Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2006

88

Maio ∞ Junho

Preço 5,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Junho 2006
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Etigráfe, Artes Gráficas Lda.
Montemor — 2670-502 Loures

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051

Porte Pago

Sobre a capa

Os jovens (pelos menos os muito jovens) possuem uma atitude interrogativa sobre o mundo que é na sua essência uma atitude pura e, em larga medida, a atitude certa. Outros, antes de mim, já o fizeram notar, mesmo aqui, nas páginas da *Educação e Matemática*.

Numa ocasião em que burocratas se esforçam freneticamente por reduzir o papel da Escola ao de uma mera repartição, esvaziando o papel de professor das suas características essenciais, importará, talvez, parar para isolar de novo os aspectos essenciais da actuação da Escola.

Contemplando a imagem da capa, ela lembra-me uma vez mais que a preservação e potenciação desse espírito interrogativo puro é uma tarefa essencial da Escola. Infelizmente, porém, a pratica tem produzido adultos que jamais dariam uma boa capa.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Andreia Sénica, António Guerreiro, Elsa Francela, Grupo de Trabalho de Geometria da APM, Henrique M. Guimarães, João Carvalho, José Correia, Manuel B. Reis, Margarida César, Mª do Céu Afonso, Miraldina Colaço, Paula Teixeira, Rita Bastos, Rui Feteira, Sílvia Dias.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

O que a ministra diz não deve importar!?

Adelina Precatado

> **Há no interior das escolas problemas por resolver, turmas cheias de alunos com problemas de aprendizagem, com desejo de conhecer, de estudar. Esse é que é o estímulo e a alma do trabalho dos professores. O que a ministra diz não deve importar.**
>
> [Ministra da Educação, Público de 4 de Junho de 2006]

O que a ministra diz não deve importar!? Esta frase espantosa, que ouvimos directamente na RTP 2, dita pela Ministra da Educação e publicada pelo Jornal *Público*, causou-me perplexidade. O que quererá dizer com ela uma Ministra da Educação?

A verdade é que o que a Ministra tem dito e publicado em despachos, editais, *powerpoints*, convocatórias de serviços *mínimos* e fundamentalmente na comunicação social, talvez não importe mas que tem consequências tem e na minha perspectiva não são as melhores.

Não fazemos todos o mesmo diagnóstico da escola pública que temos, não propomos todos as mesmas medidas, mas, muitos de nós, sabemos que ela não funciona bem, sabemos que não funciona como gostávamos que funcionasse. Muitos de nós concordamos que os *furos* para os alunos não fazem sentido, que o ambiente de trabalho e a disciplina, na escola e nas aulas, são fundamentais para o sucesso, que é preciso parar o abandono escolar, que a organização da escola e da aula tem que ser melhorada, que nós próprios, individual ou colectivamente, podíamos fazer melhor … . Mas, também sabemos que não foram poucas as vezes em que nos empenhámos, discutimos, imaginámos soluções, trabalhámos muito, para além das tão referidas 35 horas, e que também tantas vezes, um decreto, um despacho ou uma simples ordem de serviço, de um ministro, anulou tudo ou quase tudo o que fizemos … .

Não se pode invocar a autonomia da escola para dizer que as escolas e os professores podiam mas não fizeram e no mesmo instante decretar centralmente, por despacho, passo a passo o que eles têm que fazer, mesmo que já fora de prazo, e depois de as escolas terem outros planos em andamento … Esvazia-se a actuação dos Conselhos Pedagógicos e Executivos e, ao mesmo tempo, sufocam-se com questões quase só burocráticas. Estes processos matam a dinâmica das escolas.

Não se pode defender a necessidade do trabalho colaborativo e apresentar uma proposta de estatuto que fomenta a competição desenfreada, o individualismo, o atropelo …, duas carreiras hierarquizadas, acesso a titular por um processo externo, desligado da escola e académico e só ao fim (na melhor das hipóteses) de 18 anos, um processo de avaliação anual, por quotas, impraticável e em alguns aspectos ridículo como sejam a avaliação pelo resultado de exames ou pelos pais, um desrespeito por direitos essenciais como sejam as faltas por licença de maternidade ou paternidade, por acidente de trabalho, etc., etc..

Este ministério da educação, apesar de algumas preocupações que manifesta e até de algumas medidas que preconiza poderem ser justas, tem seguido um caminho completamente errado, diria mesmo catastrófico. A sua actuação, intencional ou não, tem contribuído para descredibilizar, a toda a hora, a escola pública, o seu discurso tem atribuído quase exclusivamente aos professores e às escolas as culpas dos erros das políticas de educação seguidas por sucessivos governos.

Esta atitude ajudará o Ministério a impor um estatuto que talvez permita poupar algum dinheiro mas que desvaloriza ainda mais a profissão de professor. Já se pensou nas suas consequências para a educação dos portugueses?

Na minha perspectiva, acima de tudo, está a dar-se força aos que defendem a privatização da escola. Hoje, como nunca, a comunicação social dá voz aos que proclamam o *Fim à escola democrática*, aos que exigem que se reconheça o direito dos pais (quais?) a escolherem a escola dos filhos, aos que defendem o cheque ensino, etc., etc..

Eu, tal como muitos professores, sonhei e acreditei que era possível ir construindo uma escola diferente, defendi, na teoria e no dia-a-dia, tanto quanto fui capaz, uma escola pública, de qualidade, culturalmente rica e para todos sem excepção, que promovesse a igualdade de oportunidades. Em vez disso, fomos vendo surgir cada vez mais vias alternativas em idades cada vez mais baixas, escolas de primeira e escolas de segunda, não resolvemos o problema da retenção e do abandono, da exclusão social. Teremos também nós, professores, alguma responsabilidade nisto mas não a única nem a maior … .

Alguns de nós (talvez já não tantos) ainda pensam que vale a pena lutar por essa escola que imaginámos, mas sabemos que isso só é possível com os professores, embora os professores não cheguem … . E é por isso que eu acredito mais numa equipa ministerial que tenha em conta os professores e o seu conhecimento prático, que os não despreze, que os envolva na discussão e nas mudanças que é preciso fazer, que seja exigente mas não autoritária, que assuma responsabilidades, uma equipa convicta de que *O que a Ministra da Educação diz deve importar!*

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões

Programação Linear e Teoria dos Jogos: que lugar podem ocupar nos actuais programas de Matemática?

Rui Feiteira

Em Outubro de 1994, a Real Academia de Ciências da Suécia atribuía o prémio Nobel da Economia[1] a John Nash, Reinhard Selten[2] e John Harsanyi[3] pelos seus estudos pioneiros na teoria dos jogos não cooperativos. Foi o reconhecimento formal que a Teoria dos Jogos desempenha um papel importante como ferramenta de análise de toda uma série de questões sociais. Tudo começou com John Von Neumann[4] que, em 1928, publicou *Zur Theorie der Gersellschaftsspiel* (Sobre a teoria dos jogos de estratégia) onde estabeleceu os primeiros esboços de uma teoria especializada em lidar com a natureza humana. Demonstrou ainda, através de métodos matemáticos, a possibilidade de determinar a solução de jogos de soma zero[5]. Em 1944, em conjunto com o economista alemão Morgenstern, publica o livro *The theory of games and Economic Behavior*. Este é considerado o trabalho que estabeleceu a teoria dos jogos como campo de estudo. Von Neumann e Morgenstern propuseram uma teoria simples que analisava o mundo social a partir de modelos baseados em jogos de estratégia. Segundo Casti, podemos afirmar que este tipo de jogos ficou encerrado com o teorema de minimax[6], pois fornece uma teoria completa de actuação em tais tipos de confrontos. No entanto, apesar de *The theory of games and Economic Behavior* ser uma obra fundamental, apresentava uma limitação: concentrava-se apenas nos jogos de soma zero, mas estes jogos, mostravam-se pouco eficazes na análise das interacções sociais e organizações da sociedade. O problema foi ultrapassado na década de 50 com John Nash. Este definiu em *Non-Cooperative Games* uma noção de equilíbrio que não se restringia apenas aos jogos de soma zero. O teorema de Nash estende os resultados de John Von Neumann, restritos a jogos de soma zero e com dois jogadores, para a situação mais geral de jogos que não são de soma zero e têm mais de dois jogadores. Trata-se de um resultado central na Teoria dos Jogos, que tem sido amplamente aplicado para o tratamento analítico de interacções estratégicas em Economia, Sociologia e Relações Internacionais Sociais. Esta noção ficou conhecida como o "equilíbrio de Nash". Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos outros jogadores, sendo isto verdadeiro para todos os jogadores. Dito de outra forma, quando um conjunto de estratégias constitui um equilíbrio de Nash, nenhum jogador mudará unilateralmente a sua jogada, porque esta é a melhor resposta possível ao conjunto

John Nash

John Harsanyi

Reinhard Selten

John von Neumann

de estratégias dos seus oponentes. Segundo Zugman, a genialidade deste equilíbrio vem da sua estabilidade sem os jogadores estarem a cooperar. Durante a segunda grande guerra, áreas como a logística, a guerra submarina e a defesa aérea basearam-se directamente na teoria dos jogos que, depois disso, se desenvolveu no contexto das ciências sociais. Hoje, a maioria dos jogos com aplicações práticas são aqueles em que se podem formar várias coligações entre os jogadores, pode haver comunicação e em que a conjugação de esforços pode melhorar a solução para todos. Para nos apercebermos da importância do estudo da teoria dos jogos, atentemos no seguinte exemplo: "... a atribuição de licenças da nova geração de telemóveis (...) só podem ser atribuídas licenças a um número muito reduzido de operadores, conduzindo a um mercado de oligopólio. A teoria económica diz-nos que a forma mais eficiente de atribuir licenças, neste caso, é através de um leilão, através do qual o Estado (a favor dos contribuintes) colecta a renda antecipada que vai ser realizada pelo oligopolista. Nos países europeus em que este método não foi seguido, alguns dos melhores economistas protestaram contra os métodos tipo "concurso de beleza" que foram seguidos, como foi o caso em Portugal. Mas a forma de fazer os leilões não pode ser entregue a qualquer pessoa. E é aqui que entra o ramo da teoria dos jogos conhecida como teoria dos leilões (*auction theory*). Nos EUA, onde os leilões foram orientados por estes especialistas, o processo gerou para o Estado cerca de 18 mil milhões de USD, e a atribuição final de licenças foi eficiente. Na Nova Zelândia, onde as pessoas que conduziram o processo não tinham essa formação, o Estado recebeu menos de dez por cento do valor esperado ..."[7] Este exemplo, na nossa opinião, ilustra bem a importância desta nova área do conhecimento como um instrumento de apoio fundamental nas tomadas de decisão.

Passado o enquadramento histórico e depois de um pequeno exemplo que ilustra algumas das vantagens da utilização desta teoria, estamos em condições de prosseguir a nossa pequena apresentação. O que pretendemos mostrar, aproveitando as novas orientações do currículo da disciplina de Matemática A de 11.° ano, é que é possível leccionar Teoria dos Jogos aos nossos alunos do ensino secundário. No 10.° ano da mesma disciplina, são abordados os domínios planos e, no final do tema de Geometria no Plano e no Espaço II, os alunos recebem um pouco de programação linear. "A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas (...) conceitos aprendidos no 10.° e ampliados no 11.°."[8] Portanto, temos as ferramentas necessárias[9] para começar a estudar jogos de soma zero: jogos de estratégia pura e jogos de estratégia mista. É óbvio que não pretendemos propor um estudo exaustivo, mas sim o suficiente para os alunos terem uma boa ideia do que é a Teoria dos Jogos.

Um jogo de estratégia relaciona sempre três elementos: jogadores (um jogo tem pelo menos dois jogadores, com objectivos conflituais); actuações (a qualquer momento cada jogador escolhe o seu movimento) e ganhos (depois de uma actuação, um jogador obtém um certo ganho). Entendemos como estratégia qualquer regra para escolha de decisões. Um jogador procura sempre uma estratégia que aumente os seus ganhos e diminua as suas perdas. O objectivo de um jogo é para cada jogador, seleccionar a estratégia que traga a melhor recompensa [*payoff*] independentemente do que o opositor faça. A melhor estratégia para cada jogador designa-se por estratégia optimal. Quando cada jogador adopta uma estratégia única como estratégia optimal, então o jogo é de estratégia pura. Caso contrário, se os jogadores adoptam diferentes estratégias de cada vez que jogam então estamos na presença de um jogo de estratégia mista.

Jogos de estratégia pura

Consideremos a matriz de ganhos de um jogo de soma zero, que define a forma normal do jogo:

		Jogador B		
		Y_1	Y_2	Y_3
Jogador A	X_1	9	7	2
	X_2	11	8	1
	X_3	4	1	-7

Por convenção a matriz apenas mostra os ganhos do jogador A, designado por jogador maximizante (jogador ofensivo) e as perdas do jogador B, jogador minimizante (jogador defensivo). Neste caso, assumimos que ambos os jogadores conhecem a matriz. Para melhor percebermos a matriz segue-se um exemplo: se o jogador A escolher a estratégia X_2 e o jogador B escolher a estratégia Y_3, temos como resultado um ganho de 4 para o jogador A e uma perda de 4 para o jogador B. Neste caso, designamos o número 4 como o valor do jogo.

Imaginemos que o jogador A representa uma empresa de vestuário desportivo, Futlex, que pretende lançar no mercado um novo produto, e por sua vez, o jogador B representa o seu concorrente directo, *TuttiDespor*. Vejamos como as linhas de actuação racionais podem ser extraídas da matriz anterior. Assim, a *Futlex* pretende maximizar o seu ganho mínimo, então assinalemos o número mínimo em cada uma das linhas. Analogamente, o *TuttiDespor* pretende minimizar ao máximo as suas perdas com o novo produto no mercado. Portanto, assinalaremos o máximo de cada coluna da matriz:

TuttiDespor

Futlex		Y_1	Y_2	Y_3	Min linha
	X_1	9	7	2	**2**
	X_2	11	8	1	1
	X_3	4	1	-7	-7
	Max Coluna	11	8	**2**	

A *Futlex* irá procurar o maior dos mínimos e a *TuttiDespor* procurará o menor dos máximos. Estes dois números (a negrito) correspondem à estratégia X_1 para *Futlex* e Y_3 para *TuttiDespor*. A combinação de actuações, onde o máximo dos mínimos das linhas (maxmini) e o mínimo dos máximos (minimax), chama-se ponto de equilíbrio do jogo, pois os jogadores ao escolherem estas actuações garantem para si um ganho mínimo — independentemente do que o outro jogador venha a fazer. Neste caso 2 é o valor do jogo. Um ponto de equilíbrio deste tipo é frequentemente designado por ponto sela. Este representa decisões dos dois jogadores que nenhum pode melhorar saindo unilateralmente delas, portanto, a melhor decisão de cada jogador é o ponto sela, que é considerado uma solução para o jogo de estratégias puras.

Jogos de estratégia mista

Quando não existe ponto sela, não existe uma jogada de estratégia pura e os jogadores irão jogar cada estratégia por uma fracção de tempo. A isto chama-se jogos de estratégia mista. Comecemos por olhar para os jogos 2 × 2, neste caso, o jogo de caças e bombardeiros. Durante a 2.ª Guerra Mundial era usual os pilotos de caça atacarem os bombardeiros mergulhando, de cima para baixo, com o sol pelas costas. Como esta táctica estava a ter sucesso os pilotos dos bombardeiros, para se defenderem, começaram a usar óculos escuros. Desta forma os pilotos dos bombardeiros podiam olhar frontalmente para o sol. Como resposta, os caças variaram o seu estilo de ataque e passaram a atacar directamente de baixo para cima. Este ataque era eficaz mas apenas quando não era detectado, pois os caças eram muito mais lentos a subir do que a mergulhar. Construímos assim um jogo de soma zero entre duas pessoas: os pilotos dos caças e os pilotos dos bombardeiros. Os caças podem aplicar duas estratégias, mergulhar e subir, enquanto que os pilotos dos bombardeiros podem olhar para cima ou para baixo. Suponhamos que a seguinte matriz traduz a situação acima descrita:

Tripulação dos Bombardeiros

Piloto do caça		Olhar cima	Olhar baixo
	Mergulhar	0.95	1
	Subir	1	0

Se analisarmos a matriz com atenção verificamos que não existe ponto sela, logo não existem estratégias puras, para ambos os jogadores. Em vez de uma estratégia pura, ambos os jogadores têm de diversificar as suas actuações de forma a surpreender o adversário. Cada um deve seleccionar aleatoriamente uma actuação de entre as que tem à escolha. Vejamos como proceder: suponhamos que o piloto de caça usa a estratégia mergulhar por uma percentagem x de tempo, então usará a estratégia subir por outra percentagem de tempo $(1-x)$. O ganho do piloto de caça se a tripulação olhar para cima é dado por:

$$0.95x + 1(1-x) = -0.05x + 1$$

O ganho do piloto de caça se a tripulação olhar para baixo é dado por:

$$1x + 0(1-x) = x$$

Seja v o valor do jogo para o piloto do caça. Isto significa que v é a quantidade que o piloto do caça ganha por jogo, se jogar a sua melhor estratégia e se a tripulação também jogar a sua melhor estratégia.

O nosso problema resume-se a determinar x que maximize v onde (estamos na presença do conjunto de restrições do nosso problema):

$$\begin{aligned} v &\leq -0.05x + 1 \\ v &\leq x \end{aligned}$$

Consideremos os gráficos das funções $v = -0.05x + 1$ e $v = x$, para valores de x entre 0 e 1 (x representa uma fracção e por isso $0 \leq x \leq 1$) (ver figura 1).

Observamos então que o ponto que nos interessa é o ponto P, pois estamos a tentar maximizar a situação. O ponto P é o ponto mais alto da região admissível (a sombreado). Neste tipo de problemas a solução encontra-se sempre num dos vértices da região admissível.

Algebricamente teríamos:

$$\begin{aligned} -0.05x + 1 = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{1.05} \cong 0.95 \end{aligned}$$

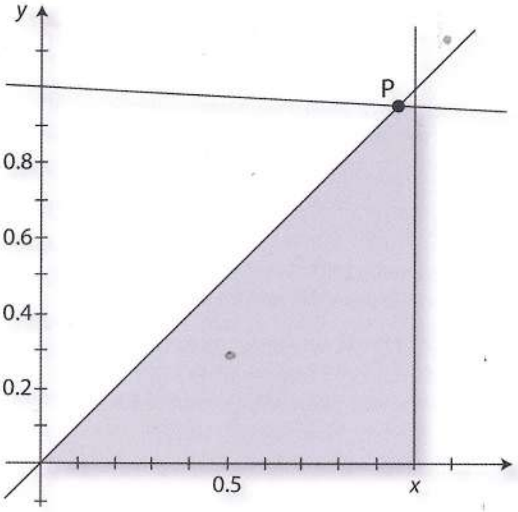


Figura 1.

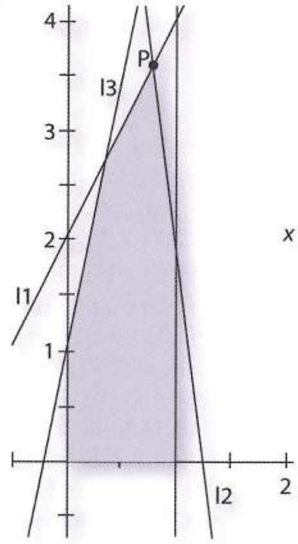


Figura 2.

Portanto se $x = 0.95$ temos que $1 - x = 0.05$. Logo o piloto de caça mergulhará 95% das vezes e, atacará a subir apenas 5% das vezes. Neste caso o valor do jogo é dado por:

$$-0.05x + 1 \text{ quando } x = 0.95$$
$$x \text{ quando } x = 0.95$$

Logo $v \cong 0.95$.

Para o caso da tripulação do bombardeiro procederíamos de uma forma análoga. Notemos apenas que o jogador minimizante receberá $-v$, pois o jogo é de soma nula. O ganho para a tripulação do bombardeiro é dado por:

$$-[0.95x + 1(1-x)], \text{ se o piloto de caça mergulhar para atacar}$$
$$-[1x + 0(1-x)], \text{ se o piloto de caça subir para atacar}$$

Não nos devemos esquecer que estas estratégias seriam definidas antes de ambas as tripulações levantarem voo, procedendo depois conforme o escolhido.

Analisemos agora um jogo de estratégia mista 2×3. Consideremos um jogo de soma zero para duas pessoas, em que a matriz de recompensas é:

		Jogador B		
		Y_1	Y_2	Y_3
Jogador A	X_1	4	2	6
	X_2	2	10	1

Mais uma vez o jogo não tem ponto sela. Como o jogador A tem apenas disponíveis duas estratégias, suponha-se que usa X_1 por uma fracção de tempo (x) e usa X_2 por uma fracção $1 - x$ de tempo. Então o ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_1 é:

$$4x + 2(1-x) = 2x + 2$$

O ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_2 é:

$$2x + 10(1-x) = -8x + 10$$

O ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_3 é:

$$6x + (1-x) = 5x + 1$$

O nosso problema resume-se a determinar x que maximize v onde:

$$v \leq 2x + 2$$
$$v \leq -8x + 10$$
$$v \leq 5x + 1$$

Podemos determinar o valor de x que maximiza as condições anteriores, se traçarmos os gráficos de

$$v = 2x + 2 \quad (l_1)$$
$$v = -8x + 10 \quad (l_2)$$
$$v = 5x + 1 \quad (l_3)$$

para $0 \leq x \leq 1$.

O jogador A pode maximizar o valor do jogo escolhendo o ponto P, que corresponde ao valor mais alto da região admissível. Por observação, facilmente se conclui que P resulta da intersecção de l_1 e l_2, portanto o valor de x é dado por:

$$2+2x=10-8x \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$$

Logo se $x=4/5$ temos que $1-x=1/5$. Como consequência, o jogador A deve usar a estratégia X_1 em $4/5$ do tempo e no restante ($1/5$ do tempo) usar a estratégia X_2. Notemos ainda que, o jogador B nunca utilizará a estratégia Y_3, usará apenas Y_1 e Y_2 para minimizar o ganho do jogador A. Este pequeno exemplo ilustra a forma como decorrem os jogos $2 \times n$, pois o jogador B (jogador minimizante) apesar de ter à sua disposição n estratégias, apenas utilizará duas delas. Isto decorre do facto de a qualquer combinação que o jogador maximizante usar, resultar da intersecção das 2 rectas que correspondem às suas duas únicas estratégias.

A programação linear é parte da programação matemática e esta, que desde a década de 50 é uma disciplina consolidada dentro do conhecimento matemático, estimulou o estudo de fenómenos económicos e, também por isso, está intimamente ligada à Teoria dos Jogos. Segundo Soares, "... é uma ciência que tem um papel fundamental na gestão racional de recursos usados em operações e processos e na melhoria da produtividade, tendo um campo privilegiado de aplicação em diversas áreas científicas, como a engenharia, a gestão, a economia, a matemática, e muitas outras." Tentámos mostrar a ligação entre dois campos de conhecimento que se tocam e que são fundamentais para o estudo e resolução de problemas dentro das ciências sociais. Sabemos de antemão que trabalhar este assunto, mesmo que seja por um período curto de tempo é muito difícil, pois professores e alunos estão muito pressionados pela existência do exame de 12.° ano, embora este facto, na nossa opinião, não seja definitivamente limitativo. Pensamos que esta abordagem mostraria, por certo, uma aplicação muito diferente da programação linear que está prevista no programa de Matemática. Por esta razão, e como vimos anteriormente, por estarmos perante dois ramos da matemática que se desenvolveram no seio das ciências sociais (mais a Teoria dos Jogos do que a Programação Matemática). São temas bastante actuais e com interesse e, por isso, deveriam ter um espaço reservado na Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), já que são por excelência dois métodos diferentes de apoio à decisão. É de referir ainda que, no programa de 10.° ano (ou de 11.° ano) desta última disciplina, está previsto leccionar o conteúdo "Métodos de Apoio à Decisão". Como estes dois campos da Matemática são excelentes ferramentas de apoio às tomadas de decisão, o programa de MACS poderia, e na nossa opinião, deveria de alguma forma permitir que estes tópicos pudessem ser trabalhados. Mas, como é do conhecimento geral, esta disciplina ainda está a dar os primeiros passos e poderá acontecer que, mais cedo ou mais tarde, o seu programa seja reformulado e aí sim, estes dois tópicos poderiam ser incluídos.

Notas

1 Pela primeira vez em 93 anos a Academia atribuía um prémio Nobel a um trabalho de matemática pura.

2 Economista alemão, refinou a noção de equilíbrio que ficou conhecida por "equilíbrio perfeito em subjogos".

3 Economista húngaro, desenvolveu um modelo em que ambos os jogadores não tem acesso à mesma quantidade de informação — modelo de informação incompleta.

4 John Von Neumann (1903–1957), matemático húngaro, radicado nos Estados Unidos da América desde os anos 30.

5 Nestes jogos o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro jogador. Os interesses são diametralmente opostos e, além disso, não existe comunicação entre os jogadores.

6 O teorema do minimax de Von Neumann postula que há sempre, no mínimo, uma estratégia mista para cada jogador, sendo que o ganho médio tem o mesmo valor para cada um dos jogadores. Mais, este ganho médio é o melhor a que os jogadores podem aspirar.

7 Cf Mateus, Abel, "Mente Brilhante", *UMTS e o Alargamento da União Europeia.*

8 Silva, Jaime *et al*, *Matemática A 11.° ano* p. 4.

9 Apesar do que foi exposto reconhecemos que a Teoria de Jogos deveria ser leccionada na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, pela natureza diferente desta disciplina e porque a Teoria dos Jogos teve grandes desenvolvimentos nas Ciências Sociais.

Referências Bibliográficas

Casti, John L., (1999). *Cinco Regras de Ouro*, Lisboa: Gradiva.

Fiani, R., (2004). *Teoria dos jogos*. São Paulo: Editora Campus.

Ferreira, A., Amaral, I., (1995). *Programação Matemática*. Lisboa: Edições Sílabo.

Hebborn, J., (2001). *Decision Mathematics*. Oxford: Heinemann Modular Education.

Mateus, A., "*Mente Brilhante*", *UMTS e o Alargamento da União Europeia*.

Silva, Jaime *et al.* (2002). *Matemática A 11.° ano*, Lisboa: MEDES.

Soares, João L., Optimização Matemática, *Gazeta da Matemática* n.° 149.

Tellez, Claúdio, O *Desenvolvimento da Teoria dos Jogos*. Disponível em http://www.claudiotellez.org/research/teojogri.pdf e http://docentes.fe.unl.pt/~amateus/entrevistas/Mente-Brilhante.htm#_ftn1

Zugman, Fábio, *Teoria dos jogos — Uma introdução à disciplina que vê a vida como uma sequência de jogos*. Disponível em http://www.iced.org.br/artigos/teoria_jogos_fabio_zugman.PDF

Rui Feteira
Escola Secundária Manuel Teixeira Gomes

Os penáltis e a angústia do guarda-redes

"O guarda-redes está a ver se descobre qual é o canto da baliza que o jogador quer atingir", disse Bloch. "Se conhece o jogador, sabe qual é o canto que ele prefere de uma maneira geral. Mas provavelmente o jogador que vai marcar o penálti pensa também que o guarda-redes está a tentar descobrir. Por isso, o guarda-redes tem de admitir que precisamente hoje a bola vai entrar pelo outro canto. Mas que é que acontece se o jogador que vai marcar o penálti seguir o pensamento do guarda-redes e acabar por decidir atirar para o canto para o qual costumava atirar. E assim por diante, e assim por diante."

In *A angústia do guarda-redes antes do penalty*, (p. 100) Peter, Handke, Lisboa, Relógio d'Agua (1987).

Os penáltis, eis um assunto actual! Hoje, 5 de Julho, dia em a equipa portuguesa foi eliminada nas meias finais através de um penálti, são estes que fazem notícia.

No sábado, 1 de Julho, mesmo, mesmo antes do jogo Portugal-Inglaterra, lia-se no Expresso "Nos últimos 16 anos, a selecção de Inglaterra foi eliminada de dois Mundiais (1990, 1998) e de dois campeonatos da Europa (1996, 2004) depois de perder no desempate por penáltis. Qual a razão desta fragilidade do jogo inglês?" Questão premonitória. Nesse sábado, mais uma vez, a Inglaterra foi eliminada por penáltis, (Ricardo defendeu três). Tudo é explicado pelo físico Ken Bray, especialista em Física Teórica, que estudou ao pormenor os penáltis do Portugal-Inglaterra do Euro-2004 [no livro *How To Score: Science and the Beautiful Game* (Granta Books, 2006)] e analisou as causas da fatalidade. As zonas da baliza que são indefensáveis (28% da área da baliza), a posição do guarda-redes e a velocidade da bola, são factores que devem ser estudados ao pormenor. Este artigo fez-nos recordar o artigo de Elsa Fernandes e João Filipe Matos: *Golo-É necessário saber matemática para ser treinador de futebol?* (nesse caso era a Elsa a guarda-redes), publicado na nossa revista nº 68, onde se coloca um problema idêntico e muito se fala de modelação matemática. *Uma ida ao casino*, *O mundial de futebol* e *os aniversário* e *As apostas no Euro 2004*, são outros artigos relacionados com jogos da *Educação e Matemática* onde José Paulo Viana nos coloca grandes desafios e trazem as probabilidades para a ordem do dia.

Quer seja através do raciocínio lógico expresso no primeiro excerto (será que o guarda-redes não se atira ao acaso?) quer através da estatística, geometria, modelação matemática, presentes na definição de estratégias nos jogos e no desporto, temos muita Matemática para trabalhar com os nossos alunos.

Como é referido no artigo "Golo ...", "O futebol constitui um desporto que atrai multidões de todas as faixas etárias em todos os países do mundo. Desvendar alguns aspectos da prática do futebol e do treino que os clubes realizam adoptando um ponto de vista matemático pode ser uma actividade aliciante. Por um lado, porque isso ajuda a compreender alguns factos inerentes à prática desportiva e, por outro lado, porque coloca a matemática em acção revelando algum do seu poder".

Recentemente dizia-nos uma colega do 1º ciclo "desenvolvemos um projecto em torno do *Mundial 2006*. Este projecto envolveu um trabalho prévio de exploração dos países envolvido e das suas características; foram discutidas depois as questões relacionadas com a distribuição dos países participantes no Mundo (perceber que a Europa tem 14 países e que os países dos restantes continentes em conjunto são 18, etc.). O que foi interessante foram as discussões que esta actividade gerou e as relações que, ao vivo, se conseguiram estabelecer entre as coisas do dia a dia e a matemática. Esta actividade gerou muitas outras subactividades que foram ao encontro do que os meus alunos andavam a viver no momento".

No final de Junho, lemos num jornal diário que "em Inglaterra, o executivo apresentou esta semana um conjunto de recomendações aos professores da disciplina [Matemática], para que o ensino seja mais moderno e ligado à *vida real*. Como? [Ministro da Educação inglês] Falando com os alunos de futebol ou de moda. Trata-se de tornar a aprendizagem atractiva e apaixonante, através do estudo de casos que os alunos dos 11 aos 13 possam explorar ao longo de várias aulas."

E, agora que vamos de férias, surpreendamo-nos com a quantidade de informação matemática que se pode ter em cada jornal, desportivo ou não.

Isabel Rocha
Manuela Pires

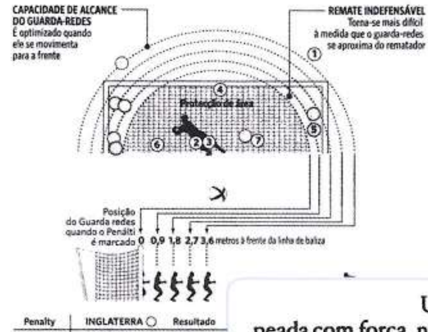
Físico estuda penáltis dos portugueses

PAULO ANUNCIAÇÃO
EM LONDRES

NOS últimos 16 anos, a selecção da Inglaterra foi eliminada em dois Mundiais (1990, 1998) e dois campeonatos da Europa (1996, 2004) depois de perder no desempate por penáltis. Qual a razão desta fragilidade do jogo inglês? O debate sobre o assunto continua a encher páginas de jornais, mas ninguém foi mais longe do que o professor Ken Bray, da Universidade de Bath, que estudou ao pormenor os penáltis do Portugal-Inglaterra do Euro-2004.

Este especialista em Física Teórica, com um doutoramento em Mecânica Quântica, dedicou várias páginas do livro **How To Score: Science and the Beautiful Game** (Granta Books, 2006) (Como Marcar: a Ciência e o Futebol) à análise desta verdadeira fatalidade nacional.

O professor Bray identificou uma área nos cantos superiores da baliza, junto aos postes, que o guarda-redes não poderá fisicamente alcançar. «**Se o marcador do penálti colocar a bola nessa zona — que corresponde a 28% da área da baliza — não há milagres que salvem o guarda-redes. Ele não terá qualquer hipótese de chegar lá**», diz Bray. Uma bola pontapeada com força, num penálti, atinge uma velocidade de 97 quilómetros por hora e demora quatro décimas de segundo a chegar à linha de



Penalty	INGLATERRA ○	Resultado
1	Beckham	Falhou
2	Owen	Marcou
3	Lampard	Marco
4	Terry	Mar
5	Hargreaves	M
6	Cole	ou
7	Vassel	arcou

Uma bola pontapeada com força, num penálti, atinge uma velocidade de 97 quilómetros por hora e demora quatro décimas de segundo a chegar à linha de golo.

ções, bem colocada, atravessará **a linha muito antes do guarda-redes completar o mergulho**», explica o professor.

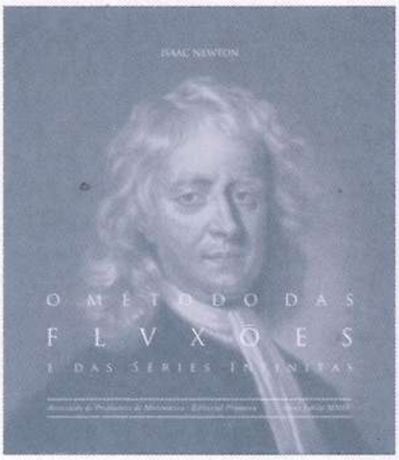
De acordo com a investigação conduzida por Ken Bray, os penáltis marcados durante os jogos de alta competição têm uma taxa de conversão que ronda os 80%. Essa taxa baixa para os 75% quando se trata de desempates. No caso da Inglaterra, a taxa de conversão parece ser ainda mais reduzida. Quando chega a hora do desempate, «**os jogadores ingleses não sabem, ou esquecem-se, como chutar**», diz ainda Bray, exemplificando com o dramático Portugal-Inglaterra dos quartos-de-final do Euro-2004, que os ingleses perderam nos penáltis.

Nessa noite, David Beckham bateu o primeiro penálti com demasiada força (113 quilómetros por

penáltis marcados pelos portugueses, ao contrário, foram perfeitos, com a bola a ser colocada em zonas totalmente fora do alcance do guarda-redes David James

In Expresso, 1 de Julho de 2006.

Publicações APM



O Método das Fluxões e das Séries Infinitas

Edição APM e Editorial Prometeu
279 pp., 2004
Sócio 15,00€ | *PVP* 30,00€

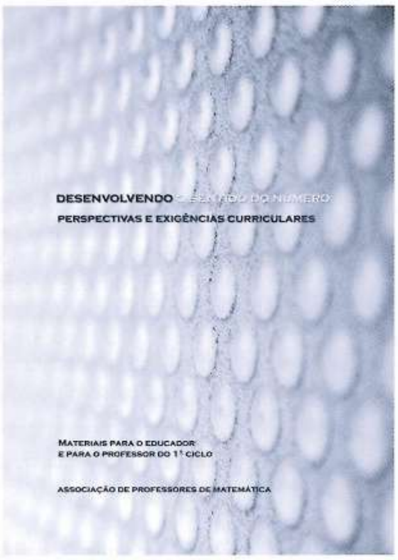
O Método das Fluxões e das Séries Infinitas, da autoria de Isaac Newton é um clássico da história da matemática. Esse marco importante não tem estado acessível em tradução portuguesa, impedindo que alguns leitores interessados pela história do desenvolvimento dos conceitos fundamentais do cálculo se inteirassem de uma etapa fundamental. Assim sendo, a APM publicou uma tradução de qualidade dessa obra, em parceria com a Editorial Prometeu.

No prefácio, feito por Augusto Franco de Oliveira, pode ler-se: "[q]uis a generosidade do tradutor agraciar os meus fracos préstimos de revisor com a deferência de um pedido para prefaciar o resultado do seu esforço. Se, por um lado, amaldiçoo a minha sorte (Augusta per augusta), por outro, enleva-me a oportunidade de responder ao desafio e a possibilidade de ver o meu nome associado, ainda que infimamente, a trabalhos tão valorosos — o do Autor, gigante da ciência universal, e o do Tradutor, seu fiel e competente servidor."

Funções no 3º ciclo com tecnologia

Edição APM
152 pp., 2002
Sócio 4,00€ | *PVP* 8,00€

Esta publicação reúne um conjunto de actividades destinadas à utilização na sala de aula, centradas no tema das Funções e visando o 3º ciclo do ensino básico e a utilização de tecnologia. A quase totalidade das actividades dirige-se às calculadoras gráficas e várias propostas estão associadas a experiências de recolha de dados, com ou sem sensores. Os enunciados das actividades vêm acompanhados de notas para os professores. Como as actividades foram experimentadas em ambiente de sala de aula, no âmbito de Oficinas de Formação, a segunda parte desta publicação pretende ilustrar e comentar essa experimentação.



Desenvolvendo o sentido do número Perspectivas e exigências curriculares

Edição APM
146 pp., 2ª edição, 2006
Sócio 6,00€ | *PVP* 12,00€

Centrada no tema dos números e das operações esta publicação reúne três tipos de materiais: tarefas destinadas a alunos entre os 5 e os 7 anos acompanhadas de sugestões para o educador/professor, textos que explicitam as principais opções que influenciam o desenvolvimento das tarefas e descrições de momentos vividos em sala de aula durante a fase de experimentação das tarefas.

Esta publicação resulta do trabalho realizado pela equipa do projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* e reflecte uma abordagem inovadora ao tema dos números e operações.

O grupo de trabalho de geometria da APM tem vindo a discutir, já há alguns anos, várias questões relacionadas com o ensino da geometria. No sentido de partilhar e debater as suas ideias com outros professores de Matemática, decidiu iniciar a publicação de algumas notas, escritas por elementos do grupo ou não, mas que já foram debatidas no seu seio e reflectem, portanto, posições assumidas pelo GTG. Estas notas não pretendem ser exaustivas nem têm uma organização sequencial. É natural, portanto, que sejam muitas vezes notas curtas e que sobre o mesmo assunto se venham a publicar várias, de diversos autores.

A ideia de simetria é uma das mais ricas em matemática e, em particular, na geometria. No entanto, os contactos que tenho tido com professores em várias situações têm-me mostrado que essa ideia nem sempre é muito clara e traz frequentemente consigo muitas confusões. Foi por isso que decidi escrever aqui sobre o conceito de simetria e o seu tratamento nos currículos do ensino básico e secundário.

Do que é que estamos a falar quando falamos de simetria? Por exemplo, quando falamos das simetrias dos gráficos de algumas funções, dos eixos de simetria de algumas figuras, ou dos centros de simetria de outras? Todos nós temos presente, com certeza, que a ideia de simetria está de algum modo associada às transformações geométricas, designadamente às isometrias. Mas a simetria de uma figura é algo mais do que uma transformação geométrica. Uma das confusões, que é muito habitual, deve-se ao facto de, em português, se terem adoptado as designações simetria axial e simetria central para as transformações geométricas que deveriam antes chamar-se reflexões, meias voltas (no plano) ou inversões (no espaço), como é, aliás, proposto por alguns autores e pelo Grupo de Trabalho de Geometria há já alguns anos.

Um primeiro aspecto, que podemos desde já estabelecer, é que quando falamos de simetria, estamos a falar de simetria de uma figura. E aqui abro um parênteses para esclarecer que quando utilizo a palavra figura ela significa "um subconjunto de pontos" do plano ou do espaço, conforme o contexto em que nos encontramos a trabalhar — plano ou espaço. Sendo assim, poderemos falar de simetria, ou simetrias, de uma recta, de um rectângulo, de uma esfera ou de um dodecaedro rômbico, por exemplo, mas também de um desenho artístico ou de uma escultura, desde que entendidos como

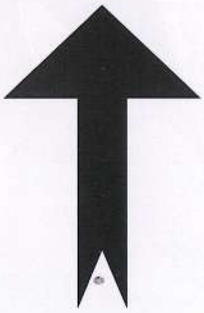


Figura 1.

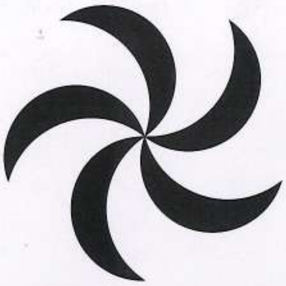


Figura 2.

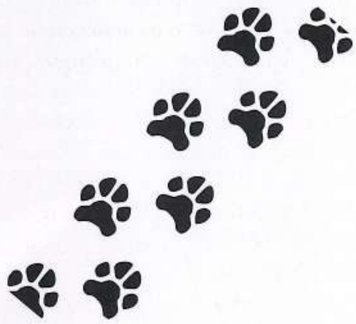


Figura 3.

subconjuntos de pontos do plano, no primeiro caso, ou do espaço, no segundo. Neste texto, vamos tratar apenas de simetria de figuras do plano.

Comecemos por analisar as figuras 1, 2 e 3. Em qualquer delas reconhecemos algum tipo de regularidade ou de repetição, que normalmente designamos, em linguagem corrente, por simetria. Mas é necessário que entre nós, professores, procuremos uma definição matemática mais rigorosa, que nos permita classificar as figuras quanto às suas simetrias, sem ambiguidades. Só assim podemos trabalhar o conceito com os nossos alunos, mesmo com os mais novos, sem os induzir em ideias incorrectas.

A figura 1 tem um eixo de simetria porque se fizermos uma reflexão do plano segundo esse eixo, a figura é transformada nela própria, embora cada ponto da figura seja, em geral, transformado num outro ponto. O ponto A (figura 1a) é transformado no ponto B pela reflexão segundo o eixo e, mas o conjunto de pontos que constitui a figura fica globalmente invariante para a reflexão (do plano) segundo o eixo e. Dizemos então que a figura tem uma simetria de reflexão, de eixo e, ou que a reflexão de eixo e é uma simetria da figura.

A figura 2 não tem eixos de simetria porque não existe nenhuma recta que seja eixo de uma reflexão do plano que deixe a figura invariante. Esse facto pode ser observado com a ajuda de um espelho ou, ainda melhor, de uma mira, ou ainda por decalque da figura num papel vegetal que depois é virado ao contrário — em nenhum dos casos conseguimos sobrepor a figura original e a transformada, porque esta (na figura 2a, um exemplo a cinzento) fica invertida relativamente à original.

Mas a figura 2 tem simetrias de rotação, isto é, se fizermos uma rotação do plano com centro no ponto O e ângulo de 72° (ou 144°, ou 216°, ou 288°, ou ainda 360°), a figura transformada é exactamente a mesma que a original. Dizemos, por isso, que as rotações de centro O e ângulos 72°,

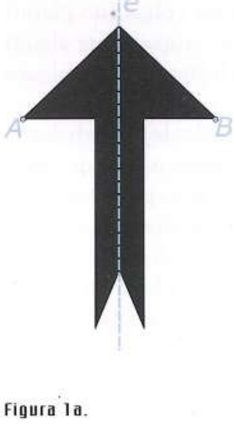


Figura 1a.

Figura 2a.

Figura 2b.

144°, 216°, 288° e 360° são simetrias da figura, ou que a figura tem 5 simetrias de rotação com centro em O, ou ainda que O é um centro de simetria de ordem 5.

A figura 3, que vamos supor prolongada indefinidamente para os dois lados, como se o rasto de pegadas continuasse sempre na mesma direcção, não tem simetrias de reflexão nem de rotação. Mas tem simetrias de translação, isto é, se fizermos uma translação do plano segundo o vector AB, a figura, no seu conjunto, é transformada nela própria, embora nenhum ponto da figura seja invariante para essa transformação.

Também a translação segundo o vector BA (figura 3a) é uma simetria da figura 3, assim como todas as translações segundo vectores múltiplos destes. E há ainda outras isometrias que são simetrias da figura, mas que deixarei para outra ocasião ...

Posto isto, estamos em condições de chegar a uma definição de simetria de uma figura do plano: Simetria de uma figura F é uma isometria T do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que $T(F) = F$.

Mas que interesse poderá ter este conceito, de simetria, nos ensinos básico e secundário? Que actividades poderemos propor aos alunos, nos vários níveis, sobre simetria?

O estudo das simetrias das figuras constitui uma aplicação muito interessante das isometrias que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, consequentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos. São conhecidos os problemas da mesa de bilhar, da determinação do caminho mais curto entre dois pontos que têm pelo meio um rio, e muitos outros que se resolvem facilmente com recurso às isometrias. O hábito de resolver problemas com recurso às transformações geométricas não está muito enraizado, mesmo entre nós, professores, mas estas são um instrumento valioso, como iremos tentar mostrar-vos nesta secção da revista.

O conceito de simetria pode ser também a base para actividades de descrição e classificação de figuras geométricas, de argumentação/demonstração ou, em níveis mais adiantados, de construção de figuras. São exemplos de actividades desse tipo o tratamento dos polígonos regulares como figuras geradas por livros de espelhos, ou seja por reflexões, a classificação dos quadriláteros quanto às suas simetrias, a construção dos polígonos regulares inscritos numa circunferência, ou de frisos e padrões por iteração de um conjunto de isometrias geradoras dessas figuras.

A análise de objectos artísticos ou de cristais através das suas simetrias são actividades que estabelecem ligações entre a matemática e outros domínios do saber, podendo ser o ponto de partida para projectos interdisciplinares onde a matemática, em geral, e a geometria, em particular, assumem papéis importantes.

Há, no entanto, alguns cuidados a ter, se não quisermos entrar por caminhos perigosos: um deles tem a ver com o uso da cor. A nossa geometria é monocromática enquanto a maior parte dos objectos artísticos que mais nos atraem usam muitas cores. A própria definição de figura, que estabelecemos mais acima, não tem sentido quando há pontos de várias cores, isto é, pontos de vários tipos — normalmente usamos apenas uma cor para distinguir os pontos que pertencem a uma figura dos que não pertencem. A análise de figuras monocromáticas quanto às suas simetrias já é suficientemente rica, do ponto de vista matemático, por isso devemos evitar figuras como a 4, em que não é fácil decidir se a rotação de centro em O e amplitude 30° é uma simetria da figura.

Onde reside a riqueza matemática do estudo da simetria no plano ou no espaço? Esse assunto ficará para outras Notas, em que veremos que o conjunto das simetrias de uma figura tem uma estrutura muito especial e que, embora a criatividade não conheça limites no que respeita à produção de figuras, artísticas ou não, podem *contar-se pelos dedos* os conjuntos de simetrias possíveis ...

Rita Bastos
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

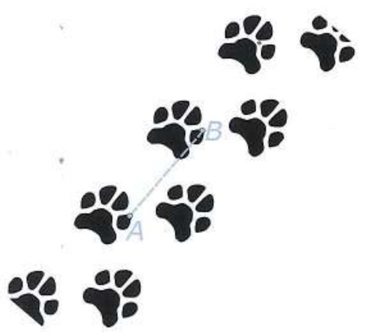


Figura 3a.

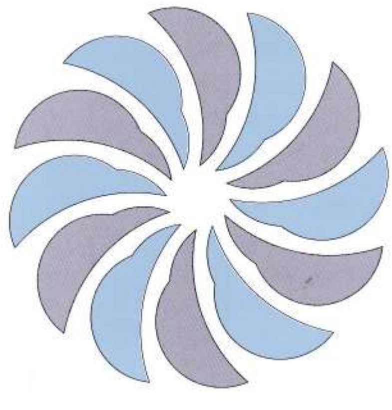


Figura 4.

Ainda Geometria Dinâmica

Geonext

Habitualmente, quando falamos em programas de geometria dinâmica, imediatamente nos lembramos de Cabri, Sketchpad ou Cinderella. Creio que serão os programas mais utilizados no nosso país. Contudo há uma série de outros programas mais ou menos poderosos dos quais nos vão chegando informações.

Nesta secção, no último número da E&M, falei de um programa muito interessante, o Geogebra, que é referido no projecto Pencil, no qual a APM é parceira. Neste projecto faz-se referência a um outro programa dentro desta categoria, o Geonext.

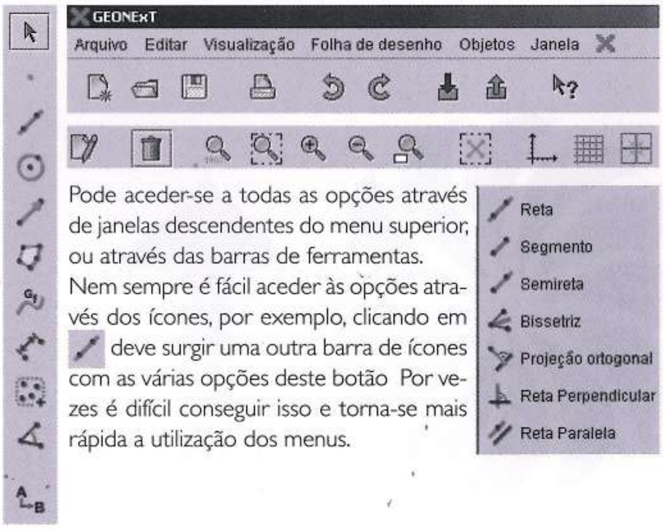
Este software foi criado na Universidade de Bayreuth e é de utilização livre. Está disponível em várias línguas, sendo a versão portuguesa feita em português do Brasil. Uma vez descarregado o programa numa dada língua não é possível alterar o idioma. Só fazendo uma nova instalação.

Na página de trabalho aparecem um menu horizontal, duas barras horizontais de ícones e uma vertical que podem ser configuradas (figura 1).

Além das opções básicas o Geonext tem, entre outras, como construções já integradas: a projecção ortogonal de um ponto sobre uma recta; a circunferência conhecidos três dos seus pontos; o quarto vértice de um paralelogramo.

Permite trabalhar a geometria analítica. É possível colocar um sistema de eixos e desenhar gráficos de funções a partir da expressão analítica.

Também neste programa a cor de fundo pode ser alterada e a colocação de uma imagem como fundo ou para se trabalhar modelação faz-se com facilidade.



Pode aceder-se a todas as opções através de janelas descendentes do menu superior, ou através das barras de ferramentas. Nem sempre é fácil aceder às opções através dos ícones, por exemplo, clicando em deve surgir uma outra barra de ícones com as várias opções deste botão Por vezes é difícil conseguir isso e torna-se mais rápida a utilização dos menus.

Figura 1.

Em comparação com outros programas parece-me ser menos amigável. Por exemplo, não é muito evidente a maneira como se aplica a animação.

Parece-me menos *arrumado* do que outros, ou melhor, com uma *arrumação* diferente mas menos intuitiva. Isto é, no mesmo menu aparecem objectos básicos misturados com outros resultantes de construções. Veja-se a figura 1, onde *recta* e *segmento*, aparecem juntamente com *projecção ortogonal* e *recta paralela*.

O programa tem uma ajuda mas, pelo menos à data em que este texto está a ser escrito, essa ajuda está apenas em alemão qualquer que seja o idioma escolhido para a instalação.

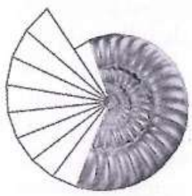
Os ficheiros podem ser gravados em html para exportação para a web.

Pode fazer-se o download gratuito a partir do site

`http://geonext.uni-bayreuth.de/`

Encontra-se na Internet um tutorial em francês em

`http://logiciels-libres-cndp.ac-versailles.fr/IMG/fichepeda_geonext.pdf.`



C.a.R

Um outro programa de Geometria Dinâmica de que tive conhecimento há já uns tempos e cuja informação me voltou a surgir recentemente é o C.a.R.

C.a.R. significa *Compass and Ruler*.

Como outros programas deste tipo pode aceder-se aos comandos através de um menu ou de uma barra de ferramentas. Os comandos podem ainda ser dados através de instruções escritas.

Tem uma particularidade interessante. Quando um comando é activado vão aparecendo sucessivas orientações à medida que as operações vão sendo realizadas. Um exemplo muito simples: utilizar o comando *recta paralela*. Quando se selecciona o comando imediatamente surge a frase "paralela a quem? (recta, semi-recta ou segmento)" e depois de se ter feito a escolha, a frase seguinte é "escolha o ponto".

Este tipo de indicações estão automaticamente disponíveis para todos os comandos o que facilita nalguns casos em que é necessário seleccionar os objectos seguindo uma determinada sequência.

Podem ser construídas macros procedendo-se do mesmo modo que no Cabri, isto é: seleccionando os objectos iniciais, os objectos finais e gravando a macro.

Possui um *lápis* que permite fazer desenhos com o rato.

O *slider* é também uma das funcionalidades com bastante interesse deste programa.

O botão direito do rato é utilizado para movimentar os objectos ou para visualizar/modificar as respectivas propriedades.

Como o anterior também aqui se pode trabalhar a Geometria Analítica.

Tem um conjunto razoável de funções trigonométricas e outras que podem ser utilizadas com alguma facilidade.

A ajuda é suficiente na maior parte dos casos.

Na página

`http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/`

encontra-se o programa para download em várias línguas. Ao fazer a instalação, por defeito o programa detecta automaticamente a língua do sistema do computador e instala a versão correspondente seja qual for o idioma escolhido, mas é possível fazer a alteração posteriormente, embora para isso seja necessário voltar a iniciar o programa.

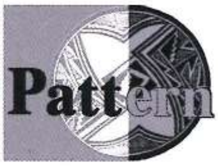
Nesta mesma página encontra-se uma série de documentos de apoio e ainda bastantes exemplos de aplicação, uma vez que é possível exportar ficheiros para a web.

Parece-me ser um programa em que vale a pena investir algum tempo para explorar todas as potencialidades.

O C.a.R. foi criado por René Grothmann na Universidade Católica de Eichstatt.

Navegando na Internet

Pattern



`http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/index.html`

Site de um curso levado a cabo já há uns anos no Dartmouth College, envolvendo Matemática e Arte, focando principalmente, geometria, simetrias, padrões. Cada tema tem uma abordagem para cada uma destas áreas.

Este curso faz parte de um projecto mais geral chamado *Mathematics Across the Curriculum* em que se pretende uma ligação da Matemática com outras disciplinas. Vale a pena ver os materiais que foram publicados deste e de outros cursos. Alguns estão on-line, na secção *Electronic Bookshelf.*

edHelper.com

`http://www.edhelper.com/`

Site com uma série de fichas de actividades principalmente para a pré-primária e primeiro ciclo. Não é possível ter acesso a tudo o que se encontra na página, mas consegue aceder-se a grande parte das actividades.

FunBased Learning

`http://funbasedlearning.com/algebra/graphing/default.htm`

Neste site destaco dois jogos simples para a introdução de alguns conceitos: *Graph-mole*, jogo com três níveis de dificuldade para marcação de pontos num referencial e *Line Gem* para equações de rectas.

Mathematics Department at Phillips Exeter Academy

`http://math.exeter.edu/dept/materials/`

O Departamento de Matemática da Phillips Exeter Academy, tem disponíveis em pdf, vários conjuntos de problemas que fazem parte dos materiais dos seus cursos.

SHUNH

`http://illuminations.nctm.org/`

Mais um jogo na página do NCTM – Illuminations

É um jogo de dados que envolve probabilidades e pretende desenvolver a capacidade de tomada de decisão.

`http://www.fondoantiguo.us.es/`

Página da Biblioteca da Universidade de Sevilha, onde pode encontrar vários livros antigos digitalizados.

Maior ou menor

Maior ou menor é um jogo muito simples e que se caracteriza por apenas envolver materiais simples que facilmente se encontram disponíveis numa sala de aula.

Nº de jogadores: 4 a 6

Material necessário: pequenas folhas de papel de cor diferente (uma cor para cada jogador), esferográficas, uma moeda ou um dado com a palavra "maior" escrita em metade das faces e a palavra "menor" nas restantes faces, uma folha de papel para registo da pontuação.

Objectivo do jogo: identificar o maior ou o menor valor no seio de um conjunto de valores.

Preparação do jogo

A primeira coisa a fazer é decidir qual o jogador que será o presidente da mesa de jogo. E para tal, de entre os vários processos usualmente utilizados neste tipo de situações, sugere-se que se opte por escolher o jogador mais velho. De seguida cada jogador escolhe uma cor e é-lhe entregue um conjunto de pequenas folhas de papel dessa cor e uma esferográfica.

Modo de jogar

Secretamente, cada jogador escreve numa pequena folha de papel um número à sua escolha. O número será aquele em que pretende apostar e poderá ter que respeitar determinadas características previamente estabelecidas pelo professor (algumas sugestões serão feitas mais adiante). O presidente da mesa de jogo certifica-se que já todos escreveram o seu número e dá a ordem para que se inicie a jogada dizendo: Apostar!

Em simultâneo todos colocam no centro da mesa as suas apostas, ou seja, o seu papel com o número que escreveram virado para cima.

É então chegado o momento de o presidente lançar o dado ou a moeda sobre a mesa, para determinar se deverá ser procurado o maior ou o menor número em jogo. Nesta fase nenhum jogador poderá ter qualquer das mãos sobre a mesa (se se mostrar necessário poderá ser estabelecida uma penalização para os incumpridores, como, por exemplo, ficarem impedidos de concluir a jogada e consequentemente de pontuar).

Os jogadores observam todas as apostas em jogo, isto é, os números escritos nas várias folhas de papel, procurando identificar aquele que é o maior ou o menor (consoante o que a moeda ou o dado ditaram). O primeiro jogador a conseguir encontrar a resposta deve então esticar o braço e pousar a mão sobre a zona central da mesa e, depois de receber autorização do presidente, pegar no papel que entende que corresponde à resposta certa. No caso em que vários jogadores colocam a mão sobre a mesa ao mesmo tempo, todos esses jogadores deverão dar a sua resposta, mas por escrito.

Cabe agora a todos validar a identificação da aposta. Uma vez alcançado consenso e tendo sido decidido se a resposta dada estava correcta, a jogada termina com o presidente a registar as pontuações alcançadas.

O vencedor será o jogador que alcançar a maior pontuação ao fim de um número pré-estabelecido de jogadas ou após um determinado período de tempo.

Pontuação

Serão atribuídos dois pontos ao jogador ou jogadores que deram a resposta certa. Em alternativa pode-se optar por, nos casos de empate, pontuar apenas o jogador que deu a resposta certa e que jogou com o número mais próximo dessa resposta. Esta pequena variação contribuiu para tornar o jogo um pouco mais renhido e pode ser recomendável quando os alunos já atingiram um bom nível e os empates começam a ser mais frequentes.

O melhor apostador, ou seja, o jogador que escreveu o número que se transformou na resposta certa, também pontua, mas tem direito apenas a um ponto. A identificação do jogador é fácil de fazer, bastando atender à cor do papel, pelo que o jogador em questão não tem que tomar qualquer iniciativa.

O jogador que indicar para maior ou menor um número que na verdade não o seja, perde um ponto, que será retirado à sua pontuação acumulada (no caso de esta não ser nula).

Nível de ensino

O nível de ensino a que este jogo se destina vai depender das características que forem impostas aos números que os alunos podem escolher. Podemos jogar apenas com números naturais, e nesse caso teremos um jogo adequado a alunos do 1° ciclo, ou jogar com números decimais, ou com fracções, ou com inteiros relativos, ou com números escritos em notação científica, ou... e à medida que alteramos o tipo de números em jogo vamos alterando também o nível de escolaridade para que este é apropriado. Trata-se portanto de um jogo adequado para qualquer nível em que estejam a ser trabalhados números, sendo as características dos números em que os jogadores podem apostar que determinam o ano de escolaridade.

Helena Rocha
Universidade Nova de Lisboa

Foto 1

Doce Matemática: uma experiência na sala de aula no 1º ciclo

Maria do Céu Afonso

Este artigo descreve a implementação de uma actividade matemática, de carácter exploratório, numa turma do 1º Ciclo do Ensino Básico, com os quatro anos de escolaridade, no passado ano lectivo. Tinha como objectivo final ser uma prenda para o Dia da Mãe e apresenta algumas das actividades desenvolvidas pelos 18 alunos da escola de Espantar-Montaria, bem como as reflexões efectuadas.

A tarefa

Numa primeira fase apresentou-se aos alunos a receita

Beijinhos de Crioula

100g de coco ralado; 100g de açúcar; 100g de chocolate em pó; 2 ovos; açúcar para polvilhar; cerejas em calda para decorar.

Misturar os ingredientes e amassar bem. Fazer bolinhas com as mãos, passar no açúcar e colocar em forminhas de papel.

Esta receita culinária serviu de ponto de partida para o desenrolar de todas as actividades que abordaram várias áreas curriculares disciplinares, nomeadamente a matemática, trabalhando as grandezas e medidas e a geometria, numa perspectiva de resolução de problemas e de ligação da matemática à realidade.

Os alunos do 1º e 2º anos leram a receita, seleccionaram os ingredientes, fizeram as pesagens, registando numa grelha o número de bombons feitos (42). Depois distribuíram-nos pelos colegas da turma e registaram quantos tocou a cada um (2) e quantos sobraram (6).

Enquanto faziam os bombons (foto 1), muito entusiasmados, o Rui disse:

— Professora, estamos a fazer esferas ...

— Consegues transformá-las noutro sólido geométrico?

— Sim — disse a Tânia — num cubo e num cone ...

— Eu consigo fazer um cilindro — disse o Paulo.

Foto 2

A exploração matemática

No seguimento, os alunos identificaram objectos com a forma de sólidos geométricos; identificaram as faces e nomearam as formas das mesmas; contaram as arestas e os vértices; usaram o geoplano e o papel ponteado para representar os polígonos que constituem as faces; identificaram os ângulos; mediram a sua amplitude; construíram sólidos geométricos com plasticina e transformaram-nos noutros sólidos; construíram sólidos usando palhinhas e esferas em plasticina.

Depois escolheram uma figura geométrica e desenharam-na em cartolina: o rectângulo (1° ano), o triângulo (2° ano), o quadrado (3° ano) e o círculo (4°ano).

1° ano — dividiram o rectângulo em vários rectângulos de diferentes tamanhos e dobraram;

2° ano — dividiram o triângulo equilátero em 4 triângulos todos iguais;

3° ano — dividiram o quadrado em cem partes iguais e descobriram que cada uma das partes era 0,01 da unidade;

4°ano — desenharam uma circunferência, traçando um diâmetro e um raio;

Estas figuras geométricas foram usadas dias depois como cartões para o Dia da Mãe.

Seguidamente construíram as caixas para o Dia da Mãe em cartão canelado.

Os alunos do 4° ano aprenderam a medir o perímetro de uma base circular, para conseguirem construir a sua caixa, que era um cilindro.

Cada grupo de alunos, a partir da figura geométrica, construiu a sua caixa, em forma de prisma triangular, cubo, cilindro e paralelepípedo (foto 2).

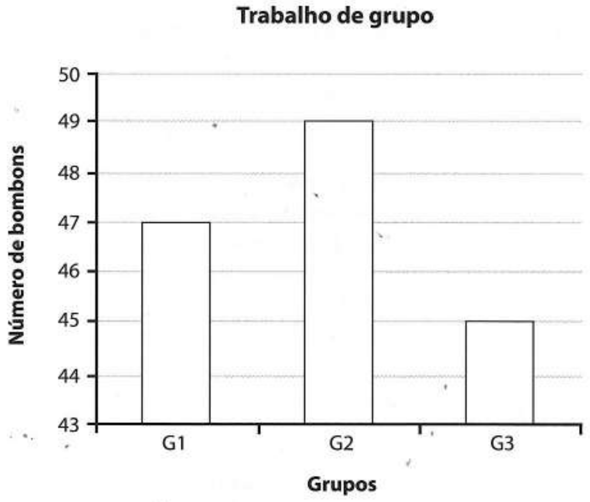
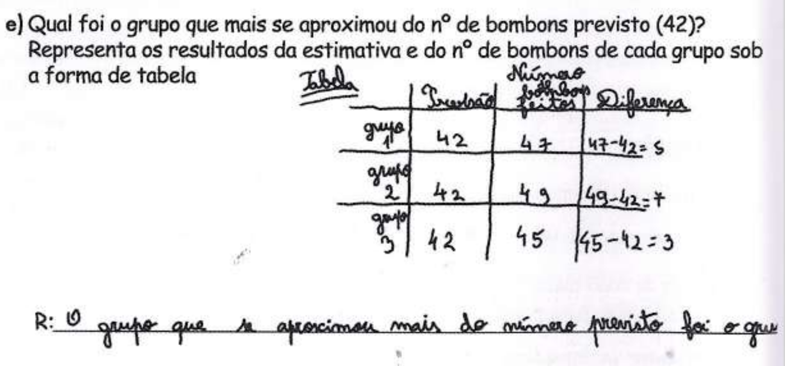


Gráfico 1.



e) Qual foi o grupo que mais se aproximou do n° de bombons previsto (42)? Representa os resultados da estimativa e do n° de bombons de cada grupo sob a forma de tabela

Tabela

	Previsão	Número bombons feitos	Diferença
grupo 1	42	47	47-42= 5
grupo 2	42	49	49-42= 7
grupo 3	42	45	45-42=3

R: O grupo que se aproximou mais do número previsto foi o gru

Tabela 1.

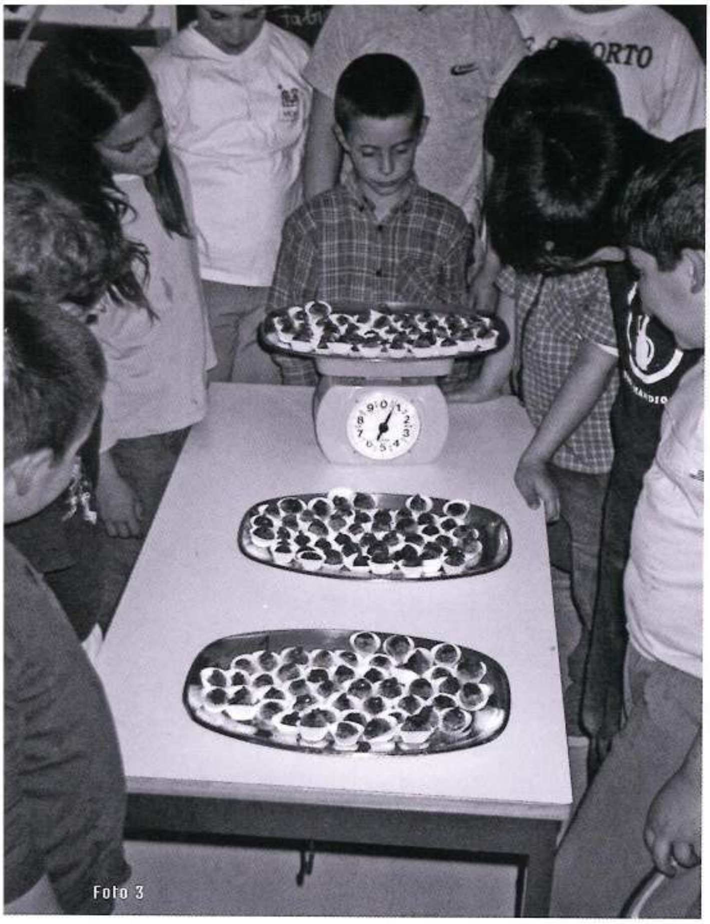


Foto 3

Depois das caixas concluídas e decoradas com raminhos de flores secas, todos queriam saber o que elas iam levar lá dentro. Era surpresa ...

Ouvi várias sugestões, fui dando dicas e por fim escolheram os bombons.

Tendo como ponto de partida o trabalho feito pelos alunos do 1° e 2° anos, os alunos do 3° e 4° anos fizeram, em grupo, estimativas para saber:

— o número de bombons necessários para dar seis a cada uma das mães dos alunos da turma;

— as quantidades de ingredientes necessárias;

— o peso dos bombons depois de feitos, tendo como referência o peso de todos os ingredientes;

— o tempo que levaria a fazer os bombons.

Concluíram que:

— Os três grupos teriam que fazer, no mínimo, 108 bombons;

— Como eram 3 grupos, cada um teria que fazer uma vez a receita inicial;

— Cada grupo, com a mesma quantidade de ingredientes, fez: Gráfico 1, Tabela 1, Tabela 2, Tabela 3.

Todos os alunos manifestaram enorme entusiasmo nas actividades e muita vontade de dar a sua opinião.

O facto de todos os grupos terem feito mais bombons que o 1° ano devia-se:

— a que os bombons eram mais pequenos; (Pedro Henrique)

— a que raparam melhor a massa das mãos. (Alexandra)

O facto de o número de bombons ser diferente de grupo para grupo foi justificado pelos alunos de diferentes formas:

— o grupo 3 fez os bombons maiores e o grupo 2 fez os bombons mais pequenos; (Pedro Filipe)

— ao amassar algum chocolate saiu fora da bacia; (Tiago)

— raparam melhor a bacia. (Stephane)

O facto de os bombons depois de feitos pesarem mais do que os ingredientes devia-se:

— à forma de papel plissado; (Alexandra)

— ao gomo de cereja; (Tânia)

— o grupo 2 foi o que fez mais bombons em menos tempo porque falou menos e trabalhou mais. (Pedro)

f) Qual foi o grupo que mais se aproximou do peso total dos bombons?

	Estimativa	Peso real	Diferença
G1	650g	710 g	710g-650g= 60g
G2	700g	800g	800g-700g=100g
G3	700g	675 g	700g-675g= 25g

C

R: O grupo 3 foi o que mais se aproximou do peso real.

Tabela 2.

g) Qual dos três grupos se aproximou mais do tempo que demorou a fazer os "Beijinhos de Crioula"?

	Estimativa	Tempo que [illegible]	Diferença
grupo 1	60m	42m	60m-42m=18m
grupo 2	60m	39m	60m-39m=21m
grupo 3	30m	45m	45m-30m=15m

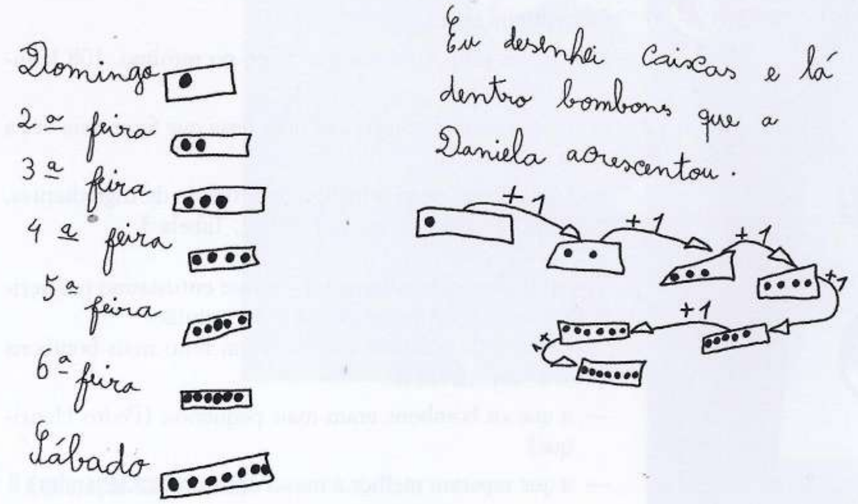
C

R: Foi o grupo 3 que se aproximou mais do tempo real.

Tabela 3.

A Daniela começou a guardar os bombons nas caixinhas. No Domingo colocou um bombom na 1ª caixinha, na Segunda-feira colocou dois bombons na 2ª caixinha, na Terça-feira colocou três bombons na 3ª caixinha. Se continuar a colocar bombons nas caixinhas, quantos bombons colocará no Sábado?

Actividade 1.



R: A Daniela no Sábado colocará sete bombons.

Os três grupos terminam e pesam os bombons (foto 3).

Apresentei aos alunos dos quatro anos de escolaridade problemas de processo que partiram do contexto das actividades realizadas com os *Beijinhos de Crioula* — a prenda da Mãe.

Antes da resolução:

— Li o problema;

— Dialoguei com os alunos para que compreendessem o problema;

— Formulei questões que conduziram à compreensão do problema;

— Pedi que pensassem noutros problemas anteriormente resolvidos, e apontassem estratégias resolução;

— Sugeri que escolhessem uma estratégia de resolução e que a registassem na folha.

Durante a resolução:

— Observei a actividade dos alunos;

— Fiz perguntas acerca do seu trabalho;

— Pedi aos alunos que verificassem a apresentação do seu trabalho, a estratégia usada, que examinassem a solução obtida e explicassem como fizeram para encontrar a solução.

Depois de encontrada a resolução:

— Discutimos, na sala de aula, as soluções encontradas e concluímos que era possível chegar ao resultado por vários caminhos diferentes;

— Pedi aos alunos que identificassem as estratégias utilizadas;

— Procurei que os alunos relacionassem este problema com outros semelhantes anteriormente resolvidos.

Análise crítica

Na execução desta actividade os alunos colaboraram e empenharam-se no trabalho proposto independentemente do ano de escolaridade, bem como na discussão das soluções e na apresentação das conclusões.

Actividade 2.

Os meninos da nossa escola fizeram bombons na sala de aula. Foram fazendo e foram comendo. O Tiago fez 10 e comeu 5, a Alexandra fez 25, o Fábio só fez 14 e comeu 3, o Stephane dos 25 que fez só ficaram 18, por sua vez o André fez 12 mas não comeu nenhum, o Pedro comeu 6 mas fez 14 e por último o Daniel comeu 9 mas só tinha feito 7.

Quantos bombons ainda ficaram para os restantes colegas?

	Fez	comeu	ficaram
Tiago	10	5	5
Alexandra	25	0	25
Fábio	14	3	11-2=9
Stephane	25	7	18
André	12	0	12
Pedro	14	6	8
Daniel	7	9	0
Total	107	30	77

$$\begin{array}{r} 25 \\ 18 \\ 12 \\ 11 \\ 8 \\ 5 \\ +\ 0 \\ \hline 79 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ -\ 2 \\ \hline 77 \end{array}$$

Eu fiz uma tabela e juntei as que fizeram e os que comeram os que ficaram e ainda tirei 2 ao R: Ainda ficaram 77 bombons para os restantes colegas.
Fábio

Devo referir que os alunos com mais dificuldades na área da matemática, nestas actividades sentiram-se muito mais motivados e demonstraram um maior entusiasmo, revelando um maior e melhor desempenho e vontade de saber mais.

Foi possível trabalhar vários conteúdos matemáticos dos quatro anos de escolaridade, envolver os alunos numa actividade significativa e simultaneamente desenvolver competências de resolução de problemas.

Todos os alunos debateram as suas ideias na turma e comunicaram as conclusões a que tinham chegado.

Os alunos com mais dificuldade sentiam-se mais estimulados e mais confiantes.

As aulas tornaram-se mais dinâmicas.

Como dizia o Pedro Filipe: "A Matemática assim é mais bonita!"

Depois deste trabalho os meus alunos vêem os problemas de uma outra forma, e mesmo o mais simples já desperta a curiosidade para a sua resolução, usando as estratégias que aprenderam.

Termino com uma frase de Pólya que traduz o que acabo de dizer:

" um problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta".

Maria do Céu Gonçalves Farinha Afonso
EB1 de Espantar, Montaria, Viana do Castelo
Revisão
Teresa Pimentel, ESE Viana do Castelo

Programas de Matemática em confronto

O livro recentemente editado *Programas de Matemática no 3° ciclo do ensino básico — um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*[1], resultou de um estudo que analisou os programas actuais da disciplina de Matemática dos países europeus referidos, confrontando-os entre si e com o programa português, considerando em todos os casos ciclos de escolaridade equivalentes ao 3° ciclo português, em termos da faixa etária dos alunos a que se dirigem.

O estudo foi realizado pela equipa do Grupo DIF a que pertenço[2], com base em documentos de incidência curricular de carácter oficial e divulgados publicamente, nos diferentes países. Foi escolhido o 3° ciclo por representar o final da escolaridade obrigatória em muitos países da Europa, tendo sido realizados estudos de caso de base essencialmente documental, um por país, que constituem o corpo principal do livro que inclui ainda uma análise comparativa final. Para a escolha dos países os critérios por que optamos foram os seguintes: disponibilidade de textos curriculares oficiais numa das línguas acessíveis aos autores, possuírem sistemas educativos com alguma afinidade com o sistema educativo português, apresentarem uma prestação razoável em estudos de avaliação internacionais em Matemática, possuírem uma comunidade de educação matemática forte e um programa de Matemática de referência em termos internacionais, e representarem diversas culturas ou tradições europeias (latina, anglo-saxónica, nórdica).

A análise do programa de Matemática em cada país centra-se nas finalidades e objectivos para o ensino da Matemática, temas matemáticos, e orientações metodológicas e para a avaliação e procura evidenciar singularidades no que é proposto em cada caso, bem como convergências ou divergências relativamente ao programa de Portugal que são destacadas numa síntese final referente a cada item analisado. Em cada caso, a análise é antecedida por uma caracterização do sistema educativo e organização curricular respectivos.

Relativamente às finalidades e objectivos propostos, os diferentes programas evidenciam dois propósitos fundamentais para o ensino da Matemática, um de carácter formativo e outro de carácter instrumental, ambos presentes nos vários programas embora com incidência e ênfases distintas. Em Espanha o propósito instrumental parece ser preponderante, mas em França e em Portugal (nos programas de 1991) prevalece o propósito formativo enquanto que na Irlanda e Suécia os dois propósitos aparecem com relevo semelhante, como aliás também sucede no nosso país, considerando o *Currículo Nacional* para o ensino básico.

As finalidades com propósito instrumental, de um modo geral, sustentam que o ensino da Matemática deve proporcionar ao aluno ferramentas úteis para a continuação dos estudos, para a sua vida não escolar e para a inserção profissional ou participação social mais geral. Os programas portugueses de 1991 são os únicos em que a contribuição da Matemática para continuação de estudos, nomeadamente em outras disciplinas, ou para a vida diária e profissão, não surge explicitamente nas finalidades. No que se refere às finalidades com propósito formativo, as diferenças na incidência são mais vincadas. No caso de Espanha, é destacado sobretudo o contributo da Matemática para o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento abstracto enquanto nos outros países, se destaca a contribuição para o desenvolvimento de capacidades variadas de carácter geral ou relacionadas com a Matemática. Um propósito de outro carácter, podemos dizer, de natureza cultural, que está presente nas finalidades do *Currículo Nacional* do ensino básico português, é também encontrado nos documentos curriculares da Suécia.

Ao nível da finalidades, os programas que analisámos distinguem-se ainda pela maior ou menor explicitação da relação com a Matemática das finalidades propostas. Esta explicitação é feita muito claramente no caso da França e mais ainda no da Irlanda, mas não acontece em Espanha nem Portugal onde, como é dito, "várias das finalidades formuladas não têm uma relação directa com a Matemática ou então é muito genérica e difusa" (p. 178).

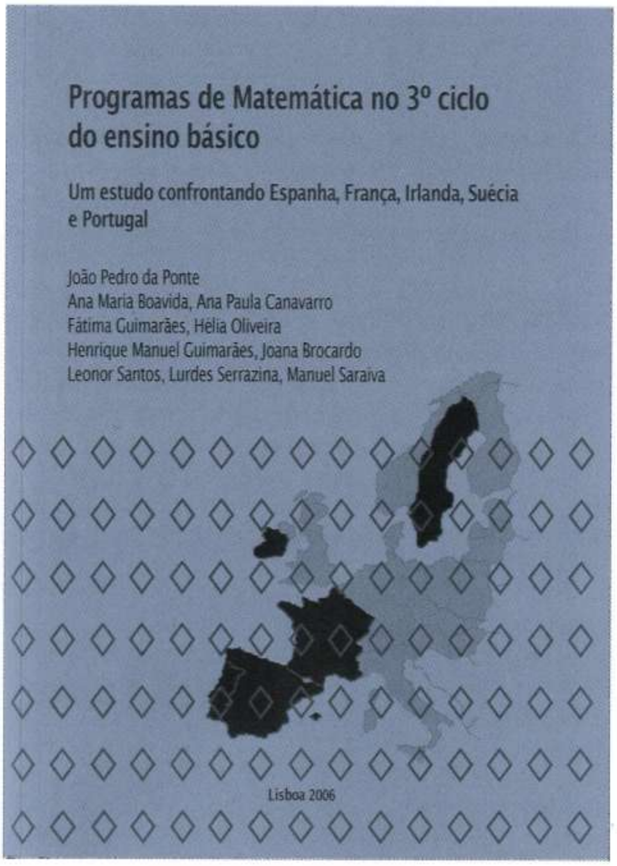
Um aspecto que ressaltou na análise comparativa ao nível das finalidades e objectivos é o facto de que a organização em três domínios — conhecimentos, capacidade e atitudes — que o programa português propõe não foi encontrada em qualquer dos outros programas. Todavia, os objectivos propostos em qualquer dos países, embora de forma distinta e com relevo diferente conforme o país, contemplam esses domínios.

Relativamente à análise dos temas matemáticos considerámos a organização temática do *Currículo Nacional* português de 2001: Números e Cálculo, Geometria, Álgebra e Funções, e Estatística e Probabilidades. São também estes quatro grandes temas que organizam o programa de Espanha que associa a Álgebra à Aritmética, enquanto que o programa francês propõe apenas três áreas temáticas, não fazendo referência explícita à Álgebra. Este tema aparece autonomamente no programa da Irlanda que é aquele em que se propõe um maior número de temas, considerando também os Conjuntos e a Trigonometria como temas autónomos. A Medida é um outro tema que é proposto de forma diferente nos diferentes programas, aparecendo com destaque nos programas da Suécia e da Irlanda, enquanto que em Portugal, Espanha e França as referências a este tema aparecem dispersas, inseridas sobretudo no tema dos Números. As Probabilidades não são abordadas no caso da França e a Irlanda.

No que se refere aos temas matemáticos, conclui-se que "não existem diferenças muito assinaláveis" (p. 199) entre os diferentes países, mas chama-se a atenção para a dificuldade da comparação com a Suécia, uma vez que neste país não existe nenhuma parte dedicada especificamente aos temas matemáticos nos documentos curriculares. Um aspecto de outra natureza, mas que cabe aqui destacar, diz respeito ao facto de no caso da Irlanda (e certamente na Suécia) prevalecer a lógica de ciclo e não existir, como em Espanha, França ou Portugal, distribuição de temas e tópicos matemáticos por ano. Para além disso, a Irlanda é o único dos países do estudo que propõe três programas — *Superior, Comum* e *Básico* — para o mesmo ciclo de escolaridade, com diferenças ao nível dos temas e tópicos matemáticos propostos e também ao nível das finalidades, dirigidos a alunos considerados com "capacidade matemática" diferente (p. 96 e 100 e pp. 105-107). Uma diferenciação de percursos em Matemática também existe no caso de Espanha mas apenas na parte final da escolaridade obrigatória, concretizado com "itinerários" distintos (científico, tecnológico, humanístico) com programas de Matemática diferentes, um de carácter "mais prático e operacional", outro mais vocacionado para o prosseguimento dos estudos" (p. 25-26).

Em relação às orientações metodológicas, a análise efectuada evidencia diferenças significativas nos diversos programas. No programa espanhol e sueco não existem orientações metodológicas explícitas, embora no primeiro caso, se considere que a promoção do "desenvolvimento do raciocínio lógico e da abstracção" que o programa propõe como principal finalidade constitui uma orientação implícita para o professor, e que "a resolução de problemas aparece com bastante ênfase" (p. 185-186). No segundo caso, chama-se a atenção que o programa possui "duas linhas de força principais", uma delas dando igualmente relevo à resolução de problemas e outra à "capacidade de utilização das ideias matemáticas para lidar com situações da realidade" (p. 187). No caso dos dois outros países, no programa francês são propostas orientações metodológicas, embora essencialmente de natureza geral, sublinhando-se também aqui a centralidade da resolução de problemas, e na Irlanda é explicitamente assumida uma orientação metodológica fundamental, a *aprendizagem activa* justificada pela consideração de que o recurso exclusivo à sequência de ensino exposição-exemplos-exercícios dificilmente permitirá que objectivos propostos para a aprendizagem possam ser atingidos.

A propósito da resolução de problemas, a análise apresentada destaca-a como "a ideia mais forte" nas orientações curriculares dos programas, em França e na Suécia, em particular, fazendo notar que essa ideia aparece implicitamente no conceito de *aprendizagem activa* que é proposto no caso da Irlanda. No que se refere ao programa de Espanha, a análise mostra que embora a resolução de problemas, seja valorizada, o ponto de vista com que é encarada é muito diferente: sobretudo numa perspectiva de aplicação de conhecimentos. Em síntese, a resolução de problemas enquanto orientação metodológica, como é dito, tem uma interpretação muito distinta de país para país: "no programa da Suécia sublinham-se os problemas e situações contextualizadas em França, os problemas puramente matemáticos, e os programas da Espanha, Irlanda e Portugal revelam a este respeito uma posição intermédia" (p. 187-188).



Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico

Edição: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa e Associação de Professores de Matemática, Maio 2006, 225 pp.

ISBN 989-95062-0-6

Preço: €6,00 (sócio); €9,00 (não sócio)

Sobre as tarefas a realizar pelos alunos, o recurso a meios tecnológicos e materiais didácticos e o papel da relação Matemática-realidade na aprendizagem da disciplina, da análise realizada é possível sinteticamente destacar o seguinte: nas tarefas referidas nos programas, a resolução de problemas tem "uma grande hegemonia" embora aparentemente com diferentes interpretações em cada caso e "elaborada com profundidade bastante variável"; os programas de França e da Suécia dão destaque à calculadora e ao computador, o que também acontece mas de forma mais comedida no caso da Espanha, em particular relativamente à calculadora que se recomenda não usar "antes do aluno ter garantido as destrezas de cálculo elementar"; a referência à utilização de outro tipo de materiais apenas surge no caso da Irlanda que menciona, ao lado das calculadoras, "instrumentos matemáticos como réguas, esquadros, transferidores e compassos" (p. 188-191). No que diz respeito à questão da relação entre a Matemática e a realidade, ela é "uma das ideias centrais" (p. 194) do programa sueco e as referências à realidade aparecem com muita frequência neste programa. Estas referências surgem também com destaque em Espanha e na Irlanda, e nos documentos curriculares franceses, embora não contenham menções explícitas àquela relação, "as situações da realidade também parecem desempenhar um papel importante, sobretudo como ponto de partida para a criação de situações de aprendizagem" (p. 193).

Por fim, no que se refere à avaliação das aprendizagens, a análise efectuada não encontrou grande variedade de situações relativamente à avaliação externa. Em três dos países existe um exame nacional no final da escolaridade obrigatória, como agora também acontece em Portugal, e só em Espanha este exame não existe. Na Suécia, para além da componente escrita, o exame nacional inclui também uma componente oral. Quer este país quer a França, como também sucede em Portugal, combinam a avaliação externa e a avaliação interna. Relativamente às modalidades de avaliação, os programas de Matemática dos países em análise incidem principalmente sobre a avaliação sumativa, sobretudo através da enumeração dos objectivos sobre que deve incidir, sendo também propostos, em alguns casos, instrumentos de avaliação. A avaliação formativa, que no caso português é objecto de referência e de algum desenvolvimento, não merece muita atenção nos documentos curriculares específicos para Matemática dos outros países.

Com a análise comparativa dos programas de Matemática realizada neste livro, foi possível, pôr em evidência as "linhas de força" desses programas e as suas características principais e perceber quais os "pontos de convergência e de divergência" com o nosso programa. Acreditamos, como se diz num breve texto da sua contra-capa, que esta análise "pode ser muito útil para uma reflexão sobre a natureza e conteúdo dos documentos curriculares, o que se torna particularmente importante em Portugal, dada a necessidade de actualizar os programas de Matemática do ensino básico, que permanecem inalterados desde 1990/91".

Notas

1 O livro (225 pp.) foi publicado em Maio de 2006, numa edição conjunta do Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e da Associação de Professores de Matemática e são seus autores, J. P. Ponte, A. M. Boavida, A. P. Canavarro, F. Guimarães, H. Oliveira, H. M. Guimarães, J. Brocado, L. Santos, L. Serrazina, e M. Saraiva.

2 O Grupo DIF — *Didáctica e Formação* — é um grupo de investigação com sede no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa de que fazem parte os autores do livro referido.

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

A tarefa que a seguir se apresenta tem como suporte o programa Geogebra, que é um software de geometria dinâmica, que junta geometria, álgebra e cálculo, disponível em

`http://www.geogebra.at/`

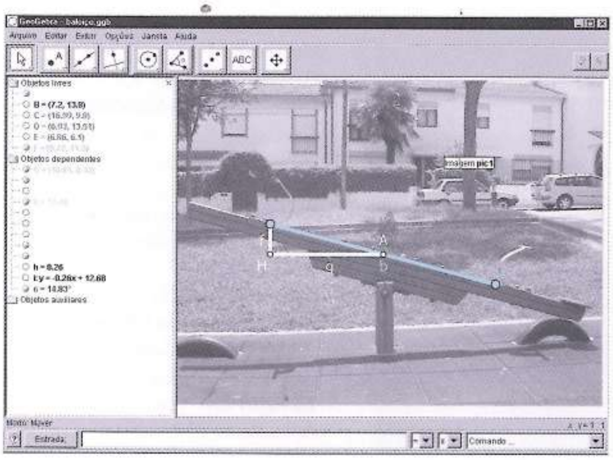
(poderá saber mais sobre este software, o seu funcionamento e as suas potencialidade na secção Tecnologias na educação matemática do número anterior da revista). É pois uma boa sugestão para utilizar na aula de matemática a desenvolver com alunos do ensino secundário.

Branca Silveira
Escola Superior de Biotecnologia da Universidade Católica do Porto

Uma tarde no parque infantil

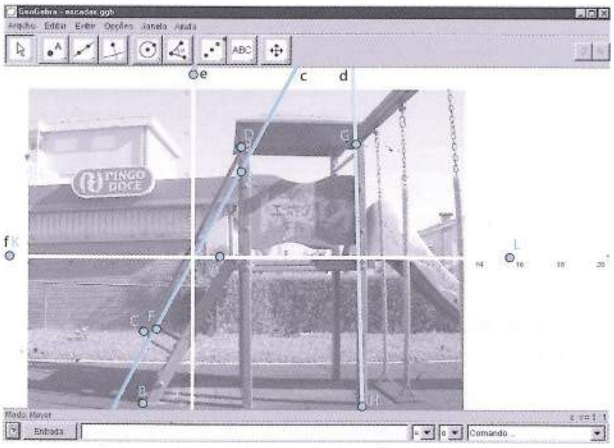
Faz uma visita a um parque infantil. Olha com atenção para tudo o que encontras: os baloiços, os escorregas, as escadas, ... e tira fotografias. Esta é uma proposta de trabalho, com base nas imagens que recolhemos num desses parques. Vais utilizar o programa Geogebra. Podes fazer um trabalho semelhante usando as tuas fotografias.

1. O baloiço
Abre o ficheiro baloiço.ggb



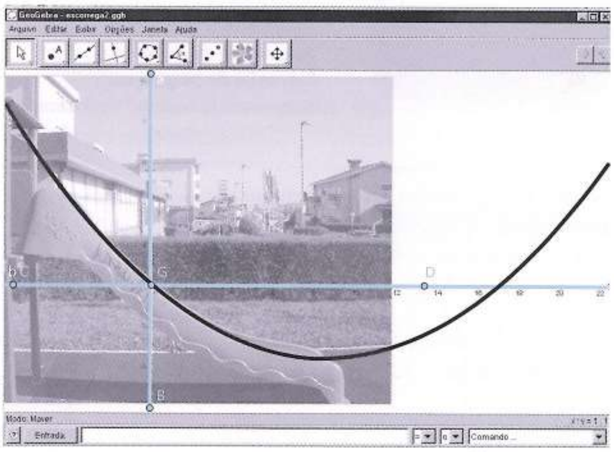
Para fazer a simulação do movimento do baloiço, foi construído um segmento de recta *[FG]* sobre a imagem. Os segmentos *f* e *g* são perpendiculares. Na janela de álgebra está indicada a equação reduzida da recta que contém o segmento *[FG]*. Calcula a razão $h= f/g$. Movimenta o ponto *F*. Compara *h* com o coeficiente de *x*, na equação da recta, à medida que o ponto *F* se desloca. O que observas? Discute com os teus colegas e tira conclusões.

2. As escadas
Abre o ficheiro escadas.ggb



Foi colocado um sistema de eixos sobre a imagem. Traçou-se a recta que contém um dos corrimãos da escada do escorrega. Abre a janela de Álgebra. Qual o declive da recta? Pretende-se encontrar as equações reduzidas das rectas que contêm o outro corrimão e a escada. Sem as desenhar consegues encontrar as respectivas equações? Explica como procedeste. Confirma representando graficamente as funções que obtiveste.

3. O escorrega
Abre o ficheiro escorrega.ggb



Utilizando apenas funções, tenta encontrar a equação de uma parábola que melhor se ajuste ao escorrega. Pensa nas coordenadas do vértice. Faz uma primeira tentativa. Podes sempre melhorar a tua função alterando os parâmetros directamente na expressão analítica que surge na janela de Álgebra. Para um pequeno ajuste podes clicar no gráfico da função e arrastá-lo.

Os 20 anos da APM na Educação e Matemática

Uma reflexão sobre o Grupo de Trabalho de Geometria

Aceitando o desafio do gabinete dos 20 anos da APM, e à semelhança do que já fizeram o Grupo de Trabalho de Investigação e o Núcleo de Vila Real, deixamos nas próximas linhas uma reflexão sobre o nosso trabalho.

O Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) nasceu em 1995 por proposta de um grupo de sócios e de elementos da direcção da APM, por se ter constatado que não havia muitas ideias sobre o que deveria ser a geometria dos programas de Matemática dos ensinos básico e secundário. A Reforma Curricular do Ensino Básico tinha sido já estendida a todas as escolas e a todos os níveis, a Reforma do Ensino Secundário estava no seu terceiro ano e a APM não sabia muito bem o que propor, caso fosse chamada a emitir um parecer sobre os programas, no que diz respeito à geometria. Provavelmente já se estava, na altura, a desenhar o ajustamento dos programas do secundário, depois de uma primeira avaliação, visto que se revelaram inexequíveis pela sua extensão e pela inadequação de determinadas abordagens (um exemplo disto foi o primeiro programa do 10° ano, que propunha a abordagem axiomática da geometria euclidiana).

Embora houvesse mais tempo para dedicar à geometria no secundário, quanto aos conteúdos e sua organização foi uma reforma muito fraca. No GTG dos primeiros tempos discutíamos muito a necessidade de contribuir para a modificação e renovação dos aspectos curriculares do ensino da geometria, tendo em atenção essa fraqueza da reforma.

Os objectivos do GTG, que não se alteraram desde o início, são a discussão de temas de geometria, com vista a formar uma opinião sobre o seu ensino, a formação em geometria dos elementos do grupo e a construção de materiais que possam ser usados nas escolas.

O trabalho é realizado sobretudo nas reuniões mensais que fazemos, uma vez que temos bastante dificuldade em encontrar tempo fora delas. Talvez por isso, daqueles três objectivos, o que atingimos com mais sucesso é o da nossa formação em geometria. Seja nas reuniões em que programamos um tema para estudarmos, seja naquelas em que discutimos opiniões sobre o ensino ou planeamos a construção de materiais, costumamos ter conversas muito ricas e aprender muito com elas.

Algumas actividades que realizámos ao longo destes anos foram:

— fins de tarde na APM,
— acções de formação a pedido de escolas,
— sessões no ProfMat e cursos nos dias que o antecedem,
— exposição sobre geometria, que estamos este ano a reformular,
— tradução para português de alguns capítulos do livro *Geometry Turned On*,
— colaboração num seminário sobre o ensino da geometria (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1998),
— seminário sobre geometria e o seu ensino (Escola Superior de Educação de Lisboa, 2000),
— círculo de estudos sobre transformações geométricas,
— inquérito sobre utilização de programas de geometria dinâmica,
— sessões na exposição *Simetria, jogos de espelhos* (Universidade Lusófona, 2004).

A parte mais visível do nosso trabalho talvez seja o conjunto de sessões e cursos que os elementos do grupo dinamizam em encontros, em particular, no ProfMat. Resultam muitas vezes de meses de discussão dos temas abordados nas reuniões e de ideias surgidas nestas discussões. É através destas sessões que o GTG melhor divulga o seu trabalho.

Outras formas possíveis de divulgação têm sido por nós pouco exploradas. A nossa página raramente é actualizada e tem pouco conteúdo. Serve, no entanto, como apresentação do grupo, e é provavelmente graças a ela que algumas pessoas nos contactam pedindo ajuda sobre geometria.

A relação que o grupo estabelece com os restantes sócios da APM é um reflexo do que dizemos acima. Somos contactados por correio electrónico por causa de dúvidas em geometria, mas a maioria dos contactos que estabelecemos surge nos encontros em que participamos e com pessoas que conhecemos na nossa actividade profissional. Tem sido, em geral, assim que o grupo angaria novos elementos.

O gosto pela geometria, pelas discussões dos seus problemas e a vontade de aprender têm sido o que nos faz levantar cedo ao sábado uma vez por mês. Como quanto mais sabemos, mais noção temos do que ainda nos falta, e como o ensino da geometria continuará a precisar de reflexão, é provável que os nossos despertadores continuem a tocar ao fim-de-semana durante bastante tempo.

Grupo de Trabalho de Geometria

No ano dos Novos Programas

Entre o ProfMat 89 de Viana do Castelo, onde estiveram presentes mais de 500 professores, e o ProfMat 92 de Viseu, onde o número de participantes chegou perto do milhar, cumpria-se em 1990-91, o ano em que me coube a presidência da APM, o quinto ano de vida da associação. Cinco anos de vida, cinco anos em que se manteve uma dinâmica de crescimento global e expansão nacional, de diversificação de actividades e áreas de intervenção, de progresso organizativo.

O *Conselho Nacional* da APM realiza em Janeiro de 1991 a sua primeira reunião, iniciando-se deste modo a vida de um novo órgão associativo vocacionado para a discussão alargada das principais questões de interesse associativo ou para o ensino da Matemática.

Em Julho de 1991 são publicados os *Novos Programas* de Matemática. Todo este ano, associativo e escolar, foi na verdade muito marcado por diversas questões e realizações relacionadas com a Reforma educativa então em curso. A experimentação dos programas continuava e inicia-se a sua generalização, realizam-se diversas sessões de discussão a este respeito, promovidas pela APM que também organiza um seminário sobre avaliação, decide-se publicar um número especial da *Educação e Matemática* inteiramente dedicado à problemática da reforma curricular e que viria a ser o primeiro número temático da revista, no ProfMat do Porto realizam-se inúmeras sessões, dos mais diversos tipos, a propósito dos Novos Programas e da Reforma Educativa.

É em 1991 que a APM edita e põe à disposição dos professores a tradução portuguesa da sua responsabilidade dos *Standards* do NCTM — *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar* — documento de grande importância para o ensino da Matemática, e que ainda hoje constitui uma referência incontornável.

É ainda em 1991 que a direcção da APM decide a criação de um *Grupo de Trabalho sobre Investigação*, visando constituir um espaço de expressão da comunidade investigativa no campo da educação matemática e promover a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática.

Quatro apontamentos apenas, porque o espaço é exíguo, para assinalar um ano de uma vida de que celebrámos há pouco os dez anos mas que mantém uma dinâmica assinalável e que parece não esmorecer.

Em 1991 estávamos, de facto, no ano dos *novos programas*, dos programas que há muito esperávamos e que, em muitos aspectos, contemplaram preocupações e orientações por que muitos de nós pugnávamos também há muito. Os tais que, por isso mesmo, foram recebidos com uma *satisfação especial*, como se diz no último editorial da *Educação e Matemática*. Com as insuficiências que lhes foram apontadas, os programas que chegavam eram de facto bem melhores, em muitos aspectos, em relação aos que destituíam. Passaram entretanto 15 anos …

No editorial que referi, aludindo ao terceiro ciclo (mas podemos incluir todos os outros ciclos), a Direcção da APM chama a atenção que "continuam a existir pontos críticos" e que os resultados de diversas provas nacionais e internacionais "não deixam dúvidas sobre as insuficiências nas aprendizagens e desempenho dos alunos". De algum modo, julgo, todos nós temos consciência desta situação que os tais 'novos' programas não mudaram, como nenhum programa, só por si, poderia mudar …

Organização e autonomia da escola … Articulação curricular … Formação e desenvolvimento profissional … Estabilidade dos professores e continuidade pedagógica … Investimento e exigência de e com cada escola e professor …

Passaram 15 anos e foi faltando, falta ainda, muita coisa.

Ao que parece, este ano pode ser o ano do *plano de acção para a Matemática*. Essa acção, visando a melhoria dos resultados claro, mas não só, terá que ser uma acção da e na escola, do(s) e com o(s) professores, com "autonomia e responsabilidade", "melhoria de condições e processos de ensino", "reforço" e "apoio do trabalho colectivo" dos professores da Matemática. Se assim for, acredito, os resultados, e não só, vão melhorar. Mas não vai ser em três anos …

Henrique M. Guimarães, sócio nº 3
Presidente da APM — 1990/91

A renovação é feita de avanços e recuos

Em 1994 a APM era já uma associação com uma dinâmica muito própria. Existiam núcleos regionais e grupos de trabalho organizados. O número de sócios continuava a crescer e em Leiria era já organizado o 10º ProfMat. Os projectos de trabalho, as trocas de experiências, o debate e a reflexão sobre as práticas pedagógicas, o ensino da Matemática em geral e a sua renovação eram uma forma de estar da associação.

A Reforma Educativa está na parte final da sua generalização e as suas contradições agudizam-se. As novas

Enfrentando novos desafios

Entrei para a Direcção da APM na altura em que os estatutos da Associação mudaram e duas grandes alterações foram introduzidas: a direcção passou a ser constituída por 13 elementos e o mandato do presidente passou a ser de 2 anos. É nesta altura que pela primeira vez o Ministério da Educação reconhece o trabalho desenvolvido pelas associações profissionais e autoriza o destacamento de um professor do 1° ciclo para exercer a sua actividade na Associação. Assim apareceu a Rosário Ribeiro.

Durante o primeiro ano do meu mandato como presidente, o trabalho com o 1° ciclo e a mudança de sede, nessa altura para um colégio em Lisboa, foram dois acontecimentos que marcaram o trabalho realizado. Sai a primeira publicação dirigida aos professores do 1° ciclo. No intuito de dinamizar a vida na nova sede, foram lançadas algumas sessões de discussão sobre temas diversos sob o lema *Matemática à conversa*.

Os grupos de trabalho da Associação crescem, quer em número quer em trabalho desenvolvido. Assim, o *Grupo de Trabalho sobre Investigação* lança o primeiro número da revista *Quadrante* e é criado o *Grupo de Trabalho sobre História e Educação Matemática*.

Também os núcleos regionais continuam a aumentar e surge o núcleo dos Açores que nesse mesmo ano realiza o seu primeiro Encontro Regional.

O trabalho do *Centro de Recursos* continua a ser desenvolvido e são apresentadas duas exposições que passam a percorrer o país: *Aventura no País da Matemática* e *Descobrimentos e Ensino da Matemática*.

Em 1993 é lançado o *Centro de Formação da APM*. A sua filosofia foi amplamente discutida envolvendo os vários núcleos e grupos de trabalho da APM. Também neste ano se dá início à edição da tradução da *Addenda Series* tendo sido publicado o volume do *5° ano* e um outro sobre *Geometria*.

Uma outra exposição é apresentada no Porto no Mercado Ferreira Borges e tem como tema *Explorar, Jogar, Descobrir — a Matemática ao alcance de todos*.

É ainda em 1993 que por iniciativa de algumas Associações, entre elas a APM, é criado o Secretariado Inter-Associações de Professores (*SIAP*) cujo objectivo é a intervenção activa na reforma educativa no âmbito das questões pedagógicas comuns aos vários saberes e áreas disciplinares.

Em termos pessoais, o ter pertencido à Direcção da APM foi um marco muito importante na minha vida que ainda está marcando.

Paula Teixeira, sócia nº 30
Presidente da APM — 1991/93

orientações para a avaliação, a proibição de calculadoras gráficas nos exames, a extensão dos programas, a formação de professores estreitamente ligada ao sistema de créditos para progredir na carreira são algumas questões polémicas que marcam este período. O debate é intenso entre os professores de Matemática, nos ProfMats, Encontros Regionais, grupos de trabalho. No sentido de se saber o que pensavam os professores de Matemática da Reforma, dos programas e da sua implementação é realizado um inquérito nacional, em todos os ciclos, sendo os resultados divulgados na revista *Educação e Matemática*.

Realiza-se, em Lisboa, um seminário nacional *Calculadoras Gráficas no Ensino da Matemática* na sequência do qual é tomada uma posição pública sobre o assunto *Calculadoras obrigatórias, calculadoras proibidas*.

As dificuldades em cumprir os novos programas do secundário, os resultados dos exames e o debate que se gera em torno destes assuntos vão conduzir ao processo de reajustamento dos programas. A APM também participa de forma bastante activa neste reajustamento, quer nos debates realizados, quer tomando posições e discutindo a proposta de reajustamento com os autores.

Continua a valorizar-se um espaço de troca de experiências e trabalho comum com outras associações reunidas no SIAP. A APM participa na organização do encontro *Cumprir os programas* que se realiza no Porto.

É construído e colocado no Centro de Recursos à disposição dos sócios o Baú do 1° ciclo. A APM muda para a actual sede.

Aqui ficam algumas notas dispersas destes dois anos de vida da associação. A renovação do ensino da Matemática é feita de avanços e recuos e este período é um bom exemplo disto. Mas os avanços dependem muito dos professores e da sua capacidade organizativa e interventiva. Hoje, como ontem, muito há ainda a fazer.

Hoje, como ontem, muito há ainda a fazer.

Os sonhos e as desilusões também se vão alternando.

Os avanços continuam a depender muito dos professores e da sua capacidade organizativa, mas infelizmente, estou hoje mais convencida que os recuos — por vezes grandes — dependem muitas vezes de acções aparentemente pontuais de um(a) ministro(a) que, desconhecendo a realidade da escola, pensa que tudo pode fazer, dizer e impor por decreto ou por despacho.

Adelina Precatado, sócia nº 741
Presidente da APM — 1993/95

Sabia que? . . .

Os Encontros

Se alguma coisa pode caracterizar a APM, são as inúmeras e diversas realizações que tem promovido e organizado desde a sua criação. Entre essas realizações estão os encontros de professores de âmbito e natureza variados que todos os anos têm decorrido, nas mais diversas regiões do país. Encontros nacionais e regionais — neste caso da responsabilidade dos núcleos de cada região — dirigidos aos professores de Matemática em geral ou especialmente vocacionados para professores com interesses específicos, na investigação, por exemplo, ou nos primeiros anos de escolaridade. Estes encontros são a um tempo um *rosto* da APM e o *espelho* da dinâmica e desenvolvimento associativos.

Estes encontros, seja qual for a sua natureza, são momentos muito importantes da vida associativa, naturalmente, mas também, da vida profissional do professor de Matemática. Momentos e lugares de divulgação de ideias e experiências, de apresentação de trabalhos em curso ou já realizados, de confronto e discussão de problemas, opiniões e perspectivas nas mais diversas áreas e assuntos que interessam ao professor.

Hoje os professores de Matemática têm à sua disposição, possibilidades tão diversas como a de participar no *ProfMat* ou num dos diversos *Mat* regionais, no *SIEM* (Seminário de investigação em educação matemática), no encontro para os professores do 1° Ciclo. Há vinte anos não era assim.

O ProfMat — os primeiros encontros

Sabia que o ProfMat nasceu antes da APM? Que a APM nasceu num ProfMat? Que na era APM, foi em Bragança que o ProfMat teve a sua primeira edição?

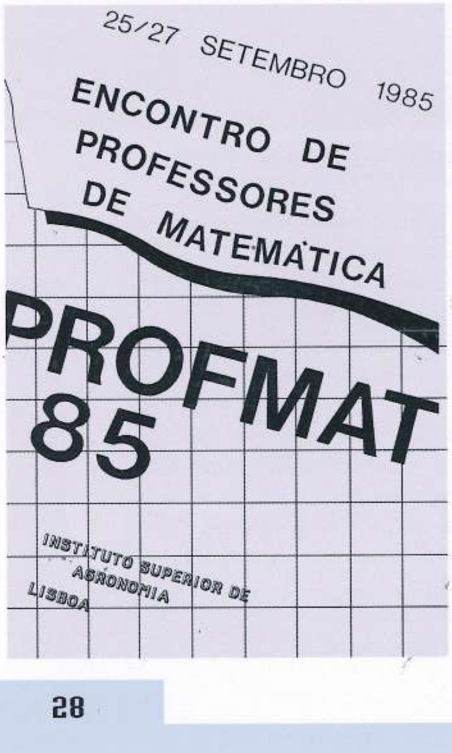
Pois é, o primeiro ProfMat foi em 1985 e a APM nasceu no ProfMat de 1986 em Portalegre. Vai este ano, em Setúbal, celebrar-se o seu vigésimo aniversário.

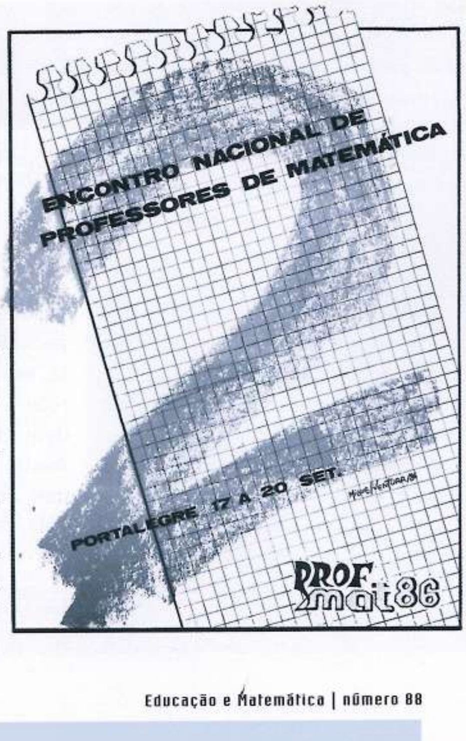
Em 1985, o ProfMat foi em Lisboa no Instituto Superior de Agronomia, com a participação de cerca de 350 professores de várias zonas do país e dos vários níveis de escolaridade. Durou três dias e a formação de professores, a utilização dos computadores — *micro-computadores*, como se dizia então — e a geometria foram os temas privilegiados, trabalhados em sessões de natureza variada, muitas delas valorizando a interacção e discussão entre os participantes: mesas redondas, grupos de trabalho, sessões de comunicações. E, com uma contribuição importante dos primeiros trabalhos de investigação que se realizaram por portugueses na área da educação matemática.

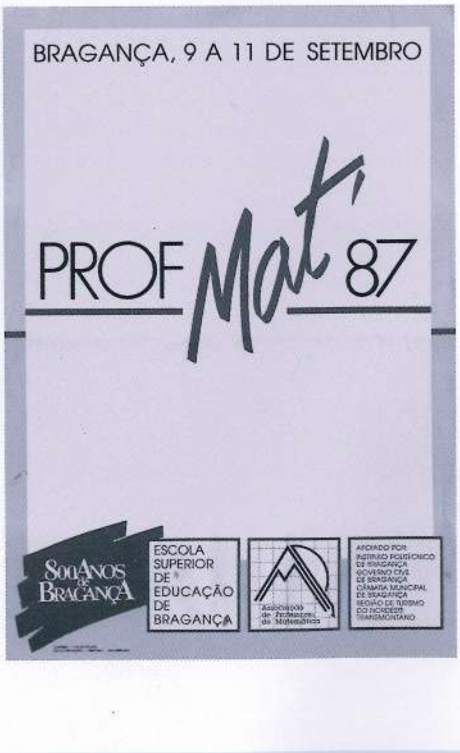
Neste ProfMat circulou um questionário onde, entre outras coisas, se inquiria os participantes sobre a necessidade da criação de uma associação de professores de Matemática. Mais de 90% dos respondentes disseram sim! E disseram também que encontros como o que decorria deviam continuar.

E assim foi. No ano seguinte realizou-se o segundo ProfMat, em Portalegre, que juntou cerca de 200 professores, vin-

Os ProfMats fundadores.







dos também de muitos locais do país. A formação de professores, os computadores e a geometria mantêm-se com lugar de relevo, a que se juntam a estatística e questões sobre a aprendizagem, em sessões do tipo das que ainda hoje existem, tendo sido neste ProfMat que nasceram as sessões práticas — na altura *workshops* — sempre muito participadas nos encontros que se seguiram.

Foi neste ProfMat, na tarde do dia 19 de Setembro, que em reunião geral se constituiu a Associação de Professores de Matemática — a APM — com a unanimidade e aclamação dos presentes. Aí também se elegeu a sua primeira Direcção e ficou marcado o ProfMat para o ano seguinte, com a decisão que, em cada ano, o encontro deveria ocorrer numa cidade diferente.

E assim foi. Em 1987, ano um da APM, o ProfMat já anunciado na revista da Associação, entretanto lançada, decorreu em Bragança com cerca de 350 professores. Aqui tiveram início os cursos de formação que ainda hoje acompanham o ProfMat, nos dois dias que imediatamente o antecedem. Os *workshops* foi o tipo de sessões privilegiado e a sua procura foi tão elevada que muitas delas tiveram que ser repetidas.

A utilização dos computadores no ensino da Matemática continuava na ordem do dia e este tema ocupou grande parte das intervenções e sessões, ao mesmo tempo que a questão da renovação curricular — aproximavam-se os tempos da reforma educativa — foi um tema com uma presença forte no encontro.

Estes foram os três ProfMat *fundadores*. No ProfMat de 1985, *o primeiro*, tomaram-se posições em favor da criação da associação. No ProfMat de 1986, é criada a associação. O ProfMat de Bragança em 1987, é o primeiro da era APM e com ele se inicia um périplo em que o encontro visita muitas das principais cidades de Portugal, do Minho ao Algarve, da beira mar ao interior, com passagem pelas ilhas, primeiro os Açores em 1993, depois a Madeira no ano 2000.

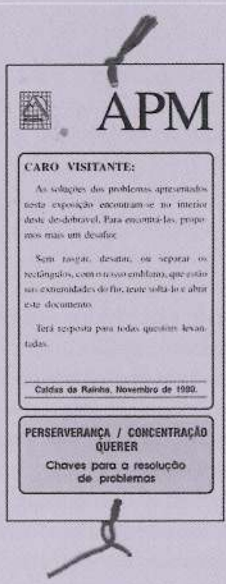
Neste périplo, o ProfMat foi crescendo em número de participantes e na quantidade de sessões propostas. Em Viana (1989) o ProfMat ultrapassou os 500 participantes, em Viseu (1992) quase chegaram a 1000, e foi em 1999, quando visitava o Algarve pela segunda vez, que ProfMat congregou o maior número de sempre de participantes: cerca de 1800 professores de Matemática estiveram em encontro na cidade de Portimão!

A par deste crescimento, de ProfMat para ProfMat, o encontro foi-se diversificando sendo introduzidas, de ano para ano, mudanças no formato do programa e no tipo de propostas e solicitações aos participantes. Por exemplo, em Viana 89, o ProfMat alargou a sua duração para três dias e meio, surgiram grupos de trabalho com sessões em três dias consecutivos, realizou-se a *Feira de Ideias* e *Materiais* e, pela primeira vez, a *Abertura à População*, espécie de mostra de materiais realizada num espaço fora do local onde decorria o ProfMat, especialmente dirigida aos habitantes da cidade.

No ano seguinte nas Caldas da Rainha, onde o encontro decorre, pela primeira vez, numa escola secundária, surgem sessões sob a forma de painéis e, a par dos cursos de formação, tem lugar a primeira edição do Seminário de Investigação. É ainda neste ProfMat que foi criado o Conselho Nacional na assembleia geral de sócios que todos os anos se realiza.

As *Sessões temáticas* — conferências em paralelo — são propostas em 1991 no ProfMat do Porto, que foi também o ProfMat onde é posta à venda a tradução portuguesa dos *Standards* do NCTM da responsabilidade da APM, muito bem recebida no encontro com quase três centenas de exemplares vendidos.

10 anos de ProfMat e 10 anos de APM.

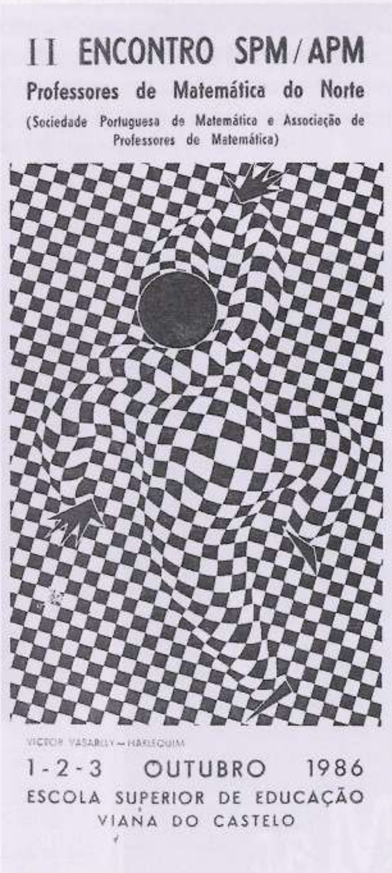


Depois vieram as sessões de *Apresentação de projectos*, os *Laboratórios* e as *Apresentações de materiais*, em Leiria 94 — onde o ProfMat começou a funcionar em 'sessões contínuas' — em Almada 96, e em Guimarães 98, respectivamente. Por sua vez, as *Sessões especiais*, que nos habituamos a frequentar nos finais de tarde dos ProfMat, foram lançadas no ProfMat dos Açores em 1993 — o único ProfMat em que os dias foram temáticos — e as *Exposições*, em 1995 em Évora, onde o ProfMat comemorou os seus dez anos e a onde voltou, em 2005, para comemorar os vinte.

E ...

Sabia que o Sérgio Godinho já cantou durante um ProfMat? Foi em Almada 96, justamente quando a APM comemorava os dez anos. E também o Luís Represas, em Guimarães 98, a Brigada Victor Jara na Figueira da Foz 97, os Tet Vocal, em Évora 95, e a Amélia Muge, num memorável cantar no ProfMat de Leiria, em 1994.

Só para falar de música, e de intérpretes que todos conhecemos, para sublinhar a componente *social e cultural* a que o ProfMat sempre tem dado atenção.



O 1º encontro "regional".

Os Encontros Regionais

Pouca gente saberá mas, sem ter passado um mês da criação da APM, teve lugar em Viana do Castelo um encontro de professores anunciado como *II Encontro SPM/APM — Professores de Matemática do Norte*. Decorreu entre 1 e 3 Outubro de 1986 e podemos considerar que terá sido o primeiro *encontro regional* já sob a organização da APM.

Na verdade, criada a APM cedo começam surgir os primeiros núcleos e encontros regionais. É o núcleo do Algarve que, logo em 1989, organiza o primeiro *AlgarMat* juntando cerca 30 participantes. Em 1990, o núcleo de Viseu segue-lhe o exemplo e realiza o *ViseuMat I* para cerca de 100 professores e o do Algarve bisa com o 2º *AlgarMat*.

Em 1991, os vários núcleos que entretanto se constituem organizam também encontros regionais. O núcleo de Almada-Seixal realiza o seu primeiro encontro, com a participação de mais de 50 professores. Acontecem, também o primeiro *LeiriMat*, com cerca de 100 participantes, o segundo *ViseuMat* e o terceiro *AlgarMat*. Também o núcleo de Évora se lança na

organização do 1° Encontro Regional de Educação Matemática que veio a ter lugar em Abril de 1993, na Escola Severim de Faria.

Os anos seguintes continuarão pródigos na formação de núcleos por todo o continente e ilhas e os encontros regionais para professores de todos os níveis de ensino multiplicam-se. Porém, por vezes, são os próprios encontros que dão origem à constituição de núcleos da APM, como foi, por exemplo, o caso do núcleo dos Açores, criado no decorrer do 1° encontro regional destas ilhas em 1992, ou dos núcleos de Braga e de Beja constituídos na sequência de encontros de professores de Matemática dessas regiões.

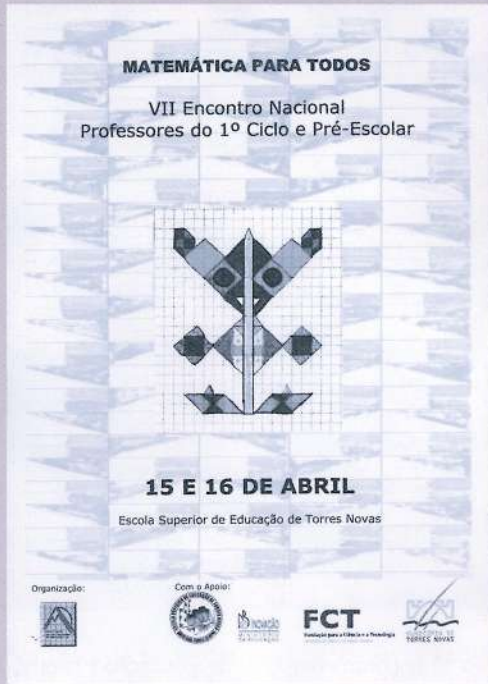
O 1° SIEM.

A realização de um encontro regional constitui uma das principais actividades na vida de muitos dos núcleos da APM. Quase todos os dezanove núcleos regionais da APM — Açores, Algarve, Almada-Seixal, Aveiro, Beja, Braga, Bragança, Castelo Branco, Coimbra, Covilhã, Évora, Leiria, Madeira, Porto, Viana do Castelo, Vila Real, Viseu, Tomar, Portalegre— distribuídos pelo continente e ilhas, organizam anualmente, sem interrupção desde a sua formação, na sua zona procurando deste modo corresponder às necessidades dos professores da região.

Até hoje foram realizados cerca de uma centena de encontros regionais. Em cada região a localidade de realização destes eventos vai sendo diversificada de modo envolver da melhor forma os professores da zona. É a vontade, empenho e determinação dos sócios e colaboradores da APM dos diversos núcleos que ao longo destes anos vai proporcionando aos professores de Matemática oportunidades de diálogo, de partilha de conhecimentos e experiências, de formação e de desenvolvimento profissional.

Os Encontros do 1º Ciclo e o SIEM

Se os encontros regionais desde sempre abarcaram os vários níveis de ensino, com a criação do grupo de trabalho da APM para o 1° Ciclo, surgiu a vontade de dinamizar actividades direccionadas especificamente para este ciclo de escolaridade. Apareceram assim os encontros designados inicialmente por *A Matemática no 1.° Ciclo*, o primeiro dos quais foi realizado em 1997, na escola Superior de Educação de Leiria. O número elevado de participantes, cerca de 350, veio confirmar



a pertinência da sua organização. A comissão organizadora constituída pelas pessoas que coordenavam o núcleo de Leiria e por professores de quase todo o distrito, empenhou-se na abertura do encontro aos encarregados de educação, lançando o *Fim de tarde com os pais* onde estes puderam manipular materiais educativos em conjunto com os filhos.

No ano seguinte, foi Viseu que recebeu o encontro. Na ordem do dia, para além da reflexão sobre problemáticas específicas do ensino e aprendizagem da Matemática no 1.° Ciclo, estiveram a articulação Pré-escolar-1.° Ciclo-2.° Ciclo e aspectos da formação inicial e contínua dos professores.

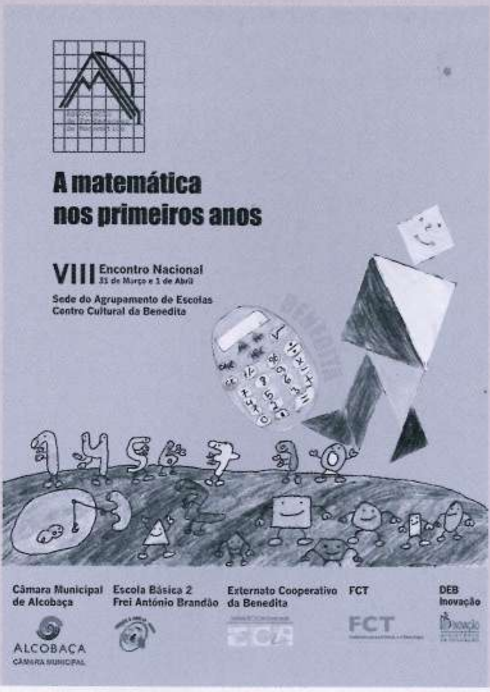
No ano 2000, Ano Mundial da Matemática, foi um grupo de escolas das Caxinas, em Vila do Conde, que tomou a iniciativa da organização do encontro. Entre os temas abordados, focaram-seas competências matemáticas na Educação Básica, bem como aspectos relacionados com a construção de um currículo integrado.

Com o propósito de, tal como nos ProfMats, diversificar o local de realização, nos anos seguintes o encontro foi para sul. Em 2001, em Évora, os professores presentes tiveram a possibilidade de participar numa sessão dinamizada por um professor holandês que focou particularmente os problemas de ensino deste nível de ensino. Depois, em Setúbal, 260 participantes tiveram a oportunidade de reflectir sobre temas tão diversos como a organização e desenvolvimento curricular, o papel da Matemática na formação global dos alunos ou os contextos propícios para a aprendizagem da matemática e a relação entre a escola e os pais. As pastas de *Materiais para o 1° Ciclo* lançadas no encontro de Leiria, entretanto reformuladas, foram apresentadas. Ainda mais a Sul, no Algarve, Faro foi o local escolhido para a realização do encontro seguinte, onde se trataram temas matemáticos como o sentido do número, mas também de questões relacionadas com a Avaliação, a realização de projectos e a Matemática e estratégias seguidas no ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. Este encontro contou com a presença de cerca de duas centenas de professores, tal como o seguinte em Torres Novas, em que se optou pela designação *Matemática para todos* em vez de *A Matemática no 1° Ciclo*.

A abertura à comunidade tem sido uma preocupação destes encontros, procurando sensibilizar e envolver os encarregados de educação e a população em geral para os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática. No encontro de Torres Novas, o programa retomou o *fim de tarde com os pais* e realizou-se conferência de imprensa para a qual foram convidados os meios de comunicação. Também no VIII encontro que teve lugar na Benedita designado, parece que definitivamente, por *A Matemática nos Primeiros Anos*, isto aconteceu, pois, na verdade, os pais de todas os alunos do agrupamento foram convidados a participar no painel *A escola, a família, os tpc e a Matemática*, realizado no fim do primeiro dia.

O último destes encontros, efectuado em Abril de 2006, teve lugar na Amadora e constituiu mais uma vez uma excelente ocasião para que os cerca de 350 participantes pudessem reflectir sobre temas diversos, como por exemplo, Avaliação, Formação e Profissionalidade; O Sentido do Número no Pré-Escolar; Resolução de Problemas e Comunicação; Ambiente de Sala de Aula e a Construção de Significados Matemáticos; As Práticas Matemáticas num Jardim-de-Infância.

Estes encontros de dois dias são momentos fundamentais de encontro e reflexão entre docentes do 1° Ciclo do Ensino



Básico, Educadores de Infância, estudantes e outros profissionais ligados a estes níveis de ensino. Com uma participação significativa dos professores ao longo destes nove anos eles têm constituído oportunidades de permuta de conhecimentos e experiências relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática e de reflexão sobre aspectos actuais da educação, nos primeiros anos de escolaridade.

Um outro encontro dirigido também a um público específico é o *Seminário de Investigação em Educação Matemática* (SIEM) que todos os anos se realiza nos dois dias que antecedem ProfMat. Este seminário dirige-se a todos os professores interessados na investigação sobre os problemas do ensino e aprendizagem da Matemática e teve a sua primeira edição em 1990, na Caldas da Rainha com a participação de cerca de quarenta professores. A sua organização esteve a cargo do núcleo de Viana do Castelo. Nesse ano teve apenas a duração de um dia que terminou com uma sessão plenária e foi preenchido com a apresentação de comunicações, um *Bloco A* centrado no tema das aprendizagens e um *Bloco B* essencialmente na tecnologia e na resolução de problemas.

A partir de 1991, o SIEM passou a ser promovido pelo Grupo de trabalho sobre investigação da APM entretanto criado, que todos os anos convida um grupo de professores ligados a um instituição de ensino superior para a sua organização. O seminário em que têm participado regularmente entre cerca de 100 e 150 professores e investigadores, ocupa, como se disse, os dois dias que antecedem o ProfMat e realiza-se no mesmo local, propondo, para além das comunicações, conferencias plenárias e painéis sobre temas muito variados. Este ano vai decorrer o 17° em Setúbal.

Cronologia APM

1991

- Realiza-se no dia 19 de Janeiro, em Lisboa, a 1ª reunião do Conselho Nacional da APM.
- Com a colaboração do núcleo do Porto, decorre nesta cidade a exposição *Espírito informático*, vinda de La Villete.
- Surgem mais núcleos APM — em Janeiro, é criado o núcleo regional da Madeira e em Março o núcleo de Viseu — e prosseguem os encontros organizados pelos núcleos: 1° *LeiriMat*, o 1° encontro regional em Almada-Seixal, o *ViseuMat* 2 e o 3° *AlgarMat*.
- Realiza-se em Maio um seminário sobre avaliação, promovido pela APM.
- Cria-se na APM um grupo para organizar a participação portuguesa numa exposição sobre educação matemática ligada aos descobrimentos, a realizar no âmbito do sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) e que irá envolver cerca de 50 escolas.
- É publicada pela APM, numa co-edição com o IIE, a tradução portuguesa dos *Standards* do NCTM — *Normas para o currículo e para a avaliação para a Matemática escolar.*
- Durante este ano saem inúmeras publicações algumas das quais em co-edição — *Lógica e Aritmética* (F. Oliveira), com a Gradiva, e *O computador no ensino da Matemática* (J. Ponte, F. Nunes e E. Veloso), com o projecto Minerva.
- Realiza-se o SIEM II no Porto, onde é aprovada a constituição de um novo grupo de trabalho na APM, o Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI) em educação matemática.
- O ProfMat 91 decorre no Porto com a participação de quase 900 professores.

1992

- A *Educação e Matemática* publica em Fevereiro um número duplo temático sobre a reforma curricular em Matemática. Com este número, a revista inicia a publicação anual de um número temático que até hoje se mantém.
- Em Março, a APM consegue melhorar as instalações da sua sede mudando-a para uma sala do edifício do Externato Marista de Lisboa. Para dinamizar o novo espaço, são organizadas sessões intituladas *Matemática à conversa* que decorreram durante o 3° período, nas tardes de sexta-feira.
- Nasce em Abril mais um núcleo APM, o núcleo regional dos Açores, criado no decorrer do 1° encontro regional destas ilhas. Em Dezembro seria a vez da criação do núcleo de Coimbra.
- Decorre entre Maio e Junho, no Museu da Ciência da Universidade de Lisboa, uma exposição promovida pela APM — *Aventura no País da Matemática* — e organizada por um grupo de professores de Queluz.

- É criado mais um grupo de trabalho: O grupo de trabalho sobre História e Educação Matemática (GTHEM) que irá ter a sua primeira reunião em Março de 1993.
- Sai em Outubro o 1° número da revista de investigação *Quadrante* da APM, editada no âmbito das actividades do GTI. Este grupo inicia também neste ano a publicação da colecção *Teses* com trabalhos de dissertação para mestrado e doutoramento em educação matemática de autores portugueses ou de língua portuguesa e promove em Viseu o 3° SIEM.
- Realiza-se em Viseu o ProfMat 92 onde estão presentes cerca de 1000 professores. Durante este ProfMat é constituída uma comissão de sócios de Évora que irá lançar o núcleo APM desta região.

1993

- Nasce em Fevereiro o núcleo regional de Braga, no decorrer do *MinhoMat* 93 — 1° encontro regional de professores daquele distrito — onde estiveram presentes mais de 200 professores. Em Abril realiza-se o *ÉvoraMat* 93, 1° encontro regional do núcleo de Évora com cerca de 200 participantes.
- Por iniciativa do Grupo de Clubes de Matemática do núcleo APM do Porto realiza-se nesta cidade, em Abril, a exposição *Explorar, Jogar, Descobrir — a Matemática ao alcance de todos*, que foi visitada por cerca de 18 000 pessoas.
- É criado o Centro de Formação da APM no âmbito das actividades do Grupo de Trabalho sobre Formação Contínua. É constituída a sua comissão pedagógica e aprovado o seu plano de formação.
- Através do GTHEM a APM apoia a organização do 1° encontro Luso-Brasileiro de História de Matemática.
- Inicia-se a publicação, em tradução portuguesa, das *Addenda Series* do NCTM com o volume dedicado ao 5° ano e outro sobre Geometria sob múltiplas perspectivas.
- É criado o Secretariado Inter-Associações de Professores (SIAP) por iniciativa de várias associações, entre as quais a APM que integra o seu grupo coordenador.
- Este ano o ProfMat realiza-se em Ponta Delgada nos Açores com a presença de cerca de 550 professores. Como habitualmente é antecedido pelo SIEM, este ano na sua 4° edição.

1994

- A APM ultrapassa os 3000 associados.
- Realiza-se em Março o seminário *Calculadoras gráficas no Ensino da Matemática*, com a presença de Bert Waits dos Estados Unidos.
- A APM participa no colóquio *Aprender matemática hoje* promovido pelo IIE e organizado conjuntamente pela APM, SPM, Diário de Notícias e TSF.
- O GTHEM promove a deslocação a Portugal de John Fauvel presidente da *British Society for the History of Mathematics* que realizou, em Maio, dois ateliers na sede da APM com o tema *Practical uses of history in the mathematics classroom*.
- Integrado no seminário projectos e formação: acção, reflexão e Matemática, organizado no âmbito das actividades do Centro de formação, decorre em Lisboa, no mês de Junho, um Forum de projectos com a participação de seis projectos.
- A sede da APM passa a funcionar, a partir de Setembro, num edifício anexo à ESE de Lisboa.
- A APM faz-se representar no 2° CIBEM realizado no Brasil com a participação de vários elementos e de uma banca de publicações e de divulgação das actividades da Associação.
- Realiza-se o SIEM V em Leiria.
- O ProfMat decorre também em Leiria com a participação de cerca de 1200 professores.

1995

- São criados novos núcleos regionais. Em Fevereiro o núcleo regional da Covilhã e, em Maio, o núcleo regional de Beja lançado na sequência do 3° encontro de professores de Matemática.
- A APM celebra um convénio com a Federação Espanhola de Professores de Matemática que permite a participação dos sócios de cada uma das associações nas mesmas condições nas actividades que realizem.
- Durante o ano são organizadas na sede da APM um conjunto de 11 sessões *Fim de tarde com a Matemática* sobre temas diversos.
- Sai o n°1 do boletim Matemática no 1° Ciclo.
- Realiza-se em Coimbra, no mês de Abril, o 1° *MatForum* organizado pelo núcleo regional de Coimbra da APM e pela Delegação Regional do Centro da SPM e onde estiveram presentes cerca de 400 professores.
- Em Maio, realiza-se no Porto o seminário *Cumprir os Programas*, promovido pelo SIAP em cuja organização a APM participou.
- A APM participa no encontro *Matemática em exame* promovido, em Maio, pela Universidade Aberta e pela Universidade de Lisboa.
- O núcleo do Porto organiza em Setembro um encontro regional de professores de Matemática — *Ensinar/aprender Matemática. Que presente? Que Futuro?* — que decorreu na Maia com presença de cerca de 450 participantes.
- `apm@mail.telepac.pt` é o endereço electrónico da APM.
- É criado o Grupo de Trabalho sobre Geometria.
- Realiza-se o SIEM VII em Évora.
- No ano que se comemora o décimo aniversário do ProfMat, decorre em Évora o ProfMat 95 com a presença de quase 1500 professores.

Fátima Guimarães
Henrique M. Guimarães

XV EIEM

Sílvia Dias

Foi Monte Gordo que recebeu o XV Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM), subordinado ao tema *Currículo e Desenvolvimento Curricular: Desafios para a Educação Matemática* nos dias 7, 8 e 9 de Maio.

Tendo como destinatários todos os investigadores e professores que se interessam pelo trabalho de investigação no desenvolvimento curricular, no desenvolvimento profissional e na aprendizagem da Matemática, o XV EIEM teve por objectivos:

- Promover a reflexão sobre o tema do Currículo, do Desenvolvimento Curricular e dos desafios colocados à Educação matemática;
- Apresentar e discutir experiências que procuraram integrar dois vectores fundamentais no desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem da Matemática — as orientações curriculares oficiais e a sua gestão por parte dos professores;
- Divulgar projectos de investigação no âmbito do Currículo e do Desenvolvimento Curricular.

Neste encontro foram realizadas cinco sessões plenárias dinamizadas por professores convidados. Foi na tarde do dia 7, um domingo bem solarento, depois da recepção e distribuição dos materiais aos mais de 100 participantes, na primeira sessão plenária, *Problemáticas curriculares na disciplina de Matemática: Um confronto entre os programas para 3° ciclo de ensino básico de cinco países europeus*, Henrique Guimarães da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), fez o confronto entre os actuais programas de Matemática de cinco países europeus — Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal — para o nível de escolaridade equivalente ao 3° ciclo do ensino básico, no que se refere às finalidades e objectivos para o ensino da Matemática, aos temas matemáticos, e às orientações metodológicas e à avaliação propostos para o ciclo de escolaridade considerado. Divulgando o livro com o mesmo título, disponível na banca da APM, elaborado pelo grupo de investigação DIF-DEFCUL, esta sessão proporcionou aos participantes elementos para uma reflexão sobre problemáticas do currículo. Nesse mesmo dia, Henk van der Kooij do Instituto Freudenthal na Holanda realizou a segunda conferência *Realistic Mathematics Education: a never ending story*, incidindo nos princípios da teoria de Educação Matemática Realística (RME), nomeadamente, a Matemática como actividade humana, o princípio da (re)invenção e o papel das produções dos próprios alunos. Referiu a investigação feita no Instituto Freudenthal (FI) que tem por foco o processo de aprendizagem e tem em consideração as mudanças que o significado da aprendizagem sofre ao longo do tempo. Aqui a melhoria do processo de ensino e aprendizagem é um *work in progress* e a visualização e interactividade são as palavras-chave. Os trabalhos do dia 8 começaram com Joana Brocardo da Escola Superior de Educação de Setúbal que efectuou a sessão plenária intitulada *Desenvolvimento curricular: contributos de um projecto centrado no sentido do número*, onde apresentou um projecto de investigação, desenvolvido por um grupo de docentes de Escolas Superiores de Educação, do 1° e 2° ciclos do ensino básico e educadores de infância, centrado no estudo do sentido do número ao longo dos primeiros anos de escolaridade. Nesta conferência a investigadora reflectiu sobre as aprendizagens da equipa em termos do processo de desenvolvimento curricular, identificou os dilemas enfrentados pela equipa tanto ao nível da concepção de tarefas para propor aos alunos, como ao nível do entendimento do que significa desenvolver o *sentido do número* e dos modelos que o podem apoiar e procurou discutir o quadro de referência do projecto que poderá contextualizar o desenvolvimento de outros projectos de desenvolvimento curricular. A quarta conferência, intitulada *Del currículo al profesor y su desarrollo profesional*, foi realizada também no segundo dia do encontro, por José Carrillo da Universidade Huelva. Este investigador partindo do pressuposto de que o professor é o elemento essencial de qualquer reforma ou inovação curricular, considerou premente abordar em profundidade as suas competências necessárias para levar avante as referidas propostas curriculares, as quais supõem uma definição das competências dos alunos. Evidenciou o trabalho colaborativo entre professores e investigadores como meio de promoção do desenvolvimento profissional e neste sentido apresentou o trabalho desenvolvido por uma equipa de investigação, salientando as relações existentes entre as exigências do currículo, o conhecimento do professor e a sua própria prática. A última conferência teve lugar no último dia do encontro. Intitulada *Mudanças e resistências no currículo, um estudo de caso sobre as calculadoras*, esta foi dinamizada por Teresa Assude do Institut Universitaire de Formation des Maitres d'Aix-Marseille em França. Tendo por base a análise de um trabalho de investigação sobre a introdução das calculadoras no ensino primário a conferencista problematizou e identificou algumas das relações entre as mudanças propostas pelos currículos e as resistências para a sua implementação nas salas de aula. Salientou o facto de certas propostas curriculares não serem compreendidas porque as *razões de ser* dessas mudanças não são devidamente apresentadas ou esclarecidas. A conferencista procurou ainda responder a algumas grandes questões colocadas, tais como: Porquê mudar? Vale a pena mudar? Quais são as razões para as mudanças que são propostas nos currículos? Algumas propostas curriculares são justificadas mas não são implementadas nas aulas. Porquê? Quais são as condições que permitem que uma certa proposta curricular seja experimentada nas aulas?

Como é costume, no programa do XV EIEM existiram grupos de discussão (quatro) cujo trabalho se desenrolou durante o segundo dia, em torno dos seguintes temas: a) *Orientações Curriculares actuais*, tendo como dinamizadoras Leonor Santos, Ana Paula Canavarro, e Sílvia Machado, b) *O papel do professor no desenvolvimento curricular*, contando com a dinamização de Fátima Guimarães e Ana Luísa Paiva, c) *Perspectivas históricas sobre os currículos de Matemática*, dinamizado por José Manuel Matos, Cecília Monteiro e Henrique Guimarães, d) *Manuais escolares* dinamizado por Darlinda Moreira, Manuel Vara Pires, Paula Teixeira e João Pedro da Ponte. Nestes grupos foram apresentadas diversas comunicações orais que proporcionaram a discussão conjunta entre os participantes, permitindo o debate e reflexão sobre os temas abordados.

Houve ainda lugar a um painel intitulado *Currículo e desenvolvimento curricular na educação matemática* moderado por João Pedro da Ponte e onde intervieram Leonor Santos, Fátima Guimarães, Darlinda Moreira e Cecília Monteiro. Aqui (re)visitaram-se as grandes questões que se colocam presentemente em Portugal nesta área, a partir da contribuição dos diversos grupos temáticos do encontro.

Este encontro proporcionou um estimulante espaço de divulgação e discussão que envolveu de forma muito positiva todos os seus participantes onde se teve a oportunidade soberana de professores, educadores e investigadores apresentarem as suas investigações, reflectirem, discutirem e se conhecerem uns aos outros. Um dos aspectos mais valorizados do XV EIEM foi oferecer diferentes panorâmicas sobre o currículo e o desenvolvimento curricular em países e contextos tão diversificados, mas que convergem para um objectivo semelhante — *enfrentar* os desafios que se colocam hoje à Educação Matemática.

Mas o XV EIEM teve ainda mais: os *coffee break* que permitiam o convívio, as conversas, os encontros e a animação dos vários participantes; os rápidos almoços e jantares que proporcionavam a descontracção e o saboroso jantar em Vila Real de Santo António onde alguns tiveram a oportunidade de dar um pésinho de dança ao ritmo do rancho folclórico local.

Não poderia terminar sem antes deixar um agradecimento especial à comissão organizadora pelo excelente trabalho para que não faltasse qualquer pormenor organizativo. O que penso ter sido do agrado de todos os participantes. Termino expectante pelo próximo encontro que possivelmente decorrerá em Viseu …

Até para o ano!

Sílvia Dias

Bolseira de Investigação pela FFCUL

Os manuais escolares e as pastas de dentes

Lina Brunheira

Há uns anos atrás, integrei uma equipa que aceitou o convite de uma editora para escrever um manual de Matemática para o Ensino Secundário. Foi uma experiência que, do ponto de vista do desenvolvimento curricular, avalio como muito interessante mas que teve um lado negativo, para mim decisivo — a relação difícil que acabámos por desenvolver com a editora. Por um lado, o que nós pretendíamos era construir um material de trabalho que proporcionasse aos alunos a realização de experiências de aprendizagem ricas, capazes de fomentar o gosto pela Matemática, a sua capacidade de raciocínio e o desenvolvimento dos seus conhecimentos. Este foi o princípio que sempre nos norteou, mesmo que, admito, se possa considerar que o resultado não foi assim tão bom. Contudo, pelo lado da editora, os seus objectivos entraram em rota de colisão com os nossos uma vez que a sua postura, consubstanciada nas palavras de um seu representante, era de que "o manual escolar é como uma pasta de dentes, o que nos interessa é vender!".

Mais recentemente, alguns colegas do 1° ciclo inscritos no programa de formação contínua em Matemática, informaram-me que nas sessões de divulgação dos novos manuais para o 4° ano, algumas editoras têm veiculado a ideia de que estes manuais já foram elaborados em consonância com as ideias daquele programa de formação. Mais do que isso, até já foi anunciada a colaboração de alguns formadores — uma espécie de publicidade do tipo "o meu dentista aconselhou-me esta pasta de dentes que também é a que ele usa ...". Ora, sendo eu também formadora no referido programa, fiquei naturalmente com curiosidade ... e, na primeira oportunidade em que me cruzei com um exemplar, dei uma vista de olhos. Como já perceberam, este é o propósito do meu texto. É que a indignação, às vezes, tem de ir mais longe do que um mero desabafo com o colega mais próximo.

Assim que olhei para a capa que continha o material, reconheci uma palavra que me é familiar e de que, de facto, falamos muito na formação, já que corresponde ao instrumento de avaliação dos formandos: o portefólio. Mas o que fazia ela ali?? É que dentro da pasta estava o livro principal, um livro com exercícios e acho que uns destacáveis. Por que razão chamaram portefólio a uma capa de materiais? Qualquer semelhança entre um e outro é pura coincidência! De repente, a resposta apareceu: aí está um nome (ainda por cima de origem estrangeira) com um ar moderno, que pode dar um ar evoluído aos manuais!... Portefólio é um nome que pode vender, talvez um destes dias até encontremos no supermercado uma pasta de dentes com o nome portefólio! O despropósito seria o mesmo ...

Bom, mas as (más) surpresas continuaram ... Abri ao acaso o livro principal e deparei com um capítulo dedicado ao raciocínio (digo eu, pelo nome que deram ao capítulo). Eis algumas páginas dedicadas à calculadora — apesar de controversa no 1° ciclo, sempre é outro sinal de modernidade ... Aí aparecem uma série de "problemas" em que se sugere a utilização da calculadora para verificar o resultado. Ilustro apenas com um deles:

"*Adição*

Na turma da Ana há 13 raparigas e 12 rapazes. Quantos alunos tem esta turma?".

Aí está o que eu chamo uma tragédia em três actos — não bastava a pobreza do problema atendendo ao nível a que se destina, ainda era necessário avisar que é preciso adicionar e, imagine-se, confirmar o resultado com a calculadora! Se atendermos a que esta actividade se insere num capítulo para pensar, podemos perguntar *pensar em quê?* Só se for no que se poderia fazer com o dinheiro que fora tão mal gasto no manual!

Infelizmente, não se pense que estes disparates ou este tipo de aproveitamento do programa de formação em Matemática são exclusivos de uma editora ... Antes fossem! Há outros casos, naturalmente. Relato apenas mais um relacionado com a resolução de problemas. Mesmo não conhecendo a linha de trabalho de todas as instituições, sei que este tema tem merecido bastante atenção em muitas formações, nomeadamente a possibilidade de resolvermos um problema através de várias estratégias e o significado que cada uma delas tem relativamente à estruturação do pensamento dos alunos. Acontece que esta ideia, algo adulterada, "voou" até às páginas de um manual onde ficamos a saber que para resolver um problema que envolve a adição de 75, 25 e 15, podemos: 1ª 75 + 25 + 15 = ...; 2ª 75 + 25 = ... e a este resultado adicionar 15; 3ª 25 + 15 = ... e a esta soma adicionar 75!. Estamos, portanto, perante três estratégias diferentes!

Chega de exemplos. A verdade é que não abri muitos mais manuais e, confesso, até tenho medo de o fazer. Já sabia que, à excepção de algumas propostas de actividades, o conteúdo dos manuais do 1° ciclo é muito pobre. O desenvolvimento do raciocínio matemático tem um lugar marginal, os contextos utilizados não favorecem a atribuição de sentido à Matemática e, até mesmo o cálculo, muito valorizado tradicionalmente, é trabalhado exclusivamente através dos algoritmos, não permitindo o desenvolvimento de estratégias que favoreçam o cálculo mental. A calculadora aparece apenas como um instrumento facilitador, ignorando as suas potencialidades, por exemplo, na exploração de padrões. Infelizmente, o que se está a fazer em muitos dos novos manuais é, utilizando as palavras de um colega, uma operação de "lifting". Se isso não fosse suficientemente mau, fazem-no anunciando o trabalho de um cirurgião de nome que, no caso, é o programa de formação de Matemática para o 1° ciclo. Com estas mudanças, receio que a Matemática continuará a ser, para muitos dos nossos alunos, uma dor de cabeça. Ou será uma dor de dentes?

Lina Brunheira
ESE de Setúbal

Homenagem a Ubiratan

Foi com grande contentamento que a revista Educação e Matemática tomou conhecimento da atribuição em 2005, por parte da Internacional Commission on Mathematical Instruction (ICMI), da medalha Felix Klein, ao Professor Ubiratan D'Ambrosio. Esta justa distinção veio evidenciar mais uma vez o papel único que Ubiratan tem vindo a desempenhar no desenvolvimento da educação matemática como campo de pesquisa e o desenvolvimento do pensamento do mundo. De facto, este investigador foi pioneiro no desenvolvimento de perspectivas de investigação sensíveis às características dos contextos sociais culturais e históricos nos quais o ensino e a aprendizagem da matemática têm lugar. Todos conhecemos a bandeira que insistentemente levantou bem alto no sentido de uma matemática de qualidade para todos e não para um segmento privilegiado da sociedade.

Ubiratan D'Ambrosio, brasileiro nascido em 1932, estudou matemática no Brasil e em Itália e em 1963 defendeu a sua tese de doutoramento em ciência na Universidade de S. Paulo. Depois de uma década passada nos Estados Unidos, regressa em 1972 ao Brasil para assumir o cargo de director do Instituto de matemática Estatística e Ciências de Computação da Universidade de Campinas que desempenhou com grande competência e protagonismo incluindo novos tópicos na investigação tais como: a lógica matemática, modelação matemática, biomatemática, linguística computacional e inteligência artificial. No Brasil e na américa latina em geral o seu papel na promoção da investigação em educação matemática é inegável e comunmente reconhecido.

Durante os anos 70, Ubiratan foi-se aproximando do campo da Educação Matemática, envolvendo-se nas actividades no IACME/CIAEM (Inter-American Committee on Mathematics Education) tornando-se pouco depois vice-presidente e seguidamente presidente. Desta forma colaborou proximamente com Luiz Santaló, do Instituto Freudenthal, e com Ed Begle, contactos que foram estendidos e amplificados por via da sua participação no International Congress on Mathematical Education (ICMEs)

Ubiratan foi eleito presidente do ICMI de 1979 a 1983, altura em que ajudou a fundar a African Mathematical Union e a African Society for the Advancement of Science.

Desde o final da década de 80, Ubiratan colaborou com diversas instituições e universidades portuguesas e participou em encontros com professores. Marcou presença no ProfMat de Leiria e no Encontro de História e Educação Matemática de Braga e, mais recentemente, no encontro de homenagem a Paulo Abrantes realizado em Lisboa.

Fátima Guimarães
Helena Rocha

Grandezas e Medidas no lançamento do dardo

José Correia, Miraldina Colaço e António Guerreiro

A Escola Básica do Primeiro Ciclo N° 1 de Lagos organiza anualmente um conjunto de actividades de Expressão e Educação Físico-Motora com os seus alunos, este ano denominadas *Mundial Turma 2006*. Uma das actividades desenvolvidas com os alunos, no âmbito destes jogos, é o lançamento do dardo vortex. Uma das sessões de aprendizagem do lançamento do dardo vortex e de apropriação das regras do jogo serviu de contexto para que o professor dinamizador das actividades desportivas, em colaboração com a professora titular de uma das turmas do 3° ano da escola, trabalhassem as grandezas e medidas, particularmente o conceito de comprimento, do currículo de Matemática no 1° ciclo do Ensino Básico.

Referências culturais dos alunos

Constituíram-se as equipas — os *Super Heróis*, os *Radicais* e os *Piratas* — e definiram-se as estratégias, ainda na sala de aula, com vista à elaboração de um cartaz com os registos das medidas dos lançamentos de todos os alunos de cada uma das equipas em quadros, a serem afixados na parede, que não ultrapassassem o tamanho de uma cartolina e onde fossem facilmente visíveis os diferentes resultados das crianças.

Professor — *Então, como é que acham que podemos medir as distâncias dos lançamentos de cada aluno?*

Alunos — *Com uma fita métrica.*

Professor — *Muito bem! É uma possibilidade. Têm razão. Mas vocês já aprenderam as medidas de comprimento?*

Alunos — *Ainda não.*

As referências culturais dos alunos, nomeadamente devido à utilização de medidas padrão e de instrumentos de medida usualmente utilizados no dia-a-dia, não devem ser motivo para o uso prematuro de instrumentos de medida e de medidas normalizadas, nem devem constituir limitação para que as crianças experimentem diversas actividades que incidam na comparação directa de objectos, na sua cobertura com diferentes unidades e na contagem de unidades.

Professor — *Como ainda não estudaram as medidas de comprimento, será possível fazer as medições sem fita métrica?*

Fez-se silêncio e várias crianças pareciam não estar a entender.

Professor — *Já experimentaram medir a largura das vossas mesas de trabalho?*

Alunos — *Sim.*

Professor — *Como o fizeram?*

António — *Medimos com palmos, lápis, borrachas ...*

Professor — *Muito bem! Óptima ideia! E se quiséssemos medir as distâncias dos lançamentos? Acham que dá jeito medir com borrachas?*

António — *Não, são muito pequenas... mas podíamos medir com pés, passos, cordas.*

Professor — *Bem pensado! Eu não quero impedi-los de usar a unidade de medida que mais desejarem. Se concordarem, cada menino faz a medição do lançamento de acordo com o que considerar melhor e regista-a num papel.*

Rogério — *Posso medir com garrafas?*

Catarina — *Eu gostava de medir com o dardo!*

Iúri — *Eu faço com os pés!*

Décio — *Com passos de gigante é mais fácil!*

Professor — *Excelente imaginação! Não é por falta de unidades de medida que deixamos de registar os nossos resultados.*

Arredondamento de uma medida

A estratégia estava definida, cada aluno utilizaria a unidade que fosse mais do seu agrado para medir a distância atingida pelo dardo vortex. Após todos terem realizado os lançamentos, no pátio do recreio da escola, e feito a respectiva marcação com pinos coloridos identificados com o nome dos atletas, passou-se à discussão.

Aluno — *Professor, não dá uma medida certa! Como é que eu faço?*

Professor — *Tens razão! Falta um bocadinho para mais um pé. Como achas que poderemos ultrapassar essa dificuldade?*

Fez-se silêncio.

Professor — *Sugiro que pensem em conjunto no assunto, no seio da equipa, discutam e digam-me depois as vossas conclusões.*

Nas situações da vida do dia-a-dia, ao contrário das situações dos manuais escolares, as medidas, por vezes, não são exactas e é necessário decidir qual o arredondamento mais adequado em relação a cada uma das situações concretas. Fazer os alunos experimentarem estas decisões é contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas fundamentais para a compreensão do conceito de medida e do conceito de arredondamento.

Valery — *Professor, podíamos contar mais um.*

Professor — *És capaz de explicar melhor?*

Valery — *Então, o meu lançamento mede quatro cordas e mais um bocadinho, por isso registava cinco cordas.*

Professor — *Parece-me uma solução aceitável! Mas os colegas das outras equipas o que é que acham da ideia?*

Décio — *Eu não compreendo.*

Professor — *Valery, importas-te de voltar a explicar aos colegas?*

Após a explicação toda a turma percebeu e ficou estabelecido que, quando não desse uma medida certa, faziam uma aproximação por excesso, isto é, acrescentariam mais um, como disse o Valery. E, com maior ou menor dificuldade, as medidas foram efectuadas e registados os respectivos valores.

Professor — *Agora que já todos fizeram as vossas medições, se quiséssemos fazer cartazes que mostrassem os resultados alcançados por cada equipa, como poderíamos apresentá-los?*

Xavier — *Escrevíamos os nossos nomes e púnhamos as medidas.*

Professor — *É um começo. Muito bem! Mas, se cada um usou uma unidade de medida diferente como conseguimos ver quem fez o maior lançamento e o menor?*

Inês — *Professor, eu não estou a perceber bem!*

Professor — *Tens razão, talvez não tenha sido bem explicado. Muitas vezes, vocês ouvem-me dizer que o resultado dos jogos não é o mais importante ... mas, sim, a participação ...*

Gonçalo (eufórico) — *E o respeito pelos colegas, pelos adversários e pelas regras dos jogos.*

Professor — *Muitos parabéns! Estou bastante feliz com o vosso espírito desportivo! Mas o que eu pretendia saber neste momento era qual a possibilidade de elaborarmos um cartaz que nos permitisse saber os lançamentos das equipas!*

Rogério — *É muito fácil!*

Professor — *Então, como fazes?*

Rogério — *Escrevo o meu nome e o dos meus colegas e escrevo as medidas dos lançamentos ...*

Professor — *Mas todos usaram a mesma unidade de medida?*

Rogério — *Eu fiz com palmos, mas o Décio fez com pés de lado e a Constança com passos ...*

Utilização de unidade padrão

Seguiu-se um processo de negociação entre o professor e os alunos com vista à necessidade da utilização de uma mesma unidade de medida para a ordenação das diferentes distâncias.

Professor — *Vamos lá pensar em conjunto. Se cada elemento da equipa usou unidades de medida diferentes, como é que o cartaz poderá mostrar quem lançou o dardo mais longe ou mais perto?*

Os alunos pareciam não estar a entender a questão.

Professor — *Então, os pés têm o mesmo valor que os passos?*

Gonçalo — *Não, os passos são maiores!*

Professor — *Então, como poderemos ultrapassar esta dificuldade?*

Houve grande discussão e não estava fácil encontrar uma solução.

António — *Professor, já sei!*

Professor — *Então, qual é a tua proposta?*

António — *Os capitães das equipas é que medem os lançamentos de cada menino da equipa!*

Professor — *Queres concretizar melhor, António?*

António — *Medem os lançamentos de todos os meninos da equipa!*

Professor — *Já percebi! Estás a sugerir que as equipas combinem a unidade de medida para todos os elementos, mas o capitão é que mede. É isso?*

António — *Sim. Se os* Super Heróis *combinarem medir com os pés, é o capitão, o Valery, que mede os lançamentos de todos os meninos da sua equipa, porque assim é sempre a mesma medida ...*

Professor — *Boa ideia, rapaz! Eu diria mais, é uma ideia luminosa de uma cabeça brilhante. Todos perceberam a proposta do António? Concordam? Óptimo! Então, são os capitães que fazem as medições da respectiva equipa e registam-nas na ficha que vos dei. Vamos ao trabalho!*

Comparação entre medidas e unidade de medida diferentes

Após a conclusão das medições e do respectivo registo, regressámos à sala de aula, ordenaram-se os diferentes resultados e discutiu-se a relação de grandeza entre as diferentes unidades de medida.

António — *Professor, o meu lançamento deu 12 garrafas, mas o Valery mediu com os pés e deu 10!*

Professor — *Vocês ouviram o que o vosso colega disse? A medida do lançamento do António foi de 12 garrafas que é igual a 10 pés do Valery! Então qual é maior, a medida do pé ou da garrafa?*

Alunos — *A medida do pé.*

Professor — *Rogério, importas-te de explicar melhor?*

Rogério — *Então, se o pé é maior do que a garrafa, são precisos menos pés do que garrafas ...*

Professor — *Bom raciocínio! Parece-me que todos concordam com o Rogério. O pé do Valery é maior do que a garrafa.*

João — *O Valery mediu primeiro com cordas e deu-lhe 5 cordas, mas com pés deu 31!*

Professor — *Atenção, quero toda a turma a pensar. O que mede mais, a corda ou o pé do Valery?*

Alunos — *A corda.*

Professor — *Se é a corda, quem consegue descobrir quantas vezes mede mais?*

Fez-se um momento de silêncio na sala. Muitos alunos pareciam reflectir sobre a questão.

António — *Professor, a corda é seis vezes maior do que o pé.*

Professor — *Boa, António, és capaz de explicar melhor?*

António — *Então, seis vezes cinco são trinta ...*

João — *Professor, posso dizer uma coisa?*

Professor — *Vamos dar atenção ao colega que tem uma observação a fazer!*

João — *O pino do Valery estava atrás do meu e ele contou como se o meu estivesse ao pé do dele, para dar uma corda completa.*

Professor — *Sim, compreendo. Combinámos que quando não desse uma medida certa, aproximávamos para a unidade seguinte. Todos os capitães usaram o mesmo critério, fizeram da mesma forma?*

Os capitães responderam afirmativamente e concluímos que, se houve alguns lapsos nas contagens, estes não tiveram a ver com as aproximações para as unidades seguintes, mas sim com desatenções.

A noção de medida de comprimento desenvolveu-se durante uma prova desportiva de lançamento do dardo vortex e concretizou-se na discussão da necessidade de utilização de uma medida padrão para a comparação de distâncias. Pelo caminho, falou-se de arredondamento por excesso e da comparação entre diferentes medidas. Os alunos entusiasmaram-se na resolução na actividade desportiva e na actividade matemática, os professores envolveram numa dinâmica de construção do conhecimento matemático a partir da exploração de actividades de expressão e educação físico-motora.

José Correia e Miraldina Colaço
Escola Básica do 1º Ciclo Nº 1 de Lagos

António Guerreiro
Escola Superior de Educação da Universidade do Algarve

O Ensino da Matemática Porque falha?

"— O estudante deve adquirir tanta experiência de trabalho independente quanta for possível. Mas se for deixado sozinho com um problema, sem qualquer ajuda ou com ajuda insuficiente, é possível que não faça qualquer progresso."

George Polya do seu livro "Como Resolver Problemas"

Sou Sócio da Associação há pouco tempo e pretendia ter alguma participação na discussão a propósito do ensino da nossa disciplina.

Não adianta pintar os números negros da situação actual. Queria sim, dar uma contribuição para alterar o panorama apresentando uma perspectiva diferente das que se têm visto nos textos que abordam estes assuntos.

Contrariamente a muitas opiniões, não acho que a culpa seja dos alunos! Também não acho que seja dos professores, nem dos manuais, nem dos programas, nem dos pais, nem das condições nas escolas, nem dos ministros, nem do governo. Podemos admitir que alguma culpa pode ser atribuída a cada um dos factores no entanto o grande culpado são os "novos tempos"! Mas não só.

Embora todos reconheçam que vivemos "novos tempos", e que esses tempos exigem novas soluções, essas soluções não apareceram e muitas tentativas não têm produzido resultados positivos, antes pelo contrário. Mas já há quem se tenha apercebido que as soluções antigas deixaram de funcionar há muito, e se tenha adaptado com sucesso aos "novos tempos". Como?

De forma simples: Com trabalho! Com trabalho correctamente adaptado a cada matéria. Trabalhar em Matemática não é o mesmo que trabalhar em Português, por exemplo, embora o princípio da necessidade de trabalho se mantenha.

Os estudantes não aprendem porque não trabalham as matérias. E facto notável, dá a impressão, a quem tenta analisar as coisas de um ponto de vista exterior, que tudo conspira para que assim seja.

Verifiquemos algumas coisas que afastam os jovens da sua tarefa de trabalhar as matérias:

1. A maioria dos jovens não tem em casa quem os ajude. Os pais trabalham ou não têm conhecimentos para ajudar os filhos.
2. A maioria dos jovens não gosta da escola. Porque estão lá obrigados e, se as coisas não correm bem, também não tem vontade de estudar em casa!
3. A televisão, o computador, o *game-boy* exercem um fascínio enorme sobre os jovens, o que lhes rouba o resto de vontade que poderiam ter de estudar ao chegar a casa.
4. Habituados à televisão e ao ritmo do espectáculo, têm dificuldade em estar atentos nas aulas durante muito tempo. Uma aula não é um espectáculo.

Perante este panorama é necessário encontrar alternativas. Só vejo uma: fazer os jovens trabalhar na escola, mas sobretudo na sala de aulas.

É claro que a forma de trabalhar nas aulas deverá levar em linha de conta os factores adversos que já referimos. Pensando nas aulas de matemática, um esquema possível poderia ser:

1° Reduzir ao mínimo a exposição oral do professor. É difícil, nas circunstâncias actuais, prender a atenção dos alunos durante muito tempo.

2° O professor coloca uma lista de tarefas, para os alunos resolverem na aula. Estes problemas (tarefas) devem ser resolvidos, durante o resto da aula com a ajuda e estímulo do professor.

3° O professor desloca-se pela sala para acompanhar o desenrolar do trabalho ou para atender a pedidos de ajuda.

Esta forma de trabalhar, poderia ser designada como filosofia de laboratório, ou metodologia de laboratório, dadas as tarefas passa-se ao trabalho, creio que poderia fazer uma diferença radical relativamente à clássica aula do professor a explicar e os alunos a ouvirem e a "passarem o quadro".

O professor deve assumir um papel de liderança que é fundamental para tornar a aula produtiva e interessante. Deve preparar a aula com base no princípio que vai dar a matéria aos poucos e pôr os alunos a trabalhar nela. Assim pode acompanhar melhor o progresso dos alunos e aperceber-se quando a matéria está compreendida para passar à frente.

Não poderá esperar que todos compreendam tudo de forma imediata. Se alguns não acompanharem, poderá avançar e mais tarde voltar atrás. Também muitas vezes acontece que as matérias seguintes lançam luz sobre coisas anteriores. Cabe ao professor usar o seu bom senso para gerir estas situações.

O professor deve ter uma atitude de disponibilidade dialogante no 3° tempo, de apoio e ajuda, para que os alunos criem um sentimento de confiança, e acreditem nas suas capacidades para terminar as tarefas com êxito. É desmotivante encravar num ponto da resolução de um problema sem ter ajuda para continuar.

Esta forma de trabalhar proporciona um acompanhamento contínuo das matérias, em que o aluno não deixa para depois a realização dos exercícios. Desta forma o aluno sente o seu próprio progresso, e isso é estimulante e não cria a ideia que as coisas são muito difíceis.

As aulas deverão decorrer com alguma informalidade. O que aproximará professor e aluno com consequências positivas no clima de trabalho que deve existir na sala de aula. Não será necessário um grande silêncio, pois será benéfico que os alunos troquem impressões entre si para resolver as tarefas. Deve-se, no entanto, contrariar os comportamentos que prejudiquem o bom desenrolar do trabalho.

Serão possíveis outros esquemas de trabalho que induzam igualmente o trabalho dos alunos. O fundamental é que encontremos estratégias que os levem a envolver as suas massas cinzentas. Sem isso não acho possível inverter a situação actual.

A matemática e as ciências em geral não se aprendem só por ouvir falar. É preciso trabalho do aluno. E como não é muito realista esperar que a maioria trabalhe em casa, a alternativa será fazê-los trabalhar nas aulas.

Gostaria que este texto pudesse suscitar uma discussão útil nas páginas da nossa revista, em torno das boas práticas pedagógicas.

João Carvalho

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Sucesso e insucesso em Matemática

Sou professor de Matemática há alguns anos e tenho trabalhado sobretudo com alunos repetentes do 12° ano (muitos deles mais do que uma vez). Além disso acompanho com regularidade alunos de outros anos (no que se chama "explicações"). A partir da minha experiência, do que tenho ouvido a algumas pessoas ligadas ao ensino da Matemática e do recente Teste Intermédio Nacional sobre Probabilidades e Funções Exponencial e Logarítmica (17/03/2006) gostava de pôr à consideração de professores, alunos e responsáveis pela educação e pela Matemática as seguintes questões:

1. A prova nacional de Matemática do 12° ano (código 435 até 2004/05) incluía, e muito bem, um formulário relativo a áreas, volumes, trigonometria, sucessões, regras de derivação, números complexos e limites notáveis. Por que razão cada teste realizado pelos professores nos vários anos não contém um formulário deste tipo (adaptado, evidentemente, a cada ano e às matérias sobre que incidem os testes)? Por que razão o teste intermédio não tinha um formulário com os limites notáveis adequados?
2. Por que razão se incluem em certos testes e no teste nacional referido noções de anos anteriores ou que não foram pura e simplesmente dadas? (Refiro-me, no caso do teste de Março, ao objecto/conceito "octaedro" estudado apenas no 10° ano não sendo, sequer, acompanhado de uma figura como já aconteceu em anos anteriores; e à noção de "lucro" cuja definição não aparecia no enunciado nem é estudada em Matemática).
3. As provas nacionais das várias disciplinas incluem as cotações das várias questões. Por que razão não se faz o mesmo em cada teste realizado por cada professor em cada turma?
4. Na correcção dos exames nacionais tem que se atribuir uma cotação em cada questão (e, por vezes, em cada etapa específica). Por que razão não se faz o mesmo em cada teste para que o aluno saiba exactamente quanto é que foi descontado por cada erro?
5. A prova nacional de Matemática tem, em geral, 7 questões de resposta múltipla e 4 questões com cerca de 12 alíneas no total para serem respondidas em 120 minutos. Por que razão não se segue este modelo (adaptado obviamente a cada ano e matérias) nos testes realizados ao longo dos anos? Por que razão há testes do 10° ano e 11° anos com mais de 25 questões (entre alíneas e questões de resposta múltipla) para serem realizados em 90 minutos? Por que razão o teste de Março tinha apenas 6 alíneas no Grupo II obrigando a que cada uma valesse 20 ou mais pontos?
6. Os bons professores de Matemática que tive caracterizavam-se por:

   — Escreverem *toda* a matéria no quadro;

   — Assinalarem as páginas do *manual* onde o aluno pode rever ou estudar a matéria dada;

   — Indicarem, *semanalmente*, aos alunos 6 ou 7 exercícios para fazer e *entregar as resoluções (ou tentativas de resolução) ao professor* com *indicação das dúvidas*;

   — Disponibilizarem-se para tirar *dúvidas pessoais* em determinadas horas da semana;

   — Referir *ligações da Matemática* com outras disciplinas nomeadamente a Física, a Filosofia, a História, a Biologia, etc. e sugerir pequenos trabalhos relacionados com estes aspectos;

   — Informar e propor a participação dos alunos em concursos, desafios, (competição saudável!) sobre questões matemáticas.

   Será que nestes aspectos não há muito a fazer nas nossas escolas (básicas, secundárias e superiores) e nas equipas de elaboração de testes ou provas nacionais?
7. E quanto à avaliação em cada período e no final do ano? As orientações dos programas diziam há tempos que os testes não deveriam ter um peso superior a 60 ou 70 por cento. Este princípio é seguido nas escolas? Que outros instrumentos de avaliação são utilizados?
8. Quando se fala de resultados de exames é frequente chamar a atenção para a diferença entre as classificações das escolas e as dos exames para concluir, em geral, que se esta diferença for igual ou maior que 3 ou 4 há qualquer coisa que não está bem no trabalho do professor. Ora, o contrário é que, a meu ver, significa que algo vai mal nas escolas porque deve haver muitos mais instrumentos de avaliação do que os testes sumativos.
9. Como é que os Conselhos Pedagógicos e o Ministério da Educação acompanham estas questões nas escolas?

Manuel B. Reis

Professor de Matemática no Ensino Particular

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Corridas e sensores: Que doce!

Andreia Sénica, Elsa Francela e Margarida César

Introdução

A escolha das tarefas propostas aos alunos constitui um dos aspectos mais relevantes e importantes da prática docente, pois diversos estudos mostram que a Matemática é uma das disciplinas mais rejeitadas, com uma grande percentagem de insucesso, bem como uma das disciplinas mais selectivas.

O decorrer do primeiro período é marcante para a construção de uma representação social mais positiva da Matemática e, portanto, há que começar de uma forma interessante, motivante e desafiadora para os alunos (Oliveira, Teles & César, 2002). Saber conquistar o interesse e atenção dos alunos tem-se revelado, desde sempre, uma tarefa imprescindível, que passa necessariamente pelo professor.

A utilização da tecnologia implica, antes de tudo, uma nova postura do professor de Matemática, conforme João Pedro da Ponte salientou num editorial da revista *Educação e Matemática* de 1997: "A sua função principal deixa de ser a de dar o programa para passar a ser a de interpretar, gerir e adaptar o currículo às características e necessidades dos seus alunos.".

Quadro de referência teórico

Há muito que o papel do professor deixou de ser o de mero transmissor de conhecimento, apresentando-se cada vez mais desafiador, multifacetado e também mais complexo (César, 2000c, 2001). Para ser encarada como uma "actividade humana" (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998, p. 10), a apropriação dos conhecimentos matemáticos, não pode ser feita por transmissão passiva, mas sim através da própria experiência (APM, 2001). Cabe aos docentes mudar as suas práticas de modo a serem capazes de lidar com a diversidade e a consequente procura de formas de apropriação de conhecimentos e mobilização de competências que sejam igualmente apelativas para os seus alunos (César, 2000b).

As interacções sociais facilitam o desenvolvimento socio-cognitivo e a apropriação de conhecimentos, por parte dos alunos, sendo também uma maneira de motivá-los e ajudá-los a desenvolver atitudes mais positivas face à Matemática (César, 2000a, 2000c). O trabalho colaborativo facilita a autonomia dos alunos, contribuindo para um melhor apro-

9° ANO

Escola Secundária Padre Alberto Neto

FICHA DE TRABALHO 1

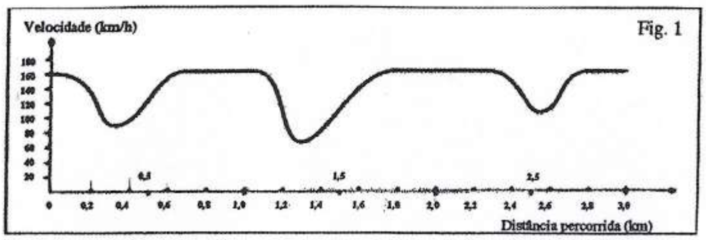
Nomes: ____________

e ____________

Análise de gráficos

Novembro 2004

O gráfico da figura 1 mostra a variação da velocidade de um carro de corrida na segunda volta a um circuito plano com 3 km.



Descrevam o percurso do carro de corrida.

Figura 1. Tarefa 1: Análise de gráficos.

veitamento e para o seu próprio desenvolvimento. Ajudar os colegas pode ser útil aos alunos que apresentam desempenhos muito conseguidos, ao permitir-lhes observar processos conhecidos e reflectir sobre eles a um nível superior. Para isso, é preciso que a ajuda não se limite a dar informações mas envolva explicação. A ajuda pode também beneficiar os alunos com dificuldades desde que estes reconheçam a sua necessidade e tenham oportunidade de usar, de facto, as explicações recebidas (Matos & Serrazina, 1996).

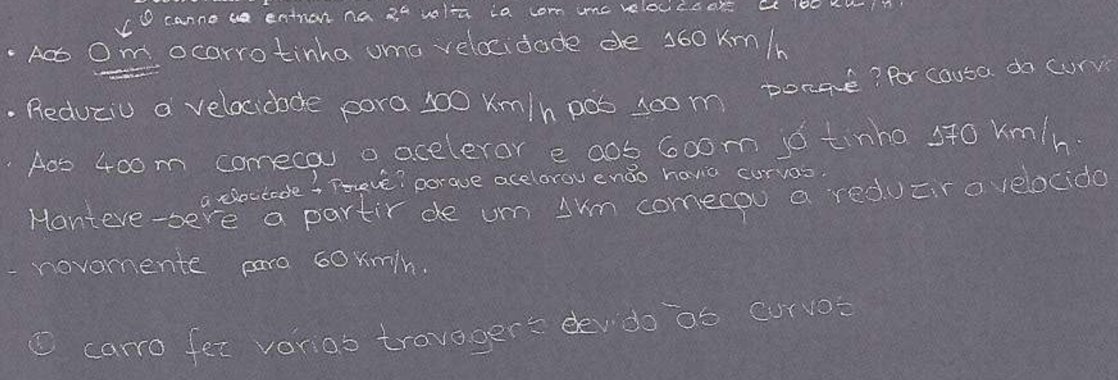
A natureza das tarefas propostas na aula de Matemática é também uma questão central no ensino desta disciplina. É fundamental desenvolver uma metodologia de trabalho adaptada aos alunos que temos e às sugestões curriculares, considerando que "o ensino da Matemática, em todos os níveis, deve proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados, (...) estimulando a curiosidade, a atitude crítica, o gosto de comunicar, (...) a independência e a auto-confiança intelectuais" (APM, 1990, p. 39). A Matemática ganha assim outra dimensão. Não se fomenta a existência de alunos passivos mas sim de alunos activos, críticos, criativos, que manifestem uma certa flexibilidade mental. Esta mesma flexibilidade mental é considerada por Oliveira (1998) como requisito necessário a qualquer cidadão para atingir o sucesso pessoal e profissional.

Metodologia

Este estudo integra o projecto *Interacção e Conhecimento*, que visa estudar e promover o trabalho em díade e/ou em grupo como forma de melhorar a auto-estima dos alunos, desenvolvendo as suas competências matemáticas e sócio-cognitivas. O projecto existe há onze anos, abrangendo diversas escolas de todo o país e turmas do 5° ao 12° anos de escolaridade.

A recolha dos dados fez-se a partir da observação directa, de uma redacção matemática e de uma tarefa com sensores realizadas em dois blocos de aulas (a primeira teve a duração de 45 minutos e a segunda de 90 minutos), abrangendo duas turmas do 9° ano de escolaridade (20+24 alunos), numa escola situada nos arredores da grande Lisboa. Posteriormente, foi aplicado a ambas as turmas um questionário, no início do segundo período, para saber a opinião dos alunos face à metodologia de trabalho utilizada até ao momento, na sala de aula. As transcrições serão feitas na íntegra, contendo eventuais erros ortográficos das respostas originais dos alunos.

A redacção matemática foi utilizada para introduzir o tema da "Análise de gráficos". As professoras distribuíram uma ficha de trabalho por cada aluno, em ambas as turmas. Era objectivo das docentes que os alunos, em díade, produzissem uma breve composição onde expressassem, por escrito, o percurso de um carro de corrida representado por um gráfico distância-velocidade, contemplado no enunciado que lhes fora fornecido (ver Tarefa 1, figura 1). A tarefa com recurso a sensores de movimento (foi utilizado um CBR – Calculator-Based Ranger e uma calculadora gráfica TI-83) foi fornecida, aos alunos, pelas docentes e utilizada para finalizar o tema já anteriormente referido, do capítulo


Descrevam o percurso do carro de corrida.

O carro ao entrar na 2ª volta ia com uma velocidade de 160 km/h.

- Aos 0 m o carro tinha uma velocidade de 160 Km/h
- Reduziu a velocidade para 100 Km/h pós 100 m porquê? Por causa da curva
- Aos 400 m começou a acelerar e aos 600 m já tinha 170 Km/h.

a velocidade → Porquê? porque acelerou e não havia curvas.

Manteve-se a partir de um 1 Km começou a reduzir a velocidade novamente para 60 Km/h.

O carro fez várias travagens devido às curvas

Figura 2

Proporcionalidade inversa e Representações gráficas. Nesta tarefa os alunos eram desafiados a pensar no movimento que tinham de realizar, explorando as capacidades do CBR, para responder a um conjunto de questões (ver Tarefa 2, figura 4). Para resolver esta tarefa foram formados grupos de quatro elementos, sendo um deles o porta-voz.

Resultados

O desempenho das tarefas

O final de cada período constitui uma fase crucial no calendário escolar. Na nossa escola, os alunos só pensavam nas férias de Natal e nas actividades desportivas que se iriam realizar na última semana de aulas. Escolher tarefas adequadas é o que todos os professores desejariam fazer de modo a facilitar o empenho dos alunos, a apropriação de conhecimentos e o seu sucesso académico. Sendo agentes essenciais do processo educativo, os alunos assumem um papel preponderante no modo como decorrem as actividades de sala de aula.

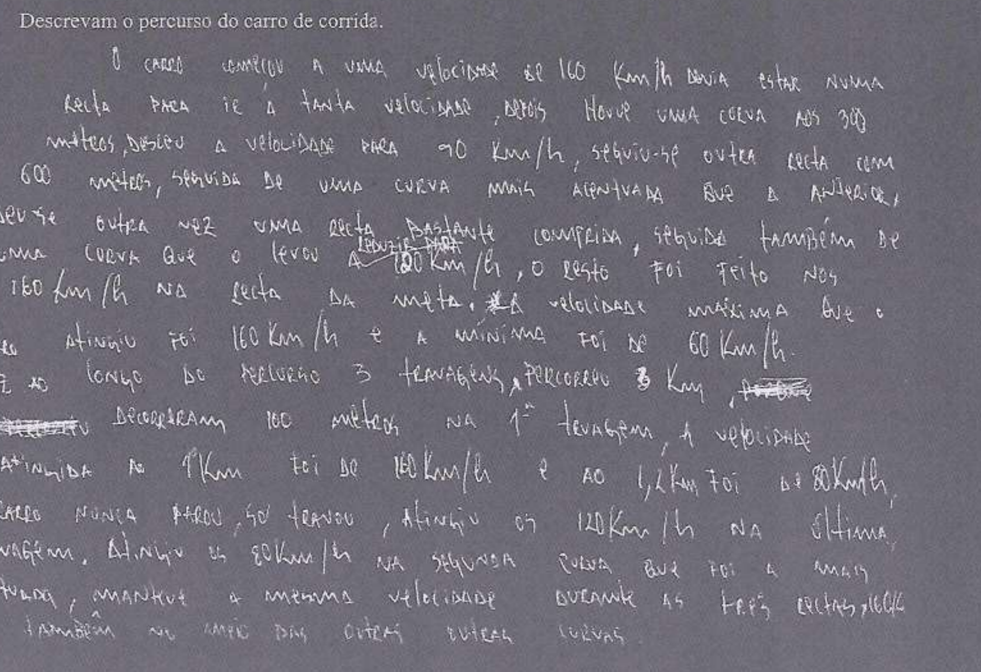
A facilidade de compreensão (Tarefas 1 e 2) e manuseamento dos materiais de que os alunos dispunham (Tarefa 2) contribuiu para promover a auto-estima académica positiva, levando muitos deles a participar numa actividade matemática e a reconstruir a sua representação social da disciplina que, para muitos, era bastante negativa.

Tarefa 1 — Análise de gráficos

Após a distribuição do enunciado de uma ficha de trabalho onde era pedido aos alunos que, em díade, elaborassem uma redacção matemática sobre o percurso descrito num gráfico por um carro de corrida, os alunos trocaram e discutiram ideias entre si, confrontaram diferentes opiniões e estimularam a sua atitude crítica perante a situação apresentada. Pela troca de ideias com o colega desenvolveram a autoconfiança, auto-crítica e clarificaram os conceitos e relações matemáticas, melhorando a sua capacidade de argumentação e de clareza, tanto na língua materna como matemática, pois têm de ser capazes não só de defender as suas ideias como saber explicá-las ao seu parceiro e à turma de uma forma perceptível, facilitando a compreensão dos temas que estão a ser trabalhados. Seguiu-se a discussão geral, na qual alguns dos alunos apresentaram à turma as interpretações produzidas, em díade, referentes ao gráfico que lhes tinha sido fornecido. Os alunos leram, aos colegas, os textos elaborados. Foram confrontadas diferentes formas de interpretação e análise do gráfico apresentado (ver Tarefa 1, figura 1).

Em seguida apresentamos excertos de duas das composições elaboradas pelas díades: a da Rafaela e do Rui (figura 2) e a do Mário e da Madalena (figura 3).

Foi visível a dificuldade que alguns dos alunos, habitualmente com sucesso académico a todas as disciplinas, nomeadamente a Matemática, apresentaram face a uma tarefa desta natureza. Por ser uma tarefa aberta, os alunos que, frequentemente, viam a Matemática como sendo uma disciplina de aplicação de fórmulas e conceitos, sentiram uma maior dificuldade em produzir a referida composição, como foi o caso da Rafaela. Como podemos observar, utilizou tópicos para analisar o referido gráfico. Esta aluna mostrava preferência por exercícios mais estruturados, onde julgava ser bem claro o que se pretendia e o que deveria ser feito. No


Descrevam o percurso do carro de corrida.

O carro começou a uma velocidade de 160 Km/h devia estar numa recta para ir a tanta velocidade, depois houve uma curva aos 300 metros, desceu a velocidade para 90 Km/h, seguiu-se outra recta com 600 metros, seguida de uma curva mais acentuada que a anterior, deu-se outra vez uma recta bastante comprida, seguida também de uma curva que o levou a ~~reduzir para~~ 120 Km/h, o resto foi feito nos 160 Km/h na recta da meta. A velocidade máxima que o carro atingiu foi 160 Km/h e a mínima foi de 60 Km/h.
Fez ao longo do percurso 3 travagens, percorreu 3 Km, decorreram 100 metros na 1.ª travagem, a velocidade atingida ao 1 Km foi de 160 Km/h e ao 1,2 Km foi de 80 Km/h, o carro nunca parou, só travou, atingiu os 120 Km/h na última travagem. Atingiu os 60 Km/h na segunda curva que foi a mais acentuada, manteve a mesma velocidade durante as três rectas, 160 Km/h e também no meio das outras outras curvas.

Figura 3.

entanto, alunos como o Mário, que usualmente estão desatentos e desinteressados nas aulas, nesta tarefa deu largas à sua imaginação e criatividade, produzindo uma monografia bastante rica, onde focou os principais aspectos a destacar pelo gráfico. Este aluno gostava de trabalhar em situações e problemas ligados à realidade e mostrava, ainda, ser capaz de avançar com ideias bastante pertinentes e de ter um raciocínio intuitivo que o levava a participar com hipóteses e sugestões adequadas. Assim, trabalhar em díade foi uma ferramenta mediadora para promover os raciocínios dos alunos, onde a inter-ajuda e a partilha de opiniões acentuadas, foram visíveis nos rostos empenhados e nas interacções estabelecidas pelos estudantes daquelas duas turmas.

Tarefa 2 — Desenhar com o movimento

Depois de distribuídos os enunciados da tarefa, foi disponibilizado um período de tempo para troca de ideias, opiniões e estratégias a aplicar em cada uma das questões. Um dos alunos, o Sérgio, habitualmente pouco empenhado e interessado nas aulas de Matemática, neste dia mostrara-se bastante motivado e repetia constantemente: "*Stôra, já fiz todas as perguntas! Deixe-me ir fazer os movimentos* …". Na sua ficha de trabalho representara o procedimento a fazer em cada uma das questões com pequenos desenhos ilustrativos das situações. Vejamos o exemplo indicado na figura 5.

Cada aluno apresentou a estratégia encontrada pelo seu grupo, movimentando-se perante o CBR, que recolhia os dados, enquanto o porta-voz explicava os passos do seu colega, à turma. Posteriormente, era apresentado o gráfico correspondente ao movimento do aluno, na calculadora gráfica e projectado, na parede da sala, com o auxílio do view-screen e do retroprojector. Entretanto, foram colocadas questões a alguns alunos de outros grupos acerca da interpretação do mesmo, de modo a explorar mais o tema da "Análise de gráficos".

Os alunos, na sua maioria, mostravam-se interessados e todos queriam ir tentar fazer os gráficos. A Cátia, uma aluna com muitas dificuldades na apropriação de conceitos e que não tinha apropriado alguns conteúdos matemáticos de anos lectivos anteriores, dizia perante a turma: "*Até eu estou a conseguir fazer isto!*". O Gil, um aluno bastante tímido e introvertido, e com dificuldades em comunicar os seus raciocínios e opiniões, quando solicitado pela professora para ir fazer, perante a turma, os movimentos relativos a uma determinada questão exclamou: "*Eu não, stôra! Mande um dos meus colegas!*". A professora, confiando nas capacidades do aluno, incentivou-o, dizendo palavras encorajadoras, conseguindo, por fim, que ele fosse fazer a actividade. Durante a resolução das restantes questões da tarefa, o Gil voluntariou-se para ir fazer os movimentos em frente do CBR, partilhando antecipadamente com os colegas do grupo as suas ideias.

Ambas as tarefas serviram para promover as interacções sociais, argumentação e discussão de opiniões entre os alunos.

FICHA DE TRABALHO 5

Nomes:

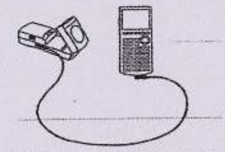
____

e

____

Material necessário:

- Um CBR
- Uma Calculadora gráfica TI
  com cabo de ligação e o programa Ranger.



Descrição da experiência:

Através de movimentos em frente do CBR, criar gráficos tempo-distância que dêem origem a diferentes formas.

Procedimento:

1. Fixa o CBR numa mesa;
2. Posiciona-te a, pelo menos 0,5 metros do CBR e a uma distância inferior a 4 metros;
3. Corre o programa RANGER;
4. Em MAIN MENU selecciona 2: SET DEFAULTS;
5. Seleccionar START NOW e pressiona ENTER;
6. Para iniciar a recolha de dados, pressiona ENTER e, alinhado com o CBR, efectua o movimento necessário para criar as formas pedidas;
7. Se o gráfico não for adequado, tenta de novo pressionando ENTER e seleccionando 5: REPEAT SAMPLE em PLOT MENU.

1\.
1.1 Indiquem como se devem movimentar para criar um gráfico que se assemelhe a um monte com um planalto no topo.

1.2 Façam a experiência, de acordo, com a descrição que fizeram.

2\.
2.1 Descrevam um movimento que cria uma montanha com um cume aguçado.

2.2 Como é que o vosso movimento pode fazer com que os lados da montanha sejam mais ou menos inclinados?

3\.
3.1 Simulem um conjunto de duas montanhas com a mesma altura, com os cumes aguçados mas em que os lados da primeira tenham maior inclinação do que os da segunda.

3.2 Como teriam que modificar o vosso movimento para que a altura da segunda montanha fosse metade da primeira?

4\.
4.1 Suponham que querem desenhar a letra V. Que movimento têm que descrever?

4.2 Que teriam que fazer para obterem a letra W?

4.3 Que modificações fariam no vosso movimento para obter a letra M?

Explorando um pouco mais...
Acham que conseguiriam fazer todas as letras do alfabeto?

Figura 4. Tarefa 2: Desenhar com o movimento.

A voz dos alunos

Nestas turmas, onde esta metodologia de trabalho constituía uma novidade, a receptividade por parte dos alunos foi nítida. Na opinião dos alunos "*ajuda a desenvolver uma forma de trabalho em grupo*" (Carla) e "*(...) é fixe e é sempre uma forma de tirar dúvidas e compartilhar ideias*" (Maria João). Apesar de apenas ter decorrido um período, os alunos já revelavam atribuir sentido ao trabalho em díade. Segundo a Cristina, os alunos devem "*trabalhar em conjunto (...) sem que um trabalhe mais que o outro.*", acrescentando ainda que "*(...) se eu não percebo então o meu colega deverá explicar-me e vice-versa. Caso não percebamos os dois deveremos falar até chegarmos a uma conclusão.*". Opinião compartilhada por um dos seus colegas: "*Cada um dá uma sujestão e em conjunto chegamos há conclusão*" (Joel). Assim, trabalhar em díade e/ou em grupo foi uma ferramenta mediadora para promover os raciocínios dos alunos, tal como eles próprios realçaram nos questionários "*Deve-se aceitar e ouvir a opinião do colega e tentar chegar a um acordo se as opiniões forem diferentes*" (Patrícia) e outras competências tais como a cooperação, a "*entreajuda e amizade*" (Maria João).

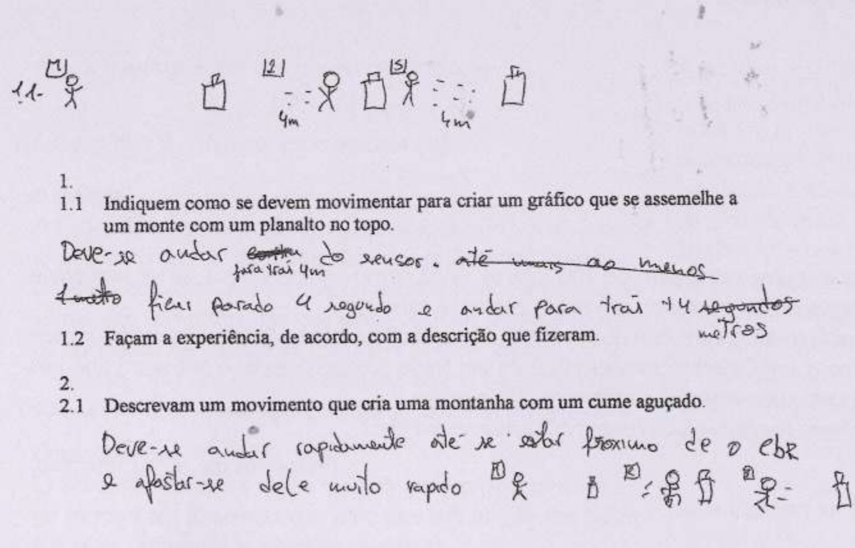
Para muitos deles, o trabalho colaborativo é preferível em relação às metodologias tradicionais uma vez que serve "*para expor as dúvidas ao colega e resolve-las em conjunto*" (Sérgio), "*para podermos ter uma melhor relação com os colegas*" (Patrícia), "*para habituar a colaboração entre as pessoas para o futuro*" (Fabrício) e "*para melhorar os trabalhos em grupo e melhor compreensão da matéria*" (Carla). Para alguns alunos, a metodologia constituiu uma verdadeira revolução na própria maneira de ver a disciplina, como é o caso da Maria João que, apesar de, no início do ano lectivo, para ela a Matemática ser "*chata e aborrecida*", referiu que esta agora era "*(...) muito mais interessante e divertida*" acrescentando ainda que "*tenho muito mais interesse em vir às aulas*".

Quando questionados acerca do que lhes tinha agradado mais nas aulas de Matemática, a opinião da Bruna destaca-se, referindo que o trabalho em díade e/ou em grupo é um meio facilitador de aprendizagem e, consequentemente, motivador. O que mais a entusiasmou foram: "*os trabalhos em díade, pois torna-se mais fácil efectuar um trabalho que não estejamos muito à vontade (...)*" e "*trabalhar com o CBR*" pois "*é uma coisa bastante interessante.*".

Considerações finais

Foi gratificante ver que, utilizando tarefas de natureza distinta das habituais que à primeira vista para os alunos não pareciam relacionadas com a Matemática mas que mais tarde acabaram por perceber que estavam, se conseguem explorar conceitos e conteúdos matemáticos de uma forma diferente, promovendo o empenho e a participação de todos os alunos. São tarefas desta natureza que dão um *new look* à Matemática, essa disciplina de que tantos se recusam a gostar.

Ao proporcionarmos a estes alunos experiências de aprendizagem diversificadas em contextos de aprendizagem


1.1- [1] [2] 4m [3] 4m

1.

1.1 Indiquem como se devem movimentar para criar um gráfico que se assemelhe a um monte com um planalto no topo.

Deve-se andar ~~...~~ do sensor para trás 4m. ~~até mais ao menos~~ ~~4 metro~~ ficar parado 4 segundos e andar para trás 4 ~~segundos~~ metros

1.2 Façam a experiência, de acordo, com a descrição que fizeram.

2.

2.1 Descrevam um movimento que cria uma montanha com um cume aguçado.

Deve-se andar rapidamente até se estar proximo do o CBR e afastar-se dele muito rapido [1] [2] [3]

Figura 5.

ricos e variados conseguimos, através da observação participante e da análise de estratégias de resolução, vê-los entusiasmados, empenhados, demonstrando o gosto de comunicar com os outros, quer por escrito quer oralmente, dando espaço de intervenção aos seus parceiros. Constatámos que os alunos mais inseguros queriam participar, esquecendo, por momentos, a sua timidez atroz e a baixa auto-estima que até então revelavam e, mesmo os mais desmotivados, que habitualmente estavam desinteressados nas aulas de Matemática, foram os que mais intervenções fizeram durante a realização destas duas tarefas.

São aulas como estas que devem quebrar a rotina do dia-a-dia. São designadas por tarefas não habituais, às quais os alunos aderem mais facilmente e com mais entusiasmo (César, 1996). É importante dar a conhecer aos alunos a outra Matemática, aquela que é lúdica mas que ao mesmo tempo, permite que explorem conceitos matemáticos. Utilizar novas tecnologias para a aprendizagem adocicar, melhor não podia resultar ...

Referências bibliográficas

Associação de Professores de Matemática (1990). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2001). Competências Matemáticas essenciais na Educação Básica. In *Competências Essenciais no Ensino Básico: Visões multidisciplinares*, 23 (pp. 34-35). Porto: ASA — Cadernos do CRIAP.

César, M. (1996). Interacção entre pares e resolução de tarefas matemáticas. In *Actas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 225-240). Lisboa: APM.

César, M. (2000a). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J.P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação e Matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da Escola de Verão em Educação em Matemática — 1999* (pp. 5-46). Lisboa: SPCE — Secção de Educação Matemática.

César, M. (2000b). Interagir para Aprender: A escola inclusiva e as práticas pedagógicas em Matemática. In E. Fernandes, & J.F. Matos (Eds.), *Actas do ProfMat2000* (pp. 145-158). Funchal: APM.

César, M. (2000c). Interacções na aula de Matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J.P. da Ponte, J.M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 13-34). Viseu: SPCE - Secção de Educação Matemática.

César, M. (2001). E o que é isso de aprender?: Reflexões e exemplos de um processo complexo. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Eds.), *Actas do ProfMat2001* (pp. 103-109). Vila Real: APM.

Matos, J.M., & Serrazina, M.L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Oliveira, H.M. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, A., Teles, L., & César, M. (2002). As Duas Faces da Lua: Uma outra visão da Matemática. In *Actas do ProfMat2002* (pp. 132-136). Viseu: APM. [Suporte: CdRom]

Ponte, J.P. (1997). O Ensino da Matemática na sociedade da informação. *Revista Educação e Matemática, 45*, 1-2.

Ponte, J.P., Oliveira, H., Cunha, M.H., & Segurado, M.I. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas*. Lisboa, Instituto de Inovação Educacional.

Andreia Sénica, Elsa Francela
Escola Secundária Padre Alberto Neto

Margarida César
Universidade de Lisboa
Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências

Na carruagem do comboio

Outro dia fui de Lisboa ao Porto de comboio numa carruagem de 100 lugares. Tinha como companheiros vários homens e várias mulheres. O comboio fez quatro paragens e fui reparando em quem entrava e saía.

Em Santarém desceram um terço dos passageiros e entraram dois homens. No Entroncamento, saíram novamente um terço dos presentes e entraram mais dois homens. Em Coimbra, também ficaram um terço dos passageiros e entraram dois homens. Finalmente, em Aveiro desceram um terço dos viajantes e entraram dois homens.

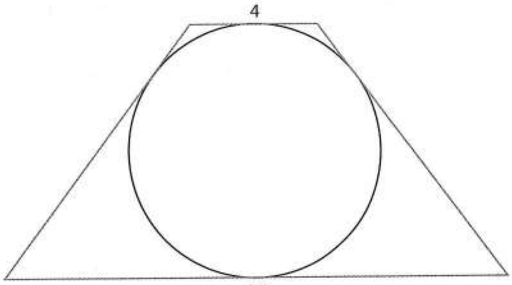
Olhei à volta e, contando comigo; já só havia homens na carruagem. Quantos eram eles?

(Respostas até 30 de Setembro)

Uma circunferência no trapézio

No número 86 de *Educação e Matemática* propusemos um problema e, para além dele, uma investigação suplementar para os mais entusiastas.

Problema



Uma circunferência é tangente aos quatro lados de um trapézio isósceles.

As bases do trapézio medem 4 e 16 cm.

Qual é a medida do raio da circunferência?

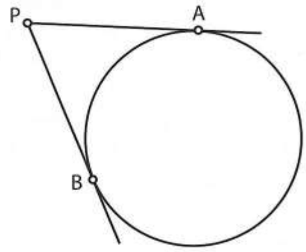
Tivemos 10 respostas: Ana Luísa Correia (Lisboa), Daniel Castanho, Edgar Martins (Queluz), Francisco Branco (Ovar), Francisco Estorninho (Lisboa), Francisco Martins (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Rita Bastos (Lisboa) e Tiago Dias (Coruche).

As resoluções apresentadas foram variadas. Por exemplo, o Pedrosa usou a mediana do trapézio e o teorema de Tales, o Francisco Estorninho utilizou a geometria analítica, o Tiago, o Edgar e o Francisco Martins basearam-se na semelhança de triângulos, a Graça e o Francisco Branco foram pela trigonometria e o Daniel enveredou profundamente pela geometria dinâmica no computador com o programa GSP.

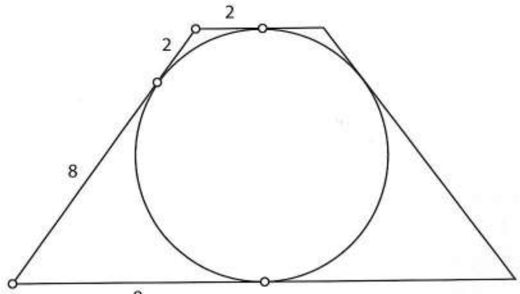
1ª resolução

A abordagem que nos parece mais simples foi a utilizada pela Rita e pelo Edgar (na sua segunda resolução).

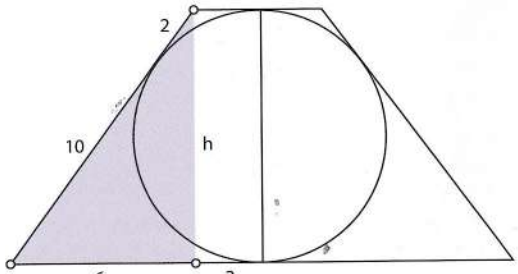
A propriedade principal utilizada na resolução deste problema é o facto de serem congruentes os dois segmentos definidos nas tangentes a uma circunferência tiradas por um ponto exterior. No caso da figura, $\overline{PA} = \overline{PB}$. (Rita)



Aplicamos esta propriedade e o facto de o trapézio isósceles ter um eixo de simetria que divide as bases ao meio:



Consideramos o triângulo sombreado:



Aplicamos finalmente o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 10^2 - 6^2 \text{ ou } h = 8.$$

Logo, o raio da circunferência mede 4 cm.

2ª resolução

A Graça apresentou uma segunda resolução. Provou e depois usou uma propriedade (conhecida dos geómetras): num quadrilátero convexo que admite uma circunferência inscrita, as somas dos comprimentos dos lados opostos são iguais. Logo, os dois lados não paralelos somam $4 + 16 = 20$ cm.

Então, cada um destes lados tem 10 cm. Tal como na resolução anterior, basta agora aplicar o teorema de Pitágoras.

Generalização

O Francisco Martins e a Ana Luísa foram um pouco mais longe e chegaram à formula que dá o raio em função das bases b e B de um trapézio isósceles qualquer:

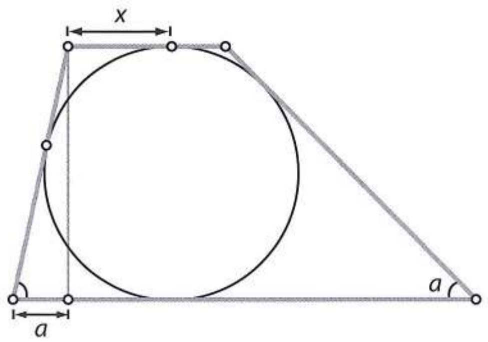
$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b \cdot B}$$

Investigação suplementar

Que aconteceria se o trapézio não fosse isósceles?

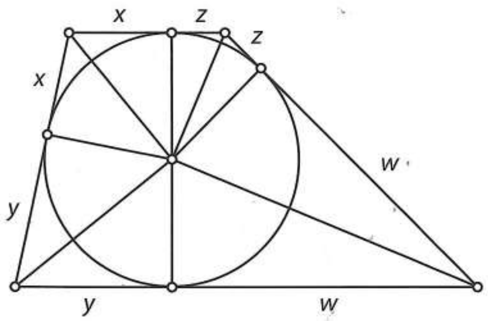
Não estávamos à espera de tantas respostas a esta generalização nada fácil, mas os problemas de geometria têm o condão de entusiasmar muita gente.

A primeira dificuldade é que um trapézio escaleno com uma circunferência inscrita e do qual são conhecidas as bases não fica completamente definido. Torna-se necessário portanto encontrar uma fórmula que dê o raio da circunferência em função não apenas das duas bases mas também de um outro elemento do trapézio.



A Graça escolheu um dos ângulos a da base maior, o Pedrosa os dois ângulos da base, o Francisco Martins o comprimento a, a Rita e a Ana Luísa o comprimento x.

Vejamos a resolução da Ana Luísa.



Acho que vou começar por observar relações num trapézio qualquer que admita uma circunferência tangente aos quatro lados. Em primeiro lugar os pontos de tangência nas bases são extremos de um diâmetro (por um ponto só passa uma perpendicular a duas rectas paralelas). Em segundo lugar o centro da circunferência situa-se sobre a bissectriz de qualquer dos ângulos internos (porque é equidistante dos lados) donde se conclui a igualdade, dois a dois, dos 8 triângulos em que fica dividido o trapézio. Daí os segmentos assinalados na figura com a mesma letra serem geometricamente iguais.

Sendo r o raio da circunferência inscrita, a aplicação do teorema de Pitágoras aos triângulos em que dividimos o trapézio permite concluir que

$$r^2 = xy = zw.$$

Se o trapézio for rectângulo, torna-se evidente que

$$z = w \text{ e } r = z.$$

Da resolução do sistema

$$r^2 = zw, z = b - r \text{ e } w = B - r$$

conclui-se que

$$r = \frac{bB}{b + B}.$$

Conhecidas então as bases b e B, podemos concluir que, tal como para os trapézios isósceles, existe um único trapézio rectângulo que admite uma circunferência tangente aos quatro lados.

Se forem dados apenas os comprimentos das bases existem infinitos trapézios que admitem circunferência tangente aos quatro lados. Teremos que acrescentar mais uma condição para tornar o problema de solução única. Uma hipótese será definir o valor de x. Virá então:

$$r^2 = xy = zw, z = b - x \text{ e } w = B - y$$

Daqui deduzimos a relação

$$r^2 = \frac{xB(b - x)}{b}$$

Este problema deu-me imenso prazer. Tentei escrever o menos possível porque as demonstrações com todos os pormenores levariam muitas páginas. Espero que se perceba tudo.

Só mais uma coisa: Podemos também definir apenas uma base, o valor de x nessa base e a altura do trapézio. Ficará depois determinada a outra base. Este foi o processo que me pareceu mais fácil para desenhar no *sketchpad*. Mando também um anexo com esse ficheiro. Pena que a revista não seja dinâmica. Na verdade, estando on-line, podia lá ser posta qualquer coisa dinâmica, não é?

XVII SIEM — Seminário de Investigação em Educação Matemática

Escola Superior de Educação de Setúbal
13 e 14 de Novembro de 2006

O XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática, pretende constituir-se como um fórum de divulgação e debate das principais linhas de investigação em educação matemática, tanto a nível nacional como internacional, envolvendo de forma activa investigadores e professores.

As Conferências Plenárias são proferidas por conferencistas convidados, nacionais e estrangeiros, abordando temas relevantes da investigação em educação matemática. O Painel é um espaço destinado à discussão de questões transversais a partir do contributo de um conjunto de convidados. As Comunicações, apresentadas por proposta dos participantes, constituem espaços privilegiados para a troca de ideias. Cada uma terá uma duração de quarenta e cinco minutos, sendo os primeiros vinte destinados à apresentação e os restantes vinte e cinco à discussão. De modo a fomentar o debate, prevê-se a organização de simpósios em que serão agrupadas comunicações com afinidades temáticas.

Música e Matemática

Com organização do Centro de Matemática da Universidade do Porto, da Casa da Música e da Escola Superior de Música e Artes do Espectáculo, decorrerá nos dias 6 e 7 de Outubro de 2006 um encontro dedicado à Música e à Matemática. O principal objectivo do evento é reunir matemáticos e músicos (profissionais, investigadores, estudantes ou simples interessados) para divulgar temas de interesse comum numa atmosfera informal, proporcionando uma aproximação entre duas áreas que cada vez mais interagem, quer a nível da análise musicológica, quer a nível das novas tendências na composição musical.

Mais informações encontram-se disponíveis em

`http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/`

ICTMA XIII

A 13ª Conferência Internacional sobre Modelação Matemática e Aplicações decorrerá em Dhulikhel, no Nepal, de 23 a 27 de Julho de 2007. para mais informações consulte a página de internet:

`http://www.ku.edu.np/ictma13/`

Mais perto da APM em 2006

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

Quadro 1

<table>
<tr><th>Sócio</th><th>Sócio residente no estrangeiro</th><th>Sócio Estudante</th><th>Sócio Aposentado</th><th>@-Sócio*</th></tr>
<tr><td>46,00€</td><td>50,00€</td><td>32,50€</td><td>36,00€</td><td>36,00€</td></tr>
<tr><td colspan="4">Revista Educação e Matemática impressa e on-line
(saem 5 números por ano e uma delas é temática)</td><td>Revista Educação e Matemática on-line</td></tr>
<tr><td colspan="4">APMinformação impresso e on-line (4 números por ano)</td><td>APMinformação on-line</td></tr>
<tr><td colspan="5">Opção de assinatura da revista Quadrante impressa (2 números por ano — 10,50 €)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acesso à zona on-line para sócios</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa
Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento</td></tr>
<tr><td colspan="5">Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito
da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção</td></tr>
</table>

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Instituições

Quadro 2

<table>
<tr><th colspan="3">Opções</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td>Opção 1</td><td colspan="2">Assinatura anual da revista Educação e Matemática (5 números)</td><td>35€</td></tr>
<tr><td>Opção 2</td><td colspan="2">Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>20€</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opção 3</td><td>A</td><td>Assinatura anual da revista Educação e Matemática (5 números); APMinformação (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)</td><td>46€</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>15€</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opção 4</td><td>A</td><td>Assinatura anual da revista Educação e Matemática — 2 exemplares de cada número (5 números); APMinformação (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)</td><td>66€</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>15€</td></tr>
</table>

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções