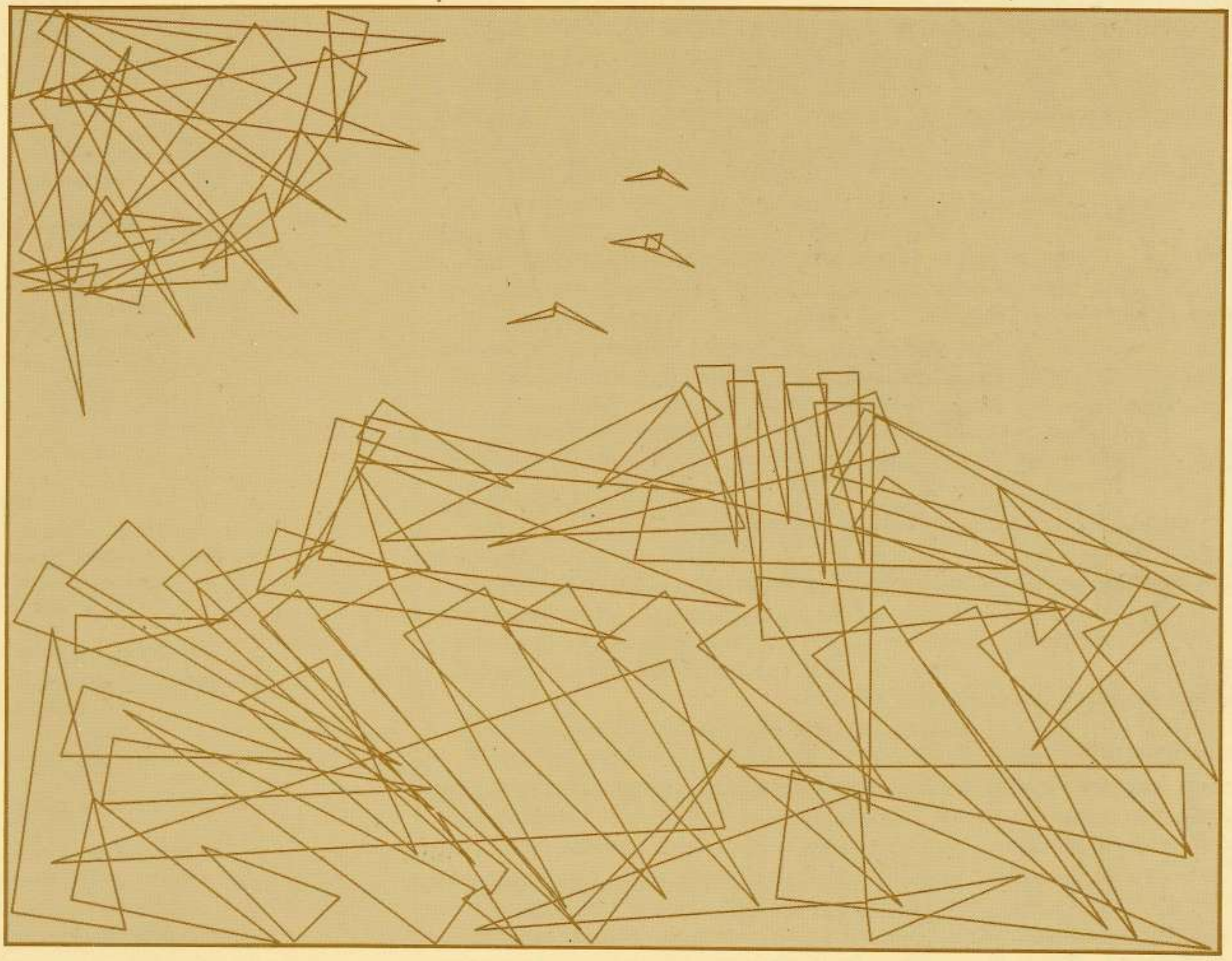
Educação e Matemática

N.º 7

3.º trimestre de 1988



Era uma vez um triângulo rectângulo

250$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

CORPOS GERENTES DA ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DIRECÇÃO

Presidente:

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Vice-presidente (presidente eleito para 89/90):

Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação de Lisboa

Secretário:

Conceição Mesquita, Escola Secundária da Falagueira — Amadora

Tesoureiro:

Cristina Loureiro, Escola Secundária Ferreira Borges — Lisboa

Outros membros:

Ana Vieira, Escola Secundária de Linda-a-Velha
Carlos Próspero, Escola Secundária João de Deus — Faro
Eduardo Veloso, Projecto Minerva
Fernando Duarte, Escola Superior de Educação de Viseu
Gertrudes Amaro, Escola Superior de Educação de Castelo Branco
Helena Hilário, Escola C+S de Castelo de Vide
Isabel Margarida Garton, Escola Secundária Jaime Moniz — Funchal
Isabel Vale, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
José António Duarte, Escola Superior de Educação de Setúbal
Maria do Loreto Couceiro, FCT da Universidade Nova
Teresa Neves, Escola Secundária Carolina Michaelis — Porto

MESA DA ASSEMBLEIA GERAL

Presidente:

Raul Fernando Carvalho, Escola Superior de Educação de Setúbal

Vogais:

Isabel Quinta Santos, Escola Secundária de Padrão da Légua — Porto
Manuel Saraiva, Universidade da Beira Interior — Covilhã

CONSELHO FISCAL

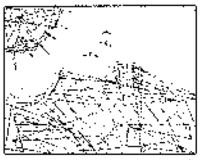
Presidente:

M.ª de Lurdes Cangueiro, Escola Preparatória Gaspar Correia — Sacavém

Vogais:

Alice Inácio, Escola Secundária de D. Pedro V — Lisboa
Ana Maria Lopes, Escola Secundária Marquês de Pombal — Lisboa

Educação & Matemática



Revista da Associação de Professores de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 7, 3.º trimestre de 1988

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
António Bernardes
Eduardo Veloso
Fernando Nunes
Henrique Guimarães
José Manuel Duarte
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:
Ana Cristina Santos, Ana Paula Canavarro, Ana Paula Natal, António Bernardes, Cláudia Sofia Peça, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Egídio Pereira, Fernando Nunes, Filipa Cortez, João Filipe Matos, Leonor Moreira, Lurdes Figueiral, Lurdes Serrazina, Maria de Jesus Bicho.

Capa:
O desenho da capa foi realizado por Cláudia Castanheira, aluna do Colégio N. S. Graça — V. N. Milfontes

Entidade proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 1500 exemplares

Fotocomposição, fotolito e montagem:
Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:
Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Começar de Novo

Sentada à minha mesa de trabalho, folheio, pela 1.ª vez, o livro de Matemática que acabei de comprar. Com entusiasmo.

Arrumo o livro juntamente com os outros e sinto-me agradada com o novo ar do meu espaço de estudo: cadernos e livros novos, tudo cuidadosamente arrumado.

Sinto vontade de aprender, de estudar, de triunfar...

Os livros novos parece que me pedem isso mesmo e esse desafio provoca-me uma sensação muito intensa de ansiedade. Ansiedade de conhecer os meus professores, ansiedade de conhecer novas coisas... ansiedade de viver, ansiedade de começar de novo!

Este ano promete. Vou conseguir dar o meu melhor até ao fim e sentir-me, finalmente realizada. Esta expectativa estimula-me e leva-me até, para ser franca, a desejar o 1.º dia de aulas!...

Mas depois desse dia vieram outros... e depois outros... e eu, sem me aperceber bem como, encontrei-me dispersa, desinteressada e saturada. Um vazio muito grande foi-se instalando em mim. O espaço não preenchido das minhas expectativas pesou mais e mais. Mas, quais eram elas afinal? Muito exigentes? ... ou simplesmente a oportunidade de pensar, de escolher, de discutir ideias, de fazer coisas que me interessam, ... de aprender a vida!

....

Este ano promete!

É, por um lado, o alargamento da escolaridade básica e o redimensionamento do parque escolar.

É, por outro lado, o estatuto da carreira docente e, talvez, uma nova tabela salarial.

É, ainda, a reorganização curricular, os novos programas.

E de tudo isto vai resultar o quê?

Alargamento da escolaridade básica...

Todos nós temos uma ideia vaga do número de jovens que abandonam precocemente a escola, quer para entrarem no mundo do trabalho, quer para trilharem os caminhos da marginalidade. Todos nós temos uma ideia precisa do número (muito maior) daqueles que, entrando todos os dias nos estabelecimentos de ensino, ficam, porém, todos os dias «lá fora».

Alargar a escolaridade básica sem, simultaneamente, procurar corresponder aos anseios dos jovens, sem procurar proporcionar-lhes o que eles procuram, é criar mais zonas de conflito dentro da escola, é contribuir para a frustração de alunos e professores.

Redimensionamento do parque escolar...

A maior parte dos nossos estabelecimentos de ensino estão superlotados. Todos os anos se encerram bibliotecas, salas de convívio, laboratórios, para ter salas para os que chegam de novo.

De 5 em 5 horas, a escola expulsa um contingente de alunos para receber outro.

Vai-se à escola, não se vive na escola.

Esperemos que redimensionar signifique construir espaços onde os jovens possam ensaiar os seus projectos de vida.

(Continua na pág. 31)

PROFMAT 88: alguns apontamentos

Eduardo Veloso, Colaborador do Projecto Minerva

De 7 a 9 de Setembro realizou-se em Faro o Encontro anual dos professores de Matemática, o PROFMAT 88. O que se segue não tem quaisquer preocupações de balanço. É apenas o que diz o título. E nem sequer recorre aos apontamentos escritos, serve-se da memória que subsiste depois de muitas reuniões, discussões, balanços e relatórios que se interpuseram entre os primeiros dias do mês e hoje, dia 24 de Setembro.

Calor, calor, calor. O princípio de Setembro não é propriamente um ambiente muito estimulante para uma reunião de trabalho entre os professores de Matemática, como é o PROFMAT. E, no entanto, cerca de quatrocentos professores aguentaram durante três dias um sol tórrido com o objectivo de participar em sessões práticas, se envolver em discussões de grupo sobre a reforma curricular e ouvir comunicações várias sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Na realidade, trata-se de uma época má, sobretudo para aqueles, e são felizmente cada vez em maior número, que têm de preparar comunicações ou cursos, ou organizar workshops. Há que rever a data do Encontro, pensando na sua marcação em Outubro ou mesmo mais tarde.

Outra questão, porventura mais polémica, é a duração do Encontro. Julgo que devia haver mais tempo para trabalhar e mais tempo para conviver, para conversar. Três dias já não chegam, claramente. O primeiro, por mais que se lute em contrário, é sempre um dia perturbado com as chegadas, com as inscrições e com as escolhas apressadas e cada vez mais difíceis, dada a abundância crescente das comunicações e outras sessões onde queremos ir. O último dia é agitado pelas partidas, pela arrumação dos materiais e equipamentos e por outras tarefas do mesmo género. Resta o dia do meio... Mas esse é necessário para o convívio «programado e para a Assembleia Geral da APM. Assim, mal o trabalho começa já se está a pensar no fim, nas conclusões. Lanço daqui uma proposta: quatro dias inteiros para o PROFMAT? Quem a apoia?

****

Os dois dias que antecedem o PROFMAT são tradicionalmente reservados para cursos. Este ano a oferta era variada, desde cursos de iniciação a instrumentos informáticos para a aprendizagem da Matemática (Folha de Cálculo e linguagem LOGO) ou cursos dedicados ao aprofundamento de matérias curriculares dos anos terminais do secundário (Cónicas) até cursos propondo novas abordagens curriculares (Resolução de Problemas, Geometria). Conviria perceber, com vista aos futuros Encontros, e tendo em vista as preferências e as actuais necessidades dos professores de Matemática, se deveria ou não, embora mantendo a diversidade da oferta, ser dada preponderância a algum destes diferentes tipos de cursos.

No curso sobre Geometria, em que participei, os professores/alunos experimentaram sucessivamente três instrumentos na abordagem de problemas e actividades em Geometria — a linguagem LOGO, o GEOPLANO, e o programa educacional LOGO.GEOMETRIA. Na sessão de discussão final, os participantes neste curso foram unânimes em salientar que tinha havido, apesar dos instrumentos serem diferentes, uma unidade na metodologia utilizada: em lugar da exposição sequencial de «verdades», actividades de exploração e investigação, formulação de conjecturas, tentativa de prova ou refutação.

Qualquer dos «instrumentos» se mostrou adequado ao emprego de novas abordagens no ensino da Geometria. No caso do Geoplano, por exemplo, foi fácil verificar que ele não é aquele objecto tosco que «quando muito» servirá para a instrução primária, pois foram apresentadas propostas interessantes e apropriadas para os outros níveis de escolaridade. Talvez por essa razão se deu a corrida para a banca da APM, onde apareceu como novidade, o livro «O Geoplano na sala de aula».

****

Confesso que não sou um apaixonado por sessões plenárias, e é sempre com alguma preocupação e desconfiança que aguardo uma sessão em que um conferencista vai falar durante uma hora para mais de trezentas pessoas... O facto de se tratar de Ana Benavente dava a garantia de interesse do conteúdo e excelência na comunicação, mas tornava ainda mais evidente a falta de um período de reflexão e discussão, impossível dadas as limitações do programa, sobretudo em tempo. Julgo que hoje ninguém duvida que teria tido o maior interesse uma organização diferente da primeira manhã do Encontro, dedicada a desenvolver e aprofundar o tema proposto por Ana Benavente — a mudança na Escola.

A comissão do programa científico não tinha porventura outra solução senão a que foi adoptada. Mas isso levanta novamente a questão da duração — três ou quatro dias?

****

Na única comunicação a que pude assistir, a sala estava completamente cheia. As professoras Suzana e Otília descreveram a experiência que este ano tinham feito com algumas turmas do 7.º ano de escolaridade. Extremamente interessante.

À medida que ia ouvindo as duas professoras, ía-me lembrando de uma ideia exposta por Ana Benavente nessa mesma manhã — se os professores querem ser

(Continua na pág. 20)

Algumas notas sobre o ensino da Geometria

Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação de Lisboa

A Geometria e as noções ligadas à organização do espaço são necessárias para compreender, interpretar e apreciar o mundo que nos rodeia. Ela está intimamente ligada com a realidade, uma vez que é o estudo do espaço e das formas que o constituem e a nossa vida diária envolve inúmeras relações espaciais. Tarefas tão simples como escolher um itinerário num mapa ou pendurar um quadro numa parede exigem um sentido de orientação no espaço.

Mas a Geometria é dos tópicos da Matemática aquele que recebe, quase invariavelmente, uma de duas respostas dos alunos do final do ensino secundário: ou não gostaram e por isso já não se lembram, ou nunca chegaram a dar. Os professores também não se sentem muito à vontade com a Geometria e por isso quando não há tempo de dar o programa é a Geometria que é sacrificada.

No entanto, as crianças têm um interesse e curiosidade naturais pela Geometria e conseguem compreender muitas relações quando apresentadas informalmente. Por outro lado, a Geometria pode constituir um tema unificador na aprendizagem da Matemática; com base nela os alunos podem visualizar diversos tópicos em Matemática. Um exemplo é o da recta numérica que constitui um modelo representativo do número. Outra é o das figuras geométricas que podem ser um auxiliar na compreensão das fracções.

Assim, a aprendizagem da Geometria no ensino básico deve constituir uma experiência geométrica informal e dessa forma constituir uma base para um ensino mais formal. Às crianças deve ser proporcionada a realização de experiências que lhes permitam explorar, visualizar, desenhar e comparar usando objectos do dia a dia e outros materiais concretos.

Existem diferentes materiais que podem ser utilizados no ensino da Geometria. Entre eles, pela sua simplicidade, facilidade de execução e versatilidade destacamos o geoplano. A par do geoplano devem ser explorados as dobragens, os recortes e as colagens e usados outros materiais concretos.

Há diversos tipos de geoplano, o mais comum é constituído por uma base de madeira onde se espetam pregos de modo a formarem uma malha, que pode ter diversas texturas. Chama-se «geoplano de 3x3» àquele onde a malha é quadrada e tem três pregos de cada lado (9 pregos no total) como mostra a Figura 1; analogamente «o geoplano de 5x5» tem uma malha quadrada de 5 pregos de cada lado. Existem outros tipos de geoplano dos quais destacamos os «geoplanos circulares» que podem ser constituídos por 24 pregos igualmente espaçados dispostos sobre uma circunferência (Fig. 2) ou pelos pregos deste último e ainda mais 12 pregos dispostos sobre uma outra circunferência concêntrica com a anterior e com metade do raio (Fig. 3). Os geoplanos são utilizados com elásticos de várias cores, permitem «desenhar» e podem ser complementados com papel ponteado (folhas de papel que reproduzem a textura do geoplano com que se está a trabalhar).

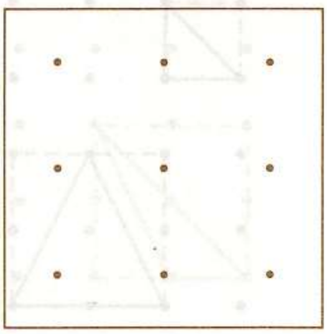


Fig. 1

Fig. 2

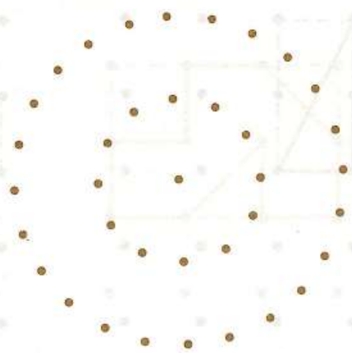


Fig. 3

Alguns exemplos de utilização do geoplano nos primeiros anos de escolaridade

No ensino pré-escolar ou no início do primário, o geoplano pode ser utilizado para que os alunos desenhem objectos seus conhecidos, ou do tipo geométrico ou imitando objectos reais. As crianças gostam de trabalhar com o geoplano pois assim conseguem desenhar rapidamente figuras que de outro modo teriam alguma dificuldade. Pode-se também pedir para reproduzirem, no seu geoplano, figuras simples feitas pelos colegas. Esta actividade de copiar figuras que outros desenharam envolve a capacidade de representação gráfica e pode ser muito enriquecedora mesmo para alunos mais velhos. Para alguns alunos pode não ser fácil esta tarefa, no entanto aquela capacidade tem de ser aprendida e praticada.

Mais tarde quando as crianças já conhecem os números pode-se-lhes pôr questões do tipo:

— Desenhar figuras cujos elásticos toquem apenas em três (quatro, cinco, ...) pregos. Qual o número mínimo de pregos em que o elástico tem de tocar para termos uma figura?

— Construir figuras que tenham zero (um, dois, três,...) pregos no interior.

Uma das vantagens do geoplano é a sua mobilidade, assim as crianças podem ver uma figura em diferentes posições. É frequente os alunos no final do ensino primário só considerarem, como quadrados, figuras do tipo do da Figura 4. Um desafio que se lhes pode colocar é o de desenharem no geoplano de 5x5 todos os quadrados possíveis, não esquecendo os «oblíquos» (Fig. 5). É conveniente que a par do desenho feito no geoplano as crianças se habituem a registar as suas figuras em papel ponteado.

O geoplano permite a utilização de processos rápidos para calcular a área de diversas figuras. Alguns destes processos permitem obter as fórmulas gerais mais utilizadas. Por exemplo, os triângulos indicados na Figura 6 têm metade da área dos rectângulos a tracejado. Este processo de calcular áreas chama-se «método das metades». Utilizando este método, pode-se calcular a área das figuras representadas na Figura 7. Partindo deste processo pode definir-se uma estratégia para se chegar à fórmula da área dos triângulos.

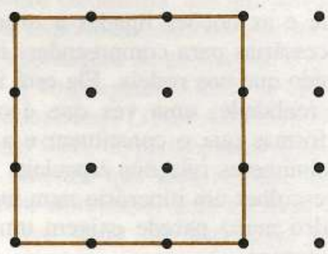


Fig. 4

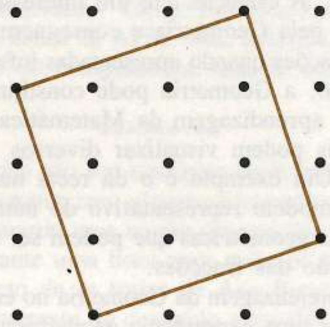


Fig. 5

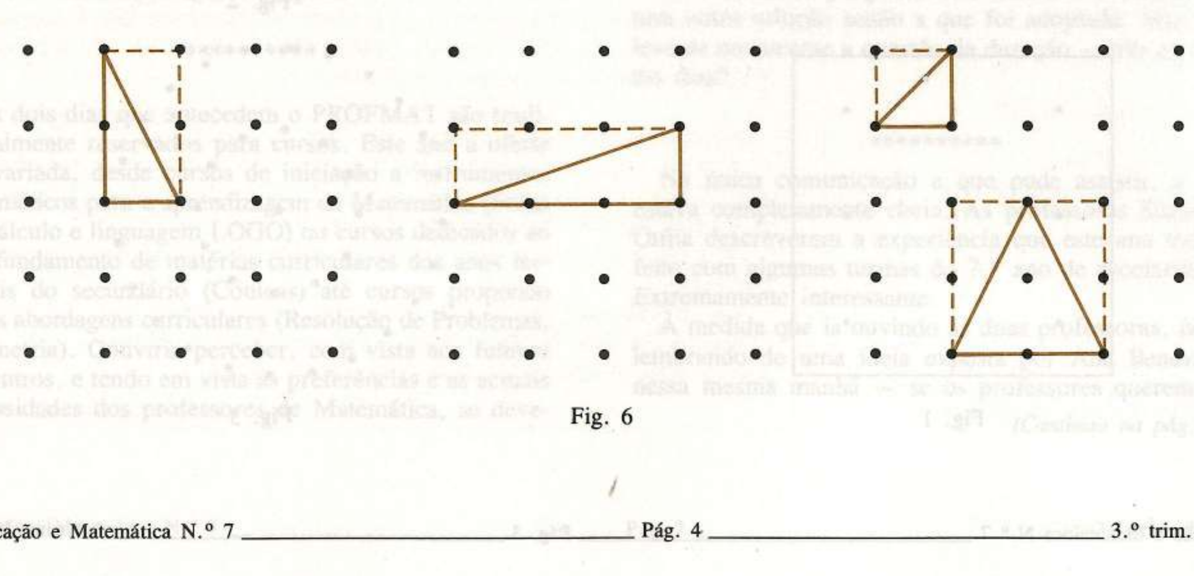


Fig. 6

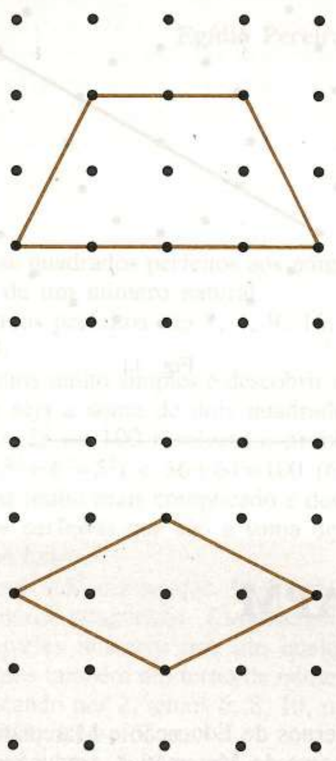


Fig. 7

Um outro sistema para calcular áreas no geoplano é o do «enquadramento». A Figura 8 mostra como diversas figuras podem ser enquadradas por um rectângulo ou por um quadrado, e a sua área calculada subtraindo, à área do rectângulo ou do quadrado, a área de figuras simples. Pode desenvolver-se uma estratégia que possibilite a descoberta de uma fórmula para a área dos rectângulos.

O geoplano circular permite realizar um sem número de actividades entre as quais destacamos as relacionadas com os ângulos e com a medida das amplitudes dos ângulos, como por exemplo:

«Colocar um elástico no geoplano circular entre o centro e um prego da circunferência (representa um raio) (Fig. 9).

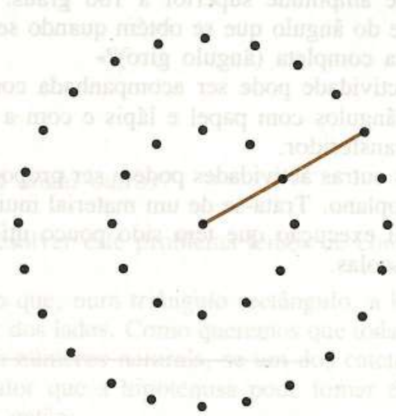


Fig. 9

Colocar agora um segundo elástico afastado do primeiro um prego (Fig. 10). Qual a amplitude dos ângulos entre os dois elásticos? Rodar o segundo elástico de mais um prego. Qual é a nova amplitude do ângulo?

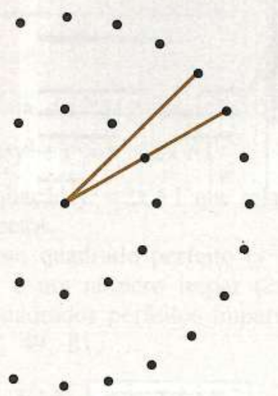
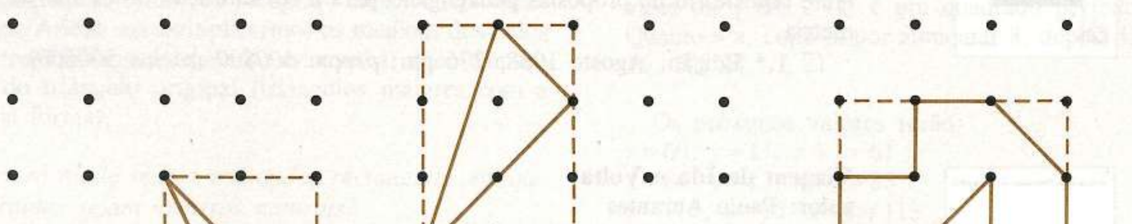


Fig. 10



Área = 4 − 2 − 1 Fig. 8 Área = 6 − 0.5 − 0.5 − 1

Medir as amplitudes dos ângulos que conseguir desenhar por este processo no geoplano circular. Encontrar-se-á um ângulo raso, cuja amplitude é de 180 graus (Fig. 11). Se continuar a rodar o elástico obterá um ângulo de amplitude superior a 180 graus. Qual é a amplitude do ângulo que se obtém quando se completa uma volta completa (ângulo giro)?»

Esta actividade pode ser acompanhada com o desenho dos ângulos com papel e lápis e com a utilização de um transferidor.

Muitas outras actividades podem ser propostas a partir do geoplano. Trata-se de um material muito versátil e de fácil execução que tem sido pouco utilizado nas nossas escolas.

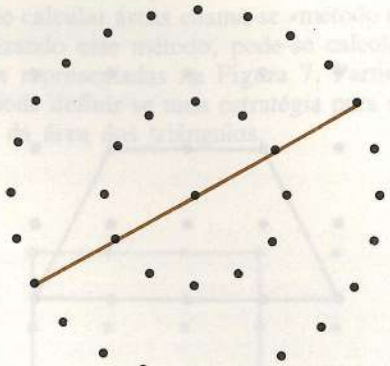


Fig. 11

Novas Publicações APM

A Natureza da Matemática

Este livro é o número 1 da série Cadernos de Educação e Matemática, que têm por objectivo divulgar, entre os professores de Matemática, traduções e originais portugueses relativos à Matemática, à Educação e à Educação Matemática. Os cadernos são editados pela APM e constituirão uma série, embora a sua publicação não seja regular. Cada caderno é formado por uma antologia de textos referentes a um daqueles grandes temas. Neste primeiro número, sobre a natureza da Matemática, são incluídos textos de Poincaré (Intuição e Lógica em Matemática), Browder e Mac Lane (A Relevância da Matemática) e Davis e Hersh (da Certeza à Falibilidade).

☐ 1.ª Edição, Setembro 1988: 75 pp.; *preço: 420$00 (sócios 350$00)*

O Geoplano na Sala de Aula

autores: Lurdes Serrazina e José Manuel Matos

Um livro muito completo sobre a utilização do geoplano na sala de aula. Contém inúmeras sugestões de actividades que confirmam a versatilidade deste instrumento da aprendizagem da Geometria e a sua possível adaptação aos diversos níveis de escolaridade. Os «comentários» que acompanham as actividades constituem um excelente repositório de propostas pedagógicas para a revitalização do ensino da Geometria.

☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 276 pp.; *preço: 600$00 (sócios 500$00)*

Viagem de Ida e Volta

autor: Paulo Abrantes

Viagens em torno de um problema e das suas possíveis explorações. Numa altura em que o «problem solving» se afirma como uma das perspectivas fundamentais na reforma curricular, um texto oportuno e estimulante, que conduz a uma reformulação de como a resolução de problemas pode ser o eixo do processo educativo em Matemática.

☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 63 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*

Números Pitagóricos

Egídio Pereira, Escola Secundária Jaime Moniz (Funchal)

Chamam-se quadrados perfeitos aos números que são o quadrado de um número natural.

Os quadrados perfeitos são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Um problema muito simples é descobrir um quadrado perfeito que seja a soma de dois quadrados perfeitos. Por exemplo, 25 ou 100 resolvem o problema porque $9+16=25$ $(3^2+4^2=5^2)$ e $36+64=100$ $(6^2+8^2=10^2)$. Um problema muito mais complicado é descobrir quais os quadrados perfeitos que são a soma de outros dois quadrados perfeitos.

Como $3^2+4^2=5^2$ diz-se que 3, 4 e 5 formam um terno de números pitagóricos. Curiosamente, se multiplicarmos aqueles números por um qualquer número natural obtemos também um terno de números pitagóricos: multiplicando por 2, temos 6, 8, 10, multiplicando por 3, temos 9, 12 e 15, etc.

Os números 3, 4 e 5 dizem-se números pitagóricos primitivos (o seu máximo divisor comum é 1), enquanto que, por exemplo, 6, 8 e 10 são números pitagóricos derivados.

Existe uma interpretação geométrica para aquilo que dissemos anteriormente e que passamos a explanar.

Se os catetos dum triângulo rectângulo medem 3 e 4, então a hipotenusa mede 5, devido ao Teorema de Pitágoras $(3^2+4^2=5^2)$. O problema inicial pode, então, ser transformado no seguinte:

Quais os triângulos rectângulos cujos lados têm medidas que são números naturais?

Um triângulo cujos lados meçam 3, 4 e 5 está nas condições anteriores, o mesmo acontecendo com um triângulo em que os lados meçam 3n, 4n e 5n.

Os alunos que já deram casos de semelhança de triângulos podem facilmente chegar à conclusão que todos os triângulos referidos no parágrafo anterior são semelhantes. Afinal, ao multiplicarmos as medidas dos lados pelo mesmo número natural, estamos a obter ampliações do triângulo original (triângulos maiores com a mesma forma).

Haverá ainda outros triângulos rectângulos em que as medidas sejam números naturais?

Claro que sim! Verificamos, por exemplo, que $5^2+12^2=13^2$, pelo que existe um triângulo rectângulo de lados 5, 12 e 13.

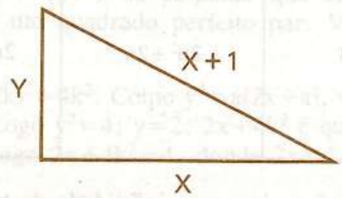
A partir do triângulo anterior podemos obter uma infinidade de triângulos semelhantes entre si; basta que os lados sejam 5n, 12n e 13n.

Haverá ainda outros?

Para resolver este problema temos de começar tudo de novo.

É claro que, num triângulo rectângulo, a hipotenusa é o maior dos lados. Como queremos que todas as medidas sejam números naturais, se um dos catetos for x o menor valor que a hipotenusa pode tomar é x+1.

Temos então:



Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$y^2+x^2=(x+1)^2 \Longleftrightarrow y^2+x^2=x^2+2x+1$$

Obtemos assim a equação $y^2=2x+1$ que relaciona os comprimentos dos catetos.

$2x+1$ tem de ser um quadrado perfeito (y^2), maior que 1 e, além disso, é um número ímpar (2x é par, 2x+1 é ímpar). Os quadrados perfeitos ímpares maiores que 1 são: 9, 25, 49, 81, ...

Para $2x+1=9$ vem $x=4$, $y=3$, $x+1=5$
Para $2x+1=25$ vem $x=12$, $y=5$, $x+1=13$
Para $2x+1=49$ vem $x=24$, $y=7$, $x+1=25$
Para $2x+1=81$ vem $x=40$, $y=9$, $x+1=41$

Analisemos os resultados anteriores! É claro que y varia de 2 em 2 (y^2 é um quadrado perfeito ímpar). Quanto a x, começa por aumentar 8, depois 12, depois 16, 20, 24, ...

Os próximos valores serão:
$x=60$, $y=11$, $x+1=61$
$x=84$, $y=13$, $x+1=85$
$x=112$, $y=15$, $x+1=113$

Para y é muito fácil encontrar uma expressão: $y=2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$.

E para x? Se a expressão que dá o valor de x for um polinómio do 2° grau na variável n, então para n=1 deve tomar o valor 4, para n=2 o valor 12 e para n=3 o valor 24.

Dado o polinómio
$P(n)=an^2+bn+c$, temos:

$$\begin{cases} P(1)=4 \\ P(2)=12 \\ P(3)=24 \end{cases}$$

donde se obtém

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=12 \\ 9a+3b+c=24 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vem $a=2$, $b=2$ e $c=0$. Logo $P(n)=2n^2+2n$.

Resumindo:

y	x	x+1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Obtivemos, assim, uma infinidade de triângulos rectângulos não semelhantes em que as medidas dos lados são números naturais.

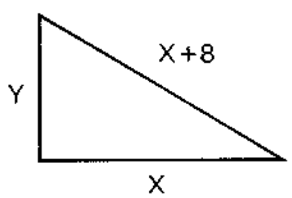
A partir de cada um desses triângulos podemos obter uma infinidade de triângulos semelhantes entre si multiplicando todos os lados por r.

Catetos		Hipotenusa
ry	rx	r(x+1)
$(2n+1).r$	$(2n^2+2n).r$	$(2n^2+2n+1).r$

É claro que podemos perguntar se ainda haverá outros triângulos nas condições pedidas. A resposta é afirmativa!

De facto, apenas considerámos até agora os casos em que a hipotenusa media mais uma unidade que o maior dos catetos.

O caso geral será:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2+y^2=(x+a)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+2ax+a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2=a(2x+a).$$

O problema já foi resolvido para $a=1$. Se $a=2$ vem $y^2=2(2x+2) \Leftrightarrow y^2=4(x+1)$, donde se conclui que $x+1$ é um quadrado perfeito e que y é um número par; se x fosse par teríamos que y, x e $x+2$ eram todos pares, pelo que não havia novas soluções (essas soluções obtinham-se do caso $a=1$, multiplicando todos os lados por 2); logo x deve ser um número ímpar e $x+1$ um quadrado perfeito par.

$x+1=4 \Rightarrow x=3,\ x+2=5,\ y=4$
$x+1=16 \Rightarrow x=15,\ x+2=17,\ y=8$
$x+1=36 \Rightarrow x=35,\ x+2=37,\ y=12$
$x+1=64 \Rightarrow x=63,\ x+2=65,\ y=16$

Resumindo:

y	x	x+2
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
...	...	...
4n	$4n^2-1$	$4n^2+1$
...	...	...

Para a=3 vem:

$y^2=3(2x+3)$. Logo $y^2=\dot{3}$, o mesmo acontecendo com y. Por outro lado $2x+3=\dot{3}$, donde se conclui que $2x=\dot{3}$ e que $x=\dot{3}$. Logo x, $x+3$ e y são múltiplos de 3 pelo que para $a=3$ não existem números pitagóricos primitivos.

Para a=4:

$y^2=4(2x+4)$; logo y é par, $2x+4$ é quadrado perfeito par. Logo $2(x+2)$ é quadrado perfeito par, pelo que $x+2$ e x são pares. Neste caso também não há novas soluções.

Para a=5:

$y^2=5(2x+5)$. Daqui concluimos que $y=\dot{5}$ e $2x+5=\dot{5}$. Logo $2x=\dot{5}$ e $x=\dot{5}$. Então x, $x+5$ e y são múltiplos de 5, pelo que não há novas soluções.

Para a=6 e para a=7 também não obtínhamos novas soluções.

Para a=8:

$y^2=8(2x+8)$. Logo $y^2=16(x+4)$, donde se conclui que y é par e que $x+4$ é quadrado perfeito. Se x for par, temos que x, $x+8$ e y são todos pares pelo que só pode haver novas soluções se x for ímpar. Se x é ímpar, então $x+4$ é um quadrado perfeito ímpar.

$x+4=9 \Rightarrow x=5,\ x+8=13$ e $y=12$
$x+4=25 \Rightarrow x=21,\ x+8=29$ e $y=20$
$x+4=49 \Rightarrow x=45,\ x+8=53$ e $y=28$
$x+4=81 \Rightarrow x=77,\ x+8=85$ e $y=36$

Resumindo:

y	x	x+8
12	5	13
20	21	29
28	45	53
36	77	85
...	...	...
$8n+4$	$4n^2+8n-7$	$4n^2+8n+1$
...	...	...

Para a=9:

$y^2=9(2x+9)$, donde vem que $2x+9$ é quadrado perfeito ímpar.

$2x+9=25 \Rightarrow x=8,\ x+9=17,\ y=15$

$2x+9=49 \Rightarrow x=20,\ x+9=29,\ y=21$

$2x+9=81 \Rightarrow x=36,\ x+9=45,\ y=27$

$2x+9=121 \Rightarrow x=56,\ x+9=65,\ y=33$

Resumindo:

y	x	x+9
15	8	17
21	20	29
27	36	45
33	56	65
...	...	...
$6n+9$	$2n^2+6n$	$2n^2+6n+9$
...	...	...

Se continuássemos a atribuir valores a **a**, iríamos verificar que de $a=10$ até $a=17$ não obtínhamos novas soluções, ao contrário do que acontece para $a=18$. Nesta altura torna-se pertinente perguntar:

Afinal para que valores de a obtemos novas soluções?

Uma primeira tentativa de resposta pode ser a seguinte: Suponhamos que **a** é um número primo diferente de 2. Da igualdade $y^2=a(2x+a)$ vem que $y^2=\dot{a}$, pelo que $y=\dot{a}$; por outro lado $2x+a=\dot{a} \Rightarrow 2x=\dot{a} \Rightarrow x=\dot{a}$. Então y, x e x+a são múltiplos de **a** pelo que as soluções podem ser obtidas do caso $a=1$, multiplicando todos os lados por **a**. Concluimos, assim, que, se **a** é primo, só há novas soluções para $a=2$.

Suponhamos, agora, que **a** não é primo. Temos dois casos: **a** não é uma potência de 2 ou **a** é uma potência de 2.

Suponhamos que **a** não é uma potência de 2.

Então **a** pode ser decomposto num produto de factores primos em que, pelo menos, um dos factores é diferente de 2. Então $a=2^{\beta_0}p_1^{\beta_1}\ldots p_r^{\beta_r}$, onde β_0, eventualmente, pode ser zero, $\beta_1,\ldots,\beta_r$ são números naturais e os factores 2, $p_1,\ldots,p_r$ são números primos distintos dois a dois. Suponhamos que β_1 é ímpar:

$a=p_1^{2m+1}.q$ (onde p_1 não divide q), ou seja $a=p_1^{2m}.p_1q$. Da igualdade $y^2=a(2x+a)$ obtemos:

$y^2=p_1^{2m}p_1q(2x+p_1^{2m}.p_1q)$.

Como p_1^{2m} é quadrado perfeito $p_1q(2x+p_1^{2m}p_1q)$ tem de ser quadrado perfeito. Como p_1 não divide q, concluimos que $2x+p_1^{2m}.p_1q$ é múltiplo de p_1, pelo que $2x=\dot{p}_1$ e $x=\dot{p}_1$ (porque p_1 é diferente de 2). Então $y=\dot{p}_1$, $x=\dot{p}_1$ e $x+a=\dot{p}_1$, pelo que, neste caso, não obtemos novas soluções. Podemos, então, concluir que só pode haver novas soluções se β_1 for par. O mesmo se pode concluir para os restantes expoentes. Então, na decomposição de **a** em factores primos, os factores diferentes de 2 aparecem um número par de vezes. Só nos interessa analisar os casos em que $a=2^{\beta_0}p_1^{2m_1}\ldots p_r^{2m_r}$, o que corresponde a afirmar que **a** é quadrado perfeito ou **a** é o dobro dum quadrado perfeito.

Nos casos $a=4$ e $a=16$ vimos que não havia novas soluções, pelo que é de suspeitar que isso aconteça quando **a** é um quadrado perfeito par. Vejamos que assim é.

Seja $a=(2k)^2=4k^2$. Como $y^2=a(2x+a)$, vem $y^2=4k^2(2x+4k^2)$. Logo $y^2=\dot{4}$; $y=\dot{2}$; $2x+4k^2$ é quadrado perfeito par. Logo $2x+4k^2=\dot{4}$, donde $2x=4$ e $x=\dot{2}$.

Concluimos, então, que y, x e x+a são pares, pelo que não há novas soluções, quando **a** é um quadrado perfeito par.

Em face do exposto podemos concluir que só pode haver novas soluções nos casos em que **a** é um quadrado perfeito ímpar ou **a** é o dobro dum quadrado perfeito.

Resumindo:

1º caso: a é quadrado perfeito ímpar

a	y	x	x+a
1	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
9	$6n+9$	$2n^2+6n$	$2n^2+6n+9$
25	$10n+25$	$2n^2+10n$	$2n^2+10n+25$
49	$14n+49$	$2n^2+14n$	$2n^2+14n+49$
...	...	...	...

Ou, de maneira mais sugestiva:

a	y	x	x+a
1	$(n+1)^2-n^2$	$2n(n+1)$	$(n+1)^2+n^2$
9	$(n+3)^2-n^2$	$2n(n+3)$	$(n+3)^2+n^2$
25	$(n+5)^2-n^2$	$2n(n+5)$	$(n+5)^2+n^2$
49	$(n+7)^2-n^2$	$2n(n+7)$	$(n+7)^2+n^2$
...	...	...	...
$(2j-1)^2$	$(n+2j-1)^2-n^2$	$2n(n+2j-1)$	$(n+2j-1)^2+n^2$
...	...	...	...

2.º caso: a é o dobro dum quadrado perfeito

a	y	x	x+a
2×1^2	$4n$	$4n^2-1$	$4n^2+1$
2×2^2	$8n+4$	$4n^2+4n-3$	$4n^2+4n+5$
2×3^2	$12n+12$	$4n^2+8n-5$	$4n^2+8n+13$
2×4^2	$16n+24$	$4n^2+12n-7$	$4n^2+12n+25$
...	...	...	...

ou

a	y	x	x+a
2×1^2	$2\times2n\times1$	$(2n)^2-1^2$	$(2n)^2+1^2$
2×2^2	$2(2n+1)\times2$	$(2n+1)^2-2^2$	$(2n+1)^2+2^2$
2×3^2	$2(2n+2)\times3$	$(2n+2)^2-3^2$	$(2n+2)^2+3^2$
2×4^2	$2(2n+3)\times4$	$(2n+3)^2-4^2$	$(2n+3)^2+4^2$
...			...
$2j^2$	$2(2n+j-1)j$	$(2n+j-1)^2-j^2$	$(2n+j-1)^2+j^2$
...	...	...	...

Agora é fácil concluir que os números pitagóricos são todos da forma $(p^2+q^2)r$, $(p^2-q^2)r$ e $2pqr$ com p, q, $r \in \mathbb{N}$ e $p>q$.

Publicações e Programas de Computador
Envio pelo Correio

- as publicações e programas disponíveis são os que vêm anunciados **neste número da revista,** sob os títulos

  — *Publicações APM*

  — *Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Núcleo da FCUL.*

- fotocopie e **preencha** uma ficha (ver abaixo; utilize mais do que uma ficha se for necessário; note que o envio de software tem porte fixo).

- no caso de Software, não deixe de indicar, além do título, **a referência** (51, 52, etc.) respectiva e a **marca e modelo do computador** em que vai utilizar os programas.

- envie a ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome da **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

  Paulo Abrantes
  Faculdade de Ciências
  Av. 24 de Julho, 134 - 4.º
  1300 Lisboa

- escreva a indicação «pedido de publicações» no sobrescrito.

Títulos publicações ou software	nº de ex.	preço unitário (*)	custo publicações	custo software

SÓCIO DA APM ☐ Nº ______ — subtotais ⟶

NÃO SÓCIO ☐

(assinalar com uma cruz)

portes do correio — pub. 15% + — software fixo 120$00 +

Nome ....

Morada ....

Código Postal ....

Data do pedido ....

totais parciais (1) (2)

valor total ((1) + (2)) ⟶

Para uso da APM — Pedido recebido em

ass.: — Respondido em

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

«É tão bom conseguir!...»
— Relato de um trabalho realizado com alunos do 8.º ano

Lurdes Figueiral, Colégio de Vila Nova de Milfontes

Tema:

Teorema de Pitágoras

Intervenientes:

Alunos do «8.º B». Professora de Matemática e professor de Ed. Visual. Animadora da Biblioteca.

Objectivos:

Mais do que em objectivos terminais fixo-me no processo. O grande objectivo é que os alunos se interessem — e vão criando hábitos — por trabalhar em grupo, por consultar livros, por utilizar materiais manipulativos, por gostar do seu próprio trabalho; que experimentem um «ambiente de aula» diferente; que cresçam em auto-estima e confiança mútua.

Características da Turma:

Uma turma insegura mas participativa. Em geral, gostam de «receitas»; são muito precipitados e reflectem pouco diante de quase todas as situações. Trabalham, obtêm resultados bastante satisfatórios, mas são pouco criativos.

Desenvolvimento:

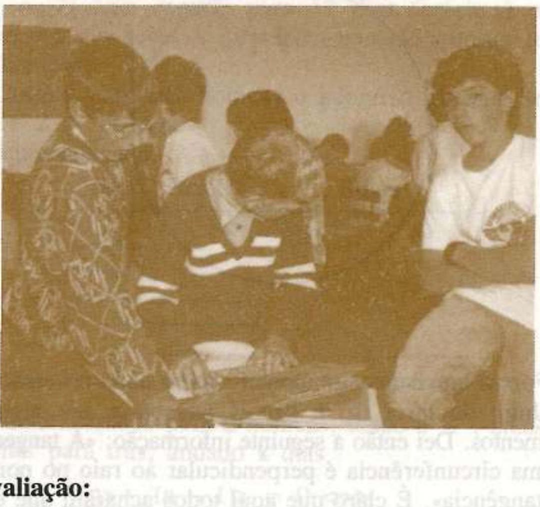
Em fins de Janeiro fiz a proposta de trabalho à turma que imediatamente a aceitou. Contactei, então, o professor de Ed. Visual que quis também participar, a partir da sua disciplina, nesta actividade. Os alunos fariam composições com triângulos rectângulos. O objectivo era que eles se familiarizassem com esses triângulos, quaisquer que fossem as suas dimensões ou a sua posição no plano, e não se restringissem à posição «standartizada» de um triângulo assente sobre um dos seus catetos e em que as medidas dos lados pouco variam de 3, 4 e 5.

Seguiu-se uma fase de trabalho na Biblioteca, com a sua responsável. Fizémos um levantamento de referências bibliográficas sobre Pitágoras e o Teorema que tem o seu nome. Depois, numa aula, a turma dividiu-se em grupos de trabalho e escolheram-se temas diferentes para cada grupo; nessa altura ficaram decididos os seguintes: «Biografia e contexto histórico», «Material didáctico para o estudo do Teorema», «Ilustração e arranjo gráfico»; dois alunos ficaram destacados para escrever o relato para o jornal da Escola — o «Pau de Giz» — e um aluno ficou encarregado da coordenação.

Ainda antes das férias da Páscoa ocupámos uma aula com uma primeira abordagem ao assunto. Já por grupos, todos fizeram uma «leitura em diagonal» da bibliografia previamente seleccionada e que, nessa hora, fomos buscar à Biblioteca. Cada grupo fez então uma escolha (que anotou) da bibliografia que mais lhe interessava. Fizeram também uma lista de material que previam necessário e canalizaram tudo para o colega coordenador que, posteriormente, reuniu comigo.

Depois das férias da Páscoa realizámos os projectos em 6 aulas de Matemática; ao mesmo tempo decorria o trabalho das aulas de Ed. Visual. O grupo da «biografia» foi mais autónomo no seu trabalho; era também o que tinha mais recursos bibliográficos (consultaram, inclusive, alguma bibliografia em Inglês, que traduziram). Para além do que escreveram como «produto final», fizeram um resumo para publicar também no «Pau de Giz». O grupo de «material didáctico» fez vários «quebra cabeças» para que, todos os que quisessem, pudessem manipular e «verificar» o Teorema. Foi o grupo que exigiu mais a minha presença e que teve que fazer algumas «horas extraordinárias». O grupo de «ilustração» esteve um pouco «perdido». O tema era vago e situado mais na fase final do trabalho. Por isso mesmo, a actividade do grupo foi pouca. Sugeri, então, que alguns dos elementos desse grupo fizessem uma actividade, proposta no livro de texto, sobre «ternos pitagóricos». Duas alunas realizaram esse trabalho que considero dos mais interessantes, já que foi feito apenas com a orientação do livro e utilizando uma máquina de calcular. As próprias alunas foram descobrindo relações entre os números com que trabalhavam sem que eu as alertasse para isso.

Quando os grupos terminaram os seus trabalhos, estes foram expostos num «espaço polivalente» por onde passam todos os professores e alunos. Os vários modelos de «quebra cabeças» estavam em mesas, para que todos os pudessem manipular livremente.



Avaliação:

A avaliação final é positiva, nomeadamente pelo processo, se bem que o produto é extremamente gratificante — sobretudo para os alunos que gostam de passar pela

Exposição e ver «a obra das suas mãos». Penso que os objectivos de participação, colaboração, desenvolvimento — quer de capacidades de iniciativa e criatividade, quer de auto-estima e confiança própria e mútua — foram atingidos, ainda que de uma forma incipiente para muitos.

Sobre o que não foi feito — ou poderia ter sido feito melhor — é também importante deter-me um pouco. Se bem que o ambiente de trabalho nas aulas fosse bom, houve alunos que pouco (ou nada) fizeram. Foi difícil integrá-los e acompanhá-los porque não há condições, nas nossas clássicas aulas de 50 minutos com um professor, que favoreçam isso e porque eu nem sempre consegui atender todos e mantê-los igualmente motivados.

Outro aspecto menos conseguido foi o carácter interdisciplinar. Muitas outras disciplinas poderiam ter sido envolvidas: Português, História, Geografia, Inglês, Física, Trabalhos Oficinais ... Mas os programas são pouco articuláveis e o actual sistema de ensino não facilita grandes interacções. Falha maior pode ter sido o não envolvimento das outras turmas de 8.° ano que têm outros professores de Matemática. A falta de coordenação dos grupos de disciplina e o tempo que exige preparar qualquer coisa em conjunto, devem ter sido os principais factores a determinar essa situação. De facto, não fui capaz de ultrapassar essas dificuldades.

Finalmente, problemático é ainda o tempo lectivo gasto — e não perdido — numa actividade deste género, com o consequente atraso nos programas. Nem sempre é «pacífico» ou «linear» um discernimento neste assunto.

O entusiasmo e a motivação dos alunos perduram, no entanto, para além de todas as dificuldades e possíveis erros. E não posso esquecer o comentário de um dos alunos «mais fracos»:

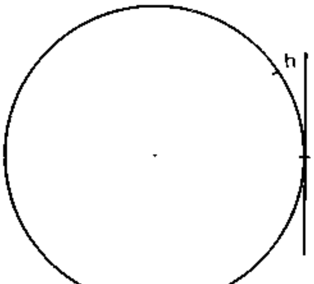
— «Professora, é tão bom conseguir!...»

Até ao Horizonte

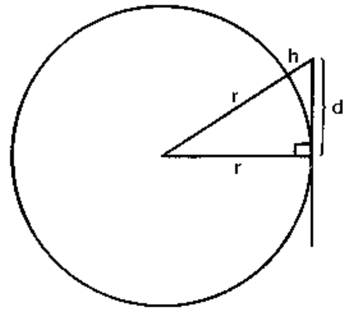
Na sequência do trabalho realizado no 8.° B a propósito do Teorema de Pitágoras, resolvemos, por etapas e durante algum tempo, o seguinte problema:

Do cimo do farol de Milfontes,
a que distância está o horizonte?

Apenas com este enunciado, os alunos tentaram ver o que precisavam de conhecer para resolver o problema. Um esquema ajuda sempre:



Foram imediatos em apontar, como dado necessário, a altura do farol (h) e depois tacteou-se por alguns momentos. Dei então a seguinte informação: «A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência». É claro que aqui todos acharam que era preciso conhecer o raio da Terra. Um aluno recordou o facto desse raio não ser constante, mas resolvemos trabalhar com um valor médio (r).



Depois de «dissecado» o problema, passámos à fase seguinte: saber a altura do farol de Milfontes e o raio da terra. Este último dado era fácil — na biblioteca, entre atlas, enciclopédias e livros de Geografia, decidimos optar pelo valor $r = 6370$ km. Para a altura do farol, os alunos propuseram que se pedisse ao professor de História que trouxesse esse dado da Câmara de Odemira. E assim aconteceu: o prof. Gama arranjou-nos um mapa com as altitudes dos principais pontos da zona. Em vez do valor de 16,65 m indicado, trabalhámos com $h = 17$ m.

Agora restava aplicar o teorema de Pitágoras

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

e fazer os cálculos, com a ajuda da máquina de calcular.

Esta última parte do trabalho revestiu-se de um interesse que, à partida, eu não esperava. Como os valores «não cabiam» na máquina, vimo-nos a braços com questões que envolviam aproximações e outras subtilezas no cálculo de quadrados e raízes quadradas (entre as quais, o «número de zeros», as reduções em unidades de área e de comprimento, simplificações de expressões antes de substituir os valores, etc...).

(Continua na pág. 14)

A travessia do deserto e as sucessões !

Cláudia Sofia Peça e Ana Cristina Santos

N. da R.: num número anterior de Educação e Matemática propusemos aos nossos leitores que tentassem estender a solução encontrada pela colega Ana Baltazar para o problema «A travessia do deserto», descobrindo porventura outras estratégias que melhorassem essa solução (ver Educação e Matemática, n.º 5, pág. 13). É com grande prazer que publicamos um relatório de duas alunas do 12.º ano (em 87/88) da professora Leonor Vieira, que no Clube de Matemática da Escola Secundária de Benfica, numa sessão sobre aquele problema, chegaram a uma estratégia que permite a travessia do deserto qualquer que seja a sua extensão. Parabéns para a Cláudia Sofia e para a Ana Cristina.

A travessia do deserto e as sucessões!

Ao resolvermos um problema que saíu na vossa revista, «Educação e Matemática» chegámos a uma solução diferente da sugerida na revista e mais completa que esta, pelo que estamos a escrever-vos.

O problema

Um homem tem de atravessar um deserto para entregar uma mensagem. Atravessar o deserto demora 9 dias. Cada homem apenas consegue transportar consigo comida suficiente para 12 dias. No local onde será entregue a mensagem não existe hipótese de obter alimentos.

Há dois homens disponíveis para a missão. Poderá a mensagem ser entregue e ambos os homens regressarem ao ponto de partida sem que lhes falte a comida? (Nota: Há possibilidade da comida ser enterrada na ida e desenterrada na volta)

Qual poderá ser a extensão do deserto se houver 3 ou 4 ou 5...homens disponíveis?

Solução do problema

Sendo **n** o número de homens disponíveis para fazer o percurso, verificamos que, para que o percurso seja máximo, devem os homens, um por um, ir voltando para trás e não como é sugerido na vossa resolução, em que todos os homens abandonam o percurso ao mesmo tempo à excepção do que o efectua até ao fim. Propomos assim que:

Sendo dois o número de homens disponíveis, o 1.º homem a voltar para trás deve ficar com alimento suficiente para regressar ao ponto de partida, dar alimento ao 2.º homem, de maneira a que este fique com o alimento máximo, ou seja, suficiente para 12 dias, e ainda enterrar no local alimento suficiente para que o 2.º homem possa voltar ao ponto de partida. Portanto:

Supondo que o 1.º homem percorreu **x** dias, tendo ele inicialmente alimento para 12 dias, ficará então com **12 - x** de alimento, devido ao percurso já percorrido, a este ainda terá de retirar **2x**, o suficiente para que os dois homens possam regressar ao ponto de partida, metade do qual deixará enterrada no local, e mais **x** que dará ao 2.º homem para que este leve o máximo de alimento (12 dias), para assim ir mais longe.

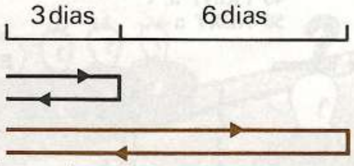
Sendo assim,

$$12 - x - 2x - x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x = 3$$

Logo, o 1.º homem regressará após ter andado três dias; o 2.º homem terá alimento para andar 12 dias, 6 de ida e 6 de volta, será então:

$3 + 6 = 9$

Esquematizando:



Sendo três o número de homens disponíveis, temos que:

Tendo o 1.º homem a voltar para trás percorrido y dias, ficará então com alimento para **12 - y** dias, a este ainda terá de retirar **3y**, o suficiente para que os três homens possam regressar ao início do percurso, **2y** dos quais ficam enterrados, e mais **2y** que dará aos outros **2** homens para que estes levem o máximo de alimento.

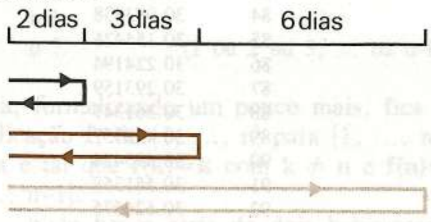
Sendo assim:

$$12 - y - 3y - 2y = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y = 2$$

Logo, o 1.º homem regressará após ter andado 2 dias; como os dois homens restantes partem deste ponto ($y = 2$) com comida para 12 dias (máxima) pode resumir-se o resto do problema ao caso anterior (com 2 homens).

Assim, com três homens o percurso máximo será $9 + 2 = 11$ dias.

Esquematizando:



Generalizando para **n** homens, tendo o 1.º, antes de voltar para trás, andado **x** dias

$$12 - x - nx - (n - 1)x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{6}{n}$$

Portanto, a solução do problema é

$$u_n = u_{n-1} + \frac{6}{n}$$

sendo

u_n percurso máximo para n homens

u_{n-1} percurso máximo para n − 1 homens.

Prova-se pelo princípio de indução matemática que

$$u_n = u_{n-1} + \frac{6}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k}$$

Juntamos um programa para auxiliar no estudo da sucessão.

NÚMERO DE HOMENS NECESSÁRIOS PARA UMA DADA EXTENSÃO DO DESERTO

```
10 LET t=0
20 FOR n=1 TO 100
30 LET t=t+6/n
40 PRINT n, t
50 NEXT n
```

N.º de homens	Extensão
1	6
2	9
3	11
4	12.5
5	13.7
6	14.7
7	15.557143
8	16.307143
9	16.97381
10	17.57381
11	18.119264
12	18.619264
13	19.080803
14	19.509374
15	19.909374
16	20.284374
17	20.637315
18	20.970648
19	21.286438
20	21.586438
21	21.872152
22	22.14488
23	22.405749
24	22.655749
25	22.895749
....	
83	30.01241
84	30.083838
85	30.154426
86	30.224194
87	30.293159
88	30.361341
89	30.428757
90	30.495424
91	30.561358
92	30.626575
93	30.691091
94	30.754921
95	30.818079
96	30.880579
97	30.924435
98	31.003659
99	31.064265
100	31.124265

Até ao Horizonte *(conclusão)*

A última — e definitiva — tentativa foi:

$r = 6370$ km $= 6370000$ m ; $h = 17$ m

$d^2 + r^2 = (r + h)^2$

$d^2 = r^2 + 2hr + h^2 - r^2$

$d^2 = 2 \times 17 \times 6370000 + 17^2$

na máquina : $17^2 = 289$; $34 \times 637 = 21658$

$d^2 = 216580000 + 289$

$d = 216580289$

Mas, na máquina, «não cabia» o número 216580289, para calcular a sua raíz quadrada ...

Depois de discutirmos as unidades, concluiu-se que estávamos a trabalhar em m^2 e que, para reduzir o número de algarismos, tínhamos que «tirar dois algarismos». De facto, para passar de m^2 para dam^2 temos que «andar duas casas para a esquerda».

na máquina: $\sqrt{2165803}$

$d \approx 1472$ dam ≈ 15 Km

Ou seja, se subirmos ao nosso farol e olharmos, até onde a vista alcança, para o mar (com um dia límpido, está bom de ver...), o horizonte está a 15 km de nós. Mas esses, são 15 km que não se podem percorrer — a não ser com os olhos: se nos metêssemos pelo mar dentro (pelo mar fora), ao fim de 15 km não chegaríamos ao horizonte ... e ainda bem!

Um Problema de Calvície

Cada habitante de uma vila possui menos cabelos que o número de habitantes dessa vila. Sabendo que aí não existem pessoas calvas, prova que pelo menos dois habitantes possuem a mesma quantidade de cabelos.

Tendo já sido proposta a resolução (individual) deste problema a alguns alunos do Ensino Secundário, verificámos que mostraram alguma dificuldade em iniciá-la. Na tentativa de superar esta situação, propomos que:

— se formem grupos de 2 ou 3 alunos;

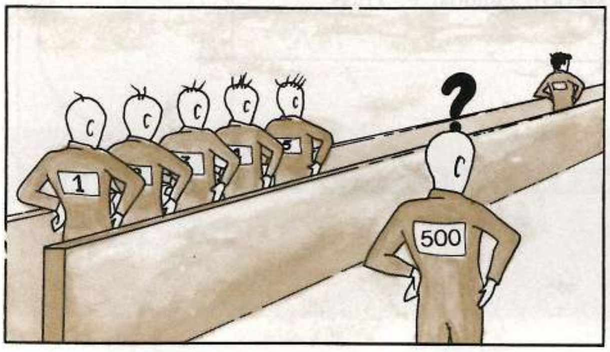
— se sugira a cada grupo que trabalhe com um certo número de habitantes à sua escolha.

Terminada esta primeira fase, são apresentadas e discutidas as conclusões a que chegaram os vários grupos.

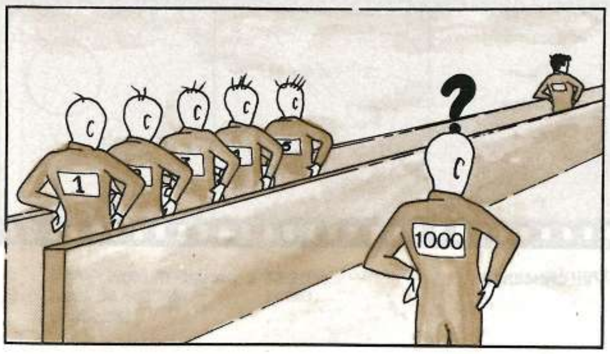
Colocados perante a diversidade do número de habitantes da vila escolhido por cada grupo, e a conclusão comum a que chegaram (de que há sempre pelo menos dois habitantes com o mesmo número de cabelos), propor aos alunos que generalizem a sua resolução, a fim de responderem ao problema inicial.

Esquematicamente:

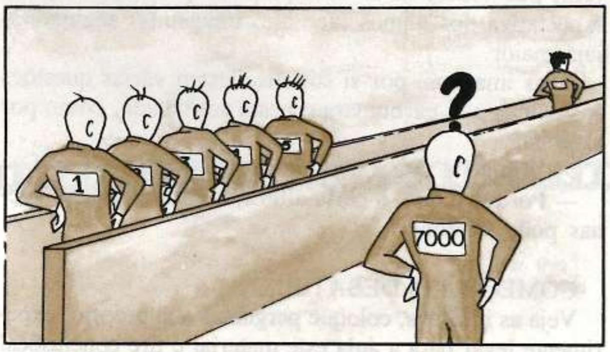
Grupo I



Grupo II



Grupo III



Generalização

Numerando os habitantes, por exemplo, pelo número de cabelos que cada um possui, tem-se:

Habitantes	N.º de cabelos
1	1
2	2
3	3
.	
.	
.	
n-2	n-2
n-1	n-1
n ?	(1 ou 2 ou 3, ... ou n-1)

ou ainda, formalizando um pouco mais, fica definida uma aplicação **f**, de $\{1, \ldots, n\}$ para $\{1, \ldots, n-1\}$, não injectiva e tal que $\mathbf{f(k)=k}$ com $k \neq n$ e $\mathbf{f(n)=a}$ com $a \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Mas... pode haver mais de dois habitantes com o mesmo número de cabelos! Esta hipótese conduz-nos a aplicações não sobrejectivas, além de não injectivas.

Ana Paula Natal
Maria de Jesus Bicho
Escola Sec. Maria Amália Vaz de Carvalho

A dança das circunferências

Ana Paula Natal, Esc. Sec. Maria Amália Vaz de Carvalho

Sabendo da existência de um filme mudo sobre a circunferência(1), de cerca de 2 minutos, da autoria do matemático Jean Louis Nicole e vendo-me na impossibilidade de o obter (não fiz grandes esforços nesse sentido), decidi realizar o meu próprio «filme». Fi-lo em acetatos acompanhando cada imagem ou grupo de imagens por uma frase, a fim de reforçar mais a ideia de movimento. As legendas não devem ser mostradas aos alunos mas lidas pelo professor à turma para que os alunos concentrem toda a sua atenção nas imagens. Convém, por vezes, fazer uma pequena pausa para que a expectativa dos alunos face à(s) imagem(s) seguinte(s) seja maior.

Estas imagens, por si só, suscitaram várias questões aos alunos que participaram nesta actividade, como por exemplo:

— Porque é que a circunferência ficou «presa»?

— Porque é que, a certa altura, a circunferência apenas pode «saltitar»?

COMEÇOU O DEBATE!...

Veja as imagens, coloque perguntas a si próprio, experimente levar para a aula este material e tire conclusões!

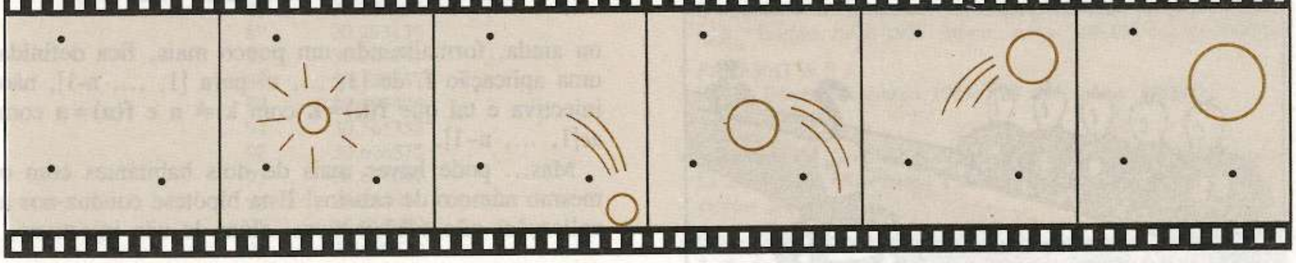
Questões que se podem colocar:

- Quantas circunferências podem passar por um ponto previamente dado?
- E por dois pontos?
- Por dois pontos passa um número infinito de circunferências. Qual a figura geométrica definida pelos seus centros?
- Quantas circunferências passam por três pontos não colineares?
- Como se constrói uma circunferência que passe por 3 pontos previamente dados?
- Se os três pontos forem colineares, existirá alguma circunferência que passe por todos eles?
- Se considerarmos quatro pontos no plano, existirá alguma circunferência que passe por todos eles? É sempre possível construir uma circunferência circunscrita a um rectângulo? Que condições devem ser satisfeitas?
- Sabendo que a circunferência do «filme» vive num mundo a duas dimensões — o plano sobre o qual está assente — poderia ela saltitar de uma posição para a outra?

Referências

(1) Castelnuovo, E. (1970). Didáctica de la Matemática. México: Editorial F. Trilas

O FILME



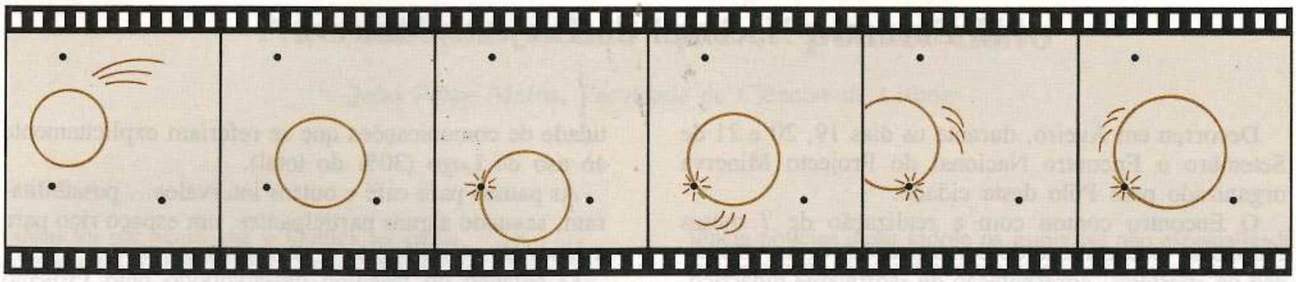
Três pontos não colineares aparecem sobre o plano...

Uma circunferência aparece a oscilar...

O seu centro e o seu raio movem-se...

Vai crescendo...

sempre a oscilar muito...

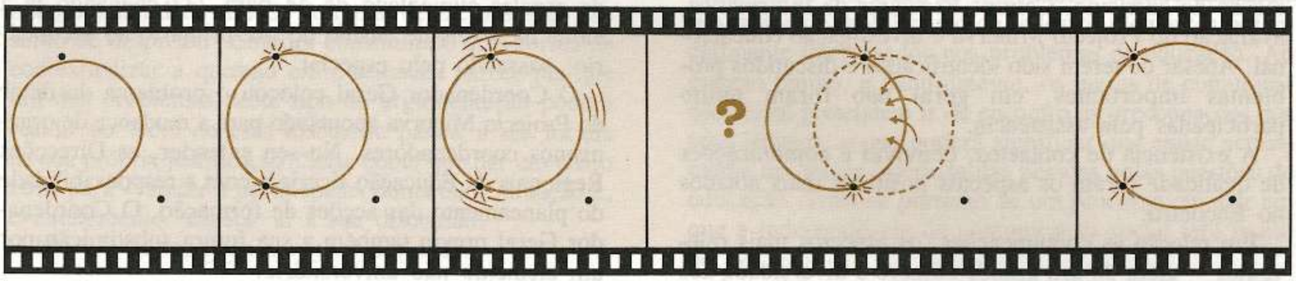


Continua a crescer e a oscilar até que…

passa por um dos 3 pontos…

Ficou presa mas ainda oscila, embora menos.

Vai crescendo…



crescendo… oscilando…

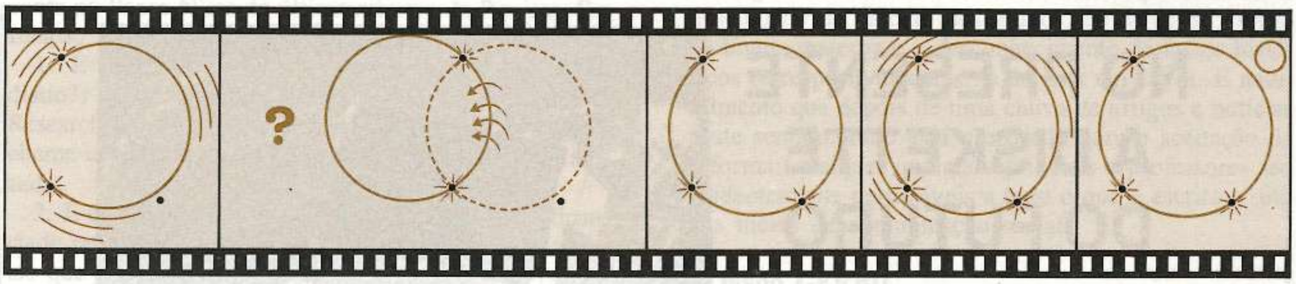
até que…

fica presa em 2 pontos!

Saltita…

roda…

Cada vez tem menos liberdade mas…



cresce ainda um pouco mais.

Dá um outro saltito…

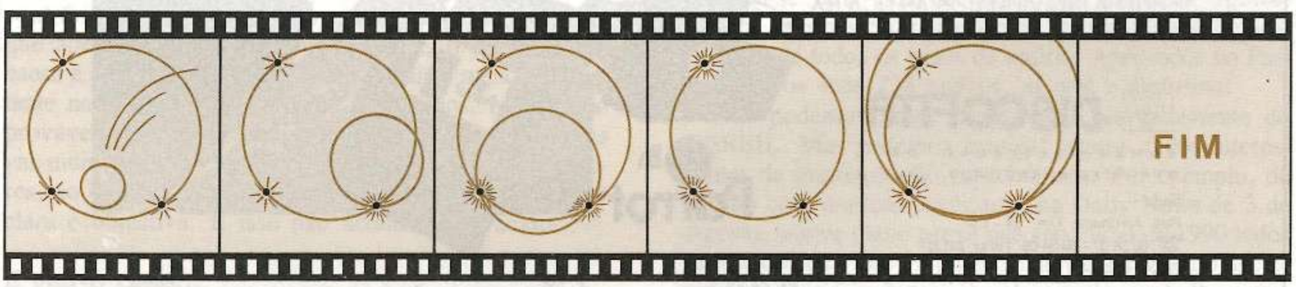
crescendo sempre…

até que…

perde a sua já (pouca) liberdade…

Apenas pode rodar sobre si própria.

Mas eis que aparece uma nova circunferência livre como era a primeira.



Percorre as aventuras da sua companheira,

passa por um ponto,

depois pelo outro e,

ao querer passar pelo 3.º ponto é obrigada a cair sobre a sua companheira

Mas esta consegue crescer um pouco mais, adquirindo assim, aos poucos, a sua liberdade!…

II Encontro Nacional do Projecto Minerva

Decorreu em Aveiro, durante os dias 19, 20 e 21 de Setembro o Encontro Nacional do Projecto Minerva organizado pelo Pólo desta cidade.

O Encontro contou com a realização de 7 mesas redondas, uma centena de comunicações orais, exposição de «posters», apresentação de «software» didáctico, pausas para café e intervalos para almoço.

As mesas redondas foram subordinadas aos temas: formação de professores, desenvolvimento e distribuição de «software» educativo, ligação do Projecto Minerva à sociedade, inserção das tecnologias de informação no currículo, Centros Escolares de Informática, avaliação do Projecto Minerva e investigação educacional. Apesar de terem sido identificados e discutidos problemas importantes, em geral não foram muito participadas pela assistência.

A existência de contactos, convívio e comunicações de qualidade foram os aspectos positivos mais notados no Encontro.

Em relação às comunicações, os aspectos mais relevantes — além do seu grande número e diversidade dos assuntos tratados, o que levou a alguma confusão na organização dos blocos por temas — terão sido o facto de cerca de metade terem resultado de experiências já realizadas a nível didáctico e, quanto à temática, a quantidade de comunicações que se referiam explicitamente ao uso do Logo (30% do total).

As pausas para café e outros intervalos... possibilitaram, segundo alguns participantes, um espaço rico para a troca de experiências e de informações.

O balanço do trabalho desenvolvido pelo Projecto Minerva, delineado pelo Coordenador Geral, Professor Dias Figueiredo, foi positivo: o Projecto Minerva atingiu maior maturidade, alargou-se geograficamente — de 15 concelhos e 9 distritos abrangidos em 85/86 para 80 concelhos e 18 distritos em 88/89 — tendo o número de escolas aumentado de 44 para 237 chegando já a todos os níveis de ensino do pré-primário ao secundário, passando pelo especial.

O Coordenador Geral colocou o problema do devir do Projecto Minerva apontando para a mudança de organismos coordenadores. No seu entender, as Direcções Regionais de Educação ficariam com a responsabilidade do planeamento das acções de formação. O Coordenador Geral previu também a sua futura substituição por um elemento não universitário.

Não existem dúvidas de que o Projecto Minerva está em crescimento. Resta saber em que direcções ele se irá processar.

Fernando Nunes

Não foi por acaso que... pensei nisto

João Filipe Matos, Faculdade de Ciências de Lisboa

«Não foi por acaso que o Benfica na época passada foi à final da Taça dos Campeões Europeus...» (da imprensa diária)

Um grande amigo meu utiliza frequentemente o estribilho «não é por acaso que...». Esta forma de iniciar o discurso pretende geralmente realçar a ideia de que um dado acontecimento ou facto é em geral condicionado por um determinado conjunto de factores que não serão de desprezar. Embora constituindo uma forma de contextualizar a questão em discussão, parece-me que um dos problemas deste tipo de argumentação poderá residir no facto de essa discussão passar a ser focada na sua própria justificação. Seria como que dar um passo atrás para «validar a pertinência» duma dada situação e, eventualmente, esgotar aí a sua discussão.

Mas de facto, nada acontece por acaso.

O Artigo do Sunday Times...

Não foi por acaso que o Henrique Guimarães escolheu a notícia publicada no Sunday Times e de que dava conta no Pense Nisto do último número da Revista. Em relação a esse artigo oferece-me dizer o seguinte:

1. É saudável que um estudo realizado (ou subsidiado?) pelo National Foundation for Educational Research (NFER) em vésperas duma reforma do ensino, chame a atenção da comunicação social não especializada.

2. É de admitir que as conclusões de um estudo financiado pelo NFER sejam muito mais vastas do que aquelas que são citadas no artigo.

3. Sendo assim, é óbvio que o jornalista seleccionou determinadas conclusões do estudo, ao que tudo indica para colocar a questão das «grammar schools», questão esta que não é pacífica em Inglaterra.

O Henrique Guimarães virou (e bem) a questão ao contrário: «se os alunos não aprenderam isto, o que é que aprenderam?». Tal como ele diz, o que está em causa é a questão de saber o que é mais e menos importante na formação matemática dos alunos. Mas muito provavelmente o conteúdo do artigo do Sunday Times vai muito mais ao encontro das expectativas dos leitores, ao colocar a questão de forma (só aparentemente) clara e objectiva. E isso não acontece por acaso.

E outros casos...

Mas certamente também não é por acaso que, sobretudo nos últimos dois anos, aparecem com certa insistência notícias desta índole na imprensa não especializada em educação. Reflectindo um certo «mal estar» em relação aos inúmeros problemas com que se deparam as autoridades educativas de diversos países, a imprensa tem vindo a colocar cada vez mais na primeira linha as questões da educação. Este facto é por si só um sinal da importância e do papel decisivo que a educação tem actualmente em todas as sociedades, e pode constituir um factor de mobilização de todos os elementos potencialmente interessados nos problemas da educação. Ao mesmo tempo, e naturalmente, os meios de comunicação social pretendem ir de encontro às preocupações dos seus leitores, o que poderá significar que existe actualmente um maior interesse das pessoas pelas questões de educação. Trata-se portanto de um processo circular em que a independência da comunicação social terá muito de «virtual».

A notícia respigada pelo Henrique Guimarães não constitui portanto um caso isolado em Inglaterra. Múltiplos artigos de opinião têm vindo a surgir a público condenando o sistema educativo na sua globalidade e em geral apelando à necessidade de eficácia na educação. Os argumentos utilizados são muito frequentemente a dificuldade de cálculo dos alunos, os erros na escrita na língua materna e o desconhecimento de factos históricos (e respectivas datas...) do país em causa. E naturalmente que depois de uma chuva de artigos e notícias neste sentido, tudo está preparado para a aceitação da reforma (qualquer que ela seja). Pais e professores são evidentemente permeáveis a tudo o que é escrito e dito nos meios de comunicação social.

O plano GERBIL

E ao que parece em Inglaterra a opinião pública estaria preparada. Ao surgir em 1988 o plano GERBIL (Great Educational Reform Bill, isto é, lista das grandes reformas na educação), e, pelos ecos que nos chegam, verifica-se uma boa aceitação por parte da opinião pública e a oposição por parte de grande número de professores de todos os graus de ensino. Aprovados no Parlamento os seus 238 artigos, aí está a Reforma!

Não podemos nesta secção falar alargadamente do GERBIL. Mas podemos respigar alguns dados interessantes da imprensa não especializada. Por exemplo, de acordo com notícias publicadas no Daily News de 3 de Agosto, aquele plano prevê que «no início de 1990 todos os alunos dos 7 aos 18 anos tenham um currículo nacional» (ao contrário do que sucede actualmente). Por outro

(Continua na pág. 27)

PROFMAT 88: alguns apontamentos *(conclusão)*

agentes de mudança da escola, devem ocupar todo o seu espaço profissional. No fundo, foi o que a Suzana e a Otília fizeram: aproveitaram toda a autonomia que tinham para alterar as sequências das matérias, para privilegiar a Geometria, tomando-a como ponto de partida durante todo o ano, e para imaginar um conjunto de situações de aprendizagem que permitissem de forma significativa para os alunos encadear todos os pontos importantes do currículo.

Naturalmente, depararam com dificuldades. Uma das principais tinha que ver com a avaliação dos alunos — como ultrapassar, por exemplo, a contradição entre uma metodologia baseada na actividade do aluno e tendo como objectivo a correspondente e lenta mudança de atitudes, e métodos de avaliação tradicionais referentes à aquisição de técnicas de cálculo? A essa mesma hora, numa outra sala, uma comunicação de Paulo Abrantes tratava precisamente desta e doutras questões que dizem respeito ao problema da avaliação. Isto sugere-me uma observação relativamente ao próximo PROFMAT: na medida do possível, dever-se-iam talvez agrupar as comunicações que são relatos de experiências numa primeira fase do Encontro, e deixar para depois as comunicações que tratam de temas mais gerais.

****

No segundo dia do Encontro, todos os participantes se dividiram em grupos para discutir o «livro amarelo» da APM, isto é, os textos para discussão que resultaram do Seminário para a Reforma do Currículo de Matemática organizado pela APM em Vila Nova de Milfontes em Abril passado. Alguns grupos discutiram os objectivos da Matemática escolar, outros a natureza das actividades na sala de aula e o novo papel do professor e outros ainda as novas tecnologias e o currículo.

Participei num dos grupos que discutiu «a natureza das actividades...». Rapidamente a discussão se voltou para as questões relativas ao professor. A respeito da frase que refere o facto da mudança da escola envolver grande «esforço e dedicação» por parte dos professores, foi salientada a necessidade de as entidades oficiais promoverem as alterações estruturais necessárias, sem o que o esforço dos professores de pouco servirá. Não nego que assim seja, mas acredito que a mudança da escola será um processo em que tanto os indivíduos com as instituições se irão modificando mutuamente, e não poderá ser um processo unilateral, se queremos que seja efectivo.

Outra questão muito debatida foi a formação de professores, a respeito da qual foram feitas algumas propostas (que constam do documento das conclusões, noutro local deste número da Educação e Matemática).

****

O PROFMAT envolve um grande trabalho de organização de que talvez não nos demos conta. Temos tendência para notar as falhas, por pequenas que sejam, da organização, mas esse enorme esforço dos nossos colegas, neste caso de Faro, passa um pouco despercebido. Isso é natural mas injusto.

Desde há muitos meses que a comissão do programa científico tentou resolver o problema insolúvel de garantir, por um lado, um número adequado de comunicações e workshops (correspondentes ao número de participantes estimado) e por outro lado distribuir essas sessões no exíguo espaço dos três dias incompletos de duração do PROFMAT. Temos que reconhecer que o fez da melhor maneira possível, e julgo que o programa científico, incluindo os cursos, foi um ponto alto deste Encontro. Quanto à comissão local, dos colegas de Faro, com muito mais antecedência tiveram que começar a resolver os problemas logísticos: alojamentos, alimentação, equipamentos. Depois, tratar de obter apoios locais, para tantas vezes receber respostas negativas, como por exemplo do Governador Civil de Faro, para quem a Matemática se deve reduzir a multiplicações de turistas por divisas...! E por fim resolver as inúmeras alterações, faltas inesperadas à última hora, contratempos de todo o género. É notável como conseguiram manter a boa disposição até ao fim, apesar de tudo...

Sendo assim, seria de esperar que constituísse um problema a escolha de locais para realização do PROFMAT. Nada disso, mais uma vez foi fácil... Até Viana do Castelo em 1989!

PENSE NISTO

A propósito de um artigo onde se fala do «(des)equilíbrio» da actual organização curricular, a nossa colega Cristina Loureiro enviou-nos as suas interrogações exactamente sobre o «equilíbrio» que se defende nesse artigo. Aqui ficam, pois, e dão que pensar.

Do João Filipe Matos chegou-nos «Não foi por acaso que... pensei nisto», uma reflexão sua, motivada pelo que aqui se disse no último número de Educação e Matemática. Veja na página 17, vale a pena.

Ao ler um artigo publicado na revista Noesis n.º 7 levantaram-se-me algumas questões que me pareceram importantes reflectir com outros professores de Matemática.

O artigo, «A escola actual e o desenvolvimento integral da criança», é da autoria do nosso colega Carlos Brito e, segundo me parece, pretende questionar a actual organização curricular no Ensino Preparatório apontando algumas formas de resposta às questões levantadas.

Apresento aqui alguns pedaços do artigo para ilustrar as situações que me suscitaram dúvidas e questões.

1 — A Formação Integral do Homem

Passa pelo desenvolvimento de todas as suas capacidades, de uma forma equilibrada. Esta formação integral equilibrada só é possível se, de um modo uniforme, se proporcionarem dentro e fora da escola exercícios de caracter intelectual, sócio-afectivos e psicomotores.

Proporcionar exercícios deste tipo, mas dedicando-lhes tempo de treino e graus de exigências diferentes, é caminhar seguramente para a DEFORMAÇÃO em vez da tão falada e procurada FORMAÇÃO INTEGRAL.

(...)

3 — Como é Possível uma Formação Equilibrada?

Só é possível um desenvolvimento integral e equilibrado das nossas crianças, quando o nível da exigência do comportamento segundo os três domínios é o mesmo.

(...)

4 — FACTORES DE DEFORMAÇÃO

A - A carga horária

(...)

Não há razões do ponto de vista pedagógico, lógico e científico que justifique a actual distribuição da carga horária pelas disciplinas de curriculum do Ensino Preparatório. Torna-se urgente um estudo com novos dados a fim de evitar a distribuição arbitrária/administrativa da carga horária.

Uma vez que a situação ideal em termos de educação assenta no equilíbrio do desenvolvimento dos domínios do comportamento, as estruturas educativas responsáveis deveriam começar pelo estabelecimento do equilíbrio horário destinados aos dois grandes grupos de disciplinas (teóricas e práticas).

Com facilidade se verifica a desproporção na carga horária entre disciplinas eminentemente cognitivas e psicomotoras.

B - A definição dos objectivos

Analisados os objectivos de todas as disciplinas do Ensino Preparatório acabamos por verificar outro factor de deformação na educação. Como método achamos a percentagem de objectivos definidos segundo os domínios cognitivo, afectivo e psicomotor. O resultado é bem a afirmação do predomínio do cognitivo em desfavor do psicomotor, mesmo nas disciplinas de potencialidades motoras, à excepção da Educação Física.

O TRABALHO MANUAL É UM BOM EXERCÍCIO DE CONHECIMENTO DE SI MESMO

Na actual situação curricular do Ensino Preparatório, a formação integral dos alunos não é possível, tanto pela forma como estão formulados os objectivos, como também, pela estrutura do plano curricular.

Torna-se urgente o equilíbrio, em tempos, conteúdos e objectivos, entre as disciplinas de carácter predominante intelectual e psicomotor, com vista a uma formação equilibrada e integral das crianças.

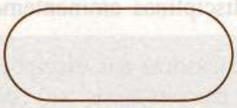
1. Não será que os professores de Matemática mostram cada vez mais sensibilidade para aspectos não exclusivamente cognitivos da disciplina de Matemática?
2. Será que a «formação integral equilibrada» só é possível com a realização de «exercícios» (de carácter intelectual, sócio-afectivo e psicomotor)? Que exercícios?
3. Será possível nas aulas de Matemática propor actividades que tenham por objectivo desenvolver capacidades dos três domínios?
4. Será que a questão do desequilíbrio do desenvolvimento que o autor levanta provém da desproporção na carga horária entre disciplinas eminentemente cognitivas e psicomotoras?
5. Não será que os professores das disciplinas consideradas eminentemente psicomotoras se começam a preocupar cada vez mais com aspectos cognitivos em detrimento dos outros?
6. Será que os actuais objectivos da disciplina de Matemática são um factor de desequilíbrio no desenvolvimento integral do aluno?
7. Será que o equilíbrio, desejado pelo autor, em tempos, conteúdos e objectivos resolverá algum desequilíbrio na formação integral das crianças?

E ao acabar de ler o texto pensei:

— Este nosso colega não é professor de Matemática e por isso é natural que não conheça bem a nossa disciplina, mas **conheceremos nós, professores de matemática, as potencialidades formativas da educação matemática?**

Cristina Loureiro

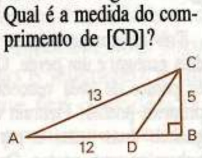
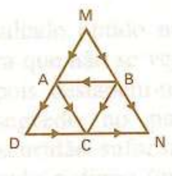
OUTUBRO

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado
3 Descubra os três próximos números da sequência: 1, 3, 6, 11, 19, 32,...	**4** Se x é um número inteiro não divisível por 5, mostre que $x^4 - 1$ é divisível por 5.	**5** **FERIADO**	**6** Qual é o resto da divisão de 2^{100} por 5?	**7** Um agricultor plantou 19 macieiras em 9 filas. Cada fila tem 5 árvores. Faça um esquema da plantação.	**8** 
10 O Carlos abriu uma conta com o mínimo exigido, 1000$00. Se o juro anual for de 5% e o Carlos não fizer depósitos, quantos anos serão necessários para que o dinheiro duplique?	**11** Qual é o algarismo das centenas do número que representa a soma dos vinte e sete primeiros termos da sucessão 3, 33, 333, 3333,...?	**12** Generalize: $\frac{1+3}{5+7}=\frac{1}{3}$ $\frac{1+3+5}{7+9+11}=\frac{1}{3}$ $\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}=\frac{1}{3}$	**13** Qual é o algarismo das unidades de 7^{7^7}?	**14** Se 6 rapazes constroem 6 casas em 6 dias e 12 raparigas constroem 12 casas em 12 dias, quantas casas constroem 12 rapazes e 12 raparigas em 12 dias?	**15** Mostre que adicionando 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos se obtém um quadrado perfeito.
17 Em quantos zeros termina 10 000! 000000000000?	**18** Qual é maior, a raiz décima de dez ou a raiz cúbica de dois?	**19** Qual é o menor número que dividido por 7, 9 e 11 dá resto 1, 2 e 3, respectivamente?	**20** Mostre que existem números irracionais a e b, tais que a^b é racional? (Sugestão: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional)	**21** 99 raparigas e 1 rapaz estão numa sala de aula. Quantas raparigas devem sair para que a percentagem de raparigas passe a ser 98%?	**22** Descubra todos os conjuntos de quatro inteiros consecutivos tais que a soma dos cubos dos três menores é igual ao cubo do maior.
24 O João percorre a pista de atletismo em 40 s. O Marco, correndo em sentido contrário, encontra o João de 15 em 15 segundos. Quanto tempo leva o Marco a percorrer a pista?	**25** 	**26** Usando unicamente símbolos matemáticos e sem alterar a posição dos caracteres, obtenha uma proposição verdadeira: 2 9 6 7 = 17	**27** Qual é a única propriedade deste quadrado mágico? 1 12 10 15 2 4 8 5 3	**28** Duas garrafas de igual volume contêm álcool e água, sendo a razão entre as quantidades de álcool e de água 3 para 4 e 2 para 1. O conteúdo das duas garrafas é misturado. Qual vai ser a razão entre as quantidades dos dois líquidos?	**29**
31 O número 1961 tem uma simetria rotacional. Qual é o próximo número com a mesma propriedade?					

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

NOVEMBRO

<table>
<tr><th>2.ª feira</th><th>3.ª feira</th><th>4.ª feira</th><th>5.ª feira</th><th>6.ª feira</th><th>Sábado</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>1

FERIADO</td>
<td colspan="2">2   3
Escolha um número qualquer de três algarismos. Escreva-o duas vezes de modo a obter um número com seis algarismos.
Mostre que o número é divisível por 7, 11 e 13. Porquê?</td>
<td>4
Quem inventou o triângulo de Pascal muito antes de Pascal?</td>
<td>5
Qual é o erro?
$3 > 2$
$3 \log (1/2) > 2 \log (1/2)$
$\log (1/2)^3 > \log (1/2)^2$
$(1/2)^3 > (1/2)^2$
$1/8 > 1/4$</td>
</tr>
<tr>
<td>7
O número de seis algarismos 1K31K4 é divisível por 12 mas não por 9.
Descubra o algarismo K.</td>
<td>8
Qual é a área do triângulo determinado pelo eixo das abcissas, a recta de equação $y = x$, e a recta de equação $x + 3y = 12$.</td>
<td>9
Um círculo tem centro no ponto $(7, -2)$; se o ponto $(5, -8)$ está no exterior do círculo e o ponto $(3, 1)$ no seu interior, o que é que se pode dizer acerca do raio do círculo?</td>
<td colspan="2">10   11
(a, b, c) é um termo pitagórico primitivo.
Se a, b e c são números primos entre si e $a^2 + b^2 = c^2$, quantos ternos deste tipo existem, em que 15 é um dos três números?</td>
<td>12
[ABC] é um triângulo rectângulo. $\dot{C}D$ é a bissectriz do ângulo ACB. Qual é a medida do comprimento de [CD]?

</td>
</tr>
<tr>
<td>14
Descubra o valor de x para que
$\log(10 \cdot \log(\log x^{-10})) = 1$</td>
<td>15
Qual é o valor de
$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{103} \cdot \frac{101}{105}$</td>
<td>16
Descubra o menor valor de n, para o qual k é um número inteiro positivo quando
$3^n - 1 = 11\,k$</td>
<td>17
Se p é um número primo maior que 5, qual é a soma dos divisores de 5 p?</td>
<td>18
Um número de dois algarismos é um quadrado perfeito e tem 9 divisores.
Qual é o número?</td>
<td>19
Qual é o algarismo das unidades de
$3^{1986} - 2^{1986}$?</td>
</tr>
<tr>
<td>21
Qual é a probabilidade de se obter 16 no lançamento de 3 dados?</td>
<td>22
Qual é a média aritmética dos primeiros vinte números pares?</td>
<td>23
Descubra o maior valor de k para o qual 3^{11} pode ser expresso como a soma de k inteiros positivos consecutivos.</td>
<td>24
Se 94, 86, 43 e 73 são os resultados dos testes de um aluno, qual deve ser a classificação do 5.º teste para que fique com uma média de 79?</td>
<td colspan="2">25   26
Nos quadrados mágicos, a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal é constante.
Descubra o valor de B, no quadro mágico seguinte.
<table><tr><td>19</td><td>A</td><td>14</td></tr><tr><td>10</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>D</td><td>E</td><td>11</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>28
Usando as direcções e os sentidos indicados, quantos caminhos diferentes existem para ir de M para N?</td>
<td>29

</td>
<td>30
Descubra o valor de A para que o número de 5 algarismos, 12A3B seja divisível por 4 e por 9, com $A \neq B$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

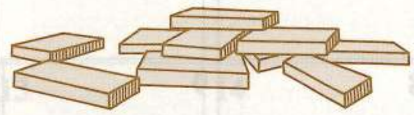
2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

DEZEMBRO

1 **2**

De dez caixas, cinco contêm lápis, quatro contêm canetas e duas contêm lápis e canetas.

Quantas caixas estão vazias?



3

Qual será o terceiro elemento da 82.ª fila deste triângulo numérico?

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
⋮

5 **6**

Três amigos participam num jogo; em cada jogada dois ganham e um perde. O que perde tem que dobrar os pontos de cada vencedor, subtraindo-os aos seus próprios pontos. Fizeram três jogos e cada um deles ganhou duas vezes e perdeu uma. No fim, todos tinham quarenta pontos. Quantos pontos tinha cada um deles no início do jogo?

7

Utilizando os símbolos +, −, ×, : ou parentesis, obtenha proposições verdadeiras.

3 3 3 3 = 1
3 3 3 3 = 2
3 3 3 3 = 3
3 3 3 3 = 4
3 3 3 3 = 5
3 3 3 3 = 6

8 **9** **10**

Mudando a posição de apenas dois fósforos, obtenha três rectângulos geometricamente iguais.

12 **13**

Uma pedra é mergulhada numa tina cilíndrica com 40 cm de diâmetro, causando uma subida de 15 cm do nível da água.

Qual é o volume da pedra?

14

Para que valores $\sqrt{2x}$ é igual a $x\sqrt{2}$?

15

Dados sete inteiros positivos quaisquer, mostre que existem pelo menos dois deles cuja soma ou diferença é divisível por 10.

16 **17**

Um estudante em férias reparou que choveu sete vezes de manhã ou de tarde.

Quando choveu de tarde, o céu esteve limpo de manhã.

Ao todo houve cinco tardes limpas e seis manhãs. Quantos dias esteve de férias o estudante?

19 **20** **21** **22** **23** **24**

FÉRIAS DO NATAL

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

Senhoras e Senhores, a vossa atenção !

Ana Paula Canavarro, Instituto de Inovação Educacional

7.º ano de escolaridade, Festa de Fim de Ano, o lanche, o baile, a brincadeira...

Apetitosos bolinhos caseiros confecionados pelos já iniciados na arte da Culinária, Dancakes dos cozinheiros de supermercado, coca-cola e sumos. Música para «abanar o capacete», como não podia deixar de ser.

Satisfeita a barriga e desenferrujado o pézinho, era chegado o momento que eu preparara.

Subi ao estrado, improviso de palco, e com aquele ar compenetrado e digno, que eu tinha treinado ao espelho, e que é próprio de qualquer ilusionista que quer impressionar, anunciei:

— Senhoras e Senhores, a vossa atenção, por favor! Vou apresentar-vos um extraordinário número de Magia! As senhoras e os senhores acomodaram-se, disponibilizando a atenção com entusiasmo e desconfiança. Preparei-me para iniciar o número. Pedi um voluntário para meu assistente e disse-lhe:

— Primeiro, tapas-me os olhos com este lenço. E ele tapou; com o meu lenço e com mais 20 lenços e casacos que a turma despiu prontamente, transformando-me em «bengaleiro», para garantia da minha cegueira total. Desconfortável mas resignada (o público é quem manda, não é?), disse ao assistente:

— Escreve, no quadro, um número qualquer entre 50 e 100. Depois soma-lhe 76.

— Já está!

— Agora apaga o algarismo das centenas e soma-o ao número de dois algarismos que resta.

— E a seguir?

— Subtrai o último número que obtiveste ao número inicial que escolheste.

— Já subtraí!

— Escreve o resultado obtido numa folha de papel e dobra-a de maneira que não se veja o número. Apaga bem o quadro. Depois destapem-me os olhos!

Guardavam o segredo no papel. Em seguida, libertaram-me da escuridão sufocante da roupa. Retomei o ar compenetrado e digno (que eu tinha treinado ao espelho, e que é próprio de qualquer ilusionista que quer impressionar), e disse-lhe:

— Rasga o papel em pedacinhos e coloca-os dentro desta taça — (obediente, rasgou o mais que conseguiu...)

Então, olhei-os um por um... para que realizassem que o espectáculo estava quase no ponto correspondente àquele em que o trapezista se prepara para dar o quádruplo salto mortal! Ouviram-se os tambores anunciar o momento (ou foi imaginação minha?) e fez-se silêncio absoluto.

Com o aparato que as circunstâncias impunham, acendi um fósforo! Com ele fiz arder os bocadinhos de papel depositados no fundo da taça. Debrucei-me sobre o segredo despedaçado em combustão e «inspirei» o dióxido de carbono libertado, o qual me fez confidências. Fechei os olhos, abri os braços e pronunciei então as palavras mágicas (é claro que não as vou revelar...). Esperei um pouco, para me recompor do enorme esforço mental a que estivera sujeita (e também para aumentar a tensão, confesso...). Depois prossegui, perante a audiência suspensa... (esperariam eles que saltasse da taça um coelhinho chamuscado?). Apanhei as cinzas ainda mornas. Devagarinho, muito devagarinho, esfreguei com elas as costas da mão esquerda ... e ... tam-tam-tam-tam! O número 23 apareceu preto na minha mão, mesmo à frente de 30 pares de olhos arregalados!

Choveram perguntas. Todos queriam saber «como é que a sotora fez». Alguns arriscavam palpites, outros duvidavam da idoneidade do colega que fora assistente e houve ainda quem considerasse a hipótese de eu ser bruxa...

Todos pediam bis, «para descobrir o truque». E eu, que já ía prevenida, bisei. Alterando um valor, para não perder a graça: somaram 85 ao número escolhido. Segui os mesmos passos e de novo as cinzas, fizeram reviver o resultado da subtração. Nas costas da outra mão, exibi-lhes um 14, nascido da Magia e da Matemática!

Nota:

Os «efeitos especiais» necessários para a realização deste número de Magia são muito fáceis de obter. Basta utilizar um pedaço de sabão molhado e com ele escrever o número pretendido nas costas da mão, antes de entrar na aula, é claro! Quando seca, o sabão fica completamente invisível e pronto para mostrar nitidamente os contornos, quando «encinzeirado». Gostava que experimentasse!

Sabe que durante a semana das reuniões de avaliação final do ano lectivo, já em pleno gozo das merecidas férias, muitos dos meus putos apareceram na Escola, radiantes por terem descoberto a «parte matemática da mágica», o porquê do 23 ser 23?

PROFMAT-88 em Faro

Como se sabe, o Encontro Nacional de Professores de Matemática realizou-se este ano em Faro. Entre 7 e 9 de Setembro, perto de 400 professores reuniram-se no Instituto Politécnico de Faro para participar neste Encontro cujo programa incluiu duas sessões plenárias, cerca de duas dezenas de comunicações, diversas sessões práticas, uma manhã dedicada à discussão dos principais temas da renovação curricular em Matemática, e ainda um período destinado a uma feira de ideias e materiais — para além, naturalmente, dos períodos de convívio ou de visitas de natureza turística.

Nos dois dias anteriores ao começo do Profmat, realizaram-se ainda cursos sobre vários temas e que, no conjunto, englobaram mais de uma centena de participantes.

A sessão de abertura incluiu uma conferência, a cargo da Professora Ana Benavente, sobre os processos de mudança em Educação, e ainda uma intervenção de um representante da Sociedade Andaluza de Educação Matemática. A sessão final foi dedicada ao Congresso Mundial realizado recentemente em Budapeste (o ICME-6) e assumiu a forma de uma entrevista colectiva a alguns dos participantes portugueses nesse Congresso, dirigida pelo nosso colega Eduardo Veloso.

Apesar dos obstáculos que se puseram à organização, nomeadamente a dificuldade em encontrar apoios da parte das entidades oficiais de Faro, parece ser generalizada a opinião de que o Encontro constituiu um êxito — sobretudo pela qualidade, oportunidade e grande variedade das sessões de trabalho proporcionadas aos participantes — que se ficou a dever, em grande parte, à incansável actividade da comissão organizadora local e do grupo de trabalho responsável pelo programa do Encontro. Tanto os aspectos positivos como os negativos serão cuidadosamente analisados de forma a constituirem ensinamentos para o futuro.

E agora, as nossas atenções voltar-se-ão para Viana do Castelo, onde se realizará o Encontro do próximo ano. Em breve haverá notícias sobre o Profmat-89!

Cursos de Verão em Viana do Castelo

O núcleo de Viana do Castelo da APM, em colaboração com a Escola Superior de Educação daquela cidade e com o respectivo núcleo do Projecto Minerva, organizou no Verão (do fim de Julho ao início de Setembro) cursos na área da Informática.

Estes cursos, abertos à população, foram divididos em dois grupos: Iniciação e Especialização. Os primeiros englobavam três módulos (processamento de texto, folha de cálculo e bases de dados) enquanto os segundos eram compostos por quatro módulos (três de aperfeiçoamento dos atrás indicados e um sobre a linguagem Pascal).

Núcleo de Setúbal

A Reforma Educativa é hoje uma preocupação dominante entre os professores e outros educadores.

Um dos aspectos da Reforma a que a Associação de Professores de Matemática atribui maior importância é a divulgação de experiências inovadoras que suscitem a reflexão sobre os objectivos, metodologias e natureza das actividades matemáticas.

Neste sentido, o núcleo de Setúbal da APM promove uma acção sob o título «A Geometria como catalisador do programa do 7.º ano de escolaridade - uma experiência realizada nas Escolas Secundárias de Mem Martins e Veiga Beirão».

A sessão é orientada por Susana Carreira, professora da primeira daquelas escolas, e decorre no dia 24 de Outubro na Escola Secundária da Camarinha em Setúbal. Dirige-se essencialmente a professores que leccionam no curso geral unificado ou no ensino preparatório.

Encontro mundial de Associações em Budapeste

Conforme tinha sido anunciado no número 6 de «Educação e Matemática», teve lugar em Budapeste no passado dia 1 de Agosto, no decorrer do ICME-6, uma reunião internacional de Associações de Professores de Matemática. Estiveram presentes representantes de 33 associações.

Durante a reunião discutiram-se formas de intercâmbio a desenvolver no futuro. Foi saliente o desejo de colaboração internacional manifestado por muitas associações, numa altura em que a renovação do Ensino da Matemática constitui um grande desafio à escala mundial. A APM de Portugal e a GDM da República Federal da Alemanha, que tinham sido as promotoras da reunião, ficaram responsáveis por centralizar, organizar e redistribuir os dados referentes a todas as associações, que servirão de base a um intercâmbio mais intenso e mais regular do que aquele que tem existido.

The National Council of Teachers of Mathematics

Ao abrigo do acordo estabelecido com o NCTM dos Estados Unidos, já noticiado no n.º 6 de «Educação e Matemática», divulga-se agora a seguinte informação sobre os próximos Congressos Anuais daquela associação:

67th Meeting — Orlando, Florida 12-15 Abril 1989
68th Meeting — Salt Lake City, Utah 18-21 Abril 1990
69th Meeting — New Orleans, Louisiana 17-20 Abril 1991
70th Meeting — Nashville, Tennessee 1-4 Abril 1992

Acompanhando o n.º 7 de «Educação e Matemática» é enviada uma ficha que poderá ser utilizada quer para encomendar publicações quer para assinar uma ou várias revistas do NCTM. Os preços indicados são obviamente em US dólares. Qualquer dúvida deverá ser esclarecida directamente junto do

NCTM - 1906 Association Drive
Reston, VA 22091 - USA

Uma cópia do catálogo 1987/88 das publicações do NCTM pode ser obtida através da Direcção da APM — para o que bastará contactar um qualquer dos seus membros. Quanto às revistas, apresenta-se a seguir uma breve informação:

Arithmetic Teacher. Publica nove números por ano (de Setembro a Maio). Destinado a professores do ensino básico, até ao oitavo ano, ou ligados à formação de professores.

Mathematics Teacher. Publica nove números por ano (de Setembro a Maio). Destinado a professores do ensino secundário, ou ligados à formação de professores.

Journal for Research in Mathematics Education. Publica cinco números por ano (Janeiro, Março, Maio, Julho e Novembro). Contém apenas artigos de investigação.

I Congresso Iberoamericano de Educação Matemática

Está em marcha a organização do I CIBEM. Como havia sido noticiado no número anterior de «Educação e Matemática», prevê-se que estes Congressos Iberoamericanos se realizem de quatro em quatro anos, alternadamente na Europa e na América Latina. A cidade de Sevilha será o local do primeiro, e os nossos colegas da Sociedade Andaluza de Educação Matemática «Thales» serão os responsáveis pela organização local.

O Comité Executivo do I CIBEM integra os seguintes membros: Paulo Abrantes (Portugal), Claudi Alsina (Espanha), Carlos Carranza (Peru), Ubiratan D'Ambrosio (Brasil), Eduardo Luna (R. Dominicana) e Gonzalo Sanchez (Espanha).

Acompanhando o n.º 7 de «Educação e Matemática» é enviada aos sócios da APM uma ficha que deverá ser utilizada por todos os interessados em receber o segundo anúncio.

Não foi por acaso... *(conclusão)*

lado, «a Matemática, o Inglês e as Ciências são definidos como temas fundamentais requerendo currículos e testes nacionais standartizados».

No caso do Ensino Superior as propostas parecem ter consequências muito mais imediatas. Sob o título sugestivo «You're fired, Mr Chips» a revista Time de 15 de Agosto dá conta das reformas draconianas decretadas pelo Governo da Sra Tatcher. Para além de uma redistribuição (leia-se diminuição) de verbas que passa pela reforma antecipada de professores, fecho de quadros, etc, o foco da reforma é mais uma vez a eficácia do sistema. E as metas são bem explícitas: por exemplo, pretende-se que nos próximos anos haja mais 35% de licenciados em Ciências e mais 25% de engenheiros «para que seja possível competir nos mercados internacionais».

Esta visão «monetarista» da educação corresponde a uma concepção de escola como «fábrica» de técnicos com todas as consequências que daí advêm. E o conceito de eficácia fica perfeitamente esclarecido. Pretende-se que o sistema educativo contribua de forma directa para o êxito da governação? Alguns professores ingleses com que falei diziam com alguma ironia que desta vez os objectivos da reforma são de facto explícitos. E apesar de 47 universidades condenarem a reforma e a classificarem como «receita para um desastre», o Ministro da Educação e Ciência argumenta que o plano GERBIL permitirá em 10 anos subir de 14% para 20% o número de estudantes que poderão ter acesso ao ensino superior (argumento certamente bem recebido pela opinião pública...).

Mas o que é que tudo isto tem a ver com Portugal? De facto, não foi por acaso que... pensei nisto.

João Filipe Matos

ICME 6, Budapeste, 27 de Julho a 3 de Agosto 1988

Cristina Loureiro, Escola Secundária Ferreira Borges

A cidade

Dividida pelo Danúbio, Budapeste é uma cidade que se estende pelas margens do rio de forma assimétrica mas em simbiose perfeita.

Peste, a cidade plana, mais moderna e que foi o centro da revolução Húngara de 1848.

Buda, a cidade antiga, entre colinas, onde se encontram as ruínas sobrepostas das várias ocupações da cidade. Romanos, Mongóis e Turcos, entre tantos outros, aí deixaram marcas notáveis e imponentes.

E de Budapeste pode o turista ficar falando longamente. Das suas termas, em pleno coração da cidade, onde é possível mergulhar logo de manhãzinha. Das suas esplanadas e hóteis de luxo, onde o pequeno almoço não tem o sabor do sono interrompido e é possível beber o entardecer à beira-rio. Das suas galerias e museus, ricos de obras e de sonhos, Vazarély e Varga são nomes grandes da arte mundial. Dos seus monumentos e igrejas, tão diversos quanto inesperados porque documentos de uma história atribulada e de uma cultura tão diferente da nossa. Dos passeios de barco no Danúbio, não tão azul quanto se poderia imaginar. Das suas pontes, oito laços sobre o plácido Danúbio, que permitem uma rede perfeita de transportes urbanos. Dos mercados onde é possível comprar pimentos amarelos e pepinos de conserva. Dos jardins, da música nas ruas...

Local perfeito para um Congresso Internacional. Budapeste conjuga, na calma do Danúbio que a percorre, a austeridade das suas velhas Universidades com a frescura dos seus jardins. Budapeste, cidade aberta e de velhas tradições.

Budapeste, onde vinte e dois professores portugueses foram à descoberta dos caminhos da Educação Matemática internacional? À procura das grandes linhas de investigação nos anos noventa? Ou à conquista de novos públicos?

Será o velho espiríto aventureiro dos nossos antepassados que os fez acorrer assim a outras paragens? Será a fome de conquistas ou a sede de descobertas?

Certo é que os portugueses marcaram posição em Budapeste. Entre cerca de dois mil e quinhentos participantes do todo o mundo, vinte e dois professores portugueses mostraram que nós também estamos atentos.

O Congresso

As sessões do Congresso realizaram-se em dois locais: a Technical University, velha, sólida e imponente Universidade à beira do Danúbio, onde decorreram as sessões paralelas, exposições, apresentação de posters e de filmes, etc.; o moderníssimo Convention Center, de linhas sóbrias, elegante e atraente, onde se realizaram as sessões plenárias.

27 Julho, 9 horas; no átrio imponente da velha Universidade, cerca de vinte computadores obrigam os pacientes mas conversadores congressistas a aguardar em filas a sua recepção; junto a cada computador uma simpática assistente, fala-se qualquer língua, só é conveniente saber escolher a fila certa e pagar em dólares.

Pode dizer-se que a organização logística funcionou impecávelmente e todo o aparato tecnológico permaneceu no átrio durante todo o Congresso. Átrio, que foi local de atendimento, ponto de encontros, de venda de recordações e até de apresentação de jogos.

27 Julho, 14 horas; sessão plenária de abertura. Língua oficial o Inglês, tradução simultânea em sete línguas. Pouca pompa e alguma circunstância. São as boas-vindas, as apresentações e está aberto o ICME 6, o sexto encontro da Internacional Comission on Mathematical Education.

27 Julho, 19 horas, National gallery of Hungary; recepção de boas-vindas com pequeno concerto e jantar. Deliciosa, mas talvez louca, recepção dos três mil e tal participantes e acompanhantes, numa galeria de arte onde se jantou entre estátuas e quadros, num local com uma das mais belas panorâmicas de Budapeste. Inesquecível!

Nos dias seguintes foi o corropio das comunicações. Escada a baixo, escada acima, as dúvidas e indecisões da escolha: o tema? o autor? ou a fidelidade ao grande tema organizador?

As comunicações estavam estruturadas de quatro modos diferentes:

1. Action groups, em que a unidade era a idade dos alunos a quem eram dirigidas as investigações.

2. Topic areas, em que as comunicações foram agrupadas por grandes temas de Matemática ou de Educação: «video, film», «visualization», Proofs, justification and conviction», etc.

3. Theme groups, em que havia um grande tema de discussão, «The profession of teaching», «Problem solving and applications» entre outros. À volta do tema eram organizadas comunicações e discussões em pequenos grupos com o objectivo de formular conclusões ou recomendações. Os Theme groups estavam ainda divididos em sub-temas.

4. Study groups e National Presentations. Nos study groups eram associadas comunicações de grupos ligados ao ICME, (History and Pedagogy of Mathematics — HPM; Psychology of Mathematical Education — PME; International Organization of Women and Mathematics Education — IOWME). Nas National presentations estavam agrupadas comunicações de determinado país convidado e que eram feitas na sua língua (Argentina, Bulgária, URSS, Espanha entre outros).

Ao longo de 5 dias estes quatro grandes grupos de comunicações funcionavam e pode imaginar-se que por dia ocorriam, talvez, 300 ou 400 comunicações. Durante todo o Encontro deverão ter sido apresentadas cerca de 2000 comunicações.

Sucederam-se assim as comunicações, as visitas às exposições permanentes de material e de livros, as apresentações de posters e de filmes, num ritual diário apenas interrompido por dois dias diferentes.

30 Julho, o dia do descanso. Uma interessante sessão plenária por A. ERSHOV sobre «computerization of schools and Mathematical Education». Excursões durante todo o dia a vários pontos do país; o lago, o campo, pequenas cidades. Uma pausa revigorante nos trabalhos do Congresso, algo atribulada para alguns.

31 Julho, o quinto dia especial: Mathematics, Education and Society. De manhã comunicações, à tarde painéis de discussão sobre vários temas. Um esperado momento de discussão que para muitos soube a pouco.

Depois foi o retomar do ritual diário até ao fim.

3 Agosto, 8h 30m, sessão de esclarecimento. Duas intervenções de fundo: «Algorithmic Mathematics: an old aspect with a new emphasis» e «The great figure of George Polya».

E do Congresso pode o participante ficar falando longamente. Da interessante participação portuguesa num painel de discussão. Das comunicações e posters apresentados por professores portugueses. Dos brilhantes participantes estrangeiros, nomes sonantes que nós conhecemos dos livros. Do tão visitado edifício Z onde havia interessantíssimas exposições de material organizadas por vários países. Do meeting de apresentação do 1.º Encontro Ibero-Americano de Educação Matemática em Sevilha 1990. Da sessão das Associações de Professores de Matemática organizada com a brilhante colaboração da APM. Do intercâmbio, das agradáveis conversas de corredor. Duma maravilhosa exposição de jogos. Dos livros que apetecia comprar. Dos insípidos almoços na cantina onde se comia sopa cor-de-rosa. Das gostosas happy-hours ao fim da tarde, com pepsi-cola e conversa à discrição, que os portugueses aproveitaram para sua «national presentation». Do jantar luso-português; dos programas sociais diários para acompanhantes e participantes distraídos; das sestas nos bancos do jardim da Universidade...

E no regresso, na mala

Livros, alguns adquiridos e muitos sonhados.

Filmes, uns apenas na memória, outros que vamos poder continuar a ver.

Papéis; notas e textos de comunicações; propostas de actividades para os alunos; catálogos sobre o que existe e o que se faz na Educação Matemática; e muita, muita propaganda de países, de grupos de investigação, eu sei lá!

Geoplanos, jogos e bolas. Fotografias, memórias e saudades, lembranças e recordações. Medalhas, selos e T-shirts. Contactos, sonhos e desilusões.

Certezas? Poucas! Ideias? Bastantes!

Mas muita, muita vontade de continuar a trabalhar em Educação Matemática.

No bolso todos trouxeram um convite: Bienvenue, ICME 7, Québec 1992.

E no fundo da mala, no canto mais resguardado e protegido da alma, a sensação de que «a experiência foi um privilégio de quem a viveu».

Renovação do Currículo da Matemática
Conclusões dos Grupos de Discussão do Profmat 88

No Profmat 88 funcionaram durante uma manhã grupos de discussão sobre temas relativos ao ensino da Matemática. Essas discussões tiveram como base o documento «Renovação do Currículo de Matemática», publicado pela APM.

As conclusões desses grupos de trabalho foram apresentadas numa sessão plenária do Profmat.

Devido à sua importância aqui se divulga uma síntese dessas conclusões.

Foram discutidos em diferentes grupos de trabalho três grandes temas:

I — Os grandes objectivos do ensino da Matemática.

II — A natureza e organização das actividades de aprendizagem e o novo papel do professor.

III — O currículo de Matemática e as novas tecnologias.

A. O grupo onde foi discutido o tema I considerou que, ao definir os objectivos para o ensino de Matemática, deviam ser tidas em conta as orientações seguintes:

1 — A ênfase deve ser dada ao papel formativo da disciplina, sabendo que aprender e ensinar Matemática deve contribuir para observar, compreender, intervir, tomar decisões, ...;

2 — Os objectivos essenciais do ensino/aprendizagem da Matemática devem traduzir um descentrar dos conteúdos para os métodos, dos produtos para os processos de aprendizagem;

3 — Deve proporcionar-se ao aluno oportunidades de conhecer a história da Matemática e de se aperceber de que o seu processo não é linear.

B. Quanto à «natureza e organização das actividades de aprendizagem» o grupo concluiu que as actividades que se fazem hoje na aula de Matemática devem ser reorientadas de modo a:

— implicar os alunos em trabalhos do tipo investigativo;

— implicar os alunos em actividades de resolução de problemas.

Mas, o novo papel reservado ao professor exige que seja criado um sistema de **formação de professores** — formação contínua em escolas e grupos de escolas — sistema esse em que o foco da formação esteja nos professores e não nas estruturas do Ministério. Sugeriu-se que a APM poderia intervir neste processo, começando desde já a dar alguns passos tendo um papel mais activo através de:

- publicações
- folhas informativas
- realização de encontros regionais e locais
- apoio financeiro à publicação de actividades (não numa forma acabada) que possam ser discutidas entre grupos restritos de professores (20/30)

Por outro lado, considerou-se necessário:

— a reactivação dos grupos disciplinares nas escolas. Para isso as escolas têm de ter espaços físicos e temporais para os professores trabalharem em grupo e para poderem trabalhar com os seus alunos fora do horário lectivo;

— a criação de embriões que poderão ser futuros centros de investigação da APM;

— repensar a questão da avaliação sugerindo, desde já, a criação de um grupo de trabalho que começe a estudar novas formas e modelos de avaliação.

Considerou-se, ainda, que o PROFMAT constitui um momento importante na formação de professores pelo que se apontou a necessidade de iniciar diligências no sentido de o Ministério da Educação vir a apoiar esta realização.

C. Os grupos de trabalho que se debruçaram sobre o tema III chegaram às seguintes conclusões:

1 — O novo currículo não pode estar subordinado às novas tecnologias havendo evidência de que as calculadoras e os computadores valorizam novas capacidades como a estimação, apreciação crítica de resultados, estabelecimento de conjecturas, tomadas de decisão, etc; no entanto, é preciso ter consciência que as novas tecnologias, só por si, não implicam novas relações na sala de aula;

2 — Também aqui foi frisada a necessidade de formação de professores e que os resultados não são imediatos pois, normalmente os professores necessitam de um período de amadurecimento em ambiente extra aula antes de passarem a uma utilização na aula;

3 — É necessário equipar as escolas embora, por vezes, se trate de uma falsa questão. Existem escolas bem equipadas que não funcionam, enquanto que apenas com um computador pode já fazer-se muita coisa.

Editorial *(conclusão)*

«Dignificou-se» o estatuto dos deputados, aumentando os seus vencimentos. Os professores esperam, claro, igual dignificação. Mas esperam, sobretudo, que esta lhes advenha de um estatuto em que a carreira não seja acumular anos de serviço, prestar serviços...

De um estatuto em que se lhes exija participar na definição do papel da Escola, na concepção e implementação do projecto educativo da sua escola, na gestão dos seus recursos.

De um estatuto que lhes reconheça o direito à investigação.

De um estatuto que lhes proporcione oportunidades de formação, actualização e valorização.

Reorganização curricular e novos programas.

Questionou-se o papel da escola ou trata-se, apenas, do reequipamento de uma fábrica falida cujos produtos já não são vendáveis?

Trata-se de dar aos jovens a oportunidade de porem as suas questões, de discutirem as suas ideias, de as confrontarem com as dos outros?

Trata-se de os deixar aprender ou, antes, de lhes ensinar mais umas quantas técnicas, porventura, mais adequadas à sociedade moderna?

Começar de novo... vai valer a pena?

Filipa Cortez
Leonor Moreira

Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Núcleo da FCUL

1. *Materiais de Formação*

- *Actas do Seminário Sobre o Computador no Ensino: Relatório do 1.º Ano de Actividade do Projecto Minerva, Núcleo DEFCUL* — Organizado por João Ponte
  □ 2.ª Edição, Fevereiro 1988: 112 pp.; *preço: 300$00*
- *Vamos Trabalhar com a Folha de Cálculo* — Eduarda Fonseca
  □ 2.ª Edição, Junho 1987: 22 pp.; *preço: 100$00*
- *Sistemas Operativos para Microcomputadores* — João Ponte
  □ 1.ª Edição, Fevereiro 1987: 18 pp.; *preço: 100$00*
- *LOGO Português: Manual de Utilização e Sugestões de Actividades* — João Filipe Matos e João Ponte
  □ Versão 5, Fevereiro 1988: 110 pp.; *preço: 300$00*
- *Actas da Semana do LOGO, Portalegre 87* — Organizado por João Ponte
  □ 1.ª Edição, Abril 1987: 48 pp.; *preço: 200$00*
- *A Música e o LOGO* — João Filipe Matos
  □ 1.ª Edição, Abril 1987: 24 pp.; *preço: 100$00*
- *O Computador e o Trabalho de Projecto* — João Ponte
  □ 2.ª Edição, Fevereiro 1988: 32 pp.; *preço: 150$00*
- *O Computador como Instrumento de Mudança Educativa. Intervenção na Sessão de Encerramento do Dia do Computador na Escola Sec. Josefa de Óbidos* — João Ponte
  □ 1.ª Edição, Setembro 1988: 13 pp.; *preço: 100$00*
- *Consulta e Classificação como Actividades Educativas. Utilização de Bases de Dados* — Maria de Lurdes Serrazina
  □ 1.ª Edição, Março 1988: 23 pp.; *preço: 150$00*
- *Relatório do 2.º Ano de Actividade do Projecto Minerva, Núcleo DEFCUL* — Organizado por João Ponte
  □ 1.ª Edição, Abril 1988: 88 pp.; *preço: 300$00*
- *Processamento de Texto. Para desenvolver o gosto pela escrita* — João Ponte
  □ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 26 pp.; *preço: 100$00*

2. *Investigação*

- *A Natureza do Ambiente de Aprendizagem Criado com a Utilização da Linguagem LOGO no ensino Primário e as suas Implicações na construção do Conceito de Variável* — João Filipe Matos
  □ 1.ª Edição, Junho 1987: 219 pp.; *preço: 500$00*

3. *Programas Educacionais*

- *LOGO.GEOMETRIA* — Eduardo Veloso
  □ Versão 2.0, Setembro 1988; 1 diskette, manual de utilização e cartão com os comandos principais, para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 1250$00* (ref. 51, diskette 5¼; ref. 52, diskette 3½)
- *LOGO.GEOMETRIA — Problemas e Actividades; preço: 150$00*
- *TRINCA-ESPINHAS* — João Ponte e Jaime Sacadura
  □ Março 1988; 1 diskette 5¼ e manual, para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 500$00* (ref. 53)
- *ESTIMATEMP* — Paulo Abrantes e Jaime Sacadura
  □ Março 1988; 1 diskette 5¼ e manual para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 500$00* (ref. 54)
- *TRINCA-ESPINHAS e ESTIMATEMP*
  □ 1 diskette 3½ e dois manuais; *preço: 800$00* (ref. 55)
- *Uma experiência de introdução do computador na disciplina de Estudos Sociais* — Organizado por Maria da Conceição Canavilhas
  □ Versão 1.0, Setembro 1988; 2 diskettes e manual de utilização, para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 1000$00*

Todos estes materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando a ficha da página 10.

Encontros sobre o ensino da Matemática

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

III Congresso Internacional sobre a Didáctica das Ciências e da Matemática

A Revista «Ensenanza de las Ciencias» promove o seu III Congresso Internacional na cidade de Santiago de Compostela, de 21 a 23 de Setembro de 1989. Segundo os organizadores, este Congresso será centrado na «apresentação de propostas concretas de trabalho na aula, fundamentadas na investigação didáctica e dirigidas a qualquer nível de ensino incluindo o da formação de professores».

Este Congresso terá um espaço alargado para apresentação de propostas inovadoras. Serão também aceites comunicações sob a forma de «posters» e haverá ainda uma exposição de materiais didácticos. A pré-inscrição deverá fazer-se até ao dia 30 de Janeiro de 1989 e a inscrição definitiva até 15 de Maio, custando 12000 pesetas (10000 para os assinantes de «Ensenanza de las Ciencias»).

Para mais informações, contactar:

Ensenanza de las Ciencias / ICE Universitat Autonoma de Barcelona 08193 Bellaterra (Barcelona) / Espana.

P.M:E. 13 em Paris

A 13.ª Conferência Anual do PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) decorrerá em Paris entre 9 e 13 de Julho de 1989.

O programa da Conferência inclui, como habitualmente, sessões plenárias, relatórios de investigação, grupos de discussão, grupos de trabalho e posters. A língua oficial é o inglês.

As despesas de cada participante estão calculadas em aproximadamente 2200 FF (cerca de 55 000 escudos), cobrindo a inscrição, as actas, o alojamento em residência universitária e quase todas as refeições.

Morada do Comité Organizador: Gérard Vergnaud, G.R. Didactique, 46 rue Saint-Jacques, 75005 Paris.

CIEAEM-41 em Bruxelas

O 41.º Encontro Internacional da CIEAEM (Comission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) terá lugar em Bruxelas, entre 23 e 29 de Julho de 1989.

O Encontro decorrerá nas instalações da Universidade Livre de Bruxelas. O custo total para cada participante será de aproximadamente 10000 FB (cerca de 37 500 escudos). As línguas de trabalho são o francês e o inglês.

O tema central do Encontro é «O papel e a concepção dos programas de Matemática».

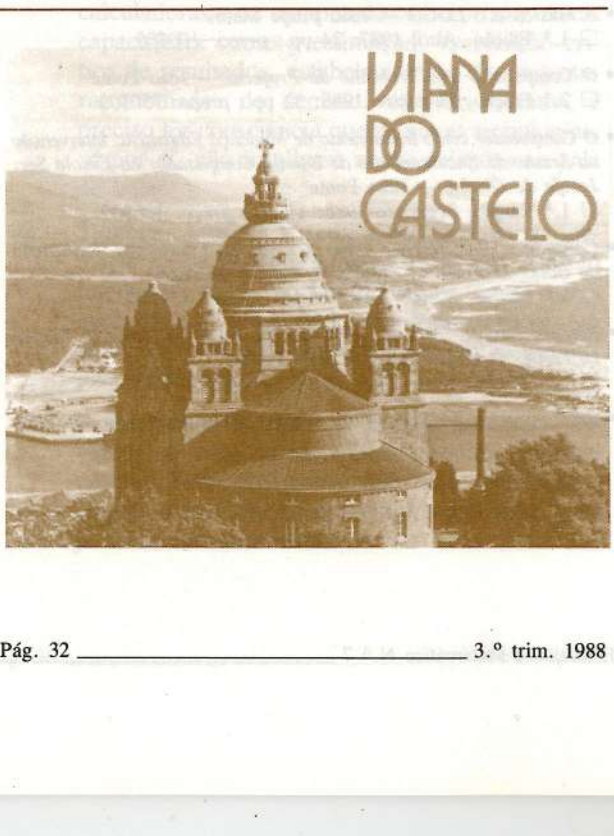
Morada do Comité Organizador: Jacqueline Vanhamme, rue Firmin Martin 2, B-1160 Bruxelles, Belgique.

Profmat-89 em Viana do Castelo

A Direcção Nacional da APM aceitou a proposta dos nossos colegas do núcleo de Viana do Castelo no sentido de que o Encontro Anual de 1989 decorresse naquela cidade, tendo aliás anunciado esta decisão na sessão de encerramento do Profmat de Faro.

A comissão organizadora local do Encontro será coordenada pela colega Isabel Vale, da ESE de Viana do Castelo, enquanto os colegas Eduardo Veloso e Henrique Guimarães colaborarão com o núcleo de Viana na organização do programa do Encontro.

O Profmat-89 será provavelmente marcado para os princípios de Outubro. Em breve, haverá mais notícias sobre este acontecimento.

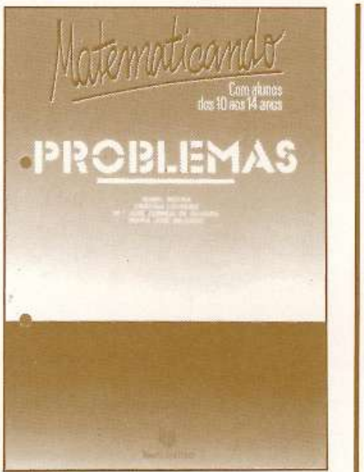


Texto Editora

Adoptar um bom manual é combater o insucesso escolar

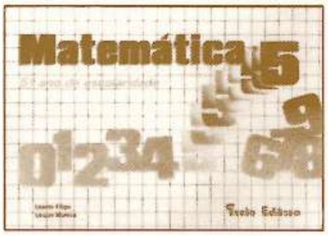
PUBLICAÇÕES PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA-88/89

NOVO



5.° e 6.° ANOS
MATEMATICANDO
PROBLEMAS

Isabel Moura
Cristina Loureiro
M.ª José Correia de Oliveira
Maria José Delgado



5.° ANO
MATEMÁTICA 5

Leonor Filipe
Leonor Moreira

6.° ANO
MATEMÁTICA 6

Leonor Filipe
Leonor Moreira

7.°, 8.° e 9.° ANOS
M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

EXERCÍCIOS
M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

10.°/11.° ANOS
M 10 e M 11
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho
12.° ANO
M 12
Armando Machado
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho
EXERCÍCIOS
M 10, M 11 e M 12
Inês dos Santos
Judite Barros
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

MATERIAL DIDÁCTICO PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Colecções de transparências — 7.°, 8.° e 9.° anos
Software — Equações/Núm. int. relativos — 7.° ano
Utilidades I — 7.° ano
Geometria Analítica — 10.° ano
Gráficos de funções — 10.°/11.° anos

Esteja atento ao promotor Texto.
Em breve ele estará na sua escola com as novas publicações.

RIGOR E QUALIDADE... TEXTO A TEXTO

ÍNDICE