuciosa para a descobrir por si próprio. Christian Huygens foi o primeiro a descrever o sentido em que as fracções continuadas fornecem as melhores aproximações dos números reais.

Agora que sabemos que as fracções continuadas são muito boas a aproximar números racionais e irracionais, não será surpresa descobri-las em muitos sítios pouco habituais (à primeira vista). Estudando as fracções continuadas com maior profundidade seríamos levados a descobrir muitas propriedades espantosas destes objectos. Podemos dizer que existe música nas fracções continuadas. Falando de música, também existem fracções continuadas na música. Equipados com as fracções continuadas, regressemos aos calendários para descobrir como elas explicam mais ou menos qualquer sistema de calendário alguma vez proposto ou implementado.

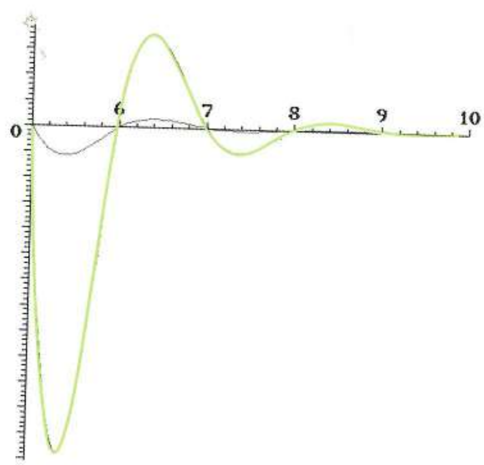


Gráfico 3.

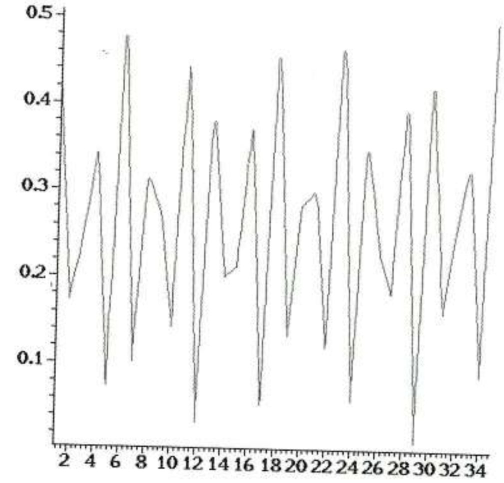


Gráfico 4.

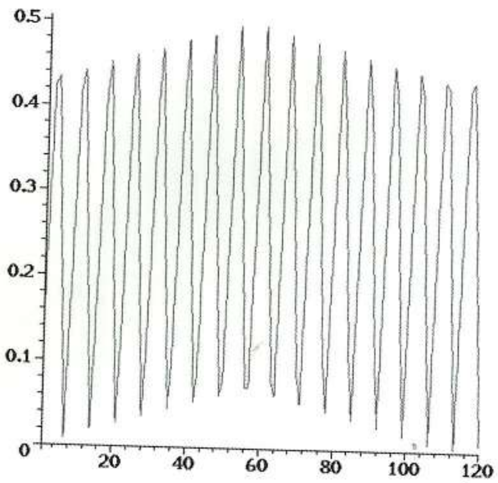


Gráfico 5.

3. Calendários e fracções continuadas

A ideia de um calendário moderno é ter um ciclo abarcando q anos, p dos quais são bissextos ao passo que os $q-p$ restantes não o são. Os números p e q devem ser escolhidos de modo que a duração do ano médio seja tão próxima do ano astronómico quanto possível. Além disso, a duração do ciclo q e a regra para seleccionar p anos bissextos deve ser fácil de usar e de implementação cómoda. Tanto o ciclo juliano de 4 anos como o gregoriano de 400 anos são exemplos de sistemas de calendário fáceis e cómodos. Em contraste, o ciclo hebreu de 19 anos requer uma calculadora para determinar os anos bissextos (em que se adiciona um mês, não um dia).

Consideremos agora o ciclo de q anos durante o qual existem p anos bissextos. Durante o ciclo decorrem $365q+p$ dias. Isto torna a duração do ano médio igual a $365+p/q$ dias. Assim, precisamos de encontrar um valor *conveniente* para q, que torne p/q tão próximo de $\alpha = 0,24219878$ quanto possível. Já sabemos que é preciso examinar a sequência de convergentes provenientes da expansão em fracção continuada do número α. Para $\alpha = 0,24219878$ tem-se

$$0.24219878 = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}$$

que dá a seguinte sequência de convergentes:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{4},\ \frac{p_2}{q_2}=\frac{7}{29},\ \frac{p_3}{q_3}=\frac{8}{33},\ \frac{p_4}{q_4}=\frac{31}{128},\ \frac{p_5}{q_5}=\frac{163}{673}.$$

A primeira fracção da sequência corresponde ao sistema juliano do ciclo de 4 anos, com um único ano bissexto. As restantes fracções propõem ciclos de duração muito inconveniente: $29, 33, 128$ e 673 anos, respectivamente. Vamos, pois, rejeitá-los. (No entanto, a ideia de um período de 33 anos chegou a ocorrer. Na verdade, um tal calendário seria mais rigoroso do que o actual calendário gregoriano, mas menos rigoroso que o calendário com o ciclo de 500 anos, apresentado abaixo.) Em vez disso, é preferível ter um ciclo com a duração de vários séculos, se a regra de selecção do ano bissexto for suficientemente simples. Assim, suponhamos que $q=100q'$, devendo q' ser um inteiro entre 1 e 9. Isto corresponde ao problema de aproximar o número $\alpha' = 100\alpha = 24,219878$ através de racionais.

$$0.24219878 \times 100 = 24 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

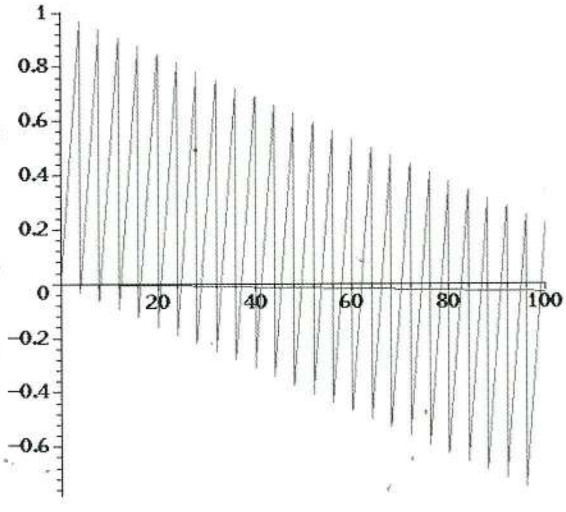


Gráfico 6.

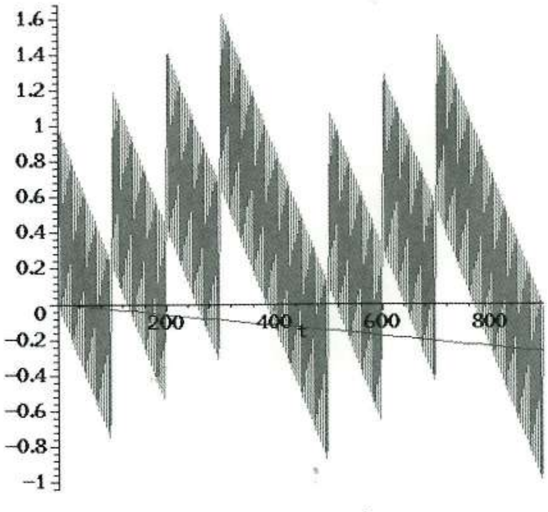


Gráfico 7.

É fácil calcular os primeiros 4 convergentes

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{97}{4}, \; \frac{p_2}{q_2} = \frac{121}{5}, \; \frac{p_3}{q_3} = \frac{218}{9}, \; \frac{p_4}{q_4} = \frac{993}{41}.$$

Vemos que existem três candidatos para modelo do calendário. O primeiro corresponde ao nosso calendário gregoriano. Baseia-se num ciclo de 400 anos com 97 anos bissextos: todos os divisíveis por 4 (uma centena) excepto os $100°$, $200°$ e $300°$ anos, perfazendo os 97 anos necessários num ciclo. A fracção seguinte $121/5$ corresponde a um calendário com um ciclo de 500 anos com 121 anos bissextos em cada ciclo. Num tal calendário, todos os anos divisíveis por 4 seriam bissextos, a menos que fossem divisíveis por 100, com a excepção dos anos divisíveis por 500, que ainda seriam bissextos. Este sistema é tão simples e cómodo como o calendário gregoriano e proporciona maior precisão. O ano gregoriano é 26 segundos mais longo que o ano solar, resultando num dia de erro em cada 3320 anos. O calendário de ciclos de 500 anos é mais curto 17 segundos do que o ano solar, resultando num erro de 1 dia em cada 5031 anos. Escapou esta parte ao Papa! A última opção para o calendário propõe um ciclo de 900 anos. Porém, com 218 anos bissextos no ciclo, o calendário requer 7 excepções à regra do quarto ano $(218 = 900 \div 4 - 7)$. Tal disposição iria criar um calendário mais complicado. Além disso, um ciclo de 900 anos talvez seja um pouco longo demais para ser cómodo. Por isso, rejeitamos este calendário, mais rigoroso, em favor dos mais simples.

O gráfico 6 mostra a diferença entre o tempo do nosso calendário gregoriano e o tempo solar real, ao longo de 100 anos. As oscilações *dente de serra* são as inserções dos anos bissextos em cada quatro anos.

O gráfico 7 mostra a diferença entre o tempo do calendário gregoriano e o tempo solar real ao longo de 900 anos. As inserções dos anos bissextos individuais são quase invisíveis. Vê-se claramente o efeito das omissões dos anos bissextos em cada século e o efeito do ano bissexto em cada 4 séculos. Na verdade, se omitirmos a regra dos 400 anos mas continuarmos a omitir os anos bissextos em cada século, o erro do calendário assemelhar-se-á ao gráfico 8.

A linha verde mostra os erros do calendário gregoriano, para comparação.

Até o calendário gregoriano irá acumular um grande erro. Eventualmente.

Aqui, (ver gráfico 9) os anos bissextos individuais já não são visíveis. As oscilações menores são as omissões centenárias dos anos bissextos. Estão agrupadas de modo a repetir blocos de quatro. Verificamos que o nosso calendário acumula erros na razão de 1 dia por cada 3300 anos.

Poder-se-ia especular sobre o que fazer no futuro para corrigir a lenta acumulação de erros do calendário gregoriano. A ideia é manter o sistema antigo mas efectuar algumas raras correcções. Mais uma vez, as fracções continuadas dão muito jeito. Por outras palavras, pretendemos um ciclo de duração q muito mais longa, abrangendo vários ciclos de 400 anos $q = 400q'$, onde q' é o número de ciclos de 400 anos no novo ciclo mais longo. Vamos então expandir $400 \times 0,24219878$ numa fracção continuada.

$$400 \times 0.24219878 = 96 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

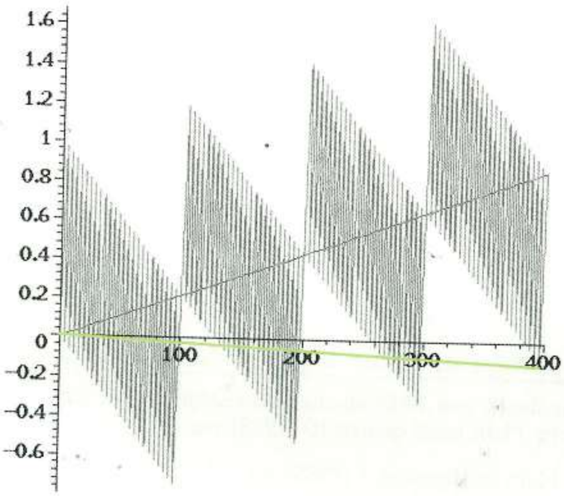


Gráfico 8.

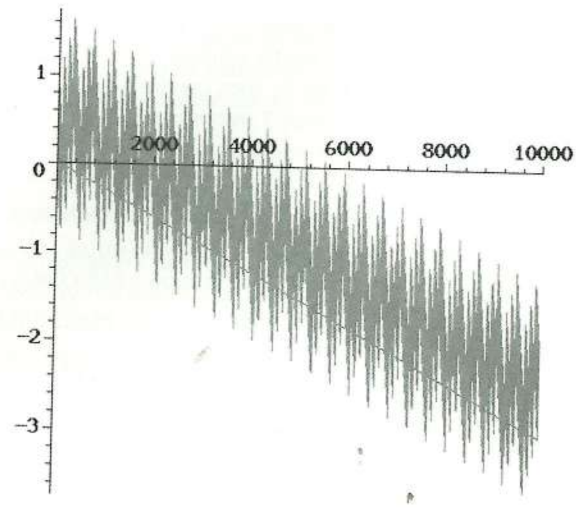


Gráfico 9.

Os convergentes são $96, 97, 775/8, 2422/25, 5619/58, \ldots$ O terceiro convergente sugere um ciclo de $8 \times 400 = 3200$ anos, com um total de 775 anos bissextos. Recorde-se que, de acordo com o calendário gregoriano, existem 97 anos bissextos por cada ciclo de 400 anos. Por isso, nos 8 ciclos teremos $8 \times 97 = 776$ anos bissextos. Assim, anular o ano bissexto em cada 3200 anos, permitirá manter o calendário gregoriano no tempo decorrido e torná-lo simultaneamente muito mais rigoroso.

O novo sistema acumularia um erro de 1 dia em 100000 anos, ou seja, nunca. Seria possível um cenário ainda mais interessante, caso o Papa tivesse feito as contas. Se o nosso calendário se baseasse num ciclo de 500 anos, sugerido acima, então iríamos expandir $500 \times 0,24219878$ numa fracção continuada

$$500 \times 0.24219878 = 121 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}$$

com convergentes

$$[121, \frac{1211}{10}, \frac{19497}{161}, \frac{59702}{493}, \frac{138901}{1147}, \frac{337504}{2787}, \ldots].$$

O segundo convergente $1211/10$ sugere uma nova duração de ciclo de 5000 anos com 1211 anos bissextos no ciclo. O calendário com ciclo de 500 anos teria 1210 anos bissextos em 5000 anos. De modo a perfazer 1211 anos bissextos, talvez quiséssemos ter 30 de Fevereiro de 5000 em celebração do 5° milénio. O calendário com ciclo de 5000 anos acumularia um erro de 1 dia em 1 milhão de anos! Este sistema foi sugerido por Bernard Rasof (Continued fractions and 'leap' years, *The Mathematics Teacher*, 63, pp. 144-148, 445, 1970.) Seja como for, ou o Papa não fez bem as contas (o que me parece improvável) ou os dados astronómicos da época não eram suficientemente rigorosos para justificar o ciclo de 500 anos, ou havia outras razões para estabelecer o actual calendário (por exemplo, o ano próximo de 1600 não aumentaria a discrepância entre as duas versões do calendário sob o ciclo dos 400 anos).

As fracções continuadas também podem ser usadas para descobrir o ciclo metónico do calendário hebreu. Nos calendários lunares introduz-se um mês extra (de Lua Nova a Lua Nova) num ano bissexto. Tal como mencionamos no início, existem 12,368267 lunações num ano. Expandindo este número numa fracção continuada obtemos

$$12.368267 = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \ddots}}}}}}$$

com convergentes $12, 25/2, 37/3, 99/8, 136/11, 235/19, 4131/334, \ldots$. O ciclo metónico corresponde ao sexto convergente $235/19$, significando que existem aproximadamente 235 lunações em 19 anos.

Se todos os anos contivessem 12 meses, então em 19 anos teríamos $19 \times 12 = 228$ meses. Por isso, é necessário introduzir mais 7 meses para obter 235. A regra actual do ano bissexto requer uma calculadora: o ano Y é bissexto se $7Y + 1 \pmod{19} < 7$.

Os livros seguintes são referências excelentes para saber mais acerca de fracções continuadas:

- Lang, Serge. *Introduction to Diophantine approximations*. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1995.
- Jones, William B.; Thron, Wolfgang J. *Continued fractions. Analytic theory and applications*. With a foreword by Felix E. Browder. With an introduction by Peter Henrici. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 11. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

A história do calendário e as fracções continuadas também são discutidas em dois artigos do Mathematical Intelligencer:

- Dutka, Jacques. *On the Gregorian revision of the Julian calendar*. Math. Intelli-gencer, 10 (1988), no. 1, 56–64.
- Rickey, V. Frederick. *Mathematics of the Gregorian calendar*. Math. Intelligencer, 7 (1985), no. 1, 53–56.

Tradução de Luís Reis

Mais perto da APM em 2006

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

Quadro 1

Sócio	Sócio residente no estrangeiro	Sócio Estudante	Sócio Aposentado	@-Sócio*
46,00€	50,00€	32,50€	36,00€	36,00€
Revista *Educação e Matemática* impressa e *on-line* (saem 5 números por ano e uma delas é temática)				Revista *Educação e Matemática on-line*
APM*informação* impresso e *on-line* (4 números por ano)				APM*informação on-line*
Opção de assinatura da revista *Quadrante* impressa (2 números por ano — 10,50 €)				
Acesso à zona *on-line* para sócios				
Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)				
Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público				
Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições				
Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento				
Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção				

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa.**

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Instituições

Quadro 2

Opções			Valor
Opção 1		Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)	35€
Opção 2		Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	20€
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	46€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15€
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* — 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	66€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15€

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções