Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2005

84

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Setembro 2005
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número é uma composição gráfica utilizando páginas e figuras geométricas de uma uma tradução do grego para o latim, da autoria de William de Moerbeke e datada de 1270, de um comentário de Eutocio sobre a conhecida obra de Arquimedes *Sobre a esfera e o cilindro*.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Cidália Macedo, Guilhermina Lobato, Henrique Manuel Guimarães, João Janeiro, Joaquin Gimenez, José Luiz P. Mello, Lurdes Figueiral, Luís Seabra Lopes, Luísa Solla, Teresa Olga.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

O ano escolar 2005/2006: Algumas mudanças e desafios

A Direcção da APM

É hoje consensual que a forma como os alunos aprendem Matemática nos primeiros anos é crucial para a sua atitude nos anos posteriores como alunos de Matemática e para o seu desempenho como profissionais e cidadãos. Também já se reconhece que as aprendizagens iniciais em Matemática não se podem limitar à aquisição de algumas técnicas de cálculo. O desenvolvimento do raciocínio (analítico, espacial, indutivo, lógico, dedutivo, proporcional, estatístico, probabilístico, ...) da comunicação e da capacidade de resolução de problemas tem de ser o foco do ensino da Matemática logo nos primeiros anos, pelo que a formação de um professor do 1° ciclo, a nível da formação matemática, tem exigências que não se colocavam quando o ensino nos primeiros anos se limitava ao ler, escrever e contar e quando se vivia numa sociedade ainda não "muito modelada" pela Matemática.

Os currículos de formação inicial de professores para os primeiros anos de escolaridade, têm evidenciado uma fragmentação de áreas de conhecimento e uma escassez de tempo dedicado à Matemática e sua Didáctica (entre 5,6% e 9,5% da carga horária total no universo das Escolas Superiores de Educação públicas). E no modelo de formação inicial anterior à criação das ESEs a situação era ainda mais preocupante.

A necessidade de dar continuidade à formação inicial, num processo permanente e centrado nas práticas lectivas tem sido salientado como o caminho a seguir e esse tem sido o foco da atenção e energia da APM. No entanto, sabe-se que a formação contínua é ainda pouco centrada na reflexão sobre a prática e que não cobre as deficiências de formação indicadas no relatório Matemática 2001. Estudos recentes também indicam que a Matemática como matéria curricular não surge com frequência nos planos de formação dos Centros de Formação de Associações de Escolas.

O programa de formação contínua em Matemática para os professores do 1° ciclo, de iniciativa ministerial, a iniciar este ano lectivo e a desenvolver de forma progressiva e continuada no tempo, prevê um modelo em rede entre escolas e agrupamentos, em articulação com as Instituições de Ensino Superior e centrado no trabalho em equipas. Trata-se de um modelo de formação/acompanhamento/supervisão muito ligado às práticas dos professores visto que nas sessões de trabalho quinzenais de cada uma das equipas se pretende, a partir das questões curriculares identificadas pelos professores, planificar actividades e reflectir sobre a sua implementação.

Sem dúvida é um dos grandes desafios para este ano lectivo e seguinte em que muitos de nós irão estar envolvidos e empenhados. Mas *enfrentar desafios colectivos faz parte do estilo* APM. Será desta que conseguiremos criar uma maior dinâmica de trabalho com vista a um investimento continuado no ensino da matemática no 1° ciclo?

A existência de programas de formação 'oficiais' consistentes e duradouros a par com o trabalho autónomo e colaborativo nas escolas e na Associação, bem como as formações académicas de pós graduação, são essenciais para a existência de professores de matemática qualificados e empenhados nas aprendizagens dos alunos. Não se vislumbram, por isso, razões válidas para ter sido interrompido o acompanhamento em Matemática no Ensino Secundário, numa altura em que estavam a ser implementados novos e diversificados programas, pelo que se torna necessário recuperá-lo com as adaptações necessárias. Neste quadro de formação, são necessárias medidas que envolvam os professores do 2° e 3° ciclos, no sentido de harmonizar o programa e o currículo nacional.

Tendo os programas de Matemática sofrido mudanças positivas substanciais nos últimos anos, é essencial a persistência na conjugação de três factores: a formação de professores, uma carga horária lectiva e recursos materiais e organizacionais, adequados. A nossa história recente mostra que o menosprezo de um dos factores pode contribuir para a continuação de maus resultados. No caso da implementação dos novos programas de Matemática no secundário, iniciada nos anos 90, cedo se verificou que 4+4+5 tempos de 50 minutos eram insuficientes para diversificar tarefas, usar materiais, investigar e consolidar as aprendizagens de forma harmoniosa. Actualmente, a Matemática A tem 3 blocos de 90m, mas o elevado número de alunos por turma, sem desdobramentos, pode ser um impeditivo para a realização de tarefas mais abertas e apoio eficaz aos alunos. Dois blocos de 90 minutos no 2° e 3° ciclos (o que corresponde a cerca de 12% da carga horária total, enquanto na maioria dos países europeus essa percentagem fica entre 17 e 23%) ou em Matemática B, pode levar ao apressar e agudizar do pseudo antagonismo entre conteúdos ou desenvolvimento de competências, em vez da sua complementaridade.

Algumas das medidas serão da responsabilidade do Ministério ou da gestão das escolas, mas é a nós, professores, que cabe o papel decisivo na identificação dos problemas e das respectivas soluções a implementar em cada caso. Durante o ano lectivo, trabalhando em equipa nas nossas escolas, assumamos o desafio de efectuar mudanças necessárias.

A Direcção da APM

Os novos Standards do NCTM na entrada do século XXI

Henrique Manuel Guimarães

Em meados da década de 90, o NCTM pôs em marcha um projecto que denominou *Standards 2000* para a elaboração de um novo documento de orientação curricular para o ensino da Matemática. O projecto iniciou os seus trabalhos em 1995 e culminou com a publicação, no início do ano 2000, dos *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), documento programático desenvolvido com base na revisão e actualização dos *Standards* precedentes — *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, 1989), *Professional standards for teaching mathematics* (NCTM, 1991b) e os *Assessment standards for school mathematics* (NCTM, 1995)[1] — e procurando integrar as reflexões e críticas decorrentes da experiência de implementação desses documentos. Na linha dos anteriores *Standards*, o novo documento é apresentado como "um recurso e um guia para todos os que tomam decisões que afectam a educação matemática" (NCTM, 2000, p. ix) não superior, que não se pretende prescritivo, mas com o propósito principal de proporcionar "orientação" e uma "visão" global para a Matemática escolar nas primeiras décadas do novo século. Estando para breve a publicação da sua tradução portuguesa pela APM, apresento neste artigo uma análise dos aspectos que me pareceram mais relevantes[2], procurando destacar o que mais distingue este novo documento dos *Standards* de 1989.

Os Princípios

No essencial, os *Principles and standards*, retomam e reafirmam muitas das ideias, orientações e propostas curriculares dos documentos programáticos anteriores do NCTM, nomeadamente das *Normas para o currículo e avaliação* (NCTM, 1991a). Há no entanto diferenças significativas na concepção global, na estrutura e no conteúdo do novo documento, sendo desde logo de destacar a inclusão de um conjunto de "Princípios", como são designados, que antecedem a apresentação e descrição dos novos *standards*. Estes princípios proporcionam um enquadramento dos *standards* propostos, explicitando as concepções subjacentes sobre a educação e o currículo, o ensino e a aprendizagem, o papel do professor e do aluno, a avaliação e o papel da tecnologia na Matemática escolar.

São apresentados seis princípios a que é dado grande relevo, incidindo sobre seis temas considerados chave — "Equidade", "Currículo", "Ensino", "Aprendizagem", "Avaliação" e "Tecnologia" — que, no seu enunciado, consistem em afirmações genéricas não relacionadas com aspectos matemáticos específicos, mas assumidos como "profundamente interligados com os programas da Matemática escolar" (p. 12). Pretendem, como é dito, descrever características de um ensino de qualidade, constituindo orientações gerais para o ensino da Matemática, apresentadas como fundamento e guia para a tomada de decisões ao nível da elaboração e desenvolvimento curricular, ao nível da prática lectiva e ao nível da definição dos programas de desenvolvimento profissional dos professores. Os princípios propostos, de um modo geral, referem-se às principais ideias já constantes nos documentos anteriores do NCTM, muitas vezes desenvolvendo-as e elaborando mais sobre elas, ou valorizando aspectos particulares pouco visíveis nos ditos documentos. Há também, no entanto, situações em que são abandonadas ou recebem menor ênfase ideias que anteriormente tinham merecido um relevo especial.

Nos dois primeiros princípios, por exemplo, que incidem sobre a Equidade e o Currículo, são desenvolvidas e melhor explanadas a ideia de uma Matemática para todos e a própria ideia de currículo, respectivamente. A ideia de uma Matemática para todos está já presente e é valorizada nos *Standards* de 1989 mas adquire maior visibilidade e importância nos *Principles and standards* com a formulação de um princípio que lhe é inteiramente dedicado e com o lugar que lhe é dado na visão da Matemática escolar traçada no novo documento: "a equidade educacional é um elemento nuclear desta visão" (p. 12). Neste princípio, sustenta-se que não há contradição entre excelência e equidade e que estes conceitos não são incompatíveis em educação. Afirma-se pelo contrário que "a excelência na educação matemática exige equidade", implicando esta consideração a existência de "expectativas elevadas" face a todos os alunos, a oferta de oportunidades significativas a esses alunos, aceitando e integrando diferenças e proporcionando meios e recursos apropriados (p. 11-13). Por sua vez, a ideia de currículo, a que é dedicado todo o segundo princípio, é agora mais desenvolvida e elaborada do que nas *Normas* de 89 (passarei, a partir daqui, a usar, assim abreviado, o título da tradução portuguesa dos primeiros *Standards*). Sublinha-se explicitamente a ideia de que um currículo não é um mero conjunto de actividades, dando grande ênfase a três aspectos apresentados como características importantes de um currículo: coerência, articulação e incidência em ideias matemáticas relevantes.

Uma ideia com grande centralidade nas primeiras *Normas* era a de "poder matemático"[3], cujo desenvolvimento nos alunos aparecia aí como o grande objectivo para o ensino da Matemática. Essa expressão não é usada nos *Principles and standards* e uma outra ideia realçada nas *Normas* anteriores, a ideia de que saber Matemática é fazer Matemática, tem agora menor visibilidade e destaque. Nas *Normas*, eram distinguidas duas dimensões no que é saber Matemática, o *fazer* e o *saber que*, e privilegiava-se a primeira. Nos *Principles and standards*, a dicotomia mais patente é entre compreensão e memorização na aprendizagem ou, se quisermos, entre saber compreendido e saber memorizado. É ao primeiro que é dada primazia, em oposição à aquisição simplesmente memorizada dos conhecimentos matemáticos, considerada dificultadora de uma aprendizagem sólida. No novo documento, na verdade, sobressai a importância dada à compreensão na aprendizagem, objecto de grande atenção, em particular no princípio dedicado à aprendizagem. "Aprender Matemática com compreensão" emerge como uma ideia unificadora, visível logo nas primeiras linhas do seu prefácio onde se afirma que as recomendações propostas "estão fundamentadas na crença de que todos os alunos devem aprender conceitos e processos matemáticos importantes com compreensão", e que o documento apresentado pretende constituir "um argumento em favor da importância de tal compreensão e descrever maneiras de os alunos a atingirem" (p. ix). Aprender Matemática, diz-se ainda, "exige compreender e ser capaz de aplicar procedimentos, conceitos e processos" (p. 20), e a compreensão é apresentada como condição ou pré-requisito facilitador do progresso da aprendizagem, bem como do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade para enfrentar novas situações e resolver novos problemas.

A compreensão da Matemática é ainda associada à ideia de "competência"[4] nessa disciplina, relacionada a capacidade de transferência de conhecimento, ou seja, com a capacidade de utilizar adequadamente, em contextos diversificados, as aprendizagens realizadas: "ser competente num domínio tão complexo como a Matemática envolve a capacidade de usar o conhecimento de forma flexível, aplicando, de forma apropriada, o que é aprendido numa situação, numa outra" (p. 20). Recorrendo à investigação em Psicologia e em Educação, acrescenta-se ainda que um dos seus resultados mais "sólidos" é que "a compreensão de conceitos é uma componente importante d[ess]a competência, em conjunto com o conhecimento factual e o domínio de procedimentos" (p. 20). Domínio de procedimentos, conhecimento de factos e compreensão de conceitos, surgem assim 'lado a lado' na aprendizagem, defendendo-se que a "aliança" entre estas três componentes, faz com que elas possam ser utilizadas de "forma poderosa" (p. 20).

Os Standards

São apresentados dez *standards*, organizados em dois grupos, um é dedicado a temas de conteúdo matemático e contém cinco *standards* — Números e operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de dados e Probabilidades, outro é dedicado aos processos matemáticos — Resolução de problemas, Raciocínio e demonstração, Comunicação, Conexões e Representação — e inclui igualmente cinco *standards*.

No primeiro capítulo dos *Principles and standards* é mencionado o facto de que as ideias dos *standards* anteriores tiveram interpretações diversas e concretizações com alguma distorção, e que muitas das mudanças realizadas foram "superficiais ou incompletas" (p. 5). Como exemplo, refere-se a implementação de recomendações muito valorizadas naqueles documentos, como a ênfase no discurso, em tarefas matemáticas significativas, na resolução de problemas (recomendações, repare-se, incidindo sobre processos), realizada, como é dito, "sem suficiente atenção à compreensão dos alunos do conteúdo matemático" (pp. 5-6).

Este problema, a desvalorização dos conteúdos face aos processos matemáticos, merece atenção especial no novo documento do NCTM, como evidencia a indicação explícita dos dois domínios em que deve incidir a aprendizagem — os conteúdos e os processos matemáticos — sempre mencionados em paralelo desde as primeiras páginas do documento, e também o facto de os cinco *standards* incidindo sobre temas matemáticos, ao contrário do que acontecia nas primeiras *Normas*, precederem os *standards* dedicados aos processos matemáticos. Mais revelador ainda da preocupação referida, é o cuidado em sublinhar que esses dois domínios não devem ser vistos e trabalhados como domínios disjuntos, mas como áreas fortemente inter-relacionadas, "inextrincavelmente ligadas", como é afirmado no capítulo introdutório, onde se clarifica esta ideia dizendo: "Não conseguimos resolver problemas sem compreender e utilizar conteúdos matemáticos; estabelecer conhecimento geométrico exige raciocínio; os conceitos da Álgebra podem ser estudados e comunicados através de representações" (p. 7).

Os dez *standards* são comuns a todos os níveis escolares a que se dirigem (da pré-escola aos doze anos de escolaridade), correspondendo à intenção expressa de proporcionar uma maior coerência e articulação curriculares, bem como à ideia de que um currículo se deve centrar sobre um núcleo de ideias matemáticas consideradas mais importantes. Cada *standard* é constituído por um conjunto de objectivos que são os mesmos em todos os níveis de escolaridade e por um conjunto de "expectativas" que os especificam, enunciando o que é esperado na aprendizagem dos alunos em cada nível[5]. Para além disso, cada *standard* contém uma secção com considerações sobre o ensino e aprendizagem dos aspectos matemáticos envolvidos e orientações de tipo metodológico, com inúmeros exemplos de tarefas e situações associados a cada um dos objectivos.

Quer os objectivos, quer as "expectativas" (que são também objectivos mas mais específicos), incidem apenas sobre capacidades e conhecimentos matemáticos (para usar a terminologia dos programas portugueses). Não são incluídos objectivos habitualmente associados ao campo afectivo, como, por exemplo, os que visam o desenvolvimento de atitudes de autoconfiança ou da capacidade de apreciar e valorizar a Matemática , e que eram muito utilizados nas primeiras *Normas* (e que, nos nossos programas, são contemplados sobretudo nas "atitudes e valores").

No primeiro conjunto de cinco *standards*, sobressai, em relação às *Normas* anteriores, o relevo dado ao tema da Medida, agora estendido aos anos mais avançados da escolaridade, e a utilização da expressão Análise de dados — englobando o estudo de conceitos e métodos estatísticos — no lugar de Estatística, indiciando a valorização desta dimensão no seu estudo. Para além disto, é ainda de referir que o estudo das Funções é incluído na Álgebra e que não é consagrado nenhum *standard* à Matemática discreta, muito embora, como é dito, os tópicos considerados mais importantes deste tema estejam contemplados no novo documento, distribuídos pelos diferentes *standards* e ao longo de toda a escolaridade.

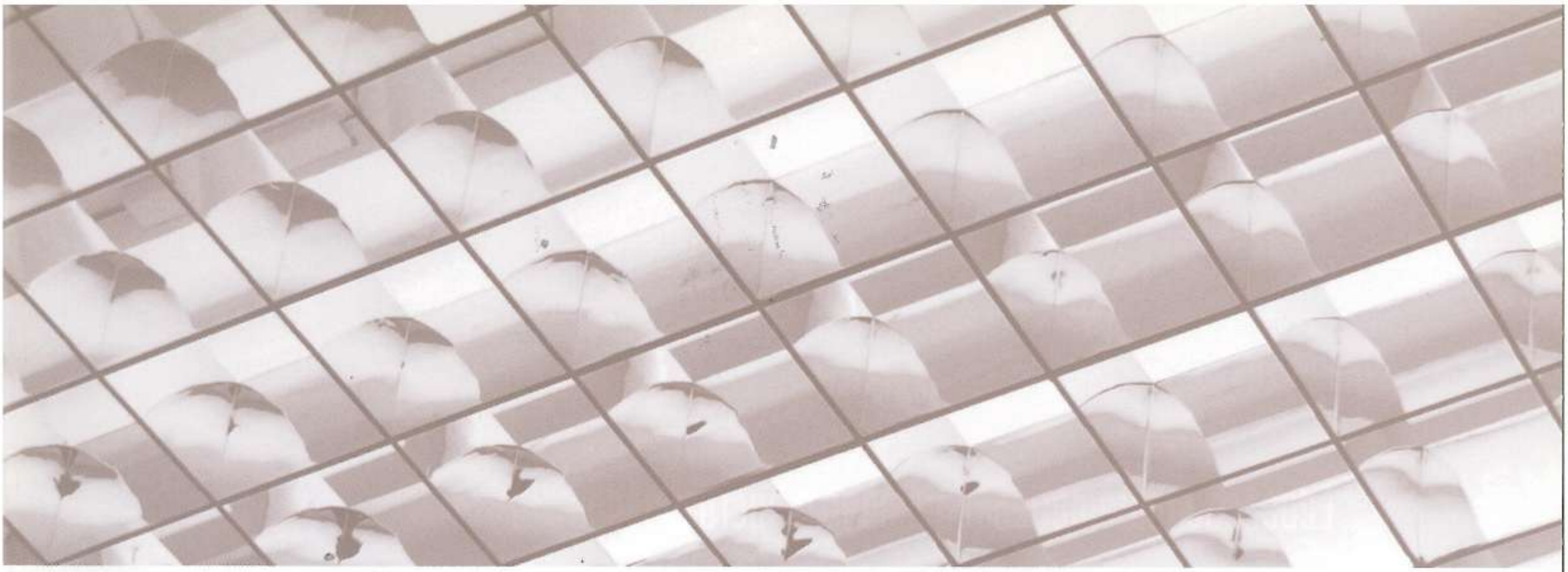
Em relação ao segundo grupo de *standards* dedicado aos processos matemáticos, os temas Resolução de problemas, Comunicação e Conexões matemáticas mantêm o relevo que lhes era atribuído nas primeiras *Normas*. A resolução de problemas, no entanto, já não é apresentada como devendo constituir a incidência principal da Matemática escolar, como vinha acontecendo desde os anos oitenta, embora se sublinhe que deve ser considerada como "uma parte integrante de toda a aprendizagem" (p. 52). Entre os *standards* de processos, destaca-se ainda a importância dada à representação matemática, uma vez que lhe é dedicada todo um *standard*, o que não acontecia anteriormente. Situação idêntica se passa no caso da demonstração, tema agora também apresentado com maior destaque, sendo explicitamente incluído num destes *standards*. Podemos ver neste facto o sinal de uma sensibilidade a críticas que viam o tema da demonstração desvalorizado nas *Normas* anteriores (Wu, 1997) e uma reacção à constatação de que alguns professores, como diz J. Kilpatrick, interpretaram a recomendação de uma menor ênfase na "Geometria euclidiana como sistema axiomático completo" e nas "demonstrações a duas colunas" constante nessas normas (NCTM, 1991a, p. 161), como "permissão para abolir completamente a demonstração para toda a gente" (Kilpatrick, 1997, p. 958).

A destacar

Nos *Principles and Standards* é possível evidenciar algumas tendências relativas às perspectivas e orientações curriculares para renovação da Matemática escolar que se foram consolidando durante os anos noventa. Estas tendências dizem naturalmente respeito, muitas delas, à realidade educativa e social dos Estados Unidos da América, o que não retira significado e relevância à sua consideração e estudo cuidado, em especial se se tiver em vista a análise da sua pertinência e aplicabilidade a outras realidades educativas e sociais.

Em primeiro lugar, com base no reconhecimento da importância da Matemática no património cultural da humanidade, bem como do seu papel no desenvolvimento científico e tecnológico, na vida corrente, no trabalho profissional e no prosseguimento dos estudos, a renovação da Matemática escolar é defendida numa perspectiva de uma Matemática para todos. Isto não significa, no entanto, uma uniformização do ensino ou uma diminuição do nível de exigência na Matemática ensinada. Na verdade, sustenta-se que todos os alunos devem aprender Matemática e conseguem aprender Matemática, implicando esta consideração um nível elevado das expectativas da parte do professor e uma diferenciação e apoio no ensino que tenha em conta e integre as diferenças que os alunos manifestem.

Em termos da ideia de currículo, acentuou-se a tendência para um currículo "focado" isto é, que não se disperse



por uma variedade de temas matemáticos, eventualmente de importância desigual, mas que, pelo contrário, se centre em torno de ideias matemáticas consideradas de maior relevância, valorizando, simultaneamente, a coerência e articulação curriculares.

A forma como são encaradas algumas dicotomias clássicas na Matemática escolar, como é o caso de conteúdos *versus* processos matemáticos, conceitos *versus* técnicas ou ainda, aprendizagem conceptual *versus* conhecimento factual ou domínio de procedimentos, evoluiu, aparentemente, no sentido inclusivo, de modo a consensualizar perspectivas diferentes sobre essas dicotomias. Ou seja, numa perspectiva segundo a qual os pólos dessas oposições não devem ser considerados como domínios de aprendizagem mutuamente exclusivos, mas como áreas a estudar interligadamente, capazes de se fecundarem entre si. Conteúdos e processos são equiparados na aprendizagem e recomenda-se que sejam trabalhados de forma integrada; a compreensão de conceitos, o conhecimento de tipo factual e o domínio de procedimentos são considerados componentes importantes da competência em Matemática e devem ser combinados na aprendizagem. A par disto, ganha mais visibilidade a ideia que saber Matemática é compreender Matemática e ser capaz de a aplicar, e o desenvolvimento dessa compreensão e capacidade, emerge como grande objectivo do ensino da disciplina: "no século vinte e um, deve ser esperado de todos os alunos que compreendam Matemática e sejam capazes de a aplicar" (NCTM, 2000, p. 20).

Notas

1 Todos estes documentos existem em tradução portuguesa da responsabilidade da Associação de Professores de Matemática (NCTM, 1991a, 1994, 1999).

2 Retomo aqui muitos dos aspectos que abordei numa conferência no ProfMat no ano em que foram publicados os *Principles and Standards*. Na *Educação e Matemática* existe uma recensão deste documento (Ponte, 2000) em que vários desses aspectos são também referidos.

3 Referindo-se "às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros" e incluindo "o desenvolvimento da autoconfiança pessoal" (NCTM, 1991a, p. 6).

4 No original *proficiency*, "proficiência": "perfeito conhecimento de qualquer assunto", "competência", "mestria" (dicionário da língua portuguesa, 7ª edição, Porto Editora, 1994).

5 Por exemplo, no *standard* para a Geometria (do pré-escolar aos 2 anos de escolaridade), o objectivo "aplica transformações e utiliza as simetrias para analisar situações matemáticas", é assim especificado: "identifica e aplica translações, reflexões, rotações"; "identifica e cria formas que possuam simetria" (NCTM, 2000, p. 96).

Referências

Kilpatrick, J. (1997). Confronting reform. AMM, *104* (Dezembro), 955-962.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM (1991a). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

NCTM (1991b). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM/IIE.

NCTM (1995). *Assessement standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

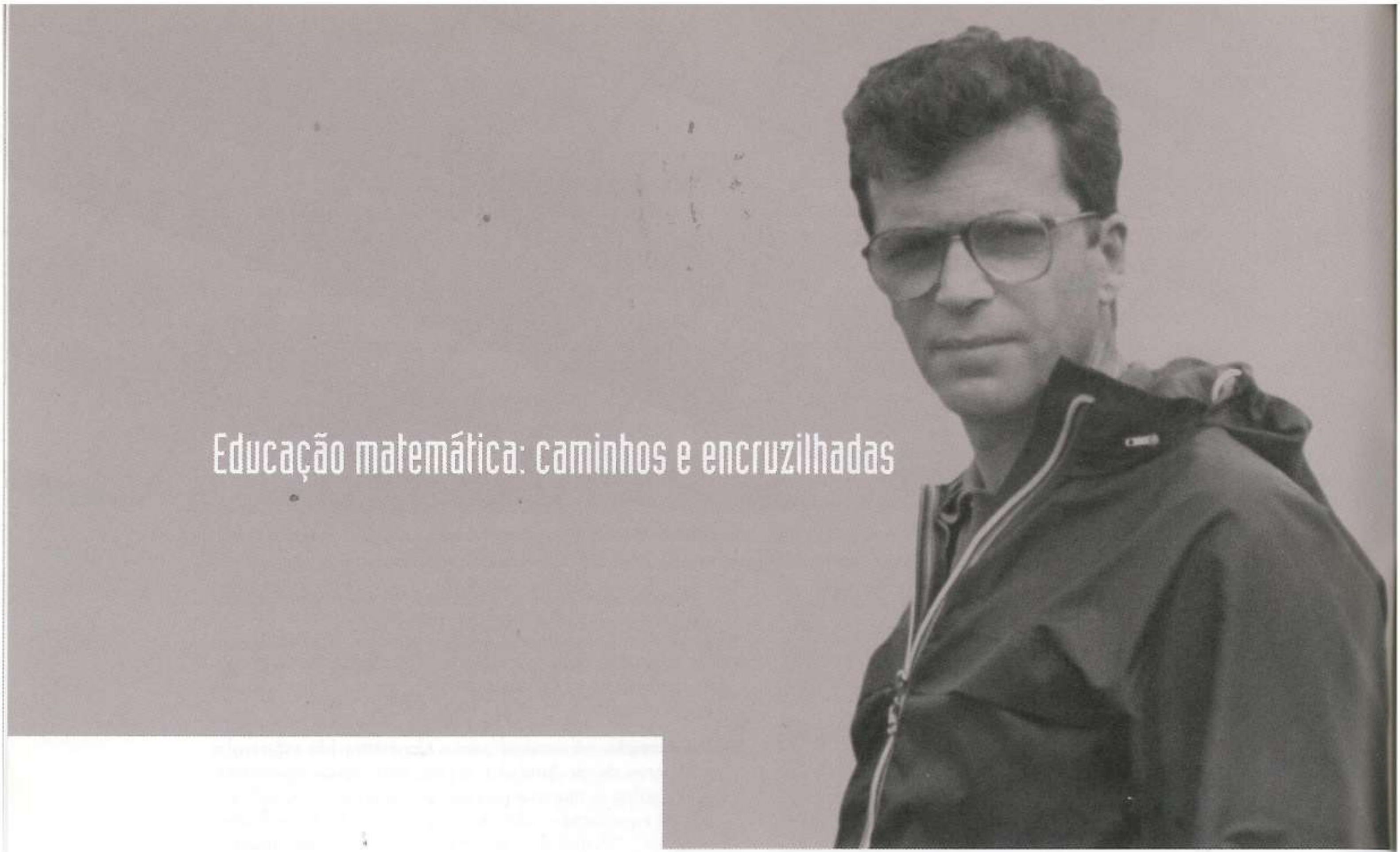
NCTM (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

Ponte, J. (2000). Principles and standards for school mathematics: um novo documento de orientação curricular do NCTM. *Educação e Matemática* nº 60, 64–66.

Wu, H. (1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what can you do. AMM, *104* (Dezembro), 946–954.

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa



Educação matemática: caminhos e encruzilhadas

Um olhar sobre o encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes

Quarta-feira, 14 de Julho e sexta-feira 15. Vindos de muitos lados, encontrámo-nos na Faculdade de Ciências de Lisboa. Amigos do Paulo — e quantos mais gostariam de ter estado e não puderam — queríamos homenageá-lo de uma das formas que ele mais apreciaria: analisar a Educação Matemática nas vertentes que lhe eram mais caras, ouvir, discutir, trocar experiências de pessoas e países diferentes, lançar pistas para ultrapassar dificuldades, reencontrar força para continuar na força do nosso encontro.

Para isso, foi fundamental o trabalho sério apresentado por todos os que tinham a seu cargo os diferentes tipos de sessões — sessões plenárias, conferências, painel, sessões especiais — e a organização impecável, até no cumprimento dos horários.

Caminhos são muitos, encruzilhadas ainda mais. Estamos numa delas. Lembram-se de Carlos Drumond de Andrade?

> No meio do caminho tinha uma pedra
> tinha uma pedra no meio do caminho
> tinha uma pedra
> no meio do caminho tinha uma pedra
> (...)

Pois é. A pedra. A pedra, que merece ser olhada, que é simultaneamente obstáculo e desafio. Desafiámo-la, nesses dois dias do Encontro, cerca de 400 participantes de vários países: além de Portugal, havia participantes do Brasil (muitos), Espanha, Estados Unidos, Holanda, Alemanha, Itália, Dinamarca, Inglaterra, Suécia, Venezuela.

Depois da sessão de abertura, o Henrique Guimarães e o João Pedro da Ponte apresentaram o esquema geral do encontro e os tópicos do livro publicado agora com as principais intervenções escritas do Paulo Abrantes em Educação Matemática. Sobre o encontro, disseram da sua distribuição pelos quatro grandes temas em que o Paulo sempre se empenhou:

— o desenvolvimento curricular, entendido em toda a sua dinâmica de processos e participantes, sendo referidos, nomeadamente, os projectos M789, Matemática para todos e o projecto Reorganização Curricular do Ensino Básico, o qual Paulo Abrantes impulsionou enquanto Director do Departamento do Ensino Básico;

— a experiência matemática, "a participação dos alunos na sua própria aprendizagem, a necessidade de que esta seja feita em situações com significado";

— a avaliação das aprendizagens, que o Paulo considerava dever ser desenvolvida, nos seus diferentes processos e funções, de forma coerente e integrada com as outras componentes curriculares;

— a formação de professores, inicial e contínua, "orientada numa perspectiva de desenvolvimento profissional para uma diversificação de práticas pedagógicas", pois o professor é uma peça chave em todo o processo de desenvolvimento curricular.

Em cada uma destas perspectivas, há virtudes e perplexidades, há aspectos que esbarram na prática e terão que ser reanalisados, feita também a escolha do que é fundamental, do que é a curto, médio e longo prazo, no contexto da realidade que nos cerca mas que também nos compete ajudar a transformar. Para isso, aqui estamos.

As cinco conferências plenárias, distribuídas pelos dois dias, estiveram a cargo de:

— Alan Schoenfeld (Universidade da Califórnia), *Desenvolvimento Curricular, Ensino e Avaliação;*

— Edward Silver (Universidade de Michigan), *Formar Professores de Matemática;*

— Jeremy Kilpatrick (Universidade da Geórgia), *Uma Crítica do Irracionalismo Impuro;*

— Leonor Santos (Universidade de Lisboa), *A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o percurso;*

— Ubiratan D' Ambrósio (PUC São Paulo), *Paulo Abrantes: Em memória* (Conferência plenária de encerramento).

Diferentes, umas mais leves, outras mais compactas, mas todas com interesse e a deixar muito para pensar.

No segundo dia, o painel *Desenvolvimento Curricular em Matemática* moderado pela Joana Brocardo e tendo como intervenientes Célia Carolino (PUC São Paulo); Luís Rico Romero (Universidade de Granada); Koeno Gravemeijer (Instituto Freudenthal, Holanda) e a assistência, trouxe-nos, de forma muito viva, as diferenças e as semelhanças com o que se passa noutros países, quer no que se pensa quer no que é feito em desenvolvimento curricular.

As outras doze conferências que se realizaram nos dois dias do encontro — em blocos de três, em paralelo — dividiam-se equilibradamente pelos quatro temas, estando a cargo de professores portugueses e de professores de outros países. Não deixaram ninguém indiferente; a dificuldade por vezes era a escolha e também tentar não esquecer, com a discussão final mais acalorada, que a sessão seguinte começava a horas ...

Procurando não me perder em pormenores, sempre vos digo que escolhi duas sessões na área da formação de professores porque a considero uma questão central na encruzilhada em que estamos — dificilmente se ensina de um modo se se aprender de outro. Assisti assim a *A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro*, de João Pedro da Ponte e a *A formação para o ensino da Matemática nos primeiros anos: Que perspectivas?*, de Lurdes Serrazina; duas conferências muito claras, com uma panorâmica do passado e presente, lançando pistas para o futuro. Noutros temas, assisti a *As dificuldades dos estudantes ao iniciar um projecto de matemática*, de Joaquin Giménez (Universidade de Barcelona) e a *Os desafios da avaliação nos dias de hoje*, de Jean-Marie Kraemer (Citogroep, Holanda), conferências estas que tratavam aspectos que nos preocupam e levantavam questões da maior actualidade. Estou certa de que o livro das Actas do encontro, muito completo e bem organizado, será um bom elemento de trabalho para qualquer de nós.

Sabemos que muitas coisas não vão bem na Matemática escolar. Mas não aceitamos que, sem uma análise cuidada e usando como argumentos os rankings e as notas em exame dos nossos alunos, se passe um traço por cima de qualquer processo inovador. Soube bem ouvir dizer, a colegas de outros países, que enfrentam o mesmo dilema. Assim, somos mais a poder analisar o problema com lucidez.

E foi só trabalho, o encontro? Claro que não. Havia os intervalos, um a meio da manhã, outro a meio da tarde e o do almoço. Naquele ambiente caloroso que tão bem conhecemos, visitávamos a exposição sobre a obra de Paulo Abrantes — penso que estará também no próximo Profmat —, procurávamos amigos e conhecidos e tentávamos em vão pôr a escrita em dia. Aconteceu-me mais de uma vez — alguém que passava muito atarefado ... um jeito de cabeça ... um modo de rir ... — pensar: Olha o Paulo! O absurdo tinha alguma lógica. O Paulo, se pudesse, não faltaria a este encontro. Mas estava lá a Graça, sua mulher, o Pedro e o Manel, seus filhos. Estavam também o irmão e as irmãs do Paulo. E muitos, muitos amigos. Encontrei lá professores de outras disciplinas que tinham sido colegas do Paulo em Escolas, outros tinham trabalhado com ele na Direcção do Ensino Básico. Encontrei lá uma aluna do Paulo, do D. Pedro V ... E isto antes da Sessão Pública que começou às 18 horas de quinta-feira, onde vieram ainda mais amigos ...

Nessa sessão, houve uma conferência e dois testemunhos. A conferência, *A herança memética de Paulo Abrantes*, foi feita por Roger Abrantes (Etologisk Institut, Dinamarca), irmão do Paulo, que desenvolveu o tema — nosso conhecido do seu artigo publicado na *Educação e Matemática* n° 81 — de um modo informal, cruzando-o com recordações da juventude dos quatro irmãos, salpicando-o de humor com que tentava cortar a emoção ... Em seguida, Maria de Jesus Luelmo (Espanha), que trabalhou com o Paulo nomeadamente em encontros internacionais de Matemática e António Vasconcelos, professor de Música que o conheceu como Director do Ensino Básico, deram-nos dois testemunhos muito fortes da personalidade multifacetada de Paulo Abrantes. O concerto de piano, por Bernardo Sasseti, fechou o primeiro dia com chave de ouro.

Este olhar sobre o encontro já vai longo mas, quem chegou até aqui, permita-me mais dois ou três comentários que não resisto a fazer. Na tarde do segundo dia, a Ana Paula Canavarro, ao *apresentar* a Leonor Santos na conferência sobre Avaliação, referiu as *vicissitudes geográficas* que em tempos levaram a Leonor e o Paulo a efectivarem-se em escolas de terras diferentes na Margem Sul, tendo o Paulo escolhido o Barreiro. Aí, confesso, distraí-me. Revi o Paulo a chegar à minha escola Secundária dos Casquilhos — então chamada Secundária do Barreiro — em 79/80, num grupo de novos efectivos de Matemática. Chegaram e encontraram a delegada do grupo já *eleita*: era eu ... Depressa conquistou professores, alunos, funcionários, naquele seu jeito tão particular de tratar os outros. Esteve lá só um ano, mas fez amigos, projectos ... Lembro-me de o ver, na sala de professores, com o Raul Fernando, arquitectando o M7 ... Voltou passados três anos, já então estava na Faculdade de Ciências e trabalhámos juntos na orientação de estágios do Ramo Educacional. Ainda há pouco tempo, alunos encontrados por acaso nas ruas do Barreiro perguntavam pelo Paulo ...

Depois da conferência plenária de encerramento, tão justamente feita por Ubiratan D'Ambrosio — e como faz bem ver alguém que anda há tanto tempo nestas lides ainda lutar, ainda acreditar ... —, o Henrique Guimarães encerrou os trabalhos com algumas poucas e claras palavras. Terminou dizendo: o encontro acabou. Pois ... acabaram as sessões ... Que eu sei que para ti, Henrique, e para muitos de nós, encontros assim não acabam é nunca ...

E sabem como faço a avaliação destes dois dias? Tenho praticamente a certeza de que o Paulo teria gostado muito deste Encontro.

Guilhermina Lobato

Caminhos e encruzilhadas: um título e um propósito

Depois de uns dias, lembrança, e partida com compromisso. Lembrança de dois dias intensos, e partida de uma viagem sem retorno de uma comunidade que respira, contagia e aprofunda para construir novas notas na Educação matemática. Lembrando, não podia deixar de pensar nos abraços de chegada. Finalmente chegou. Tudo vai acontecer bem. O encontro irá ter sucesso, porque foi bem preparado. E foi aberto com majestosa pontualidade e Ana Paula Canavarro chega pouco tempo depois com tudo o que eu precisava ... Após a sua abertura, o HM Guimarães, apresenta o livro de textos de Paulo, que compro imediatamente no *break*. Uma grande oportunidade para refrescar desejos de uma comunidade acordada e cheia de desenvolvimentos colectivos. Isto mostra como o Paulo não deixou que passassem desapercibidas as acções que implicam mudanças educativas na Matemática. A Matemática do mundo real, o currículo centrado na resolução de problemas, o desenvolvimento de competências matemáticas para todos. Do outro lado das portas, o complemento óptimo: a exposição que traz a emoção e a vida. As sacolas e cartões de eventos ... . O futebol junto aos livros, as fotos e os textos. Permanecem aí, nos dois dias para que o passeio pela vida humana esteja junto da vida de trabalho.

As conferencias plenárias dão oportunidade para reflectir sobre muitos aspectos da Educação matemática que tornam presente o Paulo. Gostei especialmente de ver como Schoenfled reconhece o valor do currículo, as conexões, a comunicação e o currículo praticado.

Todas as conferencias em paralelo dão pé para desenvolver vivências e fazer escolhas particulares ... Ressalto uma emoção bem especial: o francês Jean Marie Kraemer, falando em português sobre a avaliação matemática na Holanda onde ainda trabalha. O que mais poderia sonhar para mostrar a homenagem ao Paulo! Os anfiteatros cheios foram uma amostra da jóia do evento. O aluno da escola esteve presente em todas as falas que acompanhei, assim como o desenvolvimento profissional dos docentes na viagem do constante aprender que se reflecte neste evento em particular.

E no meio deste fluxo de reflexões, o Eduardo Veloso falando numa sessão especial que ele chamou de *diferente*, em que a emoção chega à pele. Vou lembrar toda a vida o memeplex do Paulo feita por um português bem especial, o seu irmão Roger Abrantes. Não ri tanto numa comunicação, nos últimos anos! O trabalho em equipe, liberdade de pensamento, procura da excelência, direito de expressão, educação pela vida, entusiasmo, melhoria gradual, estamos de acordo no desacordo ... Aproveitei para chorar com a M. Jesus Luelmo, compartilhando discussões, cervejas, carinhos,... nesse dialogo ibérico que o Paulo procurou. Lembrança, para não esquecer! Presença viva de amizade e respeito por tantas ideias consumidas.

Como quem acaba, avaliando, a Leonor Santos mostrou um novo valor do trabalho de avaliação no Mat789, evidenciando o seu caracter não definitivo e o contexto de aprendizagem. Se avaliar é representar o que acontece no contexto, este relato pode indicar o relato de quem avalia o encontro, mas, como se diz, não tem valor se não existir uma revisão da segunda produção. Desejo que os leitores que destas linhas, façam esta revisão.

Chegou o momento da fala final. O discurso do Paulo torna-se ponto de partida no momento em que o Ubiratán me surpreendeu com uma fala sobre a ética, partindo do que o Paulo falou em Blumenau. Fiquei com a idéia da necessidade de que a nossa comunidade de Educação matemática siga a ética do respeito pelo outro, da solidariedade e cooperação com o outro. Juntar motivação e avaliação, fazer com os alunos um trabalho agradável, não é só usufruir do papel forte da Matemática para conseguir isso, mas implicar-nos no que Ubitatán chamou "elucidar a natureza do conhecimento". Os nossos alunos vão receber as nossas ilusões a partir deste encontro? Acho que sim. Não dá para pensar que não vamos deixar este testemunho!.

Joaquin Gimenez
Catedrático de Didática de Matemática
Universidade de Barcelona, aprendiz do Paulo Abrantes

Aprender com os outros

Se mais méritos não tivessem, as avaliações internacionais fiáveis, promovidas pela OCDE, provocam reacções nos países e convidam as sociedades a reflectir, a partir das comparações estabelecidas que têm ido para além dos resultados escolares. A leitura dessas reacções e análises podem ser um bom contributo para a nossa própria reflexão e daí termos seleccionado o artigo *Education: à l'école des autres*, que analisa as deficiências do ensino em França, caracterizando ideias chave dos sistemas educativos dos países com melhores resultados.

Em França, o quadro dos resultados tem algumas semelhanças com o nosso País, no que diz respeito à saída precoce do sistema escolar. Em cada ano, cerca de 150000 jovens (mais do que um em cinco) abandonam a escola antes da obtenção de um diploma. Os autores deste artigo afirmam que estes são as vítimas mais visíveis do sistema, mas que há outras, provocadas pela obsessão, pela selecção e pela competição. Contrariando a ideia de que esse seria o preço necessário a pagar para reunir os melhores, concluem que os alunos são médios e apenas 37% dos jovens acedem ao ensino superior, contra 75% na Suécia e uma média de 51% nos países da OCDE. Admitem que outros, como a Finlândia, Canadá e a Inglaterra fazem melhor. Em Portugal, segundo os dados mais recentes do Ministério da Educação (GIASE), a taxa de escolarização no ensino superior, em 2002/03, apesar de ter quintuplicado em relação a 1994/95, o que traduz uma melhoria significativa, era de apenas 28,3% e as taxas de retenção e não conclusão são muito elevadas.

Afirmam ainda estes autores que a Escola francesa vai mal, pois permanece uma máquina enorme, com um modelo ultrapassado e sem grandes resultados. A ideia é aprender com os outros e, por isso, questionam: Quais são as receitas fundamentais de países onde a escola vai bem? O que fazem que nós não fazemos?


L'ÉVÉNEMENT
Les bonnes recettes venues d'ailleurs

Education : à l'école des autres

Une école de fous où les enseignants, souvent démoralisés, dépassés, ne savent plus comment remplir leur mission. Où, selon l'OCDE, nos ados détiennent le record de la souffrance au travail. Et pour quel résultat ? L'échec scolaire est massif. Chaque année, 150 000 jeunes décrochent sans diplôme en poche, soit plus d'un sur cinq !

Il faut bien l'admettre. D'autres font beaucoup mieux que nous – Finlande, Canada, Royaume-Uni, etc. – avec des méthodes moins brutales. A l'heure où notre ministre de l'Education hésite encore à lancer son train de réformes, quelles leçons peut-on tirer de leurs expériences ? Voici les recettes fondamentales de pays où l'école marche bien.

In Le nouvel Observateur, 25-31 Agosto 2005

Dos EU e Canadá, salientam a atitude geral, o clima de encorajamento, que se baseia na ideia que a autoconfiança é a chave do sucesso. O aluno deve antes de tudo acreditar nas suas capacidades e para isso tem necessidade que os adultos o encorajem. Salientam ainda mais duas ideias: a de manter os alunos na mesma turma ao longo da sua escolaridade, evitando a retenção, com apoios adequados; e a importância dos alunos construírem um projecto e se conhecerem melhor para se poderem orientar.

Da Finlândia, salientam a revolução nas atitudes provocada pela descentralização, iniciada nos anos 70, em que o trabalho em equipa entre os professores se tornou a regra. Essencialmente, as escolas têm muita autonomia e usam-na bem, sendo equipa pedagógica a responsável pela boa execução do projecto educativo.

Da Grã-Bretanha, que a melhoria significativa nos resultados escolares (muito significativa na Matemática), nos últimos dez anos, se deveu a um percurso inverso: currículos e exames nacionais e reorganização da inspecção escolar com maior controlo sobre o trabalho efectivo de cada escola.

E nós por cá? Acreditamos que podemos resolver os nossos problemas se reflectirmos, à luz da nossa cultura, sobre boas práticas, nossas e dos outros.

Porque não começar por combater o nosso pessimismo habitual, promovendo a tal atitude geral de valorização da cultura e da qualificação como na Finlândia, a cultura de encorajamento existente no Canadá e EUA e o auto controlo nas escolas?

Isabel Rocha
Manuela Pires

Blogs

Apesar de já há muito tempo ouvir constantemente falar em *blogs* ainda não tinha tido oportunidade para explorar este assunto.

Depois de assistir no Profmat 2004 a uma sessão muito interessante do nosso colega José Manuel Varandas, *Quem quer ser blogista?* e de perceber a utilização que foi feita com os alunos decidi, logo que tivesse tempo, procurar saber mais alguma coisa sobre os tão falados *blogs*.

Pesquisei e naveguei por alguns dos inúmeros *blogs* existentes na Internet.

Procurei uma definição e surgiram-me várias.

Numa das páginas que consultei diz-se, entre outras coisas, que um *blog* é um espaço colaborativo, um local onde colocar ideias, notícias, *links*, uma página da rede onde se pode escrever o que se quiser e onde os visitantes podem ler e fazer os seus comentários directamente. É um local onde se podem recolher e partilhar coisas que consideramos interessantes, sejam elas, opiniões, textos, imagens, *links* ... ou que se utiliza apenas para organizar as próprias ideias.

Visitei e consultei vários, começando pelos mais conhecidos sobre assuntos variados, como arte, política, literatura, em particular poesia, para tomar contacto com este meio de comunicação. Depois, parti para a pesquisa de *blogs* relacionados com a Matemática.

Comecei por páginas de Portugal e encontrei um *site* com *blogs* portugueses ditos de educação em:

`http://blogsempt.mywpages.com/class005.php.`

Tem *blogs* de escolas, de professores e de alunos, entre outros.

Estão aí registados seis, na área da Matemática, aos quais se pode aceder directamente através do endereço

`http://blogsempt.mywpages.com/class042.php.`

Entre eles, encontra-se um muito bom, que já tinha consultado logo que tive notícia da sua criação, chamado *Geometria*, dinamizado por Arsélio Martins e Aurélio Fernandes, onde se podem encontrar, usando as palavras dos autores, "alguns problemas, construções e animações de geometria que nos foram sugeridos pelo estudo ou por necessidades do ensino — básico e secundário. As ilustrações e construções dinâmicas são feitas, sempre que possível, com recurso ao Cinderella".

O endereço é:

`http://geometrias.blogspot.com/`

Pesquisando na Internet usando como critério *blog maths*, são imensos os *sites* que se encontram, muitos deles com a característica comum de serem ponto de partida para outros. Por exemplo,

FUTUREOFMATH
IAMINNOVATIVECREATIVEINVENTIVETHEFUTUREOFMATH

`http://www.misterteacher.com /futureofmath/blogs.html`

mathforge

`http://www.mathforge.net`

About

`http://math.about.com/` (já agora ... veja também neste *site* em *multiplication tips and tricks*, como fazer a tabuada dos 9 usando os dedos) ou ainda:

`http://www.unimodular.net/blog/`

`http://sixthform.info/maths/index.php`

Sabia da existência de vários *sites* onde é possível criar *blogs*. Encontrei uma dessas páginas que permitia a criação de um, sem custos e em menos de cinco minutos, bastava para isso seguir apenas três passos: criar uma conta; escolher um título e um endereço; escolher um template. O melhor era mesmo experimentar. Tentei e resultou mesmo! O *blog* ficou criado, não demorou cinco minutos mas sim bastante mais, pelo simples facto de que todos os endereços que fui escolhendo darem a indicação de endereço inválido. Foi difícil até ter arranjado um que finalmente foi aceite.

Algumas páginas que permitem a criação gratuita de blogs:

`http://www.anossaescola.com/blog/`

O Centro de Competência Nónio da Beira Interior disponibiliza os *Blogues de Escola*, onde qualquer professor que pretenda usar um *blog* como recurso educativo pode criar o seu.

`www.blogger.com`

`http://www.myblogsite.com/`

`http:/blogs.sapo.pt/`

Navegando na Internet

O *Sudoku* é um dos jogos de que mais se fala no momento. Alguns dos nossos jornais fazem a sua publicação. Na Internet existem várias páginas onde pode jogar on-line escolhendo o nível de dificuldade

`http://www.websudoku.com/`

Nesta página, os níveis possíveis são: fácil, médio, difícil e muito difícil, mas pode recorrer a alguma ajuda, muito útil pelo menos para quem está a jogar pela primeira vez.

À procura de *sites* sobre um determinado conteúdo de geometria fui parar um pouco inesperadamente ao *site* da British Origami Society

`http://www.britishorigami.org.uk/`

Este *site*, bastante completo para quem se interessa por este assunto, contém vários artigos sobre *origami* e sugestões práticas de como fazer.

Veja alguns objectos espectaculares na Galeria em *origami folds* ou na exposição realizada na embaixada do Japão em Londres.

No site *What special about this number?* em:

`http://www.stetson.edu/~efriedma/numbers.html`

encontra uma longa série de números inteiros menores que 10000 com uma característica associada a cada um deles. A explicação dessa *propriedade* é feita por ligação directa a

`http://mathworld.wolfram.com`

No *site Problem Corner* em:

`http://endeavor.macusa.net/mathpropress/`

foi organizada uma recolha de 20000 problemas que foram aparecendo em revistas ou em concursos, por exemplo, Olimpíadas da Matemática, publicados antes de 1990.

Pode pesquisar usando vários critérios, como por exemplo, o ano ou o nome da revista a partir de uma lista disponível no *site*.

Publicações APM

O professor e o desenvolvimento curricular

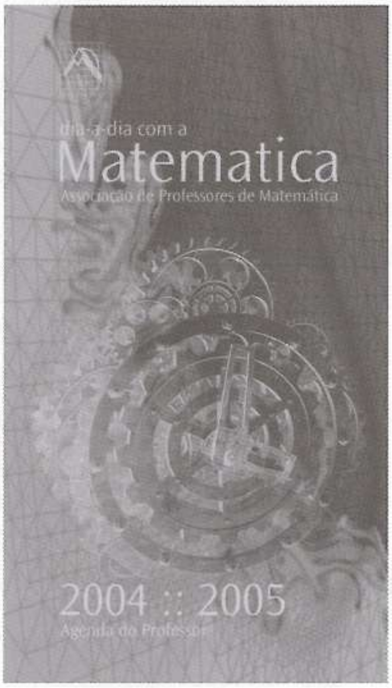
392 pp. APM, Julho 2005
Sócio 14,00€ PVP 28,00€

O GTI apresentou o livro *O professor e o desenvolvimento curricular* no V Congresso Ibero-americano da Educação Matemática — CIBEM que se realizou nos dias 17 a 22 de Julho na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Esta publicação é resultado da análise e discussão de práticas curriculares dos diversos colaboradores do Grupo de Estudos, integrado no GTI, e que tem vindo a desenvolver o seu trabalho, nesta segunda fase, desde Outubro de 2002.

Enquadrado pela investigação sobre as práticas profissionais o Grupo de Estudos mantém a orientação inicial de trabalhar de modo colaborativo e de envolver professores de todos os graus de ensino.

Com esta publicação pretendemos contribuir para o questionamento e a reflexão sobre as práticas curriculares, bem como evidenciar a importância que o professor tem no desenvolvimento curricular. Desejamos também que constitua uma homenagem ao trabalho que o Paulo Abrantes desenvolveu com os professores no âmbito do currículo.



Dia-a-dia com a Matemática 2005/2006
Agenda do Professor

Anabela Gaio, Idália Pesquita e Ilda Rafael (Orgs.)
156 pp. APM, Setembro 2005

Como vem sendo hábito, no início deste ano lectivo a APM lançou a agenda Dia-a-Dia com a Matemática. A estrutura da agenda mantém-se igual à do ano anterior, continuando a incluir no final de cada mês actividades lúdicas que poderão ser utilizadas pelos professores. A equipa que a organiza associou-se a algumas comemorações da APM tendo decidido incluir, no final de cada mês, actividades retiradas de publicações da Associação, algumas das quais entretanto esgotadas.

Um olhar crítico sobre as provas de exame de Matemática do 9° ano

Ana Paiva e João Janeiro

Junho/Julho de 2005. Mais um ano lectivo que termina, sendo este marcado por uma novidade: o regresso de exames no 9° ano. Foram várias as intervenções, inclusive na revista *Educação e Matemática*, que se pronunciaram sobre a adequação destes exames à reorganização curricular que este ano abrangeu todo o ensino básico.

Parece-nos agora ser pertinente fazer uma reflexão sobre a prova de Matemática propriamente dita e os seus critérios de classificação. A nossa atenção é mais focada na primeira chamada, pois foi esta a realizada pela quase totalidade dos alunos (99,8%) e a que, consequentemente, envolveu um número muito maior de professores classificadores. No entanto, algumas referências à segunda chamada terão aqui o seu lugar, sobretudo em termos comparativos. Referir-nos-emos à prova de um modo global, para depois vermos em pormenor alguns itens (da primeira chamada) que originaram alguma polémica e suscitaram maior dificuldade aos professores classificadores.

A análise dos resultados alcançados pelos alunos neste exame é sem dúvida outro dos aspectos que nos merece toda a atenção. Neste momento só é possível fazê-lo em termos gerais, pois não é ainda conhecido um estudo estatístico que nos revele quais os itens que obtiveram maior sucesso e maior insucesso. Terminamos este nosso olhar crítico com os depoimentos de dois alunos que realizaram a primeira chamada.

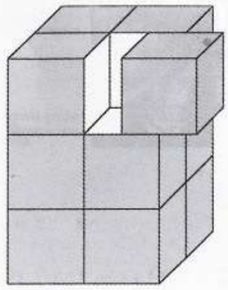
A prova

O conteúdo da prova (primeira e segunda chamadas) está, na generalidade, de acordo com as actuais orientações curriculares (currículo nacional e programa de Matemática em vigor) envolvendo fundamentalmente aprendizagens específicas do 9° ano. Na resolução dos items, os alunos tinham de recorrer a conhecimentos e capacidades básicas adquiridas ao longo da sua escolarização. Esta prova pressupunha que os alunos tivessem trabalhado adequadamente, ao longo do ano, todo o programa do 9° ano (é possível que isso não tenha acontecido em todas as escolas no presente ano lectivo, em virtude do início tardio das aulas resultante, como é sabido, de problemas verificados na colocação de professores). Pressupunha também que, em especial ao longo do 3° ciclo, os alunos tivessem desenvolvido as competências de resolução de problemas, raciocínio e comunicação, tal como o programa e o currículo nacional estabelecem.

Agradou-nos a existência, nestas provas, de diferentes tipos de questões: itens fechados, de escolha múltipla e de resposta curta, e itens abertos. Encontrámos uma maior incidência nos domínios *Geometria e Medida* (cerca de 40%) e *Álgebra e Funções* (cerca de 35%). Em termos do tipo de competências, as provas incidem sobretudo no *conhecimento de conceitos e procedimentos* (cerca de 50%) e na *resolução de problemas* (cerca de 30%). Se, em relação aos domínios temáticos, o peso relativo de cada um coincide com a informação anteriormente divulgada, já alguns considerarão excessiva a predominância da avaliação dos conhecimentos em relação a outros tipos de competências, tais como o *raciocínio* e a *comunicação* (cerca de 20% no total).

As provas apelam à autonomia e ao sentido crítico dos alunos, assim como a capacidades relacionadas com a representação gráfica e a visualização espacial. Estes aspectos assim como a diversidade de situações apresentadas são positivos. Várias questões exigem algum trabalho de interpretação e análise das situações. Alguma exigência poderia ser dispensável numa situação de exame. É o caso de se pedir, no item 9 da primeira chamada e no item 6.1. da segunda chamada, a conservação de quatro casas decimais nos diferentes arredondamentos efectuados em cálculos intermédios. Contudo, o grau de dificuldade global das duas chamadas, bem como a sua extensão, parecem-nos aceitáveis. Importa no entanto salientar um aspecto relevante que as

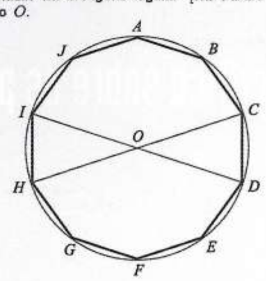
4. Pintaram-se as seis faces de um prisma quadrangular regular antes de o cortar em **cubos iguais**, tal como se pode observar na figura.



Se escolheres, ao acaso, um desses cubos, qual é a probabilidade de o cubo escolhido ter **só duas faces pintadas**?
Apresenta o resultado na forma de uma fracção irredutível.

item 4

7. Na figura está representado um **decágono regular** $[ABCDEFGHIJ]$, inscrito numa circunferência de centro O.



Os segmentos de recta $[ID]$ e $[HC]$ são diâmetros desta circunferência.

7.2. Ao observar a figura, a Rita afirmou:

«A amplitude do ângulo CDI é igual à amplitude do ângulo CHI.»

Uma vez que a Rita não tinha transferidor, como é que ela poderá ter chegado a esta conclusão?
Justifica a tua resposta.

item 7.2

distingue: a natureza dos itens com que o tema *Áreas e Volumes* foi avaliado nas duas chamadas. Enquanto na segunda chamada se pediu o cálculo do volume, em m^3, de um determinado prisma, na primeira chamada pediu-se para mostrar algebricamente, sem concretização das variáveis presentes, que era válida uma certa relação entre volumes de sólidos. Este facto introduz, quanto a nós, um certo desequilíbrio entre as duas provas, uma vez que nenhum item da segunda chamada tem idêntica exigência de abstracção nem avalia a capacidade de demonstração. Estranhamos uma tão grande diferença entre as duas chamadas.

Para uma análise mais pormenorizada, centraremos a nossa atenção em alguns itens da prova da primeira chamada.

Item 4

Tratando-se do único item da prova sobre cálculo de probabilidades, não se compreende por que razão foi escolhido um enunciado em que a visualização espacial interfere tão fortemente com o que pensamos ser o principal objecto de avaliação: a determinação da probabilidade de um acontecimento como razão entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis. Para além disso, apenas é dito ao aluno que apresente o resultado na forma de fracção irredutível e nenhuma justificação lhe é pedida, o que nos parece inadequado. Por outro lado, parece ter havido um *esquecimento* na elaboração dos critérios de correcção, quando se contempla a hipótese de o aluno ter considerado um número de casos possíveis correcto e ter errado o número de casos favoráveis, e não se contempla a hipótese contrária.

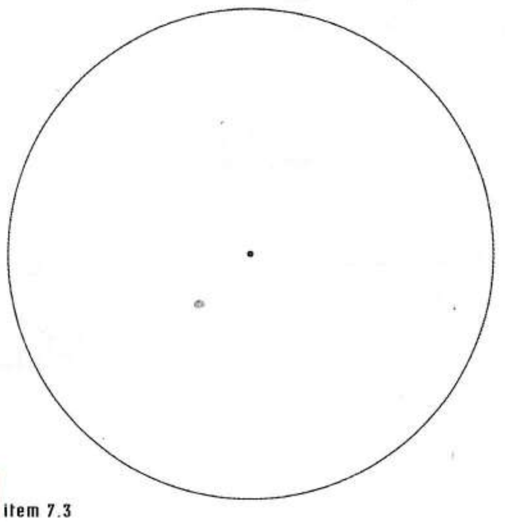
Item 7.2

O objecto de avaliação deste item inclui predominantemente a *comunicação matemática*, que está intimamente relacionada com o uso da língua portuguesa e que, como se sabe das provas de aferição, "é a competência em que os alunos revelam piores níveis de desempenho, em qualquer ano de escolaridade"[1]. Por isso, as dificuldades de expressão e a falta de clareza evidenciadas nas respostas foram tais que, na maioria das vezes, impediram aos correctores a compreensão da justificação apresentada pelos alunos ou não lhe permitiram atribuir senão uma cotação diminuta.

Item 7.3

Neste item, verificaram-se dificuldades relacionadas não só com a sua formulação, mas também com os critérios específicos e a insuficiência de exemplos de classificação. Admitindo que por "material de desenho" se entende o indicado na informação n° 2/05, de 18 de Janeiro, do GAVE, isto é, régua graduada, compasso, esquadro, transferidor, lápis e borracha (ou mais precisamente *material de desenho e medição*...), e tendo presente os critérios de classificação definidos, perguntamos como enquadrar e classificar as respostas de alunos que, por exemplo, apenas utilizaram lápis e transferidor e mediram ângulos ao centro de 120°? Os alunos que utilizaram este processo e tiveram a sorte de possuir um transferidor cujo raio era próximo do da circunferência fornecida, não deixaram linhas auxiliares no desenho pela única razão de que não as utilizaram. Que sentido tem, neste caso, pedir-lhes para não apagarem essas linhas? Estes alunos correram o risco de lhes ter sido atribuído neste item apenas dois pontos, num total de sete, a menos que os professores classificadores tenham considerado *linhas auxiliares* os pontos que os alunos marcaram com recurso ao transferidor — e isto apenas no caso de esses pontos permanecerem visíveis, o que nem sempre aconteceu[2]. Não nos alongaremos mais sobre a dificuldade em observar e compreender, na resolução deste item, a *evidência* da relação entre as linhas auxiliares exibidas por muitos alunos e um processo de construção do triângulo equilátero.

7.3. Com o auxílio de material de desenho, inscreve, na circunferência abaixo desenhada, **um triângulo equilátero.**
O ponto que está marcado no interior da circunferência é o seu centro.
Não apagues as linhas auxiliares que traçares para construíres o triângulo.



item 7.3

11. Arrumaram-se três esferas iguais dentro de uma caixa cilíndrica (figura 1).

Como se pode observar no esquema (figura 2):

- a altura da caixa é igual ao triplo do diâmetro de uma esfera;
- o raio da base do cilindro é igual ao raio de uma esfera.

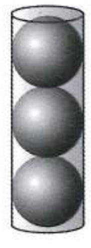


Figura 1

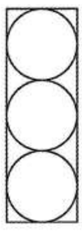


Figura 2

Mostra que:

O volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.

(**Nota:** designa por r o raio de uma esfera.)

item 11

Item 11

Apesar de o considerarmos interessante e adequado (segundo a nossa interpretação das orientações curriculares), este item exige um grau de abstracção e formalização superior ao que é normalmente trabalhado no 9° ano, com alunos de 15 anos (a grande maioria). Concordamos com a sua localização no fim da prova, mas consideramos que devia estar explícito no enunciado deste item que as dimensões dos objectos eram desconhecidas e que se pretendia que mostrassem que a relação era válida para quaisquer valores desde que, evidentemente, satisfizessem nas condições do enunciado. Esta nossa convicção ficou reforçada após a classificação das provas, em que se tornou evidente que nem todos os alunos compreenderam o que se pedia, tendo muitos começado por afirmar algo parecido com "Suponhamos que o raio da esfera mede 5 cm" e verificado a relação em causa, mas apenas nesse caso concreto. Para além disso, discordamos de pelos critérios gerais e específicos de classificação deste item, se atribuir uma cotação nula à resolução de um caso particular que resultasse de uma concretização realista dessa variável (por exemplo raio = 5cm) e que estivesse totalmente correcta. Neste caso, os critérios deveriam contemplar a atribuição de entre 1 e 4 pontos, já que a cotação máxima do item, que corresponde à demonstração pedida, no caso geral, feita em função da variável r (raio da esfera), é de 8 pontos.

Analisados alguns itens da prova, permitimo-nos *afastar a lupa* e voltar a uma perspectiva mais global focando agora um conjunto de aspectos merecedores da nossa atenção: o tipo de calculadora permitido, os itens de escolha múltipla sem penalização em caso de resposta errada e diferentes tipos de critérios de classificação.

Calculadora

A informação n° 2/05, de 18 de Janeiro, do GAVE veio esclarecer o objecto de avaliação da prova de exame de Matemática para o 9° ano, a sua caracterização, o material a utilizar e a duração, fornecendo inclusivamente exemplos de itens. Nela se informava, entre outros aspectos, que os examinandos deveriam ser portadores de "máquina de calcular elementar, com as funções básicas (+, –, ×, ÷, √), ou de máquina de calcular científica", não havendo qualquer referência a esta poder ser ou não *programável*. Posteriormente, em aditamento àquela informação, o Júri Nacional de Exames enviou a informação n°25/JNE/2005, onde se acrescenta que a recomendação anterior "não obriga o examinando a utilizar uma calculadora mais sofisticada do que a calculadora básica (com raiz quadrada), uma vez que o enunciado da prova inclui uma tabela trigonométrica. Também permite o uso da calculadora científica e não invalida o recurso à calculadora gráfica, dado que esta calculadora também é científica". Termina afirmando que "na prova em questão, não é permitida a utilização de calculadoras que tenham incorporados sistemas de comunicação".

Ora, não sendo de modo nenhum nosso propósito questionar que "todos os alunos devem aprender a utilizar não só a calculadora elementar mas também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos"[3] e estando totalmente de acordo com a afirmação de que "quanto ao uso da calculadora, a questão essencial está em saber quando é apropriado usá-la e, em seguida, ser competente em fazê-lo"[4], parece-nos, no entanto, que o assunto se torna mais delicado quando se trata de material autorizado mas não obrigatório para uma prova de exame. Tenhamos presente que uma calculadora gráfica, ou mesmo uma calculadora científica programável, permite obter as soluções de qualquer equação do 2° grau, sem que o aluno demonstre saber resolvê-la de outro modo. Ora, como os critérios admitiam a possibilidade de o aluno verificar as duas soluções e "referir que uma equação do 2° grau não tem mais do que duas soluções", fica-nos a dúvida se o que se pretendia neste caso era avaliar a capacidade de resolver uma equação de 2° grau por aplicação da fórmula resolvente. Como aceitar a falta de equidade provocada pelo item 10 da segunda chamada (resolução de uma equação do 2° grau) e pelos respectivos critérios específicos de classificação?

Itens de escolha múltipla

Haja alguém que nos explique por que razão se usa neste tipo de itens, no exame de Matemática do 9° ano, um critério geral de classificação totalmente diferente do que é usado no do 12° ano, onde se descontam as respostas erradas (cada resposta certa vale +9 e cada resposta errada vale −3). Onde está o carácter educativo de instruir os alunos do 9° ano para jogarem *ao calhas* em caso de dúvida ou até de desconhecimento da resposta, mas nunca deixarem de responder a este tipo de itens? A avaliação em exame final do ensino básico é também um jogo de sorte? Acrescenta-se que, havendo 4 itens deste tipo na prova da 1ª chamada, estão em jogo 19% da classificação total (já na 2ª chamada encontram-se apenas 3 itens de escolha múltipla, cuja cotação soma 13% da classificação total).

Critérios de Classificação

Os critérios de classificação desta prova contemplavam critérios de mais do que um tipo: por níveis de desempenho e por etapas de resolução. Esta opção pareceu-nos de alguma forma um *retrocesso* face às provas de aferição, cujos critérios de classificação consideravam exclusivamente níveis de desempenho. Na verdade, este tipo de critérios, tendo um carácter holístico, parecem-nos ser mais consistentes com o propósito de avaliar competências.

Se, no início da aplicação das provas de aferição, e muito em especial para os professores classificadores envolvidos, a utilização de critérios por níveis de desempenho originou alguma reacção e desconforto — todos estavam habituados a classificar testes considerando apenas etapas de resolução e cotações parcelares — a verdade é que, em itens abertos e com determinados processos de resolução menos previsíveis, todos já tinham experimentado a dificuldade de aplicar essas cotações parcelares e acabaram por reconhecer as vantagens dos níveis de desempenho. Assim, foi curioso notar agora, nomeadamente nas reuniões de supervisão no processo de classificação das provas, que as maiores dificuldades sentidas pelos professores pareciam vir da aplicação dos critérios definidos por etapas de resolução. Na verdade, parece que, com algum exagero, cada um de nós, perante diferentes respostas dos alunos, encontra sempre etapas que *deveriam* ter sido previstas e contempladas nesses critérios. Que razões poderão justificar a necessidade de utilizar critérios por etapas de resolução e "misturá-los" com critérios por níveis de desempenho?

Os resultados. E agora?

Os resultados a nível nacional das duas chamadas encontram-se resumidos no quadro 1. Verifica-se que aproximadamente 71% e 86% de alunos tiveram níveis inferiores a 3, respectivamente na primeira e na segunda chamada. Na globalidade, os resultados de exame foram negativos em aproximadamente 71% dos casos, apesar de 74% dos alunos terem ficado aprovados no 9° ano.

Na verdade, como é do conhecimento geral, esta prova foi contabilizada para a nota final de cada aluno com uma ponderação de 25%, percentagem esta que numa escala de 1 a 5 não permite descer as classificações finais do nível positivo para negativo. Assim, e apesar dos resultados desastrosos das provas de exame, a percentagem de alunos aprovados é animadora (74%). É no entanto inevitável que nos interroguemos sobre o futuro. No próximo ano lectivo, está previsto que a incidência do conteúdo do exame deixe de ser apenas nas aprendizagens do 9° ano para serem consideradas todas as do 3° ciclo. Quais serão as notas dos exames em 2006? Além disso, prevê-se que a percentagem da ponderação do exame passe para 30%. Teremos ainda menos aprovações?

Naturalmente, é do interesse de todos nós professores de Matemática, sobretudo os que trabalham com o 3° ciclo, independentemente do nosso (des)acordo individual com a realização destas provas, que os nossos alunos tenham melhores resultados. Ainda não dispomos de elementos de análise sobre o desempenho dos alunos nestas provas para podermos aí ancorar alguma reflexão mais profunda sobre o que estará a falhar. Não existem ainda dados disponíveis sobre os temas ou tipos de competências em que os alunos revelaram pior desempenho. Em todo o caso uma tal reflexão ultrapassaria o propósito deste artigo. Contudo, parece-nos ser um momento oportuno para reforçar a necessidade de se elaborarem estudos que permitam conhecer melhor os contextos educativos e as discrepâncias nos desempenhos evidenciados pelos alunos e assim constituir pontos de partida para práticas curriculares melhores e mais efica-

Quadro 1. Resultados nacionais dos exames de Matemática do 9° ano em 2004/2005

Nível	1	2	3	4	5	Total	% de alunos aprovados no 9° ano
1ª chamada	18 781	41 138	17 120	6 741	1 008	84 788	74 %
2ª chamada	89	76	21	6	0	192	42 %
Total	18 870	41 214	17 141	6 747	1 008	84 980	74 %

[Fonte: Gabinete de Imprensa do Ministério da Educação, 11/07/05] zes. Esta necessidade foi sublinhada pelo relatório nacional que comparou os resultados nas provas de aferição de 2001 a 2003[5]: Este relatório recomenda a elaboração de investigações "numa perspectiva construtivista, em que se avalia não só o produto, mas também o processo, deverão ter em conta questões fundamentais, tais como:

— implementação efectiva de actividades de ensino-aprendizagem que promovam o desenvolvimento de competências, de acordo com as orientações curriculares;

— desenvolvimento de uma avaliação integrada no processo ensino-aprendizagem, em consonância com o desenvolvimento das competências definidas como essenciais;

— contexto sócio-cultural da escola/agrupamento e seu meio envolvente;

— mobilidade do corpo docente da escola;

— formação inicial e contínua do corpo docente;

— papel atribuído aos manuais escolares e a outros recursos didácticos enquanto organizadores das aprendizagens.

Um outro aspecto que valerá a pena considerar na sua possível relação com estes resultados é a existência de dois documentos oficiais orientadores que foram publicados com 10 anos de diferença e que pressupõem lógicas e paradigmas distintos: o *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais* (2001) e o Programa de Matemática (1991). Enquanto este último obedece essencialmente a uma *lógica de ano* e a um paradigma que se esgota em perseguir objectivos específicos relacionados com listagens de conteúdos (tópicos), o primeiro esforça-se por revalorizar a unidade do ensino básico e de cada ciclo, ajustando-se a um novo paradigma baseado numa lógica de ciclo e de gestão curricular, que visa o desenvolvimento progressivo de competências dos alunos através de experiências de aprendizagem ricas e diversificadas. Estará a generalidade dos professores de Matemática a conseguir articular eficazmente as orientações curriculares destes dois documentos e a conduzir, na sala de aula, práticas adequadas ao desenvolvimento das competências essenciais?

O olhar dos alunos

Para terminar esta nossa análise, pareceu-nos útil deixar-vos um relato na primeira pessoa do que dois alunos que realizaram esta prova sentiram e pensam sobre a prova (primeira chamada) e sobre a experiência de realizar pela primeira vez um exame nacional. O Tiago, que teve 3 na classificação interna de frequência de Matemática e 1 no exame, e a Joana que teve 5 naquela classificação e 5 no exame.

"Eu fui despreocupado para o exame de Matemática do 9° ano, porque sabia que mesmo que tivesse negativa já estava passado. Fiquei um bocado surpreendido com a dificuldade da prova, porque esperava que fosse muito mais fácil por ser a primeira vez que havia. O exame de Português foi mais fácil do que o de Matemática, e isso está comprovado se as pessoas forem ver as notas.

No exame de Matemática tive dificuldade em perceber algumas questões, em especial o último problema, porque nunca tinha feito problemas deste género. Neste problema eu não consegui encontrar as medidas das esferas e da caixa, e por isso deixei em branco. Só depois do exame é que percebi que o problema não era para encontrar medidas, era para fazer através das letras, *r* para o raio, etc.

Neste exame, não senti nada de especial, porque não ia contar nada para a minha nota, a menos que tivesse 5. Achei que fizeram bem fazer os exames como fizeram (ser preciso BI, serem feitos à mesma hora, etc), assim é mais seguro para não haver fraudes."

Tiago Vidal, 15 anos

"Exame de Matemática ... Vinte e dois de Junho ... O dia que tantos ansiavam e que outros temiam, chegara finalmente.

Comparados com as provas de aferição, os exames foram durante todo o ano, o alvo de muita chacota por parte dos alunos, não só pelo peso que teriam na sua nota final, mas também pelo grau de dificuldade que acreditávamos ser baixo. Assim que folheei o exame pude constatar que não seria bem assim ... Acredito que ninguém estivesse à espera que certos problemas aparecessem no exame, e a ausência de uma equação do 2° grau foi igualmente uma surpresa. Contudo, achei os exercícios acessíveis e considero que o espanto de muitos ao verem o exame pela primeira vez, se deveu, não ao exame em si, mas ao facto de se ter formado nas nossas mentes uma ideia errada acerca do mesmo.

A matéria abordada fora leccionada durante as nossas aulas e incluída nos testes de avaliação. Julgo que grande parte das negativas verificadas se deveu a alguma falta de interesse e estudo por parte dos examinandos.

Penso também que os alunos que durante todo o ano trabalharam e se esforçaram por conseguir uma boa nota no final do 3° período e cuja transição lectiva não dependesse deste exame, deveriam ser dispensados, pois os bons alunos merecem ver o seu esforço reconhecido, os menos bons sofrem as consequências do seu desleixo ... "

Joana Rodrigues, 15 anos

Notas

1 In *Provas de Aferição do ensino Básico, 4°, 6° e 9° anos, Análise Comparativa (2001–2003) — Relatório Nacional*, DGIDC, 2004, p. 61.

2 Recomenda-se a consulta dos critérios específicos, em que se previa isso quando o triângulo estava desenhado com rigor mas sem apresentar as linhas auxiliares que evidenciassem o processo utilizado.

3 In *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais*, DEB, 2001, p. 71.

4 In *A Matemática na Educação Básica*, DEB, 1999, p. 39.

5 In *Provas de Aferição do ensino Básico, 4°, 6° e 9° anos, Análise Comparativa (2001–2003) — Relatório Nacional*, DGIDC, 2004, p. 65.

Ana Paiva e João Janeiro
ES/3 Padre António Vieira

Acerca dos fundamentos da Matemática

António M. Fernandes

A divulgação científica tem tido entre nós um peso diminuto. O caso da matemática é especialmente grave. A análise dos aspectos essenciais e substanciais associados aos fundamentos desta disciplina tem sido deixada a cargo de alguns personagens que, animados de um forte impulso literário não se têm coibido de produzir algumas peças exibindo a mais atroz incompetência científica relativamente ao tema. Este artigo é em larga medida motivado por mais uma dessas *contribuições*. Refiro-me a *Conhecimento, verdade e prova: um percurso pelas filosofias fundacionistas*, um texto recentemente publicado nas actas do V CIBEM, da autoria de Alexandre Pais.

As considerações deste autor são ecos de concepções erróneas que se têm propagado, em muitos casos por vultos responsabilizáveis, mas que urge desmistificar senão por outra razão, ao menos pelo respeito devido a uma argumentação racional e ao rigor factual, razões estas que não são menores.

Começando pelo fim: o autor tem como objectivo a apologia das *teses para uma ciência pós-moderna* de Boaventura de Sousa Santos. De acordo com essas teses o conhecimento científico, e o conhecimento matemático em particular, só podem ser legitimados socialmente estando, deste modo, na mesma posição que qualquer outra forma de conhecimento. Boaventura de Sousa Santos não é particularmente expansivo no que diz respeito ao caso da Matemática. O seu principal pseudo-argumento envolve precisamente os teoremas da incompletude de Gödel. Esvaziados do seu conteúdo matemático preciso, os teoremas da incompletude são geralmente descritos recorrendo à frase "a matemática não pode demonstrar a sua própria consistência". E esta frase é tomada como uma evidência que sustenta a ideia de que o próprio conhecimento matemático não é confiável. Uma tal conclusão, contudo, só é sustentável à margem da racionalidade do próprio argumento. A verdade é que os teoremas de Gödel são teoremas demonstrados no formalismo matemático, então ou a matemática é consistente e os teoremas da incompletude não acrescentam nada a esse facto ou, pelo contrário, a matemática é inconsistente e então não podemos confiar nos próprios teoremas de Gödel, o que nos impede de os utilizar em argumentos válidos.

A causa de Alexandre Pais é pois uma causa perdida, mas não é isso que importa aqui. O que importa é que se socorre de uma interpretação absurda dos programas fundacionistas e não raras vezes a uma mistificação dos conceitos envolvidos de modo a tornar necessárias as suas conclusões.

Este tipo de postura intelectual não pode ser ignorado e ao longo deste artigo tentar-se-á restituir ao tema o mínimo de dignidade de rigor factual e conceptual que o autor de *Conhecimento, verdade e prova* lhe subtraiu.

Kurt Gödel

A busca de fundações rigorosas

A exigência de que os conceitos matemáticos se fundassem em bases sólidas começou a ganhar um decisivo fôlego logo depois que Newton e Leibniz inventaram o cálculo diferencial, baseado na noção de *quantidade infinitesimal*. O carácter paradoxal da noção de infinitésimo, foi desde logo criticado enfaticamente pelo bispo George Berkely. Precisamente em 1734 ele publicou *The Analyst* uma síntese incisiva das suas críticas ao método newtoniano. O *cálculo* de Newton dependia de uma forte intuição física e não podia ser encarado como rigoroso de um ponto de vista matemático. Berkely toma como exemplo a dedução da regra de derivação do produto a que Newton chegou depois de utilizar o argumento que se descreve a seguir. Considerando duas quantidades x e y, suponhamos que ambas sofrem variações infinitesimais dx e dy. Para calcular a variação do produto $d(xy)$, podemos imaginar que esse mesmo produto varia continuamente de $(x - dx/2)(y - dx/2)$ até $(x + dx/2)(y + dx/2)$ pelo que

$$d(xy) = \left(x + \frac{dx}{2}\right)\left(y + \frac{dx}{2}\right) - \left(x - \frac{dx}{2}\right)\left(y - \frac{dx}{2}\right)$$

simplificando, obtém-se $xdy + ydx + dxdy$ e, como a quantidade $dxdy$ pode ser considerada nula, isto reduz-se a $d(xy) = xdy + ydx$.

A *dedução* de Newton enferma de dois problemas. Em primeiro lugar existe um certo grau de arbitrariedade em considerar a variação dx entre $x - dx/2$ e $x + dx/2$ e não, entre as quantidades (mais *naturais*) x e $x + dx$, por exemplo. (E o mesmo se aplica à variação dy.) Por outro lado, não sendo nulos nem dx nem dy, em rigor, não pode ser considerado nulo o produto $dxdy$ (mas este tipo de consideração é recorrente em Newton).

Apesar das críticas, os infinitesimais de Newton e os diferenciais de D'Alembert, continuariam a fazer progredir a análise, sobretudo devido à sua fertilidade conceptual. Contudo, e não obstante uma tal profusão de novos resultados, a verdade é que permanecia uma insatisfação relativa à falta de rigor metodológico. A geometria euclidiana revelava-se impotente perante a complexidade dos novos resultados e deixou-se invadir de forma crescente pela noção intuitiva de *variação contínua*, algo que na época correspondia a uma noção desprovida de qualquer rigor lógico-matemático. Este facto não passou despercebido a Bernard Bolzano (1781–1848). Este proporia uma verdadeira reforma metodológica e, de certo modo, as suas propostas acabariam por marcar indelevelmente o percurso para estabelecer as fundações rigorosas da Matemática.

O trabalho de Bolzano assinala um ponto de ruptura com o *estilo* do século XVIII, um estilo apoiado na *maneira geométrica dos antigos*, misturado com noções da *teoria do movimento*, com auxílio do qual, Leibniz, Newton, MacLaurin, D'Alembert e outros fundaram o *Cálculo*.

Bolzano reconheceu nesta metodologia uma circularidade logicamente insustentável — os argumentos da teoria do movimento só poderiam ser considerados rigorosamente estabelecidos se descritos na geometria (enquanto teoria do espaço). Deste modo, incorporar de modo essencial resultados da primeira na segunda, corresponde a violar uma prioridade lógica. Bolzano estava igualmente determinado em expurgar todo o carácter intuitivo das demonstrações matemáticas, sendo por isso conduzido a apontar a lógica e a aritmética como os meios para uma fundamentação rigorosa da Matemática.

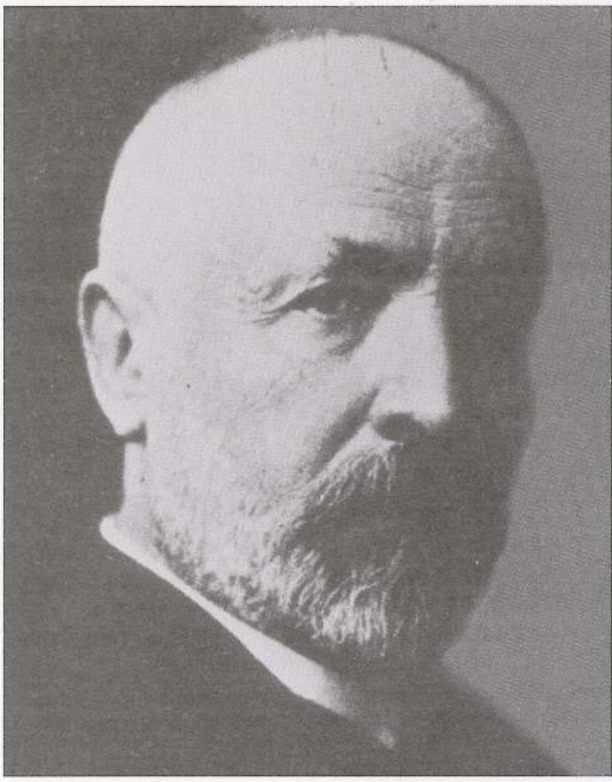
Depois de Bolzano iniciar-se-ia o programa da *aritmetização da análise*, conduzido por vultos como Weierstrass e Dedekind, que tinham em vista caracterizar todos os conceitos da análise, em particular a noção de *número real*, tomando como base a aritmética.

Em finais do século XIX Dedekind e Peano propuseram os axiomas que caracterizam a estrutura dos números naturais — a aritmética — e Dedekind, partido dos números naturais, descreveu uma construção rigorosa dos números reais em 1898. Este facto testemunha um inegável sucesso do programa de aritmetização da Matemática que, apesar de tudo, acabou por não satisfazer plenamente os anseios de rigor antecipados por Bolzano. A construção de Dedekind, apesar de tomar como base os números naturais e a aritmética não podia ser concretizada nessa estrutura. Uma noção mais fundamental que a de número — a de conjunto — era necessária. A teoria que governa esta nova noção estava entretanto em desenvolvimento, graças ao engenho de uma figura ímpar — Georg Cantor. Este matemático tinha em mente a formalização da noção de infinito actual, precisamente uma das noções que mais resistiu às investidas do engenho humano. (Falando acerca deste conceito David Hilbert referia-se-lhe como "a noção que em matemática mais necessita de esclarecimento.") Apesar da dificuldade em formalizar este conceito de modo aceitável, a verdade é que ele se encontrava cada vez mais presente na prática matemática através das noções de *limite* e *convergência*, bem como através da noção de *série*.

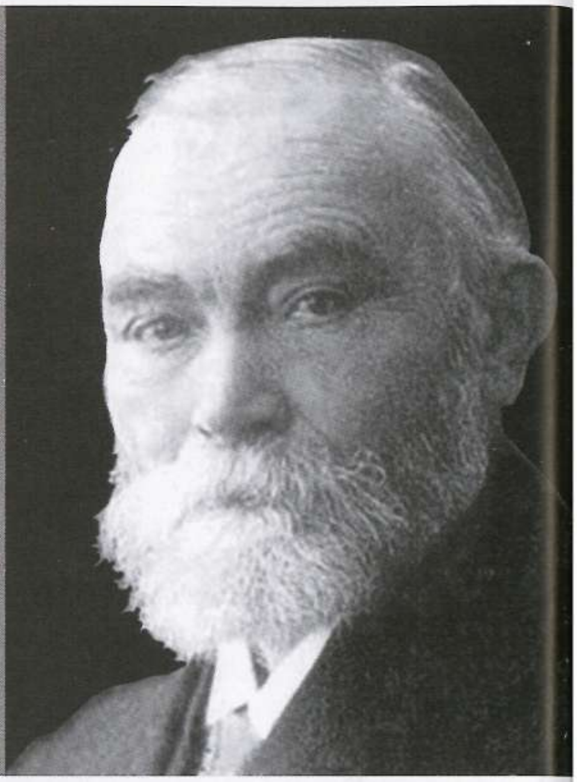
Estas questões motivaram diferentes aproximações por parte de matemáticos tentando criar fundações sólidas para o edifício matemático.

O programa logicista foi iniciado por Gotlob Frege. As motivações de Frege não eram essencialmente matemáticas, mas inegavelmente o sucesso do seu programa constituiria igualmente uma solução para o problema dos fundamentos. Frege tentava contrariar a opinião de Kant, segundo a qual a aritmética era essencialmente analítica *a posteriori*. A ideia de Frege era de que seria sintética *a priori*. Para isso ele teve que reformular as definições que Kant disponibilizou na sua *Crítica da razão pura* e, depois de redefinir "analítico *a priori*" como "definível em termos de noções puramente lógicas", Frege propôs-se demonstrar que a aritmética era analítica *a priori*.

Em 1902, Bertrand Russell, formulou o paradoxo com o seu nome que, em última análise, expunha a inconsistência do sistema de Frege. Uma vez que o paradoxo de Russell podia ser adaptado à teoria de conjuntos, ele acabou por expor também a inconsistência da teoria de Cantor.



Georg Cantor



Gotlob Frege

Reacções ao paradoxo de Russell

O paradoxo de Russell tornou clara a necessidade de uma reformulação da teoria de conjuntos e do programa logicista e a busca de uma teoria fundamental teve que ser re-equacionada. A reformulação do programa logicista foi assumida pelo próprio Bertrand Russell em parceria com Alfred Norton Whitehead. Eles conceberam o denominado sistema dos *Principia Mathematica*, um formalismo complexo que contornava o paradoxo de Russell. Mas ainda antes de Gödel ter apresentado os seus resultados já o programa parecia condenado ao fracasso, tanto por causa da sua extrema complexidade, como por depender cada vez mais da adopção de princípios cujo carácter exclusivamente lógico era controverso.

Outra reacção proveio da denominada corrente *intuicionista*. A sua visão restritiva impunha a desconsideração do infinito actual, já que atribuíam a esta noção a razão para os problemas com a fundamentação da matemática. Isto aliado a uma posição filosófica firme acerca da produção de conhecimento matemático, que impunha uma lógica mais restritiva que a lógica clássica não admitindo, entre outros o princípio do terceiro excluído, inviabilizando deste modo as demonstrações por redução ao absurdo. A visão intuicionista acabaria por ser considerada demasiado restritiva e por isso nunca teve particular sucesso.

A *terceira via* consistia no denominado *programa de Hilbert*. Este programa acabaria por ser o mais directamente afectado pelos resultados de Gödel pelo que o analisamos mais em detalhe a seguir.

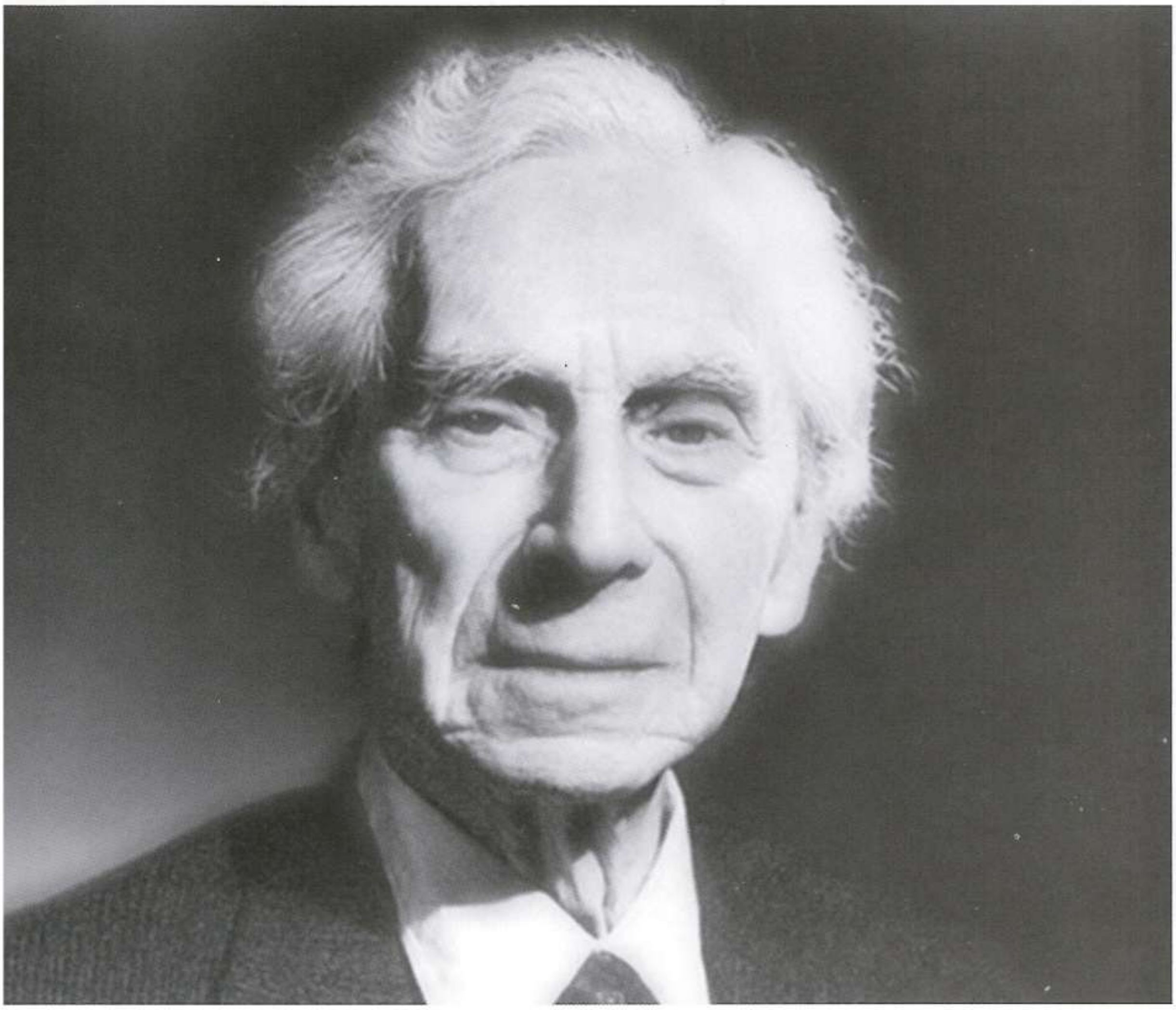
O programa de Hilbert

David Hilbert foi uma das mais influentes figuras na transição do século XIX para o século XX e grande parte da matemática do século XX foi directa ou indirectamente condicionada pela sua visão. Em 1899, ele publicou os seus *Fundamentos da geometria* um produto da concepção hilbertiana do método axiomático. Hilbert atribuía a este método uma importância fundamental. Numa conferência sobre os fundamentos da geometria em 1902 dizia

Qualquer ciência tem como ponto de partida um conjunto de factos suficientes e coerentes, a partir dos quais a ciência se organiza. Essa organização tem lugar recorrendo ao *método axiomático* (...)

A escolha dos axiomas pode ser (segundo Hilbert) algo arbitrária, mas dela devem exigir-se três predicados — *completude*, *independência* e *consistência*. Analisemos mais em detalhe cada um destes predicados.

A melhor forma de perceber o que está envolvido consiste em imaginar que os axiomas são proposições básicas



Bertrand Russell

acerca de certas entidades num determinado universo. Os axiomas são assim propriedades fundamentais dessas entidades. (Considerem-se por exemplo os axiomas da geometria plana, que descrevem propriedades básicas partilhadas por rectas e pontos.) Usando as regras lógicas podemos, partindo dos axiomas, deduzir outras proposições (os teoremas). Uma demonstração é um *objecto finito* por isso utiliza sempre um número finito de axiomas.

Uma axiomática é *consistente* se dos seus axiomas não se pode deduzir nenhuma contradição. É *completa* se dada uma qualquer proposição B acerca do universo de discussão, se tem que ou B ou "não B", se podem deduzir nessa axiomática.

Finalmente a axiomática é *independente* se não se pode manter o mesmo poder demonstrativo eliminando axiomas.

Hilbert atribuía à aritmética o mesmo valor fundacional que os intuicionistas mas, não estava disposto a abdicar de outras noções marginalizadas pelo programa intuicionista. O seu programa passava então por axiomatizar um fragmento da aritmética, que serviria como sistema fundamental, possuindo essa axiomática os três predicados enunciados anteriormente.

Em 1931, Kurt Gödel publicou o primeiro de dois resultados de incompletude que inviabilizaram definitivamente o programa de Hilbert. Em qualquer teoria aritmética com valor fundacional (no sentido de Hilbert) é possível formalizar a noção de consistência. Grosso modo existe uma proposição que *diz* "eu sou consistente", proposição essa que a teoria, se for consistente, não consegue demonstrar.

O que restou depois de Gödel

Depois de Gödel, ficou claro que nunca se poderia obter um sistema fundacional relativamente ao qual se pudesse estabelecer a sua própria consistência. Isso, contudo, não eliminou a busca de um sistema fundamental que descrevesse

David Hilbert

uma noção relativamente à qual todas as noções matemáticas se pudessem reduzir. Essa teoria fundamental acabou por ser a teoria de conjuntos depois de reformulada por Zermelo e Fraenkel, de modo a contornar o paradoxo de Russell. A aritmética, ou seja a estrutura dos números naturais é definida recorrendo à noção de conjunto indutivo originalmente descrita por Dedekind (e não recorrendo à noção de cardinalidade como erradamente refere Alexandre Pais). Como já se disse no início, os teoremas de Gödel não podem ser utilizados num argumento que tente estabelecer a falibilidade da matemática. Um tal argumento deverá sempre recorrer a evidência extra-matemática ou, então à exibição de uma contradição concreta. Ainda assim, o método axiomático assegura que a matemática é a forma mais segura de conhecimento. O surgimento de um eventual paradoxo na teoria de conjuntos poderia ser analisado, dada a natureza estruturada do conhecimento matemático, e eliminado com mais sucesso aqui que em qualquer outra forma de organizar conhecimento.

Algumas observações finais

Terminarei este artigo expondo alguns erros factuais e de apreciação cometidos por Alexandre Pais. Falarei apenas dos mais significativos tentando não ser tão exaustivo como a oportunidade sugere.

1. Alexandre Pais sugere que o programa logicista surge como uma tentativa de remediar o efeito do paradoxo de Russell sobre a teoria de conjuntos. De facto a teoria de conjuntos e os sistemas de Frege tiveram um desenvolvimento paralelo e origem em preocupações diferentes — Frege tinha uma preocupação eminentemente filosófica, enquanto Cantor procurava descrever os processos transfinitos. Por outro lado o paradoxo de Russell foi concebido para demonstrar a inconsistência do sistema de Frege que era uma teoria sobre objectos e conceitos e não uma simples versão da teoria de conjuntos.

2. O programa intuicionista/construtivista é assim designado, pois admite como fundamental a intuição acerca dos números naturais. Essa intuição fundamental providencia um ponto de partida para a construção do edifício matemático. Mas isto não significa, como diz Alexandre Pais que "desta forma o programa construtivista advoga que não é a lógica nem a experiência que determina a coerência e a aceitabilidade das ideias matemáticas, mas sim a intuição." De facto a lógica tem um papel decisivo e crucial no programa intuicionista, onde se impõem restrições severas à lógica clássica. Por outro lado o método de prova intuicionista é na sua essência algorítmico, o que deixa pouco lugar à intuição. Mais, em larga medida, o programa intuicionista substitui a noção de verdade pela noção de demonstração.

3. Finalmente gostaria ainda de comentar as observações que são produzidas relativamente às noções de verdade e de demonstrabilidade. Diz Alexandre Pais que "apesar de todas as afirmações demonstráveis serem verdadeiras, existem afirmações matemáticas verdadeiras que não se podem demonstrar." A afirmação, no mínimo, necessita de clarificação e em todo o caso, mesmo tomando-a como verdadeira não traduz um defeito do método axiomático. O método axiomático é finitista, por opção, porque é necessário ter a possibilidade de proceder a uma análise exaustiva dos argumentos em termos lógicos. A verdade, mesmo a verdade no sentido de Tarski, não é finitária. É por isso natural que uma noção e outra não sejam equivalentes. Estamos, contudo, perante um preço a pagar e não perante um defeito. Apesar de tudo, esse preço a pagar não é tão alto como Alexandre Pais faz crer e, para ver isso basta que se analise a questão no devido contexto.

Se considerarmos a frase "existem afirmações matemáticas verdadeiras que não se podem demonstrar." O que significa o excerto "afirmações matemáticas verdadeiras"? A ideia de que existe uma realidade matemática exterior, que a axiomática pretende descrever, não passa de uma po-

Ernst Zermelo

sição filosófica cujo conteúdo essencial é extra-matemático. Recordando que a Matemática é essencialmente a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, incluindo o axioma da escolha (teoria esta usualmente designada de ZFC) então, aquilo que se designa de *verdade matemática*, na sua essência confunde-se com aquelas que são as consequências dos axiomas de ZFC. Efectivamente, quando falamos em *expressões matemáticas* estamos a referir-nos a certas expressões numa linguagem formal, cujo propósito reside em descrever propriedades de certos *mundos*. Existe um *dispositivo* conhecido como *semântica de Tarski* que permite decidir quando uma certa propriedade P é verdadeira num mundo M (se isso acontece escreve-se $M \models P$). Esta *relação* $M \models P$, entre mundos e propriedades é, ao contrário do que refere Alexandre Pais, formalizável em ZFC, pelo que a verificação da verdade de P em M é, em última análise a demonstração em ZFC da relação $M \models P$.

É claro que se o mundo M tiver *estrutura suficiente*, o formalismo e, em particular, a noção de demonstração podem ser formalizados em M. O mesmo não sucederá com a relação de verdade em M (devido aos teoremas de Gödel). Mas esta situação não traduz o alcance que Alexandre Pais pretende dar à sua frase, pois para o fazer teria que se confundir *verdade matemática* com *verdade em* M, o que não pode acontecer.

Bibliografia

Cantor, Georg (1955). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover: NY.

Dales, H. G.; Oliveri, G. (Eds.) (1998). *Truth in mathematics*. Clarendon Press: NY.

Ewald, W. B. (1996). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of Mathematics* (Vol. I and II). Clarendon Press: NY.

Hart, W. D. (Ed.) (1996). The philosophy of mathematics. *Oxford Readings in Philosophy*. Oxford University Press: NY.

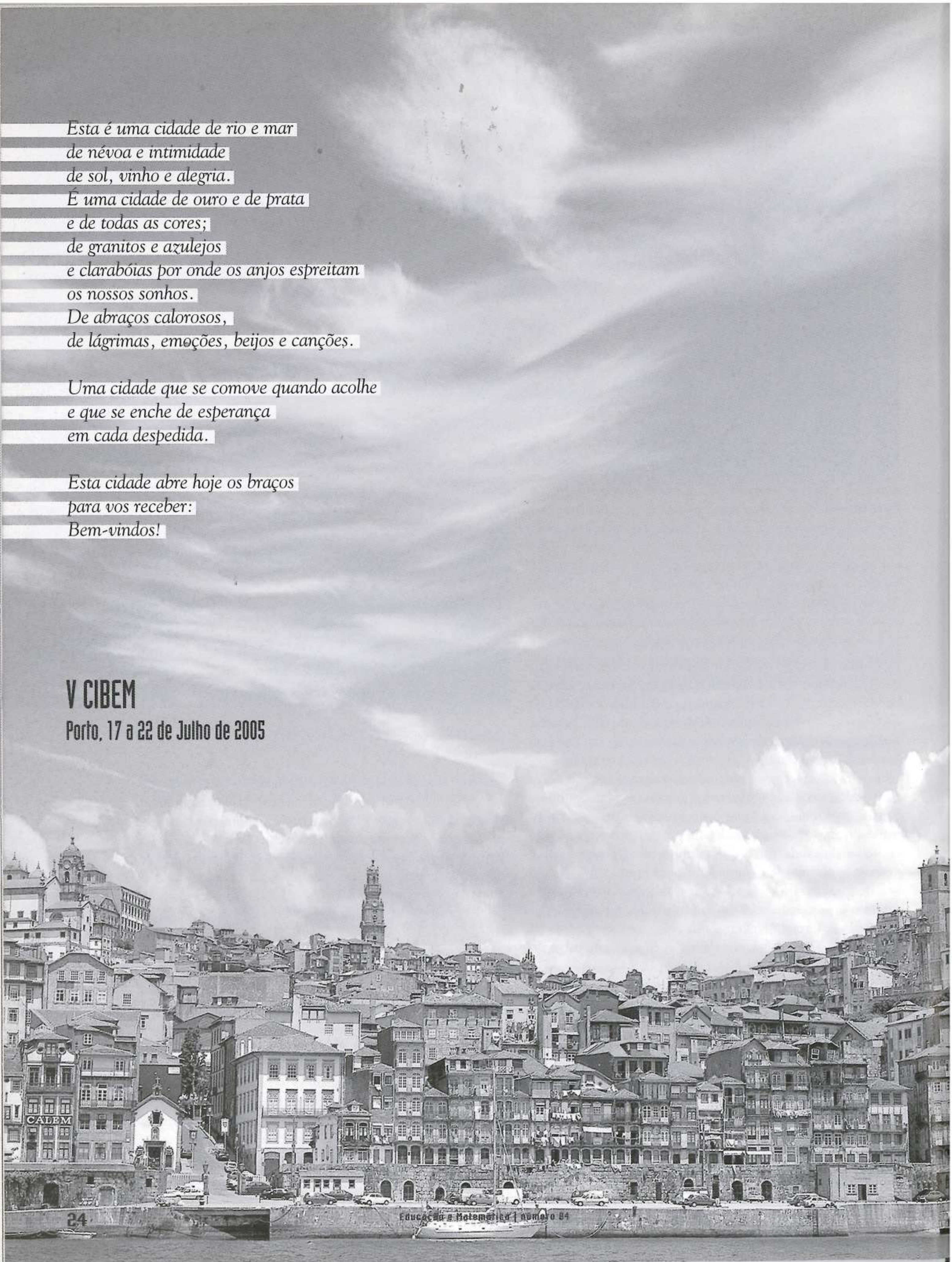
Kanamori, A. (1991). The higher infinite. *Perspectives in Mathematical Logic*. Springer: NY.

Pais, A. (2005). Conhecimento verdade e prova: um percurso pelas filosofias fundacionistas. In *Actas do V CIBEM* (CD-ROM). APM: Lisboa.

Reid, Constance (1996). *Hilbert*. Copernicus (Springer-Verlag): NY.

Schirn, M. (Ed.) (1998). *The philosophy of mathematics today*. Clarendon Press: NY.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico



Esta é uma cidade de rio e mar
de névoa e intimidade
de sol, vinho e alegria.
É uma cidade de ouro e de prata
e de todas as cores;
de granitos e azulejos
e clarabóias por onde os anjos espreitam
os nossos sonhos.
De abraços calorosos,
de lágrimas, emoções, beijos e canções.

Uma cidade que se comove quando acolhe
e que se enche de esperança
em cada despedida.

Esta cidade abre hoje os braços
para vos receber:
Bem-vindos!

V CIBEM

Porto, 17 a 22 de Julho de 2005

Foi assim que a cidade do Porto recebeu o 5° Congresso Ibero Americano de Educação Matemática que se realizou de 17 a 22 de Julho na Faculdade de Ciências da Universidade desta cidade. Durante quase uma semana, os espaços dos Departamentos de Matemática Pura e Aplicada, encheram-se de diálogos em castelhano e português, com sotaques daquém e de além Atlântico, como atestam as proveniências dos mais de 400 participantes: 187 de Portugal, 144 do Brasil, 65 de Espanha, 20 do México, 4 da Venezuela, 3 da Argentina e Bolívia, 2 provenientes de França e, finalmente, 1 representante de Cuba, de Marrocos, do Perú e dos Estados Unidos.

Feita a recepção e distribuição dos materiais na tarde do dia 17, um Domingo nublado, deu-se início ao Congresso com a sessão de abertura e a conferência plenária inaugural, num dos auditórios do Teatro do Campo Alegre, onde, aliás, decorreriam todas as sessões plenárias.

O ritmo dos dias foi sendo marcado pela diversidade dos trabalhos. Iniciavam-se às 9h com uma conferência plenária e seguiam-se os diversos grupos de discussão que se prolongavam até ao fim da manhã. Depois de um almoço rápido, a hora da *siesta* era esquecida pelo interesse que despertavam as conferências em paralelo. E a tarde continuava com painéis ou comunicações até cerca das 19h. Nos intervalos, ao longo do dia, o bar das matemáticas enchia-se para os *coffee break* ou as *happy hours* onde o tempo corria rápido entre conversas, encontros, convívio e animação.

Professores, educadores e investigadores da área da Educação matemática apresentaram os seus trabalhos, debateram, deram-se a conhecer uns aos outros. Um dos aspectos mais valorizados das conferências plenárias foi precisamente poderem oferecer panorâmicas sobre a Educação Matemática em países e contextos tão diversificados, como distantes estão, por exemplo, as realidades do Brasil e da Holanda, da Venezuela e de Espanha ...

Mas também foi importante darmo-nos conta que as realidades locais ou continentais, com as suas diferenças e contextos específicos, sintonizam entre si a um nível mais global naquilo que são os grandes problemas da educação em geral e da Educação matemática em particular. Por isso, não foi de estranhar que as grandes preocupações presentes se prendessem sobretudo com as *questões curriculares* (nomeadamente as de carácter transversal, como são a resolução de problemas, as tarefas de investigação ou a presença das novas tecnologias) e com os *professores* e a sua formação e desenvolvimento profissional. Houve também diversas comunicações sobre aspectos curriculares mais específicos, tais como geometria e álgebra.

Em termos de realizações, no V CIBEM aconteceram ... 5 Conferências Plenárias, 10 Conferências de convidados, 3 Painéis, 11 Grupos de Discussão, 100 Comunicações Orais, 116 Comunicações de Grupo, 3 Sessões Especiais, 49 *posters*.

Estiveram patentes várias exposições, entre as quais a marcante *Paulo Abrantes na Educação Matemática, passos de um percurso* que permitiu a quem a visitou, refazer passos e percursos da memória e do coração em companhia do Paulo, sempre tão presente entre nós e nos nossos trabalhos.

Foram apresentados três livros: *Paulo Abrantes, intervenções em educação matemática*, a tradução em língua castelhana dos *Principles and standards for school mathematics* e o livro O *professor e o desenvolvimento curricular*, todos disponíveis nas bancas, sempre em funcionamento, da APM ou da Sociedad Andaluza Thales. Foi ainda lançado, durante o CIBEM, o livro preparado especialmente para este Congresso e oferecido a cada participante, O *Porto e os seus matemáticos*. E todos os dias, um boletim informativo dava as notícias diárias de última hora e também apontamentos sobre a cidade, os seus artistas e os seus poetas, a sua magia e beleza.

Estas realizações são também uma oportunidade soberana para o encontro associativo e inter-associativo. E o CIBEM não foi excepção. Durante este encontro reuniu-se a Junta de Governo da Federação Ibero-americana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM) — à qual a APM aderiu recentemente — presidida pelo professor Paulo Figueiredo, Presidente da FISEM e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, tendo contado ainda com a presença do professor Luis Balbuena, Secretário Geral desta federação. Desta reunião saiu a *Declaração do Porto*, lida e aplaudida na sessão de clausura do Congresso.

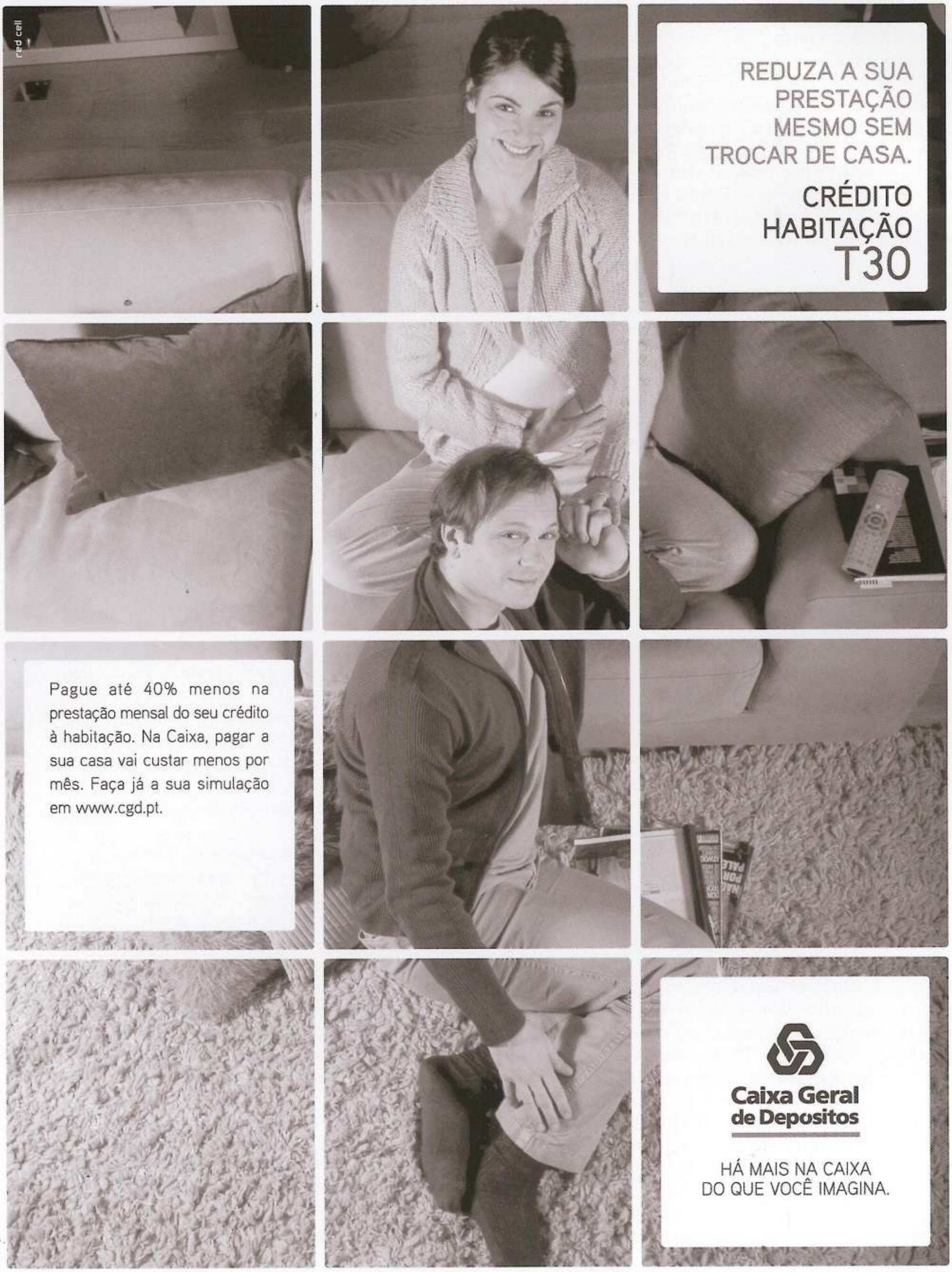
Mas o V CIBEM ainda teve mais: um jantar onde todos puderam experimentar o bom acolhimento portuense, para além de uma amostra da sua gastronomia, e um dia livre com visitas guiadas ao Porto. Uns visitaram o centro histórico, o Porto Património Mundial da Humanidade, outros subiram o Douro, outros foram às caves e provaram o vinho, outros ainda estiveram na Casa da Música e em Serralves. A Invicta foi pródiga com todos, nestes dias: ofereceu sol abrasador e dias frescos, nuvens e nevoeiros, orvalho denso, uns pingos de chuva ...

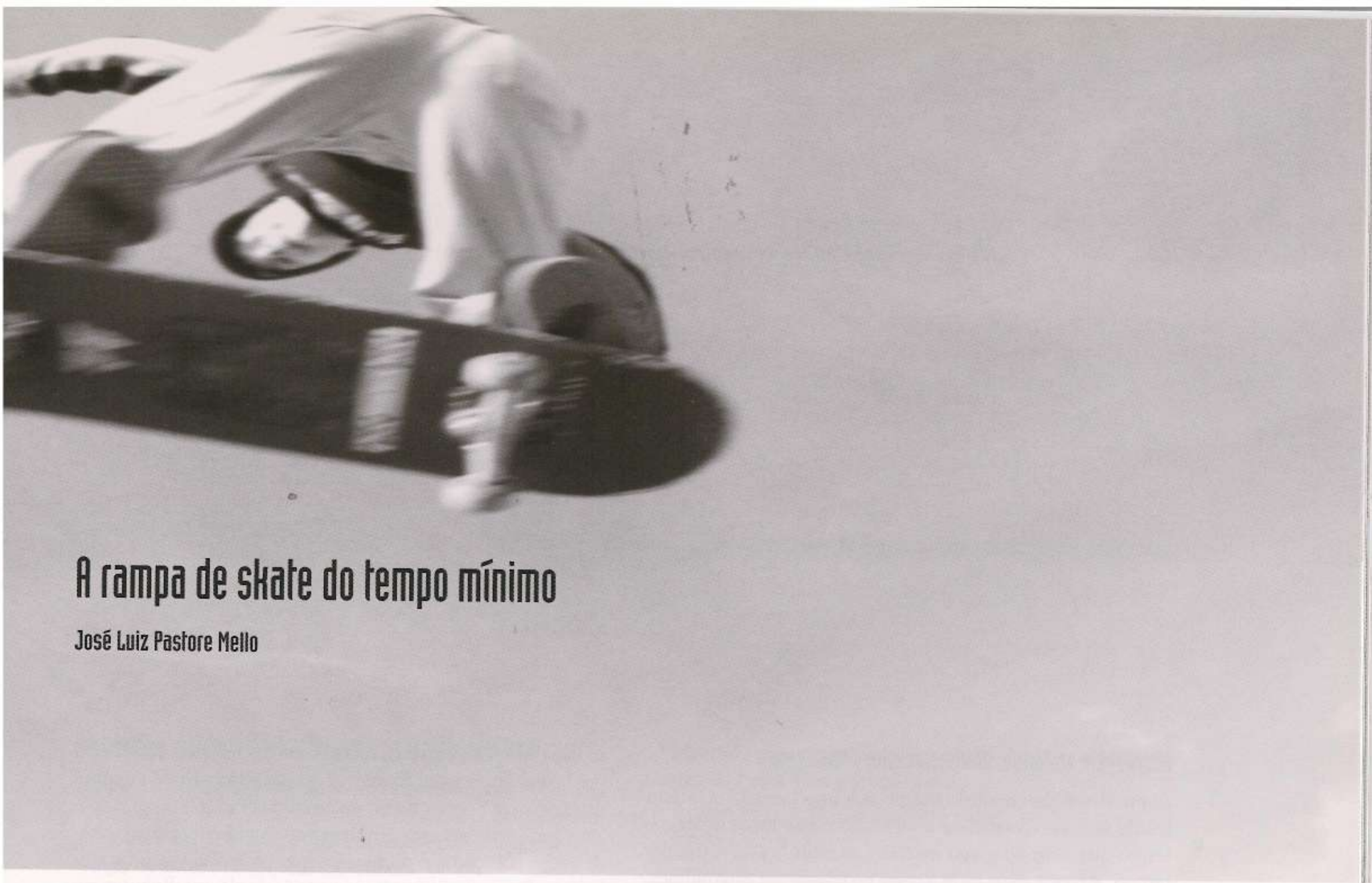
Por tudo isto, foi com tristeza que se viu chegar o dia da partida. O CIBEM terminou com a impressiva conferência plenária de Ana Paula Canavarro, *Matemática na Escola: muro ou ponte?*, à qual se seguiu a sessão de encerramento onde se fizeram os agradecimentos e se anunciou a possível realização do VI CIBEM no Chile. Finalmente, dirigidos pelo maestro residente da APM, José Duarte, o V CIBEM despediu-se deste *Porto Sentido* com as palavras de Carlos Tê e a música de Rui Veloso:

E é sempre a primeira vez
Em cada regresso a casa
Rever-te nessa altivez
De milhafre ferido na asa.

Até sempre!

Lurdes Figueiral
Esc. Sec. Artística de Soares dos Reis


red cell
REDUZA A SUA PRESTAÇÃO MESMO SEM TROCAR DE CASA.
CRÉDITO HABITAÇÃO T30
Pague até 40% menos na prestação mensal do seu crédito à habitação. Na Caixa, pagar a sua casa vai custar menos por mês. Faça já a sua simulação em www.cgd.pt.
Caixa Geral de Depositos
HÁ MAIS NA CAIXA DO QUE VOCÊ IMAGINA.



A rampa de skate do tempo mínimo

José Luiz Pastore Mello

Introdução

Nos últimos anos, muito se tem discutido sobre a importância do trabalho com projetos no meio escolar [4] mas, nem sempre, os esforços de abordagem teórica sobre o tema exemplificam de forma clara as possibilidades efetivas de uma prática metodológica da ação docente na condução de projetos de matemática.

Partindo de uma situação-problema desafiadora, a proposta deste artigo é a de apresentar múltiplas possibilidades de abordagem do tema gerador no contexto de um projeto de matemática com alunos de ensino médio.

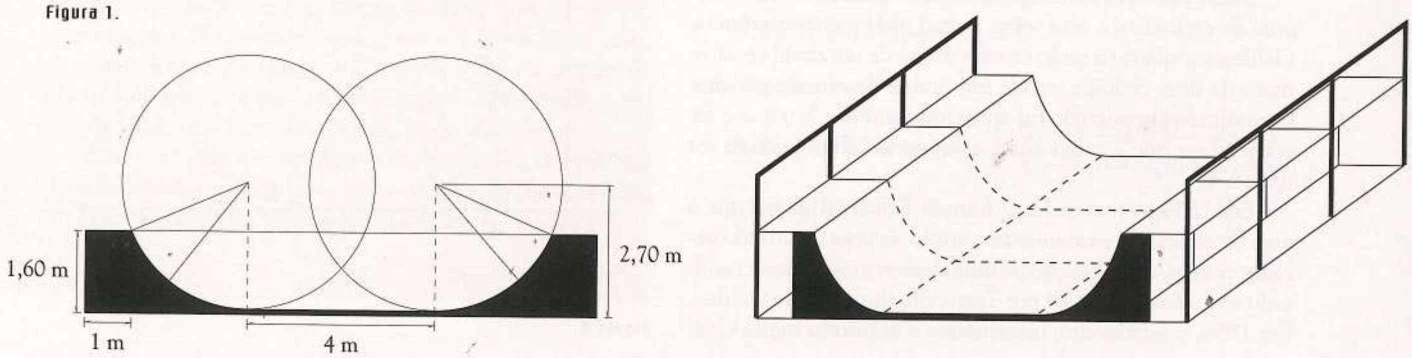
Situação problema

O vertical é uma modalidade de skate praticada em rampas em forma de U, conhecidas por *Half Pipe*. Essas rampas são feitas de compensado naval, um tipo de madeira bastante resistente e, em geral, são compostas por uma parte central plana e dois arcos de circunferência nas laterais, como se vê no projeto indicado na figura 1.

Nas competições de vertical, os skatistas são avaliados segundo critérios de criatividade e grau de dificuldade das manobras, que devem ser executadas em um intervalo de tempo pré-estabelecido. Dessa forma, quanto menos tempo o skatista gasta percorrendo a extensão da rampa de um lado para o outro, mais tempo lhe sobrará para executar as manobras aéreas verticais que contam pontos.

Dada a importância em fazer o percurso da rampa no menor tempo possível, poderíamos nos perguntar se a circunferência que compõe a lateral da rampa é, de fato, a curva do tempo mínimo de descida. Em outro contexto semelhante, poderíamos nos perguntar: qual deve ser a forma do escorregador de um parque infantil para que o tempo de descida seja o menor possível?

Figura 1.



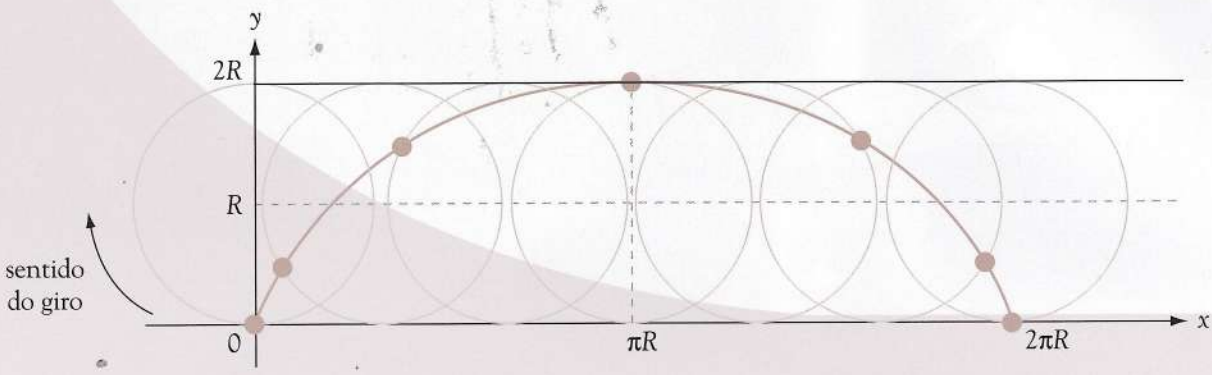


Figura 2. Para uma visualização dinâmica da formação de uma ciclóide, ver [7].

Abordagem histórica: braquistócrona e tautócrona

A problema da curva de tempo mínimo ligando dois pontos de alturas diferentes é conhecido como braquistócrona, termo que vem do grego *brachisto*, o mais breve, e *chronos*, tempo. Ao que tudo indica, esse problema foi originalmente enunciado em junho de 1696 por Johann Bernoulli na *Acta Eruditorum*, uma revista de matemática fundada por Leibniz. No final de 1696, provavelmente por uma deficiente distribuição da revista, não tinha sido apresentada nenhuma solução do problema além da de Leibniz, editor da revista, que o resolveu no mesmo dia em que recebeu. Prolongado em seis meses o prazo do desafio, o problema foi resolvido por Jakob Bernoulli (irmão mais velho de Johann), De L'Hospital, Huygens, Johann Bernoulli e Newton que, ao que se sabe, também parece tê-lo resolvido no mesmo dia que tomou contato com o desafio.

A curva que resolve o problema da braquistócrona é chamada de ciclóide, nome dado por Galileu, que havia se interessado por outras de suas propriedades no início de 1600.

A ciclóide é a trajetória descrita por um ponto de uma circunferência de raio R quando esta *roda*, sem deslizar, sobre uma reta (figura 2).

Interessado em investigar a área compreendida entre um arco de ciclóide e a reta sobre a qual roda a circunferência, Galileu comparou a razão entre a massa de um molde no formato de uma ciclóide e a de um molde do círculo gerador. O resultado encontrado foi aproximadamente 3, o que o fez conjecturar que a razão entre essas áreas talvez pudesse ser igual a π.

Em 1634, o matemático francês Roberval prova que a área da ciclóide é exatamente o triplo da área do círculo gerador porém, a publicação de uma demonstração desse resultado só foi feita em 1644 por Torricelli, discípulo de Galileu. Em 1658, o astrônomo, matemático e arquiteto inglês Cristopher Wren (construtor da catedral de St. Paul em 1666), publica a demonstração de que o comprimento de um arco de ciclóide é 8 vezes o raio do círculo gerador.

Outro interessante problema que também tem a ciclóide como solução é o da tautócrona, ou *tempo igual*. Se soltarmos duas esferas simultaneamente de alturas distintas em uma rampa cicloidal, ambas chegarão no ponto mais baixo da rampa ao mesmo tempo.

A demonstração matemática de que a ciclóide é a curva da braquistócrona e da tautócrona, bem como da relação da área e do comprimento da ciclóide com o círculo que dá origem à curva, não é objetivo deste artigo, mas pode ser encontrada nas referências [3] e [6].

Para visualizar a braquistócrona e a tautócrona com recursos dinâmicos de animação, recomenda-se uma consulta à referência [8].

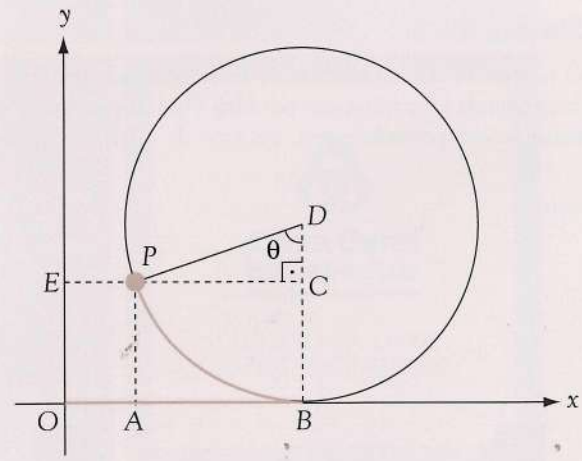


Figura 3.

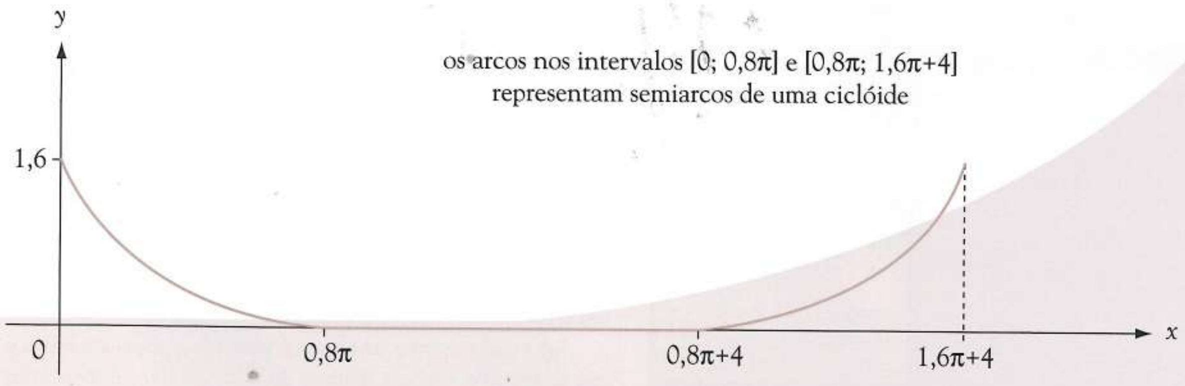


Figura 4.

Abordagem matemática: modelagem da rampa do tempo mínimo

Sendo a ciclóide a curva do tempo mínimo, nosso próximo objetivo será o de parametrizar a curva para, em uma etapa posterior, elaborar uma planta para a construção de uma rampa de skate com bordas cicloidais.

Em uma circunferência de raio R, que *rola sem escorregar* sobre o eixo das abscissas, marcamos um ponto P, cuja trajetória será uma ciclóide. A figura 3 indica a situação descrita, sendo $(\overline{OA}, \overline{OE})$ as coordenadas do ponto P.

Admitindo que, na situação inicial, P coincide com a origem do sistema de eixos, a medida do arco PB é igual a θR, o que coincide com a medida do segmento $[OB]$. Do triângulo retângulo $[CDP]$, temos que

$$\overline{PC} = R.\text{sen }\theta \text{ e } \overline{DC} = R.\cos\theta.$$

Sendo $\overline{OA} = \theta R - R.\text{sen }\theta$ e $\overline{OE} = R - R.\cos\theta$, as coordenadas de $P(x, y)$, em função do parâmetro θ, são:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \text{sen }\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

A trajetória completa de P inicia com coordenadas $(0, 0)$, atinge ordenada máxima em $(\pi R, 2R)$, e termina com coordenadas $(2\pi R, 0)$.

Voltando ao projeto de rampa da figura 1, se substituirmos os arcos de circunferência por arcos de ciclóide, teremos uma rampa de tempo mínimo ligando um ponto de altura 1,60 metros e outro a zero metros, melhorando a eficiência da rampa para as competições de vertical.

Equacionando a nova planta de rampa em um sistema de coordenadas, com θ (em radianos) no eixo das abscissas, obtemos o gráfico representado pela figura 4.

Partindo de uma ciclóide como a da figura 2, obtivemos a curva da figura 4 da seguinte forma:

a) adotando $R = 0,8$, a equação paramétrica da curva da figura 2 seria:

$$x = 0,8(\theta - \text{sen }\theta) \text{ e } y = 0,8(1 - \cos\theta);$$

b) fazendo uma reflexão dessa curva pelo eixo das abscissas, obtém-se uma nova curva de equação:

$$x = 0,8(\theta - \text{sen }\theta) \text{ e } y = 0,8(1 - \cos\theta);$$

c) transladando a nova curva 1,6 unidades para cima, obtém-se uma curva de equação:

$$x = 0,8(\theta - \text{sen }\theta) \text{ e } y = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta);$$

d) pelo eixo vertical de simetria da nova curva, translada-se apenas o semiarco do lado direito 4 unidades para a direita.

Em resumo, a rampa indicada na figura 4 é modelada pela equação paramétrica:

Para θ no intervalo

$$[0; 0,8\pi] \Rightarrow \begin{cases} x = 0,8(\theta - \text{sen }\theta) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Para θ no intervalo

$$]0,8\pi; 0,8\pi + 4[\Rightarrow \{\ y = 0$$

Para θ no intervalo

$$[0,8\pi + 4; 1,6\pi + 4] \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 0,8(\theta - \text{sen }\theta) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

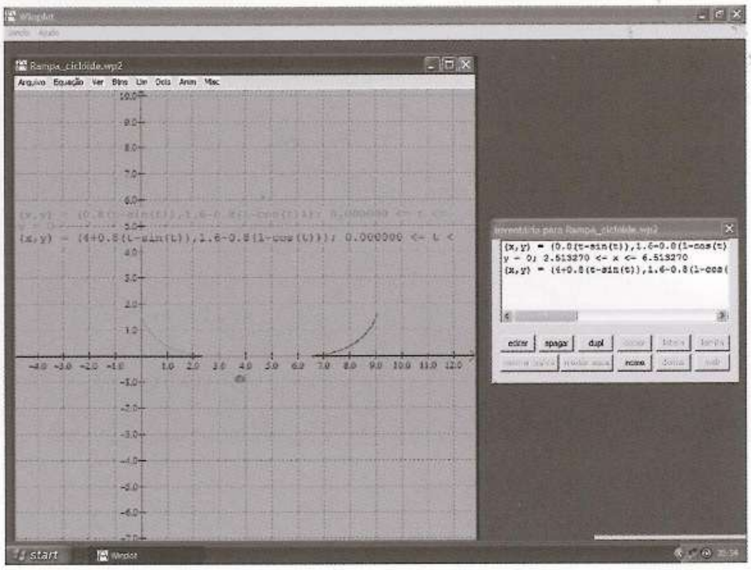


Figura 5. Tela contendo o equacionamento do problema e a sua representação gráfica

Abordagens tecnológica e experimental

Tendo modelado o problema da rampa de skate através de equações, podemos utilizar um programa de computador para construir e imprimir o gráfico da curva e, com isso, gerar uma planta para a construção de modelos experimentais da rampa. Alguns programas que podem ser usados com essa finalidade são: Winplot (distribuição gratuita), Graphmatica (distribuição livre), Cabri-Géomètre (distribuição comercial).

Ilustramos abaixo a construção do gráfico da rampa cicloidal feita no programa Winplot, cuja versão gratuita em português pode ser obtida através da referência [9]. Apesar do uso desse programa não envolver maiores dificuldades, caso se deseje uma orientação sistemática para a manipulação do Winplot, recomenda-se a referência [2] (figura 5).

Ainda utilizando o Winplot, nossa última proposta será a de modelar curvas no formato de circunferência, reta, parábola e ciclóide para a construção de rampas, em modelos de madeira, que permitam a investigação experimental da braquistócrona e da tautócrona na ciclóide.

Adotando rampas de altura 2 unidades, nossa proposta é que se modele, em um sistema de coordenadas, curvas com as seguintes condições:

a) ciclóide: gerada por uma circunferência de raio 1, com máximo em $(0,2)$ e mínimo em $(\pi,0)$;

b) reta: passando pelos pontos $(0,2)$ e $(\pi,0)$;

c) parábola: com vértice em $(\pi,0)$ e passando por $(0,2)$;

d) circunferência: com centro (π,y_0) e passando pelos pontos $(0,2)$ e $(\pi,0)$.

Deixo por conta do leitor a verificação de que as equações procuradas, com $0 \leq x \leq \pi$, são as descritas na tabela 1. O gráfico (figura 6) dessas curvas, feito no Winplot, mostra que a ciclóide é a curva de maior comprimento entre as quatro comparadas, o que reforça ainda mais a curiosidade por uma verificação experimental de que ela, ainda assim, seja a curva do *tempo mínimo*.

Imprimindo as quatro curvas, podemos utilizar serviços de ampliação por copiadora para obter plantas para a construção de modelos das rampas em madeira. Vale mencionar que algumas empresas de cópias fazem a plotagem das curvas a par-

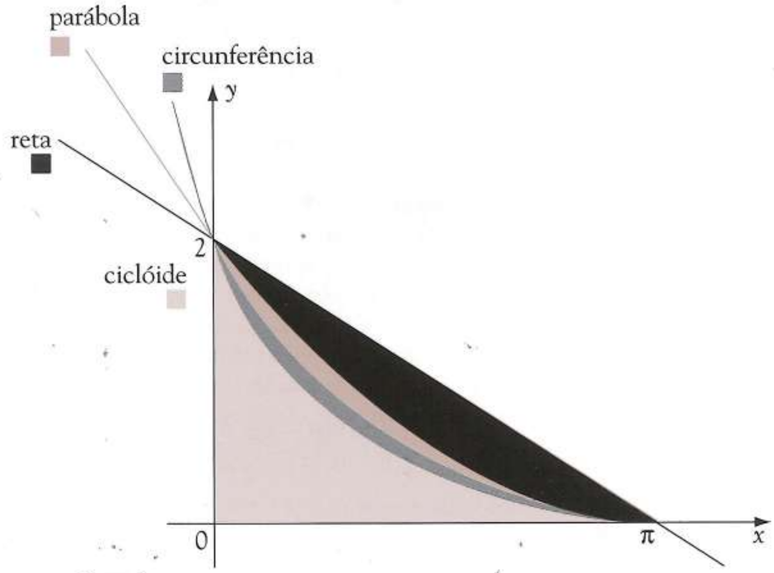


Figura 6.

Curvas	Equações
Ciclóide	$x=\theta-\operatorname{sen}\theta$ e $y=2-(1-\cos\theta)$
Recta	$2x+\pi y-2\pi=0$
Parábola	$y=\frac{2}{\pi^2}x^2-\frac{4}{\pi}x+2$
Circinferência	$(x-\pi)^2+\left[y-\left(\frac{\pi^2+4}{4}\right)\right]^2=\left(\frac{\pi^2+4}{4}\right)^2$

Tabela 1.

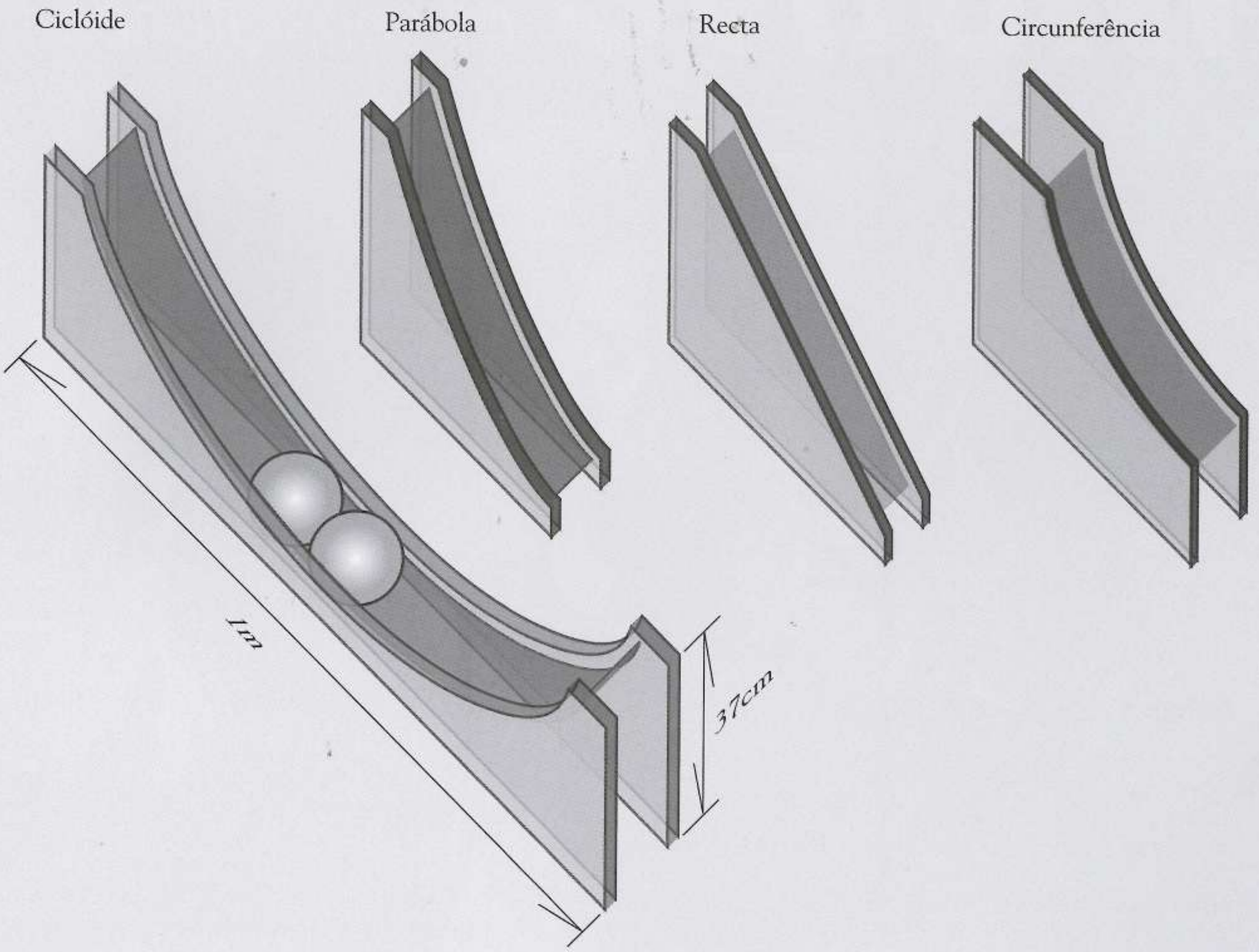


Figura 7. Projectos de rampas construídas em compensado e fórmica utilizando o processo descrito neste artigo.

tir de um disquete com o programa Winplot (ou outro programa utilizado) e o gráfico gerado no programa. Esse serviço tem a vantagem de permitir a plotagem em tamanho maior do que o limite de ampliação das máquinas copiadoras.

Além de investigar experimentalmente a braquistócrona e a tautócrona soltando esferas nas rampas, os modelos também permitem que se faça uma comparação experimental entre áreas (pelo processo de Galileu) e comprimentos (utilizando barbante e fita métrica) (figura 7).

Bibliografia

[1] Allinger, Glenn D (e outros). *Mathematics Projects Handbook*. Virginia, NCTM, 1999.

[2] Barufi, M. C., Lauro, M. M. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. São Paulo, CAEM-IME-USP.

[3] Guzmán, Miguel de. *Aventuras Matemáticas*. Lisboa, Gradiva, 2ª edição, 1991.

[4] Machado, Nilson José. *Educação: Projetos e Valores*. São Paulo, Escrituras Editora, 2000.

[5] Markuchevitch, A. I. *Curvas Notáveis*. São Paulo, Atual Editora/Editora Mir, 1995.

[6] Simmons, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica, volume 2*. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987.

Os sites recomendados abaixo foram consultados, e estavam ativos, em 22/07/05.

[7] `http://www.ies.co.jp/math/java/calc/cycloid/cycloid.html` (ciclóide)

`http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/Pascal/cicloide.htm` (ciclóide)

[8] `http://www.icmc.sc.usp.br/~szani/bra/node5.html` (tautócrona)

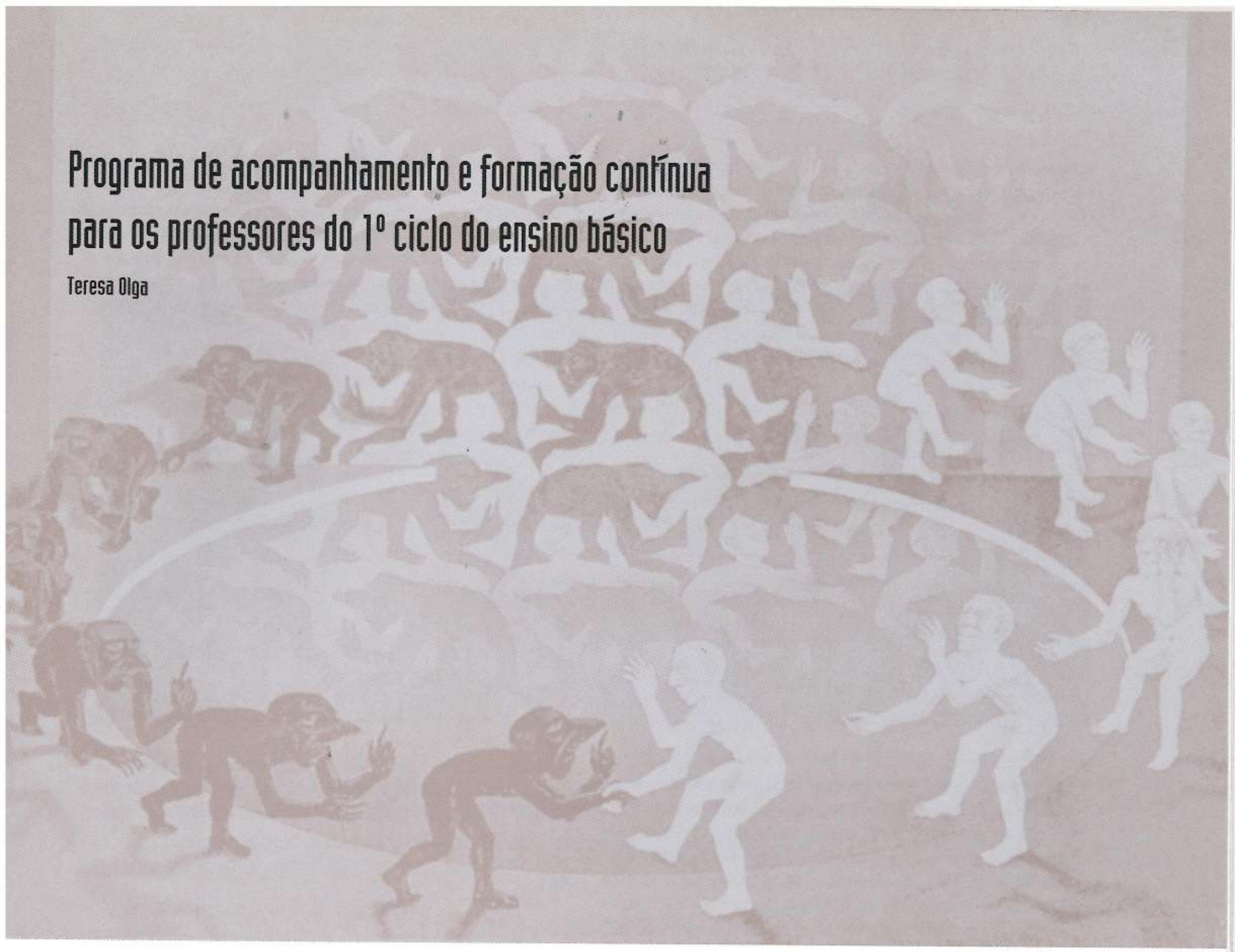
`http://www.f.waseda.jp/takezawa/mathenglish/geometry/cyclo/cyc/cyc.htm` (braquistócrona)

[9] `http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html` (*download* gratuito do Winplot em português)

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz, São Paulo, Brasil

Programa de acompanhamento e formação contínua para os professores do 1º ciclo do ensino básico

Teresa Olga



O problema do insucesso em Matemática toma visibilidade pública no final de todos os anos lectivos, associado ao desempenho dos alunos nas provas de exame quer nacionais quer internacionais, nos vários níveis de ensino. E assim aconteceu este ano, começando com os resultados do PISA 2003, continuando com os exames do 9º ano e terminando nos exames do 12º. Em todos eles, o desempenho dos nossos alunos em Matemática não pode ser considerado satisfatório.

Como resposta a esta situação, o Ministério da Educação decidiu apostar na raiz do sistema de ensino, propondo um programa de formação contínua em Matemática para os professores do 1º ciclo do Ensino Básico que, segundo palavras da Sra. ministra na sua intervenção na divulgação pública dos resultados do PISA 2003, não se trata de "mais um grande plano para combater o insucesso escolar ou uma grande reforma da educação. Apenas medidas concretas e precisas que visam melhorar as condições de ensino e de aprendizagem". Nesta intervenção, a Sra. ministra referiu ainda que se iria partir de quatro medidas que "não são, necessariamente, as medidas prioritárias, mas simplesmente as primeiras, e visam valorizar a formação em matemática dos professores do ensino básico e racionalizar o uso dos recursos escolares".

Para o arranque da primeira destas medidas — lançar um programa de acompanhamento e formação contínua em matemática para os professores do 1º ciclo do ensino básico — a Sra. ministra realizou uma reunião que contou com a presença de diversas entidades, incluindo representantes de instituições do ensino superior com responsabilidades na formação de professores deste nível de ensino. Nesta reunião, foi criada uma comissão de acompanhamento para definir os objectivos do programa e delinear a sua estrutura, tendo sido convidada para a coordenar a nossa colega Lurdes Serrazina, Presidente do Conselho Directivo da ESE de Lisboa, e integrando ainda esta comissão, entre outros, também a nossa colega Isabel Rocha, Presidente da APM.

Esta comissão já elaborou uma proposta de concretização deste programa de formação que está adequada aos pressupostos enunciados pelo Ministério da Educação e onde estão definidos (i) os princípios orientadores do programa; (ii) os objectivos da formação; (iii) as linhas orientadoras; (iv) as estratégias de concretização do programa e (v) os conteúdos a trabalhar, que englobam os temas matemáticos, e a natureza das tarefas, e os recursos necessários.

Uma primeira análise deste documento, bem como do despacho conjunto do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência e do Ensino Superior que aprova este programa, faz realçar uma inovação na forma como as entidades oficiais encaram a formação contínua de professores. De facto, este modelo de formação assenta no acompanhamento regular dos professores nas suas escolas, preferencialmente com turmas dos 3° e 4° anos, visando o desenvolvimento de actividades curriculares nas salas de aula que são suportadas por sessões de trabalho entre formadores e formandos, e da discussão das práticas realizadas. No referido despacho pode ler-se como objectivos do Programa de Formação Contínua, os seguintes:

a) Aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1° ciclo;

b) Fomentar uma atitude positiva dos professores relativamente à disciplina de Matemática e às capacidades dos alunos;

c) Criar dinâmicas de trabalho entre os professores, com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática;

d) Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos, em articulação com as instituições de formação inicial de professores;

e) Favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática.

A concepção geral deste programa, visível nos objectivos enunciados bem como nas suas estratégias de implementação está de acordo com as linhas que são defendidas actualmente para a formação contínua de professores pela APM como se pode ver, por exemplo, no relatório Matemática 2001[1] que aponta "para uma formação com uma ligação mais forte à prática lectiva e em que os professores se sintam muito mais envolvidos como parceiros no processo de formação" (p. 79). É de salientar ainda a importância de o Ministério da Educação reconhecer o papel da formação dos professores do 1° ciclo na área da Matemática como uma medida de combate ao insucesso nesta disciplina. Também isto é consentâneo com uma das recomendações do relatório referido; "Tratando-se de um nível de ensino fundamental, em que as carências em formação matemática são reconhecidas, deve ser objecto de uma especial atenção" (p. 80)

Sem retirar o valor a esta iniciativa e sem deixar de reconhecer o seu carácter inovador, uma questão não pode deixar de ser colocada: mais uma vez o processo é desencadeado de cima para baixo, sem partir de uma avaliação global dos processos de formação em vigor, sem fazer um balanço dos seus aspectos positivos e negativos e sem fazer uma verdadeira auscultação prévia aos diferentes grupos representantes dos interessados. Por outro lado, e sem questionar a urgência de tomar medidas concretas de combate ao insucesso em Matemática, a forma apressada como o processo está a ser implementado pode levantar sérios problemas em termos dos recursos humanos pondo, eventualmente, em causa a concretização de alguns dos objectivos propostos. Como em outras iniciativas, o êxito desta terá que contar com um esforço suplementar de um grupo de professores de diferentes níveis de ensino e, mais especificamente dos das Instituições do Ensino Superior responsáveis pela formação, esforço esse que não tem sido devidamente reconhecido a nível oficial e público por quem de direito.

Para terminar, só me resta acreditar que os aspectos positivos deste programa vão vencer e que está a ser dado um primeiro passo efectivo no combate ao insucesso em Matemática.

Nota

1 Associação de Professores de Matemática (1998). Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: APM

Teresa Olga
Escola Secundária de Sto. António, Barreiro

Materiais para a aula de Matemática

Um contra todos

A tarefa que a seguir se apresenta tem como ponto de partida o concurso televisivo *Um contra todos*. É um concurso popular e certamente que a maioria de nós já o viu pelo menos uma vez — o Malato tem piada, às vezes aprendemos qualquer coisa, outras vezes admiramos a cultura do concorrente e, noutros casos, tem a vantagem de podermos chamar ignorantes aos concorrentes, o que não dá muito jeito nas nossa aulas!...

Bom, mas a verdade é que um dia pus-me a pensar se existe uma estratégia para atingir uma quantia maior. Peguei em lápis e papel e organizei umas ideias. Depois achei que aquele estudo tinha piada para os miúdos, talvez a partir do 9° ano. O ideal é conhecerem o concurso, mas isso pode ser o TPC da véspera. Aqui fica a sugestão de uma tarefa para a aula de Matemática ou talvez, quem sabe, para uma aula em que tenhamos de substituir algum colega...

Lina Brunheira
Escola Secundária de Amora

Um contra todos

Já deves ter ouvido falar, ou talvez até visto, um programa apresentado no canal 1 da RTP, intitulado *Um contra todos*. Trata-se de um concurso de cultura geral em que um concorrente ganha uma determinada quantia de dinheiro se conseguir derrotar os seus 50 adversários. Basicamente, as regras são as seguintes:

- O simpático apresentador, o José Carlos Malato, vai fazendo perguntas de várias categorias e o concorrente escolhe o grau de dificuldade — fácil ou difícil.
- Uma plateia de adversários tem 6 segundos para responder, ao que se segue a resposta do concorrente. Se este não souber pode comprar a resposta gastando 25%, 50% ou 75% do dinheiro já arrecadado.
- Quem errar sai do jogo e, assim, se ao fim de uma série de perguntas todos os adversários forem eliminados, o concorrente ganha.
- Ganha o quê? Dinheiro, claro! Quanto? Depende. O dinheiro é acumulado da seguinte forma: para cada pergunta, a plateia vale 12500 €. Por exemplo, se lá estiverem 10 adversários, cada um vale 1250 €; se errarem 2, o concorrente acumula mais 2 × 1250 €, ou seja, 2500 € (que só chega a receber se derrotar todos os adversários).
- O concorrente pode, no momento que quiser e unicamente uma vez, utilizar um trunfo que permite duplicar o dinheiro daquela jogada.

O que te propomos agora é que faças um estudo sobre a melhor estratégia para ganhar mais dinheiro. Claro que para um concorrente pouco culto, o ideal será sujeitar-se a poucas perguntas... Mas se o concorrente for muito sábio? Será que o número de perguntas influencia a quantia a receber?

Sugestão: Para poderes fazer este estudo, começa por fazer algumas simplificações.

- Considera 5 adversários em vez de 50;
- Considera que o concorrente responde sempre bem;
- Imagina diferentes cenários e as respectivas quantias a receber.

É melhor derrotar muitos adversários de uma vez ou será melhor aos poucos? Qual é a situação ideal? Se tiver de comprar respostas, é preferível fazê-lo quando? E qual seria o momento ideal para utilizar o trunfo e duplicar a quantia?

Modelação matemática na física do desporto

Cidália Macedo

A solução de um problema, na Física, Engenharia, Biologia, Medicina, Economia, Ciências Sociais, Desporto ..., é hoje em dia procurada usando modelos matemáticos. O processo da modelação depende da área científica mas todos partilham de alguns procedimentos (etapas) comuns:

1ª etapa. Identificação do problema

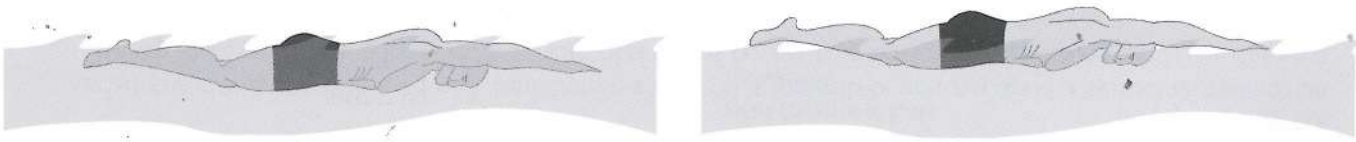
A consciencialização da existência do problema nasce de forma espontânea (sede de saber, justificação do ser, procura da verdade) ou quando se está numa situação de risco ou de melhoria de condições (cura de uma doença, controle dos rios, prestações desportivas).

> Na base da *competição desportiva* está a vontade de ser mais forte, de saltar mais longe ou mais alto e de ir mais depressa. Na natação, treinadores e atletas procuram que a Biofísica os ajude a optimizar a propulsão e diminuir a resistência (de superfície e de forma) do meio aquático.

Um problema pode ser para todos, para alguns ou para nenhum de nós. Seja como for, a sua identificação pressupõe o seu isolamento do meio externo e a forma como ele se une a esse mesmo meio. Criam-se assim *sistemas* com as suas *variáveis* e *parâmetros*. Assumem-se *simplificações ou aproximações* a fim de tornar o problema menos complexo sob pena de ser insolúvel. Fazem-se diagramas, árvores, grafos ou seja esquemas geométricos que ajudam a reter o que é essencial sem, contudo, desvirtualizar o problema.

> A locomoção de um objecto num meio fluido, seja este um líquido ou um gás, depende da velocidade (*variável*) e de vários *parâmetros* (massa volúmica e viscosidade do fluido, área da superfície do objecto, temperatura, salinidade, ...)
> Um nadador melhora a sua flutuabilidade se nadar numa piscina de água salgada (figura 1).

Figura 1.



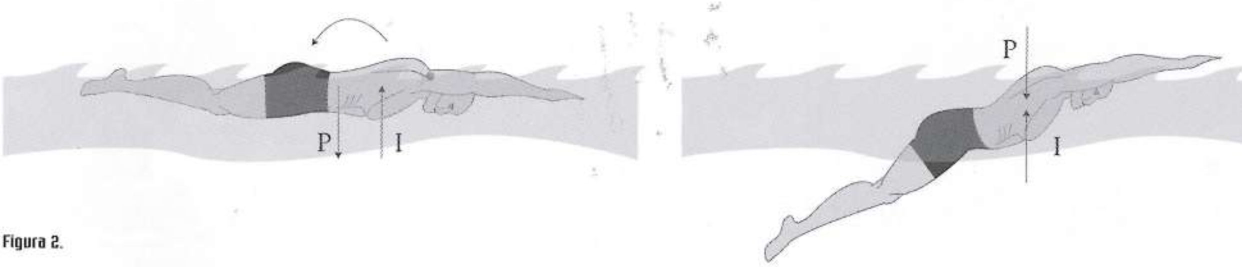


Figura 2.

São a partir de *leis da natureza* (1), de *leis constitutivas* (2) e de *constrangimentos geométricos* (3) que se estabelecem os *modelos matemáticos* (4):

1) Leis da natureza — regem os fenómenos e são reconhecidamente consideradas como muito válidas. São empíricas, observam-se.

Na natação, várias leis sustentam a sua cientificidade. Por exemplo:
• *Arquimedes*, um matemático que viveu acerca de 2000 anos estabeleceu um princípio que guarda o seu nome e que diz que a grandeza da força exercida por um fluido num corpo nele imerso é igual ao peso do volume V de fluido deslocado: $F = \rho V g$ (ρ — massa volúmica do fluido, g — aceleração da gravidade);
• A força de resistência que actua num corpo em movimento num meio fluido é proporcional ao quadrado da sua velocidade: $F_R = kv^2$;
• A energia consumida pelo atleta é proporcional ao cubo da velocidade das braçadas: $E = kv^3$;

2) Leis constitutivas — levam em conta os *materiais* de que são feitos os sistemas.

Apesar da resistência de superfície não ser significativa, os nadadores depilam-se ou usam fatos elaborados com fibras especiais de grande elasticidade.

3) Constrangimentos geométricos — os fenómenos ocorrem num *universo finito* quer no *espaço* quer no *tempo*. A noção matemática do infinitamente grande ou do infinitamente pequeno corresponde apenas a uma necessidade de mudança de escala no estudo de um dado fenómeno.

A resistência de forma é diminuída pelo nadador ao manter o seu corpo alongado e reduzindo a sua secção tranversal (livres e costas: rotação do corpo entre cada braçada; bruços: afunilamento dos braços e o encolhimento dos ombros entre cada pernada; mariposa: levantamento do tronco durante a fase impulsionadora)

4) Modelos matemáticos — são conjuntos de *equações algébricas* ou *equações diferenciais* que traduzem a formulação matemática das leis.

2ª etapa. Resolução do problema

A determinação das soluções, se estas existirem, utiliza métodos analíticos, numéricos, computacionais ou estatísticos. A adequação do método ao modelo matemático pode consistir, ele próprio um problema ... sugerindo a interligação de várias áreas e obrigando a constituição de equipas multidisciplinares.

A dificuldade de um nadador flutuar vem do facto do seu peso P e a força de impulsão exercida pelo meio aquático provocarem uma rotação no nadador que deverá *resolver o problema* desenvolvendo a sua técnica (figura 2).

3ª etapa. Interpretação dos resultados

As soluções encontradas devem estar de acordo com o fenómeno em estudo e serem organizadas de modo a reconhecer-se nelas as vantagens e desvantagens de serem utilizadas.

Ora, isso obriga que os modelos matemáticos tenham um número mínimo de valores fixos o que permitirá *simular* situações diferentes, variando, por exemplo, as dimensões e os materiais dos sistemas ou outros parâmetros que alteram a sua eficiência e rendimento.

A velocidade de um nadador é obtida dividindo a distância percorrida pelo tempo gasto.
Os treinadores têm duas quantidades que medem melhor a eficiência de um nadador:
a) a razão entre a distância percorrida pelo número de braçadas efectuadas (média de braçadas).
b) a razão entre o número total de braçadas e o tempo gasto (frequência de braçadas).

Escolher, prever, controlar e decidir são acções que resultam desta etapa.

As técnicas usadas na natação sofreram uma grande evolução no início dos anos 70 quando várias pesquisas revelaram que as forças de sustentação que agem sobre a mão poderiam actuar como geradoras de propulsão. A acção sinuosa para trás efectuada pelo nadador optimiza a propulsão. Por outro lado, ainda hoje não está determinado se as pernas contribuem para as forças propulsivas que impelem o nadador para a frente.

Cidália Macedo
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria

e vid ente mente.

1 A obra *e vid ente mente*, Histórias da Educação, de António Nóvoa, publicada no início deste ano, é constituída por um livro e um CD- ROM que inclui ainda quatro documentos: um Repertório da Imprensa de Educação e Ensino, um Dicionário de Educadores Portugueses, um Catálogo da Imprensa de Educação e Ensino e uma Bibliografia Portuguesa da Educação. Estamos, portanto, perante um conjunto de textos, de tipo diferente, mas todos eles dedicados à Educação Portuguesa nos séculos XIX e XX, em especial de 1820 a 1974. Neste texto apenas farei referência ao livro.

O autor não precisa de apresentação pois é sobejamente conhecido nos *fora* educativos portugueses e internacionais. Professor universitário, investigador, historiador e formador de professores, tem uma vasta bibliografia que os professores e investigadores conhecem, apreciam e estudam. A sua contribuição para a História da Educação Portuguesa é um marco fundamental na construção desta disciplina, tão pouco valorizada em Portugal nos currículos de formação de professores.

2 António Nóvoa abre o livro avisando o leitor da originalidade da sua estrutura: "O livro está desenhado como uma espécie de *cadavre exquis*. É uma montagem, razoavelmente aleatória, e desordenada, de palavras e de imagens. Não há qualquer intenção de definir um território, mas apenas de mostrar alguns dos acontecimentos que nele tiveram lugar. (p. 9)". E como se explica a fonte de inspiração no *cadavre exquis*[1] dos surrealistas? Justamente porque, tal como os jogos literários ou artísticos por eles praticados, de forma colectiva e sem que cada um soubesse o que os outros tinham escrito ou desenhado ou escreveriam ou desenhariam a seguir, também este livro foi escrito inspirado neste processo de construção colectiva. Naturalmente que a inspiração nos surrealistas, ilustrada pelo *cadavre exquis* de Cruzeiro Seixas e Eurico Gonçalves "que abre simbolicamente o livro", como refere António Nóvoa, não é mais de que uma inspiração, pois o livro, apesar da diversidade dos temas e da sua abordagem autónoma e sem obediência estrita à cronologia, apresenta uma escrita coerente e de agradável leitura. Não é visível para o leitor a diversidade de autores que nele colaborou pois sendo um "produto de várias mãos" o autor assumiu a tarefa de o escrever, escolhendo um estilo simples e claro onde quase sempre se identificam vários tons, mais ou menos esbatidos: informação sucinta, explicação, justificação e opinião do autor.

Os cinquenta textos do livro constituem um *Corpus* docu- 3
mental de âmbito diverso e são apresentados como uma espécie de entradas de um dicionário, não por palavras mas por títulos, explicitados por uma extensão ou sub-título. Cada texto, de uma página apenas, corresponde a um tema diferente e é delimitado por uma régua cronológica que situa o leitor no tempo histórico a que o assunto se refere.

Em todos os textos encontramos informação sucinta e clara sobre o tema, fundamentada por referências bibliográficas indicativas e acompanhada por um questionamento útil, pertinente e estimulante.

Muitos dos temas aqui abordados mostram ter ainda, e nem 4
sempre pelas melhores razões, grande actualidade. Aliás é António Nóvoa que nos diz: "À medida que as páginas avançam, o leitor deparar-se-á, provavelmente, com um sentimento de estranha familiaridade. Como se estivéssemos sempre a discutir as mesmas matérias, e sempre da mesma maneira. Como se, no campo da educação não houvesse a possibilidade de acumular conhecimento, de nos apropriarmos da experiência histórica e de sobre ela praticarmos um exercício de lucidez." (p. 10)

A título de exemplo e motivada pelo meu interesse pessoal, comentarei alguns, começando por "Escolaridade obrigatória Uma intenção longamente incumprida" (p. 25).

Numa altura em que se muda a escolaridade obrigatória em Portugal do 9° ano para o 12° ano e sabendo que não conseguimos ainda que todos os jovens acabem o 3° ciclo com sucesso, o que nos ensina este texto? Ficamos a saber que "Portugal foi um dos primeiros países na Europa a legislar sobre a obrigatoriedade escolar. Foi um dos últimos a cumpri-la". António Nóvoa avança uma explicação: "E porquê? A pergunta tem muitas respostas: a fragilidade da acção do Estado,

Evidentemente Editora ASA ISBN 972-41-4214-0
Histórias da Educação Ano 2005, 128 pp. Preço PVP: 22,00€

a insuficiência das elites, a insignificância da iniciativa particular, as resistências várias à cultura. A geografia do atraso cruza-se sempre com a geografia da ignorância e da pobreza." Será que mudou alguma coisa em Portugal que contrarie esta explicação? Não creio. Aliás, sugiro a leitura cruzada deste texto com os quatro textos sobre "0 Atraso educacional" e que nos são apresentados de forma muito curiosa em "Quatro andamentos". O 1° andamento, na página 37, refere-se a "Meados do século XIX", o 2° na página 69 diz respeito "À transição do século XIX para o século XX", e o 3° na página 113 a "Meados do século XX". Em todos eles é evidenciado o atraso de Portugal. Imputado ao "estado caótico da instrução pública" (no 1° andamento), atraso que vai crescendo e resistindo às sucessivas reformas, "imaginadas a partir do centro em vez de dotar as escolas de capacidades autónomas de inovação e de desenvolvimento" (2° andamento); e assim Portugal chega a meados do século XX, arrastando o atraso acumulado e " vai-se descobrindo, periodicamente, um país atrasado. Fixamos metas imaginando os outros países parados. Por isso, quando as cumprimos, constatamos perturbados que a distância que nos separa da "civilização" é cada vez maior ..." (3° andamento). Quanto ao 4ª andamento "Transição do século XX para o século XXI", parece não ter nada de novo a dizer sobre o atraso que continua a manifestar-se com muita crueza. São avançados indicadores vários e mais reformas tiveram lugar. O que sabemos mas temos vontade de esquecer.

A futura actualização deste livro mostrará se o 5° andamento irá trazer melhores notícias ou se o tom da música é o mesmo ...

Relacionado com esta temática é interessante ler o texto "Superstição do diploma e "Empregomania" Há sempre estudantes a mais?" (p. 105). Da leitura deste texto ficamos a saber que já no século XX o excesso de diplomados era uma queixa habitual e também ela estranha quando relacionada com as baixas qualificações escolares da população portuguesa. Afinal também isto transitou para os séculos seguintes pois é frequente este assunto ser objecto de análise e discussão ainda hoje. António Nóvoa explica: " É um discurso recorrente na sociedade portuguesa. A crítica ao excesso de diplomados esquece que Portugal foi, e continua a ser, o país menos escolarizado da Europa. Seguimos prisioneiros de um sistema pensado para formar cada um à medida do lugar profissional que lhe está destinado, em vez de adoptarmos uma política de valorização pessoal e de qualificação escolar de todos."

Uma outra escolha refere-se a dois textos que podem também ser lidos em conjunto, ambos versando "Formação de professores". São os seguintes: " Formação de Professores do Ensino Primário Aprender para ensinar" (p. 39) e "Formação de Professores do Ensino Secundário Cem anos de indecisão" (p. 41). Também aqui as questões continuam em aberto e as exigências da Declaração de Bolonha, trarão mudanças que dificilmente reunirão consensos. Atrevo-me a trazer para este comentário a última frase do 2° texto que me parece actual e oportuna: "Sobrepor as disciplinas de base às *ciências da educação* e às *práticas de ensino* não resolve qualquer problema. Mas são muitos são os interesses que dificultam a necessária reforma. E não será a formação contínua a colmatar as deficiências da formação inicial. O século XXI abre com uma grave indecisão nesta matéria."

Permito-me ainda recordar que a formação contínua já não existe há muito tempo em Portugal e que a maneira como a formação em serviço de professores tem sido realizada nos últimos anos só nos deixa envergonhados. Para não falar como foi "tratado", agora, o estágio dos cursos do ramo educacional das universidades.

Há ainda outros textos que gostaria de comentar, todos eles de grande interesse e actualidade, mas o espaço não o permite. Cito apenas três para aguçar o interesse dos leitores: (i) "A ignorância dos alunos O eterno regresso do mesmo discurso" (p. 57), ou (ii) "Pais e Professores face aos exames O Diploma ou o Saber?" (pag 55), e ainda (iii) "O melhor professor Não é o que mais ensina, É o que mais faz aprender" (p. 95). A escolha é difícil, o espaço curto e o tempo está mais para a leitura do que para a escrita. 5

Não sendo historiadora, nem professora de História e tendo descoberto, já tarde, que gosto de saber do passado, só posso concordar com António Nóvoa quando escreve. " Sei que, em educação, a história não tem "lições" para dar. Mas tem, certamente, matéria suficiente para nos dar que pensar" (p. 11).

Para terminar: 6

(i) Um índice ajudava muito a ler o livro.
(ii) Se me é permitida uma sugestão em relação a obras futuras, era interessante a história das disciplinas. Era um olhar diferente e que me parece fazer falta.
(iii) Apenas uma nota desagradável: o cheiro a tinta que o livro emana (será só do meu?) perturbou a minha leitura. Penso que não envenenou o meu pensamento ...

Nota

1 A designação *cadavre exquis* foi retirada da primeira frase de um desses jogos linguísticos: "le cadavre-exquis boira le vin nouveau". Pretendia-se com este jogo colectivo a construção de um "produto" que não obedecia a nenhuma lógica de sentido, devendo ser respeitada apenas uma ordem gramatical.

Luísa Solla
Escola Superior de Educação de Setúbal

Ai, tantos testes para corrigir

O Pedrosa tinha uma enorme pilha de testes para corrigir. Na 2ª feira, cheio de energia, despachou metade dos testes. Na 3ª feira já só viu um terço dos que tinham sobrado. Na 4ª feira corrigiu apenas um quarto dos que faltavam. Na 5ª feira, já saturado, viu um quinto dos que tinha para ver. Na 6ª feira, verificando que lhe faltavam menos de duas dúzias, resolveu acabar com o suplício e corrigiu tudo. Quantos testes tinha o Pedrosa?

(Respostas até 31 de Dezembro)

Triângulos no trapézio

O problema proposto no número 82 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O trabalho numa aula de Matemática, feito em grupos de dois, consistia em desenhar um trapézio qualquer, traçar as duas diagonais e, fazendo as medições necessárias, calcular a área de cada um dos quatro triângulos obtidos.

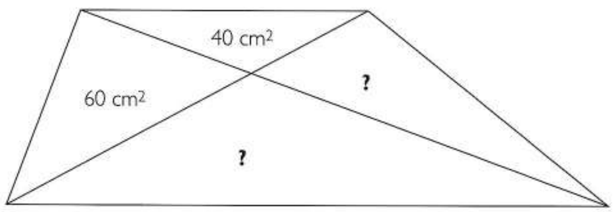
A Rita e a Carolina dividiram as tarefas entre si, ficando cada uma com dois triângulos.

A Carolina, depois de fazer cuidadosamente as medições necessárias, concluiu que um triângulo tinha uma área de 40 centímetros quadrados e o outro de 60.

A Rita foi dar uma volta. Quando chegou, olhou para as áreas encontradas pela Carolina e disse:

— Oh, eu nem preciso de medir nada. Já sei a área dos meus.

Que área tinham os triângulos da Rita?

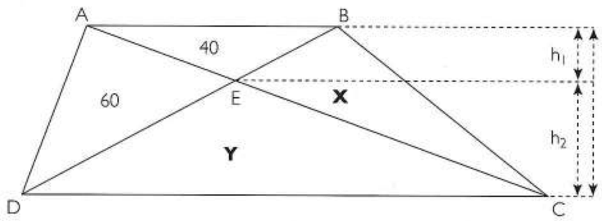


Tivemos 11 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Américo Bento (Vila Real), Ana Luísa Correia (Lisboa), Augusto Taveira (Faro), Francisco Martins (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Cunha (Viseu), J. Orlando Freitas (Funchal), João Barata (Castelo Branco), José Rui Ferreira & Luís Santos (Porto), e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Comecemos por uma citação do Pedrosa Santos: *Tenho de confessar que a Rita, ou meninas como a Rita, me causa inveja, quase raiva. Viu num relance o que eu demorei horas a cogitar.*

Sejam A, B, C e D os vértices do trapézio, E o ponto de intersecção das suas diagonais, h a sua altura, h_1 a altura do triângulo ABE, h_2 a altura do triângulo DCE, X a área do triângulo BEC e Y a área de DCE.

O processo seguido pelos nossos leitores foi praticamente o mesmo na primeira parte mas diferente no cálculo da área Y. Algumas justificações foram também mais sintéticas que outras. Eis uma das vias de resolução.



1° — Área X do triângulo BEC: os triângulos ABD e ABC têm a mesma área porque têm a mesma base AB e a mesma altura h. Então, $40 + 60 = 40 + X$. Logo, $X = 60$. A área do triângulo BEC é de 60 cm^2.

2° — Relação entre as várias alturas: se dois triângulos têm a mesma base, as suas áreas são proporcionais às respectivas alturas (resulta imediatamente da fórmula da área de um triângulo). Considerando os triângulos ABE e ABD, com a mesma base AB, vem

$$\frac{40}{100} = \frac{h_1}{h} \quad \text{e portanto} \quad h_1 = 0,4h.$$

Como $h = h1 + h2$ vem $h2 = 0,6h$.

3° — Área Y do triângulo DCE: considerando os triângulos DCE e DCB, com a mesma base DC, vem

$$\frac{Y}{Y+60} = \frac{h_2}{h} \quad \text{e portanto} \quad \frac{Y}{Y+60} = 0,6$$

$$Y = 0,6Y + 0,6 \times 60$$

$$0,4Y = 36$$

$$Y = 90$$

A área do triângulo DCE é de 90 cm^2.

O Alberto Canelas chama a atenção para o seguinte: *Embora a solução seja única em termos de áreas dos 4 triângulos, há infinitos trapézios que obedecem às condições do problema. Mesmo no caso particular de terem as mesmas bases e a mesma altura do trapézio do problema, há um número infinito de trapézios nessas condições.*

O Augusto e o Alberto generalizaram o problema para quaisquer valores das áreas conhecidas. Assim, se A_1 e A_2 forem as áreas conhecidas, teremos sempre:

$$X = A_2$$

$$A_1 \times Y = A_2 \times X.$$

A cultura da medição em Portugal ao longo da história

Luís Seabra Lopes[1]

Introdução

A medição faz parte da actividade humana desde as primeiras civilizações. É necessário medir ou pesar os produtos que se compra, vende ou troca, bem como aqueles que se entregam ao rei ou ao templo a título de imposto ou tributo. É necessário medir as distâncias e as superfícies dos terrenos. É necessário definir as medidas dos edifícios que se pretende construir. É necessário definir escalas temporais. A história da metrologia está, como é óbvio, intimamente ligada à própria história da matemática.

A metrologia, em Portugal como no resto da Europa, evoluiu lentamente, desde uma situação de extrema diversidade, na idade média, até à actual uniformidade, resultante da adopção do sistema internacional de unidades. A diversidade metrológica medieval devia-se, naturalmente, à extrema fragmentação do território em diferentes senhorios, bispados, etc., cada um com a sua própria autonomia e percurso histórico. A uniformização era promovida pelos soberanos, não só porque facilitava as trocas comerciais e a cobrança de impostos, mas também pela importância simbólica que tinha submeter-se todo o país à utilização dos padrões de pesos e medidas do rei.

Os vários sistemas de medidas usados em Portugal até ao século XIX cruzam influências romanas, europeias e árabes. Esse cruzamento de influências é óbvio na terminologia metrológica, isto é, os nomes das unidades de medida (Tabela I). As próprias unidades de medida eram, em muitos casos, herança de um passado longínquo.

Até à introdução do sistema métrico decimal, as sucessivas reformas metrológicas não suprimiam os vestígios dos antigos sistemas europeus, árabes e romanos. No entanto, os termos metrológicos foram perdendo o seu significado original. Assim, por exemplo, se o *sextarium* romano era a 1/6 do *congius* (e portanto 1/16 do *modius*), já em Portugal o *sesteiro* foi sempre 1/8 do *moio*, etc.

Por sua vez, as novas unidades introduzidas por uma dada reforma normalmente relacionavam-se com as unidades antigas através de um factor numérico bem conhecido, que podia ser um número inteiro (2, 3, 4, ...) ou uma fracção simples (1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, ...). Ou seja, a nível numérico, mesmo quando certas unidades fundamentais desapareciam, elas continuavam, de certa forma, a estar na base dos novos sistemas.

A mais antiga documentação portuguesa, ainda que escassa, não deixa qualquer dúvida sobre a omnipresença da medição nas actividades humanas. A partir de finais do século X, algumas escrituras de compra e venda de terrenos fornecem as respectivas dimensões em passos, côvados e palmos.

A necessidade da medição estava também implícita nos censuais, que não eram mais do que inventários dos foros, rendas, pensões, etc. pagos à igreja numa determinada dio-

Tabela I. Origens de alguns termos metrológicos

	Origem romana	Origem europeia	Origem árabe
Medidas lineares	Palmo, Côvado	Vara, Alna	
Medidas de peso	Libra, Onça	Marco	Quintal, Arroba, Arrátel
Medidas de capacidade	Moio, Quarteiro, Sesteiro, Quinal	Búzio, Quaira, Tonel, Pipa, Pinta, Puçal, Choupim	Alqueire, Almude, Fanega, Cafiz, Celamim, Cacifo

cese. O *Censual de Entre Lima e Ave*, um dos mais antigos e importantes censuais da Europa, elaborado em 1085-1089, e o *Censual do Cabido da Sé do Porto*, elaborado menos de um século depois, em 1174-1185, embora conhecido através de uma cópia posterior com acrescentos, são dois exemplos de documentos portugueses deste tipo.

Com o avanço do tempo, vamos dispondo de cada vez mais documentação. São de citar as inquirições sobre os bens régios realizadas nos séculos XIII e XIV, nas quais há frequentes referências às medidas de diferentes localidades e, por vezes, até alguns dados mais concretos sobre as relações de conversão de umas para as outras. No século XIV, aparecem livros de posturas municipais que incluem frequentemente posturas sobre medidas.

Entre documentos de outro tipo, é de citar a famosa Lei da Almotaçaria, de 1253, na qual, pela primeira vez, são tabelados os preços de uma infinidade de produtos (o dinheiro tinha-se vulgarizado poucas décadas antes). Por aqui ficamos a saber a unidade de medida oficial para cada produto, embora não o seu valor ou equivalência. A importância da medida certa no quotidiano é ilustrada, por exemplo, na carta de fundação do mosteiro de Santa Clara de Vila do Conde, de 1318, a qual estipula a dose alimentar diária de cada freira: meia peixota, quatro pães de 6 onças (um total de 630g de pão cozido) e uma tagra de vinho, declarando-se que 6.5 tagras faziam um almude coimbrão (traduzindo, a tagra ou dose diária de vinho era de 1.2 a 1.3 litros). A referência ao padrão do almude era importante, pois, "se esta tagra se perdese, que fizesem outra pollo almude". Refira-se ainda um curioso documento de 1321, especificamente elaborado com o objectivo de registar para a posteridade as dimensões e o peso de um solho gigante pescado no Tejo, no qual o tabelião realça que "per minha mãao medi e vi a muitos outros medir e nas balanças dos pesos poer e pesar".

É sobretudo a partir das reformas metrológicas de meados do século XIV (Dom Afonso IV e Dom Pedro I) que começamos a poder colher informação mais abundante e objectiva sobre as equivalências entre as diferentes medidas utilizadas.

A cultura da medição

A documentação é, em geral, pouco informativa sobre as medidas efectivamente usadas, mas isto não é necessariamente um sintoma de falta de rigor. Na verdade, censuais, forais, diversos tipos de contratos, etc., eram elaborados e utilizados num contexto em que a tradição e a existência de padrões nas dioceses e nos concelhos eram suficientes para definir as medidas que deviam ser usadas. É claro que, passados alguns séculos, passadas também várias reformas metrológicas e, assim, perdido o contexto inicial, a documentação mais antiga apresenta-se, do ponto de vista metrológico, como uma verdadeira charada.

Ainda assim, essa documentação frequentemente deixa pistas que, quando relacionadas com informação colhida em documentação posterior, permitem identificar as equivalências das medidas utilizadas. Por exemplo, os forais urbanos do Condado Portucalense estipulam a utilização de um quarteiro de 16 alqueires. O leitor não conhecedor da metrologia desta época, fica na mesma, porque também não sabe qual era o valor do alqueire. No entanto, no tempo do Condado Portucalense, o alqueire era uma medida nova que tinha acabado de ser importada das regiões peninsulares sob domínio árabe. Muito provavelmente, nesta época, a *palavra* alqueire ainda devia designar uma medida única e bem conhecida. Alguns anos depois, talvez já existissem diferentes alqueires, razão pela qual as posturas municipais de Coimbra, de 1145, estipulam que o alqueire (de cereal) deveria ter o peso de 6.5 arráteis. A maioria das referências documentais que pretendem definir qual a medida utilizada são, todavia, mais vagas. Na maior parte dos casos, os documentos limitam-se a indicar a localidade que alberga o padrão da medida utilizada. É assim que surgem referências às medidas de Guimarães, Coimbra, Sangalhos, Santarém e tantas outras.

Entretanto, é muito provável que existissem listas de equivalências entre medidas e até diplomas régios sobre esse assunto. Isso mesmo é sugerido pelo foral manuelino de Redondo ao referir uma "jeral e verdadeira determinaçam destes regnos" relativa à relação de conversão entre o antigo alqueire de Dom Afonso Henriques e o alqueire de Lisboa, determinação essa que vinha "de muyto tempo pera qua". Infelizmente, não são hoje conhecidos diplomas medievais elaborados especificamente com o fim de definir o valor das principais medidas utilizadas em diferentes pontos do reino.

O domínio das medidas de capacidade foi sempre aquele em que se registou maior diversidade e, por isso mesmo, aquele que mais resistia às tentativas de uniformização metrológica. A diversidade por vezes suscitava a necessidade de relacionar diferentes medidas. Contudo, as relações indicadas nos documentos eram frequentemente o resultado de arredondamentos, por forma a que a aplicação prática dessas relações proporcionasse uma maior facilidade nos cálculos que fossem necessários.

As relações numéricas de conversão entre alqueires de Dom Afonso Henriques, de Dom Pedro I e de Lisboa, este último adoptado por Dom Manuel I, são bem ilustrativas da forma algo *elástica* como a matemática era aplicada na prática. Na primeira metade do século XIV, usava-se já em Lisboa um moio ou cafiz de 48 alqueires, o qual também se podia dividir em 72 alqueires de Dom Afonso Henriques. Portanto, o alqueire de Dom Afonso Henriques era considerado equivalente a uma fracção de 48/72, ou 2/3, do alqueire de Lisboa. Entretanto, Dom Pedro I introduziu um novo alqueire equivalente a uma fracção de 3/4 do alqueire de Lisboa. Podemos, assim, deduzir que o alqueire de Dom Afonso Henriques era uma fracção de $(2/3)/(3/4) = 8/9$ do alqueire de Dom Pedro I.

Vejamos agora como estas relações numéricas eram aplicadas na prática. O moio da jugada de 56 alqueires de Dom Afonso Henriques seria equivalente a $(8/9) \times 56 = 49.8$ alqueires de Dom Pedro I, valor que, naturalmente, seria arredondado para 50 alqueires. Isso mesmo determinou Dom Pedro I nas cortes de Elvas de 1361.

O mesmo moio da jugada deveria ser convertido para (2/3) × 56 = 37.3 alqueires de Lisboa. No entanto, os forais manuelinos declaram que o moio da jugada devia ser convertido para 36 alqueires de Lisboa. É esta, aliás, a conversão que o citado foral de Redondo afirma vir "de muyto tempo pera qua". Porquê 36 em vez de 37? Certamente porque 36 é divísivel por 4, facilitando assim a subdivisão do moio em quatro quarteiros. Na região do Vouga, onde o alqueire de Dom Afonso Henriques era conhecido com *alqueire de Sangalhos*, pagava-se um certo tributo de 8 alqueires, o qual deveria ser convertido para (2/3) × 8 = 5.3 alqueires de Lisboa, valor que foi arredondado para 5 alqueires. Talvez por isso, na região do Porto, o alqueire de Sangalhos era considerado equivalente a uma fracção de 5/8 (=0.625) do alqueire de Lisboa, inferior à fracção correcta de 2/3 (≈ 0.667).

No senhorio do mosterio de Grijó, no tempo de Dom Pedro I, a medida velha, seguramente uma variante do alqueire de Dom Afonso Henriques, foi considerada equivalente a uma fracção de 4/5 (=0.800) do alqueire de Dom Pedro I, inferior à fracção correcta de 8/9 (≈ 0.889). Algumas décadas depois, no bispado do Porto, o búzio (= 4 alqueires de Dom Afonso Henriques) foi considerado equivalente a 3 alqueires de Dom Pedro I, acabando assim por prevalecer uma fracção de redução de 3/4 (= 0.750). O mesmo tinha acontecido no arcebispado de Braga. Para aumentar a confusão, em Coimbra usava-se um alqueire um pouco inferior ao de Dom Afonso Henriques. Na verdade, o moio da jugada de 56 alqueires de Dom Afonso Henriques era equivalente a um moio de 64 alqueires de Coimbra. O alqueire Coimbrão tinha, pois, uma capacidade equivalente a uma fracção de 56/64, ou seja 7/8, do alqueire de Dom Afonso Henriques, que é o mesmo que (7/8) × (8/9) = 7/9 (≈ 0.778) do alqueire de Dom Pedro I. A sobrevivência do alqueire de Coimbra também ajudava a justificar as fracções de redução usadas no mosteiro de Grijó, no bispado do Porto e no arcebispado de Braga.

Como se vê, os nossos antepassados medievais faziam as suas contas com fracções e tinham critérios de arredondamento algo diferentes dos nossos. Enquanto nós arredondamos a um certo número de casas decimais, na idade média arredondava-se para valores que fossem multiplos de medidas menores. Por falar em medidas menores, é de realçar o facto de as diferentes medidas num sistema (os multiplos e submultiplos) se obterem a partir da unidade através de multiplicação ou divisão por 2, por 3 ou por um valor factorizavel em 2 e 3 (por exemplo 4 ou 12). Raras são as excepções a esta regra. Os antigos sistemas metrológicos nada tinham de decimal. Alguns, pelo contrário, até eram puramente binários, como acontece com o sistema de medidas de capacidade do Condado Portucalense ou o sistema de pesos de Dom Manuel I (Tabelas II e IV).

Falar da cultura da medição levar-nos-ia também ao tema do controlo metrológico, isto é, aos mecanismos através dos quais se procurava garantir a utilização das medidas legalmente estabelecidas bem como a sua adequada aferição. Não há, todavia, espaço para me alargar a essa temática no presente artigo.

Tabela II. Sistema de medidas de capacidade do Condado Portucalense

	Designação
64	*Moio*
16	*Quarteiro* (cereais) e *Puçal* (vinho)
8	Sesteiro
4	*Teiga* (cereais) e *Quarta* (vinho)
2	Almude
1	Alqueire

Relance histórico

A história da metrologia portuguesa pode dividir-se em três grandes épocas:

— Idade média, período caracterizado por uma grande diversidade metrológica;

— Época moderna, período em que todo o reino era suposto utilizar os padrões metrológicos de Lisboa, conforme determinado por Dom Manuel I.

— Época contemporânea, caracterizada pela implantação progressiva do sistema métrico decimal.

Dentro destas grandes épocas, encontramos algumas outras reformas com impacto significativo, seja num determinado tipo de medidas, seja numa determinada região.

Idade Média

Para o período medieval pré-nacional, é relativamente pouco o que se sabe sobre as medidas utilizadas, para além dos seus nomes. Para este período, os principais estudos disponíveis incidem sobre as medidas de capacidade. Sabe-se que, em algumas localidades, o almude ainda tinha um valor muito próximo do *mudd* hispano-árabe (0.7 litros), portanto bem diferente dos almudes a que estamos habituados (16 a 30 litros). Sabe-se, também, que o conde Dom Henrique (séculos XI/XII) procurou generalizar ao Condado Portucalense o uso de um moio equivalente à carga cavalar, ou seja, cerca de 220 litros. Este moio tinha várias subdivisões (ver Tabela II), entre as quais um almude de 6.7 litros e um alqueire de 3.4 litros. A base deste sistema parece ter sido o *faniqa* hispano-árabe cujo valor mais comum era 13.9 litros e que deu a nossa teiga.

A partir do último quartel do século XII, com Dom Afonso Henriques, entrou em vigor um novo sistema. A sua base é o búzio, medida importada do norte da Europa, onde era conhecida como *bushel* (Inglaterra) ou *boisseau* (França). O búzio de Dom Afonso Henriques tinha uma capacidade idêntica à do bushel inglês, isto é, cerca de 35 litros. Dividindo-o por quatro, Dom Afonso Henriques obteve o seu alqueire, cujo valor vem a ser igual ao do *modius* romano, 8.7 litros. O moio de 64 alqueires passou, assim, a valer cerca de 560 litros. De resto, a estrutura do sistema era similar à do Condado Portucalense, com excepção do almude que equivalia ao alqueire. O sistema de Dom Afonso Henriques não foi um sistema usado uniformemente em todo o país, pois, as terras com foral de Dom Henrique continuaram com o sistema do Condado Portucalense e outras terras continuaram com sistemas importados das regiões castelhanas vizinhas (Salamanca, Zamora, Ávila, etc.). Durante a vigência do sistema de Dom Afonso Henriques, entraram em utilização outras medidas de origem europeia, como é o caso da *pipa* e do *tonel*.

O primeiro domínio a conhecer uma significativa uniformização a nível nacional parece ter sido o das medidas lineares. Na verdade, a partir de meados do século XIII, começa a generalizar-se o uso da vara de 1.1m (subdividida em 5 palmos de 22 cm, três dos quais perfaziam um côvado de 66 cm). Já na primeira metade do século XIV, subsistindo a utilização de diferentes padrões, mandou Dom Afonso IV utilizar a alna (= côvado) de Lisboa para a medição dos panos. O certo é que o palmo que ficou em utilização até ao século XIX foi o palmo de 22 cm.

Pela mesma época, o sistema de pesos teria por base o *marco de Colonha* (o nome vem-lhe da cidade alemã de Colónia), principalmente usado para os metais preciosos e a moeda. O marco dividia-se em 8 onças, e 12.5 onças faziam um arrátel português. As unidades maiores eram a arroba e o quintal (ver Tabela III). Parece que também se usava uma libra de 16 onças, tal como em Castela (onde não se usava o nosso arrátel), embora esse facto esteja relativamente mal documentado. A conta de 12 arrobas perfazia o equivalente a uma carga cavalar.

No primeiro terço do século XIV, surge em Lisboa um novo sistema de medidas de capacidade, ainda baseado no alqueire legal (de Dom Afonso Henriques), mas desenhado para permitir uma fácil utilização de certas medidas de origem hispano-árabe e castelhana (alqueire de 13.9 litros, fanega de 4 alqueires, cafiz de 12 fanegas). Concretamente, a fanega de Lisboa foi assim arredondada para 6 alqueires legais (e portanto o alqueire de Lisboa passou a valer 1.5 alqueires legais ou 13.1 litros), permitindo que o cafiz de 12 fanegas de Lisboa pudesse ser tratado como um moio de 72 alqueires legais.

Já na segunda metade do século XIV, Dom Pedro I, empreendeu uma grande reforma das medidas de capacidade, no âmbito da qual procurou impôr a todo o reino o moio adoptado em Lisboa algumas décadas antes. Dividiu, no entanto, esse moio em 64 alqueires, obtendo, assim, um novíssimo alqueire de 9.825 litros. A estrutura dos sistemas do noroeste português manteve-se. O novo sistema de Dom Pedro I pode ser considerado o primeiro sistema de medidas de capacidade de âmbito verdadeiramente nacional. Dom Pedro I também parece ter aumentado o valor do arrátel para 14 onças, mantendo a estrutura do sistema de pesos.

Ao longo do século XV, houve várias alterações de curta vigência e/ou de âmbito apenas regional. Para esta época, contudo, já é possível determinar o valor do marco de 8 onças (230g, igual ao castelhano) e portanto o valor do arrátel de 14 onças (402.5g). Surgem referências à utilização do chamado *marco de Tria* para os produtos de mercearia. Este marco teria um valor próximo do marco de Troyes (244.8g), donde aliás lhe vem o nome. Num certo período, o arrátel de mercearia aparece com apenas 13 onças, as quais deveriam ser as do marco de Tria, ou próximo disso.

Época moderna

Finalmente, Dom Manuel I (1495-1521), no âmbito da reforma das ordenações e dos forais, empreenderá também uma reforma dos pesos e medidas tão importante que se manterá em vigor até ao século XIX. A primeira tentativa de reforma e compilação das ordenações do reino foi iniciada em finais do reinado de Dom João I e concluida já no reinado de Dom Afonso V, deixando como resultado as chamadas *Ordenações Afonsinas*. O complemento natural desta reforma seria a reforma dos forais.

Logo após a subida ao trono, em 1495, Dom Manuel criou uma comissão para examinar e dar parecer sobre a sua reforma dos forais. O rei pretendia submeter toda a nação a uma única norma jurídica e, ao mesmo tempo, actualizar os tributos estipulados nos velhos forais em função de moedas, pesos e medidas correntes e únicos.

Dom Manuel I tomou como ponto de partida os pesos e medidas de Lisboa, embora tenha introduzido algumas alterações. As medidas lineares continuaram a ser as que já estavam em utilização um pouco por todo o reino desde o tempo de Dom Dinis. As medidas de capacidade eram as usadas em Lisboa desde o século XIV, ou seja, um alqueire de 13.1 litros e uma fanega de 4 alqueires, um almude de 16.8 litros, dividido em 12 canadas ou 48 quartilhos, etc.. O moio, no entanto, passou de 12 para 15 fanegas. Os pesos passaram a ter como base um arrátel de 16 onças, em teoria equivalente à libra castelhana. O quintal manteve a relação tradicional com o arrátel, ou seja, o quintal continuava a ter 128 arráteis (arráteis que já tinham sido de 12.5 onças, depois 14 onças e agora eram de 16 onças), embora em Castela continuasse com as tradicionais 100 libras. Com a redefinição do arrátel, o sistema português de pesos passou nesta altura a ser puramente binário (Tabela IV). A carga cavalar tinha agora 10 arrobas.

Tabela III. O sistema legal de pesos no século XIII

	Libra	Arrátel	Kg
Quintal	100	128	45.900
Arroba	25	32	11.475
Libra	1	32/25	0.4590
Arrátel	25/32	1	0.3596
Marco	½	16/25	0.2295
Onça	1/16	2/25	0.028688

Tabela IV. Sistema de pesos de Dom Manuel

	Designação	Equivalência (Kg)
128	Quintal	58.752
32	Arroba	14.688
1	Arrátel	0.4590
1/2	Marco	0.2295
1/16	Onça	0.028688
1/128	Oitava ou Cruzado	0.003586

Antigos pesos de Lafões

Tendo passado recentemente um período de férias em Lafões, subregião beirã rica em património histórico e arqueológico, e aí tendo visitado os museus municipais de Oliveira de Frades e Vouzela, constatei que ambos possuiam pequenas colecções de antigos pesos ainda por estudar. Ora, estes pesos são de diversos tipos e, por isso, constituem uma boa ilustração para o presente artigo.

Os pesos existentes em Oliveira de Frades são apresentados na Figura 1. O peso maior é um peso de pedra, com argola de ferro, que representa uma arroba de 14.645 Kg, permitindo inferir um arrátel de 457.7g. Trata-se, portanto, de uma arroba aferida pelo padrão legal imposto por Dom Manuel I. O pequeno peso metálico tem o peso de 685g. Trata-se assim de um peso de 1.5 arráteis grosseiramente aferido pelo padrão manuelino. Finalmente, os dois pesos redondos de pedra são pesos de 1 e 1.5 arráteis, mas de um arrátel de 515g, claramente maior que arrátel o manuelino.

Em Vouzela, que foi sede do antigo concelho de Lafões, encontrei os pesos apresentados na Figura 2. A peça mais importante é a pilha de pesos que aparece à esquerda na imagem. Trata-se de uma pilha de pesos de arroba a que apenas faltam as três peças menores (a oitava de onça e as duas meias oitavas). A caixa e as 10 peças que se conservaram no interior pesam 14.690 Kg, permitindo inferir um arrátel de 459.3g, ou seja, um arrátel aferido pelo padrão legal. Esta pilha reproduz a tipologia das pilhas de pesos de Dom Manuel I e, inclusivamente, ostenta a legenda típica dessas pilhas: "HE * MANDOV * FAZERE * DOM * EMANVEL * REI * DE * PORTVGAL * ANO * DE * 1422". No entanto, há um erro grosseiro na data (devia ser 1499) e a primeira palavra devia ser "ME". Assim, há que concluir que esta pilha não é um original manuelino. Esta peça tem, entretanto, o mérito de nos alertar para a possibilidade de outras pilhas de pesos normalmente consideradas manuelinas também serem, na verdade, cópias.

Encontrei ainda em Vouzela um conjunto de 7 pesos com a forma de um copo invertido e com argola. O copo e a argola são de bronze. O interior, que alguns perderam e outros ainda conservam, deve ser chumbo. Os dois pesos maiores estão completos, tem a marca "CV" na base (câmara de Vouzela?) e pesam um deles 3.665 Kg e o outro 3.645 Kg. São portanto pesos de 8 arráteis, podendo inferir-se um arrátel de 456.9g, que segue o padrão legal. Estão ainda completos um peso de 445g (arrátel mal aferido) e um de 100g (quarta de arrátel mal aferida). Encontrei ainda neste núcleo um peso de pedra com argola de ferro pesando 635g. Provavelmente trata-se de um peso de 1.5 arráteis aferido por um padrão inferior ao padrão legal.

O aspecto mais consequente da reforma de Dom Manuel I consistiu na efectiva distribuição de cópias dos padrões dos pesos às principais localidades do reino, padrões esses fabricados na Flandres em 1499. Esse facto permitiu uma mais rápida uniformização dos pesos, mantendo-se esses padrões em uso até ao século XIX. Dom Sebastião I acabaria por sentir a necessidade de proceder da mesma forma relativamente às medidas de capacidade. Na verdade, este rei distribuiu cópias dos padrões reais de medidas de capacidade de secos e líquidos às principais localidades do reino. Relativamente às medidas lineares, nunca chegaram a ser distribuidos padrões, certamente por não se ter achado necessário.

No resto da Europa, o panorama de confusão metrológica e os esforços de uniformização eram similares. Após a unificação dos reinos de Castela e Aragão sob a coroa dos reis católicos, estes, em duas pragmáticas de 1488, mandam usar um único padrão de pesos, quer na pesagem dos metais preciosos, quer nas transacções comerciais. Em 1496-1497, Henrique VII de Inglaterra procedeu a uma importante reforma metrológica no seu país, no âmbito da qual foram enviadas cópias

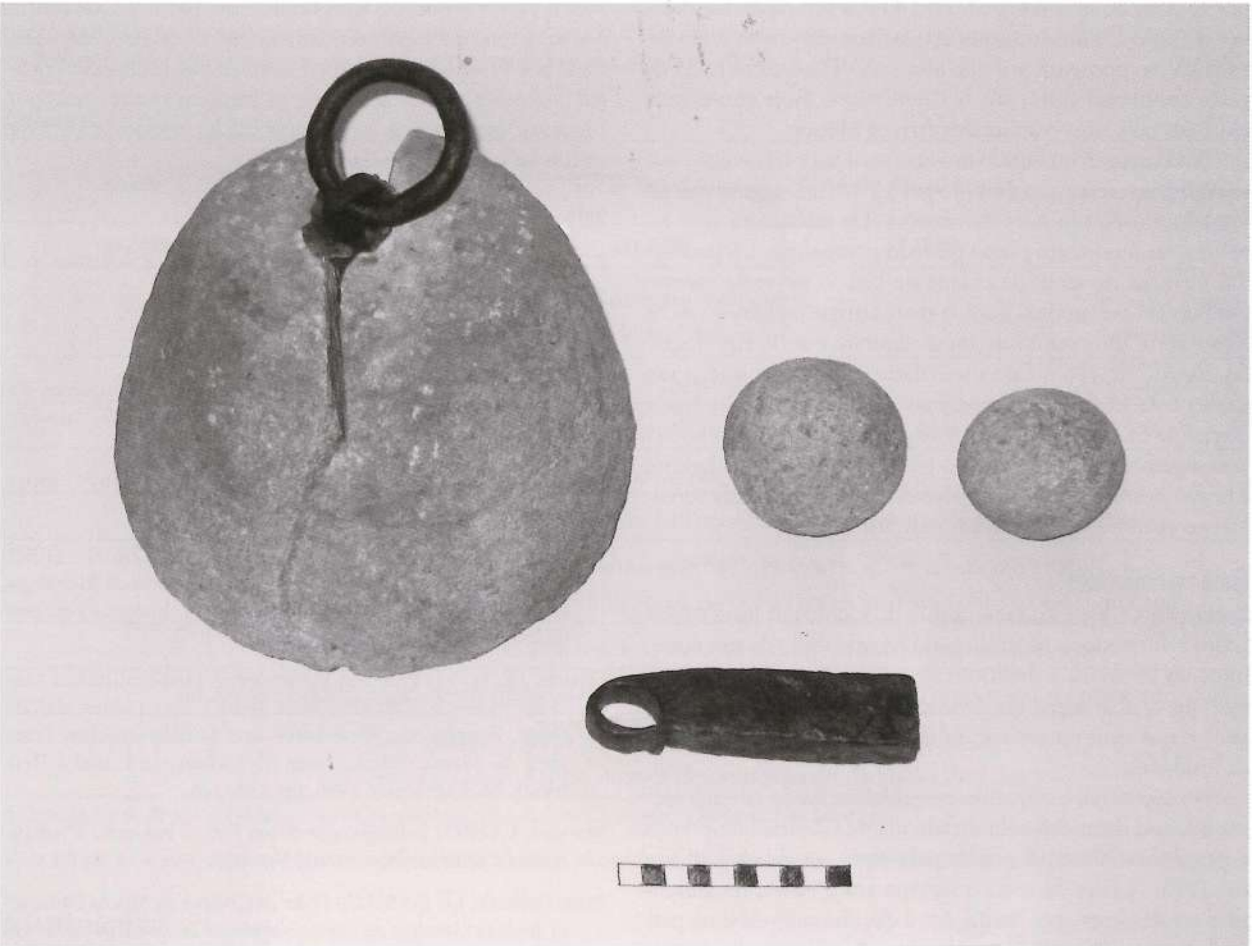


Figura 1

Figura 2

dos padrões dos pesos e medidas a 43 das principais localidades do país. É também desta época (segunda metade do século XV ou primeiros anos do século XVI) a famosa pilha de pesos conhecida como *pile de Charlemagne*, hoje conservada em Paris no Conservatoire des Arts et Métiers.

Em Portugal, o período de reconstrução e renovação que se seguiu ao terramoto de 1755 parece ter tido algum reflexo também no domínio da metrologia. De resto, estava-se no século das luzes e em pleno período pombalino. Os padrões das medidas de secos da cidade de Lisboa ter-se-ão mesmo perdido no terramoto, pois, o mais antigo padrão de secos existente é um padrão de meio alqueire em bronze dourado, datado de 1769. Esse meio alqueire permite inferir um alqueire de 13.6 a 13.8 litros, maior do que o alqueire tradicional de Lisboa e já claramente alinhado com Castela. No ano seguinte, foi concertado o padrão de pesos da cidade de Lisboa, original manuelino datado de 1499 e tradicionalmente guardado pela Confraria de Santo Eloy.

Época contemporânea

Entretanto, o espírito racionalista do século das luzes e o espírito reformador e centralista do regime saido da revolução francesa levariam à definição de um sistema métrico decimal que acabaria por ter divulgação em vários paises europeus e que está na génese do actual sistema internacional de unidades.

No essencial, a estrutura e equivalências do sistema métrico foram definidas pela Academia de Ciências de França a partir de 1791 e adoptadas pela nova república francesa em 1795. A base de todo o sistema era o *metro*, medida linear equivalente, por definição, à décima milionésima parte do quarto de meridiano terrestre. A adopção do sistema métrico suscitou muitas resistências na sociedade francesa, levando Napoleão a suspender a obrigatoriedade da sua utilização. Em 1840, o sistema métrico decimal voltaria a ser obrigatório em França, desta vez de forma definitiva.

Portugal não ficou alheio aos ventos da uniformização metrológica. Logo em 1802, foram obtidos de França os padrões do sistema métrico decimal. Os estudos e trabalhos entretanto realizados culminaram com a aprovação régia, em 1814, de um novo sistema de pesos e medidas puramente decimal, mas com terminologia portuguesa, sistema esse que assentava na equivalência entre a *vara* e o *metre* francês. A partir de 1816, foram distribuidos padrões das novas medidas, alguns dos quais ainda se conservam. No entanto, as vicissitudes políticas na primeira metade do século XIX não permitiram a efectiva aplicação do novo sistema.

As discussões sobre a introdução do sistema métrico decimal foram-se arrastando até que, em 1852, por um decreto com força de lei datado de 13 de Dezembro desse ano, foi adoptado o metro legal francês como base do novo sistema legal e, da mesma forma, foi adoptada toda a terminologia do sistema métrico decimal francês. Portugal foi, assim, um dos primeiros países a decretar a adopção deste sistema. Antes, apenas a Bélgica, Luxemburgo, Holanda, Chile e Espanha o haviam feito.

O sistema métrico decimal nasceu sob um lema universalista: "para todos os tempos, para todos os povos". De facto, vários países foram-no adoptando. Em 1875, a Convenção Métrica Internacional, ou Convenção do Metro, seria assinada por 17 estados da Europa e Américas, incluindo Portugal. Sabemos, no entanto, que as medidas tradicionais portuguesas, em especial as de capacidade, continuaram a ser utilizadas quase até aos nossos dias.

Nota

1 O autor agradece o envio de comentários e sugestões para `lsl@det.ua.pt`.

Bibliografia

Barroca, M.J. (1992) Medidas-Padrão Medievais Portuguesas, *Revista da Faculdade de Letras. História*, 2ª Série, vol. 9, Porto, pp. 53–85.

Le Bureau International des Poids et Mesures 1875–1975, BIPM, Sèvres, França, 1975.

Cruz, A., E. Filipe, F. Bragança Gil, V. Rivotti & C. Espinho (1990) *Pesos e medidas em Portugal: Exposição Nacional de Metrologia*, Instituto Português da Qualidade (coord.), Instituto Nacional de Investigação Científica, Lisboa.

Dotson, J.E. (1996) Practical Metrology in Medieval Italian Merchant Manuals, R.S. Elkar et al. (edrs.), *Vom rechten Maß der Dinge*. Beiträge zur Wirtschafts- und Sozialgeschichte. Festschrift für Harald Witthöft zum 65. Geburtstag 1. und 2. Teilbande, St. Katharinen 1996, pp. 116–126.

Mattoso, J. (1995) *Indentificação de um País*, 2 volumes, 5ª edição revista e actualizada, Editorial Estampa.

Preto Pacheco, J.F. (1938) *Do Poder de Compra da Moeda Portuguesa desde os Começos da Nacionalidade até Nossos Dias*, Editorial Império Lda, Lisboa.

Seabra Lopes, L. (1998) Medidas Portuguesas de Capacidade: do Alqueire de Coimbra de 1111 ao Sistema de Medidas de Dom Manuel, *Revista Portuguesa de História*, 32, pp. 543–583.

Seabra Lopes, L. (2000) Medidas Portuguesas de Capacidade: duas Tradições Metrológicas em Confronto Durante a Idade Média, *Revista Portuguesa de História*, 34, pp. 535–632.

Seabra Lopes, L. (2003) Medidas Portuguesas de Capacidade: Origem e Difusão dos Alqueires usados até ao Século XIX, *Revista Portuguesa de História*, vol. 36 (2), pp. 345–360.

Seabra Lopes, L. (2003) Sistemas Legais de Medidas de Peso e Capacidade, do Condado Portucalense ao Século XVI, *Portugalia*, Nova Série, XXIV, Faculdade de Letras, Porto, pp. 113–164.

Seabra Lopes, L. (2005) O Moio-Medida e o Moio dos Preços em Portugal nos Séculos XI a XIII, *Anuario de Estudios Medievales*, vol. 35 (1), CSIC, Barcelona, pp. 25–46.

Silva Lopes, J.B. (1849) *Memoria sobre a Reforma dos Pezos e Medidas em Portugal segundo o Sistema Metrico-Decimal*, Imprensa Nacional, Lisboa.

Skinner, F.G. (1967) *Weights and measures: their Ancient Origins and their Development in Great Britain up to AD 1855*, Her Majesty's Stationery Office, London.

Luís Seabra Lopes
Universidade de Aveiro

Mais perto da APM

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM:

Quadro 1

Sócio	**Sócio residente no estrangeiro**	**Sócio Estudante**	**Sócio Aposentado**	**@-Sócio***
44,50€	**48,50€**	**31,50€**	**35,00€**	**35,00€**
Revista *Educação e Matemática* impressa e *on-line* (saem 5 números por ano e uma delas é temática)				Revista *Educação e Matemática on-line*
APM*informação* impresso e *on-line* (5 números por ano)				APM*informação* on-line
Opção de assinatura da revista *Quadrante* impressa (2 números por ano -10,50 €)				
Acesso à zona *on-line* para sócios				
Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)				
Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras: 15% sobre o preço de capa				
Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições				
Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento				
Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção				

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336

Instituições

Quadro 2

Opções			**Valor**
Opção 1		Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)	**33€**
Opção 2		Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	**20€**
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	**44€**
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	**15€**
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* – 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	**63€**
	B	Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)	**15€**

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336

Publicações — Loja on-line

Agora já pode encomendar as publicações da APM na nossa loja virtual, no endereço http://loja.apm.pt/index.asp, onde tem todas as informações sobre as modalidades de pagamento. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

01 O ano escolar 2005/2006: Algumas mudanças e desafios
A Direcção da APM

Artigos

02 Os novos Standars do NCTM na entrada do século XXI
Henrique Manuel Guimarães

06 Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas
Um olhar sobre o encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes
Guilhermina Lobato
Caminhos e encruzilhadas: um título e um propósito
Joaquin Gimenez

13 Um olhar crítico sobre as provas de exame de Matemática do 9° ano
Ana Paiva e João Janeiro

18 Acerca dos fundamentos da Matemática
António M. Fernandes

24 V CIBEM
Lurdes Figueiral

27 A rampa de skate do tempo mínimo
José Luiz Pastore Mello

33 Programa de acompanhamento e formação contínua para os professores do 1° ciclo do ensino básico
Teresa Olga

42 A cultura da medição em Portugal ao longo da história
Luís Seabra Lopes

Secções

41 O problema deste número *José Paulo Viana*
Ai, tantos testes para corrigir

10 Tecnologias na educação matemática *Branca Silveira*
Blogs

09 Actualidades *Isabel Rocha* e *Manuela Pires*
Aprender com os outros

35 Materiais para a aula de Matemática *Lina Brunheira*
Um contra todos

36 Ano Internacional da Física
Modelação matemática na física do desporto *Cidália Macedo*

38 Leituras
Evidentemente *Luísa Solla*