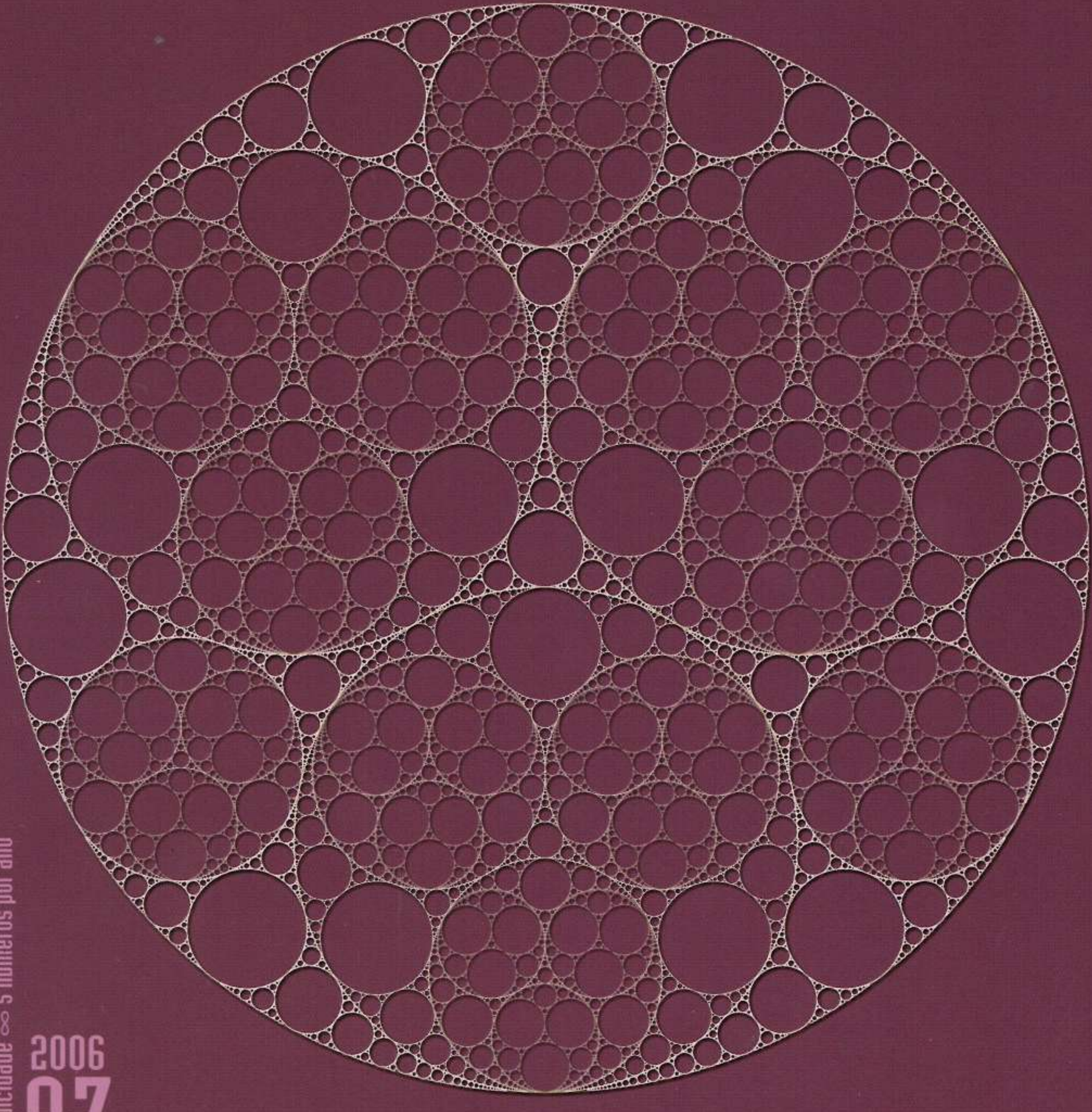
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2006

87

Março ∞ Abril

Preço 5,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2006
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Etigráfe, Artes Gráficas Lda.
Montemor — 2670-502 Loures

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051

Porte Pago

Sobre a capa

A figura na capa corresponde a uma possível materialização do problema de Apolónio. Este consiste na determinação de uma circunferência que seja tangente a três circunferências previamente dadas. Entre os diferentes métodos para encontrar as soluções do problema, algumas puderam ser descritas através de algoritmos que por sua vez dão origem a imagens como a da capa. Este tipo de figura está ainda relacionado com as circunferências de Ford (tema abordado num dos artigos deste número). Estas obtêm-se *iterando o problema de Apolónio*, depois de considerar que duas das circunferências originais degeneram em rectas paralelas.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Vieira, António Menino, Cristina Loureiro, Direcção da APM, Eduardo Veloso, Equipa do Projecto Pencil da E. B. 2,3 Dr. Rui Grácio, Equipa do Projecto Pencil do Pavilhão do Conhecimento, Graça Zenhas, Henrique Guimarães, Jaime C. Silva, Ilda Couto Lopes, José Fernandes, Luís Reis, Lurdes Serrazina, Margarida Amado, Rita Cadima, Rosário Ribeiro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

O 3º ciclo e a aventura de aprender

Direcção da APM

Há 20 anos, no editorial da primeira *Educação e Matemática*, constatava-se que o insucesso em Matemática atingia índices preocupantes, que muitos alunos não gostavam de Matemática e não compreendiam a sua relevância. Se nos perguntassem de quem era a culpa, a resposta era inevitável: dos programas! Por isso, no início dos anos 90, sentiu-se especial satisfação por os programas contemplarem a resolução de problemas, a observação, exploração e experimentação associados aos aspectos intuitivos da matemática, a utilização da calculadora e do computador, a utilização de materiais e o papel da Matemática na interpretação do mundo real. Na época, os ajustes curriculares no 3º ciclo, no sentido da diminuição do número de disciplinas em cada ano, embora não alterassem o problema de fundo das disciplinas *vs* áreas disciplinares, reflectiam preocupação em contrariar a dispersão disciplinar. Dava-se importância à continuidade pedagógica e ao projecto de um ciclo a desenvolver com os alunos, tendo havido indicações para as escolas seleccionarem professores efectivos que acompanhassem os alunos durante os três anos. Estas medidas coexistiam com a falta de condições nas escolas e a falta de estabilidade e qualificação do corpo docente neste ciclo, a par da dificuldade em encontrar medidas acertadas para a explosão escolar verificada.

Actualmente, continuam a existir pontos críticos no 3º ciclo. Os resultados das Provas de Aferição de Matemática (do PISA e dos exames) não deixam dúvidas sobre as insuficiências nas aprendizagens e desempenho dos alunos que pretendíamos ver desenvolvidas. Pelas mais variadas razões, o quadro de professores do 3º ciclo tem-se mantido instável e, em muitas escolas, não há a cultura da continuidade pedagógica. A reorganização curricular do 3º ciclo, subverteu o espírito e a lógica subjacente ao Dec. Lei 6/2001, de funcionamento por áreas disciplinares e de gestão conjunta de programas entre diferentes disciplinas, de forma a obviar à sua (em alguns casos) desarticulação com o Currículo Nacional tendo-se aumentado de forma insustentável a dispersão disciplinar. O cumprimento da escolaridade obrigatória continua por fazer pois 140000 jovens com menos de 20 anos não completaram o 9º ano. É notório que os problemas não são fáceis de resolver.

Por isso, na reunião convocada em Março pela Ministra da Educação com várias Instituições, para reflectir sobre o relatório do 9º ano elaborado pelo GAVE, defendemos algumas medidas de carácter geral: juntar disciplinas; criar uma área não disciplinar única com mais tempo lectivo; reforço da carga horária de Matemática; formar estruturas de acompanhamento e monitorização dos currículos nas escolas; criar uma comissão de revisão dos programas e do Currículo Nacional, com consulta pública e iniciativas de apoio aos professores de Matemática e ao desenvolvimento dos programas (brochuras, boletins, formação de professores através de uma rede de professores acompanhantes, edição de material didáctico, ...).

Defendemos ainda medidas particulares a implementar de forma articulada, como os desdobramentos nas turmas e a co-docência. No relatório sobre os exames do 9º ano, as escolas e os professores consideram que é nas salas de aula e nas escolas que os problemas podem ser resolvidos. Ora, a prática de sala de aula é ainda muito centrada em procedimentos, fruto das circunstâncias exteriores apontadas no relatório, mas também das opções do professor. Estes aspectos deverão ser repensados na formação inicial e contínua dos professores. Mudar o estilo da aula em turmas muitas vezes demasiado heterogéneas e difíceis não é uma tarefa fácil para ser realizada por cada professor isoladamente, mas se for um projecto assumido por um grupo de professores da escola e pelos órgãos de gestão tem maior probabilidade de atender ao grande número de variáveis que estão em jogo em cada turma. Neste caso, poder contar com um professor em co-docência, discutir com outros as tarefas mais apropriadas a desenvolver e conseguir desenvolvê-las, articulando situações de desdobramento de turmas com a leccionação conjunta por dois professores, permitirá um trabalho mais individualizado que tenha em conta as necessidades concretas dos alunos, dentro da sala de aula ou fora dela.

Melhorar o 3º ciclo não vai depender da resolução de um grande problema nacional, mas de encontrar as soluções adequadas aos alunos de cada escola, o que só é possível com a elaboração de projectos concretos para o ciclo completo, reforçando as equipas de professores e melhorando o trabalho disciplinar e interdisciplinar conjunto. É este comprometimento que temos de assumir nas escolas, exigindo ao Ministério da Educação as condições necessárias, como o reforço de professores que permitam a gestão da componente lectiva ou a atribuição da componente não lectiva ao trabalho de desenvolvimento curricular feito nas escolas.

Isto para que, como se dizia no editorial da revista nº 4, os alunos trilhem os caminhos da aventura de aprender com *um brilhozinho nos olhos*.

Direcção da APM

Valeu a pena esperar! O ClicMat é um CD-ROM que, depois de muito investimento de uma equipa polivalente, está agora disponível para download no site da APM e gostávamos de o dar a conhecer aos nossos leitores. Nesta intenção de divulgação optámos por transcrever a apresentação escrita pelos autores que é feita no próprio CD, realizar uma entrevista aos autores dos conteúdos e ainda seleccionar uma actividade para a secção Materiais para a sala de aula. Esperamos assim, incentivar todos a experimentar.

Clic Mat

actividades interactivas de matemática

Apresentação

Este CD-ROM faz parte de uma colecção de materiais para várias disciplinas, editada pela Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação e subsidiada pelo PRODEP. A iniciativa da publicação destes materiais partiu de Paulo Abrantes, como director do Departamento de Educação Básica, em 2001, com o objectivo de proporcionar às escolas um conjunto de actividades interactivas que fossem exemplos significativos de experiências de aprendizagem preconizadas pelo Currículo Nacional do Ensino Básico. No que respeita às experiências de aprendizagem matemática, o director do DEB convidou a Associação de Professores de Matemática para se responsabilizar pela elaboração do CD-ROM. O *ClicMat* foi assim elaborado por uma equipa de quatro professores, uma ilustradora, um informático e um músico.

O *ClicMat* foi feito a pensar em todos os alunos e professores do Ensino Básico, embora também possa ser muito estimulante para alunos de outros níveis e para todos os que gostam de desafios.

O *ClicMat* é constituído por um conjunto de 32 actividades concebidas de maneira a poderem ser utilizadas, tanto em situação de sala de aula como em pequeno grupo ou individualmente de forma autónoma. Além de actividades originais, concebidas expressamente para este CD-ROM, foram incluídas propostas de actividades interactivas que resultam da adaptação de problemas ou tarefas originalmente sem carácter interactivo (ver créditos na Ficha Técnica). O CD-ROM contém ainda uma selecção de *applets* disponíveis na *World Wide Web*. Os *applets* são pequenos programas interactivos que podem ser visionados num *browser*.

As actividades do ClicMat são de três tipos: problemas, actividades de investigação e jogos. As actividades são de diferentes graus de dificuldade e foram classificadas em três níveis: 1, 2 e 3. A atribuição dos níveis teve em conta conhecimentos e capacidades considerados necessários para a compreensão da tarefa e para a sua concretização. Algumas actividades têm mais do que um nível de dificuldade.

A página de entrada no *ClicMat* é a Lista Geral, onde estão ícones relativos a todas as actividades disponíveis. Todas as actividades foram concebidas de forma a serem resolvidas num único ecrã, que inclui o enunciado, a zona de trabalho com todos os botões necessários e o acesso a mais instruções — uma página auxiliar onde se esclarecem questões de funcionamento e de natureza matemática.

Em todas as actividades existe uma ligação directa via Internet à Associação de Professores de Matemática, através da qual podem ser colocadas questões e apresentadas sugestões sobre as actividades do *ClicMat*.

Nota dos autores

Os responsáveis pelo conteúdo do *ClicMat* dedicam este trabalho ao colega e amigo Paulo Abrantes. Paulo Abrantes foi um dos grandes impulsionadores da resolução de problemas e da realização de actividades de investigação na Matemática do Ensino Básico em Portugal.

Entre as suas qualidades de inovador recordamos também o seu grande interesse e empenhamento na utilização das tecnologias de informação com fins educativos. Paulo Abrantes acompanhou ainda no início a realização deste trabalho e lamentamos que não tenha podido acompanhá-lo até ao fim. Os seus contributos seriam certamente preciosos. A ele agradecemos a honra de ter convidado a Associação de Professores de Matemática para ficar ligada à produção deste instrumento de trabalho, que Paulo Abrantes quis colocar nas mãos de alunos e professores. Esperamos ter correspondido às suas expectativas.

Autores: Ana Vieira, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso e Rosário Ribeiro. *Design, ilustrações e animações:* Cristina Sampaio. *Programação:* Paulo Almeida. *Música:* Nuno Barreiro e Filipe Matta.

Entrevista aos autores do ClicMat

Recorrendo às novas tecnologias (afinal é disso que se trata o recurso às novas tecnologias) mantivemos uma conversa por e-mail com a Ana Vieira (AV), a Cristina Loureiro (CL), o Eduardo Veloso (EV) e a Rosário Ribeiro (RR) é essa conversa que agora vimos partilhar com os nossos leitores.

Tem vindo a ser hábito desta revista acompanhar as entrevistas com fotos dos seus intervenientes. Mas também, como todos sabem, da regra nasce a excepção e desta vez o Eduardo Veloso lembrou, e muito bem, que seria, mais interessante levantar a ponta do véu e mostrar algumas das ilustrações que servem de suporte às actividades do CD. E assim fizemos. Transcrevemos a entrevista e espevitamos a curiosidade dos leitores com as bonitas ilustrações da Cristina Sampaio.

E&M No *ClicMat* optaram por uma classificação por grau de dificuldade e por tipo de tarefa (jogo, problema, investigação) e não por uma organização etária ou por anos de escolaridade. Porquê esta opção?

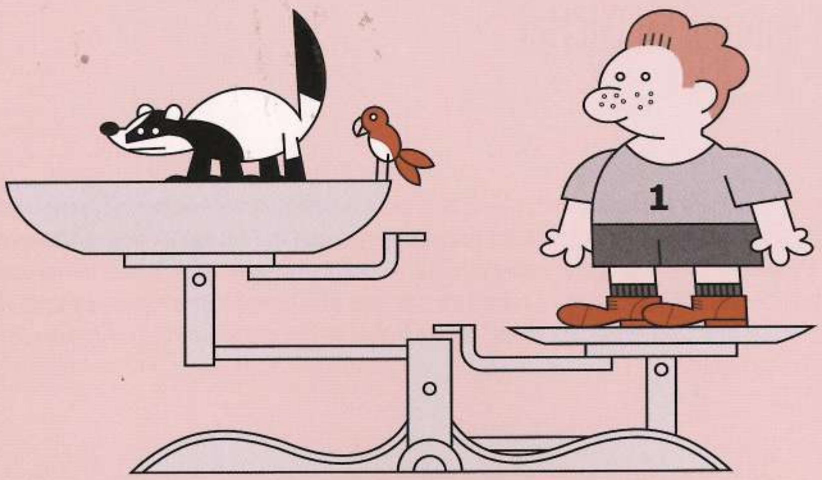
EV Isso foi discutido entre nós, mas pensámos que seria errado e enganador. Problemas e explorações do tipo das que são propostas no *ClicMat* não são exercícios para aplicar directamente conhecimentos adquiridos num determinado ano de escolaridade, mas sim, na maior parte dos casos, desafios intelectuais que exigem gosto por responder — existente em todas as crianças enquanto a escola que (ainda) temos e outras desgraças não o vão fazendo diminuir e desaparecer —, não requerem conhecimentos específicos de matemática, para além dos mais elementares de cálculo mental e pressupõem apenas uma lógica elementar de pensamento, a qual pode estar mais ou menos desenvolvida. Assim uma indicação do nível de dificuldade é mais apropriada pois não aponta rigidamente para níveis etários — pois todos sabemos que há desenvolvimentos muito diferentes nas crianças — nem para níveis de escolaridade, o que seria deveras enganador para este tipo de propostas.

E&M Ficámos contentes por ver jogos como o Trinca Espinhas, que fez furor há alguns anos atrás, recuperado e melhorado. Gostaríamos de aceder ao *site* da APM (por exemplo) e poder jogar *on-line*. Colocam a hipótese de cada uma das 32 actividades poder ser colocada individualmente no *site* da DGIDC ou da APM, de forma a serem utilizadas interactivamente?

AV Não sei qual a vantagem de ter as actividades individualmente. A minha opinião é que faz mais sentido permanecer como estão com possibilidade de *navegar* dentro do CD. Claro que deve estar *online* mas no seu conjunto. Nada impede que a pessoa só se dedique a uma actividade, mas deve ter sempre a possibilidade de consultar tudo o resto que quiser.

E&M Na apresentação do CD, salientam que "A iniciativa da publicação destes materiais partiu de Paulo Abrantes, como director do Departamento de Educação Básica, em 2001, com o objectivo de proporcionar às escolas um conjunto de actividades interactivas que fossem exemplos significativos de experiências de aprendizagem preconizadas pelo Currículo Nacional do Ensino Básico". Sabemos que, antes da publicação, testaram o CD com alunos. Com que ideia ficaram acerca da sua adesão às propostas? Houve algum episódio que queiram salientar? O que esperam da exploração do CD?

AV Algumas actividades foram testadas com um grupo de alunos do terceiro ciclo que frequentavam uma oficina de matemática em horário extra lectivo em regime de voluntariado. Eram alunos *especiais* por terem um gosto particular por matemática. Esta oficina era dinamizada por mim e pela colega Inês Alegria. No primeiro dia que levámos o *ClicMat*, ainda numa fase bastante embrionária, tivemos algumas surpresas. Instalámos o CD nos 14 computadores da sala e estávamos ainda nesta tarefa quando os alunos começaram a chegar à sala. Alguns chegavam sempre mais cedo do que a hora prevista. Começaram logo a fazer perguntas mas nós procurámos não responder. Queríamos fazer primeiro uma pequena apresentação, explicar o funcionamento geral e fazer um apelo à sua capacidade crítica para nos darem sugestões de aperfeiçoamento do funcionamento de algumas, para além de nos ajudarem a detectar alguns *bugs*. Procurámos criar alguma expectativa dizendo que era uma surpresa, que esperassem um pouco e não mexessem nos computadores até termos tudo pronto. Quando fomos preparar o nosso computador e instalar o projector, alguns alunos apanharam-nos de costas e imediatamente desobedeceram às nossas ordens sem nós nos apercebermos. Convém antes dizer que nessa altura apenas estava completamente pronta uma actividade, o explorador. Tínhamos pensado



que cerca de metade da sessão, pelo menos (45 minutos) seria para explorar esse problema até ao fim desafiando-os a encontrar a solução óptima. O tempo que sobrasse (se é que sobraria algum) seria para dar uma olhadela às outras actividades. Pois o que aconteceu é que mal acabámos de preparar tudo, computador, projector, ecrã, virámo-nos para a sala e eles estavam todos a trabalhar afincadamente nas actividades e alguns tinham precisamente começado pelo explorador e já tinham chegado ao fim antes que nós abríssemos a boca. Ficámos estupefactas porque não foi preciso dar-lhes instruções de onde deviam ou não *clicar* para o funcionamento da actividade, contrariamente ao que acontecia sempre que mostrávamos a actividade a adultos cuja reacção era sempre não fazer a mínima ideia o que fazer para armazenar as rações ou alimentar o explorador. Perante tal situação optámos por não fazer nesse momento a apresentação geral do CD e desafiá-los antes para que encontrassem a solução óptima do problema, pensando novamente que isso iria demorar algum tempo. Mais uma vez nos enganámos. Passados poucos minutos dois alunos chegaram à solução óptima e os outros conseguiram passado muito pouco tempo. Confesso que isto me deixou perplexa e convicta das minhas limitações. Quando resolvi este problema pela primeira vez demorei bastante tempo a ter êxito, e mesmo depois de o conhecer nunca consegui chegar logo à melhor resposta sem algumas tentativas falhadas … .

Este episódio foi muito gratificante, mas outras experiências alertaram-nos para reacções menos positivas e que é preciso ter em conta. A primeira reacção dos alunos em geral, é começarem a *clicar* em tudo, procurando descobrir o que é para fazer apenas pelo *feed-back* dos *cliques* que vão fazendo, sem saberem bem o objectivo da actividade. Em geral têm uma enorme resistência em ler o que quer que seja. Alguns nem liam o enunciado e ao fim de alguns *cliques* pouco esclarecedores, a reacção era chamar a professora e perguntar. Esta é uma atitude que procurámos contrariar. O CD foi construído com o propósito de poder ser utilizado de forma autónoma pelos alunos, reservando-se ao professor o papel de ajudar a explorar e a reflectir sobre aspectos particulares. A Rosário também experimentou com alunos do 1° ciclo e pode dar mais alguns contributos para esta pergunta.

RR Eu instalei uma versão experimental nos computadores da sala de informática da minha escola, onde os alunos vão duas vezes por semana. Essa versão ainda não tinha todas as actividades.

Apresentei-lhes o CD, expliquei-lhes que as actividades tinham graus de dificuldade diferentes e deixei-os, em grupos de dois, durante curtos períodos a explorar o CD.

Houve alunos que quiseram ver todas as actividades e outros que foram logo fazer as actividades que lhes tinham suscitado maior interesse.

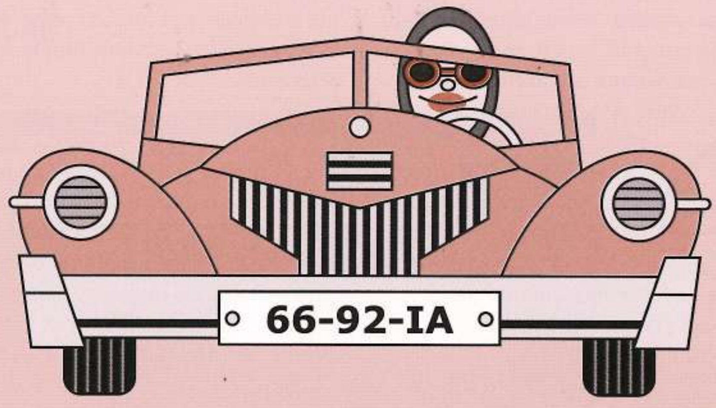
Curiosamente na 1ª sessão houve dois alunos que juntos conseguiram resolver a *Travessia no Deserto* e chegaram à solução óptima. Tal como a Ana, eu não contava que isso acontecesse e o que mais me admirou foi a forma clara como me explicaram a estratégia de resolução que tinham usado.

Outra actividade que vi resolver com algum entusiasmo foi o *Pesar com animais*. Neste caso fiquei contente por dois motivos: por trabalharem autonomamente (o que queria dizer que o enunciado estava bem formulado) e por ver que enquanto se divertiam imenso com os animais e todo o aparato daquela actividade estavam de facto a trabalhar o cálculo com imenso prazer. Outra actividade que também despertou muito interesse foi o *Rush Hour*. Tive alunos que ao fim de pouco tempo estavam no nível oito.

No meio destes pequenos êxitos também ouvi alguns alunos comentarem que havia muitas actividades difíceis. É claro que, como professora do 1° ciclo, também eu gostava que este CD tivesse mais actividades para o 1° ciclo, mas … .

E&M Consideram útil elaborar um catálogo do CD para divulgar em papel?

AV Não vejo grande vantagem. Para divulgar a quem? Acho que está na altura de pouparmos papel quando puder-



mos. Se o CD for de facto enviado para todas as escolas, porquê estar a mandar também em papel?

EV Sinceramente, não vejo inconveniente mas não me parece muito significativo a não ser um catálogo com o resumo das actividades. Mas sendo de graça, porque razão as pessoas não experimentam?

CL Concordo com o Eduardo e a Ana. Acho que mais interessante do que um catálogo poderá ser divulgar alguns relatos da sua utilização. Aspectos das reacções dos alunos, explorações que aconteceram, desenvolvimentos que os professores pensaram, situações em que foram utilizadas, e outras coisas deste tipo. Sabemos muito pouco de como as actividades interactivas (e há tantas disponíveis na internet!) estão a ser usadas. Mais do que divulgar o que há é preciso saber como está a ser usado e em que condições. A Educação e Matemática poderia ser o veículo desta divulgação.

E&M Colocamo-vos agora uma questão de ordem técnica. Porquê a opção de não deixar imprimir nada? Por exemplo as tabelas na investigação da mesa de bilhar poderia ter interesse imprimir.

AV (...) Há actividades em que se pode imprimir, por exemplo nas pesagens ...

CL Confesso que não me lembro deste porquê, mas pensando agora. Como a Ana disse há tabelas que podem ser impressas, as das pesagens. Isso foi pensado porque pensámos na hipótese de o professor utilizar esses dados para fazer alguma exploração posterior com os alunos. É uma tabela com muita informação e tem várias hipóteses de utilização, por isso faz sentido poder ser impressa. Quanto à tabela do *Snooker*. é muito simples. Se o utilizador de facto quiser ter os dados em papel poderá registá-los rapidamente.

Do ponto de vista técnico as tabelas deram muitos problemas. Nunca percebemos porquê, mas quando havia a alteração dos dados iniciais as tabelas deixavam registos dos dados de partida. O CD já tem *bugs* demais, parece-nos que esta opção de não imprimir mais tabelas foi uma boa opção. O que não quer dizer que em futuros trabalhoso deste tipo esta opção não seja repensada por quem o fizer.

E&M Sentimos que não foi fácil terminar esta tarefa, realizada num tempo de tantas perdas. Ficaram com vontade de continuar a fazer materiais deste tipo?

AV O problema é que a tarefa não está terminada porque continuam a surgir problemas. O grande problema neste material é a programação, parece que é muito difícil, e não foi fácil a nossa articulação com a equipa de programação. Talvez não fosse má ideia perguntar alguma coisa ao programador? E já agora, por que não estender esta entrevista aos restantes elementos? Talvez colocassem questões interessantes sobre o seu relacionamento com estes chatos da matemática, possivelmente terão bastantes críticas a fazer-nos.

EV Acho que é um trabalho muito interessante e que poderiam existir diversos materiais similares, há muito material que se podia transformar em actividades deste tipo a coleccionar em diversos CD's. Com outro tipo de organização e com um planeamento rígido e mais estritamente cumprido, o tempo de execução pode ser imensamente reduzido. Pessoalmente agora estou com outros projectos muito trabalhosos e consumidores de tempo e não estou a ver-me a meter noutra tão cedo (ou tão tarde ...).

CL Concordo com o Eduardo quando diz que há muito material que se podia transformar em actividades deste tipo. E para mim o aspecto mais interessante deste trabalho foi precisamente esse, perceber como uma boa tarefa estática, pensada para ser apresentada em papel, se podia transformar numa boa actividade interactiva. E identificámos várias com essas características. A grande dificuldade está nas opções e organização das interacções. E esse passo acho

que apenas começamos a dá-lo. Muito mais hipóteses se vão abrir certamente no futuro. Como é que a autonomia do aluno pode ser desenvolvida com intervenções indirectas do professor? Não estou a pensar na substituição do professor, mas sim na possibilidade do aluno ir o mais longe possível sem precisar de estar a fazer perguntas ao professor.

E&M Querem fazer algumas apreciações e recomendações para quem esteja com vontade de fazer *software* deste tipo?

AV A nossa maior dificuldade, enquanto responsáveis pelos conteúdos, foi perceber que tipo de actividades eram mais adequadas a este suporte e à sua utilização. De início tínhamos muitas propostas de actividades pensadas que a pouco e pouco fomos rejeitando. Uma vez que aqui se exige um *feedback* computador-utilizador imediato, nem tudo serve. Algumas actividades de investigação que tínhamos pensado incluir, acabámos por retirá-las pois perdiam a sua natureza *aberta*. A falta de tempo foi uma condicionante, pois a equipa começou a trabalhar já no limite do prazo, o que não nos deixou muito espaço para criar e reflectir sobre propostas novas. Acabámos por nos apoiar muito em actividades já nossas conhecidas e trabalhadas com alunos ou em *sites* que consultámos (e que estão devidamente referenciados no CD).

EV Julgo que o nosso CD tem uma grande defeito, devia ter muitas actividades sobre transformações geométricas e não tem nenhuma. Julgo que para isso deveria na equipa a constituir haver muita experiência de programação em Java e em Flash. O Atractor tem em preparação um DVD sobre Simetria que me parece poderá dar muitas ideias nesse sentido, assim haja quem queira pegar num novo projecto de CD para o Básico (ou mesmo para o Secundário) com coragem.

CL Acho interessante o Eduardo referir aqui a problemática da constituição de uma equipa. Esta é a recomendação mais importante. Um trabalho deste tipo exige uma equipa muito forte e coesa e em que como especialistas de matemática e informática haja mais do que uma pessoa. Digo isto porque tanto os problemas de matemática como os de programação precisam de mais do que uma cabeça a pensar e de discussão entre elas. No que respeita à matemática isso foi muito evidente para nós nas nossas discussões. Quanto ao informático lamentámos muitas vezes que ele estivesse sozinho.

Já para o grafismo e som basta um bom designer e um bom músico.

Resta-nos agradecer a disponibilidade dos colegas para nos irem respondendo às perguntas e reforçar o desafio lançado pela Cristina Loureiro. A *Educação e Matemática* terá muito gosto em publicar relatos de experiências de utilização destas e de outras actividades disponíveis na Internet. Ficamos à espera!

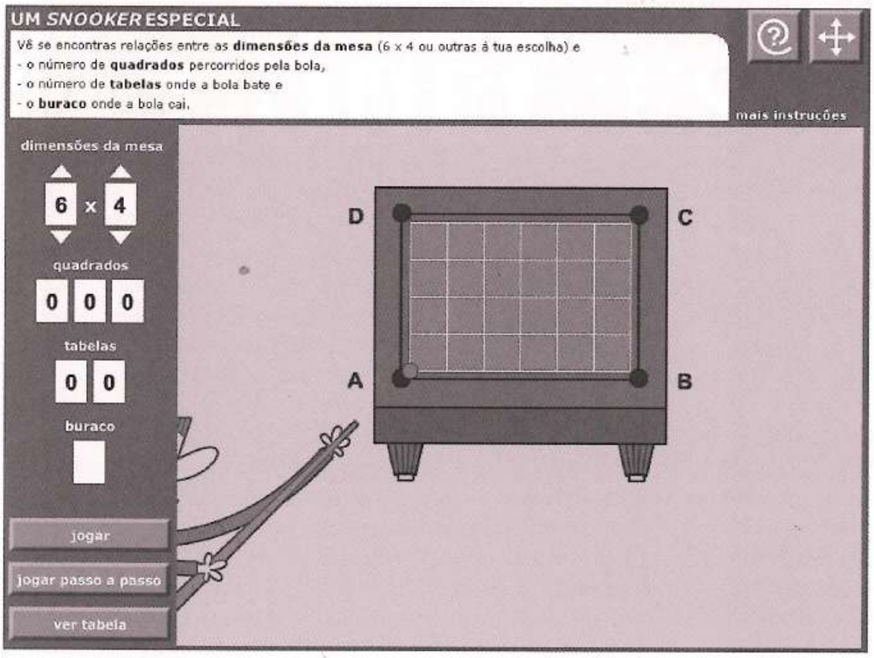
Materiais para a aula de Matemática

A actividade *Um snooker especial* disponível no *ClicMat*, anteriormente publicada na pasta Investigações Matemáticas na sala de aula, adquire aqui uma nova dinâmica.

No CD esta actividade é incluída na categoria das investigações e recomendada para o nível 3. No entanto ela pode ser utilizada no 3° ciclo ou no secundário dependendo naturalmente do nível de aprofundamento que pretendemos alcançar.

Os alunos beneficiarão na sua exploração de um trabalho a pares já que para chegar a boas conclusões é importante encontrar estratégias para ir experimentando de uma forma sistemática e não aleatória. A colaboração entre dois alunos numa lógica de partilha de raciocínios pode facilitar e enriquecer quer a procura dessas estratégias quer a diversidade de descobertas.

Um snooker especial



No *ClicMat* escolhe a actividade do snooker. Vais encontrar uma mesa de *snooker* muito especial. Tem apenas quatro buracos (nos cantos da mesa) e o tampo é quadriculado. Quando se "clica" em "jogar", a bola vermelha, que parte sempre do canto A, é lançada na direcção do taco (oblíqua a 45°).

Mas, o mais interessante, é que podes mudar as dimensões da mesa, clicando nas setas apropriadas. Tem apenas em atenção que as dimensões máximas são 21 x 21.

O programa regista numa tabela (que é vista numa janela separada):

- o número de quadrados atravessados pela bola;
- o número de batidas nas tabelas do snooker (incluindo a tabela do buraco onde cai a bola);
- o buraco onde cai a bola:

1. Regista no papel os dados da tabela e as tuas observações.

2. Utilizando estes dados tira conclusões, nomeadamente sobre as questões que se seguem:

- Como terão de ser as dimensões da mesa de snooker para que tenhamos a certeza que a bola cai no buraco D?
- Poder-se-á prever qual é o buraco em que vai cair a bola apenas a partir das dimensões da mesa?
- Que relação encontras entre as dimensões da mesa e o número de quadrados percorridos, ou as batidas ou o buraco onde cai a bola? Quando te parecer que encontraste uma relação. tenta justificar porque é assim ou então mostrar que não é verdadeira, encontrando um exemplo em que não funcione.

Se tiveres dificuldades podes encontrar ajuda em "mais instrucções". Para cada descoberta podes enviar uma mensagem para `clicmat@apm.pt`.

A vida é curta e Gödel, Escher, Bach uma obra de amor

I

Este não é um texto sobre o livro de Hofstadter: na verdade como poderia escrever sobre um livro que nunca cheguei a compreender? Não falo sequer da compreensão total e absoluta — que não existe, porque sempre vamos mudando (como o jovem autor de GEB já não é o actual autor de idade madura que escreve o novo prefácio do 20° aniversário da obra. Se bem que ...) , e o que hoje nos significa uma coisa, amanhã já não nos significa exactamente o mesmo. Refiro-me apenas, e tão somente, àquela compreensão que nos deixa prosseguir e terminar uma leitura de alma relativamente tranquila.

Fiquei porém um pouco menos intranquila (por me ver menos só nas minhas limitações intelectuais ...) ao ler o novo prefácio: ele abre com as referências às mais variadas incompreensões de que o livro foi alvo, às mais variadas classificações que sofreu, algumas das quais muito frustraram o autor.

O que o leva a aproveitar a ocasião para esclarecer a tese central do seu livro. E diz claramente que ele "é uma tentativa muito pessoal de dizer como é que os seres animados podem emergir da matéria inerte." (1)

Foi prosseguindo esta tentativa que H. foi fazendo interagir os mais variados tópicos — da música, da lógica, da sintaxe, do budismo, das linguagens dos computadores, da arte, etc. — e que construiu e utilizou a noção de "voltas estranhas" (*strange loops*) (2), como chama a certos padrões estranhos e entrelaçados que contêm, segundo ele, "a chave da revelação do mistério daquilo a que nós, seres conscientes, chamamos "ser" ou "consciência." (3) Porque essas "voltas" são as que permitem "os saltos da "matéria para o padrão" consciente. (4)

Por isso, Escher, que tão obcecadamente desenhou tantas voltas estranhas, construindo um universo tão fascinante como intrigante.

Por isso, Bach, as fugas e a escrita musical contrapontística, com a sua estrutura de sucessivos patamares que nos conduzem sempre a um ponto diferente e de certo modo inesperado, pois havendo algo de circular neles nunca é ao ponto de partida que se regressa, mas sim a um ponto semelhante mas noutro plano, como numa espiral vertiginosa, um *strange loop* desenhado pela música nos espaços siderais. A música do rigor ... e da emoção.

Por isso, Godel: mas disto não falo, que no contexto desta publicação seria estúpido atrevimento ... Todavia sempre assinalo que a questão da auto-referência em matemática me surge associada a uma das questões da semântica, vista por muitos como um *handicap*: a de que não podemos falar das palavras senão por meio das próprias palavras ... Veja-se então como Godel transformou o que também era visto como um *handicap* numa potência revolucionária na matemática.

II

Este não é pois um texto sobre GEB; é apenas e tão só um alinhavar de palavras sobre o fascínio que este livro me provocou e continua a provocar.

Tentar perceber porquê: talvez porque, em primeiro lugar, GEB é ele próprio um *strange loop*, uma imagem de Escher feita com palavras. Quer dizer, as permanentes voltas e reviravoltas de planos; os constantes entrançados de tópicos e referências; os sucessivos encadeamentos de enunciados diferentes (reflexão, descrição, exposição, argumentação, narração, diálogos ...) e de gravuras, desenhos, fórmulas matemáticas; o jogo de personagens tiradas de fontes tão diversas como Zenão e Lewis Carroll, a interacção entre tudo isto, nos levam sempre a lugares inesperados, num movimento tão vertiginoso como o criado em algumas das gravuras do artista holandês.

Suponho que o autor assim o desejou, pois faz todo o sentido que a criação e defesa da noção de "volta estranha" seja ela própria feita sob a forma de "volta estranha", tanto mais que as questões da auto-referência são parte fundamental da tese do livro. Se dúvidas houver sobre esta intenção autoral, basta ler o último diálogo do livro, essa apoteose arrebatadora, que volta a abrir todas as pistas de novo, embora já num ponto diferente da espiral do conhecimento ...

Por outro lado, também a coragem, a ambição e a paixão do conhecimento, que emanam de todo o livro, são motivo de fascínio e marcam a natureza da obra. É que procurar a revelação do *mistério* do ser, ou consciência, não poderá certamente ser tentado através de um percurso balizado por limites estreitos, isolando partes de um todo com a respectiva perca de sentido(s) que só o todo e a inter-relação entre partes dão a cada uma dessas partes. Mas também não se chegará a lado nenhum, ignorando a independência das partes — por isso o MU do Zen, que aparece a certo ponto, nos diálogos sobre holismo e reducionismo.(5)

Não existe também, nessa procura, qualquer possibilidade de um caminho previamente traçado: o ponto de partida é certamente conhecido, mas não os lugares onde se vai chegar e muito menos o ponto de chegada. A bem dizer, também aqui "no hay camino,/ se hace camino al andar", como diz o poeta António Machado.(7)

E que caminho, o de Hofstadter! E que voltas e revoltas: estranhas voltas! Quando, a páginas tantas (6) (por sinal as mesmas em que a questão do vencedor no xadrez se põe — homem ou máquina?), se questiona no livro se um dia será possível as máquinas fazerem belas músicas, a especulação (a que o autor não se atreve a chamar resposta) é — para tranquilidade de alguns de nós — "Sim, mas não tão cedo." A restrição vem, evidentemente, em nome da complexidade das emoções humanas ... que as máquinas não têm. Mas, evi-

Douglas R. Hofstadter

GÖDEL, ESCHER, BACH
Laços Eternos
Uma fuga metafórica sobre mentes e máquinas no espírito de Lewis Carroll

dentemente isso não impede toda a importância e desenvolvimento dados no livro ao tópico da Inteligência Artificial.

III

Este não é pois um texto sobre GEB; antes talvez qualquer coisa a partir de GEB, seguindo a sua lição dos laços e das voltas estranhas, na minha "fuga metafórica" sob acção do fascínio do livro. Que o mesmo é dizer, deixando-me ir numa pessoal deriva, que é também procura de atribuição de significados, de estabelecimento de relações, de formulação de interrogações ...

Por exemplo: "como é que os seres animados podem emergir da matéria inerte"? Uma espécie de faísca e eis-me respondendo: "*Simples, meu caro Watson!* Pelo velho processo retórico da animização ou personificação!!"

É realmente esta a resposta da velha retórica, disciplina que, pela primeira vez, no mundo ocidental, desenvolveu uma reflexão sobre a linguagem (um dos tópicos de GEB). Com o passar do tempo, foi assumindo particular relevo uma das partes da retórica, a que se dedicava ao estudo das *figuras*. Entre estas, como não lembrar a animização e a personificação, ao deparar com a questão da transformação da "matéria inerte" em "seres animados"? Quando, por exemplo, no célebre episódio de Inês de Castro, no canto III d'Os Lusíadas, os montes e vales do Mondego são nomeados como partilhando do amor de Inês por Pedro ou da dor da morte daquela (8) não é a essa transformação que assistimos?

Claro que aqui os próprios montes não passam a ter consciência: a mudança dá-se apenas ao nível da atribuição dessa consciência por uma instância exterior, pela fala de um narrador. Não se trata portanto do real fenómeno da imersão da matéria inerte de um ser inanimado: para isso, seria necessária uma das "voltas estranhas" de que fala Hofstadter ... Mas trata-se, sim, da criação desse fenómeno ao nível da autoria, isto é, de uma transformação operada pela linguagem, isto é, pela atribuição de significados.

E não é a atribuição de significados um dos tópicos de GEB? Pois qual outra forma de pensar o pensamento? E a consciência da consciência?

Sim, aqui, agora, devia entrar Fernando Pessoa ...

Mas não entra, que é tarde, e nada termina nestes *Laços Eternos* — ou, por causa das questões da tradução — neste *Eternal Golden Braid* ...

Notas

(1) Página xxii da edição portuguesa.

(2) Página xxii da edição portuguesa.

(3) Página xxiii da edição portuguesa.

(4) Página xxiii da edição portuguesa.

(5) Páginas 291 e seguintes; p. 329 e seguintes da edição portuguesa.

(6) Páginas 714–718 da edição portuguesa.

(7) António Machado, *Campos de Castilla*, Cátedra, 1999, Madrid. p. 222.

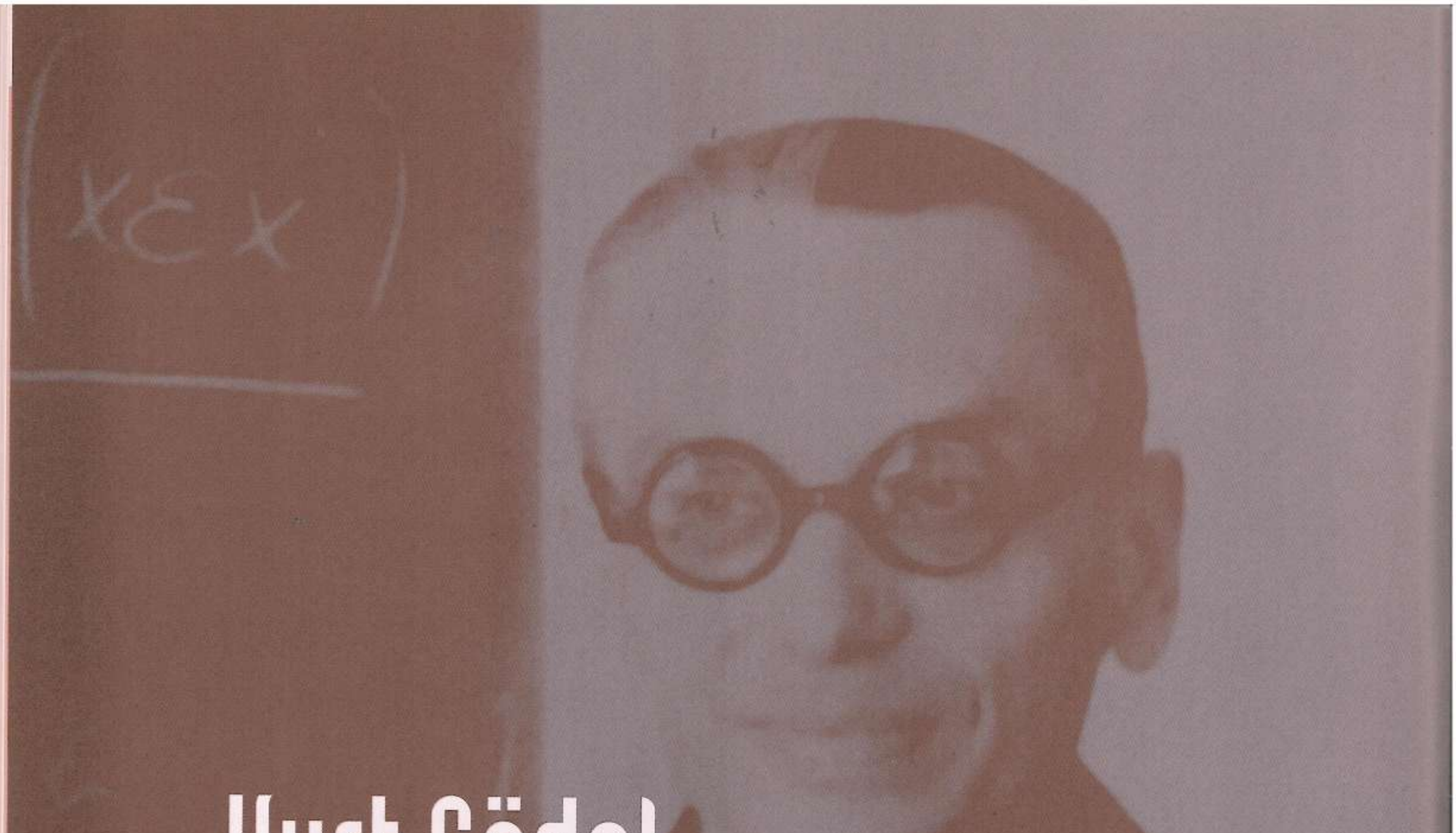
(8) Luís de Camões, Os Lusíadas, canto III, estâncias 120 e 133.

Margarida Font Amado
Esc. Sec. Eng. A. Calazans Duarte
Professora de Português/Francês

PRÉMIO PULITZER

Edição do 20.º aniversário, com novo prefácio do autor

Gödel Escher e Bach
Editora: Gradiva, 2000, 809 pp.
ISBN 972-662-709-5



Kurt Gödel [1906–1978]

António M. Fernandes

Introdução

O número 27 do volume 154, de Dezembro de 1999, da revista *Time* dedicou uma secção especial à escolha das *personalidades do século XX*. Sem espanto, nomes como o de Albert Einstein ou Alan Turing surgem nessa lista. O primeiro por razões óbvias, o segundo porque o seu trabalho no domínio da teoria da computabilidade teve repercussões fundamentais na informática. Surpreendentemente, a lista contém também o nome de Kurt Gödel que, com Turing, forma o par de matemáticos que surge na lista. Ao contrário de Einstein, Gödel não era popular, e ao contrário dos resultados de Einstein e de Turing, os de Gödel, em especial os seus teoremas da incompletude e a sua abordagem do problema do contínuo, afectando o núcleo profundo da matemática eram, deste modo, mais inacessíveis ao grande público. Apesar disso, nenhum outro resultado em matemática teve um impacto intelectual comparável.

A matemática antiga fundou-se (e, em certo sentido, confundiu-se) com a geometria euclidiana e a sua metodologia restritiva, associada ao uso da régua não graduada e do compasso.

Apesar de constituir uma ferramenta intelectual de valor inestimável, o método geométrico revelou-se insuficiente. Os problemas clássicos da trissecção do ângulo, da duplicação do cubo e da quadratura do círculo resistiram-lhe (e sabemos hoje que não são solúveis através de tal método). A situação agravou-se e quando, em 1687, Newton publica pela primeira vez os seus *Philosopia Naturalis Principia Mathematica* o método estava exausto. A exposição de Newton já não se baseia num *método geométrico puro*, mas sim numa mistura deste com intuição física e uma parafernália de argumentos baseados na teoria do movimento. A sucessiva libertação relativamente à metodologia clássica continuaria através da incorporação de princípios infinitários que seriam tão profícuos quanto contestados. Efectivamente, desde que Berkeley e Bolzano reclamaram fundações rigorosas para a matemática, as vozes consonantes não cessaram até ao início do século XX.

Kurt Gödel, nasceu em 28 de Abril de 1906 na cidade Morava de Brünn, então parte integrante do Império Austro-Húngaro, e actualmente da República Checa, com a denominação de Brno, denominação esta que adquiriu logo após a segunda guerra mundial. Comemora-se, portanto, o centenário do seu nascimento.

De acordo com o próprio Gödel, a filosofia era o seu principal interesse. Ainda assim, quando deixou Brno para ir estudar na Universidade de Viena a sua opção inicial foi a física teórica. Ele sempre se interessou mais pelo rigor fundacional que pelos aspectos técnicos e, essa busca incessante de rigor levou-o, primeiro a mudar de física para matemática e, mais tarde, de matemática para lógica matemática.

Gödel estudou filosofia da matemática com Moritz Shlick (o fundador do famoso *Círculo de Viena)*, que é considerado o pai do *positivismo lógico*. De acordo com esta corrente, a lógica matemática seria a chave para entender os fundamentos da matemática, a ferramenta primordial da análise filosófica e, não menos importante, permitiria contornar o maior obstáculo do *empiricismo* — a sua inadequação à matemática e ao seu método. As esperanças do *círculo* centravam-se na possibilidade de a lógica matemática poder vir a demonstrar o carácter tautológico das verdades matemáticas.

Apesar de frequentar o *círculo* assiduamente e de ter subscrito o seu manifesto de 1929, Gödel discordava do valor absoluto que os seus membros atribuíam ao positivismo. Muito mais tarde, em 1975 diria,

> [é] verdade que o meu interesse pelos fundamentos da matemática foi desperto pelo Círculo de Viena mas, quer as consequências filosóficas dos meus resultados, quer os princípios heurísticos que a eles conduziram, não são nem positivistas nem empiricistas na sua essência.

Gödel iniciou os seus estudos em lógica matemática em 1928, assistindo ao curso de Rudolf Carnap acerca dos *fundamentos filosóficos da aritmética* onde, rapidamente, se inteirou dos importantes trabalhos de Hilbert, Frege, Brouwer e Cantor.

Quando, em 1929, iniciou o seu período mais profícuo de investigação em lógica matemática, que duraria até 1942, ele conhecia perfeitamente os resultados entretanto obtidos neste domínio, bem como os problemas mais interessantes acerca dos fundamentos da matemática.

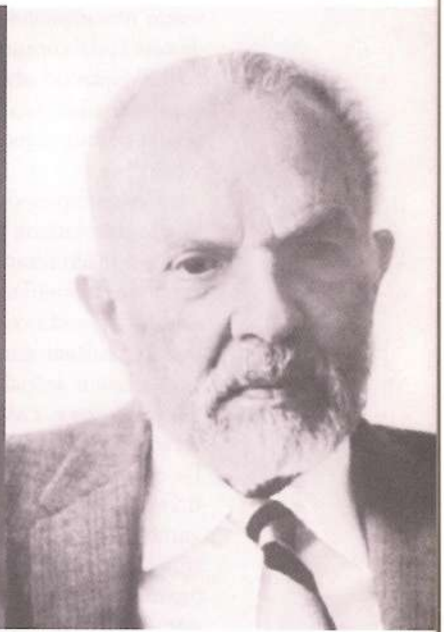
Neste pequeno tributo a um génio cujo trabalho figurará para sempre na galeria dos feitos ímpares, abordar-se-ão informalmente o seu *segundo teorema da incompletude* e os seus estudos acerca do *problema do contínuo* e do *axioma da escolha*.

O segundo teorema da incompletude

Em 1930 Gödel publicou um resultado conhecido como *segundo teorema da incompletude de Gödel*. O efeito desta publicação foi tremendo, obrigando a comunidade matemática a refazer as suas expectativas e a reorientar os seus esforços fundacionistas.

A matemática desenvolve-se em torno e acerca de teorias formais. Isto significa que as propriedades sob investigação, bem como os resultados envolvendo essa propriedades, podem ser descritos num tipo de linguagem dito *formal*. Esta actuação não corresponde a um elitismo artificioso trata-se, isso sim, de uma opção absolutamente necessária para evitar certo tipo de *paradoxos semânticos* inerentes à riqueza expressiva das *linguagens naturais*. Para se ter uma ideia do fenómeno em questão, considere-se o seguinte facto: *existe um número natural que não se pode definir com menos de 100 palavras*. (O número de frases, semanticamente significativas, envolvendo menos de 100 palavras é um número finito, pelo que estas só podem descrever um número finito de números naturais.) A frase "x é o menor número natural que não se pode definir com menos de 100 palavras", define inequivocamente o menor natural que não se pode definir com menos de 100 palavras. Mas, a frase que acabámos de descrever, tem menos de 100 palavras! O que introduz uma situação paradoxal. Este tipo de problema surge numa linguagem natural uma vez que conceitos como o de *definível*, situando-se no nível *metalinguístico*, fazem ao mesmo tempo parte das linguagens naturais pois elas contém a sua metalinguagem. De modo a evitar este comportamento, as teorias matemáticas são então descritas em linguagem mais pobres, designadas de *linguagens formais*.

Moritz Schlick



Rudolf Carnap

De modo a fornecer uma ideia dos constituintes de uma linguagem formal, consideremos o caso particular da aritmética dos números naturais. Uma proposição como por exemplo "todo o número natural ou é par ou ímpar" pode ser descrita na linguagem formal associada àquela estrutura através da expressão $(\forall x)[(\exists y)x = y + y \vee (\exists y)x = y + y + 1]$. Letras como x, y na expressão anterior, denotam objectos do universo de discussão e designam-se de *variáveis*. Outras não designam elementos arbitrários mas indivíduos particulares (como o "1", na mesma expressão), estas designam-se por *constantes*. Outros símbolos designam operações e relações (como o "+" e o "="). Os primeiros designam-se *símbolos funcionais* e os segundos *símbolos relacionais*. Finalmente, aqueles que designamos de *símbolos lógicos* (como "$\forall$", "$\exists$" e "$\vee$" na expressão anterior), por contraposição com os descritos anteriormente e que são designados de *não-lógicos*. Os símbolos lógicos $\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ significam *para qualquer*, *existe*, *e*, *ou*, *não*, *implica* e *equivalente*. Para além de terem sempre os mesmos símbolos lógicos e de, em geral, todas possuirem o símbolo de igualdade, as linguagens formais diferem nos símbolos não-lógicos. Por exemplo, a linguagem da teoria de conjuntos possui um único símbolo não-lógico "$\in$" (quando se escreve $x \in y$ lê-se *x é elemento de y*) e a expressão $(\exists y)(\forall x)\neg(x \in y)$, dessa linguagem, traduz a existência de um objecto que não tem elementos (o conjunto vazio).

Certas expressões, construídas usando elementos de uma linguagem formal, não têm conteúdo semântico mesmo quando interpretamos as variáveis que nela ocorrem (por exemplo "$x = +$"). Esse tipo de expressão não nos interessa! Outras, cada vez que interpretamos as respectivas variáveis, o resultado é um objecto com conteúdo semântico, por exemplo $x = x + x$ é verdadeiro (na aritmética, é claro!) se interpretarmos x como sendo 0 e falso para qualquer outra interpretação de x. Tais expressões designam-se de fórmulas. De entre as fórmulas há algumas que têm conteúdo semântico mesmo não havendo lugar a qualquer interpretação de variáveis, por exemplo, $(\forall x)(\exists y)x = y + y$ (que, na aritmética, afirma que todo o número é par) é falsa, mesmo não procedendo a interpretações de variáveis. Tais fórmulas designam-se de *sentenças*. Enquanto que uma fórmula, em geral, pode conter variáveis que não são afectadas por nenhum quantificador (ou seja os símbolos "$\exists$" e "$\forall$") e que se designam, neste caso, de *variáveis livres*, já as variáveis que surgem nas sentenças têm que estar todas afectadas por quantificadores ou, como também se diz, têm que ser *variáveis mudas*.

Neste contexto, o que é então uma demonstração? Usualmente, em matemática, fixamos certos princípios (axiomas) básicos e deduzimos deles as suas consequências. Esses axiomas correspondem, neste contexto mais formal, a um certo conjunto de sentenças da linguagem. Uma demonstração (a partir destes axiomas) da sentença φ consiste então numa sequência de outras sentenças $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, em que φ_n é φ e onde cada φ_i (para $i \leq n$) ou é um axioma ou é o resultado da aplicação de uma regra dedutiva a sentenças que entretanto já surgiram na lista. Não elaborarei muito acerca do que é uma regra lógica, basta imaginar que existem determinadas operações que a certas sentenças fazem corresponder outras preservando a verdade lógica. A título meramente ilustrativo indica-se a regra de *modus ponens* que a sentenças ϕ e $\phi \Rightarrow \psi$ faz corresponder ψ.

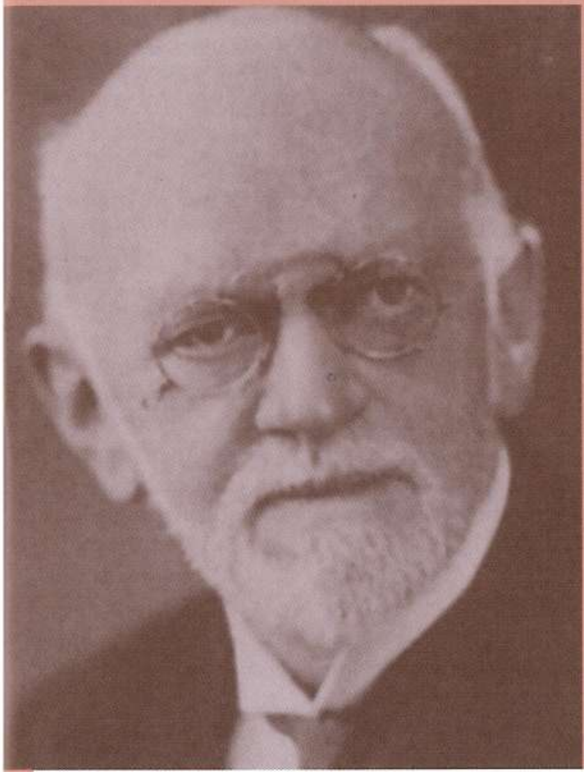
Se existe uma demonstração de φ a partir de um conjunto de axiomas *T*, escrevemos $T \vdash \varphi$.

Codificação da sintaxe

Os resultados de Gödel dependem de um procedimento denominado *godelização*. Esse processo que corresponde a uma codificação dos elementos sintáticos, permite que certas teorias, designadamente a aritmética, possam olhar para as sentenças como objectos numéricos e para a noção de demonstrabilidade como uma relação numérica. Basicamente, é possível associar a cada fórmula φ um número (designado *número de Gödel* de φ) que denotamos por $\ulcorner\varphi\urcorner$. Darei apenas uma ideia de como isso é possível, ilustrando o que passa no caso das palavras de um alfabeto (em geral).

Consideremos então um alfabeto, ou seja um conjunto de símbolos $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$. As palavras deste alfabe-

Gödel no Instituto de Estudos Avançados em Princeton.



David Hilbert

to são as sequências finitas de símbolos. (As fórmulas, por exemplo, são palavras no alfabeto constituído pelos símbolos lógicos e não-lógicos de uma linguagem formal.) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, qualquer número natural diferente de 0 e 1 pode ser escrito de modo único na forma,

$$p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

onde $p_0 < p_1 < \cdots < p_n$ são números primos (ordenados por ordem crescente) e $k_0, k_1, \ldots, k_n$ são números naturais não nulos. Este teorema fornece um método de codificação, de acordo com o seguinte: associamos a cada símbolo A_i do alfabeto um número natural $\ulcorner A_i \urcorner$. O valor de $\ulcorner A_i \urcorner$ é basicamente indiferente desde que tenhamos o cuidado de fazer corresponder valores diferentes a símbolos diferentes e maiores que zero. Para fixar ideias suponhamos que $\ulcorner A_i \urcorner = i + 1$. A cada palavra P podemos agora fazer corresponder um código $\ulcorner P \urcorner$ de acordo com o seguinte princípio se $P = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_r$ (onde cada α_i é um símbolo do alfabeto) o respectivo código é o número natural $p_0^{\ulcorner \alpha_0 \urcorner} p_1^{\ulcorner \alpha_1 \urcorner} \cdots p_r^{\ulcorner \alpha_r \urcorner}$ (designando por $\ulcorner \alpha_i \urcorner$ o código de α_i e considerando sempre a sequência dos primos ordenada por ordem crescente). Por exemplo, se o alfabeto tem dois símbolos A e B com códigos 1 e 2, respectivamente, então a palavra $AABA$ tem o código (ou *número de Gödel*) $2^1 3^1 5^2 7^1$.

Este processo de codificação pode ser descrito não apenas na aritmética mas em qualquer teoria T que seja minimamente interessante para o desenvolvimento da matemática. O próprio processo de codificação pode ser levado ainda mais além, de modo a ser possível descrever uma sentença da linguagem, que denotamos por Con_T que descreve a propriedade "T é consistente" (uma teoria é consistente se dos seus axiomas não é possível deduzir uma contradição).

O segundo teorema da incompletude estabelece precisamente que se uma teoria T é consistente então, não se pode ter $T \vdash Con_T$, ou seja, uma teoria não pode demonstrar a sentença que descreve a sua própria consistência.

Os efeitos deste resultado foram estrondosos — o programa da consistência de Hilbert, uma das mais sérias propostas no sentido de restabelecer fundações matemáticas rigorosas foi, naquele momento, destruído. Veremos, na sequência, em que consistia esse programa e as razões que o determinaram.

O programa da consistência de Hilbert

É bem conhecido que a matemática do século XX foi largamente determinada pela visão particular de David Hilbert. Uma das suas preocupações residia na dificuldade em estabelecer fundações rigorosas daquela disciplina, facto que se tornou notório depois da adopção de métodos infinitários. Como outros que o precederam, Hilbert considerava que a teoria matemática adequada para estabelecer essas fundações era a aritmética. Isto, muito embora ele nutrisse uma certa simpatia pela teoria de conjuntos de Cantor, mesmo na forma que adquiriu após a sua axiomatização por Ernest Zermelo. Essa axiomatização, porém, possuía dois defeitos para quem, como Hilbert, pretendia resolver definitivamente a questão a contento de todos, incluindo Brouwer e Kronecker, proponentes de um *construtivismo radical*. Um desses defeitos consistia no facto dessa axiomática incluir princípios infinitários. O outro, no facto de a escolha desses axiomas ter sido determinada não pelo seu carácter óbvio (ao contrário, por exemplo, dos axiomas da geometria euclidiana) mas, numa perspectiva operacional que teve em vista isolar princípios suficientes para descrever a matemática em geral.

Uma vez que os métodos infinitários estavam na origem da controvérsia, Hilbert propôs-se isolar uma teoria básica (uma certa modificação da aritmética) onde fosse possível desenvolver uma teoria dos números elementar, axiomatizada usando exclusivamente princípios finitários, que designaremos por V, já que o próprio Hilbert a designava de *matemática verdadeira*. Os teoremas dessa *matemática verdadeira* seriam sentenças do tipo $(\forall x) f(x) = g(x)$ onde f e g são funções simples, em certo sentido computáveis. Ainda segundo Hilbert, se adicionássemos a V esses princípios infinitários que a análise acabou por incorporar, obter-se-ia uma teoria mais poderosa I (descrevendo *objectos ideais*), mas que ele acreditava possuir duas particularidades: (1) se φ é uma sentença da matemática verdadeira e se $I \vdash \varphi$ (ou seja se a sentença pode ser demonstrada por recurso aos princípios infinitários) então $V \vdash \varphi$. (Nesse caso a utilização da teoria I não é essencial do ponto de vista teórico, embora possa sê-lo do ponto de vista prático pois, com mais axiomas, as demonstrações podem ser mais fáceis de obter). (2) A con-

Giuseppe Vitali Henri Lebesgue

sistência de I podia ser demonstrada em V. Uma vez que I era uma teoria aritmética básica, axiomatizada por princípios aceites mesmo por aqueles que adoptaram filosofias mais restritivas, o programa deveria resolver de uma vez por todas a questão dos fundamentos.

Acontece que qualquer candidato razoável a ocupar o lugar de V é suficientemente poderoso para ser alvo das consequências do segundo teorema da incompletude de Gödel, revelando que V não poderá (sendo consistente) demonstrar a sua própria consistência e, com maioria de razão, não poderá demonstrar a consistência de uma teoria ainda mais poderosa, ou seja a consistência de I.

A matemática depois dos teoremas da incompletude

A aspiração de David Hilbert de concluir com sucesso o seu programa foi, como já se viu, inviabilizada pelo segundo teorema da incompletude. A matemática encontrou a sua própria maneira de contornar esta dificuldade, elegendo como sistema fundacional a teoria de conjuntos de Cantor. Com esta opção acabou por aceitar a adopção de princípios infinitários como o axioma do infinito ou o axioma da escolha. Em certo sentido acabou por adoptar uma ontologia hilbertiana, atribuindo aos objectos matemáticos o carácter de existência na exacta medida em que o conjunto de princípios básicos que os descrevem é consistente. Claro que, depois de Gödel, sabemos não ser possível demonstrar matematicamente essa consistência. Mas, apesar desta impossibilidade concreta, a matemática é indubitavelmente a forma mais segura de conhecimento. O seu método formal é o melhor preparado para que, em caso de inconsistência, se possa proceder a uma análise que conduza a uma eliminação dos problemas — foi o que aconteceu no passado com sistemas como o de Frege.

Não obstante esta evidência, os resultados de Gödel continuam a ser utilizados de forma mais ou menos incompetente e especulativa. São notórios os esforços para derivar deles a conclusão de que o conhecimento matemático é tão inseguro como qualquer outro. Nenhuma conclusão pode ser mais ilógica que esta, já que, importa não esquecer, os teoremas de Gödel são resultados matemáticos (usá-los com aquele fim seria entrar num círculo vicioso — se a matemática não é segura, os teoremas Gödel também o não são).

O Problema do contínuo e o axioma da escolha

O problema do contínuo de Cantor, ocupou em primeiro lugar o próprio Cantor que foi incapaz de o resolver. De resto, não é de excluir que essa obcessão, sem resultados práticos, esteja associada à degradação mental que o afectou, muito especialmente nos últimos anos da sua vida. O problema foi considerado como um dos mais fundamentais da matemática do início do século XX, de tal modo que David Hilbert o colocou em primeiro lugar na sua famosa lista de problemas apresentada em 1900. O problema está associado à cardinalidade dos conjuntos de números reais.

Existe uma forma de definir formalmente a noção *o conjunto X tem o mesmo número de elementos que o conjunto Y* ou, o que significa o mesmo, *os conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade*. Dizemos que isso acontece precisamente quando existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os elementos de Y e escrevemos $|X| = |Y|$ quando é esse o caso. O problema do contínuo adquiriu várias formas ao longo do tempo, mas uma das primeiras é a de saber se conjectura seguinte é, ou não, verdadeira.

Hipótese do contínuo (versão fraca)

Dado um conjunto de números reais X, ou X tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais ou então tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números reais.

Já se sabia que a cardinalidade do conjunto dos números naturais é estritamente menor que a dos reais (um resultado de Cantor, que mostrou que não existe uma função sobrejectiva dos naturais para os reais).

A hipótese do contínuo é motivada pela realidade correspondente à generalidade dos conjuntos de números reais que ocorrem na prática matemática corrente. Cantor estava assim convencido da sua veracidade.

A questão do axioma da escolha era igualmente motivo de grande debate no início do século XX. O axioma garante que para cada família $\{A, B, C, \ldots\}$ de conjuntos não vazios existe uma função de escolha, ou seja, uma função f, tal que $f(A)$ é elemento de A, $f(B)$ é elemento de B, $f(C)$ é elemento de C e assim sucessivamente ...

Este princípio, aparentemente inocente, e claramente verdadeiro se considerarmos famílias finitas, tem consequências para as quais os matemáticos do início do século XX não estavam preparados. Lebesgue, em cuja tese de 1902, surge a *teoria da medida de Lebesgue* (uma noção que pretendia generalizar as noções de área e volume a conjuntos arbitrários) era um oponente radical do axioma. Em 1905 Vitali descreveu um conjunto de reais que não é *mensurável à Lebesgue*.

A construção de Vitali faz uma utilização essencial do axioma da escolha e, devido a esse facto, Lebesgue não hesitou em considerar que esta aberração se devia à natureza paradoxal do axioma da escolha e não a uma limitação da sua teoria da medida. É um facto que o axioma da escolha tem consequências que são contra-intuitivas, como por exemplo o paradoxo de Banach-Tarski: é possível partir de uma esfera, particioná-la num número finito de pedaços e, depois de as transformar, recorrendo exclusivamente a movimentos rígidos (rotações e translacções) obter duas cópias exactas da esfera inicial. No entanto, uma coisa é um facto ser contra-intuitivo, outra (bem diferente) é ser inconsistente.

Em 1935 e 1937, Gödel apresentou o seu *universo construtível* que lhe permitiria uma abordagem simultânea de ambos os problemas.

Os axiomas da teoria de conjuntos garantem, por um lado, a existência de certos conjuntos, como por exemplo o conjunto vazio (o conjunto que se caracteriza por não possuir elementos) por outro, garantem a possibilidade de efectuar certas operações, que permitem obter novos conjuntos a partir de outros previamente dados, como por exemplo a possibilidade de formar a união de dois conjuntos, ou o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado X, que se denota $\mathcal{P}(X)$ (um conjunto X é subconjunto de um outro conjunto Y se todos os elementos de X são elementos de Y). Em certo sentido, o universo dos conjuntos (uma estrutura que é descrita pelos axiomas da teoria de conjuntos) encontra-se hierarquizado em níveis, o mais baixo dos quais é o conjunto vazio. A hierarquia cresce, por assim dizer, usando a operação $\mathcal{P}(X)$.

Usando uma vez mais o seu processo de godelização (codificação da sintaxe) Gödel conseguiu descrever uma variação particular da operação $\mathcal{P}(X)$. Para esta variante, que denotamos por $\mathcal{P}^*$ tem-se que cada $\mathcal{P}^*(X)$ não é agora constituido por todos os subconjuntos de X, mas apenas por aqueles que são definíveis, ou seja, cujos elementos são exactamente os elementos de X que satisfazem um certa propriedade, fixa *a priori*. Partindo do conjunto vazio e munido desta nova operação $\mathcal{P}^*$, Gödel descreveu um universo de conjuntos, em sua homenagem denominado *universo construtível de Gödel*, que se denota por L e que tem a particularidade de nele serem verdadeiros todos os axiomas da teoria de conjuntos para além do axioma da escolha e a hipótese do contínuo.

O resultado de Gödel, não resolveu o problema do contínuo, apenas mostrou que a hipótese do contínuo é consistente com os restantes axiomas da teoria de conjuntos (um fenómeno semelhante ao que ocorreu com o axioma das paralelas no contexto da geometria). O problema resistiu até aos anos 60, altura em que Paul Cohen demonstrou que também a negação da hipótese do contínuo é consistente com os restantes axiomas da teoria de conjuntos, resultado que em conjunto com o de Gödel mostra que o problema do contínuo não se pode decidir na teoria de conjuntos. Em certo sentido, o resultado de Gödel também desmentiu Lebesgue, na medida em que não existe uma natureza paradoxal intrínseca no axioma da escolha, ou pelo menos esse carácter não se revela mais nele que nos axiomas da teoria de conjuntos. A matemática faria a sua escolha contra a vontade de Lebesgue. Hoje o axioma da escolha é geralmente admitido como um dos axiomas da teoria de conjuntos.

Gödel e Einstein em Princeton.

Depois de 1942

Depois de 42, Gödel trabalhou mais activamente em filosofia que em lógica matemática. Por essa ocasião ele estava interessado na relação entre o trabalho de Kant e a teoria da relatividade de Einstein por quem, de resto nutria uma profunda amizade e mantinha um profundo relacionamento intelectual. (Naquela altura eram ambos membros do Instituto de Estudos Avançados em Princeton.) Gödel estava particularmente interessado em mostrar como Kant estava errado relativamente à natureza da noção de *tempo* e, para ilustrar o seu ponto de vista ele encontrou soluções das equações de campo de Einstein, de acordo com as quais (e assumindo que o universo se encontra em rotação) é teoricamente possível viajar no tempo. Paralelamente Gödel trabalhava no seu programa de filosofia da matemática, não apenas como uma sub-disciplina da filosofia geral, mas como uma abordagem preparatória para uma verdadeira metafísica. Na sequência ele estudou intensivamente Leibniz e a sua *Monadologia*.

Gödel opunha-se fortemente à ideia da matemática como uma *sintaxe da linguagem*, defendendo de uma posição platonista, a existência dos objectos matemáticos numa *ontologia da consistência*.

Já muito próximo do final da sua vida, Gödel, sempre fiel ao seu elevado padrão de exigência e rigor intelectual, diria dos seus esforços que foram inconclusivos. Essa sua busca terminaria com a sua morte em 1978. Morreu em condições físicas deploráveis, ao que se sabe de fome. A sua mente poderosa coabitava com um espírito atormentado que o levava a suspeitar que corria o perigo de envenenamento o que, por sua vez, o conduzia a privar-se de alimento.

Em todo o caso, o legado de Gödel permanecerá imortal na montra das grandes realizações intelectuais da Humanidade.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

Formação contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo

um desafio colectivo

Isabel Rocha

Ponto de partida

Na apresentação pública dos resultados do estudo PISA 2003 (Amadora, 27 de Abril de 2005), a Sra. Ministra da Educação anunciou algumas medidas, justificadas não só por este estudo mas também pelos resultados das provas nacionais de aferição, realizadas em 2003, na disciplina de Matemática, entre as quais, um programa de formação contínua em Matemática para os professores do 1.ºciclo. Para definir esse programa, seus objectivos, princípios, linhas orientadoras, conteúdos e estrutura organizacional, foi decidido (finais de Maio de 2005) criar um grupo de trabalho, designado por Comissão de Acompanhamento do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º ciclo, tendo sido proposta a participação da APM nesta comissão.

Para a APM, esta foi considerada uma oportunidade de darmos o nosso contributo num processo de formação que, nas suas linhas gerais contempla alguns aspectos inovadores que têm constado das propostas que a APM tem defendido, para superar alguns dos pontos críticos da formação inicial e contínua por nós já assinalados.

Esses pontos críticos também foram, pela direcção da APM, salientados no editorial da revista *Educação e Matemática* (n.º 84, Setembro/Outubro 2005).

Sabe-se que a formação contínua que tem sido feita é ainda pouco centrada na reflexão sobre a prática e que não cobre as deficiências de formação indicadas no relatório Matemática 2001. Estudos recentes também indicam que a Matemática como matéria curricular não surge com frequência nos planos de formação dos Centros de Formação de Associações de Escolas.

O Programa

Todo o trabalho que tem sido levado a cabo no seio da APM mostrou que a formação para ter efeito nas práticas lectivas do professor tem de partir do seu conhecimento profissional, articulando um conhecimento matemático de qualidade com o conhecimento curricular e didáctico, tem de ter uma forte ligação às práticas lectivas e ao desenvolvimento do currículo e partir das necessidades concretas dos professores.

Final de Maio	*Constituição da Comissão de Acompanhamento*
20 de Julho	*Apresentação às instituições (IES), para discussão, da 1.ª versão do Programa*
Agosto	*Constituição das equipas de formação*
20 de Setembro	*Versão definitiva do Programa*
Entre 12 Set. e 10 Out.	*Divulgação do programa aos Agrupamentos*
Entre 10 e 30 de Outubro	*Início do programa*

Quadro 1.

Instituições de Formação	Professores envolvidos	Grupos de Formação	Formadores
18	5640	577	140

Quadro 2.

É por isso que há aspectos inovadores neste Programa que criam condições para a concretização destas ideias e que passo a destacar:

1. trata-se de um programa a nível nacional prolongado no tempo, organizado num modelo em rede, centrado no trabalho em equipas, constituídas por professores das Instituições de Ensino Superior de Formação de Professores do 1.° ciclo e professores das escolas do 1.° ciclo de cada agrupamento. Relevante também a dimensão de cada equipa, entre 8 a 12 formandos de modo a proporcionar condições para o desenvolvimento do trabalho colaborativo;
2. pode estreitar a ligação entre a formação inicial de professores do 1° ciclo e a sua formação contínua, pois a sua organização e implementação local é da responsabilidade das instituições que fazem formação inicial de professores do 1° ciclo;
3. aponta para uma formação baseada no desenvolvimento curricular, centrada na escola, com duas componentes: uma de trabalho conjunto e continuado (durante o ano lectivo e em sessões com periodicidade quinzenal) do grupo de formandos com o formador para planificação, reflexão e aprofundamento dos conhecimentos matemático em articulação com o conhecimento didáctico e curricular envolvidos e outra de acompanhamento ao nível da sala de aula das planificações trabalhadas nas sessões conjuntas, com a consequente reflexão, sobre as aprendizagens realizadas pelos alunos, face aos objectivos das tarefas planeadas.

A concretização do Programa

Todas as instituições de ensino superior (IES) responsáveis pela formação inicial de professores do 1.° ciclo assumiram a concretização deste Programa no respectivo distrito e, para isso, constituíram a respectiva equipa de formadores e delinearam o seu próprio plano de acção tendo em vista a concretização do Programa definido pela Comissão de Acompanhamento.

O Programa está no terreno, embora a funcionar nuns locais com mais dificuldades que em outros. Algumas das dificuldades (de natureza temporal) estiveram associadas ao calendário que foi definido (o possível para o programa ter inicio em 2005/06) como se pode observar no quadro 1.

A constituição das equipas de formação em período de férias foi uma dificuldade salientada por grande parte das instituições.

A adesão dos agrupamentos/professores também foi muito variável, havendo distritos com mais dificuldades a que também não é alheia a dispersão da rede de escolas do 1° ciclo, a organização dos horários dos docentes e concerteza outros factores relacionados com outras medidas introduzidas no início do ano lectivo.

No entanto estes são os números (significativos) relativos a Dezembro de 2005, visto que os dados disponíveis no momento da escrita deste artigo são os que constam do 1.° relatório de progresso que todas as instituições apresentaram no mês de Janeiro e respeitantes ao 1.° trimestre (quadro 2).

As sessões quinzenais de trabalho conjunto nas sedes de agrupamento ou escolas do 1.° ciclo têm decorrido com a regularidade prevista. O número de sessões de acompanhamento na sala de aula, ficarão, nalguns casos aquém do desejável, dependendo da dimensão do grupo e das distâncias entre escolas. Em média, aponta-se para 3 sessões de acompanhamento a cada professor, com a duração de, pelo menos, uma hora cada. Há instituições que iniciaram mais tarde o acompanhamento na sala de aula e poderão não conseguir ir além das duas sessões por formando, mas, por outro lado, há outras que conseguirão, em grupos de menor número de formandos, fazer 4 sessões de acompanhamento na sala de aula.

No programa elaborado, está definido como 1.º objectivo "Promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1º ciclo envolvidos, tendo em conta as actuais orientações curriculares neste domínio", pelo que a Comissão de Acompanhamento promoveu, em Fevereiro, uma sessão de trabalho com os coordenadores das equipas de formação no sentido de se discutir, criar consensos acerca do que deve ser e como se desenvolve, o conhecimento matemático do professor do 1.º ciclo em articulação com o seu conhecimento didáctico e curricular. Para a dinamização da discussão foram convidados um matemático, António Bívar da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e uma educadora matemática, Ana Boavida da Escola Superior de Educação de Setúbal.

Alguns aspectos desse conhecimento que foram abordados, são extremamente relevantes como seja a utilização de definições matemáticas adequadas e compreensíveis mas rigorosas, a representação das ideias matemáticas fazendo a correspondência entre as representações concretas, icónicas e simbólicas e a avaliação da qualidade matemática dos materiais de ensino para modificá-los sempre que necessário. Sabendo que o manual escolar é o recurso privilegiado da maioria dos professores, só um conhecimento matemático e didáctico de qualidade permite que o professor seja crítico em relação às definições e representações veiculadas.

A minha participação na Comissão, em representação da APM, tem sido muito gratificante, mas não me posso distanciar do meu papel como coordenadora da equipa de formação de Leiria. Assim, no âmbito do trabalho desenvolvido para abordar a operação divisão, vejamos, a título de exemplo, como os aspectos referidos e sua interligação se foram evidenciando. Há manuais que, não fazem distinção entre a divisão exacta e a divisão inteira, ou fazendo-o, revelam falta de rigor na utilização do símbolo (:) e nas representações que adoptam.

Definição de divisão exacta[1]: Dados três números inteiros tais que $a \times b = c$ com $a \neq 0$ temos que $b = c : a$ em que : representa a operação inversa da multiplicação e é denominada *Divisão Exacta.*

Esta operação Divisão Exacta não é possível para qualquer par de números inteiros.

Não existe a divisão exacta de, por exemplo, 14 por 3.

Então será correcto escrever $14 : 3 = 4$ (resto 2), ou, noutro exemplo, $27 : 5 = 5 \times 5 + 2$ como aparece em vários manuais escolares (com mais frequência a primeira expressão do que a segunda)? E, porque raramente se encontra nestes, a afirmação: não existe a divisão exacta de 14 por 3 mas existem dois números inteiros, o 4 (quociente) e o 2 (resto) tais que $14 = 3 \times 4 + 2$ e a operação que permite calcular estes dois números denomina-se *divisão inteira?*

Este tipo de abordagem feita por muitos manuais (e tacitamente aceite) foi um ponto de partida para discutir o papel das definições, a importância do seu rigor mesmo numa linguagem adequada a crianças de 8/9 anos e assim aprofundando o conhecimento matemático para ensinar.

A falta de textos científicos em Matemática, escritos em língua portuguesa, especificamente dirigidos aos professores do 1.º ciclo e que respondam às suas necessidades de actualização e aprofundamento de conhecimentos, levou a que a Comissão de Acompanhamento tenha proposto, superiormente, a constituição de equipas para a produção de quatro brochuras: *Números e Operações*, *Geometria e Medida*, *Análise de Dados* e a quarta dedicada aos aspectos transversais da Matemática, a que os *Principles and Standards 2000* (NCTM) se referem como Processos matemáticos. O objectivo das publicações é que introduzam e desenvolvam com rigor e clareza o tema respectivo, tendo em conta o nível escolar a que se destinam e incluindo exemplos suficientes para ilustrar os diversos conceitos. A proposta foi aceite e as equipas estão constituídas e algumas já começaram a trabalhar.

Desafios para 2006/07

No final do ano lectivo a Comissão de Acompanhamento fará a sua reflexão sobre a forma como decorreu o Programa neste primeiro ano, mas já identificou alguns dos Desafios para 2006/07:

- alargar a outros professores;
- dar continuidade aos que estão a frequentar este ano (está a ser pensado o formato);
- alterar a cultura de escola relativa às dinâmicas curriculares em Matemática nas escolas, passando pela identificação do dinamizador da Matemática ao nível da escola (ou do Agrupamento).

Nota

1 Que se pode encontrar em Caraça , B. J. (1970) Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Fotogravura Nacional ou Reis, R. e M. J. Fonseca (2000). Números e operações. Lisboa: UA.

Isabel Rocha
Escola Superior de Educação de Leiria
Representante da APM na Comissão de Acompanhamento

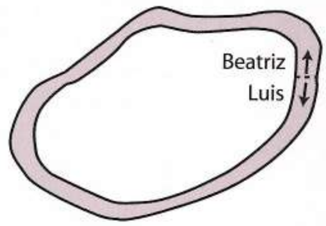
A Beatriz e o Luís andam de bicicleta

A Beatriz e o Luís gostam muito de fazer um passeio de bicicleta todos os domingos. Outro dia resolveram ir experimentar a nova pista de cicloturismo de Vila Verde, que forma um circuito fechado.

Prepararam as bicicletas e lá partiram, cada um em sua direcção e a velocidades constantes. Eram exactamente 10 horas quando se cruzaram do outro lado do circuito. Às 10h25 a Beatriz chegou ao ponto de partida e depois esperou 11 minutos até o Luís aparecer.

A que horas começaram o passeio? Qual é a relação entre as velocidades da Beatriz e do Luís?

(Respostas até 30 de Junho)



Piscinas Especiais

O problema proposto no número 85 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Tanto a piscina da Branca como a do Luís são rectangulares, têm igual perímetro e as suas dimensões são um número inteiro de metros.

O número que representa a área da piscina da Branca (em m2) é igual ao triplo do número que representa o perímetro (em metros). Por sua vez, o número que representa a área da piscina do Luís é igual ao dobro do número que representa o perímetro.

Quanto mede cada uma das piscinas?

Recebemos apenas 9 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Daniel Castanho (Vialonga), Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Cunha (Viseu), João Barata (Castelo Branco), João Maria de Oliveira (Cartaxo), *Matman* e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Muitas das resoluções dos leitores passaram pela imposição das condições do enunciado e depois pela utilização *intensiva* da folha de cálculo. No entanto, há resoluções mais analíticas, como vamos ver.

1º Método

Foi utilizado pelo Daniel, pelo Francisco, pelo *Matman* e, parcialmente, pela Helena. Sejam A e B as dimensões da piscina da Branca (com $A \geq B$). Como a área é o triplo do perímetro, temos: $AB = 3 \times 2 \times (A + B)$, $AB = 6A + 6B$, $(AB - 6A = 6B)$, $A(B - 6) = 6B$ e

$$A = \frac{6B}{B-6}$$

Daqui concluímos que $B > 6$. Vamos experimentar os possíveis valores para B, de modo que A dê também inteiro e não maior que B, calculando ainda o perímetro P.

B	A	P
7	42	98
8	24	64
9	18	54
10	15	50
12	12	48

Há então seis possibilidades para a piscina da Branca.

Sejam agora C e D as dimensões da piscina do Luís (com $C \geq D$). A área é o dobro do perímetro, logo:

$$CD = 2 \times 2 \times (C + D)$$

Resolvendo em ordem a C dá:

$$C = \frac{4D}{D-4}$$

Então, D tem de ser maior que 4. Testemos todas as possibilidades.

D	C	P
5	20	50
6	12	36
8	8	32

Ora, as duas piscinas têm o mesmo perímetro, e apenas o número 50 aparece nas duas tabelas. Então, o perímetro só pode ser 50m. A piscina da Branca mede 10 por 15 metros e a do Luís 5 por 20.

2º Método

Temos, para a piscina da Branca: $AB = 3 \times 2 \times (A + B)$ e $AB = 6 \times (A + B)$. Esta equação pode ser escrita na forma: $(A - 6)(B - 6) = 36$. Então, $(A - 6)$ e $(B - 6)$ são números inteiros cujo produto dá 36.

Vamos ver quais são os produtos possíveis e, a partir daí, descobrir os valores de A, B e P.

$B-6$	$A-6$	B	A	P
1	36	7	42	98
2	18	8	24	64
3	12	9	18	54
4	9	10	15	50
6	6	12	12	48

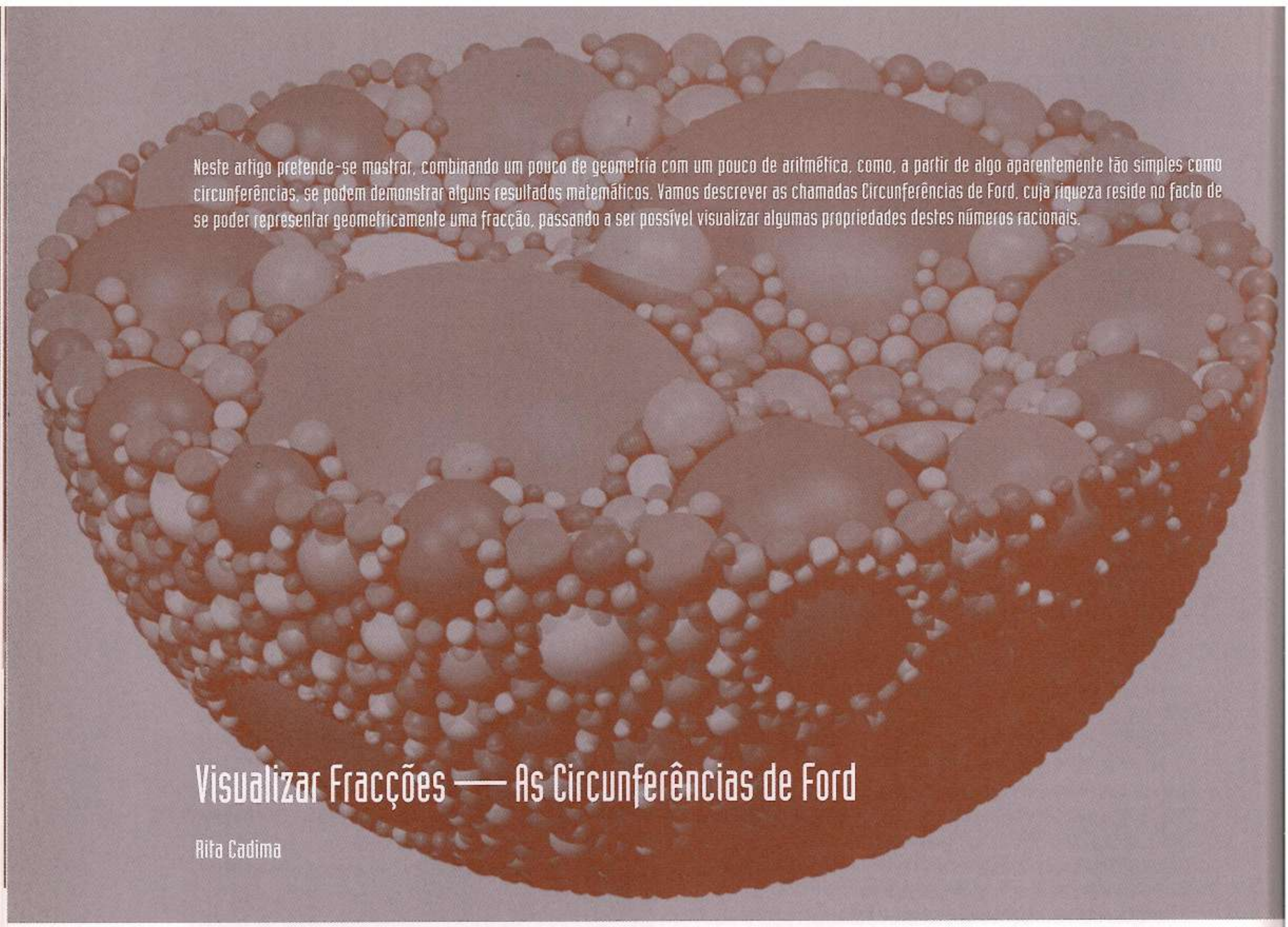
Repetindo o processo para a piscina do Luís vem: $CD = 2 \times 2 \times (C + D)$ que é equivalente a

$$(C - 4)(D - 4) = 16$$

e procurando os produtos de números inteiros que dão 16, temos:

$D-4$	$C-4$	D	C	P
1	16	5	20	50
2	8	6	12	36
4	4	8	8	32

Como só o perímetro 50 aparece nas duas tabelas, a solução é: a piscina da Branca mede 10 por 15 metros e a do Luís 5 por 20.



Neste artigo pretende-se mostrar, combinando um pouco de geometria com um pouco de aritmética, como, a partir de algo aparentemente tão simples como circunferências, se podem demonstrar alguns resultados matemáticos. Vamos descrever as chamadas Circunferências de Ford, cuja riqueza reside no facto de se poder representar geometricamente uma fracção, passando a ser possível visualizar algumas propriedades destes números racionais.

Visualizar Fracções — As Circunferências de Ford

Rita Cadima

Circunferências de Ford

Consideremos uma fracção irredutível h/k, em que h e k são dois números inteiros sem factores em comum. Podemos construir uma circunferência de centro $(h/k, 1/(2k^2))$ e raio $1/(2k^2)$. Variando h e k obtemos uma infinidade de circunferências $\lfloor h, k \rfloor$ de diferentes tamanhos ao longo do eixo xx, conhecidas por *Circunferências de Ford*. O seu nome deve-se ao americano Lester Ford Sr (1886–1975), o primeiro matemático a descrever estas circunferências num artigo publicado no jornal *American Mathematical Monthly* [9], em 1938. Na introdução ao seu artigo, Ford salientava que "embora possa parecer estranho ao leitor como é que o autor se pode debruçar sobre um assunto tão elementar," … "a representação de uma fracção através de uma circunferência é uma ideia que demorou muitos anos a concretizar". Segundo Ford, esta representação geométrica inovadora iria permitir a visualização de diversos resultados aritméticos.

Como a ordenada do centro de cada circunferência coincide com o valor do raio, todas as Circunferências de Ford são tangentes ao eixo xx, nos pontos $(h/k, 0)$. Outra das particularidades destas circunferências é que nunca se intersectam umas às outras e cada uma delas possui uma infinidade de circunferências que lhe são tangentes.

Para demonstrarmos estas propriedades, vamos considerar duas circunferências distintas $\lfloor h_1, k_1 \rfloor$ e $\lfloor h_2, k_2 \rfloor$. A distância d entre os seus centros é, aplicando o Teorema de Pitágoras, dada pela equação

$$d^2 = \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k_2^2} - \frac{1}{2k_1^2}\right)^2.$$

Ao considerarmos a soma dos raios das duas circunferências,

$$s = \frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2k_2^2},$$

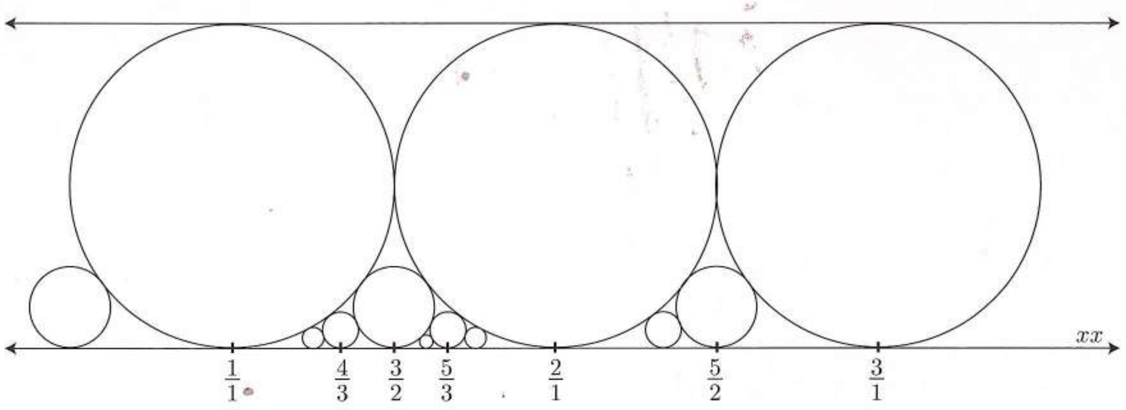
podemos comparar s^2 com d^2. Calculando $d^2 - s^2$ temos,

$$\left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k_2^2} - \frac{1}{2k_1^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2k_2^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 - \frac{1}{k_1^2 k_2^2} = \frac{(h_2k_1 - h_1k_2)^2 - 1}{k_1^2 k_2^2}.$$

O número $h_2k_1 - h_1k_2$ é um número inteiro (pois h_1, k_1, h_2 e k_2 são inteiros) e é diferente de zero, pois escolhemos duas circunferências distintas, pelo que $(h_2k_1 - h_1k_2)^2 - 1 \geq 0$.

Ao verificarmos que a diferença $d^2 - s^2$ nunca é negativa, constatamos que a distância entre os centros nunca é inferior à soma dos raios, o que nos leva a concluir que duas quaisquer Circunferências de Ford nunca se intersectam, podendo, quando muito, serem tangentes num único ponto,



Para visualizar a distribuição das circuferências de Ford ao longo do eixo xx, podemos construir algumas destas circunferências. Comecemos por construir as circuferências da forma $\lfloor n, 1 \rfloor$, cujo raio é $1/2$ e cujos pontos de tangência à recta $y = 0$ são os valores inteiros n da recta real. Estas circunferências são tangentes entre si duas a duas e possuem todas uma infinidade de circunferências tangentes. Por exemplo, entre $\lfloor 1, 1 \rfloor$ e $\lfloor 2, 1 \rfloor$ é possível construir a circunferência $\lfloor 3, 2 \rfloor$ tangente a estas. E entre estas três circunferências é possível encaixar outras duas, $\lfloor 4, 3 \rfloor$ e $\lfloor 5, 3 \rfloor$. E assim sucessivamente.

Figura 1.

o que sucede se $|h_2k_1 - h_1k_2| = 1$. Como esta equação tem infinitas soluções inteiras, podemos também concluir que cada circunferência possui uma infinidade de outras circunferências que lhe são tangentes (ver Figura 1).

Podemos ainda procurar saber como é que, dada uma circunferência $\lfloor h, k \rfloor$, se determinam todas as circunferências com as quais é tangente e quais as propriedades comuns a estas circunferências.

Se $\lfloor h_1, k_1 \rfloor$ e $\lfloor h_2, k_2 \rfloor$ são circunferências tangentes a $\lfloor h, k \rfloor$ então $h_1k - hk_1 = 1$ e $h_2k - hk_2 = 1$. Subtraindo

$$(h_1k - hk_1) - (h_2k - hk_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(k_1 - k_2) = k(h_1 - h_2),$$

observamos que h divide $(h_1 - h_2)$ e que k divide $(k_1 - k_2)$ e então podemos concluir que $h_2 = h_1 + nh$ e $k_2 = k_1 + nk$, para algum valor $n \in \mathbb{Z}$.

Resumindo, se $\lfloor H, K \rfloor$ for tangente a $\lfloor h, k \rfloor$ é possível obter todas as outras circunferências tangentes a $\lfloor h, k \rfloor$ através de $h_n = H + nh$ e $k_n = K + nk$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, construindo, deste modo, duas sucessões infinitas de circunferências à direita e à esquerda de $\lfloor h, k \rfloor$ (Figura 2).

Observando as diferenças entre as abcissas dos centros das circunferências $\lfloor h, k \rfloor$ e $\lfloor h_n, k_n \rfloor$,

$$\frac{h_n}{k_n} - \frac{h}{k} = \frac{kh_n - hk_n}{k_nk} =$$
$$= \frac{k(H + nh) - h(K + nk)}{k(K + nk)} = \frac{kH - hK}{k(K + nk)} = \frac{\pm 1}{k(K + nk)},$$

verificamos que estas diferenças convergem para zero quando $|n| \to \infty$. Ou seja, as sucessivas circunferências tangentes $\lfloor h_n, k_n \rfloor$, cada uma tangente à seguinte, tornam-se cada vez mais pequenas e os seus centros aproximam-se indefinidamente da abcissa $x = h/k$.

Esta situação repete-se para todas as Circunferências de Ford e, portanto, cada circunferência está totalmente rodeada inferiormente pelas sucessões das circunferências que lhe são tangentes.

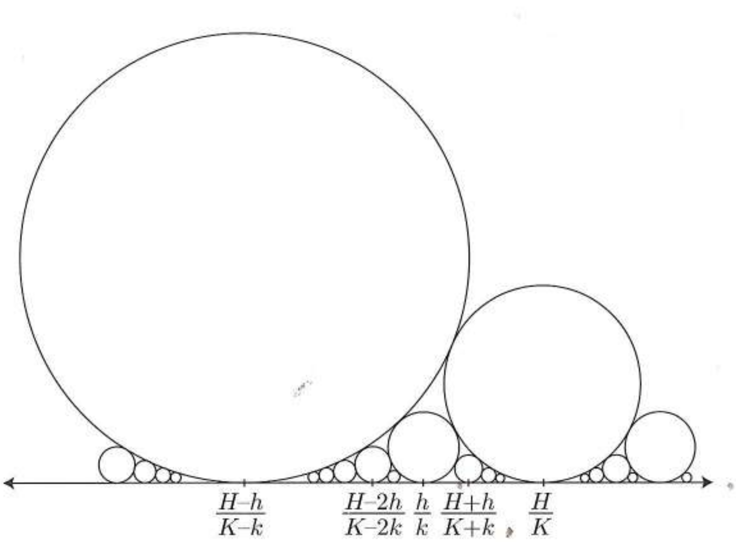


Figura 2.

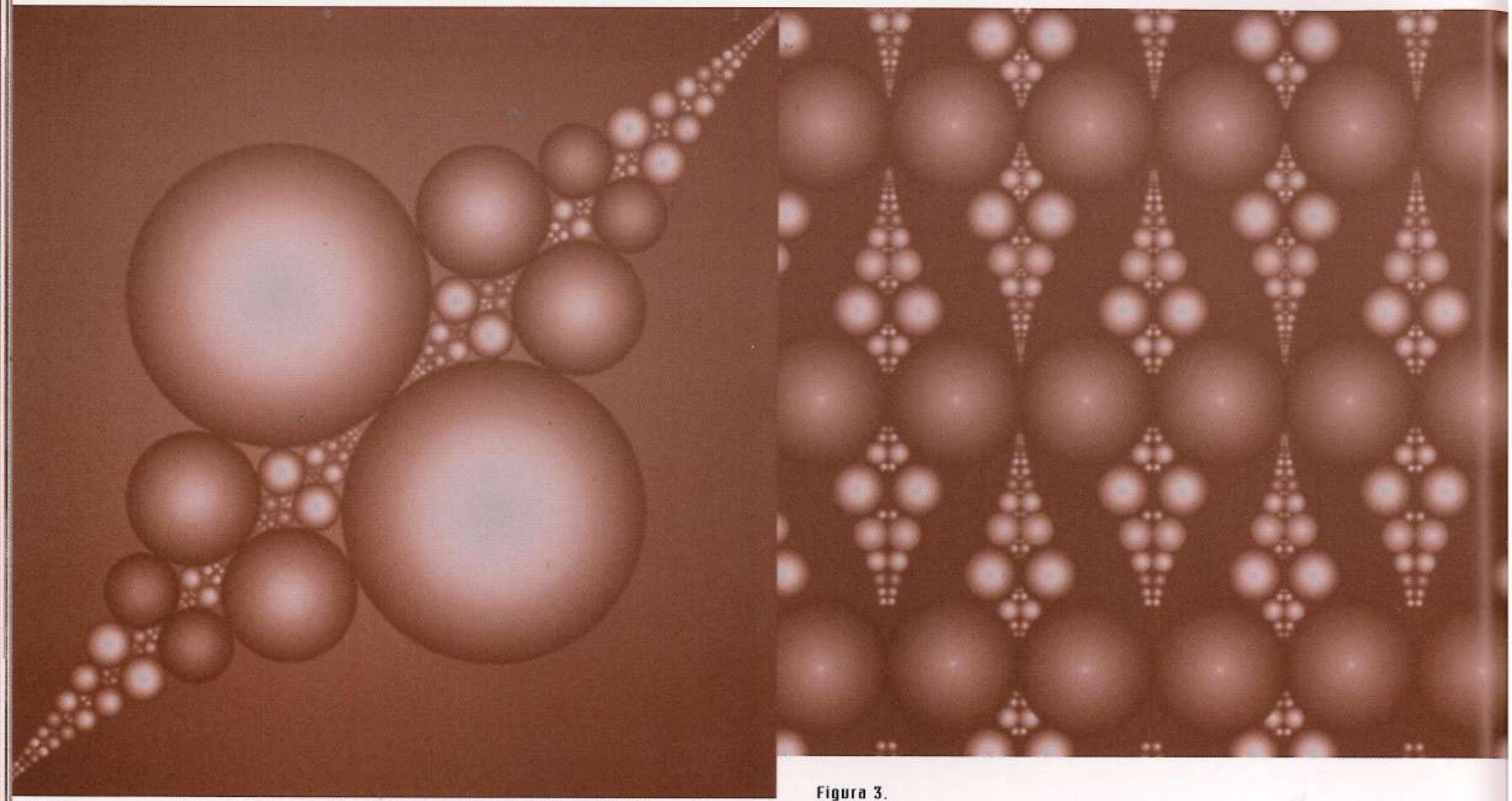


Figura 3.

Aplicações

Ao longo do século (XX) foi possível aplicar as Circunferências de Ford em diversas áreas da Matemática, desde a geometria hiperbólica às sucessões de Farey. Vejamos dois exemplos simples: fractais e aproximação a irracionais.

Facilmente conseguimos imaginar que, a partir das regras que definem as Circunferências de Ford, se podem construir diferentes tipos de fractais (Figura 3).

No estudo da aproximação a números irracionais por números racionais, as circunferências de Ford deram um contributo significativo. Um dos problemas consiste em tentar determinar fracções racionais cuja diferença relativamente a um dado número irracional não ultrapassasse determinado valor e procurou-se exprimir este valor em função do denominador da fracção pretendida. Este esforço traduziu-se no estudo da existência ou não de infinitas soluções inteiras p e q de inequações do tipo

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^k},$$

para qualquer número irracional ω.

Liouville (1809-1882) foi um dos matemáticos que mais contribuiu para a resolução deste problema e, com base nos seus estudos sobre aproximações, provou a existência de números não algébricos, apresentando os primeiros exemplos de números transcendentes.

Se ω for um número racional então ω é da forma p/q, com p e q inteiros e sabemos que existe uma Circunferência de Ford correspondente a esta fracção, a circunferência $\lfloor p, q \rfloor$. A recta $x = \omega$ passa pelo centro desta circunferência e intersecta o eixo xx no ponto de tangência $(p/q, 0)$. Independentemente do número de circunferências que esta recta possa ou não trespassar, após intersectar a circunferência $\lfloor p, q \rfloor$, mantém-se no seu interior até atingir o eixo xx. (Figura 4).

Se ω for irracional, sabemos que a recta $x = \omega$ não passa no centro de nenhuma Circunferência de Ford, pois estes centros têm sempre abcissas racionais, e também não intersecta o eixo xx em nenhum ponto de tangência destas circunferências, o que implica que após entrar no interior de um qualquer círculo tem que tornar a sair. E como qualquer uma destas circunferências está completamente rodeada (inferiormente) por uma infinidade de circunferências tangentes, a recta tem que obrigatoriamente intersectar outra circunferência. Como esta situação se mantém para qualquer nova circunferência que a recta intersecta, podemos afirmar que a recta intersecta uma infinidade de circunferências. (Figura 5)

Analiticamente, o facto da recta $x = \omega$ intersectar uma circunferência $\lfloor h, k \rfloor$, traduz-se por

$$\left|\omega - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2},$$

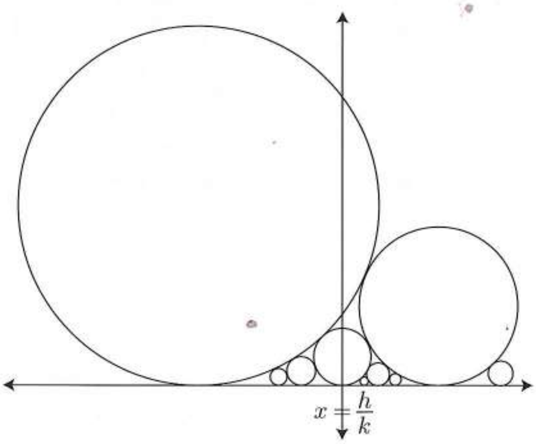


Figura 4.

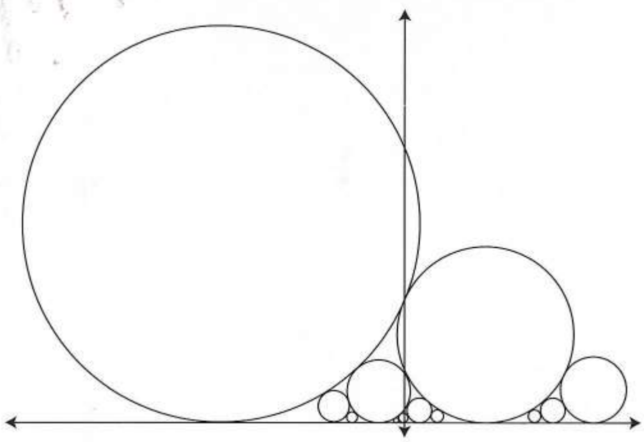


Figura 5.

ou seja, comparando a abcissa do centro do círculo com a abcissa dos pontos da recta sabemos que esta diferença é inferior ao raio do círculo. Logo, como a recta intersecta uma infinidade de Circunferências de Ford, podemos concluir que existem infinitas soluções desta equação.

Bibliografia

[1] *Encyclopaedia of Mathematics*, vol. 2 e 5. Kluwer Academic Publishers, 1988, Dordrecht, Netherlands.

[2] Apostol, T. M. — *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer-Verlag, 1997, New York.

[3] Conway, J. H. & Guy, R. K. — *The Book of Numbers*. Springer-Verlag, 1996, New York.

[4] Niven, Ivan — *Numbers: Rational and Irrational*. The L. W. Singer Company — New Mathematical Library, 1961, Yale University.

[5] Rademacher, H. — *Higher Mathematics from an elementary point of view*. Birkhauser Editor, 1982, Boston.

[6] `http://mathworld.wolfram.com/FordCircle.html`

[7] `http://ford-circle.wikiverse.org/`

[8] `http://www.josleys.com/creatures41.htm`

[9] `http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890(193811)45:9%3C586:F%3E2.0.CO%3B2-1`

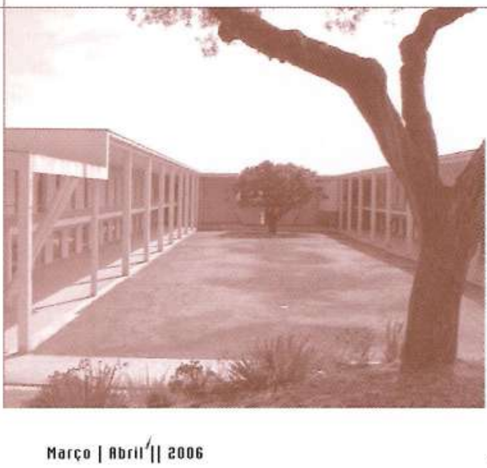
Rita Cadima

Escola Superior de Educação de Leiria

PROFMAT

Setúbal · 2006

um encontro de encontros
um encontro de vozes
um encontro de visões
um encontro de tempos

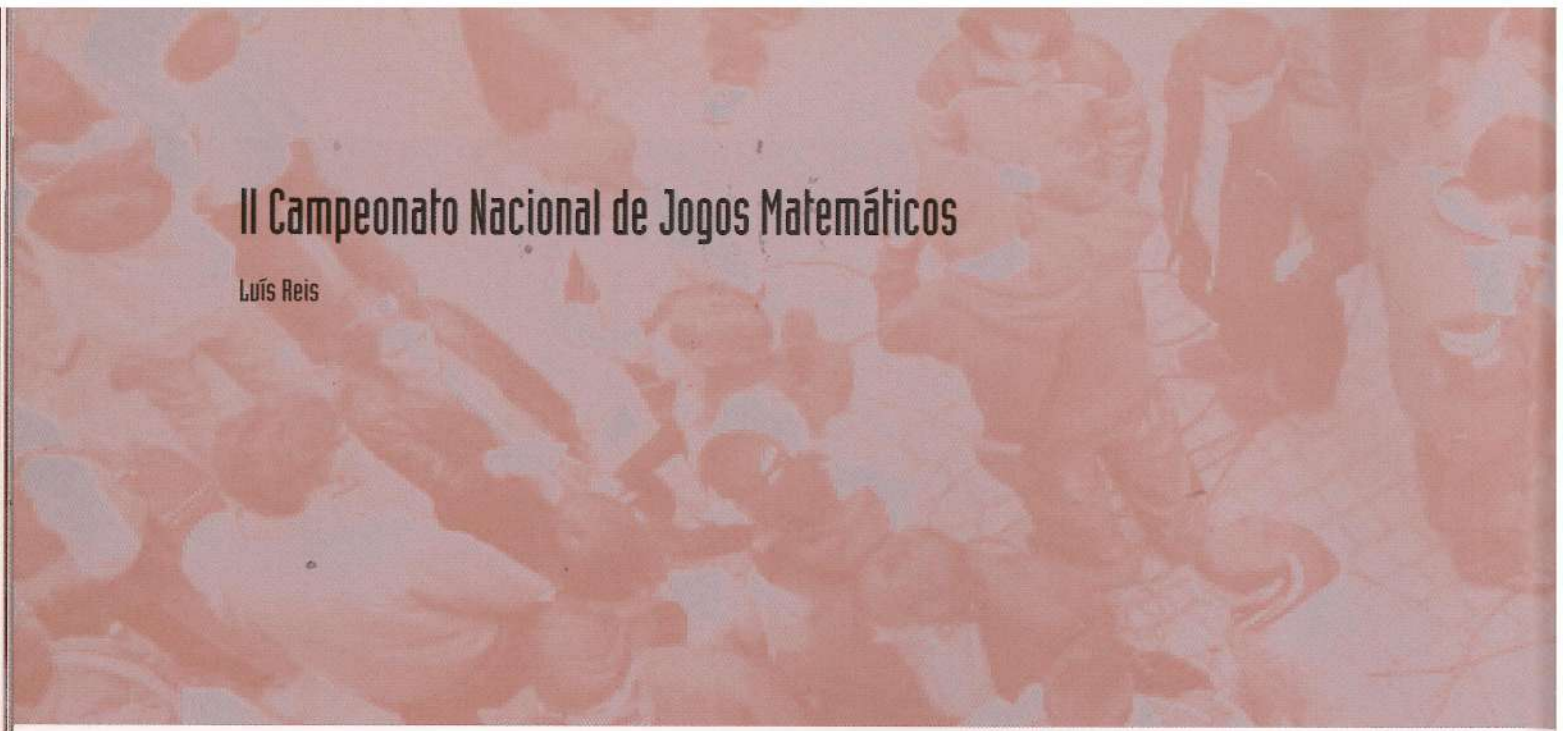


15 a 17

NOV

06

Campus do IPS



II Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos

Luís Reis

A final

A final da segunda edição do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) teve lugar no dia 10 de Março de 2006. Alunos e professores foram chegando sucessivamente à Fábrica — Centro Ciência Viva de Aveiro vindos de todo o país, de norte a sul, de leste a oeste, e também das regiões autónomas dos Açores e da Madeira.

Tal como na primeira edição, estavam em competição seis jogos, distribuídos pelo ensino secundário e pelos três ciclos do ensino básico (3 jogos diferentes por ciclo). Cada escola havia inscrito no máximo um aluno por ciclo e por jogo.

À medida que se iam registando, os alunos eram agrupados para formarem mesas de jogo. Jogaram-se as eliminatórias, a que se seguiu o apuramento dos vencedores e a entrega dos prémios.

Todos os professores e alunos tiveram direito a uma refeição ligeira servida numa tenda montada para o efeito. Também puderam aceder a um conjunto de actividades que decorreram paralelamente ao campeonato: Jogos da Mente (apresentação e análise de exemplos de Bridge, Damas, Go e Xadrez), Teatro para Comunicar Ciência (*Zoo Lógico* e *Breve História da Lua*), Exposição *Fotógrafos da Vida Selvagem* e Cinema 3D (*Viagem ao interior da Célula* e *5000 metros debaixo do mar*).

Para ajudar no dia da final estiveram presentes, além do pessoal da Fábrica e das empresas envolvidas, a comissão organizadora, uma grande quantidade de monitores. Para júri nas salas de jogos, contámos, como sempre, com o grande apoio do Núcleo de Viseu da APM (Ana Paula Rodrigues, Ana Paula Sousa, Cristina Ferreira Loureiro, Fernanda Graça, Fernanda Tavares, Graça Gonçalves, João Cavaleiro, Luís Carmelo, Isabel Cortez, Margarida Abreu e Natália Ferreira) e ainda com Alda Carvalho (ISEL).

O que mudou?

Houve muitas alterações em relação à primeira edição.

Os Jogos Poliédricos e o Peões foram substituídos por dois novos jogos, Semáforo e Go (no tabuleiro 7×7), tendo havido uma redistribuição dos jogos pelos ciclos, que teve em conta a experiência do primeiro campeonato. Foram criados expressamente para esta final novos exemplares dos tabuleiros de jogo. As condições da Fábrica também permitiram que cada um dos seis jogos ficasse numa sala diferente, facilitando a concentração dos alunos.

A gestão da informação e o infografismo ficaram a cargo de uma empresa, o que trouxe diversas implicações no modo como foi organizada a final. Assim, foi pedido a cada escola que enviasse previamente o nome e foto dos alunos; no dia 10, à chegada, cada professor apenas teve que indicar o nome da escola, receber os cartões magnéticos dos respectivos alunos e activá-los de modo a darem entrada no sistema. À medida que se reunia o número de alunos para formar uma mesa de jogo, um monitor encaminhava os alunos

para a respectiva sala, ao mesmo tempo que a listagem dos jogadores era enviada para um terminal nessa sala. A realização dos torneios foi gerida através da aplicação informática Swiss Perfect.

Toda a informação relevante aparecia num grande ecrã no exterior.

Participantes

No dia da final, os registos apontam o número total de 634 jogadores, de 188 estabelecimentos escolares, assim distribuídos: *Pontos e Quadrados*: 1° ciclo = 23; *Semáforo*: 1° e 2° ciclos = 74 (20 + 54); *Ouri*: 1°, 2° e 3° ciclos = 184 (18 + 67 + 99); *Peões*: 2° e 3° ciclos e secundário = 196 (59 + 89 + 48); *Amazonas*: 3° ciclo e secundário = 126 (81 + 45); *Go*: secundário = 31.

Visitas e prémios

Esta iniciativa teve o privilégio da visita do sr. Ministro da Ciência e Ensino Superior, Mariano Gago, que foi acompanhado pela reitora e por um vice-reitor da Universidade de Aveiro, Maria Helena Nazaré e Manuel Assunção, e pela directora da Agência Ciência Viva, Rosália Vargas.

Os dois últimos ficaram para a sessão de prémios, juntando-se a Paulo Trincão (director da Fábrica), Isabel Rocha (presidente da APM), Nuno Crato (presidente da SPM), Guilherme Valente (Gradiva), e José Francisco Rodrigues (Museu da Ciência — UL), numa breve cerimónia no auditório da Fábrica, presidida por Jorge Nuno Silva, da comissão organizadora.

Os campeões e vice-campeões receberam computadores e câmaras fotográficas digitais, respectivamente. Todos os finalistas receberam livros da Gradiva e todas as escolas presentes receberam o conjunto de seis jogos usados na final.

Parabéns a todos os que se envolveram nesta grande festa. Para a próxima ainda vai ser melhor, com certeza!

Luís Reis
Comissão Organizadora do 2° CNJM

Os premiados (primeiro e segundo classificados)

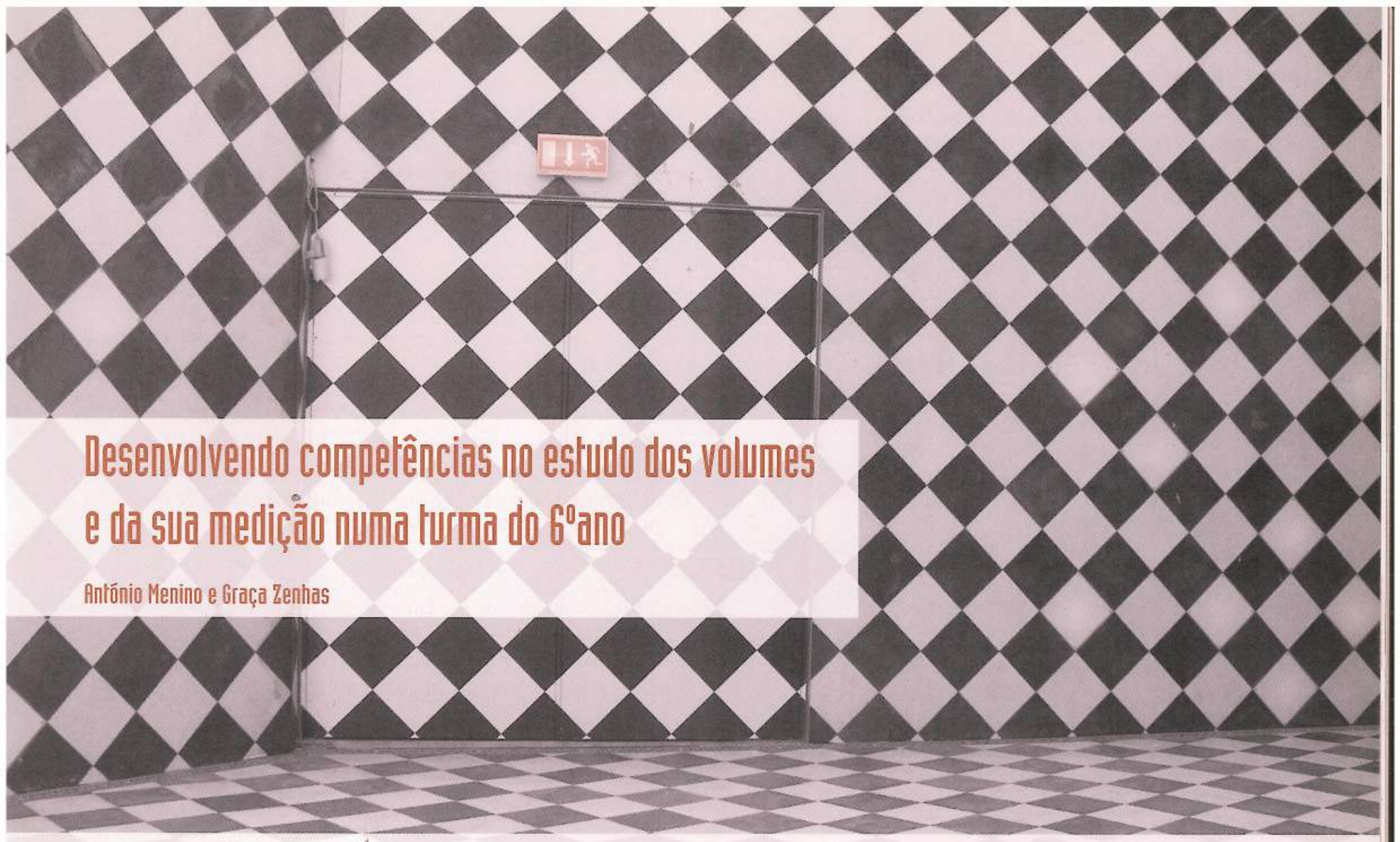
Jogo	Categoria	Nome	Escola
Pontos e Quadrados	1° Ciclo	Maria Marta	Agrup. n°2 de Beja-a
		Pedro Silva	Col. Guadalupe
Semáforo	1° Ciclo	Joana Melo	E. B. 1 Fujacal
		Carlos Silva	Didáxis, Riba de Ave
	2° Ciclo	Miguel Morais	E. B. 2,3 Martim de Freitas
		Miguel Tavares	Grémio In. Lib. C. Ourique
Ouri	1° Ciclo	Beatriz Silva	Col. Cesário Verde
		David Marques	E. B. 1/J. I. Santa Catarina
	2° Ciclo	Hélder Soares	E. B. 2,3 Pinheiro
		Marta Leite	Ext. Escravas S.C. Jesus
	3° Ciclo	Daniela Sousa	Ext. Coop. da Benedita
		Carlos Ferreira	E. B. 2,3 Pinheiro
Hex	2° Ciclo	António Vicente	E. B. 2,3 Martim de Freitas
		Diogo Brás	E. B. 2,3 Eugénio Castro
	3° Ciclo	Gonçalo Moura	Col. N. S. de Fátima
		Diogo Cotrim	Col. Cesário Verde
	Secundário	Pedro Jorge	Col. Dr. Luís Pereira Costa
		Carlos Louro	Ext. Coop. da Benedita
Amazonas	3° Ciclo	Tiago Pereira	Col. Cor. Maria-Fátima
		Fernando Neto	Col. da N. S. de Apresentação
	Secundário	Cristóvão Soares	Col. Dr. Luís Pereira Costa
		João Rico	E. S. de Camões
Go	Secundário	Sara Ramos	E. S./3°C de Oliveira Douro
		Pedro Duarte	E. S. Leal da Câmara

E as escolas, como viveram a preparação para o Campeonato? Um exemplo ...

O Clube de Matemática da Escola tem grande sucesso. Fazendo parte do esquema encontrado para as aulas de substituição, o clube possuía alguns jogos e propostas de actividades, mas não os jogos do Campeonato. Porque não promovê-los? Arrancou-se em Janeiro. Os materiais foram aparecendo. Um carpinteiro fez os tabuleiros do Ouri a um preço convidativo, fizeram-se grelhas plastificadas para o Hex e o Semáforos e aproveitaram-se os tabuleiros de xadrez para o Amazonas. Rolhas de plástico coloridas, peças de colares e pedrinhas de decoração da *loja dos 300* (os berlindes não foram uma boa opção ...) completaram o necessário. Num bloco semanal de aulas, um professor estava à disposição dos alunos para divulgação das regras e treino específico e no Clube de Matemática só foram permitidos os jogos do campeonato. A adesão dos alunos superou as expectativas, passe o lugar comum. Discutiam estratégias, sonhavam vitórias, ganhavam o estatuto de especialistas ... O Ouri foi o preferido não só pelos alunos, mas também pelos professores (e não apenas os de Matemática!) que o praticavam nos intervalos e nos furos.

Entretanto, como seleccionar os representantes da Escola? Imaginámos aproveitar as Jornadas Culturais da Escola nos dois dias da semana do Carnaval e a organização concedeu-nos uma tarde. Que teve de se prolongar no dia seguinte. É que se inscreveram 198 alunos (a Escola tem cerca de 600) ... Optámos pelo sistema de eliminatórias directas com pré-eliminatórias até se obter um número de jogadores que fosse uma potência de 2, mesmo sabendo que não seria o melhor método, mas a data da final nacional estava muito próxima. Os seis magníficos vencedores encheram-se de brios e assumiram a responsabilidade treinando ainda mais. No dia 10 de Março apenas um passou da primeira fase. Não importa. Mesmo assim estavam todos contentes. É que nenhum tinha perdido os jogos todos. Cansados, depois de provados os *ovos moles* voltámos a casa. Com uma certeza. "Ó professor! Para o ano é que vai ser!"

José Fernandes
Escola E.B. 2,3 de Lijó



Desenvolvendo competências no estudo dos volumes e da sua medição numa turma do 6º ano

António Menino e Graça Zenhas

Desenvolver competências é retirar importância aos saberes?

Esta é a dúvida com que se defrontam muitos professores nas escolas, já que hoje há uma clara dificuldade na gestão do currículo, devido à divergência entre as orientações curriculares definidas nos Programas aprovados pelo Despacho nº 139/ME/90, para o 1º ciclo, e pelo Despacho nº 124/ME/91, para os 2º e 3º ciclos do Ensino Básico, que se encontram em vigor, e as orientações subjacentes ao conjunto de competências consideradas essenciais em cada área disciplinar e ciclo de ensino bem como o perfil de competências desejável para os alunos no final do Ensino Básico definido no Decreto-lei n.º 6/2001, e no Decreto-lei n.º 209/2002.

O trabalho que desenvolvemos[1] com os nossos alunos na aprendizagem dos volumes e da sua medição e que aqui apresentamos assenta na ideia de que o desenvolvimento de competências é indissociável da aprendizagem dos saberes. De acordo com Rey *et al* (2003) "*Um saber autêntico apresenta-se como um conjunto de competências*". Ele considera que, no limite, estas duas palavras podem ser usadas indistintamente, havendo, no entanto, uma diferença de conotação. Quando se fala de "saber", pensa-se no objecto social constituído, por exemplo, pelos livros e pelos pensamentos colectivos. A noção de competência, por seu turno, remete para a operacionalização do saber, mas considerando-a referida a um indivíduo, ou seja, a uma qualidade intrínseca a esse indivíduo.

A actividade matemática desenvolvida nás aulas foi centrada no trabalho realizado pelos alunos. As aulas decorreram num ambiente de trabalho cooperativo, tendo-se os alunos organizado livremente em pares ou em grupo. Aos professores coube o papel de propor as actividades e de apoiar o trabalho dos alunos, assegurando-se de que estes realizavam o trabalho proposto, fornecendo ou recordando informações, formulando questões pertinentes que lhes permitissem centrar-se nas questões essenciais da tarefa, através da clarificação do que se pretendia ou da promoção da reflexão sobre o que se estava a fazer.

As aulas decorreram em blocos de 90 minutos (aula de Matemática), 180 minutos (aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado) e 45 minutos (aula de Formação Cívica).[2] A planificação, correspondente a 11 aulas, contempla aulas para resolução de situações-problema, aulas para automatização de procedimentos e aulas para avaliação das aprendizagens e reflexão sobre o trabalho realizado.

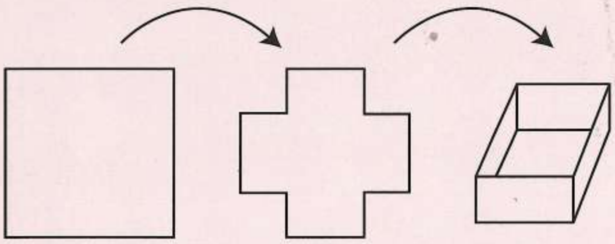
A situação-problema e o desenvolvimento de competências

Segundo Rey *et al* (2003), a situação-problema é um recurso didáctico que permite aos alunos aprender o saber no processo de resolução do problema. Consiste num problema que não é susceptível de ser resolvido com os conhecimentos que eles detêm no momento mas dos quais estão próximo e cujo enunciado é por eles compreendido. No decurso da resolução da situação-problema, os alunos vão reinventar um procedimento, reconstruir um conceito, estabelecer uma conexão, o que constitui o novo elemento do saber que se pretende ensinar. Mesmo que não tenham sido totalmente bem sucedidos na resolução do problema, eles intervieram activamente na tentativa de resolução e os saberes apresentados pelos professores surgiram como instrumentos necessários para essa resolução.

A resolução de situações-problema centra o ensino na abordagem de uma situação tomada na sua globalidade, re-

Vamos fazer caixas![3]

Podemos fazer uma caixa cortando, numa folha de papel, quatro cantos iguais, com a forma de um quadrado:



Se a folha de papel tiver 144 cm² de área, qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar nos cantos, de modo a obteres a maior caixa possível?
(Utiliza apenas números inteiros na medida do lado)

Antes de iniciares o corte dos cantos, responde a estas questões:

- Que quer dizer "a maior caixa possível"?
- Para obteres a maior caixa possível, deves cortar um quadrado grande ou um quadrado pequeno? Porquê?

Folhas quadradas com 144 cm²

Medida do lado do quadrado cortado no canto	Dimensões da caixa Comprimento × largura × altura	Volume da caixa
3	$6 \times 6 \times 3$	108

Resposta:

Se a folha de papel tiver a forma de um rectângulo com 22 cm de comprimento e 15 cm de largura, qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar nos cantos de modo a obteres a maior caixa possível?

Folhas quadradas com ... cm²

Medida do lado do quadrado cortado no canto	Dimensões da caixa Comprimento × largura × altura	Volume da caixa

Resposta:

Actividade 1.

cusando a abordagem parcelar dos elementos constitutivos do saber de tal forma que este deixa de fazer sentido para os alunos.

Primeira situação-problema

Com a primeira situação-problema (ver Actividade 1) pretendeu-se que os alunos concebessem planificações de um paralelepípedo rectângulo a partir de duas folhas, uma com a forma de um quadrado e outra com a forma de um rectângulo, prevendo, através da sua manipulação concreta e/ou imaginária, qual a que permitiria construir o modelo de sólido com maior volume.
No início da aula, os professores, num diálogo breve com a turma, colocaram algumas questões referentes à utilização do conceito de volume no dia-a-dia, em situações familiares aos alunos. Informaram depois que se iria iniciar o estudo dos volumes do cubo e do paralelepípedo rectângulo e da sua medição e propuseram a resolução da situação-problema.

Para a realização desta actividade, distribuíram várias folhas de papel centimétrico quadradas, com 144 cm², e rectangulares, com 330 cm², tesouras, cubos com 1 cm de aresta, barras com 10 cubos com 1 cm de aresta, placas com 100 cubos com 1 cm de aresta.

Antes da resolução da situação-problema, um número significativo de alunos escreveu na ficha de trabalho que, para obter a maior caixa possível, se deveria cortar um quadrado pequeno:

"se tirarmos um quadrado pequeno obteremos uma caixa grande, larga e baixa", *Miguel, Daniela, Ana e Marco.*

"a face é maior e a altura é mais pequena", *Anabela, Catarina.*

"se cortarmos um grande a caixa vai ficar mais pequena", *Sofia, Mariana.*

"ao cortar menos sobram mais quadrados", *Luís, Pedro.*

"se eu tiver um quadrado pequeno tenho menos volume e se eu tiver um quadrado grande tenho mais volume", *Guilherme, Sónia, Andreia.*

Estas frases evidenciam que os alunos estavam a raciocinar em função da área, ou seja, da extensão da superfície ocupada pela planificação ou pela base da caixa, e não estavam a conjecturar com base na transformação que a dobragem provocaria no papel, passando-o de uma forma bidimensional para outra tridimensional.

O problema gerou inicialmente alguma incompreensão em alguns alunos, quer sobre o modo como deviam proceder para fazer as caixas, já que não tinham percebido que os qua-

Vamos fazer caixas!

Pretende-se construir uma caixa sem tampa, a partir de uma folha de papel com a forma de um quadrado, cuja medida do lado é 8 cm.

Qual deve ser a medida do lado do quadrado que tem de se retirar dos cantos de modo a obter a maior caixa possível?

Deves apresentar a caixa e explicar como chegaste a essa solução. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas ou cálculos.

Recorda o que fizeste para resolveres o problema e responde às seguintes questões:

1. Qual era o objectivo da tarefa?
2. Quais eram as regras para a execução das caixas?
3. Estabeleceste alguma estratégia para a resolução do problema? Qual foi? Por que razão escolheste essa estratégia?
4. Quais as dificuldades que sentiste na resolução deste problema?
5. Que fizeste para venceres essas dificuldades? Porquê?

Actividade 2.

drados a cortar em cada um dos cantos da folha tinham que ser iguais, quer sobre a forma como deveriam proceder para descobrir o seu volume. Estas dúvidas foram esclarecidas pelos próprios alunos dos mesmos grupos ou de grupos vizinhos e pelo apoio prestado pelos professores.

À medida que os alunos construíam caixas, iam utilizando vários processos para calcular o seu volume:

— enchiam as caixas com cubos com 1 cm de aresta, contando o número total de cubos;

— faziam apenas a primeira camada de cubos e depois contavam o número de câmadas iguais que conseguiriam fazer; seguidamente multiplicavam o número de cubos da primeira camada pelo número de camadas;

— utilizando papel centimétrico, os alunos contavam o número de quadrados referentes à largura e ao comprimento e multiplicavam-nos para saber quantos cubos teria a primeira camada; depois de contarem o número de camadas, multiplicavam este valor pelo anterior.

A pouco e pouco os alunos começaram a perceber que a maior caixa não era necessariamente a que tinha a maior área da base. Era preciso verificar a relação entre o comprimento, a largura e a altura.

Para trabalho de casa, foi pedido que resolvessem um problema idêntico ao da aula, para o que foi distribuída apenas uma folha de papel centimétrico com 64 cm^2 (ver Actividade 2).

O objectivo do trabalho de casa, para além do reforço da construção de intuições sobre o que acontece quando se passa de uma forma bidimensional para outra tridimensional, através da manipulação de uma folha de papel, era o confronto dos alunos com a necessidade de arranjarem uma estratégia de resolução do problema, uma vez que tinham apenas uma folha de papel centimétrico com 64 cm^2 e não várias como acontecera na aula.

De um modo geral todos os alunos resolveram a tarefa com êxito, apresentando uma diversidade de estratégias (ver figuras 1, 2 e 3, na página seguinte).

A resposta às questões colocadas na ficha foram vagas, indicando que os alunos valorizam o produto do seu trabalho em detrimento do processo. Na aula foram analisadas as diversas estratégias de resolução do problema bem como a qualidade das reflexões feitas. Analisou-se também a importância destas reflexões na consciência que vamos tendo da forma como pensamos, ultrapassamos as dificuldades e lidamos com os erros e a influência deste processo na aprendizagem sucedida.

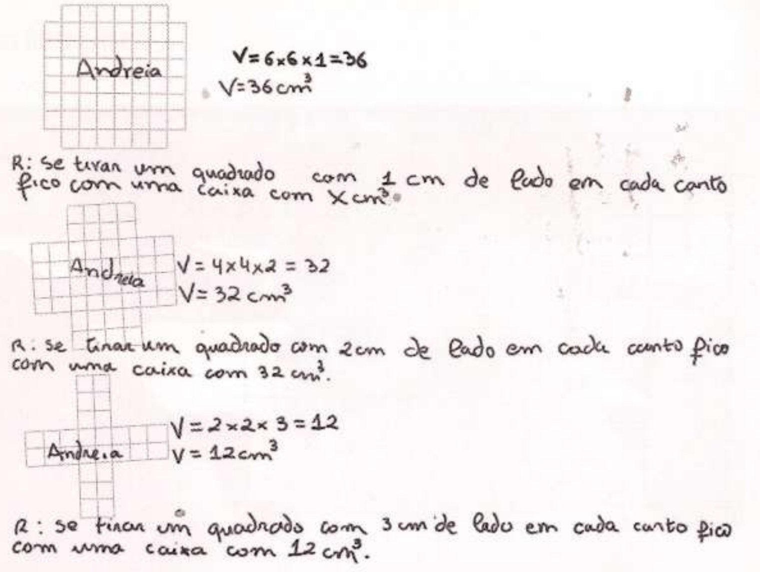


Figura 1. Simulações de diversas caixas com papel quadriculado do caderno, antes de cortar a folha a entregar [Andreia].

Figura 2. Estudo, em esquemas, da solução [Luís, Catarina].

Segunda situação-problema

Com a segunda situação-problema pretendeu-se que os alunos manipulassem as três dimensões de um modelo de caixa com a forma de paralelepípedo rectângulo, com vista à concepção de duas embalagens distintas mas com a mesma capacidade — 200 ml (ver Actividade 3).

Depois da resolução da situação-problema anterior, em que os alunos tiveram que idealizar uma forma tridimensional a partir de uma forma bidimensional, foi-lhes pedido nesta actividade que, a partir de uma embalagem com a forma de um paralelepípedo rectângulo, passassem da forma tridimensional para a forma bidimensional e, utilizando uma folha de papel, de novo para a forma tridimensional de modo a obterem outros paralelepípedos rectângulos equivalentes.

Os professores começaram por mostrar as duas embalagens de leite com chocolate de 200 ml, que se encontram à venda no mercado, e referiram que o trabalho a desenvolver na aula consistia em conceber uma nova embalagem com a mesma capacidade. Foi dada a informação de que o ml era equivalente ao cm³.

Foi distribuído, pelos diversos grupos, o seguinte material: a ficha de trabalho, quatro embalagens de leite com chocolate vazias (duas de cada tipo), folhas de papel centimétrico com a planificação das duas embalagens, folhas de papel A4, tesouras, calculadoras, cubos com 1 cm de aresta, barras com 10 cubos com 1 cm de aresta, placas com 100 cubos com 1 cm de aresta.

No processo de descoberta das dimensões das novas embalagens, alguns alunos privilegiaram a estratégia de tentativa-erro, facilitada pelo acesso à calculadora, enquanto outros utilizaram o raciocínio multiplicativo (aumentavam para o dobro uma medida e diminuíam para metade outra, por exemplo).

Verificou-se que, por vezes, os alunos manipulavam as medidas das três dimensões, com vista à obtenção da nova embalagem, pensando apenas no resultado a obter — 200 ml — e não visualizando simultaneamente a forma que obteriam com as novas medidas atribuídas ao comprimento, à largura e à altura. Esta situação era particularmente notória quando a altura não assumia o maior valor ou havia uma desproporção acentuada entre algumas das medidas (5,8 cm × 8,2 cm × 3,8 cm ou 2 cm × 10 cm × 10 cm, e.g.), mostrando-se alguns alunos perplexos aquando da construção da embalagem. Uma aluna concebeu uma embalagem com as medidas de 2 cm × 5 cm × 20 cm. Quando as marcou na folha A4 e verificou a altura acentuada da embalagem, chamou a professora pois, segundo ela, apesar de já ter verificado que os cálculos estavam certos, parecia-lhe que alguma coisa estava ali mal! Em alguns casos, uma das medidas atribuídas excedeu mesmo as próprias medidas da folha A4 (2 cm × 5 cm × 40 cm, e.g.) evidenciando que os alunos não só não estavam a relacionar a manipulação dos valores com a visualização da embalagem como, também, não tiveram em conta as dimensões do papel onde esta deveria ser construída.

Esta abordagem intuitiva e experimental do conceito de volume, baseada no estudo das relações de um modelo tridimensional com a sua planificação, permitiu aos alunos formularem conjecturas, testarem-nas e/ou justificarem-nas. A utilização de papel centimétrico, já utilizado em situações ligadas ao estudo das áreas e dos perímetros, e de cubos com 1 cm de aresta, permitiu aos alunos resolverem problemas relacionados com a medida do volume do cubo e do paralelepípedo rectângulo. Desta forma, os alunos foram raciocinando sobre o que acontecia, desenvolvendo as suas capacidades de intuição espacial e de estimativa relativas à forma e à medida.

A necessidade de automatização de procedimentos

O processo de ensino baseado na resolução de situações-problema focaliza as actividades da aula na resolução de uma situação tomada no seu todo, rejeitando a via das abordagens parcelares que decompõem e tratam as dificuldades da

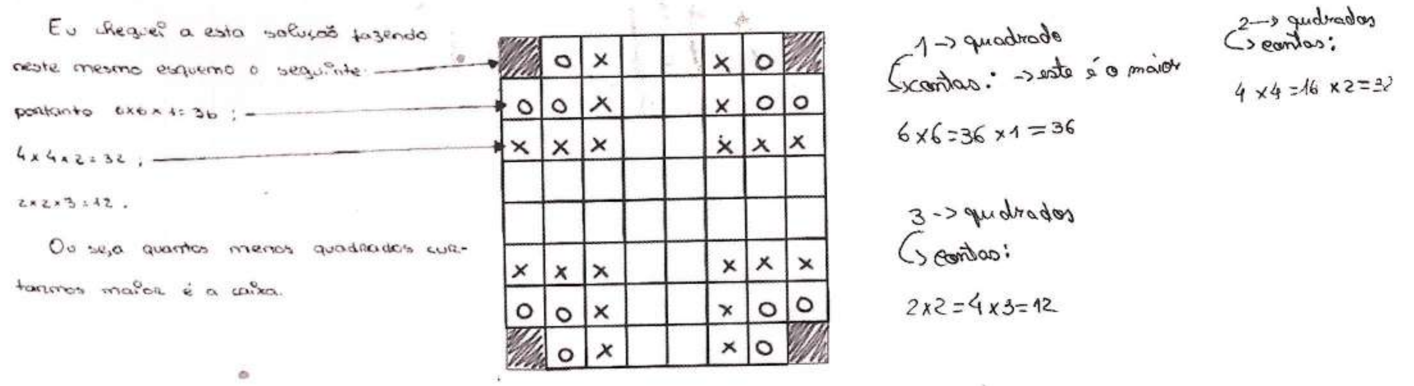


Figura 3. Estudo da solução através de cálculos (Pedro).

situação de uma forma isolada e fragmentada. No entanto, de acordo com Rey *et al* (2003), a prática de resolução de situações-problema não deve fazer esquecer a necessidade de automatizar procedimentos. A situação-problema desestabiliza as pré-concepções que os alunos têm sobre os conhecimentos que vão começar a estudar, situação indispensável à aprendizagem sucedida, permitindo iniciar a construção do novo saber no decurso da actividade de resolução. A esta fase deve seguir-se outra na qual o saber adquire a sua forma estabilizada através de definições, de regras e de fórmulas verbalizadas no vocabulário convencional.

Nas aulas seguintes, o trabalho proposto visou a sistematização dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobre os volumes do cubo e do paralelepípedo rectângulo e a mecanização dos procedimentos relativamente à aplicação das fórmulas e reduções das unidades de medida de volume e à utilização da correspondência entre unidades de volume e unidades de capacidade.

Os alunos fizeram registos no caderno diário:

- traçaram um segmento de recta com 1 dm de comprimento;
- colaram um quadrado em papel centimétrico com 1 dm de lado (área=1 dm^2 = 100 cm^2);
- colaram uma planificação de um cubo com 1 dm de aresta (volume = 1 dm^3 = 1000 cm^3)

Vamos fazer caixas!

Observa as duas embalagens de leite com chocolate e responde às seguintes questões:

1) Qual das embalagens te parece ter maior quantidade de leite? Porquê?
   Confirma a tua previsão lendo a informação contida na embalagem.
   Que concluis?
2) Corta a embalagem de modo a obteres um único rectângulo.
   Qual das embalagens gastou a menor quantidade de material?
3) Descobre as medidas para duas novas embalagens, de modo a que a capacidade permaneça a mesma.

Depois dobra uma folha de papel, de modo a teres uma ideia aproximada de como seriam as tuas embalagens.

Actividade 3.

Para estudar a correspondência entre unidades de volume e unidades de capacidade, mediram 1 l de água com um copo graduado e encheram uma caixa com 1 dm^3 de volume.

Nesta fase, o trabalho, sempre centrado na actividade dos grupos, incidiu na leitura das páginas do manual sobre o tema e na resolução de exercícios e problemas aí propostos. Os alunos verificavam a correcção do seu trabalho consultando as soluções e as dúvidas eram esclarecidas pelos colegas de grupo ou pelos professores.

Foi necessário fazer fichas de trabalho sobre as unidades de medida, já que alguns alunos nos exercícios de reduções, evidenciaram confusão, entre unidades de comprimento, unidades de área e unidades de volume.

A automatização dos procedimentos relativamente à aplicação das fórmulas e às reduções das unidades de medida é importante, na medida em que compreender os sistemas de medida, seleccionar unidades de medida adequadas, estimar medidas e aplicar fórmulas constituem aspectos fundamentais da competência matemática (Abrantes *et al*, 1999). Além disso, são também conhecimentos matemáticos frequentemente utilizados na resolução de inúmeros problemas com que nos deparamos na vida quotidiana.

A avaliação das aprendizagens

A avaliação das aprendizagens foi feita com base na análise de um teste aplicado numa aula e de um trabalho escrito — *O que eu aprendi sobre volumes* — realizado como trabalho de casa.

No que diz respeito ao teste, foram concebidas três fichas de avaliação diferentes, tendo em conta as capacidades evidenciadas pelos alunos. A estrutura da ficha era idêntica, variando o grau de dificuldade do exercício/problema em função do enunciado ou da forma como a questão para um mesmo enunciado estava formulada. Os testes foram elaborados numa lógica de avaliação criterial, explicada aos alunos e encarregados de educação no início do ano.

Quanto ao trabalho escrito, a sua estrutura foi discutida na aula. Foi clarificado que os alunos podiam fazer o trabalho sozinhos ou em grupo e pedir ajuda aos pais, ATL´s, sala de estudo da escola, etc. Para a sua realização deviam consultar o manual, apontamentos registados no caderno diário e livros que se encontravam disponíveis na sala de estudo. Foi estabelecido um prazo de 10 dias para a sua realização.

Com este trabalho pretendemos envolver os alunos, de forma activa, num trabalho fora da aula, centrado nas seguintes competências:

— reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido;

— pesquisa no manual, no caderno diário e/ou noutros livros de informação relevante sobre o tema;

— concepção/selecção de exercícios e problemas significativos;

— identificação de situações da vida real em que sejam aplicados os conhecimentos matemáticos estudados;

— reflexão sobre o processo de escrita: forma de organizar o trabalho e a informação, necessidade de hierarquizar a informação, conjugação de texto escrito e imagens, apresentação geral do trabalho.

O que eu aprendi sobre volumes

Vais escrever um texto acerca do que aprendeste sobre os volumes. Deverás referir-te aos seguintes aspectos:

- As actividades realizadas nas aulas (que actividades foram realizadas; a forma como a aula foi organizada para resolver as actividades propostas; o apoio, as explicações e ajuda dada pelos professores) e a forma como te sentiste relativamente a elas (gostaste muito/pouco, sentiste dificuldade/facilidade, preferias que as aulas tivessem decorrido de outra forma, ...);
- Conhecimentos que adquiriste sobre volumes e medidas de volume. Deves explicar obrigatoriamente o que é volume, uma planificação de um sólido e um sólido geométrico;
- Explicar o que é: 1 dm; 1 dm^2; 1 dm^3;
- Dar exemplos de situações problemáticas em que seja preciso calcular um perímetro, uma área e um volume e resolver essas situações;
- Dar exemplos de situações do dia-a-dia em que sejam utilizados os conhecimentos referentes a perímetros, a áreas e a volumes.

Trabalho escrito. O que eu aprendi sobre volumes.

Pretendemos ainda promover uma actividade que potenciasse a verbalização/interacção entre os alunos, entre estes e as suas famílias, os seus professores dos ATL´s e os professores da sala de estudo, sobre as aprendizagens de perímetros, áreas e volumes.

A maior parte dos trabalhos foi realizada em trabalho de grupo e, em quase todas os casos, com apoio dos pais e/ou professores dos ATL´s.

Apresentamos, de seguida, alguns excertos[4] de trabalhos referentes à caracterização do ambiente de aula, ao tipo de experiências de aprendizagem vivenciadas, aos conhecimentos adquiridos e à aplicação dos conhecimentos em situações do dia-a-dia.

Ambiente de aula

"Gostamos das aulas. Foi bom ter dois professores na sala a ajudar-nos." *Rita, Sara, Sofia.*

"A maneira que eu trabalhei foi muito fixe. Gostei muito dessa maneira. Os professores iam andando de grupo em grupo tiraram-me sempre as dúvidas todas." *Marco e Miguel.*

"Nós fizemos muitas actividades nas aulas em que eu não posso dizer que não tive dificuldade nenhuma, porque isso seria mentira. Também gostei da forma em que fizemos isto porque, podemo-nos organizar em grupos à nossa escolha." *Sónia.*

"Nós nas aulas fizemos muitas fichas, todas elas diferentes. Essas fichas ajudaram-nos bastante a esclarecer as nossas dúvidas. Nas aulas com a ajuda do professor Menino foi muito mais fácil aprender, pois tínhamos auxílio duplicado. (...) Achamos que as actividades concretizadas nas aulas estão bem dirigidas, porque ao dar-nos exercícios para nós fazermos em grupo e em seguida corrigi-los de forma individual, em cada grupo, é a melhor forma de nós aprendermos." *Anabela e Catarina.*

Experiências de aprendizagem

"Para aprendermos o que é o volume de um sólido, estivemos a pôr cubinhos com um cm de aresta em caixas de diferentes

tamanhos e verificámos que o número de cubinhos variava de caixa para caixa, ou seja, as caixas tinham diferentes volumes. Gostámos desta actividade porque pudemos mexer e sentimos o que é o volume (...). Para fazer a planificação de sólidos geométricos usamos latas de salsichas, de tinta, caixas de medicamentos e de queijo e depois fizemos a planificação em papel." *Rita, Sara, Sofia.*

"Com 4 pacotes de leite [com chocolate — Agros] 2 cheios e 2 vazios tivemos que cortar os vazios para saber o que gastava mais papel, se era o pequeno ou o grande; depois deram-nos uma folha branca para realizarmos o produto final, sendo a medida a do pacote de leite, ou seja, 200 ml. E para isso, foi preciso a ajuda da máquina de calcular, e após várias tentativas para encontrar o valor acima, escolhemos uma delas e realizámos então, o produto final." *Pedro.*

"Nas aulas, fizemos várias actividades sobre os volumes. A que eu mais gostei foi aquela em que aprendemos a construir vários paralelepípedos rectangulares todos com o mesmo volume (200 ml), variando a largura, altura e comprimento. Desta forma fizemos sólidos equivalentes." *Luís.*

Conhecimentos adquiridos

" 1 dm^2 é um quadrado com 1 dm de lado; 1 dm^3 é um cubo com 1 dm de aresta; uma maneira mais prática de saber isto é ler a medida ao contrário." *Sónia.*

"Então qual é a minha medida? — a tua medida são todas as unidades elevadas ao número três (desde o km até ao mm) por ex: m^3 e lê-se metro cúbico. Já o dm (sem número elevado) serve para medir o perímetro, ou seja, para medir o comprimento, a largura e a altura; 1 dm^2 serve para medir a área e o dm^3 a quantidade de coisas dentro de algo." *Pedro.*

Aplicação dos conhecimentos em situações do dia-a-dia

"O perímetro de uma figura plana é o comprimento da linha que a limita. Esta noção é importante na solução de problemas, tais como:

1. O sr. João tem um terreno que é um rectângulo com 15 m de comprimento e 10 metros de largura. Quer vedá-lo com rede. Qual o comprimento da rede que necessita comprar?

O sr. João precisa de comprar 15 + 15 + 10 + 10 = 50 m de rede.

A área de uma figura plana depende da figura. Por exemplo, para o rectângulo é igual ao produto do comprimento pela largura. Com esta informação, podemos resolver situações do nosso quotidiano, tal como a que se segue:

2. O sr. Joaquim tem que pintar as paredes e o tecto do seu quarto. Este tem 4 paredes iguais de 4 m de comprimento por 3 metros de altura. Numa das paredes tem uma porta de 1 metro de largura e 2 metros de altura. Noutra parede tem uma janela com 2 m de comprimento e 1 m de altura. Cada litro de tinta, dá para pintar 1 m quadrado. Quantos litros de tinta tem de comprar?

$$\text{Área das paredes} = 4 \times 4 \times 3 = 48 \text{ m}^2$$
$$\text{Área do tecto} = 4 \times 4 = 16 \text{ m}^2$$
$$\text{Área da porta} = 1 \times 2 = 2 \text{ m}^2$$
$$\text{Área da janela} = 2 \times 1 = 2 \text{ m}^2$$
$$\text{Área a pintar} = 48 + 16 - 2 - 2 = 60 \text{ m}^2$$

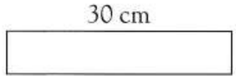
Se com 1 litro de tinta o sr. Joaquim pinta 1 m^2, precisa de comprar 60 litros de tinta, para pintar o quarto". *Luís.*

"No dia-a-dia precisamos de saber o que é a área e o volume para resolver pequenos problemas como comprar um tapete, saber se um móvel cabe num certo sítio, etc.

Por exemplo:

A) O quarto da Rita está com o chão muito estragado e a mãe quer mudá-lo. Quer colocar tabuinhas novas. Para saber quantas tem que comprar tem que saber a área do quarto e a área de cada tabuinha. Nós ajudámo-la:

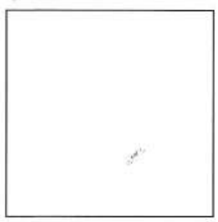
Medimos uma tábua:



Calculámos a área: 30 cm × 6 cm = 180 cm^2 = 0,018 m^2

Depois medimos o quarto

Calculámos a área do quarto:



$$A = 4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 16 \text{ m}^2$$

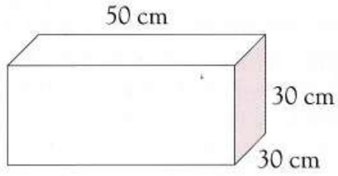
$$16 \text{ m}^2 : 0{,}018 \text{ m}^2 = 888{,}(8)$$

São precisas 889 tábuas para cobrir o chão do quarto da Rita.

B) A água do aquário da Rita está ácida. A mãe comprou um frasquinho do anti-ácido. Leu nas instruções que devia deitar 2 gotas do produto por cada litro de água.

Para saber quantas gotas deve deitar é preciso saber quantos litros de água cabem no aquário (1l = 1 dm^3).

Medimos o aquário:



Calculámos o volume:

$$\text{Volume} = 50\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 30\text{ cm} =$$

$$= 45\,000\text{ cm}^3 = 45\text{ dm}^3 = 45\text{ litros}$$

$$45\text{ litros} \times 2\text{ gotas/litro} = 90\text{ gotas}$$

É preciso deitar 90 gotas de anti-ácido." *Rita, Sara, Sofia.*

Alguns trabalhos evidenciavam concepções / ideias / resoluções de problemas erradas ou resultantes de reflexão insuficiente que foram discutidas nas aulas.

As seguintes situações proporcionaram a reflexão sobre estimativa de valores:

"Um exemplo em que no dia-a-dia se utilizem expressões referentes a volumes: "O volume deste garrafão de água é de 5 l" ou "A embalagem dos cereais tem como volume 2340 cm^3 e a dos biscoitos, tem só 900 cm^3" e ainda muitas outras expressões poderiam servir." *Viviana, Débora.*

"Há situações do dia-a-dia em que se usa volumes: a minha piscina tem 32 metros cúbicos. (...) Calcula o volume de uma piscina com as seguintes medidas. Comprimento: 23 m, largura: 45 m, altura: 2 m." *Marco, Miguel.*

Essa reflexão foi feita em torno de questões tais como:

— O volume da caixa dos cereais e dos biscoitos dá-nos indicação precisa da quantidade de cereal e de biscoitos que embalam? O tipo de produto embalado e o seu peso têm relação com o espaço ocupado?

— As medidas indicadas para a piscina são realistas? Como relacionar as medidas indicadas com a quantidade de água que comporta?

Um problema — e a sua resolução — apresentado por uma aluna, a Sónia, mereceu também reflexão, para o que foi registado no quadro:

"Um campo de espigas de milho tem de área 60 m^2. Quanto tem de perímetro esse campo sabendo que esse campo é quadrado?

$$60 : 4 = 15$$

Resposta: Tem de área 15 m."

Alguns alunos referiram que a resposta falava em área, quando o que se pedia era o perímetro, e que a Sónia utilizava unidades de medida de comprimento para quantificar a área.

Os professores colocaram a questão: Dada a área de um quadrado, como achar a medida do seu lado?

Um aluno referiu que como os lados eram iguais era preciso ir por tentativas. Os alunos foram propondo valores que a professora foi registando no quadro:

$$6 \times 6 = 36$$
$$7 \times 7 = 49$$
$$8 \times 8 = 64$$
$$9 \times 9 = 81$$

Nesta altura os alunos referiram que a medida do lado teria que andar entre 7 e 8 metros. A primeira sugestão foi 7,5 m.

$$7{,}5 \times 7{,}5 = 56{,}25$$

Uma aluna sugeriu então 7,7.

$$7{,}7 \times 7{,}7 = 59{,}29$$

Os alunos concluíram que o lado do quadrado media 7,7 m.

Outra aluna referiu que a Sónia, para calcular o perímetro, deveria ter multiplicado o valor do lado por 4:

$$4 \times 7{,}7 = 30{,}8$$

A resposta correcta seria então: O campo de milho tem de perímetro 30,8 m.

Conclusão

As aulas decorreram num ambiente de trabalho colaborativo, centrado na actividade dos alunos; os professores intervieram propondo situações de aprendizagem e estimulando os alunos na procura das soluções para os problemas propostos ou que surgiram no decurso das aulas. O trabalho colaborativo entre alunos permite desenvolver competências sociais e de comunicação. A entreajuda entre pares, em que os alunos tentam explicar os assuntos aos colegas que ainda não os entenderam, e a discussão de pontos de vista diferentes, onde são esgrimidos os argumentos que os sustentam, facilitam a interiorização dos conceitos e dos procedimentos. Neste processo de interacção verbal, os alunos tornam-se mais conscientes do que sabem ou do que não sabem, o que dá sentido às aprendizagens.

A aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação permite desenvolver as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução dos problemas (Abrantes *et al*, 1999).

A situação-problema é um meio didáctico que permite que os alunos reconstruam o conhecimento e que este seja apresentado na sua função autêntica de competência.

As tarefas propostas nas aulas inerentes a acções susceptíveis de desenvolverem competências têm uma utilidade, uma finalidade, que é percebida pelos alunos. A preservação do carácter global da tarefa garante que a aprendizagem seja significativa. A aprendizagem será tanto mais estimulante e motivadora quanto mais os alunos percepcionarem a sua utilidade na resolução de inúmeros problemas na vida do dia-a-dia (Rey *et al*, 2003).

Retomando a questão colocada no início do artigo — desenvolver competências é retirar importância aos saberes? — concluímos respondendo com uma citação de Perrenoud (1999) "Se a competência se manifesta na acção, não é inventada na hora:

— se faltam os recursos a mobilizar, não há competência;

— se os recursos estão presentes, mas não são mobilizados em tempo útil e conscientemente, então, na prática, é como se eles não existissem."

Contudo, não podemos deixar de referir que o ensino baseado no desenvolvimento de competências requer tempo. A implementação da unidade que aqui apresentamos foi feita numa sequência temporal que englobou as aulas de Estudo Acompanhado e de Formação Cívica que ocorreram naquele espaço de tempo. É fundamental que o Programa de Matemática para o Ensino Básico, em vigor desde 1991, seja revisto e redimensionado para que as orientações contidas no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais* possam ser implementadas eficazmente.

Notas

1 As aulas foram dadas por dois professores em simultâneo, já que a turma é do ensino especial e tem um aluno a frequentar aulas de Matemática individuais por se encontrar inserido num currículo escolar próprio. Por vezes, ambos os professores leccionaram as aulas de Matemática em conjunto, diferenciando o processo de ensino na sala de aula, visando, deste modo, familiarizar todos alunos da turma com ambos.

2 A professora de Matemática é também professora de Estudo Acompanhado e Directora de Turma tendo, por isso, a seu cargo Formação Cívica.

3 Esta actividade foi adaptada de Morris (1989).

4 Nos trabalhos dos alunos apenas foram corrigidos os erros ortográficos.

Referências

Abrantes, P., Serrazina L., Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Morris, J. (1989). *How to develop problem solving using a calculator*. NCTM. Virgínia: Reston, USA.

Perrenoud, P. Pátio. Revista Pedagógica (Porto Alegre, Brasil) n°11, Novembro 1999, pp. 15–19.

Rey, B., Carette, V., Defrance, A., Kahn, S. (2003). *Les compétences à l'école*. Editions De boeck. Bruxelles.

António Menino e Graça Zenhas
Escola EB 2,3 de Gueifães

Correcção

Na revista n° 83 de Maio/Junho de 2005 no artigo A *calculadora na aula de Matemática — duas actividades de investigação realizadas numa turma do 6° ano* no 2° parágrafo da página 13 onde se lê:

"Um grupo achou que a situação era idêntica a um *relógio* em que o mostrador, em vez dos números/horas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, tinha assinalado 1, 2, 4, 5, 7 e 8 ..."

deveria dizer

"... tinha assinalado 1, 4, 2, 8, 5, 7 ...".

Também o mostrador do relógio apresentado na páginas 12 deveria apresentar os números por esta ordem.

Motive os seus alunos !

Para uma melhor compreensão da Matemática e Ciências

O nosso objectivo é disponibilizar-lhe as melhores ferramentas de forma a permitir que enfrente, com sucesso, os actuais desafios da educação. Trabalhando em conjunto com professores e educadores, a nível mundial, desenvolvemos produtos e serviços que melhoram a motivação e participação dos estudantes. Matemática e Ciências tornar-se-ão mais acessíveis, concretas e interessantes. Hoje, disponibilizamos para professores um rico portfolio de produtos, que vão desde calculadoras gráficas, sensores, ferramentas para sala de aula e serviços de apoio altamente específicos. A nossa oferta integra-se perfeitamente nos requisitos necessários para uma melhor compreensão e interactividade da Matemática e Ciências.
Para mais informações, por favor visite: education.ti.com/portugal

TEXAS INSTRUMENTS

TI Technology - Beyond Numbers

Os 20 anos da APM na Educação e Matemática

APM — Núcleos e Encontros Regionais: itens para reflexão

Núcleos: Qual o papel dos núcleos da APM?

1. Dinamização dos sócios da região
2. Divulgação das ideias da APM, dos livros e materiais
3. Participação na vida associativa

Encontros Regionais: O que são hoje?

1. Espaço de divulgação da APM?
2. A salvação económica dos núcleos?
3. Momento essencial para dar visibilidade à existência do núcleo?
4. Momento privilegiado para os sócios regularizarem as suas quotas?
5. Motivo principal para um professor ser sócio da APM, devido à regalia no preço?
6. Espaço de convívio dos professores?
7. Que impacto tem nas práticas lectivas dos participantes?
8. Existem alternativas?

APM — Núcleo de Vila Real ou APM em Vila Real?

Ilda Couto Lopes

Este documento surge no âmbito das comemorações dos 20 anos da APM. O Gabinete criado para o efeito convidou os núcleos e os grupos de trabalho da associação a fazerem uma apresentação das suas reflexões e linhas de acção para os próximos anos numa sessão especial do ProfMat 2005. O Núcleo de Vila Real aceitou o desafio.

A reflexão solicitada constituiu uma forma de fazermos uma avaliação da actividade desenvolvida, das finalidades e objectivos perseguidos e da própria sustentabilidade local e nacional da estrutura do núcleo de Vila Real.

Também apresentaremos, a partir da nossa vivência e experiência de 10 anos de existência o modo como encaramos a dinâmica da APM a nível nacional no que respeita às suas estruturas regionais, os núcleos.

O Núcleo de Vila Real

Algumas datas na história da APM — Núcleo de Vila Real

A APM-Núcleo de Vila Real, tal como o próprio nome indica, é respeitante ao distrito de Vila Real. Vila Real é um distrito que tem características específicas. No início da existência do núcleo era um distrito carenciado de professores profissionalizados. Percebia-se que havia muita inércia dos professores colocados, talvez devido ao isolamento, ao pouco trabalho de grupo e muito individualismo; havia poucos hábitos de participação em encontros. Assim, a implementação de um núcleo da APM, neste distrito fazia muito sentido ainda mais pelas características do distrito e dos seus professores.

No que respeita à vida do núcleo há datas que marcam períodos de vida qualitativamente diferentes como a seguir se pode constatar.

Criação do Núcleo. Em Abril de 1996 houve uma auscultação dos professores de matemática e sócios acerca da pertinência da criação de um núcleo da APM. Como a resposta foi positiva e em Setembro de 1996 foi realizada a constituição formal do núcleo numa assembleia geral convocada para o efeito.

O desejo de uma sede apetrechada de recursos. A vontade dos presentes era ter uma estrutura a que se pudesse recorrer em termos de apoio logístico e onde os profissionais se pudessem encontrar; a sede como forma de materializar essa ideia esteve presente desde o início apesar de não haver disponibilidade de um espaço físico. Inicialmente o nosso centro de recursos funcionava um armário cedido gentilmente por uma das sócias. Um dos problemas mais focados era a inexistência de materiais manipuláveis e tecnológicos disponíveis nas escolas. Na implementação do Ajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Secundário todas as escolas, com este nível de ensino, foram apetrechadas pela DREN com calculadoras gráficas (por serem de uso obrigatório). Aproveitando a existência do programa Ciência Viva lançado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, os elementos do núcleo concorreram com um projecto intitulado *Fazer e experimentar Matemática*. Este projecto foi seleccionado e financiado em 17 457,93€ em Outubro de 1998 pelo Ministério da Ciência e Tecnologia. Se até a esta altura o centro de recursos pode ficar remetido a um armário a partir desta altura era imperioso a existência de uma sede. Com este argumento tornámos a inventariar locais, a contactar com as entidades, a mobilizar os sócios para tentarmos resolver o problema da sede. Passado um ano, exactamente em Outubro de 1999, fez-se a inauguração da sede/centro de recursos da APM de Vila Real. Neste espaço estão sedeados os materiais adquiridos através do Ciência Viva III, todas as publicações da APM e outra bibliografia que foi sendo adquirida e que tem constituído um espaço de consulta para todos os sócios e professores de matemática. Já em Fevereiro de 2000 e apesar de se ter concorrido Ciência Viva V com o projecto *Matemática e Natureza* este não foi seleccionado nem financiado.

Desenvolvimento de projectos nacionais da APM. Em 2001, em Outubro, o núcleo de Vila Real, em parceria com diferentes estruturas da APM e de outras instituições, organiza três eventos nacionais da APM: o XII SIEM, o ProfMat 2001 e a Exposição Nacional *Matemática e Natureza*. Estas três organizações tiveram um impacto forte no distrito de Vila Real; deram a conhecer a APM e a sua dinâmica através da actividade desenvolvida pelo núcleo.

Investimento na formação através do Centro de Formação da APM. Outra data de referência é Fevereiro de 2002 quando o núcleo inicia formação creditada e acreditada pelo Centro de Formação da APM realizada nas instalações da sede. A partir dessa data a formação tem sido sempre uma constante.

Finalidades do trabalho desenvolvido no núcleo nestes 10 anos de vida

As actividades a realizar em cada ano lectivo regem-se por cinco grandes finalidades:

1ª Dinamizar o centro de recursos/sede;

2ª Fomentar a dinamização dos Grupos de Matemática de cada escola a partir de si mesmos.

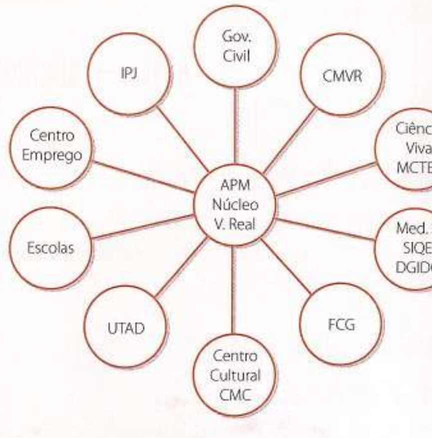
3º Implementar Oficinas de Formação creditadas e financiadas pelo Centros de Formação incluindo o da APM;

4º Mobilizar os recursos humanos, os recursos físicos e financeiros.

5º Solicitar o envolvimento das forças vivas da comunidade envolvente.

Relações institucionais

Para sustentar a dinâmica tem-se solicitado o envolvimento das forças vivas da comunidade (Câmaras Municipais, IPJ, Escolas, Governo Civil, Turismo, etc.) e nacionais (Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Fundação para a Ciência e Tecnologia, Gabinete de Avaliação Escolar-GAVE, Fundação Calouste Gulbenkian, etc.). O movimento de dar a conhecer a associação tem contribuído para explicitar junto da comunidade envolvente, através dos seus organismos/instituições, o trabalho e o empenho da APM numa outra imagem da matemática e na luta pela melhoria da qualidade educativa das aprendizagens matemáticas.



Dinâmica do Núcleo de Vila Real

A dinâmica do Núcleo de Vila Real está apoiada na existência de uma sede/centro de recursos onde se realizam diversos tipos de actividades a saber: empréstimo/contacto com materiais didácticos, consulta de bibliografia, venda de publicações/materiais da APM e de outras editoriais, apoio/ajuda a profissionais ou a instituições, acesso à Internet e formação.

Sede/Centro de recursos

A sede tem sido subsidiada pela Câmara Municipal de Vila Real que reconhece o trabalho realizado pela APM — Núcleo de Vila Real e suporta os custos inerentes ao aluguer da sede: trata-se de uma sala ampla onde já funcionou anteriormente a Delegação Escolar de Vila Real. A existência da sede e da comparticipação da Câmara Municipal de Vila Real tem sido obtida através de negociações sistemáticas com a autarquia (ver fotografia).

Inicialmente o atendimento aos professores na sede, fazia-se através de sócios e das suas disponibilidades de horário; rapidamente se constatou que apesar de muito importante o atendimento era muito limitado por ser condicionado pelas ocupações dos professores voluntários. Estrategicamente investimos numa outra modalidade: recorrer a pessoas desempregadas através do Instituto de Emprego e Formação Profissional e do *Acordo de Actividade Ocupacional* destinado a instituições sem fins lucrativos. Assim a sede passou a funcionar em horário de expediente normal com pessoas que estão no desemprego e que através do Instituto de Emprego e Formação Profissional são colocadas na nossa sede. Os encargos para o núcleo são o subsídio de alimentação mensal e

um seguro de acidentes de trabalho (para quem fica colocado tem um reforço de 20% sobre o subsídio de desemprego, da segurança social).

Projectos nacionais

Os projectos nacionais desenvolvidos foram cinco, tendo envolvido ora estruturas internas à APM ora instituições exteriores à própria associação: Ciência Viva III (1998/99) com o Ministério da Ciência e Tecnologia; organização do ProfMat e do XII SIEM (2001/02) em articulação com a direcção da APM e com o Grupo de Trabalho de Investigação e a dinamização do ano temático Matemática e Natureza em colaboração com o núcleo de Bragança.

Encontros regionais — RealMat

O RealMat, encontro regional anual dos professores de matemática do distrito de Vila Real tem tido como objectivo divulgar a APM em cada concelho do distrito (14 no total) mobilizando os professores locais e descentralizando o trabalho de sensibilização/formação dos professores de matemática. Estes encontros são organizados por elementos da equipa coordenadora do núcleo e por professores das escolas onde se realizam os RealMats.

Desde 1997 até ao presente ano realizaram-se 7 encontros, em que o número de participantes evoluiu de 80 para 250, entre 1997 e 2000. A tendência decrescente verificada a partir de 2003 (70) inverteu-se este ano, com 150 participantes. Os Encontros têm tido a duração de dois dias, à excepção do Encontro de 2003 com a duração de apenas um dia, tendo-se procurado diversificar o seu local de realização e, por isso, para além do concelho de Vila Real, o RealMat já se realizou nos concelhos de Chaves, Peso da Régua, Montalegre, Vila Pouca de Aguiar, Alijó e Santa Marta de Penaguião.

Nestes encontros a afluência de sócios é de cerca de 30% pelo que funcionam para muitos professores como o primeiro contacto com a APM.

No encontro que se realizou em Alijó, integrámos Professores de Físico-Química associando-nos, assim, às comemorações do Ano Mundial da Física. Também nesse encontro foi feita homenagem póstuma ao matemático e cidadão José Morgado Júnior natural de Pegarinhos, freguesia do concelho de Alijó. Conseguiu-se mobilizar as pessoas e as crianças do 1° ciclo de Pegarinhos *devolvendo-lhes* esta figura ímpar. O reconhecimento do valor e extrema importância de José Morgado Júnior na sociedade e no contexto da matemática portuguesa, realizado pela comunidade de professores de matemática da região de Vila Real, permitiu a vivência de um momento político único, de extrema importância, na vida da APM — Núcleo de Vila Real.

Pretende-se com os encontros regionais manter um espaço de divulgação e de reflexão. Este tipo de Encontros Regionais visa o confronto, assim como a partilha de experiências e de perspectivas em Educação. Os objectivos que nos orientaram foram, entre outros, os seguintes:

— Promover a melhoria da qualidade do ensino da Matemática, através da permanente actualização e aprofundamento de conhecimentos científicos, nas vertentes teórica e prática;

— Promover o aperfeiçoamento da competência profissional e pedagógica dos professores e educadores de Matemática nos vários domínios da sua actividade;

— Promover metodologias inovadoras e instrumentos de avaliação alternativos aos tradicionais e,

— Dinamizar a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente materiais manipuláveis, calculadoras e computadores e acesso à Internet.

Comunicação

A comunicação entre os professores de matemática é fundamental ainda mais que o isolamento é uma das suas características. O núcleo tem privilegiado dois tipos de comunicação: a electrónica e a escrita. A electrónica através da página do núcleo (`http://www.apm.pt/nucleos/vreal/index.html`) e de páginas de projectos nacionais sedeadas no *site* da APM; a escrita através de notícias regulares no APM*informação*, fazendo o relatório de actividades anual na publicação *Relatório de Actividades* e através do *Algoritmo* — boletim semestral regional.

Formação

Como já se disse anteriormente, a partir de 2002, investiu-se na formação creditada e acreditada através do Centro de Formação da APM, em acções na modalidade de oficina (Aprender a Gostar de Matemática) ou círculo de estudos (Matemática e Natureza) ou de projecto (Formação de Matemática no Ensino Básico em rede).

Apesar da formação em matemática ser escassa os professores ainda não integraram no seu dia-a-dia o hábito de investirem na sua formação contínua.

Pontos fortes e limitações à dinâmica do Núcleo

Podemos identificar no núcleo de Vila Real três grandes linhas de força em torno das quais a dinâmica se firma:

- *Sede*. A existência de uma sede/centro de recursos como espaço físico de encontro entre pessoas; este espaço está devidamente apetrechado com materiais manipuláveis, tecnológicos e bibliográficos;
- *Comunicação*. O investimento na comunicação/divulgação através de diferentes formas como modo de minorar o isolamento dos profissionais da educação, como estratégia de divulgação de actividades, projectos, práticas de diferentes escolas da região;
- *Formação*. A aposta na formação como forma de alterar práticas de forma fundamentada.

No entanto, também se podem referir três grandes problemas com que o núcleo se debate sistematicamente:

- Financeiro: os núcleos não têm dotação orçamental no contexto nacional; funcionam numa lógica de auto financiamento (subsídios locais, projectos, acções de formação, ...). Assim, núcleos com sede têm despesas correntes fixas (luz, água, limpeza, aquecimento, telefone, subsídio de alimentação da funcionária...). Os encontros regionais funcionam como um meio de salvaguardar o financiamento/liquidez que possibilita a manutenção da dinâmica e o pagamento das despesas correntes;
- Recursos humanos: o núcleo tem recursos humanos mas muitas vezes há dificuldade de rentabilizar o potencial da região.
- Ligação à Internet na sede: hoje em dia não se questiona a necessidade de se estar ligado à Internet. No entanto o Núcleo de Vila Real não consegue assegurar uma despesa corrente de ligação à Internet que salvaguarde as necessidades actuais.

Dinâmica dos núcleos a nível nacional

Os núcleos como estruturas locais da APM são um indicador forte da dinâmica conseguida pela associação através dos seus sócios. De facto, os princípios que a associação tem defendido apresentam aspectos positivos na sua dinâmica actual. Assim, identificamos como positivos os aspectos seguintes:

- Não se impedir que nenhum grupo constitua um núcleo;
- Haver uma grande liberdade de acção na região desde que com responsabilidade e desde que não se coloque em causa a dinâmica nacional;
- Haver uma mobilização das sinergias locais;
- Permitir o envolvimento dos professores numa dada região;
- Favorecer o contacto directo com os sócios numa dada região.

Por outro lado também se podem identificar alguns aspectos limitativos ao funcionamento dos núcleos: não haver qualquer comparticipação nacional no suporte logístico de uma sede (aluguer, despesas correntes, ...); não se poder solicitar subsídios a algumas estruturas centrais; haver pouco acompanhamento do funcionamento dos núcleos.

Além de se verificarem todos os aspectos referidos parece-nos haver, por parte das estruturas centrais da APM, uma lógica centralizadora e de tratamento igualitário que se rege pelo princípio de dar o mesmo, da mesma forma, a todos os núcleos mesmo quando estes não valorizam de forma igual as mesmas coisas.

Nestes últimos anos houve algumas formas de tentar aprofundar a problemática dos núcleos. Para isso, em 1998, foi feito um levantamento da situação dos núcleos para se diagnosticar as potencialidades, os problemas e outras características dos diferentes núcleos existentes à época. Esse diagnóstico existe e permitiu ter-se uma visão mais realista, datada, da diversidade de actuação dos núcleos a nível nacional. Passou a haver um elemento da direcção que teria como função a ligação aos núcleos. Também passou a haver, pelo menos, uma reunião anual exclusivamente para os núcleos e para reflexão e tratamento de problemas específicos relativos aos núcleos. Já em 2001 se lançou a proposta dos anos temáticos a serem dinamizados por dois núcleos que trabalhariam em parceria (ver Quadro 1).

No ano 2005 optou-se por se investir na dinamização/colaboração no Ano Mundial da Física.

Esta dinamização dos anos temáticos teria como finalidades a descentralização do trabalho nacional da APM e por

Tema	Ano	Responsáveis pela dinamização
Matemática e Natureza	2001	Núcleos de Bragança e Vila Real
Matemática e Profissões	2002	Núcleos de Almada/Seixal e Madeira
Matemática e Tecnologia	2003	Núcleos de Coimbra e Leiria
Matemática e Jogo	2004	Núcleos de Porto e Viseu
	2005	
Matemática e Tempo	2006	Núcleos de Beja e de Castelo Branco

Quadro 1.

outro lado proporcionar aos núcleos a mobilização da capacidade de visão central do trabalho. Assim, na altura da criação dos anos temáticos estabeleceram-se como objectivos:

- Dinamizar o trabalho da APM a partir dos núcleos;
- Reactivar o trabalho dos núcleos;
- Integrar o trabalho dos núcleos na dinâmica da APM.

Apesar de todos estas diligências no sentido de mobilizar e dinamizar os núcleos como estruturas regionais há situações limite que são vividas pelos mesmos; esta situação verifica-se quando, por períodos alargados, não há representação de um dado núcleo, por exemplo, no conselho nacional: que atitude tomar? Que fazer?

Por outro lado, outro dos aspectos sensíveis na vida da APM tem a ver com a parte financeira: como operacionalizar o tratamento financeiro, nos núcleos, por forma a que isso não constitua um problema e um obstáculo à própria dinamização? Como agilizar o sistema por forma a que todos os núcleos apresentem regularmente relatórios da sua situação financeira?

Perspectivas futuras

A afirmação de que os núcleos são fundamentais na dinâmica da associação em termos regionais é consensual. A forma particular de organização destas estruturas locais integradas na lógica de funcionamento de uma associação nacional é que gera visões diversas chegando, por vezes, a serem antagónicas. Também facilmente se constata que entre os núcleos há diferentes formas de ver e viver regionalmente a associação: há núcleos que mantêm sedes abertas e formação a funcionar; há outros núcleos que não vêem qualquer vantagem regional em manterem e dinamizarem sedes. Há núcleos que não têm dinamizado formação através do Centro de Formação da APM. Pode-se constatar que as regiões e os seus núcleos podem ter especificidades em que nenhum outro núcleo se reveja.

De facto, a APM enquanto estrutura organizativa é um caso a nível nacional pela dinâmica conseguida de forma voluntária, pela diversidade de formas de actuação.

Apesar de todos estas características e partindo da reflexão com os sócios de Vila Real consideramos importante, urgente e pertinente a definição de uma política mais clara da APM com vista a uma maior descentralização da associação (regionalização/*nuclealização*?): é importante ter em conta alguns aspectos específicos tais como a definição da política da APM acerca da existência de sedes/centro de recursos nos núcleos, a dotação orçamental dos núcleos, a forma de operacionalizar as vendas nas sedes regionais, o tipo de atendimento aos sócios e professores de matemática, etc. É importante esclarecer o que se pretende de uma estrutura regional: ser mais uma estrutura da APM ou a APM na região?

Ilda Couto Lopes

XVII SIEM — Seminário de Investigação em Educação Matemática

Escola Superior de Educação de Setúbal — 13 e 14 de Novembro de 2006

O XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática, pretende constituir-se como um fórum de divulgação e debate das principais linhas de investigação em educação matemática, tanto a nível nacional como internacional, envolvendo de forma activa investigadores e professores.

As Conferências Plenárias são proferidas por conferencistas convidados, nacionais e estrangeiros, abordando temas relevantes da investigação em educação matemática. O Painel é um espaço destinado à discussão de questões transversais a partir do contributo de um conjunto de convidados. As Comunicações, apresentadas por proposta dos participantes, constituem espaços privilegiados para a troca de ideias. Cada uma terá uma duração de quarenta e cinco minutos, sendo os primeiros vinte destinados à apresentação e os restante vinte e cinco à discussão. De modo a fomentar o debate, prevê-se a organização de simpósios em que serão agrupadas comunicações com afinidades temáticas.

Para comemorar os 10 anos da Agenda, a equipa responsável pela edição de 1998/99, deu um contributo para uma história concisa da APM, através da voz dos seus Presidentes. Pela sua relevância vão ser republicados esses depoimentos, alguns deles comentados pelos autores, à luz dos desafios actuais.

Revisitar o passado e projectar o futuro

Ter um espaço onde fosse possível *falar* Matemática, partilhar ideias, discutir inquietações era, desde há muito, um sonho acalentado por alguns professores.

Após várias tentativas pontuais, sem êxito diga-se de passagem, como por exemplo a criação dos Núcleos de Investigação Matemática, surge em 84 um minicurso organizado pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências aberto a professores de TODOS os graus de ensino (a Universidade aberta a TODOS? Nem queríamos acreditar !...).

Quando, no ano seguinte, no encontro de professores realizado em Agronomia, foi lançada a ideia de criar uma associação, a adesão imediata e entusiasta dos colegas presentes desencadeou uma dinâmica imparável.

E foi assim que, no decorrer da Assembleia Geral do ProfMat (Portalegre 86), se constituíu por unanimidade e aclamação a Associação de Professores de Matemática. O nosso sonho tornou-se realidade.

Em pouco tempo, a APM legalizou-se, saíu o primeiro número da revista, realizou-se o Seminário de Vila Nova de Milfontes sobre a renovação do currículo da Matemática, começaram a surgir os primeiros núcleos regionais. De então para cá, a *bola de neve* não tem parado de crescer! A APM foi e será um *marco* no panorama do ensino-aprendizagem da Matemática em Portugal.

Gostaria de deixar aqui algumas questões:

— O que é importante SABER no próximo milénio?
— O que deve a escola *ensinar* aos alunos?
— Que desafios para a APM?

Que sejamos capazes de construir a Escola como espaço de prazer onde *aprender a aprender* crie condições propícias à cidadania é, sem dúvida, um bonito sonho que num futuro próximo todos nós gostaríamos de ver concretizado.

Leonor Filipe, sócia nº 1
Presidente da APM — 1986/88

1988/1989: o estilo APM num ambiente de reforma

No seu terceiro ano de vida, a APM começava a crescer de um modo que talvez não se imaginasse tão rápido. Em 1989, quase 500 novos professores elevavam o número de sócios para cerca de 1600. O ProfMat de Viana do Castelo atingia o meio milhar de participantes e, pela primeira vez, tinha quatro dias de duração e decorria em tempo de aulas. Iniciativas locais começavam a ganhar consistência: em 1989 tem lugar o 1º AlgarMat, o mais antigo encontro anual de âmbito regional. Uma revisão rápida dos números da *Educação e Matemática* e das publicações APM da época mostra que alguns temas fortes eram a resolução de problemas, a geometria, as calculadoras, as aplicações da Matemática.

Vivia-se uma época de reforma. Os documentos base eram conhecidos, os primeiros projectos dos novos programas começavam a aparecer. É muito interessante verificar, hoje, que a APM combinava, desde a sua fundação, duas características fortes: uma actividade intensa que envolvia cada vez mais professores; e uma preocupação central de reflexão sobre as finalidades do ensino da Matemática e a natureza das actividades de aprendizagem. No ProfMat 89, os grupos de trabalho temáticos, as comunicações e as sessões práticas eram particularmente valorizadas, e a Abertura à População surgia pela primeira vez. Mas, ao mesmo tempo, no espírito do seminário de Milfontes de 1988, a coerência da reforma curricular estava no centro das preocupações. Em Abril de 1988 (há 10 anos!), a Direcção da APM advertia que, embora defendendo desde sempre a profunda renovação do ensino da Matemática, "um trabalho sério e profundo exige tempo, para que (...) os resultados dos processos experimentais sejam devidamente considerados (...) e para que os professores assumam a sua própria formação no quadro do seu envolvimento directo em todo o processo". E um ano mais tarde, num parecer sobre os primeiros projectos de novos programas para o ensino básico, sublinhava que "um programa de Matemática, hoje, não deve ser nem correr o risco de ser interpretado essencialmente como uma lista de matérias a dar", devendo por isso ser claro a respeito dos objectivos prioritários, da natureza das actividades matemáticas e da diversidade das formas de trabalho a desenvolver. A integração de objectivos, conteúdos e métodos era uma recomendação fundamental, assim como a ideia de que um programa deve ser "flexível e libertador", assumindo-se que o progresso " não resulta directamente do texto do programa mas sim da qualidade de factores como a formação dos professores ou as condições de ensino".

A actualidade destas preocupações é bem evidente!

Paulo Abrantes, sócio nº 2
Presidente da APM — 1988/89

Em tempos de reforma educativa

O meu mandato como elemento da direcção da APM correspondeu ao triénio 1988/89 — 1990/91, tendo sido presidente em 1989/90.

Discutia-se e preparava-se a reforma educativa. O tema de discussão relativamente ao ensino da Matemática nessa época tinha a ver com as novas propostas curriculares, que estavam a ser elaboradas por equipas nomeadas pelo Ministério da Educação.

A APM tinha realizado em 1988 o seminário de Vila Nova de Milfontes sobre a Renovação do Currículo de Matemática (APM, 1988), que deu origem a uma publicação com o mesmo nome que foi publicada pela Comissão da Reforma. As equipas encarregues de elaborar os novos programas decidiram solicitar pareceres a diversas entidades, designamente à APM. Também nos ProfMat (em especial nos de 1989 e 1990) foram proporcionados vários momentos de análise e discussão dos referidos projectos com os autores dos mesmos.

A direcção da APM elaborou em 1990 um parecer sobre os projectos de programa para o 1°, 2° e 3° ciclos do ensino básico onde, reconhecendo aspectos inovadores dos novos projectos relativamente aos anteriores programas, eram referidas algumas críticas, que me parece serem hoje (oito anos depois) da maior relevância. Entre elas, destaco: a ênfase que nos projectos de programa era dada aos conteúdos (assuntos matemáticos) e aos objectivos específicos; o papel pouco relevante que era atribuído às tecnologias nomeadamente às calculadoras e aos computadores; o pouco relevo dado às relações da Matemática com as outras disciplinas e com o mundo real. Afirmava-se ainda, neste parecer, que "os actuais projectos não constituirão um instrumento, útil e claro, nas mãos dos professores" (p. 15). Constata-se hoje que os programas têm leituras diferentes conforme quem os lê e que a sua implementação não pode ser considerada um sucesso.

A discussão e reflexão que foi feita naquele período relativamente aos projectos de programa parece manter-se actual no que diz respeito ao estado do ensino da Matemática.

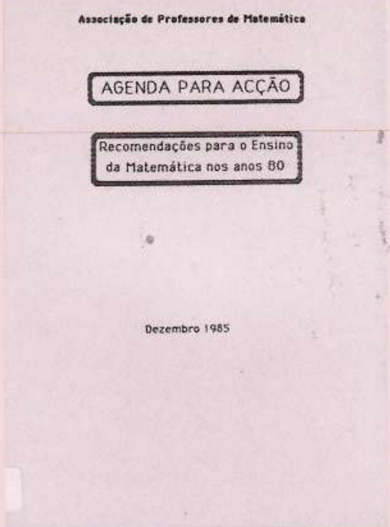
Referências

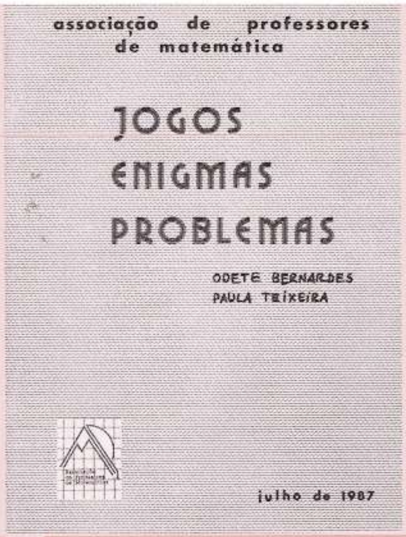
APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

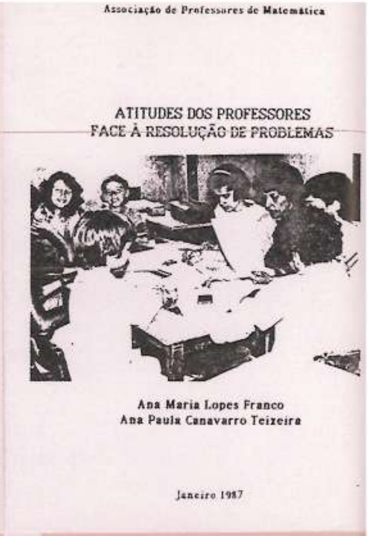
APM (1990). *Parecer relativo aos projectos de programas de Matemática para os 1°,2° e 3° ciclos do ensino básico.* Lisboa: APM.

Relendo o texto acima, em Março de 2006, constato com alguma perplexidade que a situação do ensino e aprendizagem da Matemática continua a estar na ordem do dia e não por boas razões. Em termos curriculares houve o Projecto de gestão flexível do currículo em que muitas escolas e professores investiram bastante e depositaram expectativas. Na sequência deste projecto foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico em 2001, mas mais uma vez não constituiu um instrumento útil e claro na mão dos professores. Antes pelo contrário, foi criticado por uns e ignorado por outros não tendo havido da parte das autoridades educativas que se seguiram nenhum esforço para que os agentes educativos e, nomeadamente os professores se apropriassem dos princípios subjacentes ao mesmo. Continuámos 15 anos depois a ter como referência os programas definidos em 1990 e 1991, que, em alguns aspectos, são difíceis de compatibilizar com os definidos no Currículo nacional.

Lurdes Serrazina, sócio nº 101
Presidente da APM — 1989/90







Sabia que? . . .

Publicações APM

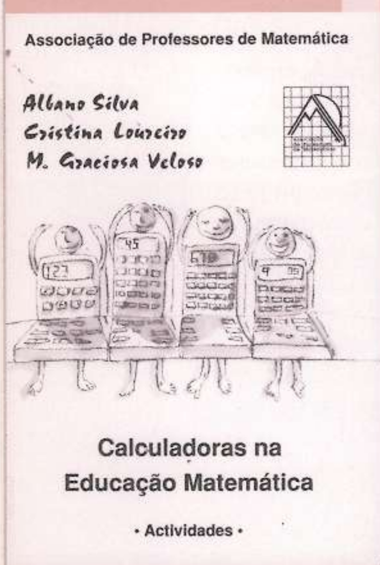
A APM nasceu numa época em que existia uma insatisfação muito grande entre os professores de Matemática com a situação do ensino desta disciplina. Essa insatisfação tinha a ver com os programas que estavam vigor, mas também com o abandono e isolamento em que se encontravam escolas e professores.

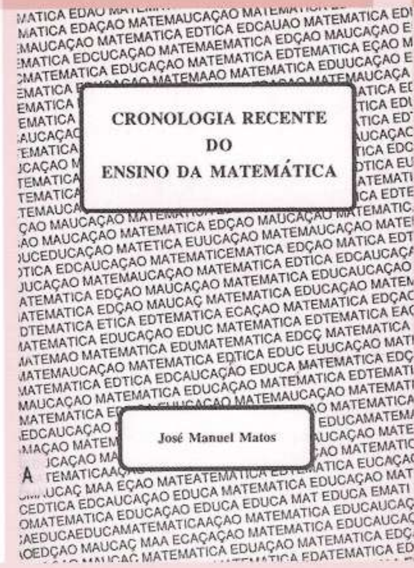
A criação da APM tinha como objectivos, entre outros, "estimular o intercâmbio de ideias e experiências" e "apoiar e divulgar actividades relevantes" no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática, e é impossível não reconhecer que, a este respeito, o conjunto de realizações que têm tido lugar desde então, por iniciativa e responsabilidade da APM ou por ela apoiadas, vieram modificar o ambiente profissional dos professores de Matemática.

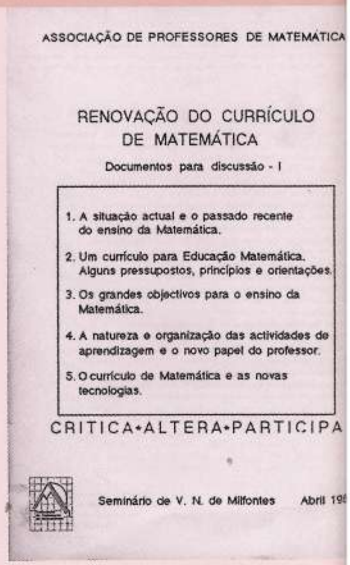
Uma das contribuições mais importantes da APM ao longo destes vinte anos, têm sido, justamente, a criação de condições para a divulgação e intercâmbio de ideias, experiências e materiais em todos os domínios relacionados com a actividade do professor de Matemática. Na verdade, em particular, os professores desta disciplina têm hoje disponível um património considerável de publicações e materiais didácticos que podem adquirir e a que podem recorrer para exprimir as suas opiniões e ideias e divulgar o seu próprio trabalho. Em livros e brochuras sobre muitos e variados temas, na revista *Educação e Matemática* a que todos os sócios têm direito, na *Quadrante*, a revista de investigação da Associação, e no APM*informação*, o seu no boletim informativo.

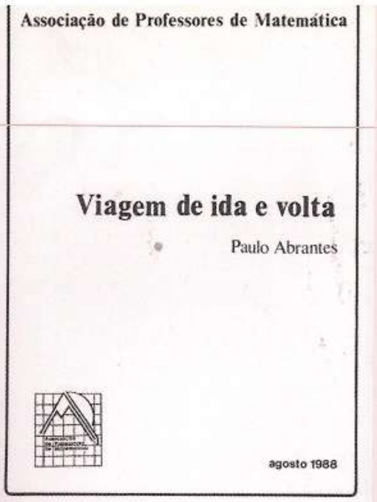
Os primeiros livros

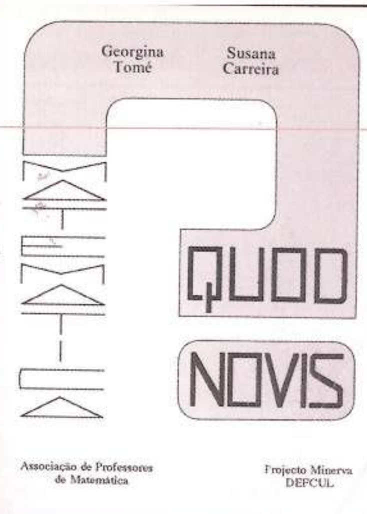
Os primeiros livros publicados pela APM surgiram logo em 1986, ano da sua criação: *A Agenda para a acção*, tradução portuguesa das recomendações do *NCTM* para o ensino da Matemática nos anos 80 (L. Serrazina e J. Matos) — tratou-se na verdade de uma reedição, pois a tradução já tinha sido publicada em Dezembro de 1985 numa 'edição sem editora' — e, *O problema da semana* (M. J. Costa), uma colectânea de problemas que viria a ter sucessivas edições e constituir um *best seller* dos primeiros anos da Associação.







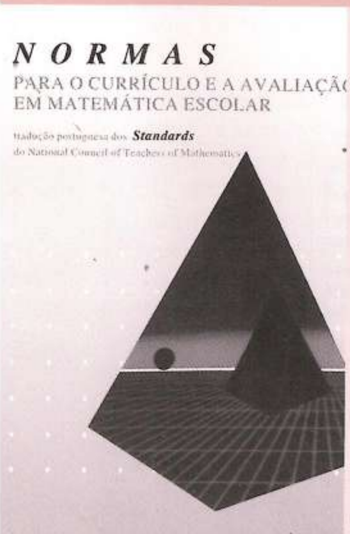




É interessante notar que os problemas e a resolução de problemas constituíram o tema sobre que incidiram muitos dos primeiros livros publicados pela APM. Sob a forma de colectâneas, como foi o caso de *Jogos, Enigmas e Problemas* (1987, O. Bernardes e P. Teixeira), a que se seguiu das mesmas autoras *Mais Jogos, Enigmas e Problemas* (1989, com P. Esteves e J. P. Viana), e de *Só problemas I e II* (1991 e 1993, J. S. Cabral). Ou em publicações com propósito diferente, como *Atitudes dos professores face à resolução de problemas* (1987, A. Franco e A. P. Canavarro) e *A Matemática na vida das abelhas* (1987, A. Teles, A. Vieira, A. Ali e F. Antunes) — embora neste caso a principal incidência seja a relação da Matemática com a realidade — e, ainda, *Viagem de ida e volta* (1988, P. Abrantes), que também explora aspectos das relações da Matemática com a realidade, mas com a preocupação principal de discutir o lugar e o papel dos problemas no currículo e na aula de Matemática, e *Quod Novis* (1989, G. Tomé e S. Carreira), que apresenta um grande número de problemas e o modo como foram utilizados para trabalhar todo o programa do 11.º ano, com a folha de cálculo electrónica como ferramenta.

Os computadores e as calculadoras, e os materiais para a aula, mereceram também a atenção nas primeiras publicações da APM. No primeiro caso através da edição de *O computador na aula de Matemática* (1987, E. Veloso) e de *Calculadoras na Educação Matemática* (1989, A. Silva, C. Loureiro e G. Veloso). No segundo caso, com a publicação de *O geoplano na sala de aula* (1988, L. Serrazina e J. Matos), livro também muito procurado que depois teve uma edição melhorada. Ainda em 1989, seria publicada a *Cronologia recente do ensino da Matemática* (J. Matos), em terceira edição actualizada e melhorada (as anteriores foram publicadas antes da criação da APM.

A problemática do currículo de Matemática foi outro tema privilegiado, e são sobre este tema duas das publicações mais marcantes nos primeiros anos da vida da Associação. A primeira foi a *Renovação do currículo da Matemática*, editada na sequência do Seminário de Vila Nova de Mil Fontes e que continha os textos que aí foram trabalhados (posteriormente também publicada pela comissão da reforma educativa). A segunda, editada em 1991, foi as *Normas para o currículo e a avaliação da Matemática escolar*, tradução portuguesa dos *Standards* do NCTM que nessa época tiveram grande influência em Portugal e em outros países. Na sequência desta publicação, a APM viria também a editar a tradução de vários números das *Adendas* que o NCTM publicou, com concretizações das ideias dos *Standards*.

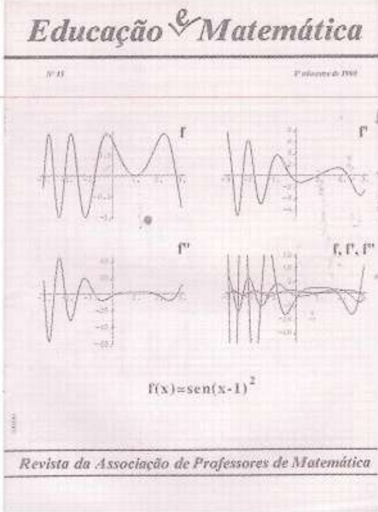


Revista Educação e Matemática

Em Janeiro de 1987, passados quatro meses sobre a criação da APM, sai o primeiro número da Educação e Matemática, com uma tiragem de 1000 exemplares que, logo no segundo ano, aumenta para 1500 exemplares. De início com uma periodicidade trimestral, teve Leonor Moreira como sua directora nos primeiros três anos de vida. Outros sócios da APM como Eduardo Veloso, Paulo Abrantes, Ana Vieira, Joana Brocardo dirigiram este ambicioso projecto que, com os anos, foi ganhado força, consistência e visibilidade também graças ao esforço e dedicação de muitos que têm integrado a sua equipa redactorial e de fiéis colaboradores que possibilitam a construção de secções que sempre foram parte integrante da revista.

Porém, a vida desta publicação periódica da APM, tem sido mantida também mercê de muitos sócios que a lêem, enviam artigos, pontos de vista e relatos de experiências e colaboram em entrevistas e mesas redondas.

Graças à ousadia da redacção da altura, em 1997, passaram a sair anualmente cinco números que hoje são enviados a 4000 associados.



Em 1991, começam a ser publicados números temáticos que nos habituamos a receber todos os anos no ProfMat. O primeiro foi dedicado à reforma curricular em Matemática e desde então têm sido tratados temas diversificados relacionados com o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Algumas secções que integram a revista têm carácter permanente como é o caso de *O problema deste número*, *Materiais para a aula de Matemática*, *Tecnologias na educação matemática*, *Actualidades* e *Encontros*. Outras, como *Pontos de vista*, *Pense nisto*, *Vamos jogar* e *Leituras*, não possuem carácter regular. Associadas à iniciativa de lançamento de um tema anual, promovido pela APM, as revistas de cada ano incluem também uma secção que lhe é dedicada da responsabilidade dos núcleos regionais.

Inevitavelmente, o aspecto gráfico da revista foi sofrendo alterações pelo que algumas vezes o seu rosto também foi mudando.

Contando já com 86 números publicados que são o reflexo do esforço de muitos que anos após anos deram o seu melhor para que este empreendimento se tivesse mantido, a revista *Educação e Matemática* tem actualmente como directora Ana Paula Canavarro e como subdirectora Adelina Precatado. A sua paginação e arranjo gráfico, no princípio a cargo da equipa de redactores que punha de pé cada uma das revistas, hoje está entregue ao gabinete de Edição da APM.

Procurando sempre afirmar-se como um órgão de expressão de todos os professores de Matemática interessados em elevar a qualidade da sua actividade, a revista E&M passou a fazer parte da leitura dos sócios da APM, constituindo-se um veículo de experiências, debate de opiniões, dúvidas e ideias.

Revista Quadrante

Uma outra publicação periódica é a Quadrante cuja edição é da responsabilidade do Grupo de Trabalho de Investigação da APM. Direccionada para a divulgação de trabalhos de investigação, esta revista bianual procura fomentar a troca de ideias e experiências ligadas ao ensino da Matemática. O seu primeiro número saiu em 1992 e desde 1994 tem publicado números temáticos incidindo sobre O professor de Matemática (1994), Aspectos sociais e culturais da aula de matemática (1996), Investigações matemáticas na sala de aula (1998), Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor (1999), Ensino e aprendizagem da Estatística (2001), Educação e cidadania (2002), Avaliação pedagógica em Matemática (2002) e Formação inicial de professores de Matemática (2004).

Tendo contado com José Manuel Matos e Lurdes Serrazina como directores, hoje integram a sua equipa directiva Darlinda Moreira, Hélia Oliveira e Henrique M. Guimarães, actual director.

Actualmente possui cerca de 500 assinantes e publica artigos em quatro línguas.

Cronologia APM

1985

- Realiza-se em Lisboa o primeiro *ProfMat*, com a presença de cerca 350 professores. São aí tomadas posições no sentido da criação de uma associação de professores de Matemática.
- É editada *Agenda para a acção*, tradução portuguesa das recomendações do *NCTM* para o ensino da Matemática nos anos 80 realizada por Lurdes Serrazina e José Matos.
- Em 5 de Fevereiro, tem lugar na Escola Preparatória Marquesa de Alorna de Lisboa uma reunião pró-associação com cerca de 30 participantes. Na sequência desta reunião foram criados vários grupos de trabalho visando a realização do *ProfMat 86* e a criação da associação de professores de Matemática.

1986

- No dia 19 de Setembro, numa assembleia geral do *ProfMat 86* que decorreu em Portalegre, é criada a Associação de Professores de Matemática (APM), são aprovados os seus estatutos e são eleitos os seus primeiros corpos gerentes. Leonor Filipe é eleita presidente da direcção.
- Em 30 de Setembro a direcção eleita da APM reúne em Lisboa iniciando o trabalho de lançamento, organização e divulgação da APM. A quota anual de associado é fixada em 1000$00 e os serviços da APM funcionam numa sede provisória na Av. 24 de Julho em Lisboa.
- No princípio de Outubro, realiza-se em Viana do Castelo um encontro de professores anunciado como II Encontro SPM/APM — Professores de Matemática do Norte, sob organização conjunta das duas organizações.
- Discute-se e prepara-se o lançamento de uma revista da APM. O nome escolhido é *Educação e Matemática*. Constitui-se uma redacção e um conselho editorial e Leonor Moreira é escolhida para directora.
- Começam a ser criados os primeiros núcleos regionais APM. No Porto, em Dezembro, realiza-se uma reunião que vai conduzir à criação do núcleo do Porto.
- Surgem as primeiras publicações APM: *O Problema da semana* e a *Agenda para a acção*.

1987

- Sai em Janeiro a *Educação e Matemática* nº 1, tendo como directora Leonor Moreira.
- Em Fevereiro é feito o registo notarial da APM.
- São editados novos títulos: *Atitudes dos professores face à resolução de problemas*, *A Matemática na vida das abelhas*, *Jogos enigmas e Problemas*, *O computador na sala de aula* e a publicação de livros continuaria nos anos seguintes.
- Realiza-se em Bragança o *ProfMat 87* com cerca de 350 professores. Nos dois dias que antecedem o encontro, realizam-se pela primeira vez cursos de formação promovidos pela APM, que desde então têm tido lugar todos os anos.
- Durante o primeiro ano de existência da APM, inscreveram-se 600 novos sócios e a associação chega ao final do ano com cerca de 850 sócios.

1988

- Entre 5 e 8 de Abril, realiza-se o *Seminário de Vila Nova de Mil Fontes* sobre a renovação do currículo de Matemática. Na sequência deste seminário é editado um livro com o mesmo título que foi também publicado pela comissão da reforma educativa.
- Inicia-se a publicação dos *Cadernos de Educação e Matemática* vocacionados para a divulgação de textos em português sobre temas relevantes para a educação matemática. O nº1, editado em Setembro, é sobre *A natureza da Matemática*. Serão depois publicados mais dois números *O computador na educação matemática* (1991) e *Sociologia da Matemática* (1998).
- Decorre em Faro o *ProfMat 88* com a presença de cerca de 400 professores.
- A APM ultrapassa os 1000 associados.

1989

- A direcção da APM divulga, em Maio, um parecer sobre os projectos dos novos programas publicado na *Educação e Matemática* nº 9.
- O *ProfMat 89* realiza-se em Viana do Castelo com a participação de de cerca de 550 professores.
- São publicados no Diário da República os *Novos Planos Curriculares dos Ensino Básico e Secundário*.
- Nascem mais dois núcleos regionais da APM, o de Almada-Seixal e o do Algarve que organiza em Faro o seu primeiro encontro regional, o AlgarMat.
- Sai em Dezembro o nº 1 do APM*informação*, novo boletim da associação.

1990

- É criado em Janeiro o núcleo regional de Leiria.
- Em Viseu, decorre o *ViseuMat I*, primeiro encontro regional de Viseu com a participação de cerca de 100 professores. Em Lagos realiza-se o 2º *AlgarMat*.
- A direcção da APM publica em Março o parecer relativo aos projectos de programa para os 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico, distribuído a todos os sócios.
- É criado o *Centro de Recursos da APM*.
- Realiza-se 1º *Congresso Ibero Americano de Educação Matemática* cuja organização a APM apoiou e onde esteve presente com uma banca e uma exposição sobre as suas actividades.
- Realiza-se o *ProfMat 90* nas Caldas da Rainha, encontro que pela primeira vez decorreu numa escola secundária e que contou com cerca de 700 participantes.
- Neste ProfMat são aprovadas alterações aos estatutos da Associação uma das quais consagra a criação do *Conselho Nacional* da APM.
- Também nas Caldas da Rainha, ocupando os dois dias imediatamente antes do ProfMat, tem lugar 1º *Seminário de Investigação em Educação Matemática* (SIEM) promovido pela APM, seminário que desde então todos os anos se tem realizado.
- A APM chega aos 2000 sócios.

Fátima Guimarães e Henrique M. Guimarães

Núm3ros

Não, não há nenhuma gralha no título, está mesmo um 3 onde esperariam que estivesse um e. Este é o original título escolhido (na realidade, *Numb3rs*) para uma série policial americana baseada em questões matemáticas que foi transmitida pela primeira vez em Janeiro deste ano pela cadeia de televisão CBS. A série policial é de estilo semelhante à popular série CSI e parece estar a começar a ter um sucesso semelhante, tendo entrado já na segunda época de produção e havendo já uma multidão de páginas da internet de fãs que analisam cada episódio da série e discutem cada detalhe (uma pesquisa no *Google* deu-me 464 000 páginas que usavam a palavra *numb3rs*).

Esta é a primeira vez que uma série de horário nobre usa a matemática de forma tão óbvia e sistemática. Com efeito, em cada episódio um ou mais aspectos da matemática desempenham um papel fulcral na procura do criminoso ou na explicação do crime. E essa explicação é plausível, sendo mesmo em vários casos baseado em situações reais (e claro, um dos consultores da série é matemático).

No genérico da série uma voz diz:

"Todos nós usamos matemática todos os dias. Prever o tempo. Dizer as horas, lidar com dinheiro. Também usamos matemática para analisar os crimes. Revelar padrões, prever o comportamento. Usando números podemos resolver os maiores mistérios que conhecemos."

A matemática que aparece está longe de ser elementar e frequentemente aparecem explicações do que acontece com a matemática, como no caso em que se explicam os processo de criptografia referindo em detalhe o que são números primos e porque aparecem na criptografia. Outros temas de Matemática usados na série incluem Cadeias de Markov, Análise de Sinal, Teoria de Jogos e o dilema do prisioneiro, ondeletas, balística, análise estrutural, dinâmica de fluidos, complexidade e problemas P versus NP.

Como aparece um matemático numa série policial? Na realidade o matemático de *Núm3ros* é irmão de um polícia e começa a ajudar o seu irmão com a bênção do pai reformado mas muito presente (e simpático); a eficácia do matemático (papel desempenhado por um jovem desempoeirado e de aspecto nada coincidente com a ideia redutora de um solitário maluco de óculos e cabelos em pé) faz com que passe cada vez a ser mais aceite pela polícia e a contribuir regularmente para a solução dos mistérios encontrados.

Claro que no decorrer dos episódios aparecem muitas discussões matemáticas ou sobre a matemática. Por exemplo, num diálogo entre o matemático e o irmão num dos episódios:

— Não há maneira de prever a localização do próximo ataque.

— Posso ajudar-te como no caso da extorsão.

— Este é diferente, não é sobre números.

— Tudo é números ("everything is numbers").

Noutro episódio, o matemático usa a estratégia do jogo *Minesweeper* (popular jogo de computador) para tentar entender um comportamento estranho de certos ladrões de bancos:

— O padrão usado nestes roubos de bancos é semelhante a este tipo de padrão de resolução de problemas; estes ladrões usaram a informação dum roubo para saber que banco roubar a seguir.

— Porque é que os ladrões iriam jogar Minesweeper com bancos?

— Não sei.

Noutro episódio em que é usado o problema probabilístico *Monty Hall*, o matemático diz:

— A maior parte das pessoas acredita que pode confiar nos seus instintos; contudo a matemática sugere que nem sempre os nossos instintos estão correctos.

Num outro episódio são discutidos os números constantes dos arquivos de uma empresa que está a ser investigada:

— Estes números não podem ser explicados por ocorrências ocasionais; alguém os inventou. Foram fabricados por alguém que gosta destes números e deixou para trás um padrão muito óbvio.

— Óbvio para ti.

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Porque será?

A série é produzida pelo célebre cineasta Ridley Scott e tem no seu elenco actores experimentados como Rob Morrow, David Krumholtz, Judd Hirsch e Peter MacNicol, que já entraram em diversos filmes e séries televisivas.

Podem encontrar mais detalhes na página oficial da série (ou ver vários segmentos video de filmes com a série e sobre os actores) em:

`http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/`

O programa tem gerado tanto interesse que não podemos deixar de pensar no seu potencial educacional: que efeito poderá ter nos alunos, nos pais, na sociedade em geral? Muitas pessoas pensam, e eu também, que a sociedade pode passar a ter mais interesse e respeito pela matemática com uma manifestação tão mediática da sua diversidade e da sua eficácia. Foi nesta ordem de ideias que surgiu um projecto pedagógico apoiado pelo NCTM e por uma empresa de calculadoras, para explorar o potencial pedagógico de tal série: "o programa foi desenhado especificamente para ajudar os estudantes (e seus pais) a reconhecer quão relevante a matemática é para as actividades de todos os dias e compreender a importância que o assunto tem no seu sucesso futuro. Ligando a matemática usada em cada episódio de NÚM3ROS a actividades de sala de aula para professores, estes podem aumentar o interesse dos estudantes por esses exemplos realistas. Cada actividade tem origem na matemática usada em cada programa televisivo e foi criada por professores e matemáticos especialmente para os anos de escolaridade 7 a 12."

Na página oficial da série já se podem encontrar exemplos das primeiras actividades propostas.

Esperemos que esta série dure muitos anos, cada vez com maior sucesso, e que venha a ser transmitida em Portugal, também em horário nobre.

Jaime Carvalho e Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

É verdade que já passaram alguns anos desde que frequentámos a licenciatura em Matemática. É verdade que alguns professores que tivemos foram matemáticos reconhecidos e professores atentos. É verdade que já esquecemos muito do que então aprendemos. Mas também é verdade que nessa altura desenvolvemos um espírito de dedução rigoroso: partindo de um conjunto de premissas e usando regras válidas de raciocínio lógico chegávamos a determinadas conclusões. O rigor era uma das palavras- chave. E, pasme-se com esta ingenuidade, ficámos a pensar que os matemáticos deviam personificar este rigor de raciocínio não só para demonstrar um dado teorema, mas também na análise de argumentos e na construção de conclusões. Ficámos pois perplexas ao ler muitas das afirmações feitas por Nuno Crato, no seu livro O 'Eduquês' em discurso directo. Por exemplo, considera que um comentário que afirma que as provas de aferição não servem para avaliar os alunos, as escolas ou os professores e que também não avaliam todas as competências que se espera que a escola desenvolva, é o mesmo que dizer que não servem para nada.

Também sabemos que a verdade não é absoluta e que a veracidade de uma afirmação depende da axiomática em que nos situamos. Por isso, pasmamos com o modo como se reduz a visibilidade de algumas premissas, de modo a justificar a suposta evidência de algumas afirmações. O autor (ver págs. 77-79) depois de transcrever três das competências gerais (1, 2 e 10) e duas das competências específicas do tema Estatística e Probabilidades enunciadas do Currículo Nacional – Competências Essenciais, e de adjectivar este documento de vazio sobretudo em matemática, sugere que tudo, "até mesmo a harmonia corporal", pode ser aplicado nas metas de um curso de actualização de gestores ou mesmo numa escola de detectives ou num retiro de meditação. Efectivamente os gestores devem ter desenvolvido todas as competências exigidas no Ensino Básico, mas dificilmente se poderá justificar a pertinência de se definir para essa formação a atenção em torno de "a aptidão para calcular áreas de rectângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas.", e esta também é uma competência enunciada no Currículo Nacional (p. 63) que não nos parece que possa ser considerada vazia de matemática. Ainda mais improvável parece-nos um retiro de meditação com o objectivo de desenvolver "a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais ou reais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo". (Currículo Nacional p. 61)

Mas não é só na falta de rigor de raciocínio e de precisão da "teoria" que nos situamos. É também nas afirmações magistrais que não são justificadas. Como por exemplo "A excessiva contextualização do ensino elementar da matemática tem sido um obstáculo ao sucesso dos estudantes em níveis cognitivos superiores e pode ter influência negativa de maior importância do que se supõe" (p. 73). Com esta o Freudenthal deve dar voltas no túmulo! Já para não falar na concepção holandesa de ensino e aprendizagem da matemática – conhecida como matemática realista – que é implementada em todo o país. E note-se que os holandeses têm obtido bons resultados nas avaliações comparativas internacionais.

O livro de Nuno Crato pode ser útil para aferir a nossa capacidade de elaborar raciocínios rigorosos e analisar a validade de argumentos. Por outro lado e subscrevendo o autor consideramos que "quando o que se escreve é tão geral que nada restringe, então o que diz é inútil" (p. 79). Mas interrogamo-nos se não será este o caso de muitas das afirmações que aqui encontramos vindo-lhes a generalidade da descontextualização em que são colocadas. Porque será?

Ana Luísa Paiva
Joana Brocardo
Manuela Pires

GeoGebra

GeoGebra é um software de geometria dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg.

É um programa livre e é possível fazer o download gratuito a partir do site `http://www.geogebra.at/`

O ecrã inicial do GeoGebra apresenta normalmente duas janelas: uma delas, o ecrã de gráficos, com um sistema de eixos; a outra, que pode ser escondida, é uma janela onde vão aparecendo indicações sobre os objectos à medida que vão sendo construídos, identificando quais os objectos livres, quais os dependentes e quais os auxiliares, indicando imediatamente coordenadas e equações, comprimentos e áreas, etc. (figura 1).

Os comandos podem ser dados de dois modos diferentes: utilizando os botões que aparecem na barra de menus (figura 2) ou directamente na barra de Entrada escolhendo em Comando, aquele que vamos utilizar (figura 3).

Cada botão tem associado um menu descendente com as várias opções disponíveis (figura 4).

O GeoGebra atribui automaticamente um nome a cada objecto que é construído

Posteriormente é possível redefinir um objecto criado, ou alterar o seu nome.

Quando a figura *ultrapassa* as dimensões do ecrã não surgem os elevadores a que estamos habituados, mas a área de visualização pode ser alterada, movimentada, ampliada ou reduzida através das vários opções associadas a um dos botões da barra de menus.

No GeoGebra vai encontrar objectos: os pontos, as rectas, os segmentos, estes com algumas opões interessantes, como a possibilidade de construção de um segmento a partir de um ponto e com um dado comprimento, os polígonos (não há nenhum comando que permita a construção directa de polígonos regulares, como acontece no Cabri, por exemplo), as semi-rectas, os vectores, as circunferências.

As circunferências podem ser definidas pelo centro e um ponto, o centro e o raio, ou três pontos. Também é possível traçar arcos: semicircunferência dados os extremos do diâmetro; arco dados três pontos; arco dados o centro e dois pontos, e ainda construir sectores circulares e cónicas dados cinco pontos.

As construções são as usuais neste tipo de programa: ponto médio, bissectriz, mediatriz, recta perpendicular e recta paralela, e outras não tão habituais, como seja a recta polar e as tangentes a uma circunferência a partir de um ponto.

As transformações geométricas possíveis são a reflexão, a simetria central, a rotação, a translação e a homotetia.

A determinação da distância entre dois pontos, entre duas rectas, entre um ponto e uma recta, a amplitude de um ângulo ou a construção de um ângulo com uma dada amplitude são possíveis neste programa.

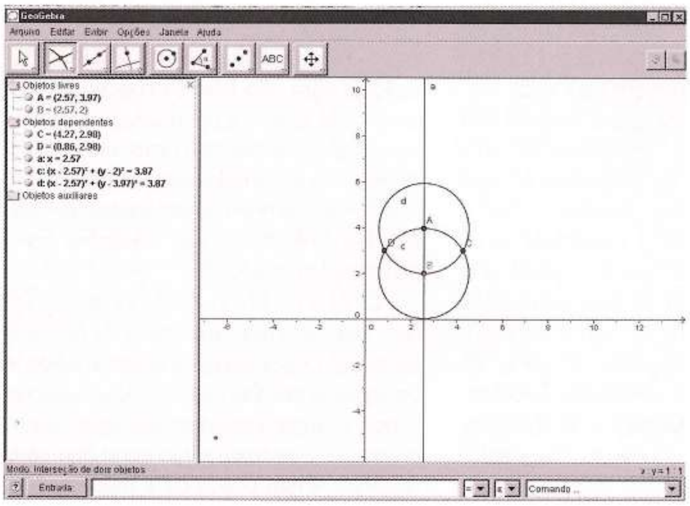


Figura 1.

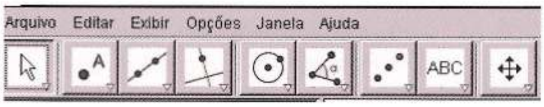


Figura 2.

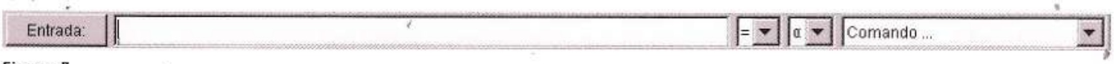


Figura 3.

Figura 4.

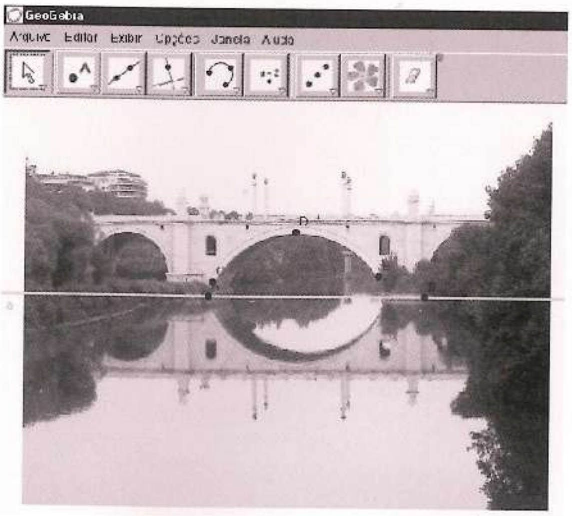


Figura 5.

Figura 6.

Há uma opção interessante no GeoGebra que é chamado o *slider*. O *slider*, dizem os autores, é apenas a representação gráfica de um número, ou ângulo, livre.

Trata-se de um segmento com um dado comprimento onde se movimenta um ponto. Os extremos do segmento representam os extremos de um intervalo previamente fixado e o número associado varia nesse intervalo com a movimentação do ponto.

Naturalmente que o programa admite a introdução de texto e também de imagens. A introdução de imagens possibilita a modelação de situações do dia a dia (figura 5).

O histórico, *revisão* da construção efectuada, aqui pode surgir passo a passo ou automaticamente, fazendo Play (figura 6).

Também se pode visualizar a sequência de comandos que foram efectuados durante a construção.

É possível escolher o idioma de trabalho. A versão portuguesa está em português do Brasil. Nos outros idiomas a ajuda está traduzida. Na versão portuguesa a ajuda está em inglês.

Tanto quanto me foi dado experimentar este programa lamentavelmente não permite animações nem macros.

O GeoGebra é um dos recursos indicados no projecto Pencil de que a APM é um dos parceiros.

Navegando na Internet

Chronomath

http://www.chronomath.com/

Site muito interessante contendo uma *cronologia das matemáticas*. O seu autor diz que "ensinar Matemática levanos a considerar como incontornável o conhecimento de certas datas e trabalhos fundamentais que marcaram a sua história desde a Antiguidade até aos nossos dias". Tem uma local onde é possível pesquisar um nome, uma noção ou um conteúdo quer por ordem alfabética, quer por período de tempo. O site tem imensas imagens, animações em java, exercícios, bibliografia e muito mais.

Convergence

http://www.mathdl.org/convergence/1/

Diz-se no site que *Convergence* é um magazine da Mathematical Association of America onde a matemática, a história e o ensino interagem. Pretende ser um recurso e um forum para professores interessados em utilizar a história da Matemática como uma ferramenta de ensino/aprendizagem. Inclui entre outros, artigos sobre aspectos ou conceitos de história com interesse para a aprendizagem; partilha de experiências de sala de aula; animações para utilização com os alunos; traduções de artigos e comentários ; discussões sobre problemas de contexto histórico; revisão de livros, materiais, websites, ...

Obras Raras

http://www.obrasraras.usp.br/

Projecto da Universidade de São Paulo. Possui um conjunto de obras raras e especiais digitalizadas.

Kali

http://geometrygames.org/Kali/index.html

O programa Kali, já com alguns anos, destina-se à construção de padrões e frisos. Neste momento está disponível uma versão mais recente, a versão5.1. É um programa de utilização livre.

Cabri 3D 1.2.1.

Nova versão do Cabri 3D que entre outras coisas novas inclui animação, redefinição de pontos e a possibilidade de através de um único comando efectuar a planificação de qualquer poliedro convexo.

Trinca espinhas

http://www.projetozk.ufjf.br/base_p/ensaios/ensaio3/atv_trinca.htm

Neste site do projecto ZK — Informática Educativa, coordenado por um colega brasileiro da Universidade Federal de Juiz de Fora, encontra-se uma adaptação do ... Trinca-Espinhas!

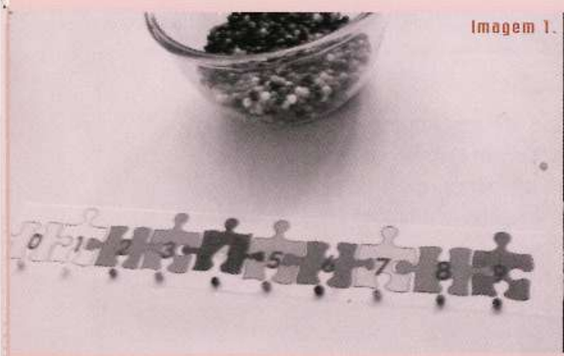


Imagem 1.

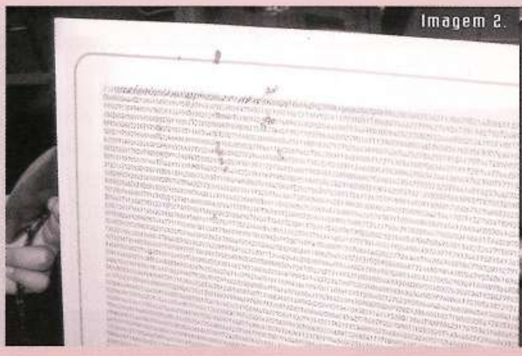


Imagem 2.

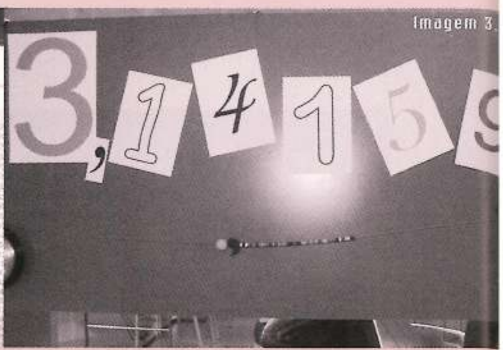


Imagem 3.

3.14 ou 14.3

No dia 14.3 data que nos EUA se escreve 3.14 comemora-se o dia do π. O Pavilhão do Conhecimento associou-se a estas comemorações e apresentou alguns módulos que permitem explorar vários aspectos deste número curioso, que tanto tem desafiado matemáticos de todos os tempos. A equipa da E&M foi espreitar para poder contar!

Na parte da manhã, os convidados de honra foram os alunos da Escola Básica 2,3 Dr. Rui Grácio de Montelavar já que a inspiração para alguns dos problemas apresentados surgiu no decorrer de uma reunião de trabalho realizada nesta escola no âmbito do projecto PENCIL.

Os alunos de quatro turmas de 6º ano chegaram ao Pavilhão por volta das 11:00 acompanhados por um grupo de professoras da sua escola. O murmúrio de vozes a subir a rampa anunciou a sua chegada. Vinham animados ainda que contrariados com a *bolacha* vermelha, contendo o símbolo do número celebrado, ao peito: "Parece do infantário" queixavam-se alguns.

Foram recebidos no *foyer* do Pavilhão do Conhecimento onde duas monitoras os aguardavam para uma conversa introdutória sobre o número π e para os desafiarem para a primeira actividade.

Um π às cores

O Pavilhão do Conhecimento propôs-se iniciar neste dia a construção de um longo colar que constituirá uma representação visual e colorida do número π. A cada algarismo atribuíram uma cor (imagem 1) e num quadro registaram as primeiras casas decimais daquele número (imagem 2). Estes alunos iniciaram a construção introduzindo no fio uma sequência de missangas coloridas, conforme o código criado para o efeito, riscando no quadro os dígitos já representados. Cabe aos próximos visitantes a tarefa de continuar a sequência (imagem 3).

Nesta altura a fome já começava a apertar e a malta está a crescer, pelo que nunca se faz rogada para provar uns biscoitos. E não é que os biscoitos tinham a forma do tal número π?!

O π na Cozinha

E no *foyer* do Pavilhão estava mesmo montada uma cozinha! Havia forno, micro-ondas, lava loiças e muitas formas.

Depois de provarem uns deliciosos biscoitos com a forma do π, os alunos tiveram ocasião de discutir alguns aspectos interessantes com os *cozinheiros* de serviço. Sabendo os custos das pizzas média e familiar, o que compensa comprar: duas médias ou uma familiar? E que quantidade de massa temos que fazer para cozinhar uma tarte do tamanho desejado? Que caneca usar para cozer massa de bolo de chocolate no micro-ondas?

Mas os desafios não se ficavam por aqui e circulando livremente neste espaço os alunos foram encontrando outras propostas.

O Problema do Electricista

Uma grande bobina de cabo eléctrico estava à disposição dos visitantes com o seguinte desafio:

Será possível saber o comprimento do cabo eléctrico sem o desenrolar?

Fiéis à nossa disposição de sermos repórteres por um dia lá fomos de máquina fotográfica e mini-gravador conversar com três alunos, que de fita métrica em punho procuravam descobrir quantos metros de cabo eléctrico lá estavam (imagem 4).

E&M No *placard* têm ali um desafio, o problema do electricista. Começaram a resolver o problema?
A1 Sim.
E&M Acham que conseguem ter resposta?
A1 Não.
E&M Não?!?
A1 Conforme.
E&M Então, mas qual é a pergunta?
A1 Temos de determinar o comprimento do cabo eléctrico sem desenrolar.

(...)

E&M E vocês conseguem dizer-nos qual é o comprimento do cabo eléctrico?
A2 8820m.
E&M Ah! A sério? 8km? Como fizeram?
A2 Fizemos daqui, aqui [nota 1] que é ½, é 30 e daqui aqui 30 + 30 = 60 [diâmetro]. Agora *3 do pi que deu 180 e agora vezes 49 voltas deu 8820!

Imagem 4.

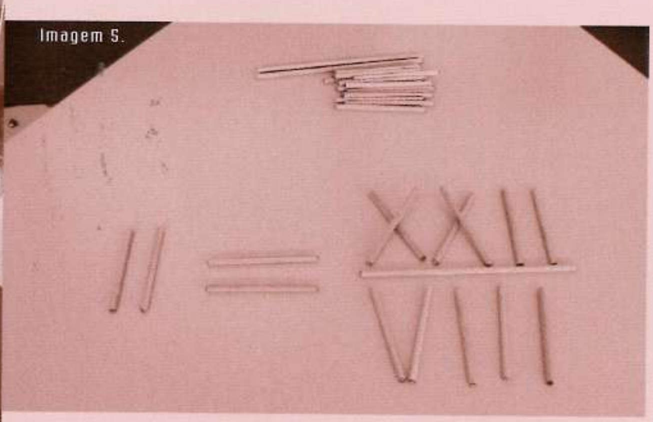


Imagem 5.

E&M 8820 quê?
A1 Ahhh! Cm.
E&M Então qual será o comprimento do cabo?
A1 8820cm!
E&M Muito bem! E agora como é que vocês podiam comprovar se os vossos cálculos estavam certos? Imagina que se tinham enganado? Como é que faziam?
A1 Fazia a conta outra vez.
E&M Fazias a conta outra vez, está certo! Mas como podem ter a certeza que estavam certas? Há pouco olhávamos para ali e o cabo não tinha ar de ter 8km pois não? Portanto havia qualquer coisa que não estava bem.
A1 Era os cm.
E&M Era os cm em vez dos metros. E se vocês não tivessem tido esta percepção, como é que podíamos ver que realmente tinha esse comprimento.
A2 Desenrolando!
E&M Exactamente.
A1 E medi-lo!

Tal como os alunos, fomos ver os outros desafios.

Sobre rodas

Numa competição paraolímpica quantas voltas dão as rodas de uma cadeira de rodas quando ela percorre 100m?

Desafios com o Número π

Com os palitos também se desafia o π. Movendo apenas um palito torna a igualdade aproximadamente verdadeira (imagem 5).

Foi já no exterior do edifício que os alunos encontraram um último desafio.

Corda à volta da Terra

Quem não conhece este problema publicado na *E&M* n°11?

Temos uma corda bem justa à volta da Terra, no equador, por exemplo. Se acrescentarmos um metro à corda e a esticarmos uniformemente, ela deixa de estar junta e passa a haver uma folga. Que animal consegue passar entre a corda e o chão?

No exterior do Pavilhão estes convidados especiais tiveram ocasião de acrescentar um metro, não ao perímetro da Terra, mas ao perímetro das grandes esferas que decoram a zona da fonte, no exterior do Pavilhão, e verificar com os seus próprios olhos e braços que tipo de animais conseguem passar por baixo da corda (imagens 6 e 7).

E como sempre que se explora este problema o resultado surpreendeu os experimentadores.

O ambiente e os comentários que fomos ouvindo deixaram-nos a sensação que esta foi uma manhã bem passada para estes alunos que vieram experimentar fazer matemática fora da sala de aula. Para nós, repórteres amadoras, valeu a pena ir até lá ... e não só para provar aqueles deliciosos biscoitos!

Sentimos ao longo desta manhã que existem neste momento relações fortes de trabalho e (atrevemo-nos a dizer) cumplicidade entre o Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva e as escolas participantes no Projecto Pencil. Para além dos professores da escola que aqueles alunos representavam estavam professores de outras escolas envolvidas neste projecto.

Na verdade, logo pelas 9.30h, um grupo de professores assistiu a uma vídeo-conferência sobre o GeoGebra e o GeoNext, que tinha o *pequeno* problema de uma parte significativa ser falada em alemão. Antevendo esse problema, o responsável pelo Departamento Educativo do Pavilhão, António Gomes da Costa tinha convidado Branca Silveira para apresentar algumas das potencialidades dos dois programas e, como alguns dos presentes já tinham iniciado a exploração dos mesmos, resultou um bom momento de partilha *geométrica*. Professores e responsáveis do Pavilhão aproveitaram ainda outros momentos para ir conversando sobre os desenvolvimentos dos trabalhos nas suas escolas. E olhem que ficámos convencidas que muita coisa interessante está para acontecer no âmbito deste projecto!

Mas afinal o que é o Projecto Pencil, perguntarão legitimamente muitos dos nossos leitores. Pois bem, a nossa reportagem não ficaria completa se este aspecto não fosse esclarecido, pelo que pedimos ao seu responsável que fizesse uma breve descrição do projecto e também aos professores Escola Básica 2,3 Dr. Rui Grácio de Montelavar que nos contassem sobre a sua participação.

Terminamos com um convite ... Vá até ao Pavilhão do Conhecimento e acrescente a cor correspondente ao algarismo que se segue no longo fio de missangas do número π.

Imagem 6

Notas

1 Mediram o raio no círculo lateral da bobina, desde a ranhura na madeira da bobina até ao orifício do centro.

Ambos os *softwares* de geometria dinâmica são de distribuição gratuita e pode fazer o seu o seu *download* no *site* da APM a partir do *link* para o projecto Pencil. O primeiro caracteriza-se por ser um *software* que reúne geometria, álgebra e cálculo. Na secção das tecnologias desta revista encontra mais informação sobre estes programas.

A equipa da revista

O Projecto Pencil, o Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva e as Escolas

A Matemática é uma ciência muito rica mas que, muitas vezes, se torna complicada aos olhos dos alunos. A construção de modelos matemáticos, que permitam a visualização e manipulação, é um instrumento poderoso para tentar ultrapassar os obstáculos mais comuns que os alunos encontram nesta ciência. Estes modelos têm um lugar privilegiado nos museus de ciência, podendo despertar nos jovens a curiosidade científica e a vontade de saber mais. A articulação com o trabalho realizado nas escolas, onde os modelos estão presentes, mas por vezes sob outras formas, trará certamente mais valias para a cultura científica. Pensado como uma forma de aproximar as escolas e os Centros de Ciência, o projecto europeu Pencil (Permanent European Resource Centre for Informal Learning) foi implementado em Portugal abordando o ensino/aprendizagem da Matemática.

Este projecto poderá revelar-se uma mais valia no desenvolvimento de materiais didácticos por forma a tornar o ensino mais rico. Trata-se de um projecto-piloto que envolve algumas escolas[1], o Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva e outros parceiros[2] que, posteriormente, se pretende alargar a outros Museus de Ciência e escolas do país.

As escolas podem utilizar os recursos disponíveis, em Museus e Centros de Ciência, para dinamizar e promover o sucesso do ensino, concretamente, da Matemática. Estreitando a interacção entre os diversos intervenientes (escolas e Pavilhão do Conhecimento), os professores e alunos podem potenciar a utilização de exposições interactivas como auxílio de compreensão de conteúdos. Assim, o conjunto de processos de ensino-aprendizagem que decorrem em ambientes formais — escolas, como em ambientes informais — Pavilhão do Conhecimento, sairá valorizado. É legítimo esperar que uma visita à Exposição *Matemática Viva* desperte nos alunos interesse por aprender Matemática, levando-os a procurar relações entre módulos e conteúdos matemáticos, efectuar verificações de algo que já conheçam ou explorar módulos nas suas mais variadas vertentes. No entanto, esta exploração dos conteúdos expositivos pode e deve ser abordada em todas as suas vertentes. Neste sentido, professores e monitores do Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva unem esforços para desenvolver actividades, a realizar quer no espaço sala de aula quer no Pavilhão, analisando formas de abordagem a determinados conceitos em módulos existentes ou criando módulos novos, de acordo com o enquadramento curricular. Por um lado, o Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva tenta investigar e avaliar a utilização dos módulos em função da realidade escolar; por outro lado, os professores empreendem uma exploração de módulos em ambientes formais.

Desta forma, o Projecto Pencil conjuga as escolas e os centros de ciência para aproximar os jovens da ciência e da tecnologia mediante actividades e experiências educativas, apoiadas nas interacções experimentais e lúdicas.

O trabalho de cooperação é um aspecto fundamental a ter em conta e que se pretende que perdure para além da execução deste projecto. A partilha, quer de saberes quer de experiências, numa correspondência biunívoca, a todos une e enriquece na concretização deste desafio.

Notas

1 As escolas participantes no Pencil são: EB1 João Beare, EB 2,3 Nery Capucho, EB 2,3 Dr. Rui Grácio, Esc. Sec. c/3°C Padre Alberto Neto, Esc. Sec. c/3°C Padre António Vieira e Esc. Sec. da Amadora.

2 Os parceiros no Projecto Pencil são para além do Pavilhão do Conhecimento e das escolas, a APM, Atractor, CIESE e SPM.

A Equipa do Projecto PENCIL do Pavilhão do Conhecimento — Ciência Viva

E.B 2, 3 Dr. Rui Grácio e o Pencil

Em Maio de 2005 assumimos perante os representantes do Conselho Executivo da Escola, da APM e do Pavilhão do Conhecimento, o compromisso de integrar o Projecto Pencil e em Setembro de 2005 iniciámos as nossas reuniões. Estávamos entusiasmadas e contentes por termos conseguido um tempo semanal nos nossos horários destinado ao projecto. Ingenuidade a nossa! Rapidamente sentimos quão limitativos eram os 45 minutos *ganhos* para o seu desenvolvimento. Idealizar, discutir, criticar, formalizar e construir materiais foram fases que estiveram presentes na elaboração das tarefas que nos permitiriam leccionar o tema escolhido: o Cilindro.

Entre Setembro de 2005 e Fevereiro de 2006 para além das nossas reuniões semanais, houve encontros de trabalho com os vários parceiros do projecto. As interacções estabelecidas nestes encontros contribuíram para analisar o trabalho desenvolvido segundo diferentes pontos de vista dando-lhe uma dimensão bastante mais rica. Durante estas reuniões, sentia-se que o trabalho era encarado por todos como *seu*. Este espírito de colectivo levou a que o Pavilhão do Conhecimento e a E.B. 2,3 Dr. Rui Grácio se unissem numa actividade conjunta (dia do π).

Em fins de Fevereiro de 2006, tivemos de colocar um *ponto final* na nossa produção. Levadas pelo entusiasmo fomos idealizando tarefas esquecendo-nos do tempo que tínhamos para as implementar. Seleccionámos então 13 tarefas que nos pareciam permitir levar os alunos a sentir, a pensar, a decidir, a criticar, a comunicar ... enfim, a aprender.

Em Março de 2006, no dia do π, enquanto se esperava pelos autocarros, que nos conduziriam ao Pavilhão do Conhecimento, ouvia-se: *Pi ..., 51 mil milhões de algarismos ..., se cada algarismo medir 4mm o comprimento do Pi será de 20000 Km ..., é como ir daqui a Beja 100 vezes ..., é bué grande!*

Chegados ao Pavilhão do Conhecimento, foi com alegria que vimos que algumas das *nossas* tarefas tinham servido de fonte de inspiração bem como se haviam unido a outras que iriam permitir aos nossos alunos um dia cheio de desafios. E parece que foi! Já de regresso à Escola ouvia-se: ... *podíamos cá voltar!...*

São estes pequenos episódios do quotidiano que nos fazem não desanimar e nos permitem sentir que não foram em vão as muitas horas utilizadas. Dão-nos vontade e força para continuar.

Em Maio de 2006, esperamos terminar esta unidade didáctica e concluir que o trabalho foi positivo e a aprendizagem bem sucedida.

A equipa do Projecto Pencil da E.B. 2,3 Dr. Rui Grácio

Novas habilitações profissionais para a docência: avanço ou retrocesso?

No passado dia 13 de Março teve lugar no Salão Nobre da Reitoria da Universidade de Lisboa a apresentação do documento *Habilitações profissionais para a docência*. É esta apresentação, e a discussão que se lhe seguiu, que o jornal *Público* comenta na sua edição de 14 de Março.

O referido documento, que está disponível no site do Ministério da Educação (ME), define que terá habilitação profissional para a docência quem cumulativamente satisfizer as seguintes condições: tiver uma licenciatura; adquirir um determinado número de créditos ECTS na disciplina/área de conhecimento; e completar com aproveitamento um curso de formação profissional para o ensino, organizado de acordo com critérios definidos pelo ME. Para efeitos de recrutamento, é ainda necessário obter aprovação numa prova que incidirá sobre conhecimentos e competências e será da responsabilidade do ME. No caso dos educadores de infância e dos professores do 1° ciclo prevê-se que a qualificação académica nas componentes disciplinares e profissional seja integrada. Para os restantes níveis de ensino prevê-se que a qualificação profissional possa ser obtida num segundo ciclo de estudos superiores.

O artigo do *Público* realça concordâncias e discordâncias manifestadas durante a sessão de apresentação. As críticas referidas incidem principalmente no receio de que esta proposta se traduza num "abaixamento da qualidade" da formação, sobretudo na dos educadores de infância e dos professores do 1° ciclo. Os consensos, referem-se ao exame que, segundo alguns dos presentes, permitirá perceber qual o nível de conhecimentos dos licenciados.

Às reacções referidas na notícia podem-se juntar muitas interrogações. Por exemplo:

— porquê a organização não integrada da formação académica e profissional em todos os níveis de ensino? Voltamos ao tempo do tão questionado racionalismo técnico em que primeiro vem a teoria, depois a teoria sobre a prática e no *fim* a prática?

— o que é e quanto tempo dura o referido curso de formação profissional?

— acredita-se mesmo que através de provas nacionais, por melhor que sejam, seja possível avaliar e garantir que um candidato a professor tenha as competências mínimas necessárias ao exercício da profissão de professor?

— as instituições de ensino superior não estarão a ser relegadas para um papel secundário, muito restrito, ao estabelecer contratos que o Ministério propõe de acordo com as necessidades que ele próprio identifica? Não estará a ser menosprezado o saber destas instituições?

Na notícia são indicados dois pequenos comentários que manifestam a sua concordância com o exame. Num primeiro, usando um estilo muito apreciado por algumas pessoas, afirma-se que "a avaliação só pode preocupar as instituições que estão a fazer um mau trabalho". No segundo, diz-se que o exame "é importante para saber se os licenciados saem com 'determinados conhecimentos'". Perguntamo-nos: quando será que se percebe o que é que um teste pode avaliar e se deixa de confundir os resultados de um teste com a avaliação de uma instituição?

Tudo isto veio a propósito do que se planeia para a formação inicial de professores, um assunto que nos preocupa e merece ser considerado com toda a seriedade. Lembramos que o documento está em discussão. Talvez o leitor o queira analisar melhor e contribuir para a organização de propostas de alteração. Quem sabe?

Joana Brocardo
Helena Rocha

Ensino superior contra planos para formação de professores

PROPOSTA DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO EM ANÁLISE

Tutela propõe cursos diferenciados em função do nível de ensino a leccionar

BÁRBARA WONG

As universidades e politécnicos que têm cursos de formação de professores estão preocupados com a proposta do Ministério da Educação (ME) que pretende alterar as condições de formação inicial e de acesso à profissão de professor. As mudanças deverão passar também por uma prova nacional para os candidatos à docência. Os "princípios orientadores" da formação foram ontem apresentados, na reitoria da Universidade de Lisboa, pelo secretário de Estado da Educação, Valter Lemos.

Uma das coisas que a tutela propõe é que os educadores de infância e professores do 1.º ciclo do ensino básico tenham uma formação diferente dos restantes docentes, que farão um segundo ciclo de formação profissional.

Actualmente a formaç[...] professores varia entre qu[...] cinco anos e é leccionada e[...] versidades e politécnicos. [...] aplicação do processo de Bo[...] que prevê a harmonização do [...] no superior europeu, é necessário fazer alterações à formação inicial. A proposta é que os futuros educadores de infância e professores do 1.º ciclo tenham uma formação única de um ciclo, que corresponde à licenciatura, com 240 créditos (que correspondem a quatro anos), anunciou Valter Lemos.

Quanto aos futuros professores de 2.º e 3.º ciclo do ensino básico e [...] "Vejo com grande preocupação um documento que firma uma clivagem na formação de professores", confessa.

Manique lembra que a reivindicação para que todos os profissionais tivessem a mesma formação foi satisfeita em 1997, através de uma alteração à Lei de Bases do Sistema Educativo – por isso não compreende este retrocesso: "Não é adiantada (porque não existe) qualquer justificação para se regressar a níveis diferenciados, tanto mais que a complexidade dos primeiros anos [...] exige uma cada vez [...] ficação dos professores/ [...] desses níveis de ensino". [...]

[...] considera "inadn[...] desqualificação [...] professores".

Contrariando to[...] a presidente da co[...] [...] na Figueira, defende que "é [...] sário diferenciar aquilo que [...] ente", porque os educadores [...] essores de 1.º ciclo são profis[...]s generalistas.

[...] ter Lemos explica que o papel [...] nistério da Educação é fixar [...] uisitos mínimos e que caberá [...] tituições oferecer as formações que entenderem. Aquelas que quiserem poderão portanto propor aos seus alunos mais do que a licenciatura.

João Pedro da Ponte, da Universidade de Lisboa, receia que esta proposta se traduza num "abaixamento da qualidade" da formação porque as instituições vão oferecer o que a tutela propuser. ■

Algum consenso à volta do exame de admissão

O Ministério da Educação defende uma prova nacional para admissão à docência. Ontem em Lisboa, na reunião do secretário de Estado da Educação, Valter Lemos, com as instituições de ensino superior muitas vozes se levantaram a favor deste exame.

[...] conhecimentos" e que, além desta prova, deveria haver "outras periódicas", porque um professor deve estar sempre actualizado. A Federação Nacional dos Professores (Fenprof) é que tem dúvidas quanto ao exame de admissão à profissão. O Ministério da Educação, enquanto agente empregador, considera que a prova "vai ser um instrumento de qualidade que não põe em causa a validade dos cursos", declarou Valter Lemos. B.W.

In Público, 14 de Março de 2006.

Mais perto da APM em 2006

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM ou de actualização da quota.

Quadro 1

<table>
<tr><th>Sócio</th><th>Sócio residente no estrangeiro</th><th>Sócio Estudante</th><th>Sócio Aposentado</th><th>@-Sócio*</th></tr>
<tr><td>46,00€</td><td>50,00€</td><td>32,50€</td><td>36,00€</td><td>36,00€</td></tr>
<tr><td colspan="4">Revista Educação e Matemática impressa e on-line (saem 5 números por ano e uma delas é temática)</td><td>Revista Educação e Matemática on-line</td></tr>
<tr><td colspan="4">APMinformação impresso e on-line (4 números por ano)</td><td>APMinformação on-line</td></tr>
<tr><td colspan="5">Opção de assinatura da revista Quadrante impressa (2 números por ano — 10,50 €)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acesso à zona on-line para sócios</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa
Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras ou em materiais: 15% sobre o preço de venda ao público</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento</td></tr>
<tr><td colspan="5">Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção</td></tr>
</table>

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Instituições

Quadro 2

<table>
<tr><th colspan="3">Opções</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td>Opção 1</td><td colspan="2">Assinatura anual da revista Educação e Matemática (5 números)</td><td>35€</td></tr>
<tr><td>Opção 2</td><td colspan="2">Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>20€</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opção 3</td><td>A</td><td>Assinatura anual da revista Educação e Matemática (5 números); APMinformação (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)</td><td>46€</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>15€</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opção 4</td><td>A</td><td>Assinatura anual da revista Educação e Matemática — 2 exemplares de cada número (5 números); APMinformação (4 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)</td><td>66€</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)</td><td>15€</td></tr>
</table>

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `www2.apm.pt/portal/index.php?id=20017`

Loja APM on-line

Na loja virtual (`http://www.apm.pt`) pode encomendar publicações e outros materiais editados pela APM e ainda por outras editoras com as quais a APM tem protocolos. Visite-a, consulte o catálogo de produtos e as formas de pagamento, que incluem o Multibanco. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções