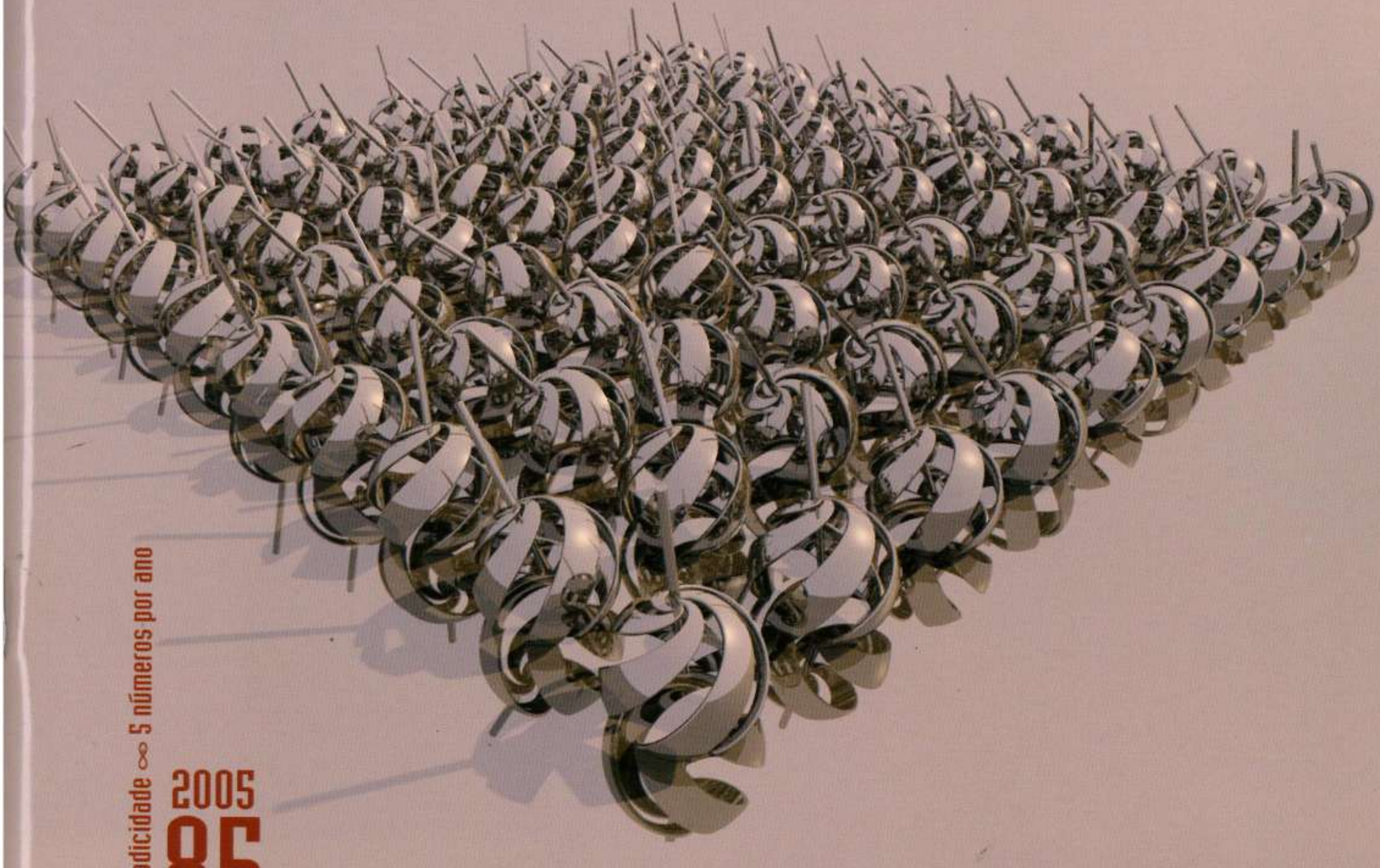
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



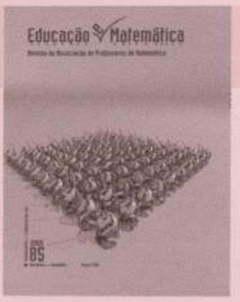
Periodicidade ∞ 5 números por ano

2005

85

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,50€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Novembro 2005
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051

Porte Pago

Sobre o número temático

Este número da revista tem por tema Números e Álgebra. É um tema que considerámos muito interessante mas difícil.

Convidámos Jaime Carvalho e Silva, professor na Universidade de Coimbra, para nos ajudar a pensar no tema e a planear esta revista temática.

Sobre a capa

A capa deste número poderia denominar-se *A batalha do pi*. Inicialmente foram colocadas sobre um plano 100 repetições de uma mesma figura básica, formando uma matriz de 10×10. Usaram-se então os 300 primeiros dígitos da expansão decimal de π, agrupados em sequências de três para obter uma matriz de *rotações* igualmente 10×10. Cada triplo na posição (i, j) desta matriz determina uma rotação espacial da cópia do objecto básico na posição (i, j) da matriz das cópias. O resultado é esta mistura de caos e regularidade, (lembrando a famosa formação militar, em quadrado, consagrada pelos romanos) que no fundo traduz graficamente a dificuldade de caracterizar *regularidades* na expansão decimal do número π.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Matos, António Fernandes, António José Mendes, Cecília Monteiro, Eduardo Veloso, Elvira Ferreira, Elza Santos, Fátima Mendes, Hélia Pinto, Hugo Menino, Isabel Rocha, Isabel Vale, João Pedro da Ponte, José Manuel Duarte, José Manuel Matos, Luís Reis, Manuel Lagido, Maria José Costa, Marta Pratas, Neusa Branco, Nisa Figueiredo, Paula Botas, Teresa Lucas, Teresa Pimentel.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

N1m3r0s para todos

Jaime Carvalho e Silva

Os números não mentem, diz um conhecido provérbio popular. De facto, os números têm assumido, aos olhos de todos, um papel fundamental na vida quotidiana. Quem sabe lidar bem com os números tem uma vantagem considerável.

Lamentavelmente esta vantagem muitas vezes não é reconhecida; ainda recentemente, um conhecido editorialista político, a propósito de uma falha informática dos serviços da Segurança Social exasperava-se deste modo: "já nem nos sobressaltamos por perturbarem com regularidade as nossas vidas. Afinal, a *informática* é coisa esotérica de especialistas que, para mais, lembra ... matemática." Não só a informática é, tal como a Matemática, um conhecimento essencial nos nossos dias que está muito longe de ser universal, como esta pedra maldosa atirada à Matemática faz com que seja especialmente complexo lutar contra dificuldades seculares que, não sendo sempre as mesmas, não se podem ignorar.

Segundo se conta, no século XV os alemães precisavam de ir para uma universidade italiana para aprender a multiplicar e a dividir pois na Alemanha só se aprendia a somar e subtrair. E em Itália aprenderiam provavelmente a multiplicar pelo método da gelosia e a dividir pelo método do galeão e aprenderiam a usar o ábaco. Hoje, a Aritmética e a Álgebra são muito diferentes, já não se usa a numeração romana, as letras são elegante e eficazmente usadas como variáveis, a calculadora veio substituir o ábaco e, pelo menos na sua vertente elementar, não são ensinadas na universidade. Contudo as dificuldades do seu ensino não serão menores e as dores de cabeça dos alunos não serão certamente menos agudas.

Os Números, o Cálculo e a Álgebra desempenham um papel fundamental no currículo e são áreas básicas para muitas outras como as Funções, a Estatística ou a Geometria Analítica. Na revista que têm nas mãos encontrarão excelentes estímulos para reflectir e tentadores convites para conhecer, desde o desenvolvimento do sentido do número até ao estudo das fracções, desde o lugar da Álgebra no currículo até às dificuldades recentes e menos recentes dos alunos portugueses, desde a Álgebra do tempo de Al-Khwarizmi até aos desafios mais recentes da tecnologia com o cálculo algébrico simbólico. Parece-me assim que, se o ensino da Aritmética e da Álgebra não é fácil, não há razões para que o não consigamos efectuar em condições satisfatórias.

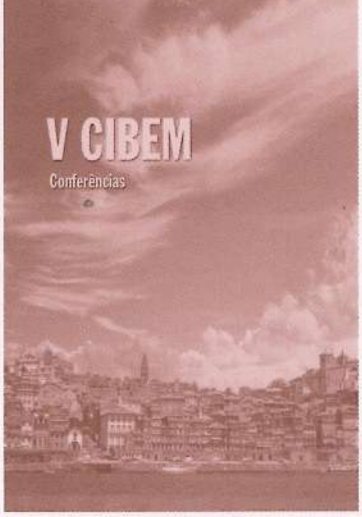
Nos diversos textos aparecem propostas importantes que, independentemente de concordamos ou não com elas a priori, deveriam ser estudadas com especial atenção. Na impossibilidade de as apresentar todas, chamo a atenção para as seguintes: ensinar álgebra de forma contextualizada, estimular os alunos a usar os seus recursos intuitivos na resolução de problemas, desenvolver uma visão mais estrutural das expressões algébricas usando a tecnologia, estudar muito cedo padrões como preparação para o estudo da álgebra, estudar fracções logo no 1° ciclo. Em dois dos textos chama-se ainda a atenção para a necessidade de perceber melhor como proporcionar aos alunos o desenvolvimento de aspectos mais elaborados do pensamento algébrico e de reflectir mais sobre o papel da Álgebra no currículo.

Permitam-me uma observação paralela: ao folhearmos as páginas desta revista, ainda por cima quando são dedicadas apenas a um tema, o dos Números e da Álgebra, reparamos que um professor precisa de dominar um vasto conjunto de áreas científicas, históricas e didácticas pelo que a necessidade de reflexão e actualização permanentes são óbvias. E as dificuldades actuais não podem ser ignoradas: há muitos engulhos na prática escolar que vão desde uma sobrevalorização dos cálculos algébricos ou das funções até à subvalorização da procura das regularidades e dos padrões que se entrelaçam com a Álgebra, ou das conexões entre a Álgebra e a Geometria.

A Matemática não se reduz aos Números e à Álgebra e estas não se reduzem aos cálculos numéricos e algébricos; é importante que todos, incluindo as autoridades responsáveis, tentemos perceber como podemos e devemos colaborar para que os cidadãos portugueses sejam realmente melhores a Matemática, nas suas diversas componentes, não como especialistas *esotéricos*, mas como cidadãos completos!

Os números não mentem. Talvez, mas mais importante do que isso é nós sabermos, todos, o que querem mesmo dizer.

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra



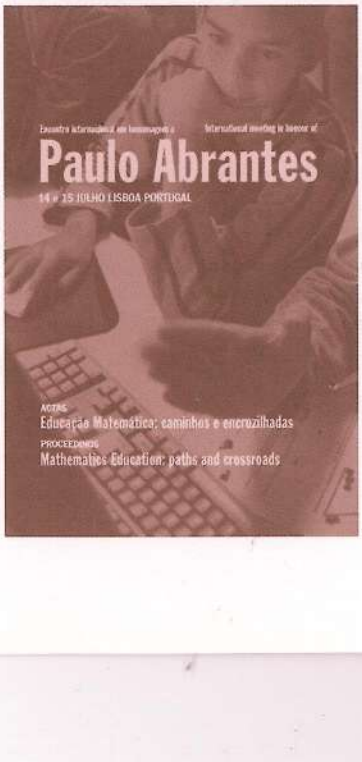
V CIBEM — Conferências

Organização: Henrique M. Guimarães e Lurdes Serrazina
264 pp. APM, Julho 2005
Sócio 7,50€ PVP 15,00€

Este livro foi publicado no âmbito do V CIBEM realizado no Porto em Julho passado e inclui os textos que a comissão organizadora recebeu, relativos às conferências aí proferidas. Inclui treze textos sobre temas muito variados, cinco correspondentes à totalidade das conferências plenárias e oito correspondendo a outras conferências.

O livro abre com a intervenção de Ubiratan D'Ambrósio *Sobre o CIBEM* que nos dá um relato da sua experiência pessoal relativa à criação do CIBEM, apresentando também considerações sobre a educação matemática na América Latina desde o período colonial até "ao reencontro ibero-americano" em meados do século XX. Os restantes textos são apresentados agrupados, juntando os que possuem alguma afinidade temática em quatro secções: *Panoramas na Educação Básica e na investigação na formação de professores*, *O professor de Matemática: desenvolvimento e acção curricular*, *Números e Geometria: propostas didácticas* e *Matemática e cultura*.

A primeira secção agrupa dois textos que traçam panoramas sobre educação básica, um do Brasil e outro da América Latina, de Célia Carolino Pires e Fredy Gonzalez respectivamente, e ainda um terceiro de Manuel Torralbo Rodriguez sobre a investigação na formação de professores em Espanha. A segunda secção contém os textos das intervenções de Ana Paula Canavarro, Fátima Guimarães, Pilar Azcárate e Salvador Llinares, todas eles envolvendo o professor, e a secção seguinte Números e Geometria: propostas didácticas inclui os textos de Encarnación Castro Martínez que nos dá uma contribuição na área do pensamento numérico e os de Carlos Mansilla e Eduardo Mancera ambos sobre Geometria. Encerra o livro uma secção com dois textos, um de Florêncio Villarroya que nos fala da *arte mudéjar* na península ibérica e da presença da Geometria nessa arte e outro de José Manuel Matos para mostrar a influência da Matemática na cultura com alguns exemplos encontrados em Portugal que relacionou com a Aritmética e com a Geometria.



Actas — Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas

Organização: Leonor Santos, Ana Paula Canavarro e Joana Brocardo
328 pp. APM, Julho 2005
Sócio 10,00€ PVP 20,00€

Actas do encontro internacional *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, uma iniciativa realizada em homenagem a Paulo Abrantes (1953–2003), que decorreu nos passados dias 14 e 15 de Julho na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Reflectindo múltiplos aspectos da obra desenvolvida por Paulo Abrantes, as actas contêm contribuições de diversos participantes em áreas como o *desenvolvimento curricular*, *experiência matemática*, *avaliação* e a *formação de professores*.

Estratégias de multiplicação

Uma experiência curricular de desenvolvimento do sentido do número

O projecto Desenvolvendo o sentido do número

O projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* visa aprofundar o estudo sobre o desenvolvimento do sentido do número nos primeiros anos de escolaridade (5-12 anos), bem como aspectos relacionados com o desenvolvimento curricular em Matemática e a prática dos professores. Mais especificamente pretende-se:

a) compreender o modo como as crianças desenvolvem o sentido do número, sobretudo em contexto de resolução de problemas;
b) identificar práticas profissionais e o tipo de currículo que favorecem o desenvolvimento do sentido do número (inteiros, decimais e fracções);
c) construir materiais curriculares facilitadores do desenvolvimento do sentido do número.

O projecto tem, assim, duas vertentes que, embora distintas se interligam e completam: desenvolvimento e investigação. Na primeira, com o objectivo de desenvolver o sentido do número em crianças entre os 5 e os 12 anos, a equipa do projecto tem vindo a construir, experimentar e avaliar tarefas numéricas (Equipa do Projecto DSN, 2005).

A equipa é constituída por docentes das Escolas Superiores de Educação de Setúbal, Lisboa e Leiria e educadores de infância e docentes do 1° e 2° ciclos do ensino básico de várias escolas do país.

Foram organizadas sub-equipas constituídas por dois ou três professores do terreno trabalhando em conjunto com dois professores das ESEs. A comunicação em cada sub-equipa é feita via Internet havendo, sempre que necessário, reuniões presenciais.

Periodicamente reúne toda a equipa para discussão de textos teóricos sobre o desenvolvimento do sentido do número e para reflexão conjunta do trabalho realizado (concepção e implementação das tarefas) e perspectivar o trabalho futuro.

Em 2003/04, ano de início do projecto, a elaboração de cada tarefa seguia normalmente as seguintes etapas:

1. um ou vários elementos da sub-equipa criavam ou adaptavam uma tarefa (elaborando uma ficha com indicações para o professor: ideias e procedimentos disponíveis e em desenvolvimento; ideias e procedimentos a desenvolver; sugestões para apresentação e exploração da tarefa; possíveis caminhos a seguir pelos alunos).
2. a tarefa era enviada via e-mail aos outros elementos da sub-equipa e, em interacção, aperfeiçoava-se a tarefa. Este aperfeiçoamento tinha várias fases até a tarefa ser colocada no sítio web do projecto.
3. implementação da tarefa na sala de aula.
4. reflexão e posterior reformulação da tarefa.

Como os professores trabalhavam em grupos de dois ou três, sempre que foi possível um conduzia a aula de apresentação da tarefa e o outro tinha o papel de observador. No final faziam o registo da situação e uma reflexão sobre a implementação da tarefa. Esta reflexão era alargada, de novo via e-mail, aos restantes membros da sub-equipa. De

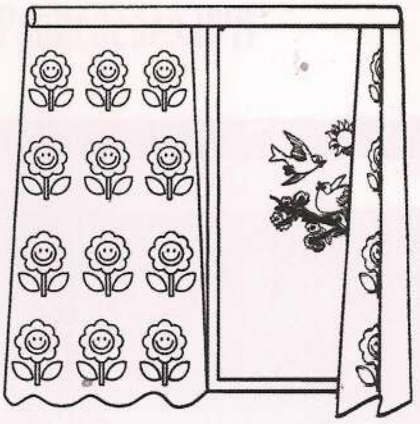


Figura 1. Uma das cortinas exploradas com os alunos

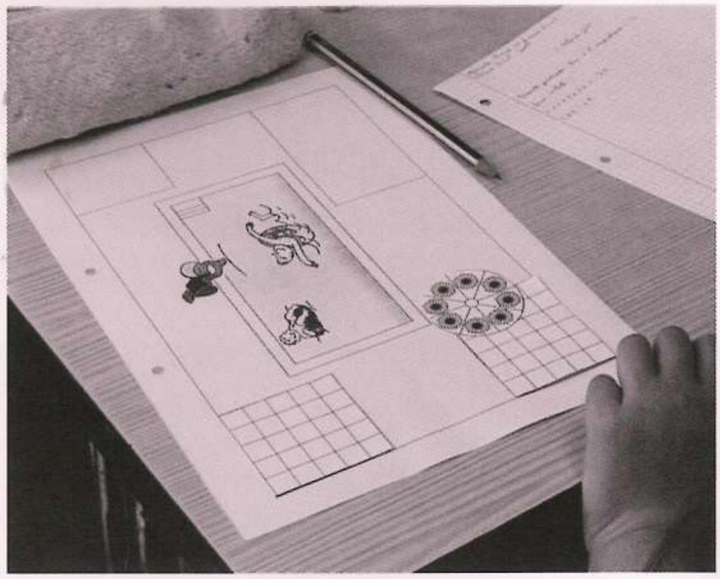


Figura 2. Os alunos reconstruindo os empedrados.

seguida, a tarefa era reformulada e colocada na página web a que todos os membros da equipa têm acesso. Só depois deste processo concluído é que se pensava noutra tarefa.

Em 2004/05 alterou-se a metodologia de concepção das tarefas. As etapas referidas mantiveram-se mas optou-se por planear uma cadeia de 3 ou 4 tarefas com alguma sequencialidade. Foi nosso objectivo que os alunos conseguissem aprendizagens conexas e sucessivamente mais abrangentes, alicerçadas umas nas outras. Pretendia-se que, numa lógica em espiral a competência matemática desenvolvida a partir da primeira tarefa fosse mobilizada na segunda e aí ampliada.

Esta opção fundamenta-se na ideia de trajectória de aprendizagem descrita por Simon (1995, citado por Dolk e Fosnot, 2001) que compreende uma interligação entre a construção, pela criança, de novo conhecimento matemático com as estratégias que utiliza na resolução de uma situação problemática, cujo contexto deve ser delineado de forma a estimular esse desenvolvimento progressivo do conhecimento dentro de um determinado tópico matemático.

Somos uma das sub-equipas do projecto e este artigo tem por objectivo explicitar o processo de produção de uma das tarefas no âmbito da respectiva cadeia, sua aplicação na sala de aula com identificação de aspectos relevantes ao nível das aprendizagens dos alunos e reflectir sobre as opções tomadas ao nível da organização do trabalho com os alunos e da exploração e condução da tarefa (discurso do professor e interacção estabelecida).

A cadeia de tarefas: Caixas de fruta; Cortinas e O pátio do João

O desenvolvimento de estratégias de multiplicação era a ideia principal para a construção da cadeia, visto que estávamos a trabalhar com alunos do 2.° ano de escolaridade. O reconhecimento de que são possíveis múltiplas estratégias para resolver um determinado problema é um indicador do desenvolvimento do sentido do número. Mas que problemas/tarefas seriam facilitadores do desenvolvimento das estratégias pretendidas?

Um dos princípios orientadores do nosso trabalho está associado à ideia de que os problemas devem surgir em torno de contextos conhecidos dos alunos, relacionados com as suas vivências ou experiências e que exijam do aluno um certo esforço de organização e elaboração, resultante, por exemplo, dos dados fornecidos ou forma de apresentação, de modo a que evoluam para estratégias mais elaboradas, mais sofisticadas, que levem à construção de mais conhecimento matemático.

No campo da multiplicação, para Dolk e Fosnot (2001), a transição entre o nível de cálculo por contagem e o cálculo por estruturação é estimulada pela utilização de modelos rectangulares em situações contextualizadas. A transição da multiplicação por estruturação para a multiplicação formal será auxiliada pela crescente capacidade dos alunos de raciocinar em termos das relações numéricas, das propriedades das operações que surgiram dos modelos utilizados.

Partir da disposição rectangular de objectos (organização por linhas e colunas) que aparece, por exemplo, nas caixas de fruta ou de vegetais, foi a nossa opção de contexto para a primeira tarefa *Caixas de fruta*. Prevendo-se que perante a questão "quantos estão em cada caixa" alguns alunos optariam pela contagem um a um (que não é multiplicação), esperava-se que outros efectuassem a contagem por conjuntos/agrupamentos ($3 + 3$ ou 2 colunas de 3 ou 2×3; $2 + 2 + 2$ ou 3 filas de 2 ou 3×2; ... .), o que se verificou. E com esta estratégia pôde iniciar-se a compreensão de relações matemáticas importantes como a propriedade comutativa (o resultado de 2×3 é o mesmo de 3×2). Na verdade, a exploração gradual desta propriedade permitirá, mais tarde ampliar o conhecimento das tabuadas (se já conhece o produto 3×2 da tabuada do dois, então passa a conhecer o produto 2×3 da tabuada do 3).

Aliás, nesta cadeia de tarefas, verificou-se que uma nova estratégia multiplicativa trazia o conhecimento de uma nova relação matemática.

Na segunda tarefa *As cortinas*, é apresentada uma sequência de janelas com cortinas enfeitadas com padrões rectangulares.

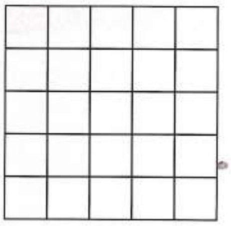


Figura 3. Primeiro empedrado

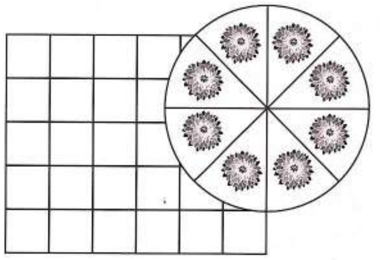


Figura 4. Segundo empedrado

Figura 5. Terceiro empedrado

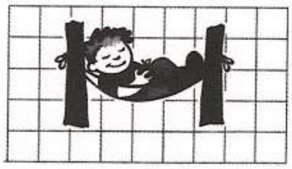


Figura 6. Quarto empedrado

A diferença significativa em relação à tarefa anterior é que nessa os alunos podiam responder às questões apenas recorrendo à contagem um a um ou à contagem por filas ou colunas pois os frutos estavam todos à vista, enquanto que nesta tarefa os objectos a contar não estão todos disponíveis.

Em cada janela uma das cortinas ou metade da cortina não está corrida o que estimula o aparecimento da estratégia da duplicação, para contar os enfeites da cortina quando ela está toda corrida (figura 1).

Ao pensar nos possíveis caminhos a seguir pelos alunos na tarefa *As cortinas*, surge como uma estratégia possível na contagem dos enfeites de uma cortina a seguinte: contando o que estava à vista 4 filas de 3 flores cada, logo a outra metade tem outras 4 filas, o que dá 8 filas de 3. Assim, surgem como representações possíveis:

$$8 \times 3 = 2 \times (4 \times 3) = 4 \times 3 + 4 \times 3$$

Estamos perante outra ideia matemática importante, ao se perceber que 8×3 pode ser calculado adicionando 4×3 com 4×3 (uso implícito da propriedade distributiva).

Surgiu então a 3.ª tarefa *O pátio do João* para apoiar o desenvolvimento da utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em situações que facilitam o cálculo.

A esta tarefa dedicamos o ponto seguinte onde se apresentam as suas especificidades no âmbito da cadeia construída. Pretende-se fazer uma reflexão acerca do trabalho colaborativo que conduziu à sua concepção e uma análise da sua aplicação na sala de aula, em particular ao nível das interacções estabelecidas e às aprendizagens conseguidas pelos alunos.

O caso da tarefa: O pátio do João

Como foi referido, a tarefa *O pátio do João* é a terceira da cadeia elaborada com o intuito de explorar noções de multiplicação a partir de situações de disposição rectangular. Esta tarefa, em particular, permite desenvolver o uso implícito da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Antes da sua aplicação as expectativas do grupo eram diferenciadas. A maioria dos elementos apresentava algumas reservas em relação à adequação dos conteúdos a explorar para crianças de 2° ano. O processo de discussão acerca das questões a colocar e da dinâmica de sala de aula a desenvolver foi por isso bastante participado. Depois da aplicação os receios iniciais desapareceram. Aliás foi depois da aplicação que verdadeiramente conseguimos perspectivar as potencialidades da tarefa. Por isso decidimos alargar a abordagem que inicialmente tinha sido prevista.

Dando um pouco ideia do processo de construção da tarefa como agora se apresenta podemos dizer que ela foi aplicada aos alunos em duas fases. Numa primeira fase com a duração aproximada de 1 hora foi feita a exploração de cada um dos empedrados que compunham o pátio. Foi distribuída aos alunos uma folha A4 com uma representação do pátio sem empedrados (figura 2) e sucessivamente os 4 recortes das porções com empedrado (figuras 3, 4, 5 e 6), questionando os alunos acerca do local onde estas encaixavam. Nesta exploração foram efectuadas as contagens das pedras de cada um, recorrendo a estratégias diversificadas e foram estabelecidas relações entre os empedrados (por exemplo o segundo empedrado pode ser obtido a partir do primeiro juntando uma coluna de 5, o que foi traduzido pelos alunos pela expressão $5 \times 5 + 5$ ou $5 \times 5 + 1 \times 5$). Depois de reunirmos, decidimos que seria proveitoso colocar questões adicionais aos alunos em relação ao contexto anteriormente explorado e que possibilitassem um aprofundamento da compreensão da propriedade distributiva, ao mesmo tempo que estabelecíamos conexões dentro da Matemática. Assim, numa segunda fase, solicitámos aos alunos que desenhassem pátios rectangulares em que o número total de pedras correspondesse a uma dada expressão (situação inversa daquelas que já tinham sido exploradas no primeiro momento).

Em relação à aplicação em contexto de sala de aula, o tipo de interacção estabelecida, a adesão dos alunos à tarefa e o tipo de respostas foram na generalidade semelhantes nas 3 turmas.

Depois de explorada a imagem do pátio do João que gerou grande curiosidade da parte dos alunos (pelas personagens, pelos objectos, pelas acções) foi-lhes pedido que colocassem na folha o primeiro empedrado (figura 2) e registassem o número de pedras e o processo de contagem. Rapidamente os alunos responderam: "São 25, porque $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$" ou "São 25, porque $5 \times 5 = 25$". Reparámos que parecem ter abandonado por completo estratégias pouco úteis de contagem, 1 a 1 ou 2 a 2, por exemplo.

Depois de distribuído o segundo empedrado (figura 3) questionámos os alunos: "Pensem no primeiro empedrado e no segundo empedrado, que relação existe entre eles? A esta questão que receávamos abstracta responderam:

"Tem mais 5 que o outro."
"O primeiro foi 5×5 e o segundo foi mais uma vez o 5, é 6×5."
"O segundo é $5 \times 5 + 1 \times 5 = 6 \times 5$"

Depois da exploração desta primeira relação, mais evidente para uns alunos do que para outros, foi relativamente fácil estabelecer relações para os empedrados seguintes (figuras 4 e 5). E o nível de participação de todos os alunos foi aumentando.

Em relação ao terceiro surgem dois tipos de resposta:

"Tem menos uma coluna, é $5 \times 5 - 1 \times 5 = 4 \times 5 = 20$"
"Este mais uma vez o cinco dá o primeiro ... Explica a tua ideia! Este é 4×5 mais 1×5 dá 5×5 que é 25."

No quarto empedrado os alunos encontram diversas relações. Alguns verificam relações de impossibilidade: "Se juntar 5×5 com 6×5 fica 11×5, não dá este, são muitas [pedras]!". Mais tarde referem: "O primeiro com o terceiro dá 45, é 5×5 com 4×5, dá 9×5, as colunas todas", e também: "Este [4° empedrado] é 9×5, menos 4×5, dá o primeiro [5×5]".

Na exploração dos 2°, 3° e 4° empedrados gostaríamos de salientar a importância que teve o facto de termos questionado os alunos em relação ao local onde estes poderiam ser colocados no pátio do João. Além de obrigar os alunos a identificar um local onde os empedrados coubessem, estimulou desde logo o estabelecimento de relações entre os empedrados. Curioso verificar que numa das turmas pouco depois de ter sido distribuído o segundo empedrado (6×5) um aluno diz:

"Já sei como vai ser o último professora.

Então diz lá como fizeste.

Eu pus e primeiro e o segundo em cima do último espaço e não dá ... mas tem duas colunas a mais ...

Consegues explicar melhor?

Este [o primeiro] tem 25 porque é 5×5 e este [o segundo] é 30 porque é 6×5, tenho de tirar duas colunas de 5 ... vai ter 45 pedras!"

Em relação à segunda parte da tarefa os alunos mostraram-se entusiasmados com a construção dos pátios a partir das expressões apresentadas. Contudo foi visível em alguns a dificuldade inicial em fazê-lo. Parece-nos por isso que esta componente do trabalho foi fundamental para conseguir uma consolidação das aprendizagens, permitindo reforçar a compreensão da propriedade distributiva em contextos de disposição rectangular. Na reflexão sobre a implementação desta tarefa, concluímos que, ao solicitar que desenhassem pátios rectangulares em que o número total de pedras correspondia a uma dada expressão (situação inversa: da expressão chegar à disposição rectangular), já se estava a trabalhar a noção de área, sem que essa tivesse sido uma ideia principal a desenvolver.

A Concluir

Parece-nos que a tarefa *O Pátio do João* oferece um contexto motivador e desafiante para os alunos, ao mesmo tempo que permite alargar a compreensão da operação multiplicação. Uma mais valia da tarefa parece estar centrada no desenvolvimento de capacidades de visualização de esquemas de disposição rectangular em relação à multiplicação de factores.

É importante referir que as crianças tiveram oportunidade de dar os primeiros passos na compreensão de relações numéricas na exploração das tarefas *Caixas de fruta* e *As cortinas* que já colocavam a enfâse na operação multiplicação. A noção de cadeia que apresenta implícita a noção de hierarquia é fundamental quando se pretende que determinada competência matemática vá sendo ampliada à medida que a experiência matemática dos alunos se torna mais diversificada.

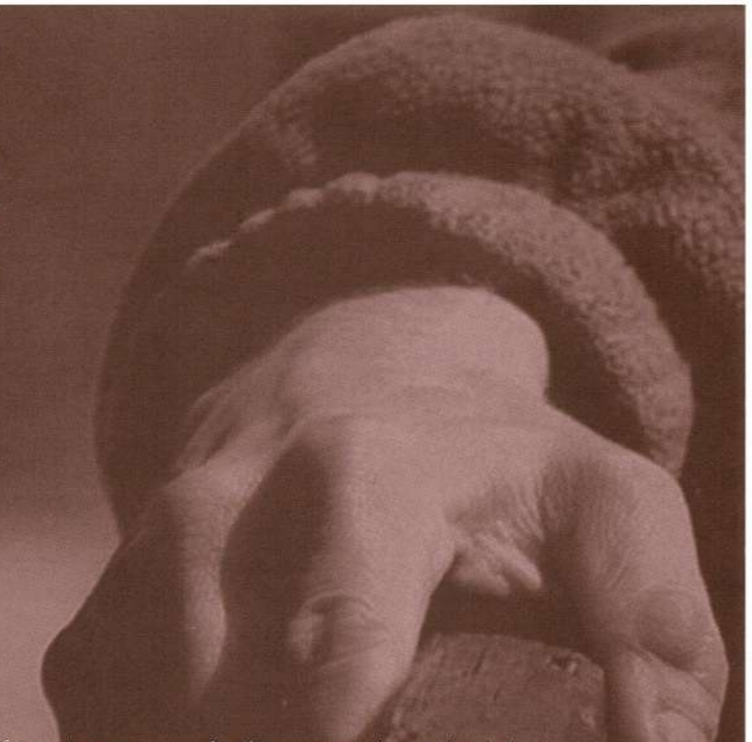
Gostaríamos de salientar a importância que tem o questionamento do professor na procura e justificação de procedimentos e estratégias de cálculo pelo aluno. Aliado a este questionamento parece-nos fundamental que diferentes estratégias utilizadas sejam confrontadas, uma vez que isso pode ajudar diferentes alunos a dar saltos qualitativos.

Bibliografia

Equipa do Projecto DSN (2005). *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares. Materiais para o educador e professor do 1.° ciclo*. Lisboa: APM

Fosnot, C. T. e Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Elza Santos, EB1 João Beare Marinha Grande
Hugo Menino, Escola Superior de Educação de Leiria
Isabel Rocha, Escola Superior de Educação de Leiria
Paula Botas, EB1 João Beare Marinha Grande
Teresa Lucas, EB1 João Beare Marinha Grande



Aprendizagens no Ciclo Preparatório de 1972

Um estudo sobre o sucesso na Matemática Moderna

José Manuel Matos

Em Portugal sabemos muito pouco sobre o que foi a *escola do antigamente*. Frequentemente vemos referências, umas vezes elogiando-a, glorificando *os bons velhos tempos* em que se aprendia *a sério*, outras denegrindo-a, supondo que se tratava de uma escola *tradicional*, propensa ao uso de métodos pedagógicos inaceitáveis e retrógrados em que apenas se ensinava e aprendia através da memorização e da rotina.

E no entanto, quem se debruça sobre os documentos (quer os escritos, quer os orais) que emergem desta escola do passado não pode deixar de reparar como aqueles lugares comuns são desadequados. Por um lado, encontram-se, tal como hoje, recorrentes queixas de professores e de outros responsáveis pelo sistema educativo quanto à qualidade das aprendizagens, às condições pedagógicas, ou aos programas, o que põe em causa a imagem de excelência atribuída por alguns aos métodos do ensino de outros tempos. Mas, por outro, não se pode deixar de constatar o esforço recorrente de inovação que frequentemente emana dos textos centrados em problemáticas educativas. É, por exemplo, notável a quantidade de referências à escola activa, à prioridade do concreto sobre o abstracto, à necessidade de recurso a materiais e outras temáticas ainda hoje actuais, manifestadas em muitos escritos, todos eles procurando honestamente modos de melhorar a qualidade do ensino. Em suma, para quem se debruça sobre documentos educativos históricos, nem os *bons velhos tempos*, eram tão bons como por vezes ouvimos afirmar, nem a escola *tradicional* utilizaria exclusivamente métodos desadequados.

Este artigo pretende divulgar e comentar um documento que se debruça sobre a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em 1972. O seu estudo, interligado com o do contexto de onde surgiu, permitir-nos-á ter algumas ideias sobre o que seria a escola nesses idos de 70.

O Ciclo Preparatório do Ensino Secundário

O *Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, criado em 1967[1] e precursor do actual 2° ciclo, resultou da unificação do 1° ciclo do ensino liceal e do ciclo preparatório do ensino técnico, e foi mais uma etapa do alargamento da escolaridade obrigatória, bem como da progressiva integração do ensino dos liceus e do das escolas técnicas, que culminou na unificação destes dois ramos de ensino completada no final dos anos 70. Alguns dos seus propósitos, expressos em particular nalguns programas, reflectiam os princípios ideológicos oficiais do regime, mas outros, especialmente claros nas metodologias de ensino, preconizavam um ensino activo e prático, procurando despertar o espírito de observação, a imaginação criadora, o sentido estético, o gosto do empreendimento e do esforço pessoal, assim como o reconhecimento do valor do trabalho.

No final dos anos 60 e princípios dos anos 70, o Ciclo Preparatório é visto como uma das áreas de ponta a nível pedagógico. Trata-se de um ciclo com uma nova filosofia, para o qual existe a intenção de criar escolas específicas, com um corpo docente organizado segundo novas áreas interdisciplinares e recorrendo à prática de metodologias de ensino inovadoras. Em suma, é no Ciclo Preparatório que se vai encontrar grande parte do esforço de inovação educativa desta época (o ensino superior é então outro pólo de inovação).

O número total de alunos das escolas públicas e das privadas que frequentam os dois anos deste ciclo cresce regularmente, conforme se observa no Gráfico 1[2], embora contraste com os cerca de 900.000 alunos matriculados

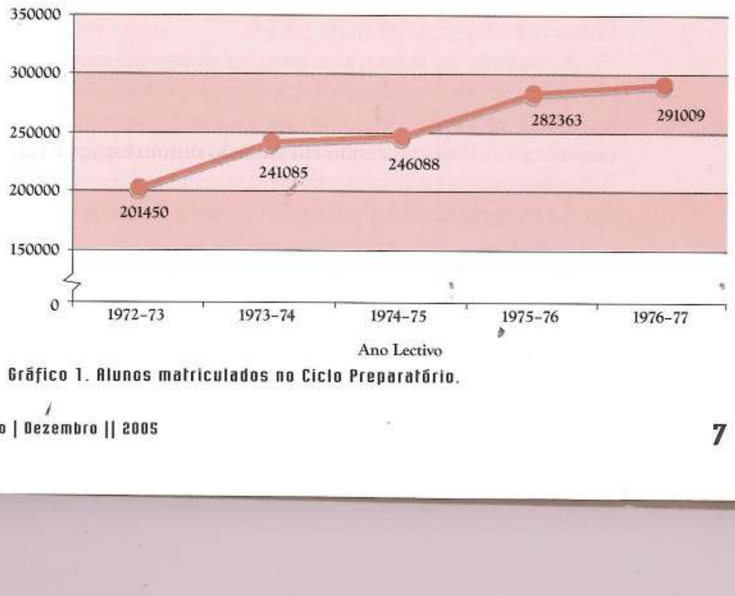


Gráfico 1. Alunos matriculados no Ciclo Preparatório.

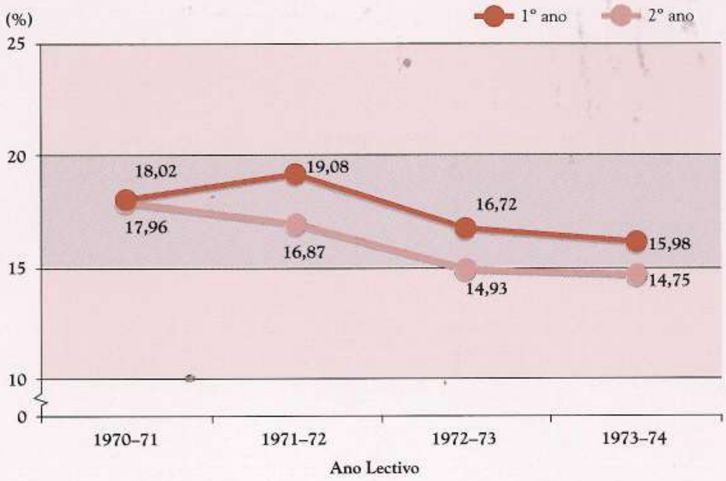


Gráfico 2. Percentagens de repetentes no Ciclo Preparatório em relação ao número de inscritos.

no conjunto dos quatro anos do ensino primário. Mesmo levando em conta o número de alunos que frequentavam sistemas paralelos (telescola, por exemplo), existe ainda um forte abandono escolar nesta mudança de ciclo, embora com tendência para diminuir. Em 1972/73, por exemplo, a frequência de cada ano do preparatório é apenas cerca de 40% dos alunos que frequentaram cada ano do primário.

O Ciclo Preparatório vai ter uma selectividade moderada para os padrões da época, como pode ser observado no Gráfico 2[3] que apresenta a percentagem de alunos repetentes nos dois anos que constituem o ciclo.

As percentagens de repetentes nos anos seguintes vão manter-se próximos destes valores, com a excepção de 1974-75 em que se verificaram condições excepcionais de avaliação.

O currículo de Matemática

No desenho curricular do Ciclo Preparatório, a Matemática, com 3 horas semanais nos dois anos, em conjunto com as Ciências da Natureza, constituem a área de Iniciação Científica (depois de Abril de 74 a primeira passará para a área de Comunicação). Os programas são aprovados em Portaria de 9 de Setembro de 1968[4].

A vontade de inovação educativa que permeava o Ciclo Preparatório interliga-se com uma grande mudança curricular, esta específica do ensino da Matemática, e que se encontra em desenvolvimento desde meados dos anos 60. Refiro-me ao que é comummente conhecido como a reforma da Matemática Moderna, já implementada nos outros ciclos, quer dos liceus, quer das escolas técnicas, e que vai ser estendida a esta faixa etária aproveitando a criação do preparatório.

Podemos situar o início Matemática Moderna em Portugal no ano de 1963, data em que se inicia uma experiência pedagógica em três turmas do 6° ano dos liceus (actual 10° ano). Nas escolas técnicas a experiência inicia-se em 1967/68. Um ano depois é publicado o programa de Matemática do Ciclo Preparatório, aparentemente da autoria de Sebastião e Silva, integrado na Portaria já referida e que determina os programas deste ciclo.

Os dois primeiros parágrafos do programa de Matemática do Ciclo Preparatório são elucidativos sobre o sentido das inovações e das limitações pretendidas pelos autores do programa. O primeiro deles refere-se aos conteúdos do programa:

A actualização do ensino de uma disciplina terá de ser encarada sob um duplo aspecto: o da forma e o do conteúdo. No que se refere à disciplina de Matemática do Ciclo Preparatório, a introdução de novos *conteúdos* deverá ser feita, por enquanto, com prudência e parcimónia, atendendo a que é necessário, primeiro que tudo, actualizar os agentes de ensino. Algumas noções fundamentais da chamada *matemática moderna*, tais como as de *conjunto*, *elemento de conjunto*, *inclusão*, *reunião*, *intersecção* e *conjunto complementar*, estão já a entrar nos hábitos de ensino de grande número de professores. Trata-se de noções muito simples, que é fácil e conveniente introduzir desde já neste ciclo. Mas ir muito além de tais noções, na inserção de novos conteúdos, não parece aconselhável, pela razão indicada. (DG, I, 213, p. 1395, itálicos no original)

Pretende-se assim que o programa não contenha assuntos novos (alguns tópicos de geometria são mesmo retirados), e vai-se optar por reescrever conteúdos antigos utilizando a linguagem da teoria dos conjuntos. Parcimónia e cautela são as palavras-chave, essencialmente devido à falta de preparação dos *agentes de ensino* para integrar inovações mais amplas nas suas aulas.

O programa, que sem grandes alterações vai prevalecer até o final dos anos 80, inicia-se no 1° ano com conjuntos, seguindo-se o estudo das operações aritméticas, o dos números racionais, o cálculo com decimais, a medição de comprimentos, tempos e velocidades, e finalmente a geometria. O 2° ano, para além de um aprofundamento das noções anteriores, inclui ainda o estudo de proporcionalidades (directa e inversa). O estudo de equações simples faz ainda parte do programa dos dois anos.

Quando observamos os programas em detalhe, repara-se que, apesar dos propósitos de parcimónia e cautela, a teoria de conjuntos se vai tornar no modo dominante como certos assuntos serão abordados. Assim acontece com o estudo dos conjuntos numéricos (tema com que se iniciam os dois anos), das operações aritméticas e da geometria. Os termos a ensinar vão muito para além das *noções fundamentais* referidas no parágrafo que citei.

Os próprios autores dos programas devem ter sentido que existia o perigo de se exagerar na ênfase dada àquela teoria e, logo no segundo número do *Boletim da Direcção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, são publicados, pela mão de Joaquim Redinha, esclarecimentos ao programa, recomendando que se destine apenas 15 dias à introdução da Teoria de Conjuntos no 1° ano (*A programação de Matemática do 1° ano do Ciclo Preparatório*, 1969), prática que não é seguida, tornando-se corrente a Teoria de Conjuntos ocupar todo o primeiro período lectivo.

A inovação curricular introduzida pelos programas de Matemática do Preparatório não se limitou apenas à introdução da linguagem da Matemática Moderna. Conforme já referi, existe uma forte intenção de inovação nos métodos de ensino que atravessa todas as suas disciplinas. Disso mesmo nos dá conta logo o segundo parágrafo do programa de Matemática:

Quanto ao problema da modernização da *forma*, a situação já é diversa. Na realidade, tem-se vindo a registar, há vários anos, nas escolas normais do nosso ensino secundário, uma atitude crítica construtiva e um esforço permanente no sentido de dar novos rumos à forma por que deva processar-se o ensino da Matemática, desde os primeiros anos, inclusive no que se refere à linguagem e às relações professor-aluno. Trata-se portanto, agora, de activar e, porventura, imprimir novos aspectos a esse movimento, cujo lema tem sido: *non nova sed nove*. (DG, I, 213, p. 1395, itálicos no original)

Palavras de entusiasmo que ainda hoje poderiam figurar em programas e cuja inclusão num documento oficial era notável no contexto político da época. Afinal o *ensino tradicional* ainda nos revela algumas surpresas e o leitor ficaria ainda mais surpreendido se continuasse a ler os propósitos do programa que não transcrevo apenas por falta de espaço.

O relatório Análise das respostas...

Estabelecido o contexto, podemos passar agora a centrar a atenção em aspectos mais próximos do documento que me propus estudar. Em Portugal é muito raro encontrar estudos quantitativos de grande dimensão dos desempenhos dos alunos. Apenas a partir dos anos 90 têm sido efectuados trabalhos de investigação nesta área, muitos deles parte de estudos internacionais de grande envergadura (SIAEP, TIMSS, PISA), outros reflectindo o trabalho de investigação de âmbito exclusivamente nacional levado a cabo pelo GEP, depois pelo IIE, mais tarde pelo GAVE e, ocasionalmente, pela Inspecção-Geral da Educação ou algumas Direcções-Gerais.

A pouco e pouco, no entanto, vão emergindo dos arquivos alguns documentos importantes e esse é o caso do relatório *Análise das respostas dadas às questões postas no exame escrito*, elaborado em 1972 por Paulo Crato, professor de Matemática dos liceus e que à época exercia o cargo de inspector, função de onde, mais tarde se reformou. O trabalho, apesar de nunca ter merecido honras de publicação oficial, sobreviveu até aos nossos dias e incide sobre as respostas dos 31.217 alunos do 2° ano do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário que efectuaram o exame nacional da 1ª chamada em 1972[5] e, tanto quanto me é dado observar, é o mais antigo estudo de âmbito nacional centrado nas aprendizagens de matemática[6]. O exame objecto de estudo constituía uma prova escrita obrigatória com a duração de 1h30m, e que condicionava a progressão para os ciclos seguintes agora já no liceu ou na escola técnica.

Compõem a prova 10 perguntas, algumas com diversas alíneas. O relatório não indica a cotação, nem as classificações globais obtidas pelos alunos no exame, mas valoriza antes uma análise fina por pergunta da frequência de determinado tipo de respostas. Assim, para cada questão, para além de serem descriminadas a percentagem de respostas totalmente correctas, de respostas totalmente incorrectas, e a de ausência de respostas, são também indicadas as percentagens de diferentes tipos de respostas que indiciam, quer a frequência de determinados erros comuns na aprendizagem, quer variações nas respostas totalmente correctas. Esta preocupação de Paulo Crato não apenas com os desempenhos globais por pergunta, mas sobretudo caracterizando diferentes tipos de respostas correctas, de parcialmente correctas, ou mesmo de respostas completamente incorrectas é preciosa. Já na altura, assim o tivessem compreendido os responsáveis, poderia ter constituído um instrumento importante para detectar pontos fortes e fracos das aprendizagens matemáticas.

A análise das respostas ao exame

Desenvolverei a análise das respostas começando com aquelas que têm que ver com a geometria, a que se seguirão as da aritmética e depois da álgebra e da proporcionalidade.

A geometria está representada por três das dez questões do teste. A primeira (pergunta 1, com quatro alíneas) incide sobre a classificação de sólidos geométricos. As respostas revelam que mais de 80% dos alunos identificaram correctamente cilindros e cones. Já a identificação de prismas (40% de respostas correctas) evidenciou alguns problemas relacionados com a exclusão de cubos ou de paralelepípedos. Suspeito que hoje seria obtido um padrão de respostas semelhante.

As outras duas questões de geometria (perguntas 9 e 10) envolvem o cálculo de áreas e de volumes. Ambas requerem duas fases de cálculo, a área de um semi-círculo e de um rectângulo numa pergunta, e de paralelepípedos com partições de comprimentos na outra. São questões exigindo o recurso a estratégias de resolução complexas e as percentagens de respostas correctas (8% e 13%) espelham isso mesmo. Mesmo assim, as percentagens de alunos que calcularam correctamente algumas das áreas ou volumes exigidos é muito baixa (área de rectângulo, 60%; área do círculo, 20%; volume de paralelepípedo, 42% e 25%). Paulo Crato atribui estas baixas percentagens a "deficiências em cálculo simples" entre outras razões.

Cinco das questões versavam temas de aritmética. A pergunta 3 envolve a determinação de divisores e obteve percentagens de sucesso de 60% e de 49% nas suas duas alíneas, possuindo 81% dos alunos o conceito de divisor e 68% o de divisor comum. Os principais erros cometidos centraram-se na não inclusão do 1 ou do próprio número no conjunto dos divisores. Apenas 15% e 20% dos alunos incluíram elementos estranhos. A pergunta 4 solicita a comparação entre dois numerais (fracções ou números decimais) e a resposta deveria ser escrita recorrendo ao símbolo adequado. Para cada uma das quatro alíneas cerca de 60%

Temas	Tipos de competência				Número de itens
	Conhecer conceitos/ procedimentos	Raciocínio	Resolução de problemas	Comunicação	
Números e cálculo	3a, 4a, 4b, 4c, 4d, 6a, 6b, 7	3b, 5		2a, 2b	12
Proporcionalidade		8a, 8b			2
Geometria	1a, 1b, 1c, 1d		9, 10		6
Número de itens	12	4	2	2	20

Quadro 1. Competências dominantes de cada item por tema

dos alunos respondeu apropriadamente, embora seja menor (pouco mais que 50%) a percentagem que utilizou correctamente o símbolo. As perguntas 5 e 6 (esta com duas alíneas) exigem a escrita e o cálculo de expressões numéricas envolvendo fracções e números decimais. Tratava-se de questões difíceis e que apresentaram percentagens de respostas correctas muito baixas, rondando os 20%, com elevadas taxas de respostas completamente incorrectas ou mesmo sem resposta. Erros nas operações aritméticas intermédias tiveram um papel importante nestes resultados. Falta referir a pergunta 2, e embora ela incida sobre aritmética, será discutida mais à frente.

A pergunta 7 podia ser resolvida através de uma equação. Era colocado um problema (qual o número que multiplicado por 15 dá 240) que foi resolvido correctamente por 53% dos alunos. Percentagens significativas de respostas indicaram o número correcto, mas incluem uma equação sem relação com o problema (15%), ou não escrevem nenhuma equação (28%), indiciando portanto o uso de métodos alternativos não algébricos.

Por último a pergunta 8 testava os conhecimentos em proporcionalidade e percentagem. As respostas correctas foram em pequeno número (24% e 18%, respectivamente), com muitas respostas completamente incorrectas (cerca de 40%), tendo muitos alunos optado por não responder (22% e 33%).

Alguns problemas transversais

Terminada esta análise por tópicos matemáticos estudarei agora alguns problemas que atravessam diversas perguntas do exame. A primeira refere-se ao uso da linguagem matemática, em especial na forma particular que ela assumiu durante a vigência da Matemática Moderna. A linguagem está fortemente presente nas perguntas 1, 2, 3, e, em menor grau, na 4 e merece por isso uma análise mais detalhada. A segunda pergunta em particular centra-se no uso adequado da linguagem da teoria de conjuntos:

2. Dados os conjuntos

A = {números inteiros menores que 6}

B = {números inteiros maiores que 3 e menores que 8},

representa, utilizando chavetas e indicando os seus elementos:

a) $A \cap B$;

b) $A \cup B$.

A percentagem de respostas correctas foi desanimadora (42% e 23%, respectivamente) e o problema pode residir essencialmente no domínio da linguagem, quer por dificuldades de interpretação do enunciado, quer pela falta de capacidade de escrita matemática na redacção das respostas. Paulo Crato também não avança uma explicação e conjectura que a inclusão da sugestão para que os alunos recorressem à representação dos conjuntos em extensão contribuiria para uma melhoria.

É consensual hoje que um dos problemas da reforma da Matemática Moderna em Portugal, e que conduziu ao seu descrédito durante os anos 80, foi a exagerada ênfase no formalismo. Entendiam os reformadores que o uso adequado da linguagem matemática (quase exclusivamente entendida como o aparato relacionado com conjuntos e suas operações) seria garante de uma boa compreensão, isto é, o uso de uma linguagem adequada espelharia a clareza de raciocínio. Sabemos hoje que isso não se passa assim, isto é, a relação entre compreensão e linguagem é bem mais complexa do que então se imaginava. O caso da pergunta 2 é paradigmático. Uma situação que, se colocada em linguagem corrente, numa situação concreta, ou utilizando materiais, assumiria um determinado grau de facilidade de resolução, torna-se difícil apenas porque o veículo usado para a exprimir (a representação escolhida), em vez de ajudar à clarificação das ideias matemáticas subjacentes, apenas a dificulta. Mesmo que, para o versado nessa linguagem — o professor ou o matemático — ela seja muito mais clara.

Paulo Crato também estuda a compreensão de conceitos da teoria de conjuntos e do seu simbolismo. Neste domínio os alunos manifestaram alguma facilidade e as percentagens de sucesso no conhecimento do conceito de subconjunto, o uso de chavetas, e a separação de elementos por vírgulas foram superiores a 80%. Na compreensão da intersecção, da união e respectiva simbologia as percentagens de sucesso foram superiores a 70%. É no entanto de assinalar que, apesar do uso correcto desta terminologia por largas percentagens de alunos, a compreensão dos conceitos matemáticos não

Temas	Tipos de competência				Total
	Conhecer conceitos/ procedimentos	Raciocínio	Resolução de problemas	Comunicação	
Números e cálculo	51	35		33	45
Proporcionalidade		21			21
Geometria	68		11		49
Total	57	28	11	33	44

Quadro 2. Médias de percentagens de respostas correctas por tipo de competência por tema

melhorou, como vimos na pergunta 1, onde observamos erros comuns nos dias de hoje, apesar de o uso de tal linguagem estar muito esbatido.

Um outro aspecto que se prende com a deficiente execução de operações aritméticas é recorrentemente referido na análise de Paulo Crato. Tal acontece em todas as perguntas que requerem a realização de algoritmos aritméticos (perguntas 5, 6, 8 e 9) e a percentagem de erros deste tipo é considerável. Por exemplo na pergunta 6, 28% dos alunos erraram uma subtracção, 20% uma multiplicação e 34% uma divisão.

Gostaria de salientar um último aspecto transversal. A metodologia escolhida por Paulo Crato, categorizando de um modo amplo o espectro de respostas, permitiu identificar o uso de métodos de resolução próprios (por vezes designados de alternativos) correctos que apenas costumam ser detectados utilizando métodos qualitativos mais finos. Tal aconteceu, como referi, na pergunta 7 e na 8, questões mais complexas e que permitiam o uso bem sucedido destas alternativas. É muito raro estas serem encontradas em estudos de grande dimensão e o facto de o autor do estudo o ter conseguido fazer é revelador da sua enorme sensibilidade para as *nuances* de que se reveste a aprendizagem da matemática.

Qualidade das aprendizagens

Penso que o estudo de Paulo Crato nos pode ainda indicar algo mais sobre a qualidade global das aprendizagens de matemática dos alunos que estudou. Dispomos hoje de metodologias que nos permitem diferenciar a complexidade das questões de uma prova e é isso que proponho agora efectuar. Para tal decidi usar a separação em quatro tipos de competência (conhecer conceitos/procedimentos, raciocínio, resolução de problemas e comunicação) que tem vindo a ser utilizada pelo GAVE[7] nos estudos sobre as provas de aferição, em que os três primeiros tipos são de complexidade crescente e o último se refere a uma competência distinta que não respeita aquela hierarquia[8].

O primeiro passo é identificar para cada questão o tipo de competência dominante e o produto dessa identificação está indicado no quadro 1 descriminado por três temas curriculares.

Devo avisar o leitor de que a atribuição expressa no quadro 1 comporta algum grau de incerteza e é possível que outra pessoa efectue a atribuição do tipo de competência dominante a cada item de um modo distinto daquele que utilizei. Por um lado, porque se trata de uma competência *dominante*, isto é, em alguns itens existe mais do que uma, por outro, porque a valorização da complexidade de uma pergunta pode variar.

A observação do quadro revela-nos que o exame tinha algum desequilíbrio, sendo composto quer por um excessivo número de itens relacionados com números e cálculo (12 em 20) que aparentemente ia para além da seu peso curricular, quer por itens avaliando apenas a competência menos complexa, *Conhecer conceitos e procedimentos* (igualmente 12 em 20). É revelador que 40% dos itens estejam concentrados na avaliação de competências matemáticas básicas de aritmética.

Após esta identificação, foram calculadas as médias de percentagens de respostas correctas para cada tipo de competência por tema curricular (quadro 2).

O desempenho parece-me fraco. Note-se que a média das percentagens de respostas correctas na competência mais simples de aritmética é apenas de 51%. Se observarmos os três primeiros tipos de competência — os que constituem uma hierarquia — o desempenho diminui à medida que a complexidade de competência aumenta, tal como acontece em qualquer estudo efectuado com qualquer população em qualquer ponto do planeta. Mas mesmo assim, as competências mais complexas apresentam resultados muito desanimadores. Concluo que afinal as competências destes alunos, quer as de cálculo básico, quer as mais complexas, não eram tão famosas como por vezes ouvimos dizer.

Uma comparação com quadros semelhantes produzidos recentemente pelo GAVE em análises de provas de aferição revelam que a média das percentagens de respostas correctas em cada competência é inferior às correspondentes médias obtidas nos tempos actuais, e a variação descendente destas médias quando percorremos a escala hierárquica é muito mais pronunciada. Dever-se-á, no entanto, ter em conta o número reduzido de itens disponíveis para algumas competências que pode afectar a fiabilidade da análise.

Conclusão

Muito há ainda a fazer para compreender o que se passava nos idos de 70 em plena euforia da Matemática Moderna e em meio de uma reforma educativa (a Reforma Veiga Simão) que mobilizava muitos professores e levantava o temor da ala mais conservadora do regime. Se os documentos oficiais são conhecidos, o mesmo não se pode dizer das práticas pedagógicas, nem da vida quotidiana das escolas desse tempo. O estudo de Paulo Crato permite vislumbrar alguns detalhes e com este artigo pretendo contribuir para um aprofundamento desse conhecimento. Não é, no entanto, ainda altura para fazer um balanço do movimento da Matemática Moderna em Portugal.

Algo, no entanto, pode ser adiantado. Tal como já tinha mostrado num texto sobre conhecimento matemático básico dos anos 50 publicado no *Educação e Matemática* (Matos, 2002), aqui de novo observamos que a suposta qualidade de que, segundo uns, o ensino dos bons velhos tempos estaria dotado se revela cada vez mais um mito. Mas descobrimos igualmente que a esclerose que outros lhe atribuem é igualmente outro mito. A investigação histórica de temas educacionais (tal como de outros temas) deverá fazer o seu caminho sem se sentir condicionada por estas ideias feitas, procurando antes um esclarecimento informado e apoiado em documentos primários.

Desejo terminar reiterando os meus agradecimentos a Paulo Crato, cujas preocupações com a qualidade das aprendizagens da matemática o levaram à produção de um documento notável que, devido à miopia dos tempos em que viveu, não teve o efeito que mereceria. Fica, no entanto como um testemunho precioso que nos permite hoje conhecer melhor a educação matemática de outros tempos.

Notas

1 Decreto-Lei n° 47.480 de 2/1/1967 aprovado quando Galvão Teles era Ministro da Educação e preparado já pelo anterior ministro Leite Pinto.

2 Gráfico construído a partir de dados publicados em Silva e Tamen (1981).

3 Gráfico construído a partir de dados contidos em Fernandes (1981).

4 Portaria n° 23 601 de 9/9/1968.

5 O número total de alunos, bem como a chamada estudada não se encontram referidos no documento, mas foram comunicados pessoalmente pelo autor.

6 Existem outros estudos anteriores mas que incidem apenas sobre as notas de exames.

7 Ver, por exemplo Ministério da Educação. (2001).

8 Embora se pudessem utilizar instrumentos mais finos, a utilização desta diferenciação tem a vantagem da simplicidade e da comparabilidade.

Referências

A programação de Matemática do 1° ano do Ciclo Preparatório. (1969). *Boletim da Direcção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, 2, 22–30.

Fernandes, R. (1981). Ensino básico. Em M. Silva e M. I. Tamen (Ed.), *Sistema de ensino em Portugal* (pp. 167–190). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Matos, J. M. (2002). Saber matemático básico: Uma comparação com outros tempos. *Educação e Matemática*, n° 69. APM.

Ministério da Educação. (2001). *Provas de Aferição do ensino básico, 4° e 6° anos, 2001*. Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, M. e Tamen, M. I. (Ed.). (1981). *Sistema de ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

José Manuel Matos,
Universidade Nova de Lisboa

O sistema educacional não ensina a observar, nem a experimentar, nem a reflectir, nem a raciocinar, nem a escrever, nem a falar: ensina apenas a repetir mecanicamente, a imitar e, por conseguinte, a não ter personalidade. É um sistema que reprime o espírito de autonomia e todas as possíveis qualidades criadoras do aluno, nas idades decisivas em que essas qualidades deveriam ser estimuladas ao máximo: um sistema feito à medida da mediocridade obediente, que acerta o passo enquadrada em legiões de explicadores. É, portanto, um ensino em regime de desdobramento: professor-explicador (e o mais grave é que o professor já conta com o explicador). É, portanto, um ensino que favorece os passivos, os superficiais e os privilegiados economicamente, em prejuízo dos autónomos, dos inteligentes e dos economicamente débeis. Em conclusão: é um ensino capaz de atribuir 20 valores ao Conselheiro Acácio e orelhas de burro a Einstein!

José Sebastião e Silva

Escola: uma segunda casa?

A construção de uma escola que estimule a aprendizagem e a criatividade dos alunos pressupõe que se pense não só na qualidade do trabalho dos diversos intervenientes no processo ensino-aprendizagem, mas também na arquitectura e estrutura do edifício e na organização dos espaços escolares. Segundo a revista Visão de 15 a 21 de Setembro de 2005, a construção de um estabelecimento perfeito obedece a um conjunto de regras fundamentais, nomeadamente "as salas de aula têm zonas interiores e exteriores, com portas abertas para um pátio ajardinado que comunica, por sua vez, com áreas lúdicas; os alunos são dispostos em forma de L, em grupos de trabalho, e o professor circula pela sala de aulas; as salas são agrupadas em pequenas alas facilitadoras da interacção entre as crianças". Nesta ideia está implícito que a escola não deve ser um somatório de salas de aula, mas incluir também outros espaços tais como, Centro de Recursos, ginásio, refeitório, laboratórios, jardins, áreas cobertas para convívio como recurso em dias de chuva. Estes espaços poderiam ser mantidos e decorados com a colaboração dos alunos, constituindo, em alguns casos, momentos de aprendizagem, como por exemplo, a dinamização da horta pedagógica.


SOCIEDADE

Ensino

As formas do saber

O desenho das escolas influencia a criatividade dos alunos e o seu rendimento escolar. O arquitecto norte-americano Henry Sanoff veio a Portugal explicar porquê

PATRÍCIA FONSECA

«Se tudo o que sabemos hoje sobre a aprendizagem fosse tido em conta no momento em que se projectam os estabelecimentos de ensino, estes seriam completamente diferentes.» Esta é a teoria do arquitecto norte-americano Henry Sanoff, professor de Design na Faculdade de Arquitectura da Carolina do Norte, que desde os anos 60 estuda as linhas que devem compor o desenho de uma escola, de forma a potenciar o conhecimento. Sanoff, que esteve em Portugal a convite da Ordem dos Arquitectos, considera que cada comunidade tem necessidades diferentes e que a construção de uma escola deve

O vandalismo desaparece quando os alunos dinamizam

ley, na Califórnia, o ambiente escolar desempenha um papel na aprendizagem tão importante como o dos professores. «A estrutura do edifício tem o poder de estimular relações sociais entre pessoas de idades diferentes e de promover diferentes tipos de aprendizagem, ao nível social, cognitivo e emotivo», explica.

A escola ideal não tem, sobretudo, uma fórmula única. Nada mais errado do que eleger um modelo e replicá-lo à exaustão. «Os alunos são tratados como operários em linhas de montagem do saber», ironiza.

Salas em L

A escola ideal...

Para construir um estabelecimento perfeito, que estimule a aprendizagem e a criatividade dos alunos, não há uma única fórmula. Mas existem regras fundamentais,

Para construir um estabelecimento perfeito, que estimule a aprendizagem e a criatividade dos alunos, não há uma única fórmula. Mas existem regras fundamentais, como as que se cumprem neste projecto do arquitecto **Henry Sanoff** para a escola primária de **Davidson**, na **Carolina do Norte**: as salas de aula têm zonas interiores e exteriores, com portas abertas para um pátio ajardinado que comunica, por sua vez, com áreas lúdicas; os alunos são dispostos em forma de L, em grupos de trabalho, e o professor circula pela sala de aulas; as salas são agrupadas em pequenas alas, facilitadoras da interacção entre as crianças

66 VISÃO 15 DE SETEMBRO DE 2005

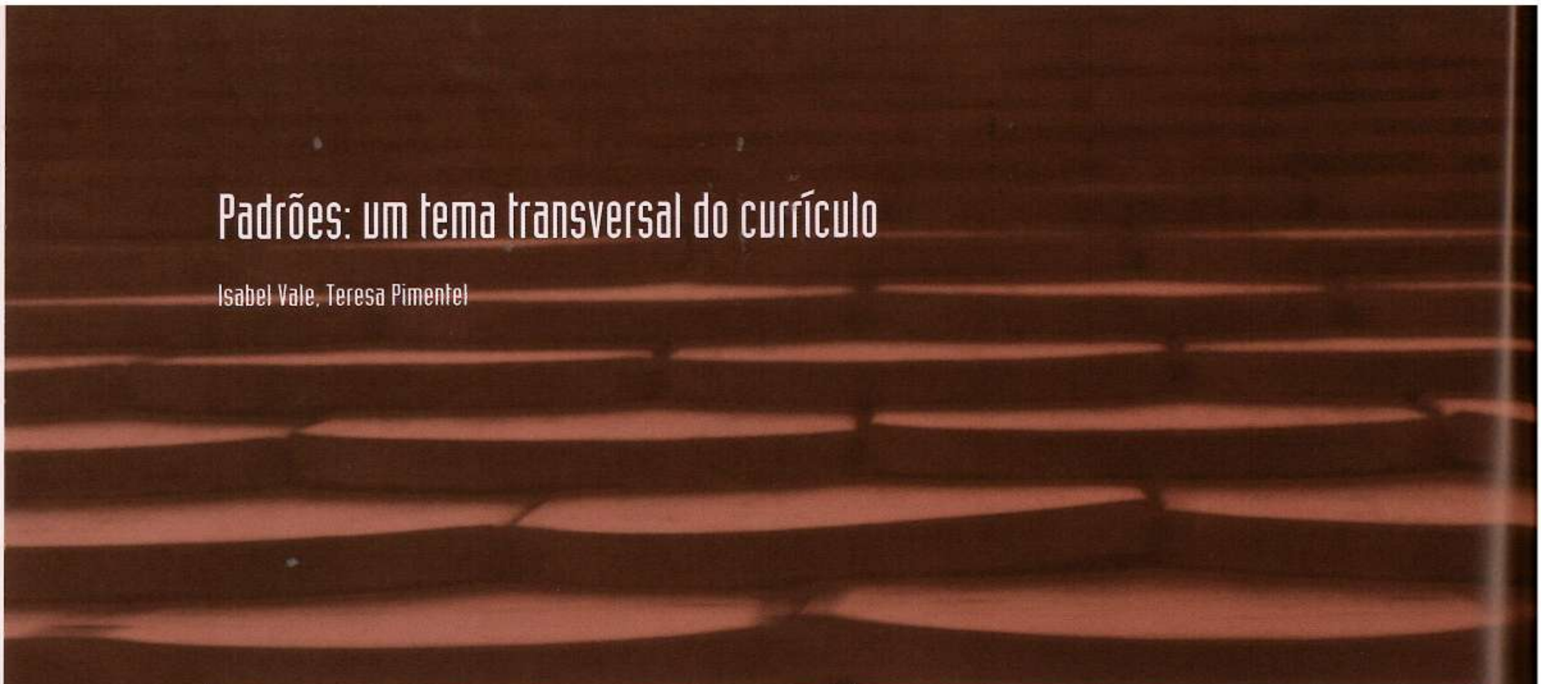
In Visão, 15-21 Setembro 2005

Estas ideias tornam-se mais relevantes quando pensamos numa escola aberta durante mais tempo aos alunos, como no caso do 1° Ciclo em que se deseja que estes permaneçam nas escolas até às 17h30m, em actividades de enriquecimento curricular. Esta medida levanta algumas questões que se prendem com aspectos práticos dos espaços que se não forem equacionados podem ser desmobilizadores. Por exemplo, o refeitório deve ser suficientemente espaçoso e organizado para que a sua utilização proporcione um momento agradável, relaxante e educativo. Por outro lado, uma maior permanência na escola exige mais recursos humanos que mantenham uma boa limpeza dos espaços. Para além desses aspectos, é também importante pensar na organização das actividades a realizar nesse período, pois elas não devem ser pensadas como um prolongamento da aula, mas sim como algo que estimule a criatividade, que desenvolva competências ao nível das línguas e da tecnologia, que promova o desenvolvimento físico e que possibilite a interacção entre pessoas de diferentes idades e áreas do saber. A criação deste ambiente que pensa integradamente nas questões afectivas, cognitivas, estéticas e sociais contribui para que a escola seja sentida como uma "segunda casa, onde todos se sentem confortáveis". Caminhamos assim na direcção de uma escola mais democrática pensando nas crianças que não têm possibilidades de frequentar actividades fora da escola. Apesar da falta de condições presente em muitas das nossas escolas, se Conselhos Executivos, professores, autarquias e Ministério da Educação acolherem estas ideias como prioritárias, pode conseguir-se implementá-las gradualmente tendo sempre em vista a qualidade do trabalho com os alunos.

Ao nível do 2° e 3° Ciclos e Secundário, uma medida que consideramos muito pertinente prende-se com o plano de ocupação dos alunos no caso de falta de algum professor. Este plano implica também a mobilização de espaços e a intervenção de recursos humanos, tanto a nível de professores como de funcionários. Por exemplo, se tivermos um Laboratório de Matemática bem equipado ou um Centro de Recursos funcional e com professores que apoiem o trabalho, estão criadas algumas condições para que os alunos ocupem e rentabilizem o tempo para trabalhos que têm em curso. Esta preocupação deveria também estar presente no 1° Ciclo, visto que estes alunos têm um nível de autonomia muito menor que os colegas dos restantes ciclos. A prática de distribuir os alunos pelas restantes salas sempre que um professor falta, ou a obrigação de ficar em casa até que o professor seja substituído, levanta problemas tanto às próprias crianças, como aos professores e aos Encarregados de Educação.

Será que começamos a dar alguns passos na direcção de uma escola onde os nossos alunos se sintam mais preparados para enfrentar os desafios com que se deparam?

Alice Carvalho
Helena Fonseca



Padrões: um tema transversal do currículo

Isabel Vale, Teresa Pimentel

Nos últimos anos tem sido defendido por vários investigadores que a aprendizagem matemática requer que o estudante se envolva activa e reflexivamente em tarefas diversificadas e significativas. É nossa convicção que a matemática perspectivada como a ciência dos padrões, pode contribuir para uma nova visão desta disciplina por parte dos professores e proporcionar contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os estudantes, onde o seu poder matemático possa ser explorado.

Padrões

Ao sermos confrontados com o termo padrão, somos levados a pensar em padrões visuais tais como os que se vêem nos tecidos e no papel de parede. Estes são os padrões geométricos. Envolvem desenhos que ficam invariantes quando sujeitos a transformações geométricas, incluindo ideias relacionadas com o reconhecimento de formas, congruência e semelhança. Estes padrões não serão abordados neste trabalho pois além de serem bastante estudados, regem-se por regras específicas. Iremos dar atenção especial aos padrões numéricos entendendo o termo padrão numérico ligado à ideia de algum tipo de regularidade (e.g. repetição, recursiva) na qual se possa identificar uma lei que permita continuar a sequência numérica e chegar à generalização (Vale, Palhares, Cabrita, Borralho, no prelo).

O reconhecimento de padrões na natureza tem permitido ao homem fazer previsões. Por exemplo, a mudança das estações é um padrão previsível. Por outro lado tem-nos permitido compreender o meio que nos rodeia, tendo enorme influência no desenvolvimento da ciência. Por exemplo, Mendeleev ao detectar padrões nos elementos químicos foi conduzido à tabela periódica. Ou, Watson, ao detectar padrões em raios X de cristais, foi conduzido à identificação da estrutura molecular do DNA.

Podemos encontrar padrões não só no mundo físico mas também no mundo das ideias e dos pensamentos. Segundo Devlin (2002), estes padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou não mais do que recreativos.

Em relação à matemática, vários investigadores referem que o que os matemáticos fazem melhor é descobrir e revelar padrões escondidos, sendo o próprio objectivo da matemática, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão. Definem assim matemática como sendo a ciência dos padrões (e.g. Davis e Hersh, 1981; Devlin, 2002; Sawyer, 1955; Steen, 1990). Para Goldenberg (1998) a procura de invariantes deve ser o fulcro do ensino da matemática. Na medida em que a matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes. Deste modo o uso de padrões é uma componente poderosa da actividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar.

Padrões na matemática escolar

Uma análise dos currículos permite observar que o estudo dos padrões atravessa todos os temas dos programas da matemática escolar desde o ensino básico ao secundário.

O Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais (ME-DEB, 2001) destaca a especificidade da matemática nomeadamente como a ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações. Em particular no domínio da Álgebra e das Funções, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui:

> A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem (p. 60)

> A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos (p. 66).

No campo da Geometria inclui

> A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas (p. 62).

Por outro lado, se analisarmos os programas oficiais de matemática dos diferentes anos do ensino básico (ME-DGEBS, 1990, 1991) também detectamos várias oportunidades ao longo dos diferentes temas matemáticos para trabalhar os padrões. A título de exemplo, identificamos algumas situações por ano de escolaridade.

No programa do 1.° ciclo há referência explícita aos padrões a partir do 2.° ano, onde se lê que os alunos devem descobrir regularidades nas contagens de 5 em 5, 10 em 10 assim como explorar e usar regularidades e padrões na adição, na subtracção, e no 3.° ano na multiplicação. Também é feita referência aos padrões geométricos em particular no 3.° e 4.° anos onde é sugerido que os alunos devem desenhar frisos e rosáceas e fazer uma composição a partir de um padrão dado.

Nos programas do 2.° e 3° ciclos podemos ler sucessivamente o seguinte no tema Números e Cálculo, do 5° ano, "... melhor conhecimento dos números e das operações, para a descoberta de relações e propriedades ..." (p. 18); na Geometria, do 6° ano, "Com base nos trabalhos realizados e na análise de figuras os alunos poder-se-ão ir apercebendo de algumas propriedades das figuras simétricas, devendo ser estimulados a explicitar as suas descobertas." (p. 36); no Números e Cálculo, do 7° ano, "... os alunos irão trabalhar com números naturais, decompondo-os em somas ou produtos, procurando divisores, formando potências, associando-os segundo propriedades comuns" (p. 19); no Números e Cálculo, do 8° ano, "... continuar ou inventar sequências de números ..." (p. 32) ou "A propósito de sequência de números, poderão colocar-se questões tais como: procurar o termo que vem a seguir; tentar encontrar uma lei de formação" (p. 38); na Geometria, do 9ª ano, "... decoração de uma região plana utilizando isometrias e semelhanças ..." (p. 47).

Também no programa de matemática para o ensino Secundário (ME-DES, 2001, 2002) pode ver-se como objectivos gerais da disciplina no domínio das capacidades/aptidões:

Formular hipóteses e prever resultados
Descobrir relações [...]
Formular generalizações a partir de experiências (p. 4)

Os temas, sobretudo no estudo das sucessões (progressões, indução matemática) e funções, são um universo para explorar problemas e investigações com padrões.

Segundo os Principles and *Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) os estudantes devem passar por experiências com padrões pois constituem as bases para a compreensão do conceito de função e proporcionam os fundamentos para mais tarde trabalhar com símbolos e expressões algébricas.

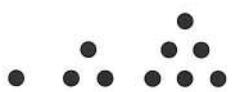
A procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior: fazem parte da resolução de problemas. Por outro lado, quer os padrões quer a resolução de problemas são actividades que os estudantes acham interessantes e desafiadoras. Como vimos são várias as referências à importância dos padrões nas recomendações curriculares; deste modo os professores têm várias oportunidades, ao longo dos diferentes temas matemáticos assim como fora do campo matemático, de explorar actividades problemáticas que envolvam padrões.

Como a procura de padrões é uma parte crucial na resolução de problemas e no trabalho investigativo, é necessário desenvolver essa competência nos estudantes, desde o primeiro contacto com a matemática. É importante começar com tarefas, que chamamos básicas, de reconhecimento de padrões de modo a que os estudantes se acostumem a este modo de pensamento. Estas tarefas facilitarão a abordagem de novas tarefas mais complexas. Nos anos iniciais, os alunos devem ser capazes de descrever padrões como 2, 4, 6, 8, ... dizendo como é obtido o termo a partir do anterior — neste caso somando 2 — é o início do pensamento recursivo. Além de contextos numéricos devem ser proporcionadas tarefas noutros contextos (concretos, pictóricos ou geométricos). Mais tarde os alunos devem realizar pensamentos recursivos mais complexos, como na sequência de Fibonacci 1,1,2,3,5,8, ...

As tarefas com padrões são manifestamente úteis na introdução à álgebra. No caminho para a álgebra, descrita como uma expressão da generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é sempre "ver" e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação (Orton, 1999). "Ver" reveste-se de extrema importância pois o professor tem de estar atento a esta questão para poder orientar o aluno e proporcionar-lhe situações alternativas.

Por exemplo, dada a sequência 1, 4, 7, 10, 13, ... "ver" envolve reconhecer que há uma diferença constante — 3 — entre os termos da sequência constatando que qualquer termo subsequente pode ser calculado adicionando 3 ao anterior.

Mas se a sequência for



"ver" é diferente. Pode ser baseado na sequência de figuras ou na correspondente sequência numérica ou em ambas. E este "ver" pode conduzir a modos diferentes mas equivalentes. Deste modo, os alunos devem estar cientes de que há mais que uma representação da mesma situação e que devemos ser capazes de passar de uma para outra compreendendo que as regras são equivalentes. Neste exemplo, a abordagem mais comum tem sido traduzir as figuras em números, o que muitas vezes é um problema, quando pretendemos generalizar e obter expressões polinomiais de grau superior ao primeiro, sobretudo quando trabalhamos com alunos de nível mais elementar.

É, pois necessário trabalhar com padrões na aula de matemática porque como Goldenberg (1998) refere, o facto de a invariância estar no centro da matemática significa que qualquer conteúdo pode ser usado para ajudar os alunos a criar este hábito de pensamento; e no entanto o conteúdo

Números quadrados

Considere a seguinte sequência

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Desenhe os dois termos seguintes da sequência
2. Descubra o número de pintas da figura de ordem 30. Explique o seu raciocínio.

Exemplo 1

pode ser ensinado de um modo que não torne visível para os alunos este aspecto globalizante.

Assim, consideramos que as tarefas que envolvem a procura de padrões permitem

- contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos alunos;
- experienciar o poder e a utilidade da matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos;
- evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo;
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstractos;
- melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Para isso os alunos devem ter oportunidade de

- transferir padrões concretos, pictóricos e simbólicos de uma representação para outra;
- averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- descobrir o padrão numa sequência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma sequência;
- prever termos numa sequência;
- generalizar;
- construir uma sequência.

Deste modo acreditamos que os padrões podem contribuir para uma maior motivação dos alunos na aula de matemática e para aumentar a sua compreensão matemática.

Alguns exemplos

Com base nos pressupostos anteriores temos feito algumas pesquisas sobre a utilização de tarefas com padrões na Matemática escolar e experimentação em sala de aula, com alunos da formação inicial, que propomos a seguir, que com algumas adaptações podem ser utilizadas na sala de aula do ensino básico e secundário.

Com os exemplos apresentados pretendemos ilustrar algumas das potencialidades e fragilidades da resolução de problemas que envolvam a procura de padrões, assim como chamar a atenção para a importância dos diferentes tipos de abordagem que a resolução desses problemas envolve. Todos contribuem, em particular, para o desenvolvimento do sentido do número e do pensamento algébrico.

No exemplo 1 pretende-se evidenciar a importância que o processo de resolução adoptado — contexto pictórico, geométrico, numérico — pode ter no sucesso da tarefa. Vejamos alguns dos processos de resolução possíveis:

Processo 1. Ver quantos pontos precisa cada nova figura e usar este número para ver as "diferenças" na sequência.

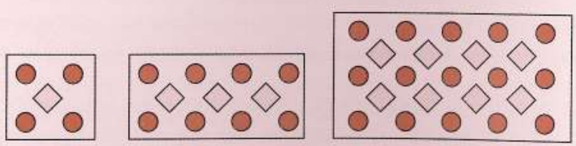
Processo 2. Contar os pontos em cada figura, convertendo deste modo as figuras numa sequência numérica.

Processo 3. Descobrir o que há de comum às várias figuras (o invariante é a forma) e continuar a sequência quer mentalmente quer desenhando, antes de a converter em números, e relacionar a figura (quadrado) com a área.

Esta actividade, que podemos classificar de básica, pode conduzir contudo a tentativas frustradas de encontrar relações numéricas. Este problema também pretende evidenciar a importância que o processo de resolução adoptado — contexto pictórico, geométrico, numérico — pode ter no sucesso da tarefa.

O super-chocolate

O super-chocolate é apresentado em caixas onde os caramelos estão dispostos no centro de cada uma das filas de bombons, como mostra a figura.



2 x 2 2 x 4 3 x 5

As dimensões de cada uma das caixas dizem-nos quantas colunas e quantas linhas de bombons tem cada caixa.

Descubra um método para encontrar o número de caramelos e de bombons em cada uma das caixas sabendo as suas dimensões.

Explique e justifique o método que usou para chegar ao resultado.

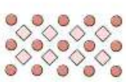
Adaptado de *Principles and Sandards*, NCTM, 2000

Exemplo 2

Processo 1. O mais comum é os alunos utilizarem uma abordagem numérica em que preenchem uma tabela e depois analisam os dados numéricos dessa tabela. Partindo da análise numérica da tabela dificilmente encontram um padrão e consequentemente dificilmente chegarão ao resultado. Trata-se de uma mera manipulação numérica, que nada tem a ver com a "estrutura" inicial do problema.

Dimensões da caixa	Número de bombons	Número de caramelos
2×4	8	3
2×5	10	4
2×6	12	5
...		
3×6	18	10
...	...	...

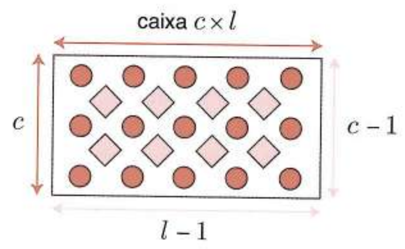
Processo 2. Utilizam em simultâneo uma tabela que evidencie diferentes tipos de caixa, que desenham e a tradução numérica dos dados começando por variar em primeiro lugar uma das dimensões (bc — bombons por coluna; bl — bombons por linha).

Dimensões da caixa bc×bl	Figura	Nº de Bombons total	Nº de caramelos
2×2		4	1
2×3		6	2
2×4		8	3
2×bl	...		bl–1
...	...		
3×5		15	8
3×bl	...		2×(bl–1)
	...		
4×4		16	9
4×bl	...		3×(bl–1)
...	...		
bc×bl			(bc–1)×(bl–1)

Deste modo, o desenho pode ajudar a descobrir um padrão, sendo mais fácil chegar à resposta, pois os dados numéricos têm algum significado em relação à figura. A estrutura do problema é mantida.

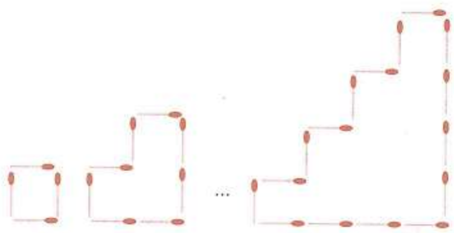
Processo 3. A abordagem mais simples consiste, em vez de procurar o padrão a partir dos dados numéricos, em fazê-lo olhando para os dados geométricos. Basta reparar que o número de bombons e de caramelos são dados pelas dimensões dos dois rectângulos por eles formados.

O número de caramelos é $(c-1)(l-1)$.

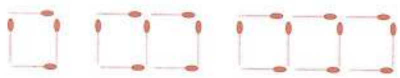


Apresentamos mais dois exemplos de tarefas do mesmo tipo

Escadas com fósforos
Desenhe a escada seguinte. Determine o número de fósforos usados em cada uma as escadas. Generalize.



Cancelas com fósforos
Desenhe a cancela seguinte. Determine o número de fósforos usados em cada uma das cancelas. Generalize.



Quem quer ser detective?

Descobrir padrões na tabela seguinte.

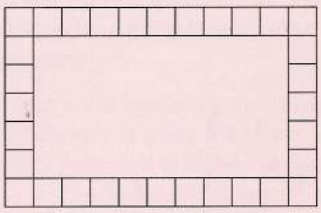
n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	26	676
7	49	17	289	27	729
8	64	18	324	28	784
9	81	19	361	29	841
10	100	20	400	30	900

Exemplo 3

Nesta investigação é difícil sistematizar processos de resolução — o caminho é observar e "ver" e as conclusões serão diferentes conforme o ponto de vista do aluno. Para o professor poderá ser surpreendente a diversidade de descobertas dos estudantes. Apresentamos apenas um exemplo: nas colunas dos quadrados o algarismo das unidades dos números que não são dezenas inteiras evolui sempre do mesmo modo: 1 4 9 6 5 6 9 4 1 mostrando um padrão de repetição e um padrão de simetria. Uma generalização deste comportamento para todos os inteiros permitirá concluir, por exemplo, que não há quadrados perfeitos terminados em 3. Esta tarefa evidencia propriedades numéricas interessantes desenvolvendo o sentido do número.

A Moldura

A *Moldarte* faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura.



Explique por palavras, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões.

Formule uma conjectura baseada nos resultados encontrados. Tente chegar a uma generalização.

Elabore um relatório escrito sobre o trabalho.

Adaptado das Normas, *NCTM*, 1989

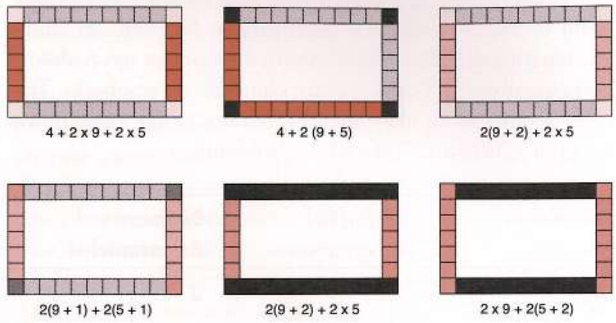
Exemplo 4

Este exemplo permite estabelecer conexões entre o número, a geometria e a álgebra. Para facilitar a descoberta do padrão pode-se utilizar molduras de diferentes tamanhos e recorrer a lápis de cor para descobrir vários modos de contagem, traduzíveis em diferentes expressões.

Processo 1. Preencher uma tabela com o comprimento c, a largura l e a moldura M e depois analisar os números na tabela, obtidos com diferentes dimensões, e tentar chegar à generalização. Este processo pode falhar por tentar generalizar partindo de um número reduzido de casos.

Processo 2. "Ver" expressões numéricas (p.e.: $4 + 2 \times 9 + 2 \times 5$) em diferentes desenhos (a cor é essencial). Contar os quadradinhos no "perímetro".

Por exemplo:



e a partir daqui descobrir o que há de comum nas várias figuras chegando à generalização, ou seja, a alguma das expressões:

$$4 + 2c + 2l$$

$$4 + 2(c + l)$$

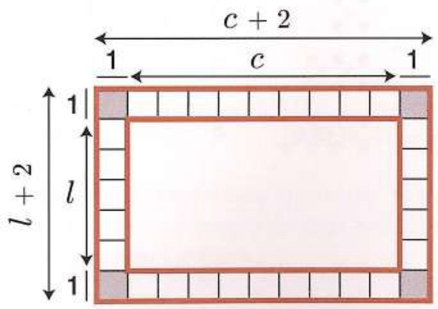
$$2(c + 1) + 2(l + 1)$$

$$2(c + 2) + 2l$$

$$2c + 2(l + 2)$$

Processo 3. Analisar o problema do ponto de vista geométrico, e calcular a área do rectângulo exterior descontando a área do rectângulo interior, chegando à expressão

$$(c + 2)(l + 2) - cl$$



Este problema oferece um modo natural de introduzir o conceito de expressões equivalentes. Todos estes processos geram regras equivalentes ou expressões equivalentes, que representam modos diferentes de ver o problema. Quando a equivalência não ocorre é porque a expressão está errada. Por outro lado, também permite que o aluno adquira o significado de variável.

Esta tarefa permite estabelecer conexões entre diferentes conteúdos e promove o desenvolvimento do pensamento algébrico ao permitir que o aluno utilize diferentes representações e analise as diferentes relações existentes entre as várias expressões que vai determinando de um modo mais concreto e sucessivamente mais geral e mais abstracto. O problema oferece também um enquadramento geométrico que ilustra como a álgebra emerge de um modo de generalizar e representar estas ideias.

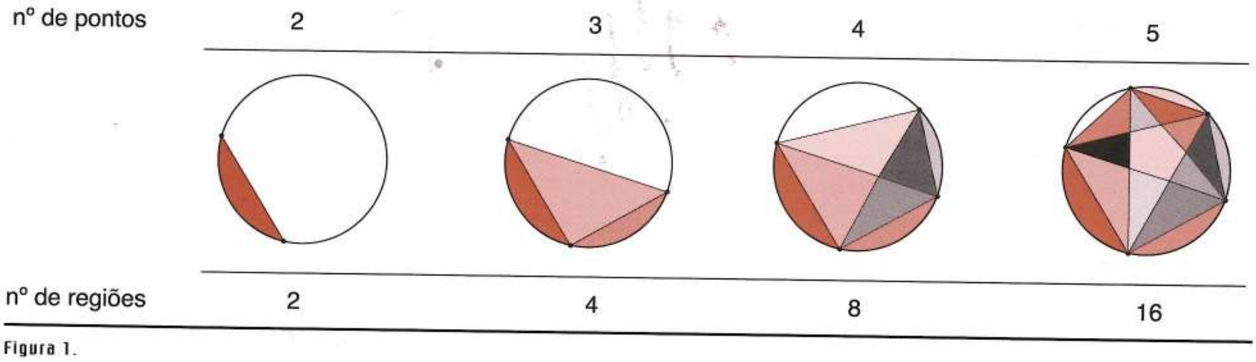


Figura 1.

A região perdida

Marque n pontos sobre uma circunferência de modo que, depois de se desenharem todas as cordas possíveis que os unem dois a dois, não haja três cordas concorrentes no mesmo ponto no interior da circunferência.

Em quantas regiões é que estas cordas dividem o círculo?

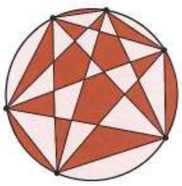
Adaptado de Guzmán, 1990

Este é um problema que se resolve, habitualmente, reduzindo a um problema mais simples. Torna-se mais fácil se se recorrer a um desenho para cada um dos casos (figura 1).

Analisando a tabela e observando o padrão, não temos dificuldade em fazer uma conjectura: Para n pontos, teremos 2^{n-1} regiões.

Mas ... marcando um sexto ponto e contando as regiões obtidas, em vez de 25 regiões tem-se apenas 31 regiões.

A conjectura falhou!



Este exemplo ilustra um dos riscos de generalizar partindo da procura de padrão em poucos dados.

Comentários

Das propostas apresentadas, algumas são tarefas básicas que permitem reconhecer padrões em diferentes representações tais como pictórica ou geométrica, numérica e mista. Outras requerem mais do que um simples reconhecimento de regularidades, envolvem generalização. No nosso trabalho temos constatado que a maioria dos alunos, perante actividades desta natureza, que envolvem generalização, utilizam uma abordagem numérica. Os alunos que trabalham na forma exclusivamente numérica manifestaram insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada. De modo geral os alunos que têm mais sucesso nas tarefas são os que recorrem a uma abordagem exclusivamente geométrica ou mista. Neste sentido devemos incentivar os nossos alunos a olhar para os problemas propostos de vários modos, e a mobilizar todos os seus conhecimentos sejam eles de natureza numérica ou geométrica.

Os exemplos apresentados permitem que os alunos, à medida que constroem novas figuras, comparem, discutam e procurem uma regra geral para descrever o padrão. São exemplos que abrem caminho para a introdução do conceito de variável e de equivalência de expressões numéricas e algébricas.

Apesar de estas propostas poderem dar significado à introdução de conceitos algébricos elementares podem apresentar alguma dificuldade sobretudo se os alunos não estiverem familiarizados em trabalhar com padrões. Na nossa prática temos verificado que um trabalho prévio de actividades básicas de reconhecimento de padrões de natureza diversa facilita a resolução de problemas que envolvem a descoberta de padrões e a generalização, permitindo uma maior sensibilização para as regularidades, propriedades e relações numéricas desenvolvendo o que é designado por sentido do número e podendo ser facilitador para o estudo da álgebra nos anos mais elementares.

A integração deste tipo de actividades no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: ME–DEB.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva (p. 167).

DEB (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Mason, J., Burton, L. e Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. London: HMSO.

ME–DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME–DES (2001, 2002). *Matemática A (10.º, 11.º, 12.º anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. `http://www.dgidc.min-edu/programs/prog_hm.asp` (acedido em 5/Março/2005)

ME–DGEBS (1990). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME–DGEBS (1991a). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem — 2.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME–DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem — 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Orton, A. (1999) (ed). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Palhares, P. e Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar, *Educare-Educere, 10*, 107–123.

Sawyer, W. (1955). *Prelude to mathematics*. London: Penguin Books.

Steen, L. A. (1988) The Science of Patterns, *Science, 240*, 611–616.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. e Borralho, A. (no prelo). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE*.

Isabel Vale

LIBEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

Teresa Pimentel

LIBEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

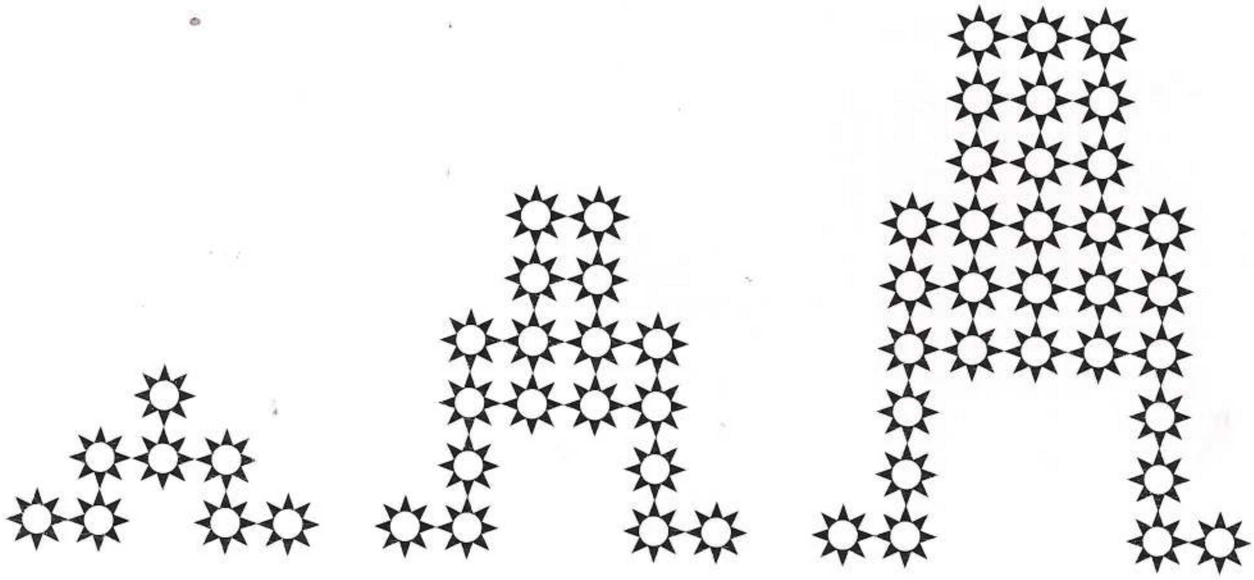
Materiais para a aula de Matemática

Investigando padrões

Esta tarefa foi concebida para ser explorada com alunos da formação inicial de professores do 1° e 2° ciclo mas com algumas adaptações poderá ser utilizada com alunos de qualquer nível de ensino. No primeiro e segundo ciclo interessará apresentar questões que realcem a subdivisão das figuras na "cabeça", "tronco" e "pernas" desenvolvendo o poder de observação das crianças, a procura de relações e a descoberta de um padrão visual e geométrico, sendo de excluir evidentemente as questões 6 e 7, e muito provavelmente a questão 4 pois esta exige a descoberta de um padrão numérico inacessível à maioria dos alunos destas idades. No terceiro ciclo já poderá explorar-se a tarefa incluindo essas questões, sendo a questão 7 uma forma a nosso ver interessante de trabalhar a equivalência de expressões algébricas, nomeadamente envolvendo factorização de polinómios e utilização de casos notáveis da multiplicação, que são conteúdos do 8° ano. No ensino secundário o estudo das sucessões fornece um ambiente natural para o seu tratamento. A realização da tarefa evidencia, como já referimos, a utilidade da diversificação de abordagens de descoberta de padrões, desde a puramente numérica até à pictórica e geométrica, facultando um trajecto que conduz naturalmente à identificação das duas. Esta tarefa, sendo mais complexa, exige que previamente sejam apresentadas aquilo que designámos por tarefas básicas de reconhecimento de padrões.

Investigando robôs: dos padrões à álgebra

Observa a sequência de robôs da figura:



robô 1 robô 2 robô 3

1. Desenha o robô seguinte.

2. Consegues ver algum padrão?

3. Regista na tabela o número de sóis correspondente ao número de ordem de cada robô.

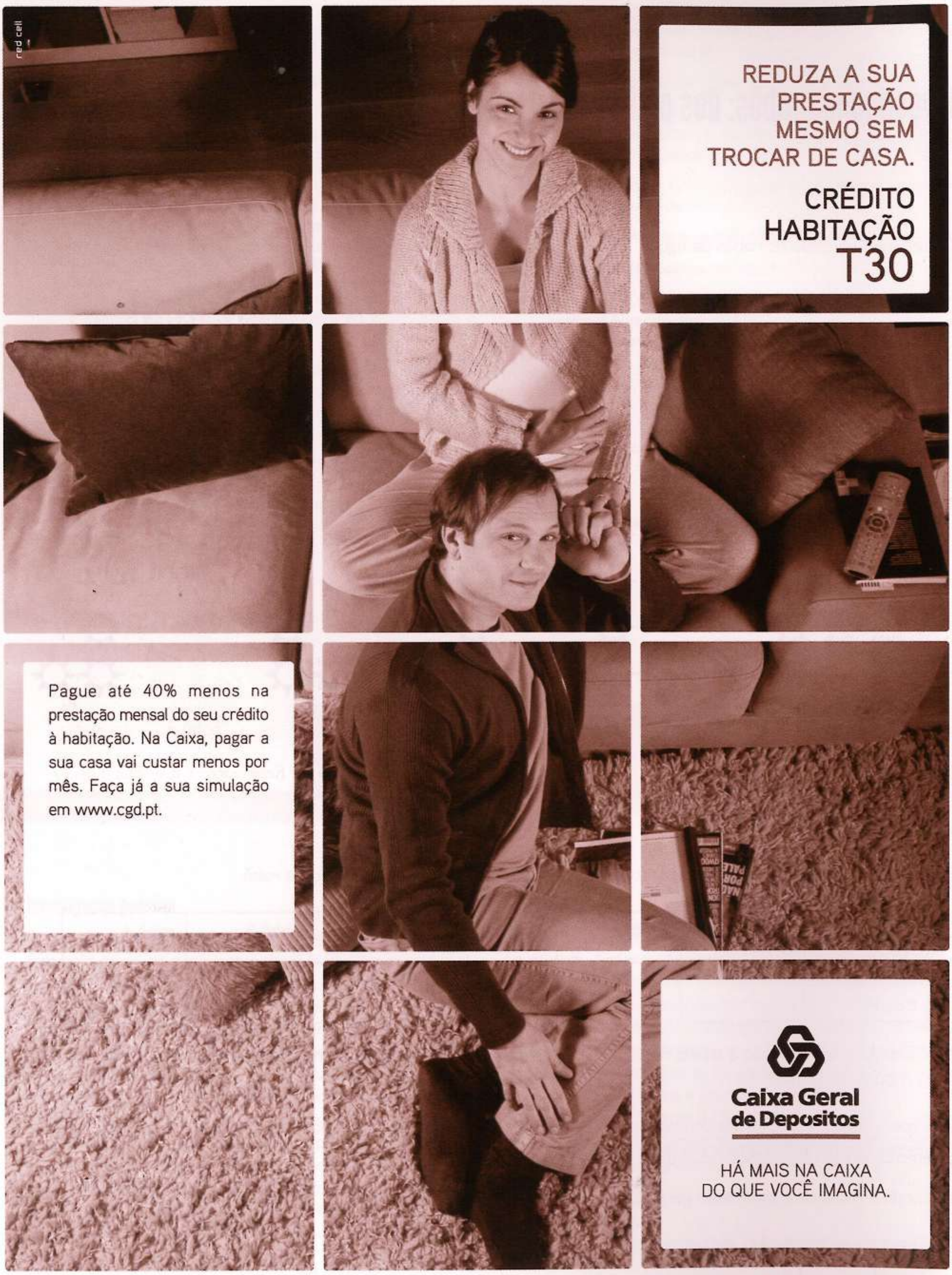
	robô 1	robô 2	robô 3	robô 4	robô 5	robô 6
número de sóis						

4. Consegues, observando a tabela, descobrir uma lei de construção que te permita dizer por quantos sóis é formado o robô de ordem n?

5. Procura agora outra forma de abordagem, olhando para cada figura e separando-a em componentes. Para cada um desses componentes procura arranjar uma lei de construção.

6. Escreve então uma expressão geral que se adapte ao robô de ordem n.

7. Relaciona as expressões encontradas em 4. e 6..



www.cgd.pt Caixadirecta: 707 24 24 24

A Álgebra nos seus primórdios . . .

Maria José Costa

"A ciência médica actual não vai muito além da Álgebra. Endireita-se uma costela . . ."

Camilo Castelo Branco, *Quatro Horas Inocentes*

O que é a Álgebra?

Mas o que é a Álgebra? Para responder a esta dúvida, um leitor não matematizado mas escolarizado ou, pelo menos, esclarecido, procurará num dicionário de língua portuguesa o significado de tal palavra. Assim, poderá encontrar «Ciência que generaliza as questões numéricas. Medicina antiga: ortopedia». Ficará assim informado que Camilo está a usar a palavra na segunda acepção, aliás legítima!

O leitor poderá não ficar por aqui e outra consulta poderá, por muito estranho que pareça, cimentar esta ideia: tal palavra tanto pode significar a "sciencia que se diz da regra da cousa" como a "arte de restabelecer os ossos partidos ou deslocados". A mesma consulta esclarece: esta dupla significância depende do étimo considerado. Assim, partindo de um dos étimos árabes *al-jabrâ* ou *al-jabr*, que significa "redução, reparação" o latim medieval introduziu o vocábulo *algebra* (sem acentuação), outra designação da chamada Ciência Caballa em oposição à chamada ciência Almuca Cabalha, esta com origem no verbo *cheber* ou no verbo *gebere* e que conduzem a *Arabigo*, com esse mesmo significado; por outro lado, partindo do étimo *al-jabārâ* nasce Álgebra, palavra agora acentuada e que significa "ortopedia". A confusão entre ambas as palavras não deve ter sido difícil . . .

A palavra *Álgebra* entrou na língua portuguesa em 1519; e tanto pode significar "parte da Matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números" como "ciência matemática cuja finalidade principal consiste em, simplificando e resolvendo por meio de fórmulas problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos, generalizar os resultados dos mesmos". Mais tarde dar-se-á a separação definitiva das duas áreas: em 1858 é introduzido o vocábulo "ortopedia" referindo-se a "especialidade médica que se dedica ao estudo e tratamento do sistema locomotor e da coluna vertebral (ossos, articulações, ligamentos, tendões e músculos)".

Impossível falar em Álgebra, no sentido matemático do termo, sem referir três nomes, dois árabes e um português: al-Khwārizmi, Omar Khayyam e Pedro Nunes.

O papel de cada um deles na criação da Álgebra está já sobejamente divulgado em numerosas páginas; contudo, não poderemos deixar de os referir neste trabalho. De matemáticos de outras civilizações, que também se preocuparam à sua maneira, segundo a sua cultura e até de acordo com as necessidades, os instrumentos, a mentalidade e o desenvolvimento da ciência na respectiva época, não se poderá dizer o mesmo; procuraremos dar-lhes alguma visibilidade apresentando alguns dos seus feitos algébricos.

Quando começou a Álgebra?

E quem poderá ser considerado pioneiro neste assunto?

Muitos são, dentro da História da Matemática, os autores que consideram que a Álgebra foi iniciada com al-Khwārizmi.

Al-Khwārizmi (c. 825) foi um dos sábios da Casa da Sabedoria, casa criada em Bagdad pelo califa al-Mansur. Escreveu, em árabe, dois livros de crucial importância para o desenvolvimento da Matemática. O título de um deles pode ser traduzido por *Cálculo por Restauração e Redução*; o título destaca as duas principais operações usadas na resolução de equações: escrita da equação sem termos de coeficientes negativos (reunião de termos no mesmo membro da equação todos com coeficientes positivos) e sem termos semelhantes no mesmo membro.

Assim, o método apresentado neste livro aplicado à equação $2x + 5 = 8 - 3x$ permite escrever sucessivamente:

$$2x + 5 + 3x = 8 \quad \text{e} \quad 5x + 5 = 8.$$

Até aqui, está ilustrado o *al-jabr*, a dita reunião. Se houvesse necessidade de multiplicar ambos os membros da equação para obter apenas coeficientes inteiros, ainda seria uma aplicação deste princípio.

Teremos agora de nos libertar da parcela 5 existente no primeiro membro. Para isso, aplicamos o *al-muqabala*, ou seja, somamos a ambos os membros -5, obtendo $5x = 3$. Afinal os princípios de equivalência que hoje utilizamos para resolver equações do primeiro grau provêm do século IX e terão sido criados por um matemático árabe de nome al-Khwārizmi.

Mais tarde, o mesmo título foi traduzido para latim por *Liber algebrae et almucabola*.

Al-Khwārizmi considerou seis tipos de equações que descreve de uma forma natural a partir dos intervenientes na própria equação. Apresentemos esses tipos, devidamente acompanhados da tradução para a linguagem actual e na qual x designa a incógnita, a que chamava "coisa" ou "raiz", e a, b e c as constantes, os números naturais que na equação figuram e aos quais al-Khwārizmi chama "números":

Quadrados iguais a raízes	Quadrados iguais a números	Raízes iguais a números
$ax^2 = bx$	$ax^2 = c$	$bx = c$
Quadrados e raízes iguais a números	Raízes e números iguais a quadrados	Quadrados e números iguais a raízes
$a^2x + bx = c$	$bx + c = ax^2$	$ax^2 + c = bx$

Para cada um desses tipos, que identifica de uma maneira especial, providencia regras para a sua resolução e opta por uma resolução geométrica para o caso das soluções serem números racionais. Veremos adiante a resolução geométrica de um desses tipos, identificado como "quadrados e raízes iguais a números", ou seja, do tipo $ax^2 + bx = c$. Repare-se que esta identificação não é casual: "quadrados", que al-Khwārizmi designa por mal, à primeira parcela que nós identificamos como um múltiplo do quadrado da raiz; "raízes", enquanto plural de "raiz", refere-se à segunda parcela na qual está um múltiplo da solução desejada; quanto ao segundo membro não há dúvidas quanto à interpretação!

Al-Khwārizmi explica a resolução a partir de um caso concreto, $x^2 + 21 = 10x$, portanto, do último tipo considerado no quadro acima, deste modo: "Calcula metade do número de raízes. É 5. Multiplica-o por ele próprio e o produto é 25. Subtrai dele 21 somado ao quadrado e o resultado é 4. Extrai-lhe a raiz quadrada, 2, e subtrai-a da metade do número de raízes, 5. Sobram 3." E conclui: "Esta é a raiz que queremos, cujo quadrado é 9." Mas não se fica por aqui: "Alternativamente, podes somar a raiz quadrada a metade do número de raízes e a soma é 7. Esta é [então] a raiz que queremos e o quadrado é 49".

A seguir, faz a discussão quanto à hipótese de se somar ou subtrair a raiz quadrada do binómio discriminante da linguagem actual a metade do coeficiente da incógnita, acrescentado: "Neste caso, tanto a adição como a subtracção podem ser usadas, o que não acontece em qualquer um dos outros casos (...)"; referindo-se aos casos em que o produto das raízes é negativo; isto significa a rejeição da raiz negativa! Alerta, também, para a existência de equações impossíveis e para o caso em que a solução é igual a metade do coeficiente da incógnita: as condições em que ocorrem coincidem, a menos da linguagem, com aquelas que hoje consideramos.

Faz acompanhar as regras de uma figura pois, no dizer do próprio autor, "Agora é necessário demonstrar geometricamente a verdade do mesmo problema que explicámos numericamente". Vejamos, então, a solução geométrica dada por Al-Khwārizmi na resolução da equação $x^2 + 10x = 39$; sugere-se a extracção da regra a partir da sequência de passos que conduz à figura 1:

- traçar o quadrado $[ABCD]$;
- no prolongamento de AD marcar o ponto E a 5 unidades de distância de D;
- no prolongamento de AB marcar o ponto F a 5 unidades de distância de B;
- determinar o ponto K de modo que o quadrilátero $[AFKE]$ seja um quadrado;
- prolongar DC e BC e designar por G e H, respectivamente, os pontos de encontro desses prolongamentos com os lados que lhes são perpendiculares, FK e EK.

A área do quadrado $[AFKE]$ é dada simultaneamente por

$$x^2 + 10x + 25 \quad \text{e por} \quad (x+5)^2.$$

Por isso, para o valor de x esperado, essas duas expressões coincidem. Ora, sendo $x^2 + 10x = 39$, então $(x+5)^2 = 39 + 25$. Daqui decorre o valor da raiz, 3, a partir do valor de $x + 5$, ou seja de 8.

Mas será este processo original? Poderá não ser, mas terá sido al-Khwārizmi quem primeiro sintetizou todos os tipos de equações de grau não superior ao 2°, bem como as respectivas resoluções e, consequentemente, estabeleceu os princípios de equivalência para as equações do 1° grau.

Outros inovadores

No século X, outro árabe de nome Omar Khayyam descobre que a extracção da raiz cúbica de uma constante a é dada pela intersecção de duas parábolas.

Omar parte de quatro quantidades, designadas por a, b, c e d, tais que

$$b/c = c/d = d/a.$$

Daqui deduz:

1. $c^3 = b^2a$, pois $(b/c)^2 = (c/d)(d/a)$ (basta multiplicar membro a membro as duas igualdades que se podem retirar da condição que relaciona a, b, c e d e nas quais aparece b/c.
2. $c^2 = bd$, (basta considerar a igualdade entre a 1ª e a 2ª expressões da relação referida); na hipótese de $b = 1$, então $c^2 = d$.
3. $d^2 = ac$ (basta considerar a igualdade entre as duas últimas proporções).

Admitindo c e d como variáveis e a como uma constante, considera as duas parábolas definidas em 2. e 3., de eixos perpendiculares um ao outro e com o mesmo vértice; aplicando a linguagem curricular, na primeira parábola o parâmetro, é $1/2$ e na segunda é $a/2$. Logo, desde que existam c e d, cumprindo 2. e 3., a raiz cúbica de a será dada por c, que é a abcissa do ponto de intersecção dessas duas parábolas (figura 2).

O contributo de Pedro Nunes vem na esteira das inovações de al-Khwārizmi. No seu *Libro de Algebra*, conside-

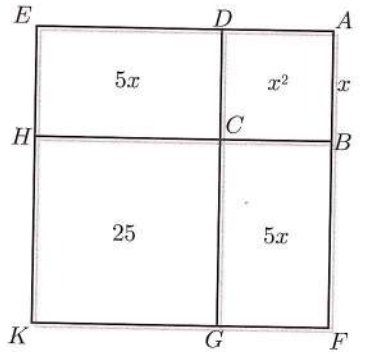


Figura 1.

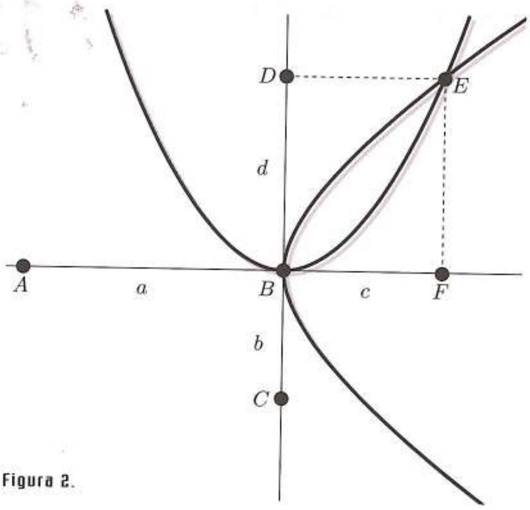


Figura 2.

ra seis tipos de "conjugações", a saber, e seguindo a ordem estabelecida no quadro anteriormente apresentado:

Censos iguais a coisas	Censos iguais a números	Coisas iguais a números
Censo e coisas iguais a números	Coisas e números iguais a censo	Censo e números iguais a coisas

Comparando a terminologia, somos levados a concluir que Pedro Nunes

- designa por "coisa" a raiz da equação e por "censo" o seu o quadrado,
- faz o tratamento das equações por nós ditas de completas com o coeficiente de x^2 unitário (diz "censo" e não "censos").

Faz distinção entre as conjugações escritas no quadro acima: às da primeira linha, chama "simples", e às que figuram na segunda, chama "compostas". Usa uma linguagem "sincopada" para escrever as equações, recorrendo, a abreviaturas das palavras proferidas: encontramos, por exemplo, "co", "ce" "p" e "m", com o significado de, respectivamente, "coisa", "censo", mais" e "menos. Usa "cifra" com o significado de "zero"; não considera coeficientes negativos: daí a necessidade das três "conjugações compostas".

Neste trabalho, e para cada uma das conjugações,

- apresenta, em linguagem corrente e genérica, uma regra para determinar a raiz em cada conjugação e aplica-a de imediato a um problema a resolver, supostamente proposto; faz, em geral, a verificação da solução encontrada. Estas regras, passadas para linguagem matemática, conduzem à fórmula resolvente actualmente em uso;
- aplica novamente a regra a um outro problema, também com a verificação da solução;
- demonstra a validade das regras dadas por dois caminhos diferentes; ambas as demonstrações se apoiam em figuras mas de natureza diferente, tal qual os argumentos utilizados.

Além disso, procede à discussão das equações. No Capítulo 6 da Primeira Parte do referido *Libro*, intitulado "Como reconhecer se um caso é necessário ou impossível", diz: "Daremos portanto alguns avisos para conhecer se o caso é impossível ou necessário, para que não trabalhemos no vazio". Também alerta que nem sempre é possível reconhecê-lo à partida ...

Sigamos a proposta de Nunes para uma das conjugações compostas, precisamente a 6ª anteriormente enunciada, adaptando a grafia mas procurando manter a estrutura original: "Quando um censo e o número forem iguais a coisas, multiplicaremos em si mesmo a metade do número das coisas criando quadrado, do qual tiraremos o número proposto, e do que restar tomaremos a raiz. A qual juntando com a metade do número das coisas, ou subtraindo se quisermos, nos dara o valor da coisa". A regra é, então:

- elevar ao quadrado a metade do coeficiente da incógnita,
- subtrair ao quadrado obtido o termo independente,
- calcular a raiz quadrada desta diferença,
- somar ou subtrair esta raiz à metade do coeficiente da incógnita.

Qual é a diferença entre esta regra e a anteriormente enunciada atribuída a al-Khwãrizmi? Fácil é constatar que coincidem, a menos do âmbito do seu enunciado: al-Khwãrizmi enuncia-a face a um exemplo; Pedro Nunes, opta pelo geral, enuncia-a para qualquer "conjugação" daquele tipo!

Não é difícil verificar a equivalência da regra aqui enunciada à fórmula resolvente actualmente em uso. É apenas neste tipo de equações que Nunes admite a soma e a diferença da raiz do quadrado discriminante com a metade do coeficiente de x; também é o único caso da equação de 2° grau com termo independente negativo; mas isto não significa que aceitasse raízes negativas: nos exemplos que inclui, as soluções são sempre e só números positivos.

Pedro Nunes avança com um exemplo, no qual retira ambas as soluções, após o que alerta para a equação com raiz dupla: se o número proposto for igual ao quadrado da metade do número das coisas, então essa metade do número das coisas será o valor da coisa. Exemplifica, depois, este "alerta" com $x^2 + 9 = 6x$; perante a diferença entre 3^2 e 9, diz, em jeito de justificação da sua afirmação: é indiferente somar ou subtrair à metade das coisas!

Nada falta no *Libro de Algebra* de Pedro Nunes para ser considerado um tratado sobre as equações de grau não superior ao segundo: regras gerais, demonstrações e discussões, tudo lá está! Mas também trata da resolução de equações do 3° grau.

E noutras civilizações não houve procedimentos algébricos?

Vejamos agora como outras civilizações lidaram com a necessidade de determinar quantidades desconhecidas.

Recuemos a Euclides, mais precisamente à proposição 44 do livro I da obra *Os Elementos*, cujo enunciado é:

"Aplicar a uma linha recta dada, segundo um rectilíneo dado, um paralelogramo igual a um triângulo dado".

Talvez a interpretação desta mensagem fique mais acessível substituindo

— "aplicar a" por "construir sobre",
— "linha recta" por "segmento de recta",
— "rectilíneo" por "ângulo".

Poderá ainda levantar alguma dúvida, Euclides pretender "um paralelogramo igual a um triângulo": por certo que esta "igualdade" não é no sentido geométrico mas sim métrico, ou seja; pretende que as duas figuras tenham a mesma área.

Simplifica, e não reduz a generalidade, construir um rectângulo sobre um segmento de recta de modo que a sua área seja previamente fixada. Numericamente, pretendemos, dados uma área A e um comprimento s, determinar o comprimento x tal que

$$sx = A$$

Euclides resolve o problema geometricamente. Não deixa, porém, de resolver uma equação!

Voltando a Euclides, mas agora ao livro VI dos seus Elementos, lá encontramos a proposição 29, que reza assim:

Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a uma figura rectilínea dada e excedente por uma figura paralelográmica semelhante a uma dada.

Tal como na proposição anterior, algumas substituições de linguagem facilitam o entendimento da mensagem; às duas primeiras antes indicadas, cabe agora acrescentar:

— "figura rectilínea" por "polígono",
— "excedente por" por "cuja área exceda".

Trabalhar um caso particular, usando rectângulos, o que em nada reduz a generalidade, permite entender mais claramente o conteúdo desta proposição. Afinal a proposição pretende que se construa sobre um segmento de recta dado, um rectângulo cuja área seja igual à de um polígono dado acrescida de uma outra área dada, por exemplo, da área de um quadrado. Recorrendo a simbologia, diremos: seja A a área de um dado polígono e seja s um dado comprimento: determine o comprimento x, de modo que

$$(s + x)x = A$$

Ora nesta expressão há duas constantes, A e s, e uma variável, x: não é senão uma equação do 2° grau!

Com outra proposição deste tipo, e a primeira proposição que referimos, temos nada mais, nada menos do que Euclides a dar processos geométricos para a resolução de três tipos de equações de 2° grau e a partir de figuras da mesma família da que al-Khwārizmi apresenta. Então não se pode atribuir a criação da Álgebra a Euclides? Os mais reputados especialistas em História da Matemática são peremptórios: Euclides não apresenta todos os tipos possíveis de equações do 2° grau! Logo, Euclides está apenas a fazer Geometria!

Nos tão célebres como antigos *Os Elementos* de Euclides encontramos com frequência situações algébricas resolvidas geometricamente e vem de longe a questão: trata-se de uma geometria algébrica ou de uma álgebra geométrica?

Em obras legadas por matemáticos chineses, que de algum modo chegaram aos nossos dias, somos levados a acreditar que os processos algébricos mereceram a sua atenção. Na recuperação da obra *Chiu-Chang Suan-Shu*, título traduzido por alguns como *Aritmética em Nove Secções* e por outros como *Nove Capítulos na Arte da Matemática*, levada a cabo por Liu Hui, que viveu no século III, é contada a história desta obra; porém, tanto a autoria como a data de elaboração são desconhecidas, tudo apontado, contudo, para ter sido escrita 213 anos antes de Cristo. Nesta obra, em cada capítulo há um conjunto de problemas sobre o mesmo assunto e todos de índole prática, centrados na actividade diária do reino. Um dos problemas do 7° Capítulo, cujo título é "Excesso e deficiência", tem, em tradução livre, o seguinte enunciado:

"Um grupo de amigos pretende fazer uma compra conjunta. Se cada um deles der 9 moedas, sobram 3; se cada um der 7, faltam 4. Quantos amigos compõem o grupo e quantas moedas são necessárias para efectuar a compra?"

Dispensamo-nos de transcrever as instruções que, incidindo sobre os números dados, conduzem à solução. O curioso é que, seguindo essas instruções, que passam inclusivamente pela disposição dos números do enunciado em filas, e recorrendo a expressões designatórias para as quantidades, caímos na expressão que hoje resulta da aplicação da regra de Cramer. Todavia, no ocidente atribui-se o conceito de determinante a este matemático suíço (1750)!

Um dos assuntos que mais prendeu a atenção dos matemáticos chineses terá sido aquele que hoje catalogamos como Congruências, talvez por este assunto ter a ver com a construção do calendário. Numa dessas obras, datada do ano 280, intitulada *Sun Tsu Suan Ching* que pode ser traduzido pela A *Aritmética do Mestre Sol* e da autoria de Sun Tsu, encontra-se o seguinte enunciado: "Há um número de objectos desconhecido. Quando contados 3 a 3, sobram 2; quando contados 5 a 5, sobram 3; e quando contados 7 a 7, sobram 2. Quantos são esses objectos?" O livro dá a respos-

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何。

答曰：

七人，

物價五十三。

Figura 3. Nesta figura, o enunciado ocupa as duas primeiras linhas, que vem acompanhado da respectiva solução, ambos em formato original.

ta (23) e também apresenta a resolução: "Se contados 3 a 3 sobram 2, põe 140. Se contados 5 a 5 sobram 3, põe 63. Se contados 7 a 7 sobram 2, põe 30. Agora soma esses números, o que dá 233; subtrai-lhe 210 e obténs a resposta". Obviamente que a actual teoria de congruências resolve o problema e justifica a resolução. Mas o problema é indeterminado e não é dito que se quer o número mínimo de objectos nessas condições. Como chegou o autor a estes números? Ora, calculando o mínimo múltiplo comum dos divisores tomados dois a dois, temos 35, 15, e 21. Multiplicando cada um destes números pelo resto da terceira congruência, ou seja, daquela cujo divisor não está envolvido no mínimo múltiplo comum, obtemos números cuja soma não é um múltiplo de 105, isto é, do mínimo múltiplo comum entre 3, 5 e 7; mas já o é 210. Será por isso que a resolução usa 140?

No século XIII, pelo menos, já os matemáticos chineses resolviam equações pelo chamado "método de Horner". Numa obra *Tratado Matemático em Nove Secções*, da autoria de Ch'in Chiu-shao, aparece a resolução de uma equação que na notação actual se escreve:

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

Os matemáticos chineses operavam com os "pauzinhos de contar", que dispunham em tabuleiros com um reticulado rectangular, dedicando uma linha a cada expoente da incógnita (aqui de 0 a 4) e um outro onde escreviam os sucessivos valores ensaiados para a solução. Mikami salienta o facto do autor abordar esta equação como uma equação do 4° grau e não como uma equação biquadrada e de todas as equações terem o termo independente negativo, termo a que chamavam *shih*, o que significa "absoluto".

Sem nos determos especialmente na representação dos cálculos, atentemos no processo:

— multiplica 8 pelo coeficiente do termo de maior grau;

— soma o produto obtido ao coeficiente do termo de grau seguinte, que neste caso é nulo;

— multiplica a soma obtida por 8 e soma ao coeficiente do termo de grau seguinte, aqui 763 200 mas da esquerda para a direita; aqui é notório que o factor que está a utilizar não é 8 mas 800! Daqui em diante assumimos este valor;

— a diferença encontrada é multiplicada novamente por 800 e somada algebricamente com o coeficiente do termo seguinte, 0, neste caso;

— a soma encontrado é novamente multiplicada por 800;

— o novo produto é somado algebricamente ao termo independente: dá 38 205 440 000.

Deixando de lado este valor, recomeça este processo ainda com o mesmo factor, agora com os coeficientes modificados pelas operações descritas, o que leva a um novo "termo independente": –826 880 000. Recomeça novo ciclo, e mais outro, ambos com o mesmo factor 800, o que leva, respectivamente, aos números –3 076 800 e –3 200. Aqui, muda de factor passando de 800 para 40 e retoma o processo de somas e produtos mas usando o coeficiente do termo de maior grau, neste caso –1, e cada um dos números que ia deixando de lado, no sentido contrário àquele em que foram obtidos: –3 200, –3 076 800, –826 880 000 e 38 205 440 000. Encontra, então, –38 205 440 000 como último produto, o que equivale a encontrar 0 como soma final! Declara, pois: a raiz é 840, o que facilmente verificamos com a ajuda da Regra de Ruffini.

Aliás, usando esta regra, temos algum modo simples de representar os números e as operações que descrevemos (tabela 1).

Falta esclarecer de onde surgem os números 800 e 40. Joseph é peremptório: indispensável estimar o número de algarismos bem como o de maior ordem, feito, provavelmente por tentativa e erro!

O processo descrito, que posteriormente foi aplicado para aumentar a precisão no caso das raízes decimais tanto na China como no Japão, é considerado precursor do designado método de Horner, publicado em 1819. Não há, no entanto, evidência de que este matemático tenha tido conhecimento dos desenvolvimentos da Matemática na China.

Os egípcios também sentiram a necessidade de encontrar valores encobertos em condições, por vezes ligados a problemas da vida real, mas não só.

	–1	0	763 200	0	–40 642 560 000
800		–800	–640 000	98 560 000	78 848 000 000
	–1	–800	123 200	98 560 000	38 205 440 000
800		–800	–1 280 000	–925 440 000	
	–1	–1 600	–1 156 800	–826 880 000	
800		–800	–1 920 000		
	–1	–2 400	–3 0 768 000		
800		–800			
	–1	–3 200			
40		–40	–129 600	–128 256 000	–38 205 440 000
	–1	–3 240	–3 206 400	–955 136 000	0

Tabela 1.

O enunciado do problema 72 do Papiro de Ahmes[1], em tradução mais ou menos livre, é: "Quantos pães de *pesu* 45 podem ser trocados por 100 pães de pesu 10?"

[*pesu*: dá informação quanto à relação do grão empregue no fabrico de pão. Para a mesma quantidade de grão, o pão será de pesu tanto mais baixo quantos mais pães forem fabricados].

O próprio Papiro apresenta a resolução, que se baseia, tal como noutros problemas de *pesu*, em apenas dois passos: primeiro, determinar a quantidade de grão gasto na confecção dos 100 pães de *pesu* 10 e, depois, o número de pães que se podem confeccionar com igual quantidade de grão.

Porém, a resolução sugerida é a seguinte:

— determina o excesso de 45 sobre 10: dá 35.
— divide 35 por 10: dá $3 + 1/2^2$
— multiplica esse número por 100: dá 350
— soma 100 a 350: dá 450
— Conclusão: 100 pães de 10 *pesu* são trocados por 450 de 45 *pesu*.

Porquê esta resolução?

Ora, decalcando estes passos mas recorrendo a expressões designatórias, por exemplo:

— p e q: as duas variedades de pão, em *pesu*
— x e y: quantidade de pães a receber, respectivamente a p e a q *pesu*

chegamos a uma resposta em função das expressões designatórias escolhidas:

$$y = \frac{q-p}{p}x + x$$

expressão equivalente a

$$y = \frac{q}{p}x,$$

e que responde à determinação de y de tal modo que seja $y/x = q/p$.

O próprio papiro refere a sua idade: terá sido copiado cerca de 1650 anos antes de Cristo a partir de um outro documento escrito entre 2000 e 1800 a.C., sobre assuntos conhecidos desde 2650 a.C.! Os 85 problemas que este papiro apresenta, quase todos acompanhados das respectivas resoluções e todos com a sua solução, poderão ser exemplos de problemas tipo, portanto, não se tratará de situações pontuais nem tão pouco de resoluções de acaso. Não poderemos considerar esta resolução o exemplo tipo das resoluções de equações $y/x = q/p$? Perante uma resposta afirmativa, estaríamos perante a resolução mais antiga de uma equação, por processos mentais conducentes às regras que dominam os processos actuais! Poder-se-á dizer: mas isso é um problema prático, não é uma actividade puramente matemática! É verdade: mas não deixa de exigir um raciocínio matemático!

Mas neste mesmo papiro existem exercícios numéricos envolvendo incógnitas, no dizer de Robins & Shute, "representando uma aproximação à Álgebra", sendo as quan-

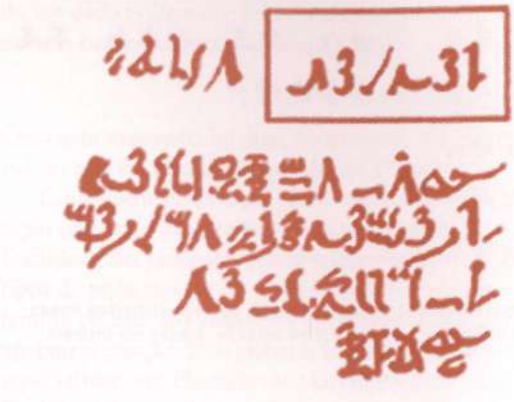


Figura 4. Na 1ª linha, a versão original do dito problema: 1/3 deve ser somado 2/3 devem ser subtraídos; depois, a resolução.

tidades desconhecidas enunciadas verbalmente; alguns destes exercícios parecem ter por objectivo uma diversão do tipo dos problemas "pensa num número". Estes exercícios, tinham, eventualmente, um carácter pedagógico: a aprendizagem das crianças que nasciam livres era feita em ambiente de jogo e entretenimento, com exemplos concretos e concretizando as situações.

Vejamos um caso desses (Problema 28 do papiro), que em tradução livre reza assim: "A quantidade e dois terços dela são somados, e da soma a terça parte da soma é subtraída, e sobram10. Qual é o número?"

Representando por x o número a descobrir, este enunciado é traduzido em notação actual por:

$$x + 2/3x - 1/3(x + 2/3x) = 10.$$

Em Gillings encontramos uma possível resolução:

— se fica 10, tomar a 10ª parte, que é 1;
— o número é 9.

E segue-se a verificação: cálculo de $2/3$ de 9, a sua soma com 6, o cálculo da terça parte de 15, a diferença para 15 e a constatação que se obtém o número 10 esperado!

Poder-se-á pensar que é uma resolução "tentativa e erro" ou ao acaso. Mas ela tem uma justificação que pode ser encontrada por comparação com a resolução actual da mesma. Da simplificação do primeiro membro da equação resulta $10/9x = 10$, ou seja: $1/9x = 1$ e daí decorre imediatamente a solução.

A agilidade de cálculo com as chamadas fracções unitárias pode justificar que o escriba não tivesse necessidade de registar mais passos na resolução deste problema.

Esta resolução contribui para mostrar que os egípcios tinham processos matemáticos para responder rapidamente a questões como a desta adivinha numérica que, neste caso, exige resolver uma equação do 1° grau.

Um outro problema do mesmo papiro mostra uma actuação diferente perante as equações do 1° grau: a resolução pelo "método da falsa posição". Vejamos como era aplicado, recorrendo ao enunciado de um outro, o problema n.° 27, por exemplo: "Uma quantidade somada com a sua quinta parte dá 21. Qual é essa quantidade?". A resolução

— assume que a resposta é 5;
— soma a 5 a sua quinta parte: obtém 6;
— procura o número que multiplicado por 6 dá 21: obtém 3,5.
— multiplica 3,5 por 5: obtém 17,5, que é a solução.

Ou seja: ao assumir que a solução é 5, verifica que o primeiro membro não dá 21 mas sim 6; faz, então, a proporção $6/5 = 21/x$.

Este problema, tal como outros 10, e ao contrário da maioria dos que figuram no papiro de Ahmes, não tem qualquer interesse do ponto de vista do dia-a-dia: tudo aponta para que visasse apenas a actividade matemática. A sua resolução apoia-se no método da falsa posição: depois de ensaiar um valor para a solução, corrige-o em função do resultado obtido e do desejado.

No papiro de Berlim, encontrado em muito más condições, há indícios de um problema de equações simultâneas, cujo enunciado reza assim: "Um quadrado e um segundo quadrado, cujo lado é $1/2 + 1/4$ do lado do primeiro, têm, em conjunto, área igual a 100. Mostra-me como calcular isto". Entende-se, neste enunciado, que se pretende calcular a medida do comprimento do lado de cada um dos dois quadrados, conhecendo a soma das suas áreas e a relação entre os comprimentos dos seus lados. Em simbologia actual, pretendemos resolver um sistema de duas equações, sendo uma delas de 2° grau e a outra do 1°, a saber:

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{e} \quad 4x - 3y = 0.$$

A resolução é feita em linguagem geométrica, partindo de um quadrado de lado unitário:

— conclui que o lado do outro quadrado é $1/2 + 1/4$ (basta considerar $y = 1$ na segunda equação e representar $3/4$ em fracções unitárias),
— calcula a área deste quadrado: $1/2 + 1/16$,
— soma a área dos dois quadrados: $1 + 1/2 + 1/16$,
— toma a raiz quadrada deste valor: $1 + 1/4$,
— toma a raiz quadrada da área do quadrado dado: 10,
— divide 10 por $1 + 1/4$, ou seja, faz a proporcionalidade entre o valor suposto (1), o resultado obtido $(1 + 1/4)$, a solução (x) e o valor total dado (10).
— afirma que a solução é 8.

Ou seja: aqui também é utilizado o método da falsa posição!

Não pretendíamos contribuir para uma nova definição de Álgebra, nem na sua vertente moderna nem na sua vertente clássica. Pretendíamos, isso sim, apresentar contributos de matemáticos de diversas civilizações e em diferentes épocas para a sua construção ou evolução desse capítulo da Matemática. Muito ficou por dizer e muitos mais nomes gostaríamos de ter citado ...

Notas

1 Papiro com o nome do copista que o escreveu; é também conhecido como papiro de Rhind, o antiquário escocês que o comprou em Luxor, no século XIX. O papiro foi encontrado no túmulo do Faraó do Egipto, Ramsés II e pensa-se que poderá ser da autoria de Imhotep, Físico e Arquitecto. O texto estava escrito em linguagem hierática, uma das três linguagens usadas no Egipto.

2 Escrita com recurso a fracções unitárias. Do resultado obtido, 3,5, separamos a parte inteira da parte decimal que representamos em forma de fracção. Adiante voltará a aparecer notação idêntica mas dispensar-nos-emos de prestar este esclarecimento.

Referências bibliográficas

B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, P. Noordhoff LTD — Groningen, Holland.

Dicionário Etimológico da língua portuguesa, José Pedro Machado, Livros Horizonte LDA, Lisboa, 3ªedição, 1977.

Dicionário HOUAISS da língua portuguesa, Círculo de Leitores, Lisboa, 2002.

Dirk J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, Colecção Ciência Aberta, Gradiva — Publicações, L.daLisboa, 1989.

Gay Robins & Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papurus: an ancient Egyptian text*, British Museum Publications, London, 1987.

George Cheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-Western Roots of Mathematics*, I.B.Tauris & CO. LTD Publishers, London. New York.

J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer–Verlag New York Inc., 1986.

Karine Chemla et Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres: Le Classique mathématiques de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, Paris, 2004.

Maria Fernanda Estrada *et al*, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.

Novo Dicionário Compacto da língua portuguesa, António de Morais Silva, Editorial Confluência, Lda, Livros Horizonte, 1980.

Pedro Nunes, *Obras: Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências. Libro de Álgebra em Arithmetica y Geometria*, Academia das Ciências de Lisboa, Imprensa Nacional, 1950.

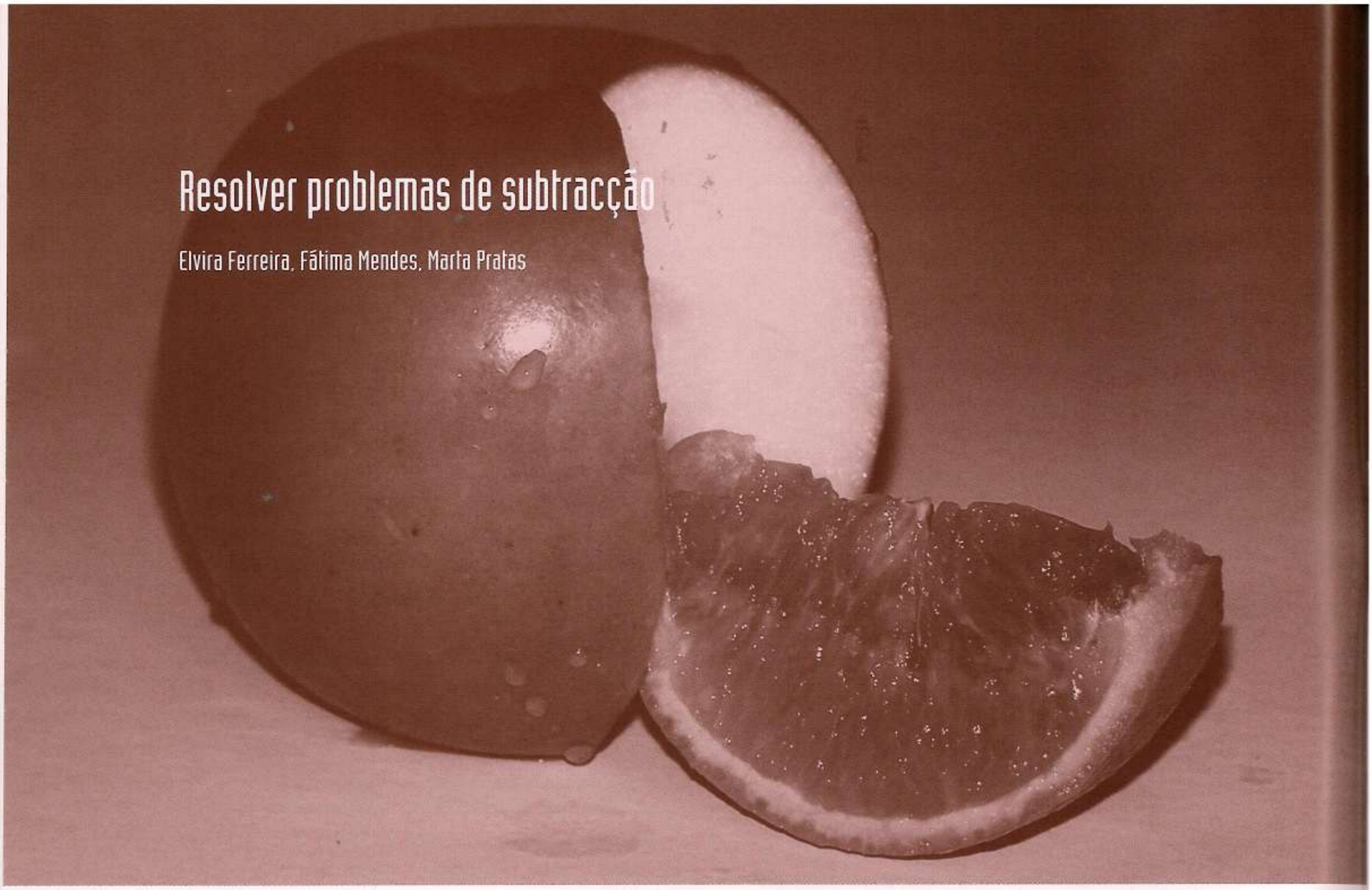
Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. MIT Press, 1982, Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y.

Ulrich Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, Vol.1, MIT Press, 1971.

Yoshio Mikami, *The desenvolviment of Mathematics in China and Japan*, 2ª edição, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y.

Maria José Costa

Escola Secundária Augusto Gomes [Professora Aposentada]



Resolver problemas de subtracção

Elvira Ferreira, Fátima Mendes, Marta Pratas

Neste artigo, procuramos reflectir sobre o desenvolvimento do sentido do número e a aprendizagem do sentido das operações dos alunos ao longo do 1° ciclo.

A nossa preocupação baseia-se, essencialmente, em apoiar o desenvolvimento dos processos próprios dos alunos e criar condições para que os alunos tenham oportunidade de desenvolver o seu sentido de número, que inclui, nomeadamente, o desenvolvimento de métodos e de técnicas de cálculo adequadas à resolução de problemas e a descoberta da estrutura dos números e das suas relações. Consideramos também importante, como referem Fosnot e Dolk (2001), tornar os alunos capazes de olhar para os números e, partindo desse olhar, estabelecer as relações adequadas e jogar com elas. Ou seja, para se ser capaz de calcular usando o sentido do número, não é suficiente dispor de uma grande quantidade de estratégias, é preciso também saber olhar para os números envolvidos em cada situação.

Assim, planeámos um conjunto de tarefas com um progressivo grau de dificuldade e que envolviam a operação subtracção. Seleccionámos três dos problemas que aplicámos e apresentamos, neste artigo, a resolução realizada pelo Gonçalo e pelo Roberto, dois dos alunos da turma com que trabalhámos, para, a partir daí, podermos discutir e reflectir sobre as estratégias utilizadas e o modo como vão evoluindo. Com estes exemplos, pretendemos contextualizar a discussão sobre alguns aspectos associados ao sentido de número relacionados com a subtracção e a evolução das estratégias próprias dos alunos na resolução de problemas que envolvem esta operação.

Exemplos de sala de aula

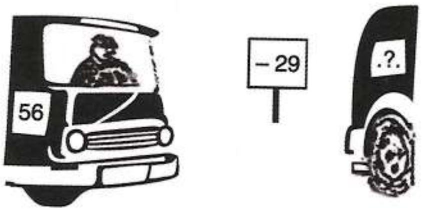
Os exemplos escolhidos foram retirados do trabalho realizado pela Elvira numa turma de 2° ano de escolaridade. Integrada desde o ano lectivo anterior num projecto de desenvolvimento curricular sobre competências de cálculo e sentido do número[1] desenvolveu um trabalho com os seus alunos considerando as perspectivas pedagógicas e didácticas veiculadas neste texto. Desde o 1° ano, procurou que os alunos se habituassem a justificar, oralmente ou por escrito, o seu modo de pensar, para além de tentar realizar todo um trabalho que estimulasse e desenvolvesse nos alunos o gosto pela Matemática.

No que diz respeito à subtracção, desde o ano lectivo anterior, os alunos foram confrontados com variados problemas para resolver, primeiro com números pequenos e recorrendo essencialmente à contagem como estratégia de resolução. Gradualmente, os números envolvidos foram sendo maiores e as estratégias de resolução foram sendo de outro tipo. Os alunos podiam resolver o mesmo problema utilizando procedimentos muito diferentes e sabiam que todos tinham um espaço para explicar aos colegas como tinham pensado e feito, habituando-se, desde cedo, a explicitar oralmente o seu modo de pensar e a ouvir a explicação dos seus colegas.

Muitas vezes, as várias resoluções eram escritas no quadro e assinadas pelo seu autor, de modo a se poder comparar as diferentes estratégias, sendo os próprios alunos a identificar a mais eficaz, no sentido de mais fácil e rápida. Este procedimento fazia com que alunos mais fracos ou menos rápidos pudessem observar outras estratégias e evoluir no sentido das mais eficazes.

É de notar que os alunos não conheciam ainda o algoritmo da subtracção mas conseguiam resolver problemas de subtracção com empréstimo, utilizando as estratégias veiculadas e trabalhadas com eles desde o início do ano.

1. O problema do autocarro



No autocarro estão 56 pessoas.
Saem 29 na paragem.
Quantas ficam no autocarro?

Este problema[2] foi proposto aos alunos em Janeiro. Desde o início do ano, e no que diz respeito à subtracção, já tinham resolvido bastantes problemas, embora com números menores. Também estavam habituados a resolver problemas relacionados com o seu dia a dia. Muitas vezes, eram eles próprios os protagonistas das situações propostas, o que muito lhes agradava. Podemos afirmar que, de uma forma geral, nesta altura do ano, tinham, na sua maior parte, desenvolvido um bom conhecimento da ordem e da estrutura dos números até 20, conseguindo fazer a passagem gradual desse conhecimento para números maiores. Estavam também muito habituados a utilizar a linha numérica, semi-estruturada (com a indicação das dezenas) como um modelo de suporte ao cálculo.

A situação proposta por este problema diz respeito ao sentido da subtracção usualmente denominado de *retirar* ou *mudar tirando*, correspondendo a retirar uma certa quantidade a outra. Tipicamente, os problemas deste tipo são resolvidos através de um procedimento subtractivo para se calcular o resultado (Ponte e Serrazina, 2000).

Roberto

Analisemos a resolução efectuada pelo Roberto (figura 1). A situação é entendida como um problema de subtracção e representada por 56 − 29. Parece-nos que, a primeira coisa que o Roberto fez foi olhar para os números envolvidos, o 56 e, especialmente, o 29.

Então, como tinha de retirar 29, terá pensado que 29 = 20 + 9, optando por subtrair primeiro 9, usando o facto conhecido de 9 ser 6 + 3. Assim, partiu do 56 e retirou 6 e depois 3, chegando ao 47. Também, neste procedimento, terá pensado na decomposição do 56 em 50 + 6. Parece-nos que a seguir, pensando na decomposição do 20 em 7 + 10 + 3, tirou 7 e obteve 40. A seguir deu um salto de 10, chegando ao 30. Podemos conjecturar que, nesta altura, deve ter adicionado o número de saltos, 7 + 10 para concluir que o último salto seria de 3, perfazendo o 20. Neste procedimento final estão implícitas outras relações numéricas, que 7 + 10 é 17 e que 17 + 3 é 20, logo, tem ainda de se tirar 3, chegando ao 27.

Podemos afirmar que o Roberto fez este conjunto de procedimentos encadeados de um modo sequencial e linear, partindo do número maior e chegando ao menor, usando um conjunto de relações entre os números que envolvem decomposições adequadas à situação proposta. Somos ainda levadas a pensar que, eventualmente, a utilização da linha com a marcação prévia das dezenas, poderá ter influenciado os procedimentos deste aluno, nomeadamente quando no 47 não deu um salto de 10 mas passou primeiro pelo 40.

Gonçalo

Tal como o Roberto, o Gonçalo (figura 2) utilizou, também, um cálculo organizado de uma forma sequencial e baseado no conhecimento que parece ter sobre as diferentes representações dos números. No entanto, as estratégias de cálculo a que recorreu, diferentes das anteriores, parecem revelar um conhecimento um pouco mais organizado e desenvolvido sobre a estrutura do 10.

Começa por tirar 6 ao 56 (salto até à dezena mais próxima), parecendo-nos que terá pensado primeiro que 56 se pode escrever como 50 + 6, logo 56 − 6 é 50. Como também sabe que 29 é 20 + 9, a partir do 50 tira logo 20 de uma só vez, chegando assim ao 30. Poderemos conjecturar que usou o facto conhecido de 50 ser 30 + 20, logo 50 − 20 é 30. Uma das justificações para este conhecimento poderá ser o ter automatizado as decomposições diversas dos números até 20, usando neste caso a adequada 5 = 3 + 2 e estendendo-a para 30 + 20.

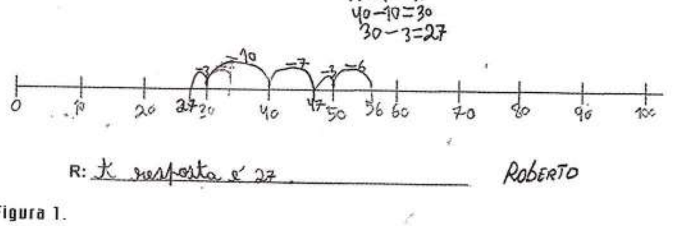


Figura 1.

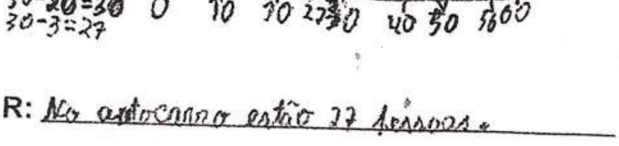


Figura 2.

Qual a diferença de preço destas mesas?
Explica como pensaste.

Figura 3.

Para retirar seguidamente apenas 3, terá de ter calculado $20 + 6 = 26$ e saber que para 29 basta adicionar 3, perfazendo 29 e chegando ao resultado pretendido, 27. Para além das relações numéricas conhecidas e utilizadas por este aluno, os procedimentos usados levam-nos ainda a pensar que consegue relacionar a adição com a subtracção de uma forma adequada.

2. O problema das mesas

Este problema (figura 3) foi proposto aos alunos em Março. Nesta altura, os alunos já quase não recorriam à linha numérica como suporte para o cálculo, mesmo que a professora o sugerisse, pois tinham um maior domínio e segurança no trabalho com os números. De facto, os alunos foram gradualmente adquirindo maior poder de abstracção e melhor conhecimento das imagens dos números. Apesar de não se socorrerem da linha numérica continuavam a usar procedimentos sequenciais de cálculo. Também já trabalhavam com números maiores, conseguindo fazer a passagem daquilo que sabiam com números pequenos para o cálculo com números grandes.

Este problema diz respeito a uma situação subtractiva do tipo *comparar*, pois pretende-se comparar duas quantidades, neste caso o preço de cada uma das mesas. Considerando que estas situações são muitos usuais no nosso dia a dia, é fundamental que os alunos as compreendam e desenvolvam os procedimentos adequados à sua resolução.

Roberto

O Roberto consegue resolver o problema (figura 4) de uma forma correcta, recorrendo a um procedimento aditivo. Utiliza novamente um conjunto de cálculos sequenciais, partindo do número mais pequeno, 29 para chegar ao número maior, 145.

Os cálculos são feitos mentalmente, registando os passos intermédios, sempre que necessário. Adiciona 1 ao 29 para chegar à dezena mais próxima e, a partir do 30 dá um salto de 70, chegando ao 100. Provavelmente, para dar o salto de 70, o Roberto baseou-se em relações que conhecia, tais como $10 = 3 + 7$, ampliando-a para $100 = 30 + 70$.

Ultrapassando a *barreira* dos 100 sem dificuldade dá, finalmente, um salto de 45. Para isso usou a relação, sua conhecida, que $100 + 45$ é 145.

Posteriormente, adicionou os saltos sucessivos para obter o número pretendido. Esta adição, que corresponde a $1 + 45 + 70$, foi efectuada de uma forma flexível, não seguindo a ordem das parcelas mas fazendo os cálculos de uma maneira mais rápida e adequada, tendo em conta os números envolvidos. Parece ter decomposto o 45 em $40 + 5$, usando apenas o 40 para adicionar 70, porque sabe que $4 + 7$ são 11. Finalmente, de uma forma sequencial adicionou o que restava, $1 + 5$, obtendo 116.

Poderemos conjecturar que consegue passar eficazmente a *barreira* do 100, recorrendo a relações entre números que conseguiu ampliar a partir dos conhecimentos sobre os números até 20 e até 100. Por outro lado, é de realçar o procedimento adequado e flexível relacionado, de um modo implícito com a propriedade associativa da adição, no caso em que tem três parcelas, 1, 45 e 70, adicionando-as da forma mais conveniente.

Gonçalo

A estratégia que adoptou (figura 5) revela que soube *olhar* para os números envolvidos. Apesar dos números serem já bastante grandes foi capaz de utilizar um procedimento subtractivo e andar para trás a partir do aditivo, ou seja, calcular a diferença $145 - 29$. Usando mais uma vez um procedimento sequencial, parece evidenciar um bom conhecimento da estrutura do sistema de numeração. Parte do 145 e vai até à dezena imediatamente inferior, dando um salto de 5. Este cálculo baseia-se no conhecimento de que o número 145 se pode representar através de $140 + 5$ logo, $145 - 5$ é 140. Seguidamente, dá um salto de 20, obtendo 120. Provavelmente recorreu e ampliou a relação sua conhecida $20 + 20$ são 40 e, por isso $40 - 20$ são 20.

29+116=145
29+1=30
30+70=100
100+45=145
1+45+70=116
40+70=110
110+1+5=116

R: A diferença é 116 euros.

Figura 4.

145-29=116
145-5=140
140-20=120
120-4=116
5+20+4=29

R: A diferença do preço é 116 €.

Figura 5.

É preciso poupar água

1. Se todos os dias em tua casa 5 pessoas fizerem descargas de autoclismo, quantos litros de água se gastarão só com o autoclismo?

   R: ______________________________

2. Todos os dias, em casa da professora 3 pessoas fazem descargas de autoclismo. Quantos litros de água se gastarão?

   R: ______________________________

3. Qual a diferença de litros de água gastos em casa da professora e em tua casa?

   R: ______________________________

4. Se em tua casa todos tomarem duche todos os dias, quantos litros de água se gastarão?

   R: ______________________________

5. Se tomares um duche todos os dias, quantos litros de água gastarás numa semana?

   R: ______________________________

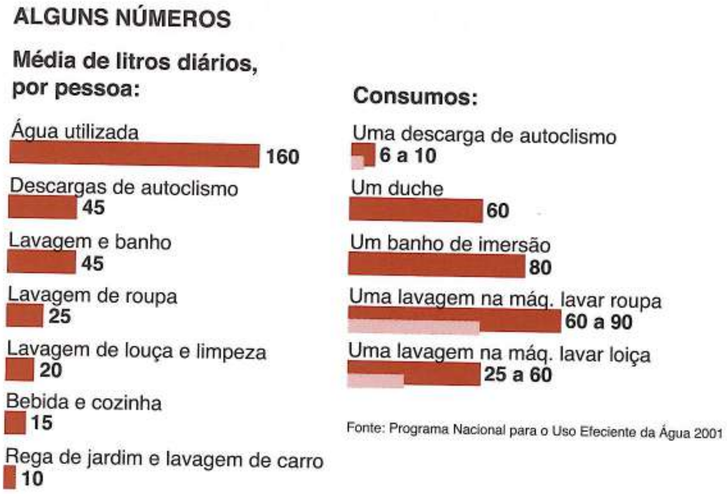


Figura 6. Ficha É preciso poupar água.

O último salto é de 4, o que perfaz o total de 29. Parece-nos que podemos inferir que usou a decomposição do 29 em 5 + 20 + 4, adequada aos cálculos necessários, revelando um raciocínio bastante elaborado.

O Gonçalo revela estar bastante familiarizado com a operação subtracção, para além de dominar muito bem os números envolvidos e as várias decomposições a eles associadas. Comparando com a sua resolução do 'problema do autocarro' pode observar-se que utiliza o mesmo tipo de procedimentos, mostrando um raciocínio bastante elaborado. É de referir que este aluno parece evidenciar muito boas competências de cálculo e, tal como Roberto, regista apenas os passos intermédios, quando necessário.

3. É preciso poupar água

Esta ficha (figura 6) foi proposta aos alunos já no final do ano, com o início do tempo quente e quando o problema da falta de água em Portugal começou, mais uma vez, a ser discutido. A preocupação do contexto do problema ser real e próximo dos alunos esteve, mais uma vez, presente. Neste artigo só iremos abordar a resolução da questão 3.

No que diz respeito ao sentido da subtracção envolvido nesta questão, podemos afirmar que estamos perante uma situação de *comparar*. É de notar que os números envolvidos no problema não foram escolhidos ao acaso pois, apesar de já serem números grandes, o facto de serem múltiplos de 5 pretendia facilitar os cálculos considerando que os alunos estavam muito habituados a trabalhar com as estruturas do 5 e do 10.

Roberto

Tratava-se de encontrar a diferença entre o 225 e o 135, as quantidades de água gasta em casa do aluno e da professora, respectivamente.

Nesta altura do ano, o Roberto revela bastante facilidade no tratamento dos números e das suas propriedades. Começa por representar o problema (figura 7), fazendo uma indicação do que precisa saber e parece ter começado por escrever 225–____= 135. Os cálculos efectuados revelam que parte do aditivo para chegar ao resto, usando os passos necessários e que correspondem ao subtractivo, indicando que este aluno é capaz de utilizar estratégias subtractivas

225 – <u>90</u> = 135
225 – 25 = 200
200 – 65 = 135
65 + 25 = 90

R: A diferença é 90 litros de água.

Figura 7.

135 + 90 = 225
135 + 5 = 140
140 + 60 = 200
200 + 25 = 225
5 + 60 + 25 = 90

R: A diferensa entre mim e a professora é 90 litros de água

Figura 8.

recorrendo a propriedades da operação em causa. Neste procedimento está implícita a relação entre 225 − 135 =? e 225−? = 135.

Partindo do 225, retira 25, para chegar à centena mais próxima. Apesar dos números envolvidos serem bastante grandes, parece que este aluno conseguiu fazer a ampliação do seu conhecimento sobre os números, utilizando: 225 = 200 + 25 logo 225 − 25 = 200. Subtrai depois 65, de uma só vez, para chegar ao 135. Como não se percebia, através do registo, como foi efectuada a adição 65 + 25, a Elvira perguntou-lhe como tinha pensado. O Roberto referiu que fez 65 + 20 = 85 e 85 + 5 = 90.

Gonçalo

O Gonçalo representa o problema (figura 8) partindo de 135+____= 225, optando por recorrer a uma estratégia aditiva. Aquele é entendido como uma adição e não como uma subtracção, visto que se parte de uma das parcelas e se completa até obter o total. Assim, parte do 135 e adiciona 5 até à dezena mais próxima, pensamos que sem dificuldade, considerando a contagem de 5 em 5, muito trabalhada anteriormente. Para chegar ao 200 adicionou 60, a partir do qual lhe bastou adicionar 25 para atingir o 225. Usou a relação numérica 140 + 60 = 200 provavelmente a partir de outras, tais como 4 + 6 = 10 ou 100 = 40 + 60, já anteriormente muito utilizadas.

É de notar que este aluno parece conhecer a relação entre as operações adição e subtracção, aplicando esse conhecimento para resolver este problema concreto. A *barreira* dos 200 foi facilmente ultrapassada, estendendo as estratégias de cálculo que conhecia e usava com números até 100.

Como não se percebia, através dos registos apresentados, como foram efectuados os cálculos 5 + 60 + 25 = 90 para se encontrar a diferença de litros de água, a Elvira pediu ao Gonçalo que lhe explicasse como pensou e ele disse, "fiz 60 + 20 que são 80, 80 + 10 são 90, porque 5 + 5 são 10.

Subtrair com números maiores que 20: aspectos a ter em conta

Ao longo da análise efectuada a partir das estratégias e procedimentos utilizados pelo Roberto e o Gonçalo durante a resolução de alguns problemas, fomos dando indicações do que consideramos fundamental trabalhar com os alunos e que contribui fortemente para o desenvolvimento do sentido do número e das operações, em particular no que se refere à subtracção.

Apesar dos exemplos de problemas analisados envolverem números maiores que 20, os procedimentos utilizados pelos alunos assentam fundamentalmente num conhecimento profundo sobre os números até 20 e nas relações entre eles. Trata-se de apoiar e desenvolver a tendência natural que as crianças têm de contar quantidades e, gradualmente, de as agrupar, numa progressiva estruturação. Por outro lado, é essencial que este primeiro trabalho com os números seja organizado de maneira que os alunos lhes atribuam significados associados ao *mundo real* e comecem a estabelecer pontos de referência para as medições, os preços, as idades, etc.

Ao mesmo tempo, devem ser trabalhados os aspectos relacionados com a ordem, contribuindo para que os alunos sejam capazes de organizar e posicionar um conjunto de números por ordem de grandeza. Um dos modelos que pode contribuir para a aprendizagem dos números enquanto sequência, para além de actividades de contagem para a frente e para trás a partir de um número, é a linha numérica semi-estruturada (com as dezenas marcadas) ou vazia, onde os alunos se habituam a posicionar os números.

Na turma do Roberto e do Gonçalo, o trabalho durante o 1° ano assentou, entre outras, em actividades que pretendiam ter em conta os aspectos aqui descritos. No que diz respeito à aprendizagem da subtracção, todo o trabalho associado a esta operação foi, por um lado, ligado a situações da vida de todos os dias dos alunos e, por outro, muito relacionado com actividades de contagem. Houve, desde sempre, a preocupação de apoiar as estratégias informais e próprias dos alunos, tentando que, gradualmente, elas pudessem ser mais formais mas também flexíveis, de modo a serem adequadas à resolução dos diversos problemas.

Os problemas apresentados neste artigo pretenderam exemplificar, contextos variados e próximos dos alunos e também diferentes sentidos da subtracção. As estratégias usadas pelos alunos foram induzidas pelo contexto apresentado, para além de se relacionarem fortemente com os números envolvidos. Para estes alunos não constituiu dificuldade de maior o resolver cada um deles, dado que estavam habituados a *olhar* para os números e a escolher a estratégia que melhor se adaptava e com a qual se sentiam seguros. No entanto, se a estratégia utilizada tivesse sido o algoritmo, estaria em causa a subtracção com empréstimo e o procedimento teria sido igual para todos. Assim, e olhando para o problema das mesas, podemos observar que o Roberto usou uma estratégia aditiva e o Gonçalo uma estratégia subtractiva. Ambos usaram o conhecimento e as relações que conheciam sobre os números e fizeram as decomposições adequadas a cada caso. Considerando os números envolvidos, muito afastados um do outro, a estratégia mais *inteligente* seria a subtractiva, mas esta questão só começou a ser compreendida por quase todos depois de terem sido confrontados com variados problemas de subtracção em que os números estavam muito próximos ou muito afastados um do outro.

O cálculo com números até 20 está sempre presente nas resoluções apresentadas, pois é a partir dele que os alunos ampliam as relações numéricas entre números maiores. Saber relações como $7 + 3 = 10$ permite depois utilizar no cálculo com números maiores a relação $70 + 30 = 100$. Também é fundamental para a resolução deste tipo de problemas a ligação entre a operação adição e a subtracção. Com números muito pequenos, estes alunos habituaram-se a fazer a passagem de uma para a outra. Por exemplo, para justificar que $7 - 3$ é 4 eles diziam "porque $4 + 3$ é 7". O tomar consciência da relação inversa entre estas duas operações permitiu-lhes, mais tarde e com números maiores, usar esse conhecimento.

Olhar para os números e, a partir daí, decidir qual a sua representação mais adequada, é visível, por exemplo na resolução dos dois primeiros problemas do Gonçalo. Em ambos, o número 29 aparecia como subtractivo e, num caso, foi decomposto em $6 + 20 + 3$ e, no outro, em $5 + 20 + 4$. Provavelmente, o trabalho realizado no 1° ano à volta das composições e decomposições dos números até 20, serviu de suporte para esta flexibilidade com os números maiores.

A utilização da linha numérica como suporte ao cálculo também se revelou importante pois é um dos modelos mais potentes no cálculo estruturado[1] (APM, 2005). Como refere Beishuizen (2003), ela é apropriada para tornar explícitos os procedimentos informais[2] dos alunos, considerando o seu carácter linear. Nestes exemplos, apesar de só no primeiro problema recorrerem à linha numérica, os alunos continuam a usar procedimentos sequenciais, não só porque são próximos das suas estratégias informais mas porque foram reforçados pelo modelo da linha numérica.

Tanto o Roberto como o Gonçalo foram evoluindo nos procedimentos usados e, progressivamente foram utilizando procedimentos mais sofisticados e formais. Se analisarmos o modo de resolução do 1° e do 3° problema do Roberto, podemos afirmar que existe alguma evolução, nomeadamente no número de passos necessários e na grandeza dos números envolvidos em cada passo.

Reflexão final

Iniciámos este artigo mostrando a nossa preocupação com o desenvolvimento do sentido do número e das operações dos alunos ao longo do 1° ciclo. Mostrámos alguns exemplos de problemas que podem desenvolver, em particular, os aspectos relacionados com a subtracção, proporcionando aos alunos situações que facilitam o desenvolvimento de estratégias de cálculo flexíveis e adequadas às diferentes situações e números envolvidos.

Deste modo, parece-nos que estaremos a contribuir para desenvolver um conjunto de competências numéricas associadas à subtracção que lhes permitirão resolver todo o tipo de situações subtractivas, mesmo sem ter ainda conhecimento do algoritmo. Tal como refere Beishuizen, (2003) todo um trabalho baseado nos números e nas suas relações ajuda mais os alunos na sua compreensão do que a introdução prematura dos algoritmos. De facto, o desenvolvimento do sentido do número pelos alunos está associado ao desenvolvimento de um conjunto de competências numéricas que inclui o conhecimento e a destreza com os números, o conhecimento e a destreza com as operações e ainda a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo (McIntosh *et al.*, 1992).

O conhecimento e a destreza com os números significa, em particular, que os alunos compreendem as regularidades dos números, que um mesmo número tem múltiplas representações e que se podem usar números de referência para avaliar ou comparar com outros. O conhecimento e a destreza com as operações que os alunos devem construir implicam, nomeadamente, que percebam o efeito das operações, as suas propriedades e as relações entre elas. Finalmente, é fundamental que os alunos, perante situações de cálculo concretas, sejam capazes de mobilizar o conhecimento que têm sobre os números e as operações e o apliquem de uma forma flexível e eficaz, relacionando o contexto com as estratégias usadas.

Estes alunos frequentavam o 2° ano e, por isso, o trabalho com os números e as operações não está ainda completo, precisando de ir evoluindo até ao cálculo formal. No entanto, pensamos que, quanto mais tempo lhes for dado para poderem desenvolver e aperfeiçoar este tipo de conhecimentos e procedimentos de cálculo flexível, melhor será o seu sentido do número, o que lhes permitirá resolver diversificadas situações que surgem na vida de todos os dias.

Pensamos também que a análise e reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos fornecem pistas muito importantes ao professor, que lhes permite acompanhar e identificar dificuldades sentidas por eles e, por outro lado, perceber os seus modos de pensar, muitas vezes bem diferentes daquilo que imaginamos.

Notas

1 Ver APM (2005).

2 Adaptado de Beishuizen (2003).

Referências bibliográficas

APM, (2005). *Desenvolvendo o sentido do número — Perspectivas e exigências curriculares*. (Materiais para o educador e para o professor do 1° ciclo). Lisboa: APM.

Beishuizen, M. (2003). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools*. (pp. 157–168). Buckingham: Open University Press.

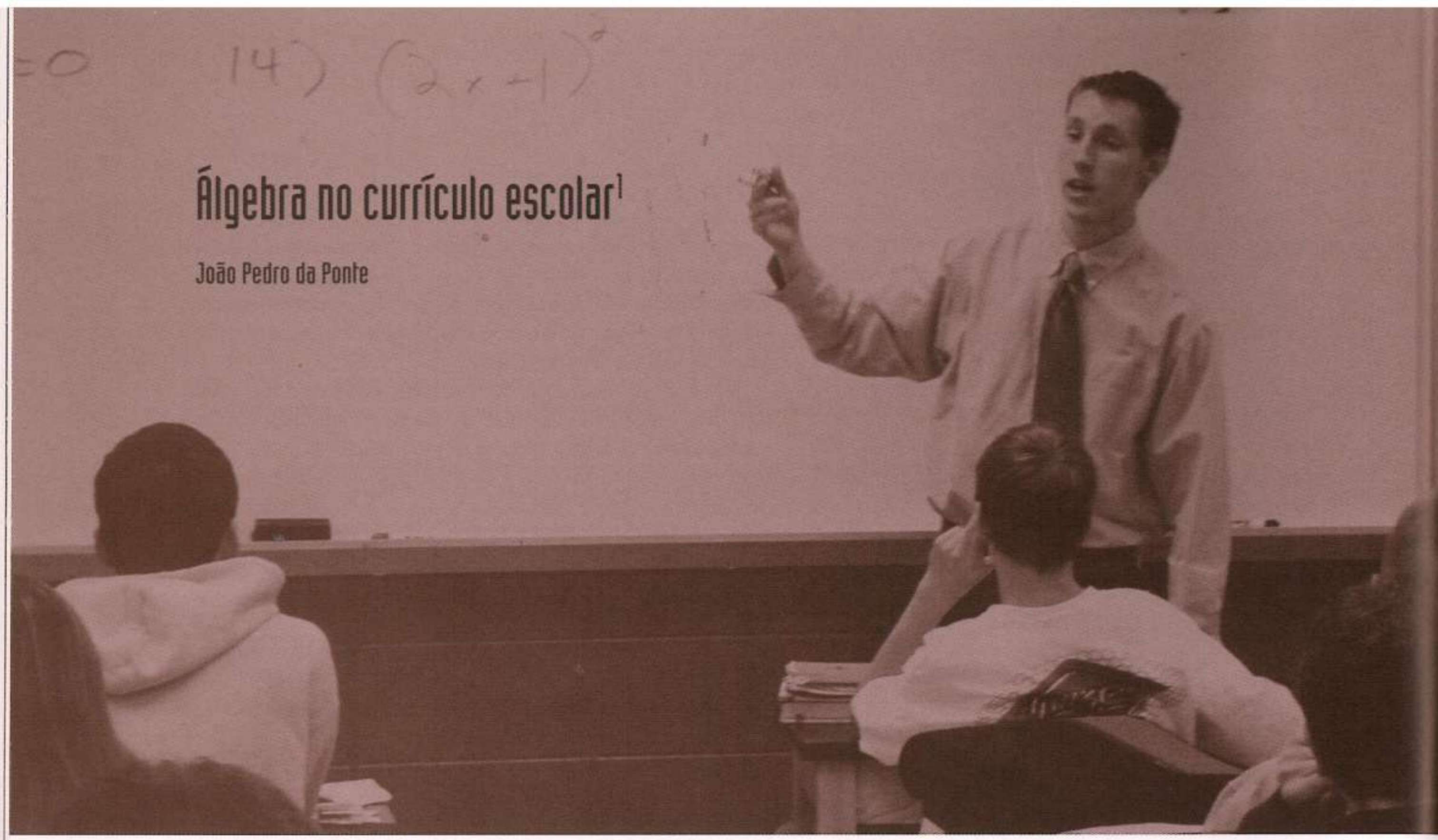
Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing numbersense, addition and subtraction*. Portsmouth. NH: Heinemann.

Ponte, J. e Serrazina, M.L., (2000). *Didáctica da Matemática do 1° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Elvira Ferreira, EB1 Prof. Francisco Veríssimo, Marinha Grande

Fátima Mendes, ESE de Setúbal

Marta Pratas, EB1 Prof. Francisco Veríssimo, Marinha Grande



Álgebra no currículo escolar[1]

João Pedro da Ponte

Na maioria dos países, a Álgebra é um tema fundamental do currículo da Matemática escolar. Quem não tiver uma capacidade razoável de entender a sua linguagem abstracta e de a usar na resolução dos mais diferentes problemas e situações está seriamente limitado na sua competência matemática. No entanto, em Portugal, este tema tem merecido pouca atenção da Educação Matemática. Pouco se tem reflectido sobre o papel da Álgebra no currículo, as razões porque os alunos portugueses mostram fraco desempenho neste campo e o que poderia ser feito para melhorar as respectivas aprendizagens.

1. O que é a Álgebra?

Podemos situar as origens da Álgebra na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas da Antiguidade — no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia. O célebre papiro de Amhes/Rhind é um documento matemático cheio de técnicas de resolução de problemas com um marcado cunho algébrico (ver Stanic e Kilpatrick, 1989). A pouco e pouco vai-se afirmando o conceito de equação e a Álgebra passa a ser entendida como o estudo da resolução de equações ("algébricas"). Diofanto (329–409), por alguns considerado o fundador da Álgebra, desenvolve métodos aproximados para a resolução de diversos tipos de equações e sistemas dos 1.° e 2.° graus. O termo Álgebra é cunhado no século IX por al-Khwarizmi (790–840), para designar a operação de transposição de termos, essencial na resolução de equações[2].

As equações gerais dos 3.° e 4.° graus mostram-se muito mais difíceis de resolver que as dos 1.° e 2.° graus e resistem a todos aos esforços dos matemáticos até ao século XVI, altura em que são brilhantemente solucionadas por Scipione del Ferro (1465–1526) e Ferrari (1522–1565). Outra questão importante é a de saber quantas soluções pode ter uma equação algébrica de grau n (ou, noutros termos, quantos zeros pode ter uma função polinomial). O primeiro matemático a afirmar que uma tal equação tem sempre n soluções foi Girard (1595–1632) mas não o demonstrou. Este importante teorema foi sucessivamente provado e refutado por diversas vezes, numa história interessantíssima em que intervêm matemáticos famosos como Leibniz (1642–1727), Euler (1707–1783), d'Alembert (1717–1783) e Lagrange (1736–1813) e só foi resolvido por Argand (1768–1822), em 1814, e por Gauss (1777–1855), em 1816.

Dois resultados essenciais marcam a etapa final do desenvolvimento da teoria das equações algébricas: (i) a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.°, dada por Abel (1802–1829), e (ii) a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4.° tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811–1832). É este matemático quem, neste trabalho, estuda pela primeira vez a estrutura de grupo que viria a ser fundamental no desenvolvimento posterior da Álgebra.

A partir de meados do século XIX, a Álgebra conhece uma evolução profunda. O estudo das equações (algébricas) esgota-se com a demonstração do teorema fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos gerais (algébricos) para a resolução de equações de grau superior ao 4.°. A partir dessa altura, a atenção dos matemáticos começa a voltar-se cada vez mais para o estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel, corpo e conjunto.

Dado o modo como foi ensinada durante séculos, a Álgebra é usualmente vista como tratando de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações e sistemas de equações. Isso é testemunhado pela terminologia usada nos actuais programas portugueses do 3.º ciclo do ensino básico que, em vez de falar em "Álgebra", fala apenas em "cálculo" (referindo-se ao cálculo numérico e algébrico). Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (onde como vimos, se destaca a ideia de resolução de problemas), quer actuais (onde se dá atenção a relações e a diversas outras estruturas algébricas), quer mesmo do período "clássico" da Álgebra (estudo de funções e da variação em geral).

Em termos epistemológicos, a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objectos com que esse campo trabalha mais directamente. Podemos então perguntar — quais são os objectos fundamentais da Álgebra? Há duzentos anos a resposta seria certamente: "equações". Hoje em dia, essa resposta já não nos satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções, como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

2. O pensamento algébrico

A melhor forma de indicar os grandes objectivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer que visa desenvolver o *pensamento algébrico* dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso. Na verdade, segundo o NCTM (2000), o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação). (p. 37)

O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com outras estruturas matemáticas (como as relações de ordem e de equivalência) e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico. No entanto, o pensamento algébrico envolve também o "sentido do símbolo" (*symbol sense*), como diz Abraham Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Ou seja, no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstracto tanto quanto possível. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de padrões e regularidades.

Kaput e Blanton (2005) sugerem que o pensamento algébrico se deve tornar uma orientação transversal do currículo, à semelhança do que já acontece com o pensamento geométrico. Para estes autores, isso significa:

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure, sempre que possível, a generalização;

Caminhando

A figura mostra as pegadas de um homem a andar. O comprimento do passo, P, é a distância entre a parte de trás de duas pegadas consecutivas.

Para os homens, a fórmula

$$\frac{n}{p} = 140$$

estabelece uma relação aproximada entre n e P, em que

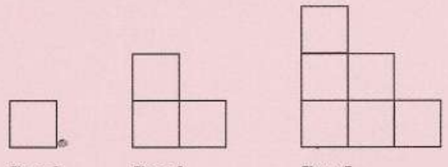
n = número de passos por minuto, e
P = comprimento do passo em metros

Figura 1. Adaptado do Pisa, p. 82.

Padrão em escada

Questão 24: Padrão em escada

O Roberto constrói um padrão em escada, utilizando quadrados. Aqui estão as etapas que ele segue:



Como pode ver, o Roberto utiliza um quadrado na etapa 1, três na etapa 2 e seis na etapa 3.

Quantos quadrados deverá utilizar na quarta etapa?

Resposta: .... quadrados

Figura 2. Adaptado do Pisa, p. 89.

- Tratar os números e as operações algebricamente — prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objectos formais para o pensamento algébrico;
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1° ciclo.

3. As dificuldades dos alunos em Álgebra

No estudo internacional PISA 2003 (Ramalho, 2004), alguns dos itens referem-se a questões de natureza algébrica. Trata-se de questões que envolvem relações e dependências funcionais entre variáveis, padrões e regularidades e aspectos matemáticos da mudança, e que surgem numa variedade de representações, simbólicas, algébricas, gráficas, tabulares e geométricas.

Neste estudo, duas das questões de natureza algébrica surgem com o título *Caminhando* (Figura 1). Uma delas, pergunta

Questão 8 — Se esta fórmula se aplicar ao Pedro e ele der 70 passos por minuto, qual é o comprimento do passo do Pedro? Apresente os cálculos que efectuar.

A questão pode ser resolvida substituindo o valor conhecido ($n = 70$) na fórmula dada (numa equação literal do 1.° grau) e determinando depois o valor desconhecido P:

$$\frac{n}{p} = 140 \rightarrow \frac{70}{P} = 140$$

A equação é relativamente simples. O aspecto mais problemático diz respeito ao facto da incógnita P aparecer em denominador. Acertaram nesta questão 36,6% dos alunos portugueses, isto é, cerca de um terço, o que corresponde à média internacional. Uma percentagem quase idêntica de alunos (32,3%) substituiu correctamente o valor de n na fórmula, mas deu uma resposta incorrecta (como $P = 2$) ou não respondeu.

Outra questão pergunta:

Questão 9 — O Bernardo sabe que o comprimento do seu passo é de 0,80 metros. A fórmula aplica-se ao caminhar do Bernardo.

Calcule em metros por minuto e em quilómetros por hora, a velocidade que o Bernardo caminha. Apresente os cálculos que efectuar.

Esta questão é bastante mais complexa, pois pede a velocidade, cujo valor não se tira directamente da fórmula dada. O modo mais directo de resolver envolve a determinação do número de passos por minuto dados por Bernardo:

$$\frac{n}{0,80} = 140 \rightarrow n = 112.$$

A partir daqui o problema poderia resolver-se recordando que a velocidade é o espaço percorrido na unidade de tempo e ainda que o espaço percorrido num minuto pode ser determinado a partir do conhecimento do comprimento de cada passo e do número de passos dado num minuto. Designando a velocidade por v, temos

$$v = 112 \times 0,8 = 89,6 \text{ (metros por minuto)}$$

e ainda, como era igualmente pedido

$$v' = 112 \times 0,8 \times 60 = 5376 \text{ (metros por hora),}$$

e portanto a resposta será 5,376 k/h.

Responderam correctamente a questão 4,6% dos alunos portugueses, ou seja, uma pequena minoria, percentagem abaixo da média internacional de 5,8% que, no entanto, não foi muito melhor.

A Questão 8, classificada como de nível de dificuldade simples (reprodução) envolve, na verdade, dois procedimentos que muitos alunos terão treinado: substituir um valor numa expressão algébrica e resolver uma equação do 1.° grau simples. Já a Questão 9, classificada de nível de dificuldade intermédio (conexões) envolve a coordenação de diversos passos:

- substituição do valor conhecido na fórmula,
- cálculo do número de passos por minuto,
- recordar o conceito de velocidade e reconhecer como se pode esta determinar a partir da informação dada,
- cálculo da velocidade em metros por minuto,
- e, depois, cálculo da velocidade em quilómetros por hora.

Apenas 1 em cada 20 alunos portugueses, ou seja, aproximadamente um aluno em cada turma, conseguiu resolver correctamente esta questão.

Neste mesmo teste internacional surgem também questões relacionadas com padrões e regularidades, como é o caso da questão, *Padrão em escada* (Figura 2):

Questão 13 — Quantos quadrados deverá utilizar na quarta etapa?

Esta questão envolve o reconhecimento de uma regularidade relativa ao número de quadrados de sucessivas etapas:

$$1, 3, 6 \ldots$$

Notando que da 1.ª para a 2.ª etapa aumentou 2 e da 2.ª para a 3.ª aumentou 3, o aluno deve deduzir que da 3.ª para a 4.ª etapa haverá um aumento de 4, sendo portanto a resposta 10. Os alunos portugueses que respondem correctamente são apenas 46,9%, ou seja, menos de metade. Neste item ficam significativamente abaixo da média internacional de respostas correctas, que é de 67%.

Esta questão sobre padrões é de dificuldade relativamente reduzida, sendo classificada como tal pelo próprio PISA (reprodução). A única coisa que se pede é o elemento seguinte de uma sequência, que é das perguntas mais simples que se podem fazer sobre padrões. É verdade que existem padrões mais simples, envolvendo repetições sem variação ou com variação constante. Neste caso, a própria variação varia, mas fá-lo de um modo particularmente simples, seguindo a sequência dos números naturais (a partir de 2).

Um outro tipo de questões do PISA envolve noções de variação, como se exemplifica no item *Crescimento* (Figura 3)

A propósito do gráfico da Figura 3 eram formuladas, entre outras, as seguintes questões:

O crescimento

Os jovens estão cada vez mais altos

No gráfico seguinte está representada a altura média dos jovens rapazes e raparigas holandeses, relativa ao ano de 1998.

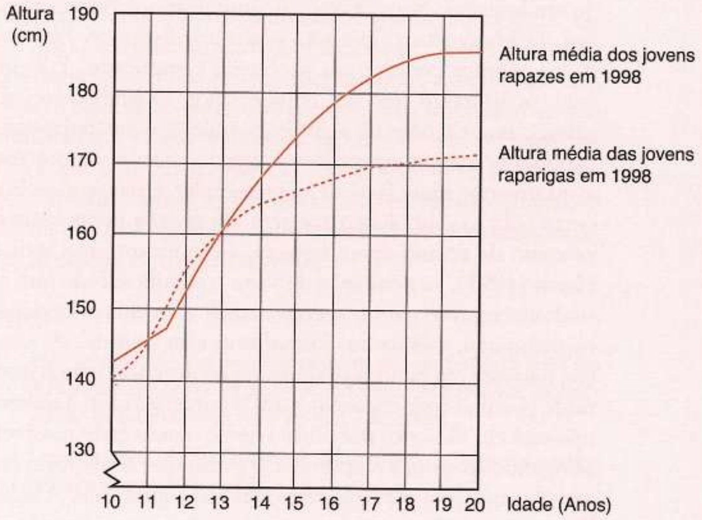


Figura 3. Adaptado do Pisa, p. 90.

Questão 15 — Explique de que modo o gráfico mostra que, em média, o crescimento das raparigas é mais lento depois dos 12 anos de idade.

Questão 16 — De acordo com o gráfico, durante que período da sua vida as raparigas são, em média, mais altas que os rapazes?

A questão 16 envolve a observação do gráfico e a identificação das abcissas dos pontos em que as duas funções se intersectam. É uma questão considerada simples (reprodução) que é respondida correctamente por 56,6% dos alunos portugueses, um valor inferior à média internacional, que é de 60%.

A questão 15 envolve a produção de uma explicação, fazendo referência à inclinação das curvas ou comparando crescimentos num intervalo apropriado. Trata-se de uma questão que requer raciocínio e capacidade de comunicação desse raciocínio, sendo classificada como de nível intermédio (conexões) pelo PISA. Esta questão é respondida correctamente apenas por 29,8% dos alunos portugueses, bastante abaixo da média internacional de 45,2%.

Estas questões do PISA ilustram algumas das dificuldades dos alunos portugueses no campo da Álgebra: lidar com (i) equações, variáveis e relações, (ii) com padrões e regularidades, e (iii) com mudança e variação. Nos itens cujos resultados foram divulgados, os alunos portugueses têm pior desempenho na questão 9, mas nesse item a diferença não é muito grande para a média internacional. As diferenças em relação a esta média são mais significativas nos itens 13, sobre padrões, e 15, sobre variação.

4. Investigação sobre as dificuldades dos alunos em Álgebra

Há alunos que conseguem um nível de desempenho razoável no trabalho com números e operações numéricas, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na Álgebra. As dificuldades dos alunos na transição da aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por numerosos autores, como Booth (1994) e Rojano (2002). Alguns exemplos dessas dificuldades têm a ver com o uso de letras para representar variáveis e incógnitas, não conseguindo ver uma letra como representando um número desconhecido e não percebendo o sentido de uma expressão algébrica. Outra dificuldade está em traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Outra dificuldade, ainda, é compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos $+$ e $=$, bem como das convenções adoptadas; assim, em Aritmética, 23 tem um significado aditivo $(20 + 3)$, enquanto que em Álgebra $2x$ tem um significado multiplicativo $(2 \times x)$; em Aritmética $3 + 5$ indica uma "operação para fazer" (cujo resultado é 8), mas em Álgebra $x + 3$ representa uma unidade irredutível (enquanto não se concretizar a variável x). Estas dificuldades dos alunos são compreensíveis tendo em conta a complexidade dos conceitos em jogo e também as subtilezas que envolvem o uso da linguagem exemplificadas, como mostra Rojano (2002), pelos diferentes significados do símbolo "=" em Álgebra, que pode representar a equivalência entre duas expressões (como em $2(a + b) = 2a + 2b$), uma equação (como em $7x - 4 = 28x + 15$), ou uma relação funcional (como $y = 3x + 2$).

Na educação matemática não faltam "condenações" do simbolismo. No entanto, o simbolismo é parte essencial da Matemática, que não podemos dispensar. Na verdade, estamos perante um problema complicado. Por um lado, os símbolos têm um grande valor. O simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar as ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular. Por outro lado, o simbolismo acarreta um grande perigo para o processo de ensino-aprendizagem. Como mostram Davis e Hersh (1995), se perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção ao modo de os manipular, caímos no formalismo sem sentido. A solução não está em banir o simbolismo ou atrasá-lo para o mais tarde possível (por exemplo, para a universidade). Também não está em impor o simbolismo desde o mais cedo possível, obrigando os alunos a aprender a manipular símbolos e expressões que para eles não têm qualquer significado. A solução terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização.

5. A abordagem da Álgebra no currículo

O ensino da Álgebra elementar tem conhecido mudanças significativas através dos tempos. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) distinguem três grandes correntes: (i) a *linguístico-pragmática*, assumia que a Álgebra constitui um instrumento técnico mais poderoso que a Aritmética para a resolução de problemas, colocando a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões (que os autores denominam de *transformismo algébrico*); o pressuposto era que se o aluno dominasse essas regras, seria certamente depois capaz de as aplicar a situações concretas; (ii) a *fundamentalista-estrutural*, característica do período da Matemática moderna, dava especial atenção às propriedades estruturais para fundamentar e justificar as transformações das expressões; e (iii) a *fundamentalista analógica*, que procura combinar as duas anteriores, recuperando o valor instrumental da Álgebra e preservando o cuidado com as justificações, com base em modelos analógicos geométricos (figuras, objectos) ou físicos (como a balança[3]). Estes autores criticam o facto de que qualquer destas concepções reduz a Álgebra aos seus aspectos transformacionistas, colocando a ênfase na sintaxe da linguagem algébrica e não nos significados representados pelos símbolos. Deste modo, propõem um ensino da Álgebra noutra perspectiva, que leve os alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente [e] estabelecer relações entre grandezas variáveis" (p. 87).

Pelo seu lado, Lins e Giménez (1997) distinguem igualmente três grandes correntes nas abordagens didácticas para o ensino da Álgebra. A primeira corrente é o que designam por visão *"letrista"*, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão "pobre", em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos (por treino e prática) e tem uma versão "melhorada" segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos (de novo com destaque para a balança). A segunda corrente vê a Álgebra como *Aritmética generalizada*. A ideia central é que "a actividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade" (p. 110). Procurando contrariar a tendência anterior, procura-se agora valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. A terceira corrente corresponde à *visão "estruturalista"* subjacente ao movimento da Matemática moderna. Para esta tendência, a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou das transformações geométricas. Finalmente, Lins e Giménez (1997) discutem uma quarta corrente, em que a Álgebra é encarada como uma actividade. Esta actividade pode desenvolver-se sobretudo a partir de um contexto, mas pode também assumir um cunho investigativo ou, de preferência, englobar os dois aspectos.

As diferentes perspectivas enunciadas tanto por Fiorentini, Miorim e Miguel, como por Lins e Giménez, em última análise, dizem respeito à actividade dos alunos. Temos, por isso, que perguntar o que predomina nesta actividade: exercícios, modelações, explorações, investigações? De que modo se articulam estes diferentes tipos de tarefas? Disso dependem em grande medida os resultados da aprendizagem[4].

Para além dos tipos de tarefas, um aspecto muito importante das abordagens didácticas é o papel dos contextos, nomeadamente das *"situações reais"*. Nos manuais de há um século tais situações praticamente não surgem a não ser nos capítulos de "problemas" dos 1.° e 2.° graus, sendo consideradas como meras "aplicações". Nos nossos dias, elas surgem cada vez mais como ponto de partida da aprendizagem. O papel destas situações na aprendizagem é defendido, por exemplo, pela educação matemática realística[5]. Note-se, no entanto, que não basta "partir de situações reais". É preciso que seja o aluno a trabalhar activamente essas situações, num processo de "re-invenção" guiada dos conceitos e ideias matemáticas.

Outra questão importante diz respeito ao papel da *tecnologia*, nomeadamente calculadoras e computadores. Que *software* devem os alunos poder usar? Dois dos programas mais usados em Álgebra são a folha de cálculo (como o Excel) e os programas de cálculo simbólico (como o DERIVE). A folha de cálculo é relativamente simples de aprender, mas usa uma representação algo distante da habitual na Matemática escolar (as fórmulas ou expressões não aparecem directamente visíveis nas suas celas). Os programas de cálculo simbólico envolvem uma aprendizagem mais demorada e, muito possivelmente, só começam a ter verdadeiro interesse numa fase relativamente adiantada da aprendizagem da Álgebra por parte dos alunos.

Na verdade, a tecnologia tem muitas potencialidades mas também tem os seus problemas. Por exemplo, uma potencialidade importantíssima da calculadora gráfica é que liga expressões e gráficos, o que pode dar aos alunos *feedback* visual ilustrando vários aspectos de um mesmo objecto. Outra potencialidade não menos importante é que a calculadora realiza o trabalho mecânico e favorece a realização de explorações e investigações. Estas potencialidades têm o reverso da medalha: as representações gráficas não são transparentes e compreendê-las e usá-las pressupõe uma aprendizagem não trivial.

6. O currículo português e as propostas do NCTM

Em Portugal, tradicionalmente, a Álgebra era a par da Geometria um dos temas fortes do 3.º ciclo e do ensino secundário6. Com os programas de 1991, a Geometria mantêm-se e até reforça a sua posição, enquanto que a Álgebra desaparece como grande tema. Parte dela, sobrevive no tema *Funções*, que tem um destaque significativo, e outra parte está integrada no tema *Números e cálculo*. Ou seja, a Álgebra é reduzida ao cálculo algébrico e ao estudo das funções[7]. Mais sintonizado com as actuais tendências internacionais, o *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) valoriza a Álgebra como grande tema curricular e aponta vários aspectos a dar atenção. A secundarização da Álgebra observa-se igualmente nos programas do ensino secundário em vigor (ME-DES, 2001–02). Na verdade, este tema não aparece em destaque. Nos objectivos e competências gerais existe um grupo de itens cujo conteúdo é claramente algébrico, mas cujo título, surpreendentemente, é "ampliar o conceito de número" (p. 4)[8] e, além disso, aparecem alguns assuntos de Álgebra, mas sempre numa perspectiva de funções[9]. Podemos dizer, portanto, que tanto nos programas do ensino básico como nos do ensino secundário, a Álgebra desaparece como grande tema da Matemática, estando reduzida a um conjunto técnicas (cálculo algébrico) e ao estudo das funções. Não se dá a atenção devida ao estudo de padrões e regularidades, nem ao uso do simbolismo em situações contextualizadas nem à interpretação da variação em contextos reais, como claramente se comprova pelos resultados dos alunos portugueses no PISA.

Pelo seu lado, como vimos, as propostas do NCTM (2000) valorizam quatro dimensões na Álgebra, que propõem que sejam trabalhadas desde a pré-escola até ao 12.º ano de escolaridade, envolvendo o estudo das estruturas algébricas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação. Estas posições do NCTM decorrem de um movimento que se desenha desde o início dos anos 80 — a revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar. Isso passa por entender a Álgebra de uma forma ampla e multifacetada, valorizando o pensamento algébrico e tornando-o, como vimos, uma orientação transversal do currículo.

7. Conclusão

Estamos, pois, perante a necessidade de se repensar a abordagem curricular da Álgebra. Há que voltar a colocar em questão as finalidades, objectivos, conteúdos e métodos do currículo em Portugal no que respeita a este tema. Há que pensar no papel que deve ter o pensamento algébrico como orientação transversal do currículo. É notório que existem sérias dificuldades na aprendizagem na Álgebra, que de resto tem sido bastante maltratado nos programas, quer do 3° ciclo quer do ensino secundário. Entretanto, os currículos têm continuado a evoluir a nível internacional, a tecnologia tem posto à disposição do ensino novos e mais interessantes instrumentos, e a opinião pública mostra-se cada vez mais crítica sobre as aprendizagens dos alunos. São motivos de sobra para aprofundarmos a reflexão tendo em vista a elaboração de um currículo mais coerente e ajustado às necessidades de quem ensina e de quem aprende.

Notas

1 Este artigo baseia-se parcialmente numa conferência feita no *XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática*, realizado em Caminha, em 17–19 de Abril de 2005.

2 Literalmente, *aljabr w'al muqabalah* significa "completar e reduzir" (Bekken, 1994, p. 59).

3 Note-se que a balança como modelo intuitivo para as equações já era usada no século XVI nos livros de Álgebra de Pedro Nunes.

4 Ver Fraga, Salvado, Mosquito, Santos e Ponte (2005).

5 Ver Jan de Lange (1993).

6 Nos anos 50 e 60 do século XX, nestes níveis, eram usados *Compêndios de Álgebra*, de autores como Jorge Calado, José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

7 No 3.º ciclo, são tratados temas como Equações numéricas e literais do 1.º grau; Operações com monómios e polinómios; Sistemas de equações do 1.º grau, Equação incompleta do 2.º grau, Função afim, Proporcionalidade inversa, Equação (completa) do 2.º grau; Inequações do 1.º grau (ver ME-DGEBS, 1991).

8 Aperfeiçoar o cálculo em R e C e operar com expressões racionais, com radicais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas; Resolver equações, inequações e sistemas; Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.

9 Função quadrática (incluindo inequações 2.º grau), função módulo, funções polinomiais (3.º e 4.º); Decomposição de polinómios em factores; e Funções racionais e com radicais.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 24–35.

Bekken, O. (1994). *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: GEPEM, Universidade de Santa Úrsula.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Childrens' strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Lange, J. (1993). Innovation in mathematics education using applications: Progress and problems. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, & M. Niss (Eds.), *Innovation in maths education by modelling and applications* (pp. 3–18). New York, NY: Ellis Horwood.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, 4(1), 78–91.

Fraga, A., Salvado, C., Mosquito, E., Santos, T., & Ponte, J. P. (2005). Equações do 2.° grau do fim do século XIX ao início do século XXI. *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE*. Lisboa: SEM–SPCE.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teacher-centered, systemic way. (Retirado em 30 Junho de 2005 de `http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf`)

Lins, R., & Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

ME–DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME–DES (2001–02). *Matemática A (10°, 11°, 12° anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (retirado em 04/Julho/2005 de `http://www.dgidc.min-edu/programs/prog_hm.asp`)

ME–DGEBS (1991a). *Organização curricular e programas (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME–DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Ramalho, G. (2004). *PISA 2003, Resultados do estudo internacional: Primeiro relatório nacional*. Lisboa: ME, GAVE.

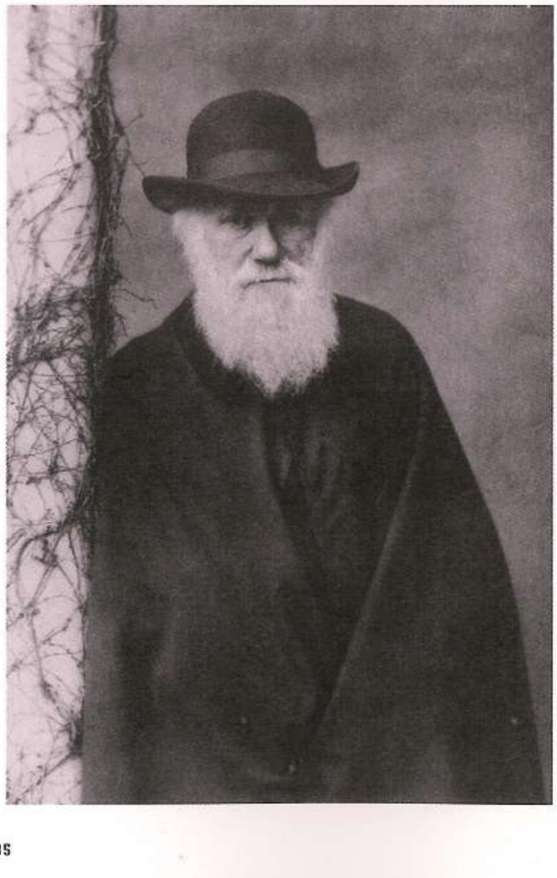
Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143–161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

João Pedro da Ponte
Grupo de Investigação DIF—Didáctica e Formação
Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Durante os três anos que passei em Cambridge, perdi o meu tempo, no que respeita aos estudos académicos, tão completamente como em Edimburgo e no liceu. Fiz uma tentativa para aprender matemática e até tive um explicador em Barmouth (um homem muito maçador) no Verão de 1828, mas avancei pouco. O trabalho desgostava-me, principalmente porque não via qualquer significado nos primeiros passos da álgebra. Esta impaciência foi muito insensata, e mais tarde senti grande pesar por não ter continuado o suficiente para pelo menos compreender algo dos grandes princípios condutores da matemática; porque os homens capazes de o fazerem parecem ter um sentido extra.

Charles Darwin



A Álgebra e o estudo PISA

José Manuel Duarte

Quando queremos reflectir sobre o estado actual e perspectivas para as aprendizagens matemáticas dos jovens, no campo da álgebra em particular, os dados referentes ao estudo PISA[1] constituem, de vários pontos de vista, rico e útil material de trabalho, escassamente utilizado até agora, por nós, professores de Matemática.

Levantarei aqui de forma sucinta algumas poucas questões, por razões de espaço, com base em dados do PISA 2003, disponíveis em duas publicações ME/Gave, *Resultados* e *Literacia Matemática*, que citarei livremente.

Literacia Matemática

O conceito de *literacia* remete para a capacidade de os alunos aplicarem os seus conhecimentos e analisarem, raciocinarem e comunicarem com eficiência, à medida que colocam, resolvem e interpretam problemas numa variedade de situações.

A literacia matemática no PISA é definida como a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo. Relaciona-se com o uso mais abrangente e funcional da matemática; o envolvimento requer a capacidade de reconhecer e formular problemas matemáticos em várias situações.

Os itens (questões) de matemática do PISA baseiam-se num texto ou num gráfico ilustrando uma situação concreta tão próxima quanto possível de tarefas do mundo real. O PISA procura, assim, medir a capacidade dos jovens de 15 anos para usarem os conhecimentos que têm, de forma a enfrentarem os desafios da vida real, em vez de simplesmente avaliar o domínio que detêm sobre o conteúdo do seu currículo escolar. Pode, no entanto dizer-se que, de uma forma geral, existe uma adequação razoável dos itens de matemática do PISA 2003 ao programa vigente: pontuação global atribuída de 4,4 numa escala de 1 (não adequação) a 5 (total adequação), pontuação de 4,7 na mesma escala na área das Funções e Álgebra.

Mudança e relações

Uma das quatro áreas de conteúdo da parte matemática do estudo PISA 2003 é *mudanças e relações* (as outras são *espaço e forma* — geometria —, *quantidade* — aritmética — e *incerteza* — probabilidades e estatística) e envolve manifestações matemáticas de mudança bem como de relações e dependências funcionais entre variáveis, estando pois muito relacionada com a Álgebra. Salienta-se que as relações matemáticas tomam muitas vezes a forma de equações ou de inequações, embora as relações de natureza mais geral (por exemplo, equivalência, divisibilidade, inclusão) sejam também relevantes. Nos itens as relações podem ser representadas de forma bastante diversa, incluindo representações simbólicas, algébricas, gráficas, tabulares e geométricas, diferentes representações que podem servir fins distintos e ter propriedades diferentes, pelo que a tradução das várias representações é muitas vezes de importância chave quando se lida com situações e com tarefas.

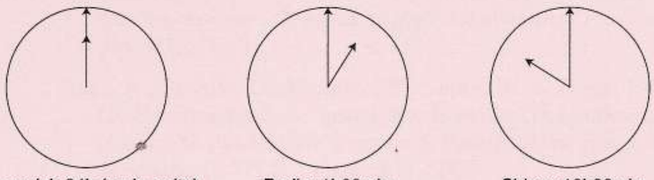
Panorama

Segundo o que as respostas e os resultados revelam, Portugal tem ainda um elevado número de estudantes com níveis muito baixos de literacia matemática: cerca de 30% dos nossos alunos têm um nível de literacia matemática, no PISA, igual ou inferior a 1 (o mais baixo), quando entre os países da OCDE esse valor é de 21%. Isto significa que quase um terço dos nossos jovens de 15 anos apenas consegue, na melhor das hipóteses, responder correctamente a questões que envolvem contextos familiares, em que toda a informação relevante para a resolução está presente, e só consegue identificar informação e levar a cabo procedimentos de rotina de acordo com instruções, em situações explícitas. Estes jovens apenas obtêm sucesso, na melhor das hipóteses, em acções que se podem considerar óbvias e que decorrem directamente dos estímulos apresentados.

Ao se comparar, por outro lado, as percentagens de alunos nos níveis 5 ou 6 (os mais altos) de literacia[2], detecta-se igualmente a seguinte grande disparidade: enquanto 15% dos alunos do espaço da OCDE se encontram nesses altos

Conversar no *chat*

Mark (de Sidney, na Austrália) e Hans (de Berlim, na Alemanha) comunicam muitas vezes entre si, utilizando o *chat* na Internet. Eles têm de estar ligados à Internet ao mesmo tempo, para poderem conversar no *chat*. Para encontrar uma hora conveniente para conversar no *chat*, Mark consultou uma tabela de fusos horários e descobriu o seguinte:



Greenwich 24h (meia-noite) Berlim 1h00min Sidney 10h00min

Q1

Quando são 19h00min em Sidney, que horas são em Berlim?

Resposta: ....

Q2

Mark e Hans não podem conversar no *chat* entre as 9h00min e as 16h30min, horas locais, porque têm de ir à escola. Também não podem conversar no *chat* entre as 23h00min e as 7h00min, horas locais, porque estão a dormir.

Quais são as melhores horas para Mark e Hans conversarem no *chat*? Escreva as horas locais no quadro seguinte.

Local	Hora
Sidney	
Berlim	

A Questão 1, sobre uma situação qualificada de "pessoal", pedia uma resposta curta e fazia apelo a um nível de competências intermédio ("conexões"). Acertaram 39,5 % dos alunos portugueses, erraram 56,5 %, não responderam 4,0 %, o que dá um quociente de acerto portugueses/OCDE de apenas 0,73.

Na questão 2, que pedia uma resposta curta e fazia apelo a um nível de competências alto ("reflexão"), aceitava-se qualquer hora ou intervalo horário adequados. Responderam correctamente 13,6 % dos portugueses, erraram 66,0 %, não responderam 20,4 %, o que dá um quociente de acerto portugueses/OCDE de apenas 0,47.

níveis de proficiência, apenas 5% dos alunos do nosso país se encontram na mesma boa situação.

No que à Álgebra (*mudanças e relações*) diz respeito, a percentagem de alunos identificados com baixo nível de literacia é ainda superior à média da OCDE: 31% versus 23%; e a percentagem de alunos com níveis elevados de literacia matemática é ainda inferior à média da OCDE: 8% versus 16%.

O relatório português do PISA 2003 afirma que é preocupante a situação média dos estudantes portugueses nesta recolha de informação sobre a literacia matemática: o valor da média portuguesa, tanto na escala global como nas quatro subescalas de literacia matemática, situa-se abaixo da média da OCDE e muito distanciado dos valores dos países que obtiveram as melhores classificações médias[3].

Mais e menos favorável

Numa primeira análise interpretativa do desempenho dos alunos portugueses de 15 anos nos itens, de que foi permitida a divulgação, da parte matemática do estudo PISA 2003 (de que se apresentam alguns neste número da revista[4]), comparando-o com o grupo dos alunos da OCDE, procurando detectar o tipo de tarefas em que os nossos jovens obtiveram nessa comparação sucesso relativo favorável ou desfavorável, concluiu-se, em primeiro lugar, o desempenho razoável dos alunos portugueses quando os itens requerem a aplicação directa de uma fórmula, a leitura de informação simples a partir de um gráfico ou a identificação de problemas na utilização de um certo tipo de gráficos.

Em contrapartida, os resultados são comparativamente muito desfavoráveis quando o nível de reflexão requerido é mais elevado, quando se exigem processos de resolução que conjuguem informações diversas ou quando os conceitos envolvidos são mais abstractos. Concretamente, a percentagem de não-respostas é comparativamente muito elevada e a de respostas correctas é comparativamente muito baixa nos casos em que a informação é fornecida sob a forma de gráficos e se trata de analisar esse mesmo gráfico para produzir argumentação ou para elaborar uma fundamentação que requeira conceitos mais complexos (taxa de variação, por exemplo), ou quando essa análise exige a leitura conjugada de dois gráficos.

A contagem do número de objectos a partir da identificação de uma sequência representada pictoricamente (em que o processo de resolução mais simples poderia passar pela utilização do desenho) ilustra também o baixo nível de proficiência dos nossos alunos relativamente ao dos seus colegas. Um sério obstáculo para os estudantes portugueses é também a necessidade de utilização de processos de contagem que decorrem da identificação de requisitos mínimos fornecidos, bem como de raciocínio combinatório. A exigência de raciocínios que envolvem transformações entre variáveis em que se torna necessário apreciar, de forma conjugada, duas dessas transformações, vem associada igualmente a muitas não-respostas e a um grande insucesso relativo.

Uma presença, muitas ausências

Inúmeros aspectos do relatório PISA 2003 são aqui omitidos. Um há, contudo, que não quero deixar de referir: segundo as declarações dos alunos portugueses participantes no estudo

— alunos com melhor desempenho tendem a usar mais estratégias de elaboração e de controle do que os seus colegas com pior desempenho; pelo contrário, estes últimos utilizam mais estratégias de memorização do que os primeiros;
— melhores desempenhos acompanham um maior autoconceito académico, um maior sentido de eficácia e menos ansiedade quando lidam com a matemática;
— melhores desempenhos estão associados a um maior sentido de pertença à escola e a uma atitude mais positiva face a ela;
— melhores desempenhos acompanham uma maior motivação para a matemática e um maior interesse pela disciplina.

Pistas para pensar

O relatório português PISA 2003 avança algumas pistas, sugeridas pelos resultados do estudo, para o enriquecimento das práticas pedagógicas em sala de aula, pistas de reflexão úteis para todos os interessados na matéria: sustenta-se aí que, sendo importante a aquisição de competências básicas na resolução de exercícios simples que requeiram a utilização de algoritmos aprendidos, é também essencial que os alunos sejam chamados a mobilizar as suas aprendizagens em situações problemáticas mais próximas da vida real e, por outro lado, que é absolutamente necessário que os alunos sejam chamados mais frequentemente a utilizar processos cognitivos de nível mais elevado, na resolução de problemas que exijam a utilização simultânea de informação diversa e de conceitos complexos, bem como a avaliação da qualidade da informação fornecida e a produção de argumentação válida.

E acrescento eu: não será que desafios que remetam para competências algébricas, sendo contextualizados, conferem ao problema características apelativas, de ser *apetitoso*, de ter bom potencial para dar ao estudante vontade de o *atacar* (*isto interessa*) e resolver? Não será verdade que a necessidade do aluno em muitas tarefas desse tipo de seleccionar os dados relevantes e de decidir a estratégia promissora (sem essa *papinha* lhe estar à priori confeccionada pelo professor) pede passos em frente em capacidades importantes? Não será verdade que estes problemas da vida real impõem a decisão racional por parte do aluno de que resposta/conclusão, é necessário dar, e qual a forma melhor de a apresentar (em vez do *deixa cá ver como é que o professor diz que a resposta tem de ser* ...). São, entretanto desafios difíceis de elaborar, mas é para isso que o engenho dos professores está presente. Sem se abdicar do trabalho rotineiro com equações, etc, naturalmente ...

Nos cálculos algébricos rotineiros muito frequentemente o aluno entra numa *caixa negra* de trabalho e só no fim vê a luz ao fundo do túnel, quando obtém o resultado, a solução, tendo apenas a possibilidade de analisar criticamente (quando o faz ...) a razoabilidade do valor encontrado (a idade do avô do Zé não pode ser 14 anos, a temperatura do quarto da Maria não pode ser 250 graus centígrados, etc). Ora em desafios contextualizados há muitas vezes oportunidades múltiplas no decurso do trabalho para aferir da plausibilidade dos valores intermédios que vão surgindo.

Notas

1 *Programme for International Student Assessment.*

2 No nível 5, os estudantes conseguem desenvolver e trabalhar com modelos de situações complexas, identificando constrangimentos e especificando hipóteses. São capazes de seleccionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas, para lidarem com problemas complexos relacionados com estes modelos. Os estudantes são capazes de trabalhar estrategicamente, usando capacidades mentais e de raciocínio amplas e bem desenvolvidas, representações adequadamente ligadas, caracterizações simbólicas e formais e a perspicácia (*insight*) apropriada a estas situações. Conseguem reflectir sobre as suas acções e formular e comunicar as suas interpretações e raciocínios.

No nível 6, os estudantes são capazes de conceptualizar, generalizar e utilizar informação, com base nas suas investigações e na modelação de situações problemáticas complexas. Conseguem estabelecer a ligação entre diferentes fontes de informação e diferentes representações e fazer transferências entre elas com flexibilidade. Os estudantes dispõem de pensamento e raciocínio matemáticos avançados. São capazes de aplicar a perspicácia (*insight*) e a compreensão, a par do domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais, no desenvolvimento de novas abordagens e estratégias face a situações novas. São capazes de formular e comunicar com exactidão as suas acções e reflexões no que respeita às suas descobertas, interpretações, argumentos, bem como a adequação dos mesmos às situações originais.

3 Portugal não apresenta diferenças significativas relativamente à Federação Russa e à Itália, na escala global; na subescala *mudanças e relações*, os resultados dos estudantes portugueses não são diferentes dos da Espanha, Federação Russa e Itália. Os resultados dos alunos portugueses são melhores que os alunos da Grécia, da Turquia e do México, também países da OCDE.

4 Nesta revista, para além do item *Conversar no chat* inserido neste artigo, pode ainda ver no artigo *Álgebra no currículo escolar* os items *O crescimento*, e *Caminhando* e *Padrão em escada.*

José Manuel Duarte

Escola Secundária Fernando Lopes Graça, Parede

Motive os seus alunos !

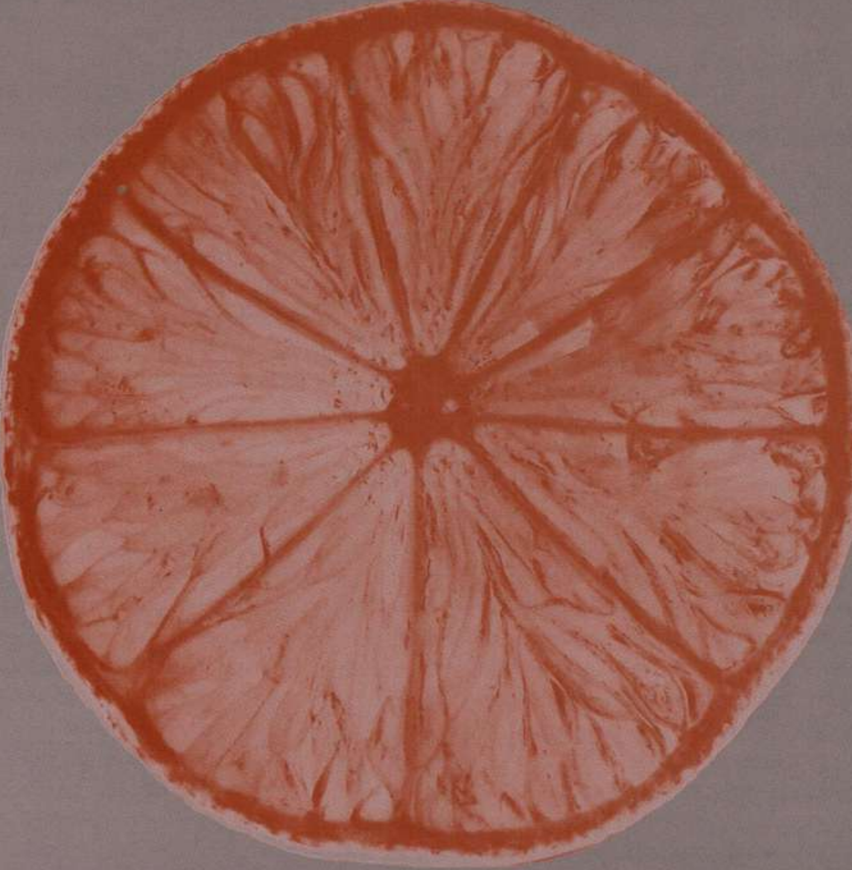
Para uma melhor compreensão da Matemática e Ciências

O nosso objectivo é disponibilizar-lhe as melhores ferramentas de forma a permitir que enfrente, com sucesso, os actuais desafios da educação. Trabalhando em conjunto com professores e educadores, a nível mundial, desenvolvemos produtos e serviços que melhoram a motivação e participação dos estudantes. Matemática e Ciências tornar-se-ão mais acessíveis, concretas e interessantes. Hoje, disponibilizamos para professores um rico portfolio de produtos, que vão desde calculadoras gráficas, sensores, ferramentas para sala de aula e serviços de apoio altamente específicos. A nossa oferta integra-se perfeitamente nos requisitos necessários para uma melhor compreensão e interactividade da Matemática e Ciências.

Para mais informações, por favor visite: education.ti.com/portugal

TEXAS INSTRUMENTS

TI Technology - Beyond Numbers



As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional

Cecília Monteiro, Hélia Pinto, Nisa Figueiredo

As fracções são um dos temas do ensino básico em que os alunos apresentam mais dificuldades. Os professores reclamam falta de estudo para justificarem o insucesso nesta parte da matéria, não parecendo reconhecer a complexidade inerente a este assunto (Streefland, 1991). Analisemos, por exemplo, os diversos significados que uma fracção pode ter dependendo do contexto onde se insere. 3/5 pode referir-se a uma parte de um todo, 3/5 de um bolo, 3/5 da superfície da terra, etc., ou pode representar o quociente entre dois números naturais. Se tivermos 3 pizas a partilhar por 5 pessoas, 3/5 representa o quociente que resulta de dividir 3 por 5 e que é a parte de piza que cabe a cada um. Por outro lado, 3/5 representa também, neste contexto, a razão entre o número de pizas e o número de pessoas: 3 pizas para 5 pessoas equivale a 6 pizas para 10 pessoas. Uma fracção pode ainda representar a razão entre duas partes de um mesmo todo: a relação entre o número de raparigas e o número de rapazes num conjunto de 8 jovens numa festa, por exemplo. No caso de querermos saber quanto é 3/5 de meio milhão de euros, por exemplo, ou 3/5 de meia piza, a fracção funciona como um operador aplicado a um conjunto discreto ou contínuo.

No longo percurso em que as crianças vão desenvolvendo o conceito de número racional, temos de considerar, por um lado, o conceito (mais precisamente a teia de conceitos), e por outro os símbolos que o representam. Acontece as crianças operarem com os símbolos sem terem ideia das quantidades e conceitos subjacentes, o que faz com que, por exemplo, cheguem a respostas sem sentido. Assim, não é raro vermos alunos adicionarem números representados por fracções adicionando os numeradores e os denominadores, evidenciando enormes lacunas na compreensão do conceito de fracção e das operações com estes números.

Neste artigo iremos apresentar e discutir uma proposta alternativa para a primeira abordagem às fracções, diferente daquela que é tradicionalmente usada com alunos do 2° ciclo. Discutiremos as estratégias que alunos usaram na resolução de tarefas em contextos de partilha equitativa e que foram usadas no âmbito de uma experiência de sala de aula com alunos do 5° ano de escolaridade. Procuraremos mostrar como é que, utilizando as estratégias informais dos alunos como ponto de partida na aprendizagem, é possível que os alunos construam de forma significativa o conceito de fracção, ao mesmo tempo que é valorizada a compreensão e a participação activa do aluno no seu próprio processo de aprendizagem. Finalmente, apresentaremos também, de forma breve, algumas das ideias didácticas que serviram de base a esta experiência e que tiveram origem na teoria de ensino e aprendizagem da Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991; Streefland, 1986, 1991).

O ensino das fracções em Portugal

Em Portugal, e de um modo geral, a primeira (e por vezes única) abordagem às fracções é feita através da relação parte/todo. Utilizando uma figura (um rectângulo ou um círculo) dividida num certo número de partes iguais, e simbolizando a unidade, relaciona-se as partes com o todo da figura. A figura simboliza, por exemplo, um chocolate dividido em 5 partes iguais, cada uma dessas partes sendo 1/5 do chocolate. O conceito de fracção equivalente é também explicado recorrendo ao mesmo modelo, e os alunos devem visualizar assim que 2/10 é a mesma quantidade de chocolate que 1/5. Também as operações adição e subtracção são abordadas recorrendo ao mesmo suporte visual, havendo a preocupação de se estudar primeiro a adição e em seguida a subtracção como operação inversa da adição. Isto significa que, na abordagem tradicional, o ponto de partida para o ensino são de um modo geral, os conceitos matemáticos formais e não os fenómenos da realidade do dia-a-dia de onde estes conceitos foram em tempos abstraídos. Assim, isto pode ser uma das razões pela qual haja alunos que representem a situação da figura 1 por 1/4, em vez de 1/5, que é o que o *professor normalmente quer* que esteja representado na figura.

A verdade é que a figura também pode representar 1/4 se considerarmos, não a relação parte sombreada/toda a figura, mas sim a relação parte sombreada/parte não sombreada. Uma das origens de mal entendidos pode ser o facto de serem os conceitos matemáticos, que os alunos ainda não dominam, e não o contexto do problema a dar significado a actividades como estas. Outra característica da abordagem tradicional é a ausência do apelo à estimativa, dando-se preferência ao cálculo exacto com papel e lápis. Deste modo, a aprendizagem das fracções acaba por pôr muita ênfase nos procedimentos, nas regras e nos algoritmos, funcionando, do nosso ponto de vista, como um entrave ao desenvolvimento do sentido do número.

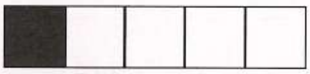


Figura 1.

A fracção explorada em situações de partilha equitativa

Na abordagem que aqui apresentamos, a fracção surge em situações de partilha equitativa. Os alunos desde o 3° ano de escolaridade que resolvem problemas de divisão deste tipo, onde o dividendo é quase sempre um múltiplo do divisor. No caso do quociente não ser um número inteiro, os alunos apresentam os resultados na forma de numeral decimal. Agora o dividendo é, numa primeira fase, um número menor que o divisor, o que pede que a unidade seja dividida.

Na experiência que levámos a cabo no 5° ano*, os alunos nunca tinham estudado fracções no 1° ciclo, o que aliás acontece com grande parte dos alunos portugueses apesar destas fazerem parte do programa do 1° ciclo em vigor[1]. Desde a primeira aula, os alunos trabalharam em grupo à volta de variados problemas de partilha equitativa, sem que lhes tivesse sido explicado como os podiam resolver.

Quadro 1.
Primeiros problemas apresentados aos alunos

Problema 1

Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as três pizas. Que parte de piza comeu cada amigo?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Problema 2

Se em vez de quatro amigos fossem oito amigos, pedissem três pizas e as dividissem igualmente, que parte de piza comeria cada um?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Problema 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (problema 1) ou o de oito amigos (problema 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio.

Quadro 2. Estratégias apresentadas pelos alunos na resolução da primeira parte do problema 1

A

Dividiram cada uma das 3 pizas em quatro partes iguais e deram 3 fatias a cada amigo.

Responderam que cada amigo comeu três fatias de piza.

B

Dividiram 2 pizas, cada uma destas em duas partes iguais e a terceira piza em quatro partes iguais e deram metade de uma piza mais um quarto da outra a cada amigo. Responderam que cada amigo comeu metade de uma piza e mais um quarto de outra.

C

Dividiram cada uma das 3 pizas em oito partes iguais e deram 6 oitavos a cada amigo. Responderam que cada amigo comeu 6 oitavos.

D

Dividiram cada uma das 3 pizas em oito partes iguais. Contaram os pedaços de uma piza obtidos e multiplicaram por 3 (temos $8 \times 3 = 24$) e dividiram as 24 fatias pelos 4 amigos ($24 \div 4 = 6$). Responderam que cada amigo comeu seis fatias.

E

Dividiram $3 \div 4$ e obtiveram 0,75 e alguns responderam 75%

A cada grupo era apresentado um conjunto de tarefas, numa única folha grande de modo a promover a leitura simultânea a todos os elementos do grupo, juntamente com materiais de cartão simbolizando pizas, chocolates, etc., dependendo das situações dos problemas. O papel do professor durante o trabalho de grupo era essencialmente o de promover a discussão entre os alunos e fazer com que todos os elementos do grupo participassem na resolução da tarefa. O professor solicitava uma resposta colectiva (*produção do grupo*) que era registada numa folha.

No quadro 1 encontram-se os primeiros problemas perante os quais os alunos foram colocados. Após a resolução dos três problemas, seguiu-se a apresentação e discussão em plenário das produções dos grupos, onde estas foram comparadas e se reflectiu sobre o trabalho desenvolvido. As estratégias apresentadas pelos grupos[2] foram as mais variadas (veja quadro 2). Praticamente todas as produções apresentavam desenhos ou esquemas, havendo em algumas delas registos de cálculos.

Como podemos ver, algumas produções dos alunos referiam quartos, oitavos e metades, por extenso, mesmo nunca tendo sido "ensinados" na escola a chamar-lhe assim. (figuras 2).

Outros alunos referiram-se a fatias, no entanto, os desenhos elucidaram sempre se eram quartos, oitavos ou metades (figura 3).

Na comparação com a unidade, todos os grupos referiram que cada amigo tinha comido menos que uma piza, tendo um deles escrito "se uma piza tem quatro fatias, cada um comeu menos, pois só comeu 3".

Na exploração em plenário de turma o professor solicitou aos alunos que referissem como tinham chegado à solução e os diferentes modos de representação desta foram registados no quadro. Durante a discussão, o professor foi chamando a atenção para o facto de ser possível representar de diferentes modos o mesmo número e introduziu a simbologia da fracção. O apelo à conexão com a divisão foi um dos aspectos realçados no diálogo que se manteve na turma, e o professor acabou por registar no quadro a expressão

$$\frac{3}{4} = 3 : 4.$$

As fracções unitárias surgiram e $3/4$ apareceu igual a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

e também igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Como houve alunos que dividiram a piza em oitavos, houve ainda a resposta $6/8$, o que permitiu notar que afinal $3/4$ de piza era a mesma porção de piza que $6/8$ de piza. A multiplicação também surgiu quando um grupo resolveu dar $1/4$ de piza a cada amigo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}.$$

Houve um aluno que referiu que tinha comido uma piza menos $1/4$, tendo o professor aproveitado para escrever

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

No fim da segunda aula os alunos tinham, de um modo informal, abordado já a noção de fracção, a decomposição em fracções unitárias, e a comparação e multiplicação de fracções, o que seria impensável na abordagem tradicional. Nos

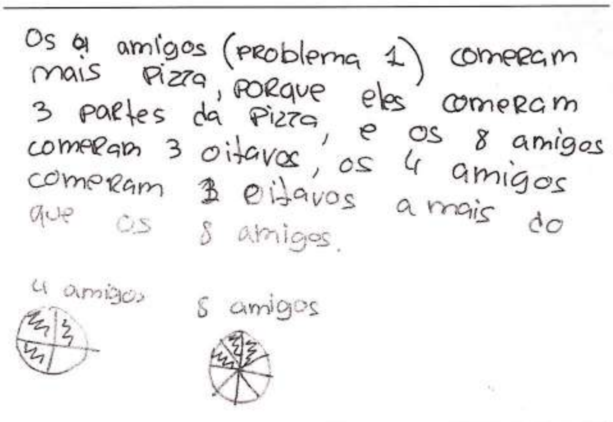


Figura 2. Produção de um grupo a propósito do problema 3.

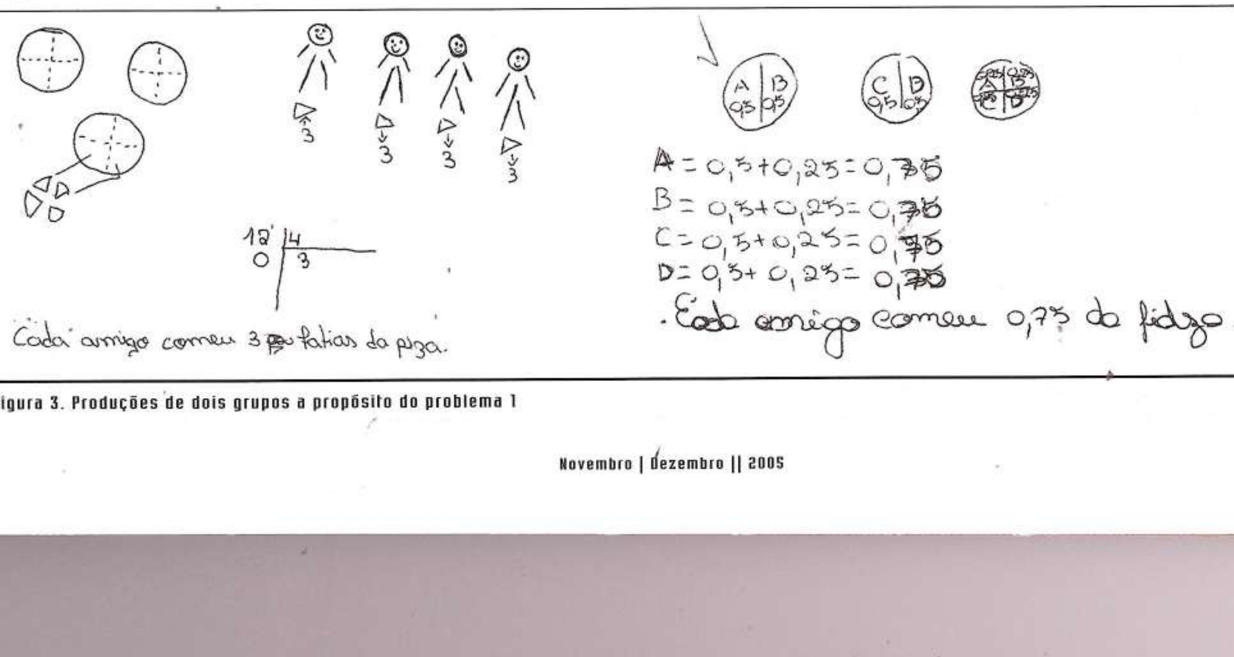


Figura 3. Produções de dois grupos a propósito do problema 1

seis problemas seguintes, surgiram temas como a equivalência de fracções, as fracções impróprias na forma de numeral misto (5 crianças a partilhar 6 chocolates), as fracções decimais (dois bolos de aniversário divididos em 10 fatias iguais), as fracções aplicadas a um conjunto discreto, e a reconstrução da unidade.

Mais tarde houve a preocupação de avaliar até que ponto as fracções sem contexto faziam sentido para estas crianças, tendo sido pedido aos alunos para fazerem mentalmente o cálculo de expressões tais como

$$2\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5}$$

e para indicarem, de forma aproximada, o seu lugar numa recta (com a unidade previamente determinada através de alguns números inteiros representados). Nenhum grupo manifestou dúvidas. Houve raciocínios do tipo, "2/5 mais 4/5 é maior que um portanto se 2 mais 1 dá 3, com mais 1 e pouco, assinalo um pouco à frente do 4". Noutra situação, onde se pedia para inventarem problemas que traduzissem expressões dadas, os alunos evidenciaram que os símbolos tinham para eles significado, como mostra o seguinte enunciado de um dos grupos para a expressão

$$2 - 1\frac{1}{3}$$

" Se o André receber duas unidades de chocolate e oferecer 1 unidade de chocolate à Vanessa e 1/3 à Rita, quanto come o André?"

Através da análise que realizámos das produções dos alunos verificámos que ao longo do tempo estes foram recorrendo cada vez mais ao uso dos símbolos das fracções. Para além disso, notámos também que nenhum dos grupos apresentou respostas sem sentido, o que revela que fizeram um trabalho significativo. No caso das fracções decimais, as produções permitiram realçar a existência de diferentes designações para o mesmo número racional, nomeadamente os numerais decimais, as fracções e as percentagens (por exemplo $3/4 = 0{,}75 = 75\%$). As produções permitiram ainda a abordagem informal de algumas operações aritméticas. De resto, o facto de partirmos das estratégias informais dos alunos, dando espaço ao trabalho ao nível de compreensão de cada grupo, possibilitou que todos estes conceitos, que são reconhecidos como complexos, fossem trabalhados por *todos* os alunos.

Discussão da abordagem

Podemos dizer que esta abordagem se caracteriza pelo seguinte conjunto de aspectos intimamente relacionados. Um primeiro aspecto a realçar tem a ver com o facto da realidade dos alunos ser utilizada como ponto de partida para a construção do conceito de fracção. Neste caso, a realidade utilizada é uma série de situações contextuais do dia-a-dia, onde as fracções surgem de forma natural. Na abordagem tradicional, o ponto de partida para a aprendizagem é a própria Matemática, nomeadamente o conceito matemático de fracção concretizado em figuras, que funcionam como modelos visuais da estrutura matemática. Freudenthal (1973, 1991) refere-se a este aspecto da abordagem tradicional como "inversão anti-didática", observando que o ponto de partida para a aprendizagem da Matemática é o produto final da actividade matemática que foi sendo desenvolvida por matemáticos excepcionais.

Um outro aspecto que caracteriza a abordagem desta experiência, e que está extremamente ligado ao aspecto anterior, é o facto do processo de construção do conceito de fracção ter por base as próprias estratégias informais dos alunos, e as suas produções próprias. É dada assim a possibilidade aos alunos de participarem activamente no seu próprio processo de aprendizagem. O aprender Matemática é assim, nesta abordagem, identificado com o 'fazer Matemática'. Isto está intimamente ligado com a visão de, por exemplo, Freudenthal (1973,1991), de que a Matemática é primariamente uma actividade humana. É a actividade de organizar, relacionar, estruturar, generalizar, provar, formalizar o mundo à nossa volta.

Um terceiro aspecto tem a ver com o tipo de situações problemáticas. Estas são apresentadas de forma aberta (no sentido de que não é ensinado à partida qualquer processo de solução) e são tais que permitem gerar conhecimento matemático (que por sua vez servirá de base à produção de novo conhecimento). O papel do contexto é aqui fundamental. No estudo que realizámos, utilizámos contextos de partilha equitativa como ponto de partida para o estudo das fracções (Streefland, 1986). No entanto, há outros contextos igualmente ricos que deverão também ser usados numa fase inicial do estudo do conceito de fracção, como sendo contextos de medida (que convidem ao refinamento da unidade de medida, fazendo surgir assim as fracções). Neste caso as representações fraccionárias aparecem com a necessidade de comunicar o resultado da medição de uma certa grandeza. Por exemplo na medição de um comprimento, onde a unidade de medida fornecida aos alunos (por exemplo uma tira de papel) não cabe um número inteiro de vezes no comprimento a medir. Há necessidade de fraccionar a unidade em partes tais que daí resulte uma medida exacta, por exemplo

$$3\frac{4}{10} \text{ ou } 3{,}4.$$

As situações são tais que permitem a descoberta de relações e a construção de modelos que vão gradualmente servindo de ponte para a construção de conhecimento matemático mais formal.

Um outro aspecto é o papel e importância que é dada à interacção na sala de aula. Uma vez que é dado espaço a construções próprias das crianças, baseadas no seu conhecimento informal, surge na sala de aula uma grande variedade de estratégias, soluções e graus de compreensão da situação problemática e da sua resolução. É necessário por isso que haja um debate das ideias e descobertas feitas, o que leva à justificação, reflexão e comparação de estratégias, e que por sua vez estimula a consolidação das aprendizagens.

Finalmente, esta abordagem privilegia as conexões matemáticas. O facto das situações problemáticas serem do dia-a-dia e de ser dada liberdade ao aluno para as resolver baseado no seu conhecimento informal (aquilo que sabe naquele momento) faz com que estas conexões surjam de forma natural. De facto, em situações da realidade, as fracções, os decimais e a razão, por exemplo, estão intimamente relacionados.

Esta é assim uma abordagem que é centrada no aluno, uma vez que privilegia a participação activa deste no seu próprio processo de aprendizagem. O aluno tem liberdade de resolver os problemas ao seu nível, recorrendo ao seu próprio conhecimento naquele momento, o que não só valoriza o seu esforço e trabalho mas também permite a diferenciação de raciocínios na sala de aula. Primeiro, a possibilidade de construir ele próprio as soluções, e depois, a possibilidade de argumentar e comparar estratégias, permite ainda que possam ser os próprios alunos e não o professor a validar as respostas. Este tipo de trabalho transmite ainda ao aluno uma outra ideia do que é fazer matemática: o importante não é só chegar à resposta certa mas também e principalmente o descobrir um processo de resolução e saber argumentar sobre a sua correcção.

Notas finais

Note que não defendemos um trabalho exclusivamente em contextos de partilha equitativa. Pretendemos exemplificar uma primeira abordagem às fracções em contextos significativos para os alunos. É importante proporcionar às crianças um trabalho em diversificadas situações, onde as fracções surgem com diferentes significados, de modo a que explorem os conceitos de forma completa e integrada possibilitando uma construção gradual do sentido do número racional. É preciso, portanto, dar tempo aos alunos para irem integrando todos este conceitos e as suas relações, assim como os novos símbolos, e não ter pressa em introduzir regras e algoritmos, correndo o risco de os introduzir antes de que estes possam ter significado para as crianças.

A abordagem que aqui apresentámos foi inspirada no trabalho de Streefland (1986, 1991) sobre o ensino e aprendizagem das fracções e que se insere na corrente matemática designada por Matemática Realista. Esta teoria de Educação Matemática tem vindo a ser desenvolvida nos últimos 35 anos aproximadamente, no Instituto Freudenthal na Holanda. É uma teoria em constante construção mas que teve o seu ponto de partida na ideia de Freudenthal da Matemática como actividade humana. Para ele a Matemática é em primeira instância uma actividade, tendo vindo a constituir um corpo organizado de conhecimentos, no entanto a essência da Matemática não são as estruturas matemáticas mas sim o processo que conduz a essas estruturas. Segundo Freudenthal, a Matemática deveria ser assim também para os alunos, uma actividade. Estes deveriam aprender Matemática, através do fazer Matemática, matematizando assuntos da realidade do dia-a-dia e matematizando a sua própria actividade[3]. No fundo, através de um processo de matematização progressiva, deveria ser dado aos alunos a oportunidade de reinventar a Matemática. Assim como a actividade de matemáticos excepcionais resultou na Matemática que conhecemos hoje, a actividade dos alunos pode resultar na construção de Matemática (Gravemeijer, 2005). Esta é também a visão de Fosnot & Dolk (2002), que se referem aos alunos como 'pequenos matemáticos'.

Finalmente, e dado o exposto, gostaríamos de deixar uma ideia no ar: porque não introduzir as fracções já no 1° ciclo? Utilizando esta abordagem, é possível trabalhar de forma informal, e muito naturalmente, muitos dos conceitos que hoje são abordados apenas no 2° ciclo, o que constituiria uma boa base para um trabalho posterior mais formal no 5o e 6o anos. Se precisamos de dar tempo aos alunos para construir os conceitos, descobrir relações, antes de introduzir as regras e procedimentos, e sendo esta abordagem tão intuitiva para os alunos, não será desejável iniciar o trabalho desta maneira mais cedo? Deixamos assim aqui um convite à discussão sobre este assunto.

Notas

* No âmbito do Projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares.*

1 No programa do 1° ciclo em vigor as fracções aparecem como operadores partitivos aplicados a um conjunto discreto.

2 Esta experiência foi realizada em 3 turmas.

3 Note que não é necessário portanto que se parta sempre de contextos reais, do dia-a-dia. A palavra realista tem a ver com o papel essencial dos contextos reais, por um lado, mas refere-se também ao facto do ponto de partida dever ser o que é sentido pelo aluno como real, aquilo que sabe, podendo ser portanto um contexto da Matemática, desde que seja algo real para o aluno.

Referências

Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for Psychology. Fractions as a paradigm. *European Journal of Psychology of Education, 1*, (2), 67-82.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? *Actas Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, 83-101.

Fosnot, C.T. & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work — Constructing Fractions, Decimals, and Percents.* Heinemann.

Cecília Monteiro, Escola Superior de Educação de Lisboa
Hélia Pinto, Escola Superior de Educação de Leiria
Nisa Figueiredo, Instituto Freudenthal, Holanda

Dos números para a Álgebra. Por onde vão os alunos?

Partindo da nossa curiosidade em compreender um pouco melhor como os alunos analisam as regularidades numéricas com vista à obtenção de uma expressão algébrica fomos ouvi-los.

Seleccionámos uma questão do PISA 2000, a das macieiras, e convidámos alguns jovens de 15 anos, no final destas férias, a conversar connosco. Alguns tinham completado o 9° ano e outros o 10° ano. Procurámos que eles nos mostrassem a forma como contavam as coníferas e como relacionavam essa contagem com o número de ordem da figura. (Figura 1)

Todos eles compreenderam com relativa facilidade quer o padrão geométrico quer o padrão numérico a ele associado, sendo capazes de fazer previsões para as figuras seguintes. Os processos de contagem foram no entanto diversificados, e nem todos foram capazes de chegar sozinhos a uma expressão algébrica que traduzisse a regularidade identificada.

A Inês, aluna do 9° ano, contou pelo processo ilustrado na figura 2 e previu sem dificuldade o número de coníferas nas figuras seguintes mas não chegou sozinha a uma expressão algébrica que traduzisse este número. O Miguel, aluno de 9° ano, também recorreu a este processo de contagem e a partir da observação que na fila horizontal o número de coníferas se obtinha juntando $n+1$ ao n, concluiu que o lado horizontal podia ser representado por $(2n+1)$ e o vertical por $(2n-1)$, tendo chegado à expressão $[(2n+1)\times 2+(2n-1)\times 2]$ para traduzir o número total de coníferas.

Já o Sandro, aluno do 10° ano, que procedeu às contagens da mesma forma

Um lavrador planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta coníferas à volta do pomar.

Esta situação está ilustrada no diagrama abaixo representado, no qual se pode ver a disposição das macieiras e das coníferas para um número qualquer (n) de filas de macieiras:

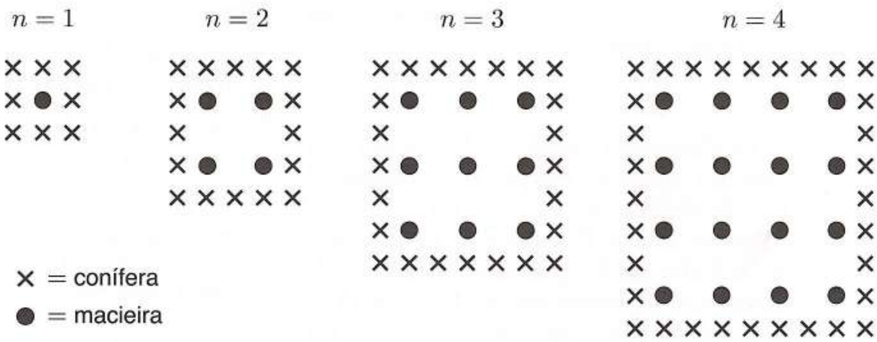


Figura 1.

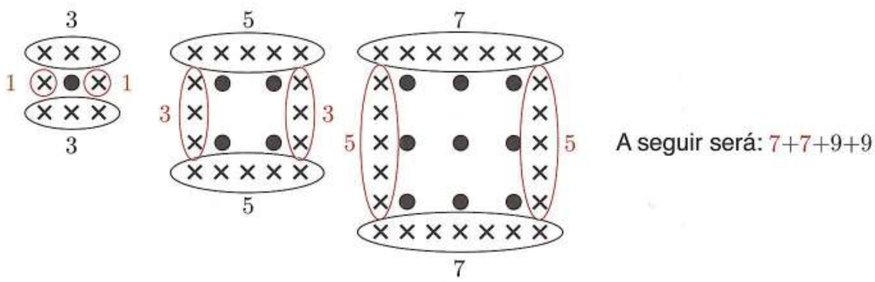


Figura 2. Inês, 9° ano, 15 anos

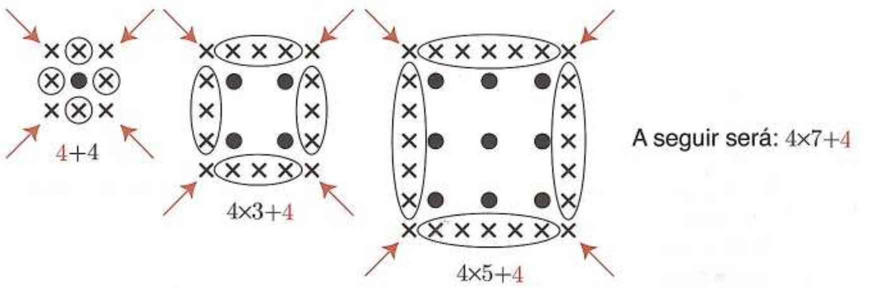
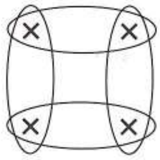


Figura 3. Pedro, 9° ano, 15 anos

que os alunos anteriores, após ter escrito a expressão $2 \times (2n+1) + 2 \times (2n-1)$. Escreveu de seguida a expressão $4 \times (2n+1) - 4$. Perante a nossa estranheza, sobre a relação entre as duas expressões, ele explicou a nova expressão a partir do desenho:



Mostrou que se fizesse $4 \times (2n+1)$ estaria a duplicar a contagem de algumas das árvores (as dos cantos). Na verdade ele não passou algebricamente de uma expressão para outra equivalente, mas antes afinou o seu processo de contagem.

O Pedro, aluno do 9° ano, percebeu logo que para ter um bom padrão de contagem o melhor era *separar* os 4 cantos. Assim, poderia considerar quatro lados iguais aos quais teria de acrescentar os 4 cantos. (Figura 3)

O padrão de repetição desta contagem foi claramente compreendido ainda que não tivesse chegado a uma expressão algébrica. Também o João, 10 ° ano, optou por separar os cantos depois de ter verificado que conseguia emparelhar as coníferas com as macieiras (n), depois sobravam sempre as do meio $(n-1)$. E assim chegou à expressão: $4 \times (n+n-1)+4$. (Figura 4)

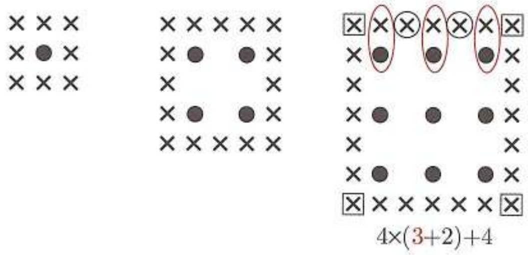
A Juliana, 10° ano, considerou que em cada lado do quadrado tinha duas coníferas para uma macieira. Na 1ª figura tinha 2 coníferas para cada macieira de cada um dos 4 lados do quadrado portanto teria 2×4 coníferas. Na 2ª figura continuava a ter 2 coníferas para cada uma das duas macieiras de cada lado, ou seja $2 \times 2 \times 4$ (duas coníferas vezes duas macieiras vezes 4 lados). E assim sucessivamente. A partir deste processo de contagem a Juliana concluiu que tem $2n + 2n + 2n + 2n$ coníferas em cada figura. (Figura 5)

Entendendo a álgebra como uma actividade que tem a sua origem na generalização do trabalho com números [ou na generalização da aritmética] deixámo-nos surpreender pela diversidade de processos de contagem e de *algebrização* a que estes jovens nos conduziram. Esse foi o ponto de partida para o levantamento de algumas questões que gostaríamos de deixar aqui:

- Que dificuldades podem surgir na passagem do numérico para o simbólico?
- Qual a importância, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, da partilha, por parte dos alunos, de várias formas de visualizar e de contar numa mesma situação?
- *Queimar* estas etapas não será um impeditivo para que os alunos atribuam um sentido aos símbolos?
- A sistematização dos processos de contagem destes alunos conduz a expressões diferentes mas, naturalmente, equivalentes. Será uma situação deste tipo um bom ponto de partida para discutir a equivalência de expressões algébricas?

Pense nisto!

Ana Luísa Paiva
Joana Brocardo
Manuela Pires



Para a n-ésima figura n será:
$4\times(n+n-1)+4$

Figura 4. João, 10° ano, 15 anos

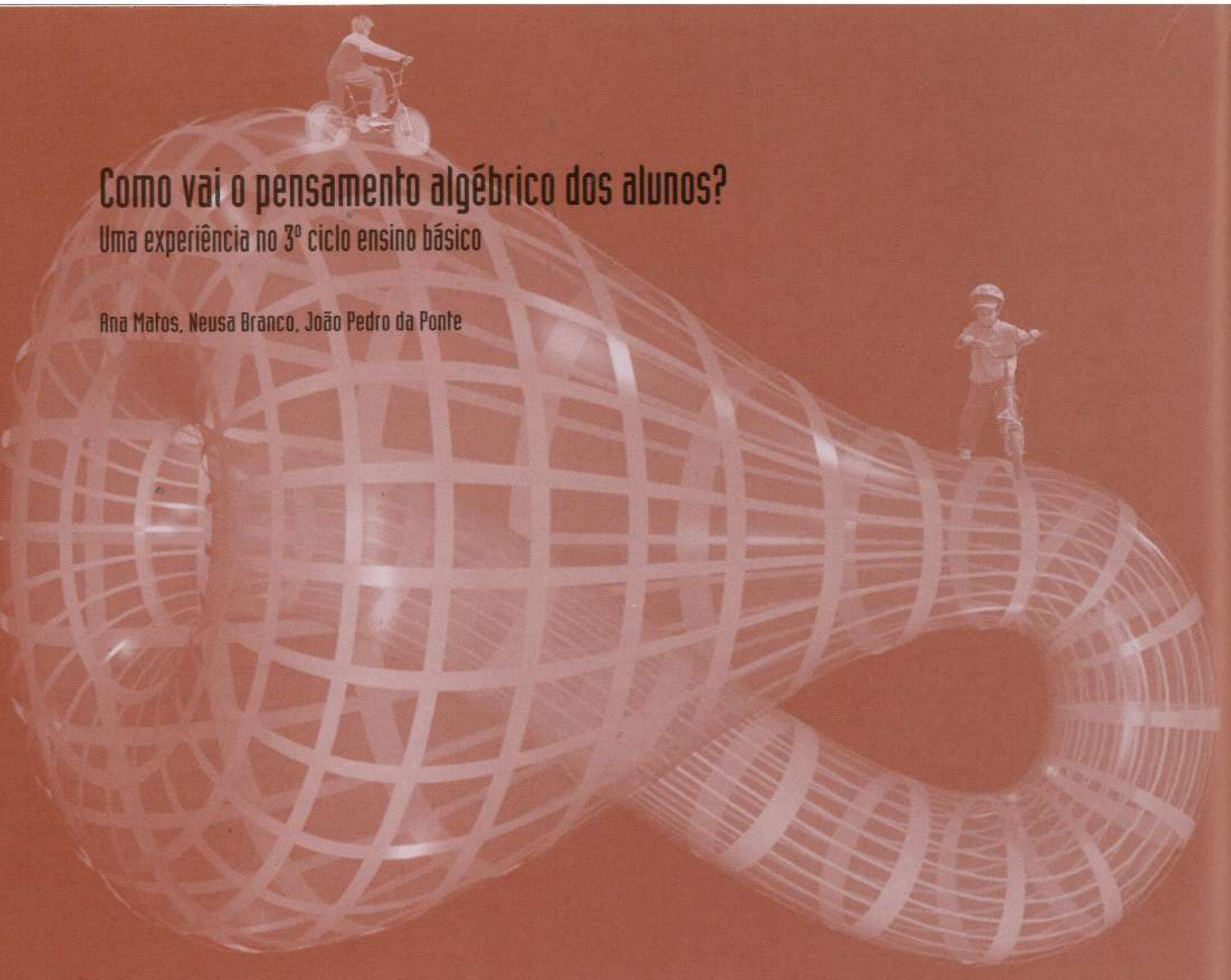
Para a n-ésima figura n será:
$2n+2n+2n+2n$

Figura 5. Juliana, 10° ano, 15 anos

Como vai o pensamento algébrico dos alunos?

Uma experiência no 3º ciclo ensino básico

Ana Matos, Neusa Branco, João Pedro da Ponte



A Álgebra pode ser encarada sob diversas perspectivas e assumir maior ou menor visibilidade no currículo. Em Portugal, nos programas de Matemática, para o ensino básico (ME–DGEBS, 1991), a Álgebra surge com maior incidência no 3° ciclo. No entanto, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME–DEB, 2001), para além dos objectivos específicos definidos para esse ciclo, estabelece um conjunto de objectivos gerais de aprendizagem no domínio "Álgebra e Funções", a atingir ao longo dos três ciclos de escolaridade. A importância dada neste texto ao desenvolvimento do pensamento algébrico vai ao encontro de discussões que se têm realizado em diversos países, sugerindo que os alunos podem e devem começar bastante cedo a viver experiências de aprendizagem que os preparem para um futuro contacto com símbolos e expressões algébricas.

Além disso, tem sido sublinhada a necessidade de proporcionar aos alunos oportunidades que os levem a encarar a Álgebra, não só como um assunto que é preciso dominar, mas também como uma ferramenta que é importante saber mobilizar em diferentes situações. Deste modo, a aprendizagem da Álgebra não deve fechar-se em si mesma, mas sim habilitar os alunos a tirar partido dela, em diferentes contextos (Kooij, 2002).

A discussão sobre o que são os aspectos essenciais da Álgebra escolar e quais as formas adequadas de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico tem sido particularmente viva em muitos países e em diversos encontros internacionais. O mesmo não tem acontecido em Portugal, onde não tem sido dada uma atenção significativa a este tema. É tempo, no entanto, de começarmos a participar activamente neste debate. Este artigo pretende ser um pequeno contributo nesse sentido, relatando uma experiência realizada com alunos do 3° ciclo.

O pensamento algébrico

Kaput (1999) defende que a Álgebra deve ser entendida de uma forma muito mais ampla, profunda e rica do que acontece tradicionalmente. Do seu ponto de vista, o pensamento algébrico pode tomar diversas formas que se interligam. Assim, considera que os alunos devem realizar actividades envolvendo a exploração da Aritmética como um domínio propício para a expressão e formalização de generalizações (Aritmética generalizada) e a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional). Sublinha, igualmente, a modelação como oportunidade de exprimir e formalizar generalizações e a própria generalização sobre estruturas abstractas. Desta forma, ao procederem a generalizações a partir das suas concepções e experiências em vez de procederem a uma mera aplicação de regras de manipulação simbólica, sem atenderem ao significado dos símbolos, os alunos estarão a revelar alguns aspectos do pensamento algébrico.

1. Notem que os objectos abaixo indicados têm todos preços diferentes. Será que os conseguem descobrir? Expliquem a vossa resposta com todo o promenor.

Figura 1. Às voltas com os preços ...

Esta perspectiva inspira os *Principles and Standards* do NCTM (2000), que indicam que o currículo de Matemática, relativamente ao tema da Álgebra, deve possibilitar a todos os alunos: (i) a compreensão de padrões, relações e funções; (ii) a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; (iii) a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) a análise da variação, em diversas situações. Entendida desta forma, a Álgebra constitui uma componente importante do currículo que o unifica e lhe dá consistência. Daí que esta organização defenda o lema "Álgebra para todos".

A experiência

As tarefas[1] que aqui apresentamos, e às quais nos referiremos em detalhe, foram propostas em quatro turmas do ensino básico em 2004/05. Estas constituem uma forma de os alunos tomarem contacto com situações não rotineiras e desafiantes, susceptíveis de lhes proporcionar novas experiências de aprendizagem. As tarefas proporcionam, nomeadamente, a oportunidade de verificar relações entre variáveis e fórmulas e de procurar soluções de equações, bem como, de analisar relações numéricas em situações concretas, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las por diferentes processos (ME–DEB, 2001). Note-se que as tarefas em causa não fazem, necessariamente, apelo a conhecimentos específicos e que os próprios alunos podem decidir de que forma utilizar os dados fornecidos, explorando caminhos diversificados.

As tarefas foram resolvidas por 36 alunos de duas turmas do 7° ano e por 43 alunos pertencentes a três turmas do 8° ano, de duas escolas da região de Lisboa e Vale do Tejo, no início do 3° período. No 8° ano, pelo facto de ter ocorrido uma situação muito particular em que uma das três turmas realizou uma visita de estudo, as tarefas foram resolvidas, individualmente, por Rodrigo, o único aluno que não participou nessa actividade. Os alunos do 7° ano, no momento em que resolveram estas tarefas ainda não tinham estudado o capítulo *Equações*, previsto para este ano de escolaridade, pelo que a sua exploração constituiu o ponto de partida para a aprendizagem deste tópico. Todos os alunos do 8° ano tinham estudado na íntegra o capítulo *Equações*, incluído no programa deste ano de escolaridade, à excepção de Rodrigo.

Em todas as turmas, desde o início do ano lectivo, os alunos trabalhavam, habitualmente, de forma colaborativa. Estas tarefas foram resolvidas em grupos de dois ou três alunos, tendo sido, em todos os casos, fornecida apenas uma ficha de trabalho a cada um dos grupos.

Inicialmente, tínhamos previsto a resolução das três tarefas numa única aula de 90 minutos. No entanto, a sua exploração por parte dos alunos do 7° ano demorou mais tempo. Assim, à maior parte destes alunos foram propostas, apenas, a primeira tarefa e a questão 2.1. da tarefa seguinte. Alguns grupos de alunos do 8° ano, pelo mesmo motivo, também não resolveram a questão 2.2. A discussão colectiva de cada uma das tarefas foi efectuada numa aula posterior. Após a sua resolução, recolhemos os registos escritos dos alunos e procedemos à sua análise, com o intuito de identificar as suas estratégias e observar as suas reacções às tarefas propostas.

Do nosso ponto de vista, estas tarefas poderiam proporcionar aos alunos uma oportunidade para pensarem genericamente e para estabelecerem relações entre diversas variáveis em simultâneo, tendo em conta as condições a satisfazer em cada caso. Através da sua resolução de forma colaborativa e da elaboração de um registo escrito pretendíamos levar os alunos a argumentar e comunicar, oralmente e por escrito. Na nossa análise procuramos verificar até que ponto isso realmente aconteceu.

Às voltas com os preços ...

Na primeira tarefa proposta existem três montras diferentes, cada qual com o preço total indicado na figura respectiva (Figura 1). De cada montra fazem parte apenas dois objectos, de entre os três cujo preço desconhecemos: a bola, o livro ou a mochila. Pretende-se que os alunos determinem os preços de cada um deles.

Quando iniciam a resolução da tarefa, os grupos manifestam algumas dificuldades na interpretação do enunciado e tentam certificar-se de que estão a compreender exactamente o que lhes é pedido. A sua primeira dúvida é se o número indicado em cada figura é o preço total da montra ou o preço de apenas um dos objectos. Após a clarificação des-

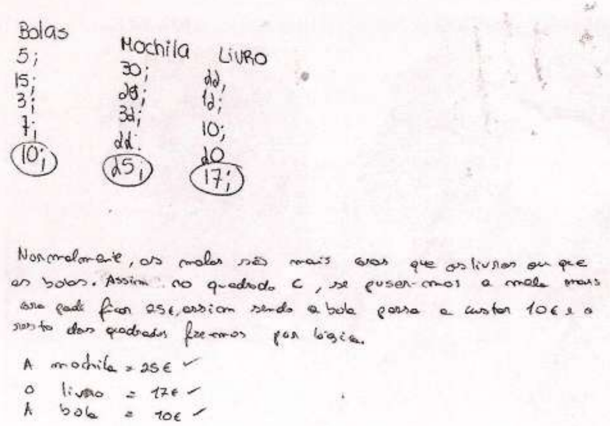


Figura 2. Jéssica, Nádia e Sandra, 7º ano[2].

te aspecto, os alunos iniciam o trabalho da forma que lhes parece mais adequada. Logo nas primeiras tentativas surge uma nova questão, relativa ao preço de cada objecto poder, ou não, variar de montra para montra. A professora esclarece que, neste caso, o preço de cada objecto é sempre o mesmo, independentemente da montra em que esteja colocado. Durante a exploração da tarefa, alguns alunos questionam, ainda, se o preço de cada objecto pode não ser um número natural, hipótese que se põe de parte.

No que diz respeito às estratégias desenvolvidas, pelos grupos de trabalho, podemos estabelecer algumas distinções às quais nos referiremos de seguida.

Processo de tentativa-erro influenciado por vivências prévias

Grande parte dos alunos começa por atribuir um valor, mais ou menos ao acaso, a um dos objectos numa das montras, indo em seguida verificar se as restantes condições são, ou não, satisfeitas. Pela interacção gerada entre eles percebemos que muitos grupos atribuem um valor, não pela análise e comparação dos dados fornecidos, mas com base na sua experiência pessoal, supondo que o objecto mais barato é a bola, por imaginarem que assim sucede numa loja de verdade.

Na resposta que apresentamos na figura 2 é nítida esta estratégia:

Processo de tentativa-erro orientado pela análise das condições do problema

Noutros casos, os alunos, apesar de terem chegado a uma solução através de tentativas partem de algumas relações a que chegam analisando as condições indicadas no problema e estabelecendo relações entre os preços dos diversos objectos. Nos exemplos que se seguem, os alunos tecem considerações quanto aos objectos de preço mais elevado.

Se a bola com a mochila é mais cara que a bola e o livro, então a mochila é mais cara que o livro.

(Andreia e Lídia, 8º ano)

Estas alunas estabelecem comparações entre duas montras, de modo a que o objecto comum não interfira e seja possível retirar conclusões acerca dos restantes objectos.

A diferença da figura 1 e a figura 2 é de 15 €.
A diferença da figura 1 e a figura 3 é de 7 €.
A diferença da figura 2 e a figura 3 é de 8 €.
A mochila é a mais cara.
A diferença da mochila e da bola é de 15 €.

(Amélia e Marcelo, 7º ano)

Neste caso, os alunos, partindo da diferença dos preços totais das montras, conseguem determinar as diferenças entre os preços de cada um dos objectos de um dado par.

Rodrigo apresenta também um processo de tentativas orientado pelas condições do problema, embora utilize já uma linguagem mais formal. A sua estratégia é constituída por várias etapas:

$M + L = 42$
$L + B = 27$
$B + M = 35$

A mochila é a mais cara porque somada com o livro dá o valor + elevado portanto ela e o livro são os mais caros, como ela somada com a bola é mais cara que o livro quando somado com a bola também então a mochila é a mais cara.

A bola tem que ter um preço que seja menos de metade de 35 e de 27.

A mochila tem que ter um preço que seja mais de metade de 42 e de 35.

O livro tem que ter um preço que seja mais de metade de 27 e menos de metade de 42.

Bola	> 0 € e $< 13,5$ €	9 €	10 €
	> 0 € e $< 17,5$ €		
Mochila	> 21 € e < 42 €	24 €	25 €
	$> 17,5$ € e < 35 €		
Livro	> 0 € e < 21 €	18 €	17 €
	$> 13,5$ € e < 21 €		

(Rodrigo, 8º ano)

Numa primeira fase, o aluno traduz os dados do problema para uma linguagem simbólica, afirmando oralmente que assim consegue uma melhor visualização e compreensão de todos os elementos fornecidos[3]. De seguida, passa ao estabelecimento de limites possíveis para os preços dos objectos. Embora não o tenha explicitado por escrito, é notório que os comparou previamente. Essa comparação aliada à determinação de metade do preço de cada montra, permite-lhe enquadrar os diferentes preços. A terceira fase da resolução surge de um processo de tentativas que são orientadas pelos limites inferior e superior já estabelecidos. Em primeiro lugar selecciona para preço da bola, o valor de 9 € e, partindo da expressão $L + B = 27$, verifica que o livro tem que custar 18 €. Em seguida, recorrendo à expressão $M + L = 42$, obtém o valor de 24 € para o preço da mochila. No entanto, usando estes valores, a condição $B + M = 35$ não é satisfeita, o que indica a necessidade de formular nova tentativa. Desta feita, fixa para o preço da bola o valor de 10 €,

2. Cada um dos sólidos geométricos da figura tem um peso diferente. Será que conseguem descobrir os pesos de todos eles? Descrevam por escrito o vosso raciocínio com todo o promenor.

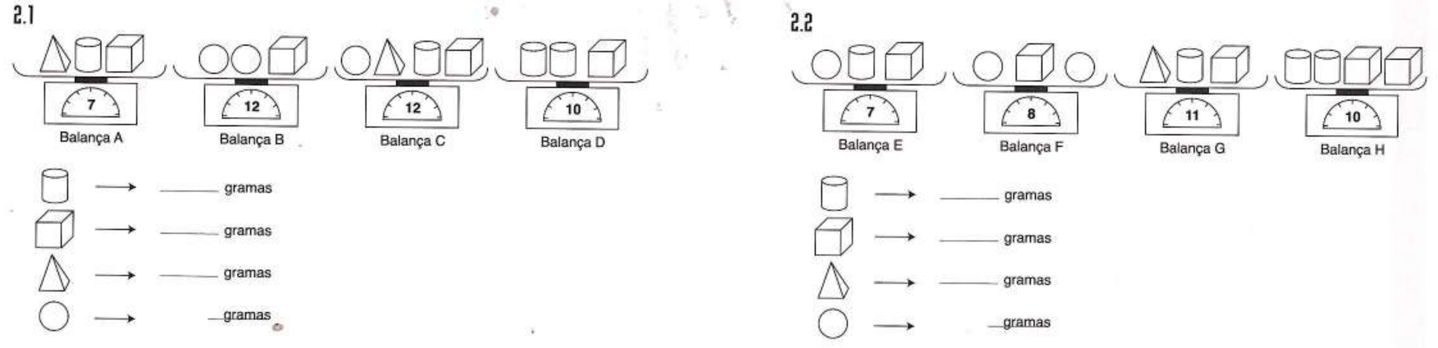


Figura 4. Quanto pesam os sólidos?

pelo que, por um processo análogo, a solução do problema é encontrada.

Desempenho geral

De uma forma geral, nas turmas do 7° ano, a maior parte dos grupos determina correctamente os preços dos três objectos. Amélia e Marcelo são os únicos alunos que não o chegam a fazer. Contudo, estabelecem várias relações entre os preços dos objectos, ocupando grande parte do tempo da aula com essa exploração. Já no 8° ano, 17 dos 21 grupos conseguem resolver o problema. Apenas 4 grupos, apesar das muitas tentativas que efectuam, não chegam, efectivamente, à sua solução.

Por ser uma tarefa com características pouco habituais, alguns alunos dos 7° e 8° anos manifestam dificuldades iniciais que só conseguem superar quando, por algum processo, se envolvem na exploração da situação proposta. No entanto, a descoberta da solução do problema, ou até de algumas relações matemáticas interessantes relativas aos preços dos objectos, constituem momentos entusiasmantes de que muitos dos alunos revelam gostar bastante.

Quanto pesam os sólidos?

A tarefa seguinte é constituída por duas situações que envolvem balanças, sendo pedido aos alunos que determinem os pesos de cada um dos sólidos geométricos e que descrevam o raciocínio que sustenta a sua resposta (Figura 4). Mais uma vez a tarefa suscita algumas dúvidas aos alunos, que questionam, em primeiro lugar, se todos os sólidos do mesmo tipo pesam o mesmo, nas diferentes balanças. Para além disso, os alunos questionam-se se os pesos podem, ou não, tomar valores decimais. Uma vez esclarecidos sobre o facto de só poderem utilizar números naturais iniciaram o seu trabalho.

Processo de tentativa-erro

No exemplo seguinte, relativo à questão 2.2, a estratégia adoptada pelos alunos baseia-se num processo de tentativa-erro que lhes permite, por experimentação, obter os valores que satisfazem todas as condições, em simultâneo.

Se a esfera pesar 2 gramas na balança F duas esferas pesam 4 gramas por isso só sobram 4 gramas que são as do cubo. Na balança E o peso da esfera e do cubo dá 6 gramas por isso só sobra 1 grama que é o peso do cilindro. Na balança G se somarmos o peso do cubo e do cilindro é 5 gramas por isso só sobra 6 gramas que são as da pirâmide. Na balança H o valor do peso é 10 gramas porque o peso dos cubos dá 8 gramas e o valor dos dois cilindros dá 2 gramas por isso o resultado é 10 gramas.

(Raul e Vasco, 8° ano, questão 2.2.)

Processo de estabelecimento de relações seguido de tentativa-erro

Outra estratégia também usada por alguns dos grupos passa pela combinação entre o estabelecimento de relações e a realização de tentativas. Os alunos comparam algumas das balanças e, baseando-se nessas comparações, estabelecem novas relações entre os pesos dos sólidos, terminando com novo processo de experimentação, como sucede no caso seguinte:

A esfera é o que pesa mais. A pirâmide pesa menos 3 gramas que o cilindro [comparam as balanças A e D]. Se o cilindro pesar 4 e o cubo 2 a balança D está resolvida. Se a esfera pesar 5 e a pirâmide 1 então: $5 + 1 + 2 + 4 = 12$ [Balança C]
A balança B fica: $5 + 5 + 2 = 12$
A balança A fica: $1 + 4 + 2 = 7$.

(Andreia e Lídia, 8° ano, questão 2.1.)

Processo de estabelecimento de relações

Uma terceira estratégia também usada envolve apenas o estabelecimento de relações. Assim, no exemplo que se segue, há a salientar o facto de os alunos iniciarem o seu trabalho de forma semelhante aos anteriores, embora a sua estratégia se baseie, até ao final, nas relações que vão estabelecendo entre as variáveis, nunca recorrendo à experimentação (figura 5).

Os alunos de um outro grupo apresentam um raciocínio semelhante, embora tenham pontos de partida diferentes para o seu desenvolvimento. Ao partirem de balanças distintas, as relações que começam por estabelecer são também diferentes.

Balança B e Balança C pesam o mesmo.
O Prisma e o celindro pesam o mesmo que a espera

O Prisma e a

o prisma, o cedindro, o cubo pesam os 3 sete e na badança C tem a efera por isso, Faz-se 12-7=5 badunsa B

2 esferas = 10 > 12
1 cubo = 2

Badança D:
cubo - 2
cilidros = 8
8:2 = 4

Badança A:
cubo + celindro = 6
prisma = 1
6+1 = 7

Figura 5. Adelaide e Noë. 8° ano. questão 2.1.

Se tirarmos a esfera da Balança C e compararmos com a A a esfera vai pesar 5 gramas.
O cubo pesa 2 gramas porque duas esferas pesam 10 gramas e só sobram 2 gramas que são as do cubo.
O cilindro pesa 4 gramas porque na balança D o cubo pesa 2 gramas sobram 8 gramas dos dois cilindros por isso um cilindro pesa 4 gramas.
Se na balança A o cubo pesa 2 gramas, o cilindro 4 e somarmos dá 6 gramas por isso a pirâmide pesa 1 grama porque entre o pes os dois sólidos e o peso dos três dá 1 grama.

Figura 6. Raul e Vasco. 8° ano. questão 2.1.

Desempenho geral

Analisando o desempenho dos alunos do 7° ano nestas tarefas, de uma forma global, verificamos que a maior parte dos alunos consegue solucionar o problema por processos intuitivos. No entanto, três dos grupos não apresentam a solução correcta, dado que a sua resposta não satisfaz as condições expressas em todas as balanças, mas em apenas algumas delas.

Quanto aos alunos do 8° ano, um grupo não responde à questão 2.1 e um outro grupo não o faz de forma correcta. Na questão 2.2, dos grupos que procuram responder, apenas um não chega à solução. Duas das turmas do 8° ano que participam nesta experiência têm desempenhos bastante distintos, apresentando uma delas, claramente, mais dificuldades na compreensão e resolução das tarefas do que a outra. O Rodrigo, único aluno da terceira turma envolvido nesta experiência, demonstra também algumas dificuldades iniciais relativamente à interpretação das tarefas e ao modo como pode iniciar a sua resolução. A reacção da generalidade dos alunos a esta tarefa é bastante positiva, sendo notório o seu empenho na resolução.

Comentários finais

Na tarefa *Quanto pesam os sólidos?*, os alunos manifestam menos dificuldades iniciais do que na tarefa *Às voltas com os preços*, talvez por conseguirem aplicar alguns processos utilizados com sucesso, na resolução da primeira tarefa. Apesar de nem todos os alunos terem tempo suficiente para resolver esta segunda tarefa, uma grande parte dos grupos que o fazem, acabam por conseguir, de algum modo, solucionar o problema. Da nossa observação apercebemo-nos de que os alunos interagem e argumentam oralmente, produzindo, de acordo com o que lhes é pedido, um breve registo escrito, que sistematiza os passos da sua exploração.

Pensamos que a experiência efectuada constitui um momento positivo para os alunos, pelo desafio que lhes proporciona, e que o seu desempenho global corresponde às nossas expectativas iniciais. Em ambas as tarefas, os alunos exploram as situações apresentadas por processos preferencialmente intuitivos, como a elaboração de tentativas e a verificação experimental da satisfação de todas as condições. Em alguns casos, o processo de tentativa-erro é efectuado de uma forma mais orientada, tendo em conta uma reflexão sobre as condições indicadas no problema. No caso particular de Rodrigo, na resolução da primeira tarefa, é evidente a análise das condições do problema e o estabelecimento de novas relações, que lhe permitem fazer tentativas muito próximas dos preços correctos dos objectos. O aluno usa ainda alguns elementos da linguagem algébrica para analisar a situação, embora não os utilize na determinação da solução. O facto de ser persistente leva-o a superar as dificuldades iniciais e a desenvolver uma estratégia distinta das utilizadas pelos alunos das outras turmas, revelando maior estruturação no seu raciocínio.

Na segunda tarefa, é de salientar o facto de apenas dois grupos utilizarem estratégias que favorecem uma maior possibilidade de generalização, estabelecendo relações entre os diversos pesos. Os alunos destes grupos revelam um tipo de pensamento mais elaborado que, desejavelmente, deveria ser acessível a um maior número de alunos.

Apesar de os alunos do 8° ano terem já estudado equações e, portanto, terem já conhecimento da linguagem algébrica, apenas um aluno, Rodrigo, a utiliza. De uma forma geral, os alunos não recorrem às aprendizagens formais realizadas no âmbito da Álgebra para a resolução de problemas, não a encarando ou não a conseguindo utilizar como uma ferramenta.

Esta experiência de ensino, concretizada no caso particular de quatro das nossas turmas, deixa-nos mais alerta para o facto de os alunos possuírem recursos intuitivos que lhes podem ser muito úteis na resolução de problemas. Para além disso, faz-nos sentir a necessidade de perceber melhor como lhes proporcionar o desenvolvimento de aspectos mais elaborados do pensamento algébrico, de modo a que a Álgebra se torne, para eles, um novo recurso a mobilizar com sucesso na resolução de problemas.

Notas

1 Estas tarefas foram adaptadas de exemplos publicados on-line pela associação americana Annenberg/CPB, em `http://www.learner.org/channel/courses/learningmath/algebra/index.html`, acedido em 10 de Fevereiro de 2005.

2 Há respostas muito semelhantes em vários outros grupos.

3 Tratando-se de um aluno do 8° ano de escolaridade, é natural que não tenha dado seguimento à resolução do sistema de equações, como seria possível se já tivesse estudado este tema.

Referências

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum [Versão electrónica]. Acedido em 1 de Fevereiro de 2005 de `http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf`

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van der Kooij, H. (2002). *Algebra: a tool for solving problems?* Comunicação apresentada em "The Netherlands and Taiwan conference on common sense in mathematics education", Taipei, Taiwan [Versão electrónica]. Acedido em 12 de Julho de 2005 de http://www.fi.uu.nl/en/indexpublicaties.html

Ana Matos, Escola Secundária com 3° Ciclo Gama Barros, Cacém

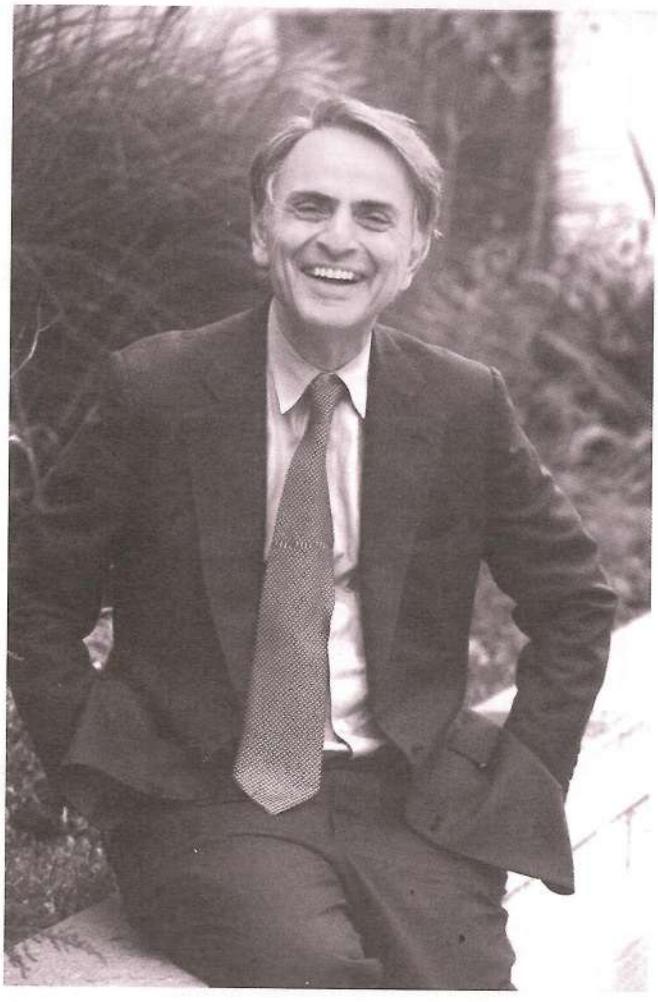
Neusa Branco, Escola Básica dos 2° e 3° Ciclos Mem Ramires, Santarém

João Pedro da Ponte, Dep. de Educação da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa

As contas de dividir eram ensinadas como um conjunto de regras de um livro de cozinha, sem qualquer explicação sobre o modo como esta sequência particular de pequenas divisões, multiplicações e subtracções nos dava resposta certa. No liceu a extracção de raízes quadradas era-nos apresentada com veneração, como se fosse um método sagrado. Tudo o que tínhamos a fazer era recordar o que nos tinham mandado fazer. Dá a resposta certa e não te rales se não percebes o que estás a fazer. No 2° ano tive um professor de Álgebra muito competente com quem aprendi muita matemática; mas também era um bruto que se comprazia em deixar as raparigas lavadas em lágrimas. O meu interesse pelas ciências manteve-se durante todos estes anos por ler livros e revistas científicos e de ficção científica.

Tudo começou num domingo, tinha eu 5 anos, em que o meu pai me explicou, com toda a paciência, o papel do zero na aritmética, os nomes de som estranho dos grandes números e que não existe um número maior do que os outros. De súbito fui invadido por uma compulsão infantil de escrever em sequência todos os números inteiros de 1 a 1000. Não tinha folhas de papel, mas o meu pai ofereceu-me a pilha de cartões cinzentos com que as camisas chegavam da lavandaria e que ele costumava guardar; consegui atingir os 1000 um pouco depois da hora em que habitualmente ia para a cama. Desde então, a magnitude dos grandes números nunca deixou de me impressionar.

Carl Sagan



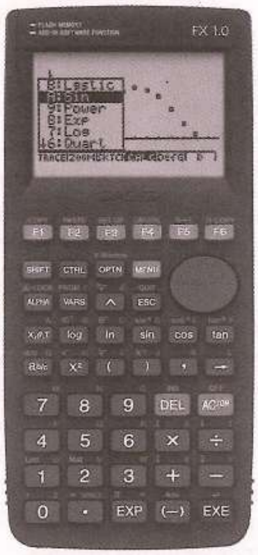
CASIO® CALCULADORAS PARA O ENSINO

A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado, perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas, através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional Casio.

GRÁFICAS

CFX 9850 Gb Plus

- Visor a cores
- 32 Kb Ram + 28 Kb Rom
- Estatística Avançada
- Cálculo Financeiro
- Matrizes
- Complexos
- Raízes Reais e Complexos
- Derivados
- Cónicas
- 10 Modelos de Regressão
- Biblioteca Incorporada
- Ligação a PC, Analisador de Dados, e Vídeo/TV
- Modelo com Painel para Retroprojector



FX 1.0 Plus

- Memória Flash 768K + 144K Ram (cerca de 1 Megabyte)
- Excelente Visor Monocromático
- Funções Gráficas de Alto Nível
- Rápido Acesso aos Menus e Diversas Opções
- Gráficos Dinâmicos e Duplas – – Cónicas – Complexos
- Estatística – Equações até 30 Incógnitas
- Matrizes – Integração – Cálculo Diferencial
- Operações Lógicas – Programação Tipo Basic
- Actualização pela Internet com Programas e Aplicações
- Linguagem de Trabalho e Aplicação da Linguagem Portuguesa (download da Internet)

e ainda: FX 7450 G, FX 9750, Álgebra FX 2.0

ACESSÓRIOS P/ GRÁFICAS

CABO SB 87

Ligação a PC das gráficas CASIO com software FA123

TV/VÍDEO - Vi 9850 G

Ligação a TV e Vídeo projector da CASIO CFX 9850 Gb Plus

KITS PARA RETROPROJECTOR

Conjunto Máquina + Data Display + cartão emulador

ANALISADOR DE DADOS

Recolha de Dados vários com sondas incluídas e ligação das gráficas CASIO; Analisador EA-100, Sensor de Movimento EA-2, Sensores da Vernier

CIENTÍFICAS

FX 82

FX 570

FX 350

Científicas de alto nível, Simples, Económicas, Poderosas

- Visor com 2 linhas

ELEMENTARES

HS 8 ER

HL 820 ER

SL 450

- Robustas
- Económicas
- Modelos ER com cálculo de EUROS

P.E.C. Programa Educacional CASIO

Apoio Técnico e Pedagógico - Programa de Empréstimos - Cursos de Formação

O PEC - Programa Educacional CASIO, numa das suas várias vertentes, desenvolve **cursos de formação** (gratuitos), tendo como objectivo familiarizar a classe docente com a tecnologia das calculadoras gráficas e a sua aplicação aos novos programas de matemática.

O programa de cursos de formação desenvolvido pela CASIO, conta com o apoio de uma Equipa de Professores de Matemática a nível nacional, que não só realizarão os cursos como **também responderão a qualquer solicitação técnica e/ou pedagógica**.

CONTACTOS

APOIO PEDAGÓGICO POR TELEFONE: 213 122 868

E-MAIL: ana.margarida@beltraoc.pt

CASIO Japão: ACTIVIDADES DOWNLOADS

www.casio.co.jp/edu_e/

BELTRÃO COELHO

Lisboa, Porto, Barreiro, Braga, Aveiro, Coimbra, Santarém, Setúbal, Faro, Funchal e Sintra

www.beltraoc.pt

O triunfo da álgebra

Eduardo Veloso

Que construções geométricas são, ou não, teóricamente possíveis? [. . .] Um aspecto singular relativo a esta questão é o facto da geometria elementar não fornecer qualquer resposta a esta questão. Temos que recorrer à álgebra [. . .]. Este novo método de ataque tornou-se necessário devido ao facto da geometria elementar não possuir um método geral, um algoritmo, [como é o caso da álgebra].

Felix Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*.

A longa história da descoberta da impossibilidade de resolução dos três famosos problemas da antiguidade clássica — duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo —, constitui um tópico excelente para fazer compreender a natureza da matemática e a riqueza dos seus processos de investigação. Deveria fazer parte obrigatória de todos os cursos de formação de professores, como ocasião privilegiada para ilustrar a unidade da matemática e tornar significativas as aprendizagens de algumas estruturas algébricas. Não é infelizmente esse o caso.

Trata-se de um tema extenso que poderia facilmente e utilmente preencher uma cadeira semestral. Neste artigo apenas vou tentar despertar a curiosidade dos leitores da *Educação e Matemática*, salientar alguns aspectos mais relevantes e indicar futuras leituras. Os livros que irei referindo serão comentados na última secção do artigo.

O facto da impossibilidade de resolução dos três problemas geométricos ter sido demonstrada, por métodos algébricos, mais de dois mil anos depois de terem sido enunciados, é certamente *um triunfo da álgebra*. Mas deve também ajudar-nos a reflectir, neste número dedicado à álgebra, sobre a necessidade de uma abordagem do ensino da álgebra que tome sistematicamente como ponto de partida problemas interessantes e com significado.

Construção geométrica e resolução algébrica: que conexões?

Nesta longa história, o passo fundamental foi a compreensão de como era possível traduzir, na linguagem da álgebra, uma construção geométrica. Tal exige uma apresentação detalhada e um esforço de leitura a que convido os colegas leitores deste artigo. A isso será dedicada esta primeira parte, em que mostraremos essa conexão através de um exemplo simples: a determinação da bissectriz de um ângulo.

Trata-se da proposição I.9 (livro I, proposição 9), dos *Elementos* de Euclides e tem o seguinte enunciado:

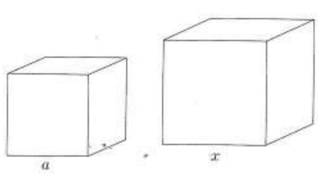
Proposição I.9.
Dado um ângulo, construir a sua bissectriz.

Sendo dado o ângulo AOB, pretendemos encontrar um ponto X tal que a semirecta OX seja a sua bissectriz, ou seja, que o ângulo AOX seja igual ao ângulo XOB.

Os três problemas clássicos da geometria grega

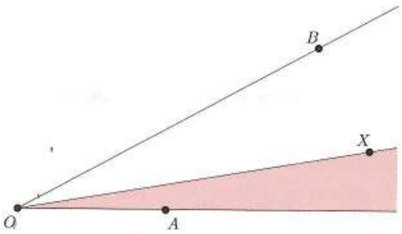
Os três problemas referem-se a construções na geometria euclidiana, ou seja, admitem nessas construções apenas os dois instrumentos dos *Elementos* de Euclides — a régua não graduada e o compasso euclidiano — e de acordo com os postulados de Euclides relativos a estes instrumentos[1]. Tendo em conta estas condições, que são pressupostos, os enunciados dos três problemas (em linguagem moderna) são os seguintes:

Trissecção do ângulo



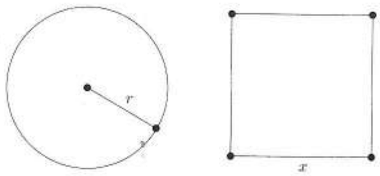
Dado um cubo de aresta a, construir um segmento de comprimento x tal que o cubo de aresta x tenha o dobro do cubo dado.

Quadratura do círculo



Dado um ângulo AOB construir um ponto X tal que o ângulo AOX tenha uma amplitude igual a 1/3 da amplitude AOB.

Duplicação do cubo



Dada uma circunferência de raio r, construir um segmento x tal que o quadrado de lado x tenha a mesma área que a circunferência.

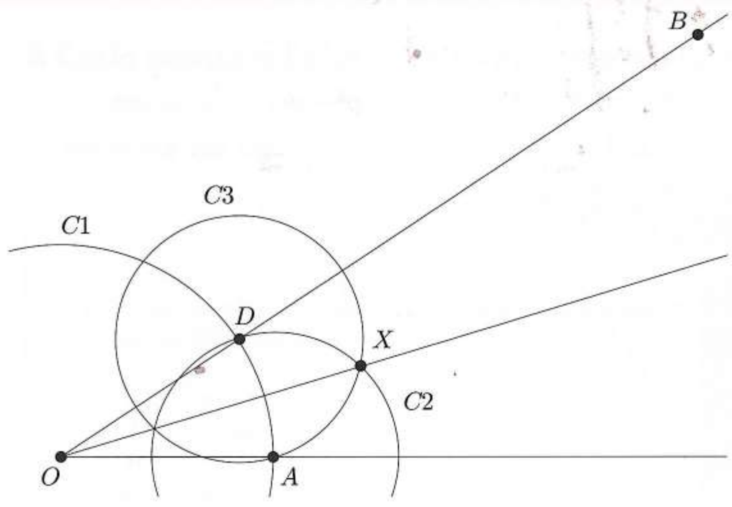


Figura 1.

Na figura 1, o ângulo dado é formado pelas semirectas OA e OB. Para podermos pôr lado a lado a construção geométrica e a resolução algébrica do mesmo problema (determinação da bissectriz), "algebrizamos o plano" com dois eixos coordenados, a recta suporte da semirecta OA e a sua perpendicular no ponto O, e tomamos para unidade o segmento OA. As coordenadas dos pontos dados serão então $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(p,q)$, em que p,q são dois números reais.

Construção geométrica. Como é sobejamente conhecido, as construções geométricas euclidianas estão sujeitas a regras precisas:

- podemos utilizar dois instrumentos, a *régua não graduada* e o *compasso euclidiano*, com os quais é permitido:
  régua não graduada: dados dois pontos K e L, construir a recta definida por esses dois pontos (bem como o segmento KL e as semirectas KL e LK);
  compasso euclidiano: dados dois pontos K e L, construir a circunferência de centro K e passando por L;
- a construção de novos pontos, para além do conjunto dado inicialmente, é obtida pela intersecção de duas rectas, de uma recta com uma circunferência ou de duas circunferências (*Euclides não assume explicitamente esta regra, mas usa-a constantemente*).
  Na construção pedida na *proposição I.9.*, o conjunto de pontos inicialmente dado é formado pelos pontos A, O e B. E os passos da construção geométrica são os seguintes:

1. construção da semirecta OB;
2. construção da circunferência c_1, de centro O e passando por A;
3. construção do ponto D, intersecção da circunferência c_1 com a semirecta OB;
4. construção da circunferência c_2, de centro A e passando por D;
5. construção da circunferência c_3, de centro D e passando por A;
6. construção do ponto X, uma das intersecções das circunferências c_2 e c_3.
7. construção da semirecta OX, bissectriz do ângulo AOB.

Como sempre, Euclides não termina aqui: tendo proposto uma construção, é necessário provar que a construção resulta realmente na bissectriz. Aceitamos a demonstração de Euclides, mas aconselhamos vivamente o leitor a não deixar de ter o prazer de a ler[2]. Interessa-nos aqui fazer alguns comentários aos passos da construção:

- todos eles estão conformes com as regras das construções geométricas euclidianas;
- no fundo, o que se trata essencialmente é de, tomando o conjunto de pontos A, O e B como conjunto de *partida*, ir construindo sucessivos pontos — no caso os pontos D e X — de tal modo que o último responda ao problema posto;
- na realidade, ao atingirmos o ponto X, a questão de traçar ou não a semirecta OX é claramente de somenos importância, a resolução do problema consistiu na construção do ponto X;
- temos assim uma sequência de pontos — A, O, C, D, X — em que cada um ou faz parte do conjunto de partida ou é obtido de *pontos anteriores da sequência* de acordo com as regras que enunciámos:
  — D é obtido pela intersecção da circunferência c_1 (centro O, passando por A; A e O anteriores a D) com a recta OB (O e B anteriores a D);
  — X é obtido pela intersecção da circunferência c_2 (centro em A, passando por D; A e D anteriores a E) com a circunferência c_3 (centro em D, passando por A; D e A anteriores a X).

Resolvido o problema geometricamente, passemos agora para a resolução algébrica.

Resolução algébrica. Em linguagem de programação, poderíamos dizer que a análise está feita, agora é só programar. Ou seja, a geometria serviu para perceber como se resolve o problema da determinação da bissectriz (fundamentalmente, como vimos, através da sequência de pontos A, O, B, D, X). O que vamos agora fazer (não porque seja necessário para resolver o problema, pois está completamente resolvido pela geometria) é traduzir aquela construção geométrica na linguagem algébrica. Para que vamos fazer isto, se o problema está resolvido geometricamente? Porque a geometria parece ser muito potente a resolver problemas mas tem dificuldade, não parece ser capaz de mostrar que certos problemas, nomeadamente os famosos problemas que referimos no princípio deste artigo, não admitem solução! Portanto o que pretendemos é perceber como a álgebra resolve os problemas de construções geométricas, não para resolver os resolúveis ... mas para detectar os insolúveis recorrendo à álgebra ...!

A geometria analítica, iniciada por Descartes e Fermat, permite-nos colocar claramente o problema em termos algébricos:

- dados os pontos A, O e B, construímos um modelo do plano euclidiano através de um sistema de eixos coordenados cartesianos, com a origem em O e com a unidade igual ao segmento OA;
- designamos as coordenadas de B por (p,q), e pretendemos determinar as coordenadas do ponto X;
- sabemos traduzir em equações as figuras (rectas e circunferências) usadas na construção de D e de X;
- e sabemos também que, sendo os pontos D e X obtidos por intersecção de uma recta com uma circunferência e de duas circunferências, respectivamente, em termos algébricos o que há a fazer é resolver dois sistemas de equações.

Mãos à obra, portanto...

- recta OB
  - equação: $y = \frac{q}{p}x$
- circunferência c_1 (centro O, passando por A)
  - equação: $x^2 + y^2 = 1$
- ponto D (intersecção da recta e da circunferência anteriores)
  - sistema de equações

$$\begin{cases} y = \frac{q}{p}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

  - resolução

$$\begin{cases} y = \frac{q}{p}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} \\ y = \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} \end{cases}$$

  - coordenadas de D

$$D\left(\frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}, \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)$$

  - raio das circunferências c_2 e c_3

$$\sqrt{\left(\frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2})}{p^2+q^2}}$$

- equações das circunferências c_2 e c_3

$$c_2\colon (x-1)^2 + y^2 = \frac{2\left(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2}\right)}{p^2+q^2}$$

$$c_3\colon \left(x - \frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(y - \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\left(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2}\right)}{p^2+q^2}$$

- coordenadas do ponto X
  - as coordenadas de X são as soluções do sistema de equações formado pelas equações das circunferências c_2 e c_3; obtemos (depois de cálculos laboriosos ..., de preferência feitos com um programa de cálculo simbólico, por exemplo o *Derive*[3]), dois pontos;
  - escolhemos neste caso aquele que corresponde ao ponto X da figura
- abcissa de X:

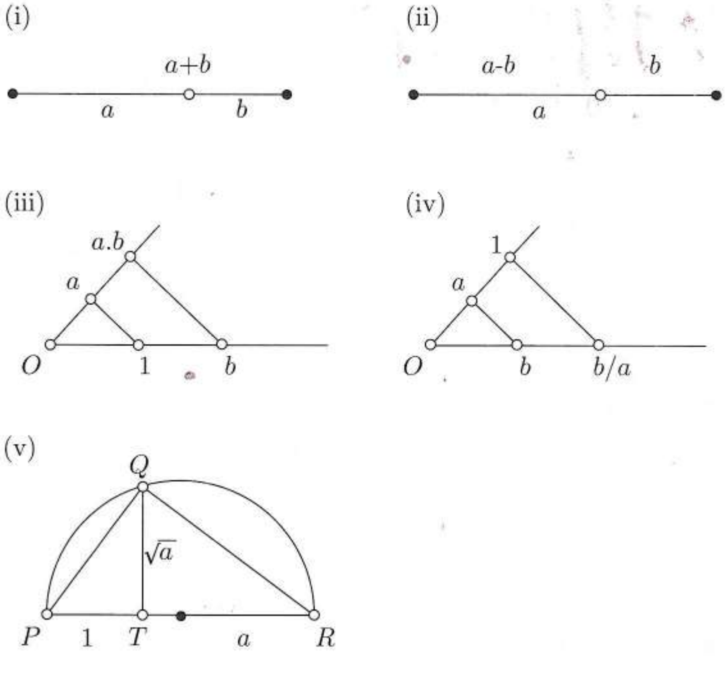
$$\frac{1}{2} + \frac{(p+q\sqrt{3})}{2(p^2+q^2)}\sqrt{p^2+q^2}$$

- ordenada de X:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(q+p\sqrt{3})}{2(p^2+q^2)}\sqrt{p^2+q^2}$$

Observações em relação aos resultados anteriores

- Geometricamente, o ponto X é construtível ou euclidiano, ou seja, pode ser obtido através da construção com régua não graduada e compasso euclidiano de uma sequência finita de pontos A, O, B, D, X, em que na construção de cada ponto se utilizam apenas pontos anteriores da sequência.
- Algebricamente, as coordenadas de X são obtidas a partir das coordenadas de A, O e B mediante operações racionais (adições, subtracções, produtos e divisões) e extracções de raizes quadradas. Essas operações e extracções são naturalmente em número finito e envolvem números racionais e eventualmente números não racionais. Com efeito, mesmo nos dados, neste caso, as coordenadas de B podiam não ser racionais. Mas mesmo partindo apenas de pontos com coordenadas racionais podemos ter que extrair raizes quadradas de raizes quadradas de números que não sejam quadrados perfeitos, dado que as coordenadas do ponto solução, X, vão depender da resolução de sistemas de equações em que uma ou duas das equações podem ser do segundo grau. Note-se que neste exemplo os valores da abcissa e ordenada do ponto X envolvem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{p^2+q^2}$. Se a determinação da bissectriz fosse apenas um passo intermédio da construção, e nos passos seguintes houvesse que



Notas:

1. Nos esquemas (iii) e (iv), os segmentos Oa, Ob, etc têm por comprimentos a, b, etc.
2. (i) e (ii) são óbvios, (iii) e (iv) provam-se recorrendo ao teorema de Tales; (v) (que mostra como se constrói a raíz quadrada de um segmento dado a) prova-se recorrendo à semelhança dos triângulos PTQ e QTR.

Figura 2.

determinar intersecções de circunferências com rectas ou circunferências, como nas equações destes objectos haveria coeficientes envolvendo $\sqrt{3}$ e $\sqrt{p^2+q^2}$, as coordenadas do ponto solução envolveriam muito provavelmente

$$\sqrt{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

A teoria dos corpos numéricos, desenvolvida no início do século XIX, e das suas extensões quadráticas — por exemplo, a extensão quadrática $Q(\sqrt{3})$ é o conjunto (corpo) dos números reais da forma $a + b\sqrt{3}$, em que a e b são números racionais — desempenha como é previsível um papel fundamental no tema que estamos a tratar. Para uma descrição completa das questões algébricas que são necessárias para as demonstrações de impossibilidade, ver por exemplo o livro de George Martin.

- Podemos analisar a conexão que estamos a estudar em dois sentidos:
    - *Da geometria para a álgebra:* como a resolução geométrica da construção euclidiana de um ponto implica apenas *um número finito* de intersecções de rectas com rectas, de rectas com circunferências ou de circunferências com circunferências, as operações necessárias para a obtenção algébrica das coordenadas desse ponto são em número finito e apenas as descritas anteriormente (operações racionais e extracções de raizes quadradas).
    - *Da álgebra para a geometria:* Descartes introduziu, no início da sua Geometria, a chamada álgebra dos segmentos (melhor dizendo, dos comprimentos dos segmentos). Como diz Lebesgue, é na realidade uma álgebra dos números reais que prova que as operações racionais e as extracções (mesmo sucessivas) de raizes quadradas de números reais podem ser feitas por régua não graduada e compasso euclidiano (ver figura 2).

É precisamente esta conexão, esta equivalência entre um *tipo específico de construções geométricas* e um *conjunto específico de operações algébricas* que permitiu resolver, pela negativa — ou seja, pela demonstração da sua impossibilidade — os três famosos problemas da geometria grega. Um modo de exprimir esta equivalência, cuja demonstração rigorosa se pode encontrar, por exemplo, no livro de Lebesgue, é o seguinte:

Seja dado um conjunto inicial finito de pontos A, B, ... E, cujas coordenadas são $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Existe equivalência entre as duas afirmações seguintes:

- o ponto X é construtível, com régua não graduada e compasso euclidiano, a partir dos pontos dados;
- as coordenadas de X podem ser expressas algebricamente num número finito de operações racionais e extracções de raizes quadradas, a partir das coordenadas $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Como aplicação concreta, verifique o leitor que as coordenadas de X, ponto construtível no exemplo anterior, verificam as condições indicadas neste enunciado.

As três impossibilidades

Limitamo-nos a breves referências históricas sobre as demonstrações de impossibilidade. Ver a secção final para indicações bibliográficas.

A duplicação do cubo

Se a aresta OA do cubo dado for a unidade $[O(0,0), A(1,0)]$, e pretendemos determinar com régua não graduada e compasso euclidiano o ponto $X(x,0)$ que resolve o problema da duplicação do cubo, a abcissa x será obtida resolvendo a equação

$$x^3 - 2 = 0$$

Pierre Wantzel (1814–1848) demonstrou em 1837 que a equação anterior não nem nenhuma raiz que possa ser obtida por operações racionais e extracções de raizes quadradas a partir dos seus coeficientes, provando assim a impossibilidade da problema da duplicação do cubo.

Trissecção do ângulo

No mesmo artigo em que demonstra a impossibilidade da duplicação do cubo, Wantzel demonstra também a impossi-

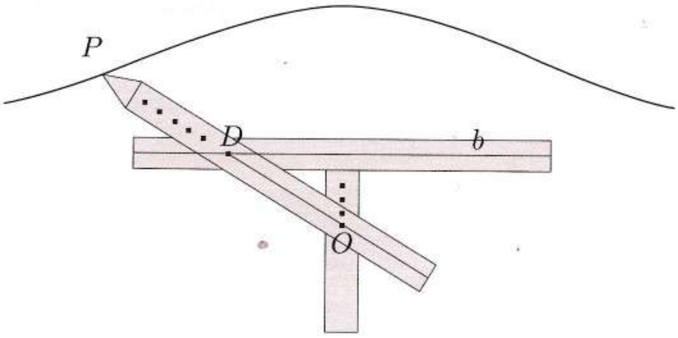


Figura 3.

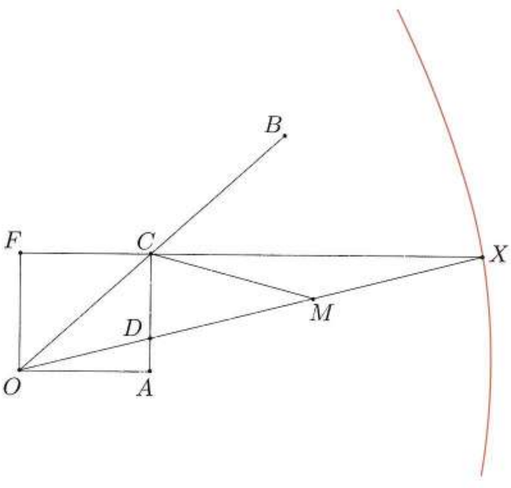


Figura 4.

bilidade da trissecção do ângulo. Mas neste caso eu aconselho o leitor a ler a demonstração apresentada por Robert Yates no seu aclamado livro sobre o problema da trissecção.

Quadratura do círculo

Este problema tem um carácter diferente dos dois anteriores. Para compreender este facto, devemos começar por dar uma definição:

Número algébrico é qualquer número que seja solução de uma equação

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx + l = 0 \quad (a \neq 0)$$

em que a, b, c, ..., k, l são inteiros.

No problema da quadratura do círculo é dado um segmento r, que podemos tomar como sendo a unidade. Então todos as coordenadas dos pontos construtíveis a partir desse par de pontos pertencem a uma iteração de extensões quadráticas do corpo racional, e prova-se que os números destes conjuntos são números algébricos[4]. Portanto, para provar que π não é abcissa de um ponto construtível, basta demonstrar que π não é um número algébrico. ou seja que é transcendente. Charles Hermite (1822–1901) demonstrou em 1873 que e é um número transcendente. Utilizando ideias análogas, F. Lindemann (1852–1939) demonstrou em 1882 que π é transcendente[5].

A trissecção pela conchóide de Nicomede

A trissecção é impossível, em geral, utilizando apenas os instrumentos euclidianos, mas foram inventados muitos outros instrumentos — ver o livro de Yates — com os quais é possível dividir qualquer ângulo em três partes iguais. O mais antigo é o traçador de conchóides (figura 3) imaginado pelo geómetra grego Nicomede, que viveu no séc. III a.C.

Na figura 3, a haste horizontal é chamada a *base*, e na sua ranhura central b desloca-se um pivô D fixo numa outra haste que tem uma ponta seca P, com a qual se traça a conchóide. A haste DP tem uma ranhura que desliza no pivô O, denominado *pólo* e fixo numa terceira haste perpendicular à base. Para cada posição do pólo O sobre esta haste (ver pontos sobre a haste) e cada posição de D sobre a haste DP, e respectivo *intervalo* DP, obtemos uma conchóide diferente.

A utilização da conchóide na trissecção e a correspondente demonstração — de que o problema fica realmente resolvido —, são muito simples.

O ângulo a trissectar é AOB. Constrói-se, com régua e compasso, a perpendicular AC a OA, o rectângulo $OACF$ e a semirecta FC. Depois traça-se, com a *base* AC, o *pólo* C e o *intervalo* DP — igual ao dobro do comprimento de OC —, a respectiva conchóide. O ponto X que resolve a trissecção é a intersecção da conchóide com a semirecta FC.

Demonstração. Constrói-se M, ponto médio de DX. Os triângulos CMX e OMC são isósceles. Portanto, se a amplitude de $\angle CMD$ for θ, a amplitude de $\angle COD$, igual à de $\angle CMD$, ângulo externo do triângulo CMX, é 2θ. Então a amplitude de $\angle AOX$, alterno interno de $\angle CXM$, é $1/3$ da de $\angle AOB$.

Note que uma régua com duas marcas, cuja distância fosse o dobro do comprimento de OC, resolvia também a trissecção: bastava deslizar a régua, mantendo-a sempre a passar pelo ponto O, até que as duas marcas estivessem uma sobre AC e outra sobre a semirecta FC (determinando assim o ponto X). Como diria George Martin, isso seria ainda outro jogo com outras regras, não as de Euclides, em que a régua a usar é expressamente não graduada ...

A conchóide de Nicomede pode ainda servir para resolver o problema da duplicação do cubo, como pode ver no livro de Henri Lebesgue.

Leituras

Como seria de esperar, a literatura matemática sobre os três problemas clássicos é muito extensa. Seguem-se alguns comentários para facilitar a escolha dos leitores deste artigo que ficaram motivados para desenvolver as suas leituras relativas a este tema. As referências completas dos livros são dadas na bibliografia, sendo a ordem adoptada aqui não relevante.

Gomes Teixeira. O volume sétimo das obras completas contém um suplemento ao seu bem conhecido *Tratado sobre Curvas Especiais* (publicado em francês). Esse suplemento tem um apêndice intitulado *Sur les Problèmes Célèbres de la Géométrie Élémentaire non Résolubles avec la Règle et le Compas*. O capítulo IV deste apêndice trata das demonstrações algébricas da impossibilidade de resolução com régua e compasso dos três problemas, de um modo claro e bastante acessível.

Felix Klein. Numa nova edição da Dover de 2003, este pequeno mas célebre livro de Klein contém os textos de um ciclo de conferências de verão (fins do séc. XIX) sobre o tema deste artigo, dirigidas a professores do ensino secundário, com a intenção de "mostrar o que a ciência moderna tem a dizer sobre a possibilidade de construções geométricas elementares".

Courant e Robbins. O livro *What is Mathematics?* é em minha opinião o melhor livro de iniciação à matemática de todos os tempos, e foi revisto por Ian Stewart e reeditado em 1996, a partir das esgotadíssimas edições dos anos 40 do século passado. O capítulo III, *Geometrical Constructions. The Algebra of Number Fields*, constitui talvez a exposição simultaneamente mais clara e completa do tema para que pretendi chamar a atenção neste artigo.

Henri Lebesgue. Em 1941 Lebesgue, já muito doente, escolheu o tema das *Constructions Géométriques* para o que viria a ser o seu último ciclo de conferências no Collège de France. O livro editado a partir dessas conferências é um testemunho exemplar de um matemático que revela na sua exposição permanentes preocupações pedagógicas.

George Martin. Para quem pretenda mesmo aprofundar o tema das construções geométricas, não apenas euclidianas mas também "só com compasso", "só com um compasso enferrujado", "só com régua graduada", "só com dobragens de papel", etc., e compreender como a álgebra permite atacar de modo completo estas diferentes situações, deve aceitar o desafio de ler o livro muito estimulante deste autor.

Robert Yates. O livro de Yates sobre a trissecção, da colecção *Classics in Mathematics Education*, do NCTM, é extremamente acessível e certamente um dos primeiros livros a consultar sobre o problema da trissecção do ângulo. Contém, além de uma introdução teórica, inúmeros exemplos de trissectores.

História da Matemática. O tema das construções geométricas está naturalmente associado a questões da história da geometria e da matemática em geral. Felizmente já temos em português o livro da Universidade Aberta que pode ser um bom auxiliar. Obviamente um livro a consultar sobre a geometria grega é o livro de Heath.

Notas

1. Sobre a história destes problemas e soluções "não ortodoxas" ver *Geometria: temas actuais*, pág. 41–55.
2. Um modo prático de ter sempre à mão os *Elementos de Euclides*, ainda por cima numa edição anotada e com figuras interactivas, é colocar nos seus *bookmarks* ou favoritos o esplêndido *site* `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`
3. A solução apresentada foi obtida no *Derive* (obrigado, Adelina Precatado!) e confirmada no *Mathematica* (obrigado, Arala Chaves!).
4. Ver, por exemplo, o livro de Courant, pág. 133.
5. V. Katz, *History of Mathematics: An introduction*, pág. 598–99.

Bibliografia

Conway, John H. e Guy, Richard K. *O Livro dos Números*. Universidade de Aveiro/Gradiva, 1999.

Courant, Richard e Robbins, Herbert. *What is mathematics?*. Segunda edição revista por Ian Stewart. New York: Oxford University Press, 1996.

Estrada, M. Fernanda et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Gomes Teixeira, F. *Obras de Matemática*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1915.

Heath, Sir Thomas. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc., 1981.

Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An introduction*. HarperCollins, 1992.

Klein, Felix. *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York: Dover Publications Inc, 2003.

Lebesgue, Henri. *Leçons sur les Constructions Géométriques*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 2003.

Martin, George. *Geometric Constructions*. New York: Springer, 1998.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Yates, Robert C. *The Trisection Problem*. Reston: NCTM, 1971.

Eduardo Veloso

Piscinas especiais

Tanto a piscina da Branca como a do Luís são rectangulares, têm igual perímetro e as suas dimensões são um número inteiro de metros. O número que representa a área da piscina da Branca (em m^2) é igual ao triplo do número que representa o perímetro (em metros). Por sua vez, o número que representa a área da piscina do Luís é igual ao dobro do número que representa o perímetro.

Quanto mede cada uma das piscinas?

(Respostas até 28 de Fevereiro)

A grande final

O problema proposto no número 83 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

No meu grupo de amigos entusiastas do futebol há adeptos do Porto, do Sporting e do Benfica. No dia daquela grande final transmitida pela televisão convidei-os a assistir ao jogo em minha casa.

Ora, há pelo menos 3 portistas, os não benfiquistas são menos de 10, há mais de 9 que não são do Porto e os não sportinguistas não excedem 7.

Quantos amigos de cada clube tenho eu?

Recebemos 13 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Augusto Taveira (Faro), Edgar Martins (Queluz), Eduardo Diniz (Viseu), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Barata (Castelo Branco), Paula Gomes (Braga), Paula Portela (Torres Vedras), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Valter Carlos (Alenquer) e ainda Elisabete Rodrigues (Amadora) e Francisco Martins (Charneca da Caparica), cada um com duas resoluções diferentes.

Os métodos de abordagem ao problemas são bastante variados:

1) por tentativas, testando todas as possibilidades.
2) analiticamente, estabelecendo as inequações que definem as condições impostas e combinando-as entre si,
3) misturando a álgebra e as tentativas,
4) por raciocínios lógicos a partir das condições impostas,
5) graficamente, a três dimensões.

O Francisco seguiu o método 4), imaginando um interessante diálogo na sala de aula, onde os alunos e o professor vão raciocinando e tirando conclusões até chegar à solução.

A proposta de resolução gráfica tridimensional surgiu do Eduardo. É difícil representar as inequações do problema no papel e à mão mas talvez com a ajuda de um programa de gráficos a três dimensões isso seja possível. Alguém quer tentar?

O segundo método é o mais conciso e fácil de seguir. As resoluções mais curtas são as da Paula Portela, Graça, Edgar, Francisco, João, Augusto e Alberto, que seguem esta via.

Se representarmos por P, S e B o número de adeptos do Porto, do Sporting e do Benfica, respectivamente, as condições impostas são as seguintes:

(1) $P \geq 3$

(2) $P + S < 10$

(3) $B + S > 9$

(4) $B + P \leq 7$

De (1) e (2) concluímos que

(5) $S \leq 6$

De (1) e (4) resulta que

(6) $B \leq 4$

De (5) e (6), juntamente com (3) vem que

$B = 4$ e $S = 6$.

Substituindo o valor de B em (4):

(7) $P \leq 3$

De (1) e (7) resulta que

$P = 3$.

Conclusão: há 3 portistas, 4 benfiquistas e 6 sportinguistas.

Álgebra — Um portal! Uma barreira! Um mistério!

Mathematics Education Dialogs é um forum on-line organizado pelo NCTM que tem como objectivo a troca de ideais sobre temas actuais e complexos em educação matemática. Os textos apresentados, procuram representar uma certa diversidade de pontos de vista sobre o tema em debate e não têm de estar de acordo com os pontos de vista do NCTM.

Em Abril de 2000 foi publicado um fórum sobre Álgebra com o título *Álgebra — A Gate! A Barrier! A Mystery!* (`http://www.nctm.org/dialogues/2000-04.pdf`). Para esta revista temática sobre Números e Álgebra, seleccionámos alguns dos pontos de vista que foram incluídos neste forum. Procurámos incluir alguma diversidade tanto ao nível das ideias defendidas como ao dos níveis de ensino a que dizem respeito.

Boa leitura. Quem sabe? Talvez ela o inspire para nos enviar as suas reflexões sobre o tema desta revista. Cá ficamos à espera.

Álgebra para todos? Porquê?

Nel Noddings

Muitas escolas secundárias exigem que todos os alunos façam disciplinas e mesmo, por vezes, testes estandardizados de Álgebra. Um dos argumentos a favor desta exigência está relacionado com a igualdade de oportunidades; um outro argumento que a defende está relacionado com o facto de a Álgebra ser amplamente necessária no mundo do trabalho. Ambos os argumentos são questionáveis e as minhas objecções prendem-se com o requisito das disciplinas de Álgebra tradicionais, e não com o ensino de tópicos específicos da Álgebra, habilmente seleccionados.

Em termos gerais, com o argumento que se baseia na igualdade, defende-se que todas as crianças devem ter acesso a oportunidades educacionais, outrora reservadas a muito poucos. É difícil opormo-nos a um gesto tão generoso, mas devem ser levantados alguns contrapontos. Em primeiro lugar, esta exigência suscita questões educacionais fundamentais: Por que é que a Matemática académica se constitui como um requisito para a entrada na universidade? Por que não podem os estudantes americanos escolher um percurso de humanidades, como fazem os estudantes de outras partes do mundo? Em segundo lugar, podemos afirmar que estamos a oferecer uma oportunidade através de coerção? Muitos estudantes não irão passar a Álgebra devido à falta de preparação conveniente ou devido à falta de interesse; muitos estudantes que poderiam obter um diploma do ensino secundário não o poderão obter se se elevarem os padrões de avaliação.

A atitude de zelo com que procuramos dar a todos uma oportunidade para entrar na universidade faz com que estejamos a tolerar, ou até mesmo a encorajar, disciplinas que têm pouco a ver com a *verdadeira* Álgebra. Os mais novos conseguem obter a nota nos seus relatórios de avaliação, mas vêm a descobrir que não estão de todo preparados para trabalhar a nível universitário. Esta prática aproxima-se da fraude e é muito pouco representativa de *igualdade de oportunidades*.

Na maior parte dos Estados Unidos, estudantes que não vão para a universidade são tratados de forma vergonhosa. Em vez de lhes oferecermos disciplinas interessantes, bem estruturadas e divulgadas convincentemente, estamos a empurrar toda a gente para disciplinas que só se encaixam em algumas opções de carreira futuras. Em vez de democraticamente demonstrarmos respeito por todo o trabalho legítimo e por todos os alunos que irão realizar esse trabalho, tratamos toda a gente como futuros estudantes universitários. Os alunos que vão para empregos sem frequentar a universidade fazem-no por falta de alternativa, porque são considerados *não suficientemente bons* para a universidade.

Mas talvez hoje em dia toda a gente precise de um pouco mais de Matemática. Talvez esta exigência sirva um fundamento genuinamente educacional. Duvido. Embora algumas actividades relativamente novas utilizem, de facto, muita Matemática, muitas outras, mais antigas, utilizam-na menos do que há cinquenta anos atrás. A Matemática pode ser a base de muito do que se faz nessas actividades, mas os trabalhadores em si utilizam-na muito pouco. Os argumentos a favor do uso não ligado à actividade profissional, como a cidadania, a contabilidade pessoal e por aí em diante contêm também falhas. Estes argumentos podem oferecer como fundamento a propulsão das habilitações matemáticas, mas não fundamentam a exigência das tradicionais disciplinas de Álgebra.

Uma disciplina verdadeiramente útil para muitos dos alunos de Matemática do ensino secundário incluiria, além das inquestionavelmente úteis aptidões matemáticas, algo sobre as políticas da educação matemática: sobre o que significa viver num mundo matematizado; sobre como a Matemática tem sido utilizada como *guardiã*; sobre saber que diferença há entre compreender uma disciplina e ter um certificado; sobre como os testes avaliam de forma justa ou injusta; sobre a forma como os testes são elaborados; sobre a forma como os alunos, através de uma irreflectida resistência a disciplinas da Matemática, estão a contribuir para o decréscimo do seu próprio estatuto económico; e sobre como se identificaria um tipo de resistência inteligente.

Os alunos deveriam poder optar por currículos universitários ou não universitários com orgulho e confiança de que as suas escolhas de ensino seriam genuinamente valorizadas.

Não retardar: construir e falar sobre experiências ricas desde o início

Sydney Schwartz e David Whitin

À medida que ponderamos sobre o conhecimento e as implicações da *Álgebra com o simbolismo retardado* na escola elementar, deparamo-nos com a questão do que fazer em alternativa. O conceito de retardar a utilização de símbolos parte do princípio de que a criança desenvolve o nível de abstracção necessário sem precisar de ser ensinada. Saberemos o suficiente acerca da forma como se desenvolve o pensamento simbólico em Álgebra para podermos reconhecer e apoiar este processo? Se assim for, como devemos preparar os professores do ensino primário para o fazer?

No tema principal da *Teaching Children Mathematics* de Fevereiro de 1997, os colaboradores debateram quer sobre os processos observados, quer sobre processos induzidos com que as crianças desenvolvem o pensamento algébrico. Dando sobretudo ênfase ao raciocínio algébrico, os artigos ilustraram estratégias que pretendiam levar as crianças a explicar as suas ideias através de formas gráficas, sobretudo símbolos pictóricos. É fundamental compreendermos o processo através do qual uma criança estrutura os conhecimentos destes conteúdos para podermos escolher estratégias de ensino que promovam a evolução para a generalização a partir de uma única representação de uma relação.

Quando pedimos a vinte e cinco professores com mestrado para definir Álgebra, a maioria das respostas incidiu sobre calcular um valor de x ou de uma incógnita. É necessário obter um conhecimento mais abrangente da Álgebra para podermos ajudar as crianças a traduzir o seu pensamento de modo a poderem criar representações simbólicas de relações numéricas, de padrões e de generalizações. Se pretendemos modificar a nossa abordagem de ensino para sermos guiados pelas crianças, em vez de sermos nós a guiá-las, esta visão limitada da Álgebra não é suficiente. Através da actual ênfase conferida à construção do conhecimento da criança, ilustrada no tema principal [da revista], sublinha-se a importância da base de conhecimentos do professor para conseguir estimular as crianças a utilizar o seu emergente raciocínio algébrico e a conseguir ilustrá-lo gráfica ou simbolicamente.

Por exemplo, quando uma criança de infantário foi observada a fazer uma construção de comboios de cubos utilizando pares de cores que se alternavam uma única vez, pôde concluir-se, através de uma observação mais atenta que ela estava a desenvolver uma compreensão da relação $abab$. A criança comentou que os seus dois comboios eram iguais porque "continuavam a mexer-se de trás para a frente e de frente para trás". Múltiplas experiências que constroem padrões ab de forma visual, táctil, sonora e motora criam um contexto propício para o conceito se consolidar como uma generalização.

Se pretendermos considerar uma abordagem evolucional do ensino da Álgebra com introdução atempada de símbolos, devemos preparar os professores, não só para conseguirem reconhecer o pensamento algébrico à medida que este surge, mas também para estruturarem situações autênticas que estimulem as crianças a utilizar símbolos para representar padrões e relações. A hipótese de retardar a utilização de simbolismo no ensino da Álgebra implica saber como promover o simbolismo emergente das crianças. Precisamos de ir além das explorações que as crianças espontaneamente fazem em áreas como as relações funcionais em geometria, razões usuais entre unidades de medida, transformações de problemas computacionais em números apropriados e igualdades e desigualdades numéricas. Precisamos de criar situações quotidianas que motivem as crianças para o raciocínio algébrico e para representações. Para nós, a palavra de ordem não é *esperar*, mas antes, alicerçar, isto é, estimular a construção de pontes do concreto para o abstracto.

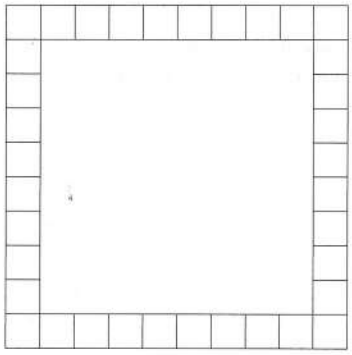
Álgebra no 3º ciclo? Sim, aqui está como começar!

Angela F. Allen

Sou defensora da Álgebra no terceiro ciclo do ensino básico. Se for convenientemente ensinada, a Álgebra ajuda os alunos a raciocinar, a identificar padrões e relações e a fazer previsões e generalizações. Ou seja, motiva os alunos para a aprendizagem activa que se encontra no seio constitutivo da Matemática. A chave é ensinar Álgebra convenientemente!

Se a Álgebra for apresentada aos alunos como uma colecção de algoritmos e métodos a decorar sem quaisquer relações que tenham significado, então não será apropriada para alunos do terceiro ciclo do ensino básico. No entanto, se for ensinada de modo a envolver os alunos na busca de padrões e relações e a estabelecer generalizações sustentadas por um raciocínio plausível, a Álgebra pode ser uma oportunidade intelectualmente estimulante e produtiva.

Todos os alunos da minha escola tiveram Álgebra no oitavo ano, durante todo o ano lectivo. Ao reflectir sobre a experiência de ensinar estes alunos, verifico que seleccionei tarefas com três características diferentes: legitimidade para os alunos, alinhamento com o raciocínio matemático dos alunos e inclusão de importantes conceitos ou métodos matemáticos. Por exemplo, no início, utilizei o problema dos quadrados na fronteira de *A Collection of Maths Lessons from Grades 6 through 8*, de Marilyn Burns e Cathy McLaughlin (New York: The Maths Solutions Publications, 1990). Este problema pede aos alunos que encontrem o número de quadrados 1×1 dos lados de uma grelha 10×10.



Em ambiente de aula onde se sentiam à vontade para exprimir as suas opiniões e métodos, os alunos tomaram a tarefa em mãos à medida que criavam e partilhavam as suas ideias e métodos para desvendar o desconhecido, ou seja, o número de quadrados dos lados. Os alunos recorreram a vários métodos para contar os quadrados. Por exemplo, alguns alunos acharam o número de quadrados de um dos lados da grelha (10 quadrados); multiplicaram por 4; e subtraíram então 4, tendo percebido que os cantos contavam duas vezes, para chegarem aos 36 quadrados. Testaram as generalizações dos métodos em grelhas de outras dimensões. Depois de terem chegado a uma generalização correcta, pedi-lhes para preverem e para testarem as suas generalizações numa grelha de 100×100. Alguns alunos queixaram-se do tempo de que iriam precisar para contar tantos quadrados.

Pedi-lhes, então, que traduzissem os seus métodos para linguagem algébrica para descrever os seus procedimentos. Sugeri que começassem por trocar as palavras das suas descrições por letras ou variáveis, explicando que os valores desconhecidos se alterariam em quadrados diferentes.

Após alguma confusão e consternação, os alunos traduziram os seus métodos para linguagem algébrica. Por exemplo, os alunos que tinham utilizado o método anteriormente descrito, substituiriam as letras G e L pelo número de quadrados da grelha e do lado, respectivamente, e escreveram $L \times 4 - 4 = G$. Claramente, esta tarefa não exige requisitos cognitivos de grande nível ou o domínio de conceitos básicos, mas ajudou os alunos, ainda assim, a ver como a Álgebra é uma extensão natural da aritmética.

Assim como outras, esta tarefa que usei com os meus alunos mudou a maneira como eles viam a Matemática. Eles viram que a Álgebra do terceiro ciclo não era uma confusão, mas antes uma maneira de pensar sobre Matemática e fazer Matemática que implicava encontrar padrões e fazer generalizações. Ficaram sobretudo entusiasmados por perceber que a Matemática era mais do que a aritmética que tinham feito no sexto e sétimo anos. Recorrendo a boas tarefas e a um ambiente de aula motivador, os meus alunos adquiriram confiança matemática e viram como a Álgebra se relaciona com as suas experiências de aprendizagem anteriores, como proporciona uma nova maneira de abordar e resolver problemas e como constrói os alicerces da Matemática mais avançada.

Não! Álgebra não!

Shirley T. Bagwell

Não é preciso saber como se constrói um carro para o poder conduzir, nem tão pouco é preciso saber programar um computador para o poder utilizar. Está a ser produzido muito *software* que ajuda as pessoas a gerir as suas vidas e a resolver problemas. Qualquer pessoa que use uma calculadora, uma folha de cálculo, instrumentos de medição, ou outras tecnologias consegue resolver problemas do quotidiano sem saber Álgebra. Há alguma Álgebra que entra para as nossas vidas sob a forma de fórmulas. Se isto acontecer naturalmente, até o aluno mais reticente aceitará e utilizará fórmulas. No entanto, esperar que todos os alunos se interessem por, ou tenham aptidão para, Álgebra é estar a criar um ambiente de fracasso e de frustração para alguns.

Muitos alunos não conseguem compreender a natureza abstracta dos tópicos algébricos. Depressa ficam frustrados e desligam-se de todas as tentativas de ajuda. Alguns alunos tornam-se problemáticos disciplinarmente. Não estão preparados academicamente para passar do concreto para o abstracto. Alunos do ensino especial são encorajados a fazer disciplinas do currículo normal. A Sue, por exemplo, depois de ter progredido lentamente em Aritmética, começou a perceber o significado dos números no terceiro ciclo e aprendeu a resolver problemas concretos utilizando a calculadora. Quando foi para uma disciplina de Álgebra no secundário desistiu. Mesmo com a ajuda de um professor e de um explicador, não conseguiu perceber as equações. Se alunos como a Sue são colocados numa turma de Álgebra, depressa se sentem desintegrados e desistem de tentar. Se forem ensinados a utilizar tecnologia para resolver problemas que encontram no dia-a-dia, desenvolvem o conhecimento da matemática.

A Álgebra não é para todos, tal como a universidade não é para todos. Não pedimos que todos os alunos façam Química, Física, ou uma língua estrangeira para acabar o secundário. Se for exigido a alunos que ainda não dominaram a pré-Álgebra que façam Álgebra, muitos irão reprovar. A reprovação não faz nada pelo aluno mais fraco, a não ser diminuir a sua auto-estima e reafirmar a convicção de incapacidade de aprendizagem. Pretender que todos os alunos dominem os objectivos da Álgebra não é razoável e fará com que mais alunos abandonem o secundário. Por exemplo, o Jack, um aluno médio na maioria das disciplinas, consegue fazer aritmética utilizando uma calculadora mas precisa de muito auxílio para resolver problemas com dois ou mais passos. Repetiu Álgebra no nono ano porque era uma disciplina com aprovação obrigatória para a conclusão do ciclo de ensino. Nunca conseguiu desenvolver a capacidade de *traduzir* de inglês para álgebra e nunca conseguiu compreender as equações. Começou a ficar desmotivado e conseguia esquivar-se durante as aulas dormindo. Não havia motivação que chegasse para o manter acordado.

Toda a gente precisa de Aritmética para resolver problemas e toda a gente devia desenvolver aptidões matemáticas para compreender, organizar, e resolver problemas que encontra no dia-a-dia. Muitos alunos são empurrados para uma disciplina de Álgebra quando não sabem usar aparelhos e unidades de medição, movimentar um livro de cheques, pedir um empréstimo ou contar o troco depois de fazer uma compra. Estes alunos precisam de saber utilizar tecnologia para resolver os problemas de uma maneira concreta que se aplique directamente às suas vidas.

Pretender que todos os alunos façam Álgebra obriga a que as aulas sejam dadas num nível mais básico. Enquanto os alunos mais fracos e desinteressados se debatem e ficam desmotivados, os alunos melhores e interessados aborrecem-se e ficam irrequietos. Nem as estratégias de ensino mais inovadoras conseguem ultrapassar uma distância tão grande entre o rendimento do aluno e o seu interesse. Alguns alunos desinteressados da Matemática vivem toda a sua vida sem encontrarem qualquer utilidade para a Álgebra. Outros encontram muitas aplicações em muitas áreas. Os alunos de Matemática que decoraram e fizeram as disciplinas de Álgebra obrigatórias com uma nota mínima irão para sempre evitar a Matemática e recordar a Álgebra como um pesadelo. Se forem encorajados a utilizar tecnologia para explorar problemas que lhes despertem interesse, poderão mais tarde querer estudar Álgebra.

Pensar que todos os alunos estão preparados para estudar Álgebra no secundário é ingénuo, e contrasta certamente com a realidade da nossa sociedade, na qual os alunos têm interesses e capacidades diferentes. Temos de ter em consideração os interesses e pontos fortes do aluno quando estamos a desenvolver o percurso escolar desse aluno. Embora toda a gente precise de aptidões para resolver problemas, nem toda a gente precisa da Álgebra para os resolver.

Tornar a Álgebra do ensino secundário acessível a todos

Kelly Hodges

A directiva chegou: fazer Álgebra é agora requisito obrigatório para conclusão do ensino secundário. A exigência é bem intencionada. Condicionando o acesso à Álgebra de alguns estudantes, as escolas perpetuam uma característica de desigualdade que vai contra os seus objectivos. Mas os professores desesperam-se: "Então e aqueles que não vão para a universidade? Então e aqueles que têm dificuldades de aprendizagem?". Colocar simplesmente todos os alunos em disciplinas convencionais de Álgebra não vai colmatar a desigualdade. A tradicional disciplina de Álgebra nunca esteve preparada para responder às necessidades de *todos* os alunos.

Quando estávamos a tentar preparar uma disciplina de Álgebra dirigida a todos os alunos, eu e os meus colegas começámos por clarificar os conteúdos da mesma. Esta deveria expandir os horizontes matemáticos do aluno para ver o mundo. A Aritmética resulta bem no que diz respeito a descrever imagens estáticas do mundo, mas a Matemática pode fazer mais do que isso. A nossa disciplina deveria deixar os alunos preparados para continuar os seus estudos Matemáticos. No entanto, os conteúdos não podem ser elaborados apenas em função das disciplinas dos anos seguintes. Finalmente, a estrutura da disciplina deveria ajudar os alunos a aprender a colocar e a responder às suas próprias questões matemáticas.

Temos tido algum sucesso no cumprimento destes objectivos através de uma disciplina que estruturámos em torno do conceito de função. Nesta disciplina introdutória, a variável representa uma quantidade que se altera, em vez de um número desconhecido, e uma função é uma relação entre duas variáveis. Os alunos estudam várias representações de funções, sobretudo funções lineares, e preocupam-se com os seus pontos fortes e fracos a resolver diferentes tipos de problemas. Resolver equações é um ponto focado, mas é dado mais tarde na disciplina, e a manipulação de símbolos constitui apenas uma das muitas estratégias possíveis consideradas. A sensação de haver uma multiplicidade de dados e de métodos desconexos, comuns a outras disciplinas de Álgebra, é eliminada. A perspectiva de função na nossa disciplina possibilita uma mudança de "estático para dinâmico" que uma perspectiva "aritmética generalizada" não permite. A disciplina nova serve aos alunos nas suas disciplinas futuras, mas tem também sido acessível e motivadora para estudantes que nunca teriam passado a uma disciplina convencional de Álgebra.

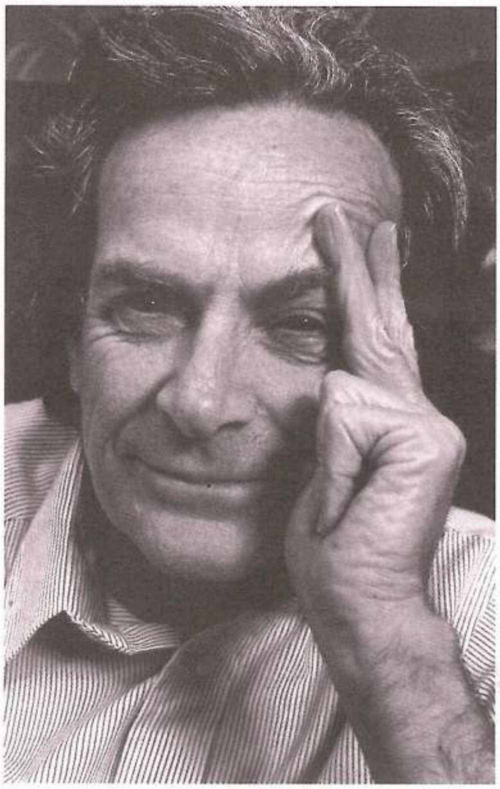
A integração de tecnologia no ensino do dia-a-dia torna acessíveis conceitos mais complexos. Além do mais, ajuda a proporcionar acesso igualitário a alunos com deficiências de aprendizagem computacional, bem como a outros com deficiências visuais ou físicas que limitem a sua capacidade de escrever ou desenhar. Para os nossos alunos, as funções transformam-se em Matemática que eles encontram no mundo que os rodeia — as funções são maneiras poderosas de modelar situações que se alteram. Embora o tratamento que a disciplina dá à função tenha trazido uma perspectiva que nos permite abordar os objectivos da Álgebra para todos, a pedagogia que se tem desenvolvido a par do currículo tem-se revelado igualmente importante.

Temos considerado que os conceitos devem primeiro ser integrados em contextos do quotidiano para permitir que um conceito abstracto tenha uma metáfora na experiência do aluno. O ensino deve então desenvolver-se a partir das questões dos alunos para garantir que os conteúdos se relacionem uns com os outros na sua mente. Aprendemos a estruturar tarefas que, tanto incentivam a questões por parte dos alunos, como também sustentam a generalização, de maneira a que as técnicas obtidas a partir de um contexto possam ser adaptadas e reafirmadas para uma forma de aplicação mais abrangente.

Avaliamos os alunos pelas suas capacidades de aplicar novas técnicas e generalizações a contextos diferentes daqueles dos quais surgiram. Ao verificar que os alunos transportam os conceitos para novas situações desconhecidas, constatamos que eles aprenderam.

Enquanto sociedade, somos obrigados por ideais democráticos a oferecer a todos os estudantes uma disciplina de Álgebra que seja rigorosa, importante e acessível. No que diz respeito a este aspecto, as aulas de Álgebra convencionais não têm sido bem sucedidas. A nossa abordagem centrada nas funções conduziu ao desenvolvimento da disciplina descrita, que satisfaz estas condições.

Tradução: Leonor Silva



Aconteceu quando um primo meu, três anos mais velho e que já andava no liceu, precisou de explicador em álgebra. Deixavam-me ficar sentado a um canto, enquanto o explicador tentava ensinar álgebra ao meu primo. Ouvia-o falar de x e perguntava-lhe:

— Que estás a fazer?

— Estou a tentar descobrir o valor de x, como em $2x + 7 = 15$.

Ao que lhe respondia:

— Queres dizer 4, não é?

— Sim, mas chegaste lá pela aritmética, e tens de o fazer através da álgebra.

Felizmente aprendi álgebra, não a ir às aulas, mas por ter encontrado no sótão o velho compêndio da minha tia e compreendido que tudo se resumia a descobrir o valor de x — não importa como se chega lá. Para mim não havia nada dessas coisas de o fazer "pela aritmética" ou "pela álgebra". "Fazê-lo pela álgebra" era um conjunto de regras segundo as quais, se as seguisse fielmente, teria de "subtrair 7 de cada lado; se x tem um coeficiente, dividir ambos os membros por ele", e assim sucessivamente — uma série de passos que nos levam à solução se não compreendemos o que estamos a fazer. As regras foram inventadas para que as crianças consigam passar. E foi por isso que o meu primo nunca conseguiu fazer álgebra.

Richard Feynman

EDU.CAS?

António José Mendes, Luís Reis, Manuel Teles Lagido

"As ferramentas tecnológicas devem ser integradas de forma consistente nas actividades lectivas, proporcionando aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas".
Posição da APM sobre Tecnologias na Educação Matemática, Janeiro de 2001

CAS

Sistemas de Cálculo Formal ou de Cálculo Algébrico Simbólico (CAS) são programas informáticos que executam cálculos algébricos e manipulação de fórmulas. Por exemplo, simplificam expressões algébricas, resolvem equações de forma exacta e derivam funções analiticamente. Tais programas vêm com opções de cálculo numérico e gráfico e estão disponíveis tanto em computadores (por exemplo, Derive, Maple, Mathcad, Mathematica, Scientific Notebook e TI-Interactive) como em calculadoras: é o caso das Casio (Cassiopeia e ClassPad 300), Hewlett-Packard (40G e 200 LX) e Texas Instruments (TI–89, TI–92 e Voyage 200).

Apesar da larga utilização do CAS no ensino secundário em diversos países, nomeadamente europeus, as experiências em Portugal ainda são escassas e pouco difundidas (figura 1).

Na sala de aula

Em Novembro de 2004 foi realizada uma experiência em duas turmas do 12° ano de utilização do programa Derive, para explorar a fórmula do Binómio de Newton e o Triângulo de Pascal.

Uma das turmas pertencia ao Agrupamento 1, na ES/3 José Régio, em Vila do Conde e tinha 28 alunos. A actividade foi realizada com computadores e os alunos entraram em contacto com o programa Derive no momento de realização da ficha de trabalho. A duração da aplicação foi de 2x 45 minutos, nas aulas de turno. Havia no máximo 2 alunos por computador.

A segunda turma era formada por 31 alunos dos Agrupamentos 1 e 3, na ES/3 de Valbom, em Gondomar. Foram usadas calculadoras TI 92 Plus e os alunos tinham tido um contacto com a calculadora antes da realização da ficha de trabalho. A duração da aplicação foi de 90 + 45 minutos. Os alunos trabalharam em grupos e havia uma calculadora por cada par de alunos.

Os objectivos principais do CAS nesta actividade consistiram na descoberta e conjectura de regularidades nos coeficientes e nas potências do desenvolvimento de $(a+b)^n$ e na verificação de propriedades do Triângulo de Pascal usando combinações (ver caixa).

Em termos didácticos, a abordagem seguiu o *princípio das caixas preta/branca:* o CAS foi usado para gerar exemplos numa situação nova (fase de caixa negra), conduzir à descoberta de regularidades e propriedades que estariam na base do novo conceito, que por sua vez o CAS ajudaria a confirmar e consolidar (fase da caixa branca).

Nesta situação de introdução de uma nova ferramenta tecnológica houve três preocupações: utilizá-la num assunto acessível em termos dos conhecimentos matemáticos prévios dos alunos, introduzir as funcionalidades CAS estritamente necessárias e não pôr de lado o trabalho de papel e lápis. Pretendia-se que os alunos mantivessem a compreensão e o controlo da actividade, sem se dispersarem em pormenores (nomeadamente técnicos).

O que acharam os alunos?

Num questionário escrito colocado aos alunos no final da realização da actividade, as vantagens mais apontadas para o CAS foram, por ordem decrescente: *interacção* (professor↔aluno e aluno↔aluno), *autonomia*, favorecimento da *aprendizagem* (mais e mais rápido) e *envolvimento* do aluno. Nas desvantagens a mais apontada foi, curiosamente, a de não favorecer a aprendizagem (demora-se mais tempo e aprende-se menos), seguida de perto pela perturbação do funcionamento da aula e pela acentuação de diferenças no ritmo de aprendizagem. Algumas respostas referiam ainda que era mais cansativo e que se perdia tempo com tecnologia não permitida no exame. Curiosamente, 6 alunos responderam que não encontravam nenhuma desvantagem (idêntico número de alunos não respondeu a esta questão).

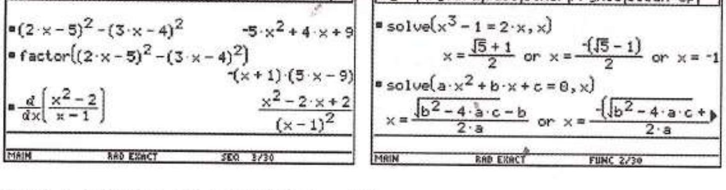


Figura 1. Cálculo algébrico na TI Voyage 200

Uma questão que dividiu os alunos foi a *visualização dos cálculos*: para uns, ver a resposta (sob a forma simbólica) constituiu uma vantagem; para outros, ver uma resposta final, sem os passos intermédios, constituiu uma desvantagem. Um dos grandes receios manifestados pelos alunos foi o da dependência da calculadora.

Potencialidades

Na experiência descrita acima, o potencial do CAS foi o da *exploração* algébrica. Serviu de ambiente de experimentação, gerando exemplos que podiam ser alterados facilmente. Desta forma, os alunos foram estimulados a fazerem generalizações e a descobrirem o geral no particular.

A exploração é uma característica comum a outros ambientes tecnológicos, só que o CAS tem uma distinção óbvia: *acrescenta a álgebra*. As funcionalidades algébricas do CAS permitem uma abordagem flexível dos problemas de uma forma que não é possível em outros ambientes. As consequências são profundas. Por exemplo, as notações e os resultados do CAS são matematicamente correctos, o que dá confiança aos alunos; obtêm-se soluções exactas; o reportório completo de procedimentos algébricos permite mais do que uma estratégia para a resolução de um problema, possibilitando diferentes abordagens; as representações e manipulações algébricas podem ser integradas com as representações e manipulações numéricas e gráficas, promovendo uma visão mais integrada dos conceitos matemáticos; pode-se trabalhar problemas algébricos mais complexos, nomeadamente com dados reais.

Uma potencialidade apontada ao CAS tem a ver com a possibilidade dos alunos se concentrarem na estratégia de *resolução dos problemas* e na *construção de conceitos*, uma vez que se podem libertar dos cálculos, ou seja, há aumento da eficiência e redução do tempo gasto em cálculos algébricos, situação que no ambiente de papel e lápis poderia requerer toda a atenção e conduzir a erros perturbadores. No ensino secundário, porém, em que o CAS é usado por alunos inexperientes, esta é uma questão controversa: aos alunos falta tanto o conhecimento matemático como a experiência de utilização do CAS de modo a serem capazes de o usar eficientemente.

Significado de variável

Uma potencialidade importante diz respeito ao aprofundamento da compreensão do significado de variável. Num ambiente CAS os símbolos literais vão além da concepção de pseudo-número (letra que substitui números). Por exemplo, é possível substituir a variável por outra expressão literal (ver figura 2).

O papel de incógnita aparece também reforçado. Por exemplo, numa equação literal é necessário reconhecer qual é a incógnita se quisermos resolver a equação (ver figura 2).

De facto, num ambiente de CAS todos os símbolos literais são *iguais*. Isto permite trocar os papéis atribuídos pelo utilizador de modo que, por exemplo, um parâmetro funcione mais tarde como incógnita na resolução de um problema. Estas características do CAS facilitam a compreensão dos papéis mais avançados de variável e a flexibilidade para lidar com eles.

Reificação

Outra oportunidade concedida pelo CAS diz respeito à *reificação* das expressões e fórmulas algébricas, isto é, ao seu carácter de objectos ("coisas") em vez de processos ("acções"). Este aspecto é da maior importância, pois é aí que reside um dos grandes obstáculos na aprendizagem da álgebra.

Um conceito matemático tem frequentemente duas faces: o processo operacional e a estrutura de objecto. Os alunos dificilmente se apercebem desta dualidade processo-objecto, sendo o carácter de processo que domina o conceito.

Apesar da álgebra ser, por vezes, considerada como aritmética generalizada, existe uma diferença substancial: a visão como processo, que domina a aritmética, é ampliada com a visão de objecto na álgebra. Contrariamente à situação na aritmética, nas expressões algébricas muitas vezes não há nenhum processo para executar. Todavia, é frequente os alunos sentirem-se desconfortáveis enquanto uma expressão não tiver valor numérico ou contiver operadores. Para eles, o processo não parece estar concluído.

De modo a permitir a flexibilidade entre processo e objecto, a notação algébrica é por vezes ambígua, o que não é o caso da aritmética. Por exemplo, em aritmética o sinal $+$ é procedimental. Em álgebra, já pode ter outros significados. Calcular $x+3$ ou $a+b$ não é possível, a menos que

Figura 2. Variáveis na TI Voyage 200

sejam conhecidos os valores das variáveis. Como resultado, $a + b$ só terá sentido se significar um objecto algébrico para o aluno. Nesse caso, adicionar $(a + b)$ e $(a + 2b)$ já é possível. Podemos fazer considerações análogas para o sinal $=$. Pode significar um processo, por exemplo, desembaraçar de parênteses em $(x + 5) \cdot (x + 3) =$ ou resolver a equação $(x + 5) \cdot (x + 3) = 0$. No entanto, em $a + b = b + a$ o sinal $=$ indica uma equivalência.

A transição da aritmética para a álgebra envolve, pois, a reificação de processos em objectos ou, por outras palavras, a extensão da visão processual de fórmulas e expressões com a percepção destas entidades algébricas como objectos. O CAS, ao forçar o utilizador a tratar as fórmulas e expressões como objectos, favorece o desenvolvimento de uma visão mais estrutural das expressões algébricas, em vez da visão operacional mais limitada.

Questões

É habitual manifestar optimismo quando se pretende integrar uma nova tecnologia na educação matemática. Porém, apesar de tantos anos decorridos de larga experiência em diversos países, ainda há muitas questões a colocar. O documento de discussão para o 12° Estudo ICMI, intitulado *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (2000) levantava, entre outras, as seguintes questões:

— *Para que alunos e quando é apropriado introduzir CAS? Quando é que as vantagens de usar tais sistemas ultrapassam o esforço em aprender a usá-los? Existem actividades utilizando esses sistemas que possam ser usadas com proveito por alunos mais novos?*

— *Que "insights" algébricos e sentido simbólico necessita um utilizador de CAS e que" insights" traz o seu uso?*

— *Um ponto forte do CAS é o apoio a múltiplas representações dos conceitos matemáticos. Como é que isso pode ser bem usado? Pode haver sobre-utilização?*

— *Como deverá ser um currículo de álgebra num país onde o CAS está disponível gratuitamente? Que competências "à mão" devem ser mantidas?*

Referências

Böhm, J. et al. *The Case for CAS*. Münster. T[3] Europe. 2004.

Drijvers, P. *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht. Freudenthal Institute. 2003.
In http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2003-0925-101838/inhoud.htm

Guin, D., Trouche, L. (coord.). *Calculatrices Symboliques — transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. Grenoble. La Pensée Sauvage, Éditions. 2002.

The 12th ICMI Study: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. ICMI. Boletim n.° 48. 2000.
In http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/48/Twelfth_Study.html

CAIXA

Ficha de trabalho: algumas das questões propostas aos alunos para uso da calculadora

1.1. Desenvolve o binómio $(4x^2y - 3y)^6$ com recurso ao CAS.

1.1. Utiliza a tua calculadora para desenvolver as potências de $(a + b)^n$ e regista apenas os *coeficientes* de cada termo na tabela [...]

2.2. Se conseguires reconhecer um padrão de preenchimento, acrescenta os coeficientes dos desenvolvimentos do binómio para $n = 7$ e $n = 8$. Em seguida verifica, com recurso ao CAS, se o teu palpite estava correcto.

4.1. Recorrendo à calculadora, observa as diversas *potências* de a e de b do desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$, para $n = 3, 4$ e 5.

4.2. Desenvolve $(a + b)^6$, sem recurso à calculadora. Confirma, em seguida, a tua resposta.

4.3. Observando os resultados anteriores, desenvolve cada um dos seguintes binómios (utiliza a calculadora apenas para confirmar a resposta):

$$(2x + 3y)^5 = \ldots \qquad (4z + \frac{w}{2})^6 = \ldots$$

4.4. Desenvolve o binómio $(2x - y)^5$. Verifica a correcção da resposta através da calculadora.

5. Relaciona os valores do triângulo de Pascal com os diferentes valores de ${}^nC_p (0 \leq p \leq n)$ [...]

5.1. *Em cada linha do triângulo de Pascal, são iguais os números equidistantes dos extremos*, i.e. , na n-ésima linha

$${}^nC_p = \ldots\ldots\ldots, \text{com } 0 \leq p \leq n$$

Confirma a igualdade na calculadora.

5.2. Traduz, através do cálculo combinatório, o processo de construção do triângulo de Pascal:

Adicionando dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número colocado abaixo, na linha seguinte,

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = \ldots\ldots\ldots, 0 \leq p \leq n$$

Confirma a tua conclusão na calculadora.

6.2. Desenvolve, os seguintes binómios. Compara os resultados com os obtidos na calculadora CAS.

$$(3 - \sqrt{3})^5 \quad (\sqrt{2}x - \sqrt{3})^5$$

António José Mendes, ES/3 de Valbom
Luís Reis, Centro de Competência Nónio ESB-UCP
Manuel Teles Lagido, ES/3 José Régio, Vila do Conde
[todos] Grupo de Trabalho T[3]

Factorizar . . . é fácil?

Numa revista em que os Números e a Álgebra são os principais temas, talvez fosse interessante tentar enquadrar de algum modo esta secção no tema da revista. Resolvi interromper o texto em que estava a trabalhar e tentar responder a esta sugestão da Redacção. Como o tempo era muito limitado conversei com um colega nosso**, para quem a teoria de números é uma das principais áreas de interesse, que muito amavelmente, me sugeriu e me deu indicações sobre o tema dos números primos e da factorização de números inteiros e consequentemente a criptografia, assunto que só abordarei muito ligeiramente, limitando-me a indicar apenas alguns sites onde o assunto é tratado.

Factorização e números primos porquê? Porque são assuntos muito comuns nas aulas.

A factorização é um tema que os nossos alunos tratam desde muito cedo, de um modo necessariamente muito básico, mas que a outro nível apresenta uma enorme complexidade.

Com toda a tecnologia disponível hoje em dia, saber se um dado número inteiro é primo ou não, é uma questão *relativamente* fácil de responder. Se o número não é primo então pode decompor-se num produto de pelo menos dois números primos. Este problema, já não é tão *fácil* e é mesmo um problema em aberto o de encontrar qual o melhor algoritmo para fazer uma factorização. Claro que isto se passa quando nos estamos a referir a grandes números.

Para ter uma ideia do grau de dificuldade basta navegar um pouco pela página da RSA Laboratories. Esta empresa, especialista em codificação de dados tem na sua página um desafio em que propõe a factorização de oito números a que chama números-RSA. Atribui prémios muito interessantes, que vão dos 10.000 dólares e podem chegar a 200.000 dólares, que dizem ser apenas prémios simbólicos, tendo em conta todo o trabalho envolvido na sua resolução.

Esses números-RSA são do tipo utilizado pela empresa nos seus códigos e cada um deles é o produto de apenas dois números primos.

No site diz-se que, com a tecnologia existente e os algoritmos que se conhecem, factorizar números com 100 algarismos, é bastante fácil. O mesmo já não acontece para números com 200 algarismos. O desafio que a empresa propõe serve apenas para a própria empresa verificar quais os avanços que estão a ser feitos nesta *arte* da factorização, para estar um passo à frente de possíveis quebras das suas chaves de codificação.

O último número-RSA que foi factorizado (Dezembro de 2003) tem 174 dígitos. A empresa prevê que o oitavo número-RSA proposto, constituído por 617 algarismos, demore ainda décadas a ser factorizado.

Quando um número é factorizado isso não significa que se percam as chaves de segurança e que estas tenham logo de ser substituídas por outras maiores. Tudo depende do tempo gasto, do número de computadores envolvidos nesse trabalho e da finalidade do código.

Porquê um número que é um produto de apenas dois números primos?

Para quem já leu alguma coisa sobre criptografia não é estranho este facto nem esta sigla RSA.

RSA é um algoritmo criado em 1978 por Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman destinado à criptografar dados. É muito utilizado em protocolos de comércio electrónico e é bastante seguro, com chaves relativamente longas.

O algoritmo não é muito complicado de entender. Baseia-se essencialmente num par de números que constituem a chave pública e num terceiro número que é a chave privada. Escolhem-se dois números primos muito grandes (P e Q) e começa-se por calcular o produto PQ. Segue-se a escolha de um inteiro ímpar E, menor que PQ e primo com $(P-1)(Q-1)$.

O par $(PQ,\ E)$ constitui a chave pública.

A chave privada é um número D, tal que $(DE-1)$ é divisível por $(P-1)(Q-1)$.

A função de codificação é $C = (T\hat{\ }E) \bmod PQ$, sendo C o resultado da codificação e T o número a codificar. T terá que ser inferior a PQ.

A descodificação é feita por $T = (C\hat{\ }D) \bmod PQ$.

Não se conhecem métodos simples para calcular D, P e Q partindo apenas do par $(PQ,\ E)$, por esse motivo a chave é pública, não há qualquer problema em ser conhecida. O *segredo* está no valor de D que não poderá ser revelado.

Se visitar a página `http://world.std.com/~franl/crypto/rsa-guts.html` encontra uma explicação simples dos passos a seguir para fazer uma codificação e a respectiva descodificação, seguindo este algoritmo, assim como um exemplo prático onde tudo se torna mais claro.

Pode encontrar também a explicação do algoritmo RSA consultando a Wikipedia em:

`http://en.wikipedia.org/wiki/RSA`

Para ganhar *alguns* dólares basta consultar o site `http://www.rsasecurity.com/rsalabs/node.asp?id=2093` e tentar factorizar um dos números-RSA. Porque não o mais simples? o RSA-640?

31074182404900437213507500358885679300373460228427275457201619488232064405180815045563468296717232867824379162728380334154710731085019195485290073377248227835257423864540146917366024776523466609

Tem apenas 193 dígitos!

No site desta empresa encontrei alguns dados que achei interessantes, pelo menos para uma pessoa que não tem conhecimentos nesta área, como é o meu caso.

Por exemplo, na secção dos boletins, o boletim número 13, tem entre muitas outras coisas, uma tabela dos records de factorização desde 1970 até 1999 e o gráfico que relaciona o número de dígitos do número factorizado num determinado ano com o respectivo ano. Chamam a atenção para uma certa linearidade deste gráfico e para as razões possíveis para isso acontecer, uma vez que dado os grandes avanços tecnológicos seria de prever uma relação exponencial.

** António José Machiavelo, professor no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Navegando na Internet

Os sites sobre criptografia são imensos, uns bastante complicados para quem quer fazer uma primeira abordagem ao assunto, mas alguns têm, indicações bem mais simples como por exemplo o site:

`http://www.cryptographyworld.com/index.htm`

destinado essencialmente a quem quer iniciar o estudo deste tema, tratando conceitos básicos, chaves e os diferentes algoritmos.

No site da World Wide Web Virtual Library em:

`http://world.std.com/~franl/crypto.html`

encontra ligações para muitos sites sobre a criptografia, incluindo artigos, organizações, perguntas frequentes, etc, além da descrição do algoritmo RSA, já indicado no texto.

No site da Revista da Armada

`http://www.marinha.pt/extra/revista/ra_jan2004/pag_10.html`

encontra-se um artigo onde é feita uma síntese histórica da criptografia, desde o antigo Egipto até aos nossos dias.

E chega de cálculos complicados, que exigem supercomputadores ou um grande número de computadores a trabalhar em simultâneo. Vamos fazer cálculos mais simples. Que tal utilizar uma máquina de calcular que efectua cálculos em numeração romana?

Está em:

`http://www.math.com/students/calculators_pre_ti/roman/compvterromanvs.html`

O que há de natural acerca dos números naturais?

António M. Fernandes

A noção de *número*, mesmo no caso aparentemente simples da de *número natural*, permaneceu insatisfatoriamente caracterizada até finais do século XIX. Foi apenas em 1889 que Giusepe Peano publicou *Arithmetices Principia nova metodo exposita*, um panfleto escrito em latim, contendo aquela que ficou conhecida através da designação de *axiomática de Dedekind-Peano dos números naturais*. O facto de entretanto terem decorrido mais de dois milénios de história da Matemática sem que tivesse surgido uma conceptualização satisfatória daquela noção revela que, ao contrário do que seria de supor os números, em particular os números naturais, não constituem um conceito que se imponha claramente ao espírito humano, isto tendo em mente um conceito *matematicamente útil*. Antes pelo contrário, o conceito de número foi sendo alvo de intenso debate matemático-filosófico, situando-se no cerne de algumas das mais importantes modificações metodológicas e ontológicas operadas no seio da Matemática.

A concepção clássica

Introduzindo o método axiomático, os Gregos marcaram o curso da Matemática. Eles desenvolveram especialmente a geometria em detrimento da aritmética e do conceito de número. Isto deveu-se, por um lado, ao facto de a geometria euclidiana ser uma teoria logicamente bem estruturada, da qual se extraíram inicialmente muitas (e importantes) consequências. Por outro, a uma concepção grega de *número* particularmente limitadora, não permitindo um tratamento abstracto desta noção impedindo, consequentemente, que a *aritmética* se pudesse desenvolver até um nível satisfatório. De acordo com Euclides (livro VII dos *Elementos*), um número é uma *multiplicidade de unidades*. Procedendo desta forma os gregos revelaram-se incapazes de dissociar a noção de número dos processos de contagem. As dificuldades filosóficas contudo, não se ficariam por aqui. A *unidade* vista como *causa* ou *origem* dos números não era considerada como um número, entrando em cena uma distinção metafísica entre a *causa* ou *origem* e a *coisa*.

Ainda assim, enquadrado por este cenário limitativo, os pitagórios atribuíram aos números um papel central na sua cosmologia, consubstanciada no *dictum* "tudo é número". Isto, até ao momento em que eles próprios se depararam com o fenómeno da *incomensurabilidade* (ver caixa 1) — não é possível encontrar um segmento do qual, ambos, a diagonal e o lado de um quadrado sejam múltiplos. Esta situação obviamente arruinou um póstulado central da doutrina pitagórica e, marginalmente revelou dificuldades então incontornáveis, envolvendo o conceito de número, que determinaram o curso da matemática grega que passou, como já se referiu, a desenvolver-se em torno da geometria euclidiana.

Muito provavelmente a única tentativa séria para enfrentar a questão da incomensurabilidade terá sido a que desenvolveu Eudoxo na sua *Teoria da Proporção* (descrita no Livro V dos *Elementos* de Euclides). Dados dois segmentos $[AB]$ e $[CD]$ existe entre eles uma determinada *proporção*. Modernamente, sendo $\alpha = \overline{AB}$ e $\beta = \overline{CD}$, essa proporção é descrita pelo número real α/β e, em certo sentido, esse número real é uma abstracção do par $([AB], [CD])$. A teoria da proporção de Eudoxo incide precisamente sobre estes pares e sobre as *proporções* que eles determinam. Recorrendo a uma construção muito imaginativa e engenhosa, Eudoxo conseguiu caracterizar em que circunstâncias essa proporção é maior ou menor num par que noutro, ou quando são iguais (ver caixa 2). No entanto, uma concepção de número assente em pressupostos e distinções marcadamente metafísicas, impunha uma forte distinção entre *objectos geométricos* e *números* que, uma vez caracterizados pela sua natureza intrínseca, tinham que se considerar distintos. Pela força desta distinção nunca esteve no horizonte de Eudoxo encarar estes pares como números. Se o tivesse feito estaria muito próximo de antecipar em mais de dois milénios a construção dos números reais, só obtida em moldes rigorosos por Richard Dedekind mesmo no final do século XIX.

Caixa 1

A incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado traduz-se em notação e linguagem moderna no facto de $\sqrt{2}$ não ser um número racional. A demonstração deste facto, aparentemente obtida por Pitágoras ou por algum membro da sua escola usa o método de redução ao absurdo. Suponhamos que existem números naturais m, n tais que $\sqrt{2} = m/n$. Uma vez que qualquer fracção pode ser escrita na sua forma irredutível (em que o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador é 1), podemos supor sem perda de generalidade que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

Ter-se-ia então que

$$2 = \frac{m^2}{n^2} (*)$$

donde se concluiria que $2n^2 = m^2$, ou seja, m^2 e portanto m são números pares. Então $m = 2r$ para certo r. Substituindo em (*) tem-se

$$2 = \frac{(2r)^2}{n^2} (**)$$

donde se conclui que $n^2 = 2r^2$, ou seja, n^2 e, consequentemente, n são pares.

Mas, então, $\mathrm{mdc}(m, n) \geq 2$ o que contradiz o facto de inicialmente termos suposto que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ e estabelece a contradição. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

Dedekind e a aritmetização da análise

A emergência da *análise*, impulsionada sobretudo pelos trabalhos de Newton e Leibniz, acabaria por expor as deficiências da geometria euclidiana enquanto sistema fundacional. Newton levou ao extremo os métodos geométricos mas, de facto, tanto estes como os próprios fundamentos do cálculo diferencial acabariam por ser alvo de importantes (e justas) críticas. A principal das quais incidia sobre a noção de *movimento*. Tal facto constituía, para muitos, a violação de um princípio de *prioridade lógica*, já que estabelecer uma teoria do movimento requer um prévio desenvolvimento da geometria (a teoria do espaço). Como consequência, o emprego de argumentos da teoria do movimento para demonstrar resultados geométricos era logicamente insustentável.

Esta ideia ganhou crescente importância e a aritmética, aparentemente livre deste tipo de *defeito*, foi ganhando preponderância como substracto fundamental. Dedekind, consciente da falta de rigor da análise e das virtudes da aritmética, iniciou um programa fundacional tendo em vista a fundamentação do cálculo em termos da noção básica de número natural. Na sequência desse programa, Dedekind acabaria por descrever os denominados *números reais* (o conceito basilar da análise moderna) a partir dos números naturais.

Evidentemente, Dedekind não podia proceder à *aritmetização da análise* utilizando a noção clássica de número. Ele romperia com a tradição clássica procedendo a uma caracterização estruturalista da noção de número. Para ele, o que caracteriza essencialmente essa noção, não é a sua *materialidade* mas a forma como a noção se adequa, enquanto abstracção, a uma enumeração arbitrária. Por outro lado, existe uma certa circularidade na definição clássica de número que é necessário evitar através de uma nova formulação. Essa circularidade pode ser observada através da análise dum caso particular: o número dois, por exemplo, obtém-se progredindo a partir de 0 ao longo de *duas* etapas (ou seja, o número é usado, de certo modo, na sua própria definição).

É a altura para trazer à cena um novo actor — a noção de *conjunto*. As considerações de Dedekind envolvem de modo mais ou menos directo este conceito que podemos considerar informalmente, adoptando a concepção de Georg Cantor, o fundador da *teoria de conjuntos*. Segundo ele,

> Por *conjunto* deve entender-se uma colecção, vista como um todo, de objectos bem definidos e distintos que são concebíveis através da nossa imaginação ou pensamento. Estes objectos são designados de *elementos* do conjunto, que por eles fica determinado.

Se um elemento x integra um conjunto X, escrevemos $x \in X$ e dizemos que x *pertence* a X. Se X e Y são conjuntos de tal modo que todo o elemento de Y é igualmente um elemento de X dizemos que Y é um *subconjunto* ou uma *parte* de X e escrevemos $Y \subseteq X$.

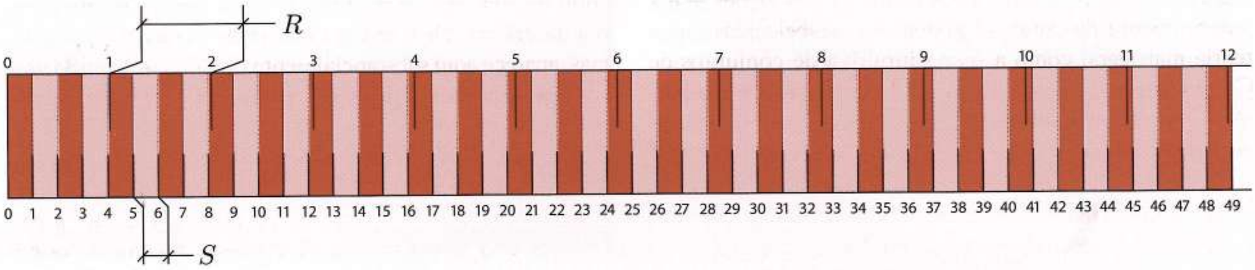
Cantor, que era contemporâneo de Dedekind, tomou a noção de conjunto (ao contrário da de número natural) como a noção mais fundamental da matemática. Não deixa de ser curioso, no entanto, que adoptou a postura clássica

Caixa 2

A teoria da proporção, atribuída a Eudoxo, surge descrita no Livro V dos *Elementos* de Euclides. Devido ao fenómeno da incomensurabilidade, a proporção entre certos segmentos de recta não pode ser descrita em termos dos números racionais. Eudoxo contornou o problema evitando responder à questão: qual é a proporção?, substituindo-a pela possibilidade de comparar proporções entre segmentos. De facto, ele concebeu um dispositivo que permitia aproximar essas proporções por um número racional, isto com precisão arbitrariamente grande. Se marcarmos duas semi-rectas paralelas (ver figura abaixo) e as dividirmos segundo os comprimentos de dois segmentos de comprimentos R e S, respectivamente, a respectiva proporção entre esses dois segmentos pode ser aproximada por um número racional com precisão arbitrariamente grande. Por exemplo, consultando a figura facilmente se constata que $12S \leq 3R \leq 13S$ pelo que a proporção entre os segmentos R/S verifica $12/3 \leq r/S \leq 13/3$. Se avançarmos na figura, podemos também constatar que se tem $48S \leq 12R \leq 49S$, pelo que se obtém uma nova aproximação $48/12 \leq R/S \leq 49/12$ esta última mais precisa uma vez que

$$\frac{49}{12} - \frac{48}{12} = \frac{1}{12} < \frac{13}{3} - \frac{12}{3} = \frac{1}{3}.$$

Usando estas aproximações racionais é agora possível, dados dois pares de segmentos $([AB],[CD])$ e $([EF],[GH])$, comparar as respectivas proporções, já que, sendo diferente essa proporção isso pode verificar-se, desde que se considerem aproximações racionais suficientemente finas.



relativa aos números, definindo a *materialidade* da noção de conjunto. Isso revelar-se-ia inconsistente via o *paradoxo de Russell* e seria remediado através de uma conceptualização estruturalista do conceito de conjunto. Mas, para já, podemos adoptar a noção informal de conjunto à Cantor.

Regressando a Dedekind e ao modo como evitou a circularidade da definição clássica de número, assim como todos os outros problemas conceptuais a ela inerentes, deve dizer-se que ele se centrou no processo de contar em si mesmo e não nas entidades que o podem descrever. Ele começa por introduzir a noção de *operação sucessor*. Dado um conjunto X, uma operação sucessor em X é simplesmente uma função $\sigma : X \longrightarrow X$, satisfazendo as seguintes condições: (1) existe um elemento e em X, que se designa *elemento inicial* tal que para nenhum x em X se tem $\sigma(x) = e$ (o elemento e não é sucessor de nenhum elemento de X); (b) s é injectiva ou seja dados dois elementos $x \neq y$ de X, tem-se igualmente que $\sigma(x) \neq \sigma(y)$.

Um triplo (X, σ, e)em que $\sigma : X \longrightarrow X$é uma operação de sucessor diz-se um conjunto σ-indutivo. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é σ-indutivo se $e \in Y$ e se para qualquer $y \in Y$ se tem $\sigma(y) \in Y$ (se Y tem um determinado elemento, tem igualmente o seu sucessor como elemento). Como Dedekind notou, o conjunto formado por todos os elementos de X que estão presentes em qualquer subconjunto de X que é σ-indutivo, é ainda σ-indutivo e, consequentemente, é o menor subconjunto σ-indutivo de X, que denotamos por $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$. Os elementos de $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$ são designados de números naturais.

Claro que se considerarmos um ponto de partida diferente, ou seja, um conjunto (X', σ', e') que é σ'-indutivo então, será de esperar que se tenha $\mathbb{N}(X, \sigma, e) \neq \mathbb{N}(X', \sigma', e')$ mas, como o próprio Dedekind constatou, as estruturas são essencialmente cópias uma da outra, pelo que a estrutura obtida por este procedimento é essencialmente única. Omitimos aqui os detalhes e o formalismo associados a esta observação, notando apenas que existe uma correspondência natural que permite identificar (estruturalmente) $e \in X$ e $e' \in X'$ com o número 0 (no sentido clássico do primeiro elemento de uma progressão), os elementos $\sigma(e)$ e $\sigma(e')$ com o número (clássico) 1, e assim sucessivamente ... .

Perante esta unicidade estrutural qualquer uma das estruturas $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$ descritas acima é essencialmente uma sequência infinita do tipo

$$0, \quad \sigma(0) = 1, \quad \sigma(\sigma(0))) = \sigma(1) = 2, \quad \ldots .$$

que abreviadamente denotamos por $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$.

Esta operação de sucessor é suficientemente poderosa para permitir definir as operações de adição e multiplicação dos números naturais. Ambas as operações podem ser definidas através das relações de recorrência seguintes:

$$+: \begin{cases} m+0 := m \\ m+\sigma(n) := \sigma(m+n) \end{cases}$$

$$\times: \begin{cases} m \times 0 := 0 \\ m \times \sigma(n) := (m \times n) + m \end{cases}$$

(Note-se que das relações acima se obtém imediatamente que $\sigma(n) = n + 1$.) A relação de ordem em $\mathbb{N}$ também se pode agora definir:

$$m \leq n \text{ se e só se existe um } k \text{ tal que } m + k = n.$$

Apesar de elegante, a solução de Dedekind apresenta um problema óbvio, de resto reconhecido pelo próprio Dedekind, a demonstração da existência da estrutura dos números naturais, bem como a existência das operações $+$ e $\times$ anteriormente descritas, só podem ser estabelecidas numa teoria mais geral como a teoria intuitiva de conjuntos de Cantor, arredando assim a possibilidade de considerar a aritmética como uma teoria basilar, pelo menos nos moldes propostos por Dedekind.

A proposta de Peano

Como já se mencionou, na parte inicial, em 1889, Giuseppe Peano publicou uma caracterização axiomática dos números naturais. Essa axiomática, agora conhecida como *axiomática de Dedekind Peano*, introduz os números naturais como sistema básico, usando o processo utilizado pelos gregos quando descreveram a geometria euclidiana.

Os axiomas são fortemente inspirados nas propriedades básicas dos números naturais de Dedekind, mas como a existência é postulada axiomaticamente, esta abordagem não enferma das deficiências da abordagem de Dedekind, por não requerer uma outra teoria subjacente. Tentativamente, os axiomas de Peano descrevem uma estrutura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ onde $\mathbb{N}$ é um *universo* cujos elementos se designam números naturais, $+$ e $\times$ denotam duas operações binárias, ou seja, duas funções que fazem corresponder a cada par (m, n) de elementos de $\mathbb{N}$, elementos de $\mathbb{N}$ que se denotam por $m + n$ e $m \times n$ que são respectivamente a soma de m e n e o produto de m e n; finalmente 0, 1 são dois elementos fixos de $\mathbb{N}$. O sistema é governado pelos axiomas que são os seguintes:

A1 para qualquer $x \in \mathbb{N}$ temos $x + 1 \neq 0$;
A2 se $x + 1 = y + 1$ então necessariamente $x = y$;
A3 se $X \subseteq \mathbb{N}$, contém 0 e se, sempre que $x \in \mathbb{N}$ se tem igualmente que $x + 1 \in \mathbb{N}$ então $X = \mathbb{N}$;
A4 $x \leq y$ se e só se $y = x + k$ para certo $k \in \mathbb{N}$;
A5 $m + 0 = m$
$m + (n + 1) = (m + n) + 1$
$m \times 0 = 0$
$m \times (n + 1) = (m \times n) + m$

Note-se que os axiomas 1 e 2 descrevem a função que faz corresponder a cada x o número $x + 1$ como uma função sucessor. Deste ponto de vista, o axioma 5 introduz as operações básicas como no caso da formulação de Dedekind, usando as relações de recorrência. O axioma 4 descreve a relação de ordem e o axioma 3 descreve o denominado axioma de indução. Este último não é mais que uma descrição alternativa da condição de minimalidade de Dedekind. De facto, as hipóteses sobre X no axioma revelam que X é σ-indutivo, onde se considera $\sigma(x) = x + 1$. A conclusão revela que X não pode ser mais pequeno que o próprio $\mathbb{N}$, o que mostra que $\mathbb{N}$ é o menor conjunto σ-indutivo.

Em certo sentido a axiomática proposta por Peano tem em vista sobretudo o sistematizar das propriedades fundamentais da estrutura descrita por Dedekind em detrimento da procura de um conjunto de propriedades intuitivamente evidentes. No entanto, ao introduzir os números axiomaticamente, seguindo a tradição grega relativa à geometria há, contudo, algo que se modifica relativamente à noção original de *axioma*. De facto, o carácter de evidência dos axiomas, aparece aqui substancialmente diluído, antevendo uma concepção moderna do termo, segundo a qual o carácter de evidência é desprezado em detrimento da consistência lógica da axiomática.

Assim descritos, os números naturais têm de facto um certo valor fundacional, na exacta medida em que, a partir deles Dedekind foi capaz de descrever finalmente os números reais, a base da análise moderna (ver caixa 3). A razão pela qual não podem, os números naturais descritos pela axiomática de Dedekin-Peano, constituir um verdadeiro sistema fundacional reside no facto de construções mais sofisticadas, transcendendo a análise elementar, requererem um sistema mais poderoso que a aritmética. Foi por esta razão que se adoptou a noção de conjunto como noção basilar e fundamental da matemática, em detrimento da noção de número.

Números como conjuntos — a concepção actual

Em geral, teorias e resultados são em matemática resultado dos esforços de várias pessoas, não raras vezes trabalhando ao longo de séculos. Desta perspectiva o caso da *teoria de conjuntos* é singular, trata-se da obra de uma só pessoa — Georg Cantor. Esta teoria introduz a noção de *conjunto* como a mais básica e fundamental de todas as noções matemáticas. No entanto, apresentando uma definição material da noção de conjunto, Cantor acabou por descrever um sistema inconsistente, já que nele se pode descrever o denominado *paradoxo de Russell* (ver caixa 4).

Não obstante este tremendo e decisivo obstáculo, a Matemática parecia não poder prescindir desta noção, ao ponto de David Hilbert ter afirmado que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."

A solução para o problema passou uma vez mais pela apresentação da noção de conjunto em termos estruturais através de uma axiomática — a axiomática de Zeremelo-Fraenkel.

Considerando uma estrutura $(\mathbb{N}, +, \times, \leq, 0, 1)$ onde são verdadeiros os axiomas de Dedekind-Peano, o conjunto dos números racionais pode ser descrito como o conjunto constituído por todos os triplos ordenados (m, n, k) de elementos de $\mathbb{N}$, em que k é diferente de 0. (Este triplo tenta representar o *objecto* $(m-n)/k$.) Dois triplos (m, n, k) e (r, s, t) são considerados como representantes da mesma entidade (número racional) se

$$(mt + sk) = (rk + nt).$$

Neste conjunto, denotado por $\mathbb{Q}$, definimos uma soma e uma multiplicação através de

$$(m, n, k)+(r, s, t) = (mt+rk, nt+sk, kt)$$

$$(m, n, k)\times(r, s, t) = (mr+ns, ms+nr, kt)$$

Podemos considerar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ se identificarmos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ com o triplo $(n, 0, 1)$. Finalmente, uma relação de ordem pode ser introduzida em $\mathbb{Q}$ se considerarmos:

$$(m, n, k) \leq (r, s, t) \text{ se e só se } (mt + sk) \leq (rk + nt).$$

Os elementos de $\mathbb{Q}$ correspondem aos números fraccionários, que apesar de úteis em muitas circunstâncias são insuficientes para caracterizar os pontos de uma recta. Sendo possível identificar cada fracção com um ponto da recta, marcando um segmento de comprimento unitário e usando procedimentos geométricos básicos para dividir um segmento em n partes iguais, a verdade é que alguns pontos da recta não correspondem, por este processo, a nenhum número racional. (Isto é apenas mais uma manifestação do fenómeno da incomensurabilidade.)

Isto revela que os números racionais são inadequados para uma completa caracterização do contínuo. Da sua análise das

Giuseppe Peano

A noção de *número natural* é actualmente descrita (como qualquer outra noção matemática) em termos da noção de conjunto. Os axiomas garantem a existência de um conjunto (designado por conjunto vazio, e que se representa por $\emptyset$), e que é caracterizado por não ter elementos. Certas operações básicas são igualmente garantidas pela axiomática, neste caso encontram-se, em particular a união de conjuntos e a formação de conjuntos singulares. A união de dois conjuntos X e Y, que se denota por $X \cup Y$ caracteriza-se do seguinte modo: $x \in X \cup Y$ se $x \in X$ ou $x \in Y$. Enquanto que o conjunto singular $\{x\}$ se caracteriza por: $y \in \{x\}$ se e só se $y = x$. Apesar de básicas estas operações são suficientes para possibilitar a descrição de uma operação sucessor tal como anteriormente caracterizada. Essa operação associa a cada conjunto X o respectivo sucessor $\sigma(X) = X \cup \{X\}$.

De modo a podermos definir os números naturais ao estilo de Dedekind temos que garantir a existência de um conjunto σ-indutivo. Isso é garantido igualmente por um dos axiomas — o axioma do *infinito*. Esse axioma garante a existência de um conjunto A que contém $\emptyset$ como elemento e é fechado para a operação σ. Usando uma vez mais as potencialidades da teoria podemos considerar o menor subconjunto de A que é σ-indutivo, conjunto este que denotamos por ω. Note-se que o conjunto ω contém os elementos da sequência:

$$\emptyset, \quad \sigma(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \ldots$$

que naturalmente se identifica com os elementos da sequência seguinte:

$$0, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad \ldots$$

que são então considerados como *os números naturais*, com a particularidade de cada número natural n ser identificado como o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. A relação de ordem em ω é definida de modo muito simples, através do seguinte,

$$m \leq n \text{ se e só se } m = n \text{ ou } m \in n.$$

noções envolvidas, Dedekind chegou à conclusão que o que caracteriza o contínuo é o facto de que, quando dividimos uma recta em duas semi-rectas, essa divisão é determinada por um ponto da recta, algo que não sucede na recta racional. De facto se $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ então A e B correspondem a duas semi-rectas da recta racional que unidas formam toda a recta racional. (A e B constituem, deste modo, aquilo que se denmina de *corte*.) O corte (A, B) não é, contudo, determinado por nenhum *ponto racional*.

A ideia de Dedeking é engenhosa. Ele decidiu *promover* estes cortes à condição de números. Deste modo, o conjunto dos números reais não é mais que o conjunto $\mathbb{R}$ constituído por todos os cortes (A, B) na recta racional. Tem-se que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ se identificarmos a fracção m/n com o corte

$$(\{x \in \mathbb{Q} : x < m/n\}, \{x \in \mathbb{Q} : x \geq m/n\}).$$

Mas $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, depois desta identificação pois, por exemplo,

$$\sqrt{2} = (\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\})$$

é um corte que não corresponde a nenhum racional.

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ estendem as correspondentes operações em $\mathbb{Q}$ e são definidas por

$$(A, B) + (X, Y) = (K, \mathbb{Q} \setminus K);$$

$$\text{onde } K = \{\alpha + \beta : \alpha \in A \text{ e } \beta \in X\};$$

$$(A, B) \times (X, Y) = (K, \mathbb{Q} \setminus K);$$

$$\text{onde } K = \{\alpha \times \beta : \alpha \in A \text{ e } \beta \in X\};$$

onde consideramos $\mathbb{Q} \setminus K = \{x \in \mathbb{Q} : x \notin K\}$, e a relação de ordem,

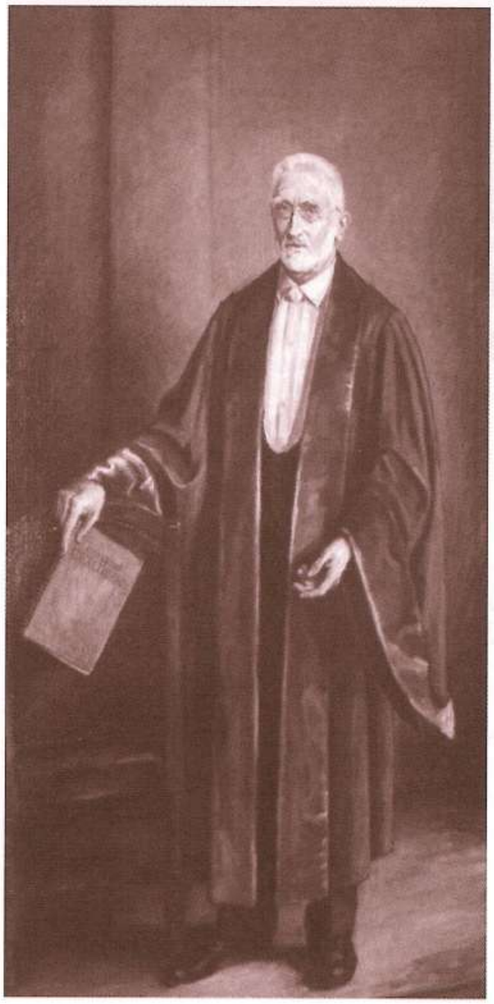
$$(A, B) \leq (X, Y) \text{ se e só se } A \subseteq X.$$

A descrição dos números naturais enquanto estrutura acabada, invoca o conceito de infinito actual, algo que foi enfaticamente rejeitado por Aristóteles e permanecia por esclarecer na época em que Hilbert a ele se referia como o conceito que em matemática mais necessitava de clarificação. Essa clarificação foi finalmente obtida com o advento da teoria de conjuntos, que ainda hoje constitui o sistema fundacional no qual qualquer noção matemática pode ser em última análise descrita. Em particular, o conceito de número, encontra finalmente uma descrição rigorosa neste contexto.

Ao longo desta jornada em que noções básicas como a número natural foram resgatadas à intuição pelo rigor lógico, foram operadas no seio da matemática muitas e profundas modificações metodológicas e ontológicas. O método axiomático foi preservado muito embora a noção de axioma tenha sofrido uma alteração conceptual extensa. De noção intrinsecamente verdadeira aos axiomas passou a exigir-se consistência e riqueza de consequência. Em certo sentido é como se a Matemática deixasse de dizer respeito a uma realidade objectiva e passasse a considerar todas as possíveis realidades. Por exemplo os axiomas da teoria de conjuntos, longe de serem intuitivos, foram escolhidos de modo a que toda a realidade matemática se pudesse descrever em termos da noção fundamental de *conjunto*.

Os axiomas da geometria euclidiana, tendem a descrever a realidade material dos conceitos básicos que constituem aquela teoria. Os modernos axiomas descrevem estruturas, ou seja, muito embora continuemos a dar nomes aos objectos matemáticos, não conhecemos (e de facto nem fazemos nenhum esforço para conhecer) a sua essência material. Os axiomas descrevem relações entre esses indivíduos e não os indivíduos em si mesmos. Estamos perante aquilo que se designa uma visão estruturalista da Matemática.

A formalização rigorosa dos números naturais teve que aguardar por todas estas enormes e complexas alterações que introduziram na Matemática um elevado grau de abs-



Richard Dedekind

Caixa 4

O famoso paradoxo de Russell foi originalmente concebido por Bertrand Russell, para demonstrar a inconsistência do sistema aritmético de Frege, associado a um programa fundacionista conhecido como logicismo. Em todo o caso a teoria intuitiva de conjuntos, concebida por Cantor, é vulnerável ao mesmo argumento.

Olhando para a definição de *conjunto* fornecida por Cantor, é possível considerar o conjunto $A = \{x : x \notin x\}$, que é constituído por todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Com este conjunto é agora possível obter uma contradição. De facto, se $A \in A$ então A não é um dos x tais que $x \notin x$ e, consequentemente A não é elemento de A, ou seja $A \notin A$. Por outro lado, se $A \notin A$, então A é um dos x tais que $x \notin x$, pelo que $A \in A$. Acabámos de estabelecer que

$$A \in A \text{ se e só se } A \notin A,$$

uma evidente contradição que, em última análise, revela a inconsistência da teoria intuitiva de conjuntos.

tracção e sofisticação Muitas dessas alterações foram mesmo determinadas pela tentativa dessa descrição precisa. Nesse sentido é pertinente a questão: *o que há de natural acerca dos números naturais?*

Bibliografia

Heath, Sir T. L.; *Euclid, the Thirteen Books of the Elements*; Second Edition Unabridged, Dover, NY, 1956.

Heath, Sir T. L.; A *History of Greek Mathematics*; 2 Vols., Dover, NY, 1981.

Cantor, G.; *Contribution to the Founding of Transfinite Numbers*; Dover, NY, 1995.

Mayberry, J. R.; *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets; Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

Kanamori, A.; Zermelo and Set Theory; *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 10, N. 4, ASL, December 2004.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

2005

Ano Internacional da Física

à luz de Einstein, 1905—2005

Durante o ano 2005 a revista *Educação e Matemática* associou-se à celebração do Ano Internacional da Física. Publicámos artigos, propostas para a sala de aula, relatos de experiências e de actividades de divulgação. Trouxemos a Física e a sua relação com a Matemática para as páginas da nossa revista.

Neste último número destacamos a exposição *à luz de Einstein, 1905–2005* na Fundação Calouste Gulbenkian até 15 de Janeiro. Num dos folhetos de divulgação refere-se "A Física está por toda a parte e ajuda a entender o que se passa à nossa volta. Explica muitos dos fenómenos naturais que observamos, como o arco-íris, as trovoadas ou as marés, e também permitiu a invenção de muitos equipamentos e objectos que usamos no dia-a-dia. E, no entanto, muitas vezes não nos damos conta disso …

Albert Einstein, que foi um físico prodigioso, quis entender as leis que regem o mundo. Descobriu o fotão, inventou a teoria da relatividade e ajudou a mostrar que a matéria é feita de átomos.

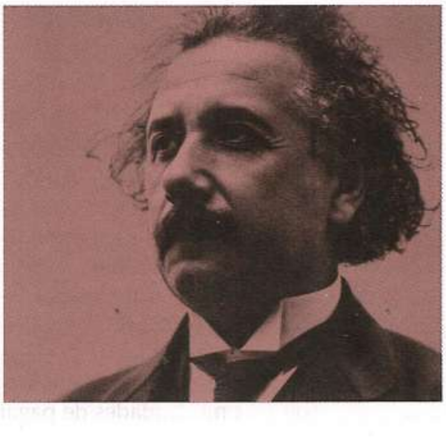
Vem descobrir a Física para melhor compreender o mundo em que vives.

Vem olhar o universo com as novas luzes que a Física descobriu no século XX".

E, dizemos nós, quem sabe se nessa visita descobre também alguns sinais da tal relação de grande intimidade entre a Física e a Matemática de que nos falou o Físico Carlos Fiolhais no artigo *Relação da Física com a Matemática* que abriu a secção *2005 Ano Internaciona da Física* da EM!

Sim, e como ilustração tomemos a linguagem da geometria Euclidiana e da álgebra. Elas manipulam com um pequeno número de conceitos introduzidos de forma independente, respectivamente símbolos, tais como o número inteiro, a linha recta, o ponto, assim como com sinais que designam as operações fundamentais, isto é, as conexões entre esses conceitos fundamentais. Isto é a base para a construção, e respectivamente a definição de todas as outras afirmações e conceitos. A conexão entre conceitos e afirmações por um lado e os dados sensoriais por outro lado é estabelecida através de actos de contagem e medida cujos resultados estão suficientemente bem determinados.

Albert Einstein



Mais perto da APM

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM:

Quadro 1

Sócio	Sócio residente no estrangeiro	Sócio Estudante	Sócio Aposentado	@-Sócio*
44,50€	48,50€	31,50€	35,00€	35,00€
Revista *Educação e Matemática* impressa e *on-line* (saem 5 números por ano e uma delas é temática)				Revista *Educação e Matemática on-line*
APM*informação* impresso e *on-line* (5 números por ano)				APM*informação* on-line
Opção de assinatura da revista *Quadrante* impressa (2 números por ano -10,50 €)				
Acesso à zona *on-line* para sócios				
Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)				
Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras: 15% sobre o preço de capa				
Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições				
Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento				
Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção				

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336

Instituições

Quadro 2

Opções			Valor
Opção 1		Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)	33€
Opção 2		Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	20€
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	44€
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	15€
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* – 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	63€
	B	Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)	15€

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336

Publicações — Loja on-line

Agora já pode encomendar as publicações da APM na nossa loja virtual, no endereço http://loja.apm.pt/index.asp, onde tem todas as informações sobre as modalidades de pagamento. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções