Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ⇝ 5 números por ano

2005

82

Março ⇝ Abril

Preço 5,90€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
Branca Silveira Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2005
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
Porte Pago

Sobre a capa

Várias das contribuições para este número salientam a necessidade de ser proporcionada aos alunos a oportunidade para construírem de forma activa e participante o seu próprio conhecimento. De facto parece existir (pelo menos nas idades mais jovens) uma predisposição para a descoberta que, de algum modo, a institucionalização do acto de aprender tende gradualmente destruir A fotografia da capa documenta um desses momentos mágicos.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Cristina Cruz, Ana Patrícia Gafanhoto, Ana Paula Gonçalves, Cláudia Domingues, Cristina Pereira, Daniel Olesen, Graciete Botas, Helena Horta, Henrique Guimarães, J. Sousa Ramos, José Luiz Pastore Mello, Leonor Santos, Liliana Raposo, Liliana Ribeiro, Luís Reis, Maria de Jesus Valadas, Mercês Ramos, Natércia Parra, Nuno Santos, Paula Teixeira, Paulina Gomes, Paulina Rebelo, Teresa Melo.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Matemática e Física — uma oportunidade para aprender

Ana Paula Canavarro

Muitos lembrarão que 2000 foi o Ano Mundial da Matemática. Chegou agora a vez da Física, que em 2005 vê as Nações Unidas reconhecerem internacionalmente a sua importância no desenvolvimento do mundo actual. A este propósito, a Educação Matemática lançou uma secção temporária, tendo publicado, no número 81, um estimulante texto escrito pelo físico Carlos Fiolhais. Nele o autor sublinha que "Há entre a física e a matemática uma relação de grande proximidade, pode-se mesmo dizer de grande intimidade."

No entanto, se estas duas ciências parecem andar de mãos dadas, o mesmo não se pode dizer das disciplinas que as representam na escola. É certo que a cultura da escola tem sido vincadamente balcanizada, funcionando essencialmente por territórios disciplinares bem delimitados. Mas isto não explica tudo, nem em todo o lado. Na minha opinião, existe também uma dificuldade generalizada de entendimento entre os professores de Matemática e os de Física, por muito boa que seja a relação pessoal que possam manter. Eles olham-nos a nós, matemáticos, com curiosidade enquanto nos esmeramos a perseguir o rigor e a fundamentar as generalizações na análise cuidada dos casos particulares — enquanto eles conformam os casos particulares ao modelo geral que antecipadamente conhecem ... E nós olhamo-los com desconfiança quando nos dizem que a balança não nos revela o nosso peso mas sim a nossa massa e que a velocidade é uma grandeza vectorial e não um número ... Esta dificuldade de entendimento, muitas vezes apenas devida às diferenças de linguagem, constitui, no meu entender, uma das fortes razões para a reduzida interacção pedagógica entre disciplinas tão próximas. Na verdade, as colaborações entre professores de Matemática e Física, quando existentes, limitam-se muitas vezes a procurar resolver desarticulações entre as abordagens de conceitos incluídos nos programas de ambas as disciplinas.

Mas os tempos actuais trazem consigo uma novidade. Aquilo que nos finais dos anos noventa se tornou um dos grandes ícones do ajustamento dos programas do ensino secundário na Matemática, ganha forma nos programas de Física: a utilização de calculadoras gráficas e sensores é finalmente considerada sua parte integrante. Chegou agora a hora de os nossos colegas aprenderem a trabalhar também com esta tecnologia. Querem saber como controlar o número de algarismos significativos com que trabalham, como realizar recolhas com diversos sensores, como guardar grandes quantidades de dados de experiências em listas ... Mas também se interessam por saber resolver os seus problemas na calculadora e por compreender o significado do coeficiente de correlação na análise da validade de um modelo matemático gerado pela máquina.

Se aparentemente somos nós, professores de Matemática, que estamos agora em situação de vantagem e podemos ajudar os nossos colegas a trabalhar com as máquinas, a verdade é que também temos muito a aprender com eles. É que apesar de os professores de Física-Química dizerem por vezes coisas estranhas, sabem muito que a nós nos escapa. Falam com desenvoltura dos actuais problemas que afectam o planeta, compreendem o efeito de estufa, a poluição do ar, as radiações nucleares, a reciclagem do lixo ... Conhecem bem os fenómenos do *mundo material* — dos quais nós, com uma formação inicial essencialmente centrada no reino da matemática, temos apenas uma visão superficial. Este é precisamente um grande obstáculo à exploração das relações da Matemática com a realidade na sala de aula, que nos limita a possibilidade de desenvolver nos alunos a capacidade de usar a Matemática como instrumento para interpretar e intervir no mundo que nos rodeia.

No meu entender, a actual situação constitui uma excelente oportunidade para os professores de Matemática e de Física aprenderem uns com os outros. Para isso, há que reconhecer que temos muitos benefícios a retirar da interacção entre todos, embora tal seja difícil e exija predisposição. É que aprender com os outros não é só uma questão de oportunidade — é, sobretudo, uma questão de vontade e humildade.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

CASIO® CALCULADORAS PARA O ENSINO

A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado, perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas, através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional Casio.

GRÁFICAS

CFX 9850 Gb Plus

- Visor a cores
- 32 Kb Ram + 28 Kb Rom
- Estatística Avançada
- Cálculo Financeiro
- Matrizes
- Complexos
- Raízes Reais e Complexos
- Derivados
- Cónicas
- 10 Modelos de Regressão
- Biblioteca Incorporada
- Ligação a PC, Analisador de Dados, e Vídeo/TV
- Modelo com Painel para Retroprojector

FX 1.0 Plus

- Memória Flash 768K + 144K Ram (cerca de 1 Megabyte)
- Excelente Visor Monocromático
- Funções Gráficas de Alto Nível
- Rápido Acesso aos Menus e Diversas Opções
- Gráficos Dinâmicos e Duplas – – Cónicas – Complexos
- Estatística – Equações até 30 Incógnitas
- Matrizes – Integração – Cálculo Diferencial
- Operações Lógicas – Programação Tipo Basic
- Actualização pela Internet com Programas e Aplicações
- Linguagem de Trabalho e Aplicação da Linguagem Portuguesa (download da Internet)

e ainda: FX 7450 G, FX 9750, Álgebra FX 2.0

ACESSÓRIOS P/ GRÁFICAS

CABO SB 87

Ligação a PC das gráficas CASIO com software FA123

TV/VÍDEO - Vi 9850 G

Ligação a TV e Vídeo projector da CASIO CFX 9850 Gb Plus

KITS PARA RETROPROJECTOR

Conjunto Máquina + Data Display + cartão emulador

ANALISADOR DE DADOS

Recolha de Dados vários com sondas incluídas e ligação das gráficas CASIO; Analisador EA-100, Sensor de Movimento EA-2, Sensores da Vernier

CIENTÍFICAS

FX 82

FX 570

FX 350

Científicas de alto nível, Simples, Económicas, Poderosas

- Visor com 2 linhas

ELEMENTARES

HS 8 ER

HL 820 ER

SL 450

- Robustas
- Económicas
- Modelos ER com cálculo de EUROS

P.E.C. Programa Educacional CASIO

Apoio Técnico e Pedagógico - Programa de Empréstimos - Cursos de Formação

O PEC - Programa Educacional CASIO, numa das suas várias vertentes, desenvolve **cursos de formação** (gratuitos), tendo como objectivo familiarizar a classe docente com a tecnologia das calculadoras gráficas e a sua aplicação aos novos programas de matemática.

O programa de cursos de formação desenvolvido pela CASIO, conta com o apoio de uma Equipa de Professores de Matemática a nível nacional, que não só realizarão os cursos como **também responderão a qualquer solicitação técnica e/ou pedagógica**.

CONTACTOS

APOIO PEDAGÓGICO POR TELEFONE: 213 122 868

E-MAIL: ana.margarida@beltraoc.pt

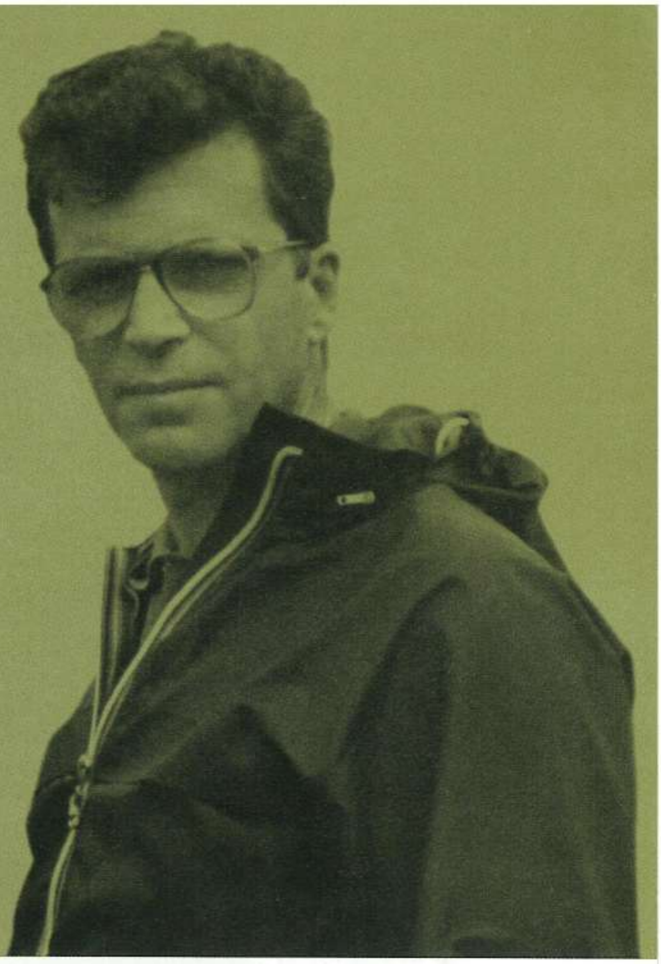
CASIO Japão: ACTIVIDADES DOWNLOADS

www.casio.co.jp/edu_e/

BELTRÃO COELHO

Lisboa, Porto, Barreiro, Braga, Aveiro, Coimbra, Santarém, Setúbal, Faro, Funchal e Sintra

www.beltraoc.pt



Paulo Abrantes e a avaliação

contributos na Educação e Matemática

Leonor Santos

Se fizermos uma leitura sobre as diversas contribuições do Paulo na revista constatamos que existem relativamente poucas referências à avaliação. Das 35 contribuições que ele aqui escreveu, entre editoriais, artigos, notícias e materiais para a sala de aula, apenas em quatro pude identificar referências à avaliação. Sabemos que a avaliação era apenas uma área de interesse do Paulo, entre outras. A meu ver, o seu interesse pela avaliação decorria acima de tudo do reconhecimento da importância decisiva que a avaliação tem na educação matemática, em particular na forma como poderá, em certas condições, constituir um obstáculo à inovação. Deste modo, o Paulo não deixava de lhe referir sempre que tal fosse para si relevante. Tal pode ser confirmado, se atendermos que uma das referência diz respeito a práticas avaliativas num contexto de ensino-aprendizagem, o que é certamente coerente com a perspectiva que sempre defendeu da avaliação ser parte integrante do currículo e não algo que se discute à parte. As três restantes são tratadas ao nível do editorial da revista e dizem respeito sobretudo à componente mais externa da avaliação e aos seus múltiplos pontos críticos e implicações. Mas vejamos, mais em pormenor, quais as principais ideais que podemos encontrar nestes diferentes contributos do Paulo na revista *Educação e Matemática*.

Uma avaliação alternativa

Comecemos por um artigo de 1992, revista nº 23, onde o Paulo descreve e analisa um concurso *de características originais* para alunos do 9º ano do concelho da Amadora, que se realizou na Escola Secundária da Amadora. O concurso, intitulado *Matemática & Realidade*[1], inscreveu-se numa actividade do Mat_{789}[2]. Inicialmente, o concurso foi pensado como forma de procurar perceber como os alunos do projecto eram capazes de responder a um problema realista desconhecido, mas ao decidir-se alargar a outros alunos, foi acrescentado o objectivo adicional de "chamar a atenção para o interesse educativo de um tipo de problemas pouco considerado nos programas e aulas de Matemática" (p. 25).

Dado ser um concurso, a avaliação surge aqui apenas como um processo terminal. Mas, tendo em conta a natureza desta actividade, necessariamente há que pensar como fazer e que características tem a avaliação a desenvolver neste contexto. A necessidade de desenvolver uma prática avaliativa alternativa coerente é um aspecto que o Paulo chama a atenção. Como afirma:

> A maneira de avaliar as aptidões correspondentes não será a mesma: para saber se um aluno é capaz de resolver uma equação, podemos trocar coeficientes e sinais a uma que ele já tenha resolvido; mas para avaliar as suas capacidades de enfrentar um problema novo, não vamos certamente trocar os semáforos (de um projecto realizado) por um polícia sinaleiro (p. 29)

As características da avaliação, então desenvolvida, foram, segundo o Paulo, bem diferentes daquelas que caracterizam os testes habituais. Em vez de uma avaliação relativa, em

que cada aluno é comparado com o grupo turma, desenvolveu-se uma avaliação sobretudo absoluta:

Mais *absoluta* do que relativa — cada trabalho tem que ser apreciado de acordo com os critérios gerais mas também com critérios específicos que atendam à maneira como o grupo abordou o problema (não se trata de comparar uns com os outros mas de apreciar o *valor absoluto* de cada trabalho. (p. 28)

De uma avaliação normativa, optou-se por uma avaliação criterial, isto é, apreciaram-se os trabalhos tendo em conta os indicadores estabelecidos inicialmente. Também a classificação foi outra alteração que se verificou. De uma escala quantitativa, optou-se por uma apreciação qualitativa, vista como mais adequada à natureza do trabalho a apreciar:

Mais qualitativa do que quantitativa — faria sentido atribuir um nível a cada trabalho que nada teria de arbitrário mas seria justificado, caso a caso, com base nos critérios gerais e específicos referidos. (p. 28)

Por último, e depois de uma apreciação analítica de cada trabalho, baseada nos parâmetros definidos, foi também feita uma apreciação global de todo o trabalho:

Mais global do que a resultante de pontuações atribuídas a diversas componentes — é essencial fazer-se uma apresentações global de cada trabalho, pesando os seus aspectos positivos e negativos. (p. 28)

Ao enunciarmos cada um dos princípios orientadores do processo desenvolvido foi feita por diversas vezes referência a parâmetros de avaliação pré-definidos. A explicitação de um conjunto de indicadores que pudessem servir de base à apreciação, por parte do júri, da qualidade de cada trabalho produzido foi realmente realizada. Os parâmetros de avaliação considerados foram os seguintes:

a pertinência e viabilidade da resposta em relação com a situação proposta; a relevância e correcção dos aspectos matemáticos envolvidos; a qualidade da argumentação; a clareza, a organização e originalidade do trabalho. (p. 28)

A natureza aberta da tarefa matemática proposta neste concurso permite-nos esperar a impossibilidade de prever todas as possíveis situações que podem ocorrer, situações estas consideradas como a evitar e vistas como problemáticas numa avaliação que se rege por um paradigma positivista da medida, onde a objectividade e o rigor são as palavras de ordem. Neste caso, contudo, este não é o paradigma seguido. Como tal, a equipa respondeu com naturalidade e engenho a situações não esperadas como, por exemplo, no caso de um trabalho que, embora apresentasse alguns problemas de funcionamento do semáforo, foi muito original. Foi-lhe atribuído um prémio especial, o prémio da originalidade, como nos explica o Paulo:

Nestas situações, há (felizmente) factos imprevisíveis. Surgiram trabalhos que, não sendo globalmente os melhores, tinham aspectos muito bons, o que levou o júri a atribuir prémios especiais, como se faz nos Óscares do cinema ... Um deles foi o da *originalidade* — atribuído a um trabalho de maquete a três dimensões, feita em cartão. No entanto, a proposta não era adequada nalgumas das fases do ciclo de funcionamento dos semáforos e a explicação era incompleta. (p. 28)

Em síntese, embora apenas num artigo, o Paulo apresenta-nos e discute as partes mais importantes de uma prática avaliativa que se pretende ser coerente com os objectivos do ensino da Matemática, explicitando os seus princípios orientadores, definindo parâmetros de avaliação e alertando para a necessidade de os ajustar às situações naturalmente imprevisíveis. Mas esta discussão assenta numa experiência concreta e realmente desenvolvida, contribuindo, deste modo, não só para uma compreensão mais profunda destas ideias essenciais, mas igualmente dando o seu testemunho de que estas práticas avaliativas são algo que é realmente possível levar à prática e não apenas ideias de alguns teóricos que não conhecem a realidade da prática lectiva das nossas escolas.

A avaliação externa: uma questão problemática

Da leitura dos três editoriais do Paulo (revistas nº 16, 303 e 39) que fazem referência a aspectos da avaliação, desenvolvida por outros que não o professor de Matemática dos alunos, é possível destacar algumas questões essenciais que apresentarei de seguida.

Um dos argumentos que habitualmente se ouve enunciar como defesa dos exames é o de que estes contribuem para o cumprimento dos programas. Tal era assim no passado, tal acontece no presente. Recorde-se a situação do actual ano lectivo. Este ano, como se pode ler no Despacho Normativo nº 1/2005, os exames do 9º ano ao terem um peso de 25% não vão ter qualquer influência sobre a decisão da conclusão ou não da escolaridade obrigatória. Contudo, eles mantêm-se. Porquê? Porque desta forma os professores vão ter que cumprir o programa. Tal já alertava e problematizava o Paulo, em 1994:

Ouve-se falar que, para o ano, haverá exames nacionais. As provas globais teriam sido uma encenação, uma espécie de ensaio? A verdade é que os argumentos que invocavam a reforma desapareceram da boca dos responsáveis e foram substituídos pelas habituais acusações aos professores (como nas chicotadas psicológicas do futebol em que o treinador é despedido porque não se podem mandar embora os jogadores e muito menos os dirigentes que têm sempre razão). A ministra chegou a declarar, no Parlamento, que as provas globais teriam, pelo menos, a vantagem de obrigar os professores a cumprir os programas! (p. 1)

Esta ideia de justificar a avaliação como meio de pressão para o cumprimento dos programas (entendendo-se que cumprir o programa é apenas trabalhar todos os conteúdos matemáticos, o que é extremamente redutor, ficando muito aquém daquilo que hoje se entende por programa) subentende que só assim se tem a garantia de que o professor será um profissional responsável. É uma perspectiva de avaliação como forma de controlo, assente numa lógica de suspeição. Esta visão, aplicada ao professor, tem uma outra equivalente para o aluno. Nela acredita-se que o aluno só quer aprender e só estuda porque assim é obrigado. Mais, não só se crê que assim é, como também tudo se faz para que o aluno também pense do mesmo modo. Mas será isto o que pretendemos com a Educação? Serão estes os jovens que queremos para cidadãos autónomos e responsáveis na sociedade do futuro? É esta a questão que nos deixa para reflexão o Paulo quando afirma:

Em alturas como esta, questionamos as nossas concepções mais profundas: Acreditamos que os alunos só vão estudar (treinar-se para) com a ameaça do exame e, se assim suceder, ficamos satisfeitos? (1996, p. 1)

Poder-se-ia dizer que a argumentação na defesa dos exames não é convincente, mas que os seus resultados são uma mais valia pelo que nos dão de informação, valendo a pena tê-los. Esta não é, contudo, a posição do Paulo. O Paulo questiona qual é, de facto, a informação que podemos recolher dos resultados do exame. Por outras palavras, que informação nos dão as notas dos exames:

(...) temos de compreender o que dizem (e o que não dizem) as notas. Estas teriam sido mais elevadas com provas mais fáceis ou com mais treino em certos tipos de exercícios e, no entanto, isso não significaria que os alunos, afinal, tinham uma boa formação matemática, gosto pela matemática e compreensão da sua natureza, ou capacidade para utilizá-la na resolução de problemas. (1996, p. 1)

O Paulo alerta-nos ainda para os riscos que os exames podem trazer para o ensino e aprendizagem da Matemática, questionando até que ponto não são remetidos para segundo plano a maior parte das orientações curriculares que se têm defendido nas últimas décadas na educação matemática:

É verdade que temos de reflectir sobre o ensino da matemática. Mas temos que saber para onde queremos continuar. Se a nossa grande meta é o exame, então pensemos nas consequências. O exame torna-se o objectivo, o que vem para exame o programa, o ensino da matéria para exame o método — escreveu Freudenthal há mais de 20 anos. É isto que queremos para os nossos jovens, partindo do princípio (mais do que duvidoso) de que eles, como geração, o aceitam? Se é isto, então para quê perdermos tanto tempo a discutir a capacidade de pensar e comunicar matematicamente, a ligação da Matemática à realidade, o papel educativo da história da Matemática ou as possibilidades de os alunos fazerem investigações e projectos em Matemática? (1996, p. 1)

Perante tal situação, que não é de hoje, mas que nos acompanha há mais de uma década, pergunto-me: não terá chegado o momento de não mais adiarmos uma atitude de certo conformismo de todos aqueles para os quais as diversas formas de avaliação externa constituem uma ameaça real para a consecução das orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática? Qual a nossa quota parte de responsabilidade na educação matemática que se vive, que se tem vivido, em Portugal? "Não nos podemos limitar a dar aulas, fazer exames, cumprir instruções. A alternativa não é fazer isso, nem dizer mal de tudo, nem reduzir as nossas pretensões a mais dinheiro e mais horas por semana para "cumprir o programa". Temos o direito de discutir os objectivos e os efeitos do nosso trabalho perante os alunos e a sociedade, à luz da nossa experiência única e do nosso papel na educação" (1990, p. 1).

A concluir

Da breve análise que acabei de apresentar sobre as intervenções que o Paulo fez para a revista Educação e Matemática que abordam o tema da avaliação, ressalta a actualidade das questões que aí se discutem. O período de tempo que separa os documentos em análise é de seis anos: o primeiro é de 1990 e o quarto de 1996. Tendo em conta que estamos em 2005, podemos afirmar que nos estamos a reportar a um período de quinze anos. Mas se vos perguntar em que data foi escrita a seguinte frase: "Será reposto um exame no final do 9° ano, a diversidade de interesses é para respeitar mas há disciplinas que pesam mais (...) do que outras", o que me responderão? 2005 ou 1990, data em que realmente o Paulo escreveu esta afirmação?

A actualidade a que me reporto é mais um problema a acrescentar a tantos outros que a educação matemática tem de enfrentar. É um indicador do pouco que temos evoluído, pelo menos nas questões que se relacionam com a avaliação. Poder-me-ão dizer que os exames são uma questão recorrente, que apenas existem em um ou dois anos ao longo de doze anos de escolaridade, não é portanto o que é realmente importante ou mais significativo! Muito embora não concorde com esta posição, admitamos, por momentos, que assim o é. Mesmo assim, quantos exemplos de práticas avaliativas se podem hoje encontrar que vão de encontro às actuais orientações curriculares do tipo das descritas pelo Paulo em 1992, numa situação concreta da relação da Matemática com a realidade? Que princípios moldam as práticas avaliativas na sala de aula? Quando acontecem essas práticas? Como são feitas e com que fins? Será a avaliação reguladora uma realidade que acompanha, de facto, o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática? É, de facto, a avaliação uma parte constituinte do currículo?

Em síntese, será que aquilo que o Paulo escreveu, embora pertinente na altura, hoje não tem grande interesse? Ou, pelo contrário, são leituras extremamente recomendáveis pelas questões actuais que levantam? As mudanças em educação são lentas, mas terão de ser tão lentas assim? Certamente que hoje ainda mais do que ontem, a chamada de atenção do Paulo ao afirmado por Morgen Niss é particularmente significativa: "Ser-nos-ão exigidos enormes esforços em termos de reflexão, discussão, recursos, vontade política" (1990, p. 1).

Notas

[1] A tarefa proposta aos alunos foi a de fazerem um estudo que levasse à colocação de um sistema de semáforos num certo cruzamento da cidade da Amadora.

[2] Este projecto foi coordenado por Paulo Abrantes e desenvolveu um currículo inovador para o 3° ciclo do Ensino Básico, envolvendo quatro turmas e duas escolas secundárias, cujos alunos foram acompanhados desde o 7° ao 9° anos de escolaridade.

[3] Este editorial foi escrito em colaboração com Ana Vieira.

Referências

Abrantes, P. (1990). Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas ... *Educação e Matemática*, *16*, 1.

Abrantes, P. (1992). Pode-se ensinar a usar na escola a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, *23*, 25–29.

Vieira, A & Abrantes, P. (1994). Reforma, mentiras e professores. *Educação e Matemática*, *30*, 1.

Abrantes, P. (1996). Os "bons velhos tempos" são velhos mas não eram bons. *Educação e Matemática*, *39*, 1.

Leonor Santos
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Paulo Abrantes e a experiência matemática

contributos na Educação e Matemática

Henrique Manuel Guimarães

A resolução de problemas pode ser, na aula de Matemática, ao mesmo tempo fascinante e difícil. Fascinante porque se torna muitas vezes num campo de descobertas, onde as coisas novas acontecem. Difícil, por isso mesmo, porque não se reduz a uma listagem de factos que se estudam previamente e se transmitem mas é acima de tudo uma actividade que se realiza sempre pela primeira vez e para a qual a experiência anterior só indirectamente conta.

Paulo Abrantes

A contribuição do Paulo Abrantes na revista, com os inúmeros artigos, editoriais e outro tipo de textos que aí publicou de forma continuada, foi rica e diversa, quer nas modalidades que essa contribuição assumia, quer nos assuntos que abordava. Um dos temas que sempre lhe foi muito caro era a resolução de problemas o que, naturalmente, levou a uma presença significativa deste tema nos textos que escreveu, muitas vezes em articulação com um outro que igualmente fazia parte dos seus interesses e preocupações principais: as relações da Matemática com a realidade.

Na verdade, se percorrermos os seus escritos, sem dificuldade reconhecemos o interesse e a importância que Paulo Abrantes atribuía a estes temas, quer enquanto aspectos ou dimensões da experiência matemática, quer do ponto de vista da sua inserção no currículo e utilização em aula. Subjacente a este interesse estavam duas convicções inter-relacionadas, nele sempre muito presentes: a valorização do papel do aluno na aprendizagem e a necessidade de uma Matemática significativa nas escolas.

No número um da *Educação e Matemática* publicado em 1987, Paulo Abrantes no seu editorial, entre outros assuntos, defende e explica a necessidade de uma renovação no ensino da Matemática. Na linha do que vinha sendo defendido em muitos sectores da comunidade educativa,

apresenta um conjunto de "novas orientações" para uma melhoria desse ensino que abre com a chamada de atenção para a necessidade de que "os alunos assumam um papel mais activo e interveniente na construção do seu próprio conhecimento" e termina sublinhando a necessidade de se conferir "maior importância à resolução de problemas, às aplicações e às relações interdisciplinares" (p. 4).

Depois deste editorial, o primeiro artigo que o Paulo publicou na revista foi no número imediatamente a seguir e é justamente sobre um problema — *E a Lua aqui tão perto*[1] — como também seria o artigo *Triângulos dourados*[2] que elaborámos em conjunto e que foi publicado não muito tempo depois. Trata-se, em ambos os casos, de problemas de enunciado relativamente curto que lidam "com coisas simples e bem conhecidas", sem que todavia sejam questões triviais ou de "mera aplicação de qualquer propriedade, conceito ou teorema acabados de estudar" (EeM n° 6, 1988, p. 11). Um e outro põem em jogo ideias matemáticas relevantes, permitem diferentes abordagens e a sua solução é, podemos dizer, "surpreendente".

No primeiro dos artigos atrás mencionados, é relatado um episódio numa das aulas em que o problema foi trabalhado usando um programa de computador feito na linguagem BASIC — em voga na época concorrendo com a linguagem LOGO — em que um aluno, no final da aula, pede para fazer modificações no programa começando por fazer variar a espessura do papel e depois a distância da Terra à Lua. O aluno, diz-nos no relato, usa vários valores, observa as consequências das modificações efectuadas, saindo depois da aula sem fazer perguntas. "Aquilo que este episódio me sugere", diz o Paulo, "é a importância que julgo dever ser atribuída a actividades em que os alunos tenham liberdade para realizar experiências pessoais podendo assim procurar respostas para as suas dúvidas" (EeM nº 2, 1987, p. 12).

Sobressai aqui a importância dada à autonomia do aluno e à sua capacidade de trabalhar de forma independente, bem como a valorização da componente *experimental* na aprendizagem da Matemática. Esta valorização é mais visível ainda quando, também a propósito do mesmo episódio, nos diz: "surge assim a ideia de substituir, no processo de ensino-aprendizagem, o esquema *certo ou errado* por uma abordagem do tipo 'que acontece se...'" (EeM nº 2, 1987, p. 12). A autonomia, o trabalho independente, individual ou em grupos, e o 'experimentar' por parte dos alunos, com o sentido referido, são ingredientes da experiência matemática claramente valorizados, tendo subjacente o estímulo à exploração, à interrogação, à descoberta, associado à postura do professor mas também à natureza da tarefa.

Na apresentação da secção *Materiais para a sala de aula*, uma das secções da revista que o Paulo privilegiava, diz: "a preferência será dada a fichas de descoberta, de exploração ou de investigação. Não pensamos publicar fichas de exercícios mas sim sugestões de actividades que possam desenvolver a criatividade e as capacidades de descoberta e de investigação dos alunos (EeM nº 4, 1987, p. 18). É ele que introduz a primeira ficha publicada — *Uma investigação com rodas dentadas* (da autoria de Pedro Pimentel) — chamando a atenção para o facto de que a proposta apresentada se relacionava com "a primeira questão de natureza científica que terá entusiasmado Papert, o criador da linguagem LOGO" (p. 18).

Contribuições como estas, sobre um problema particular e formas de o explorar e utilizar com os alunos e outros artigos que publicou sobre a resolução de problemas[3], expõem algumas das suas ideias sobre o que é um *bom* problema[4], mas principalmente o modo como encarava a resolução de problemas do ponto de vista da sua utilização no ensino e o que mais valorizava no que deve ser proposto em aula "para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa": "proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações" (EeM nº 8, 1988, p. 35).

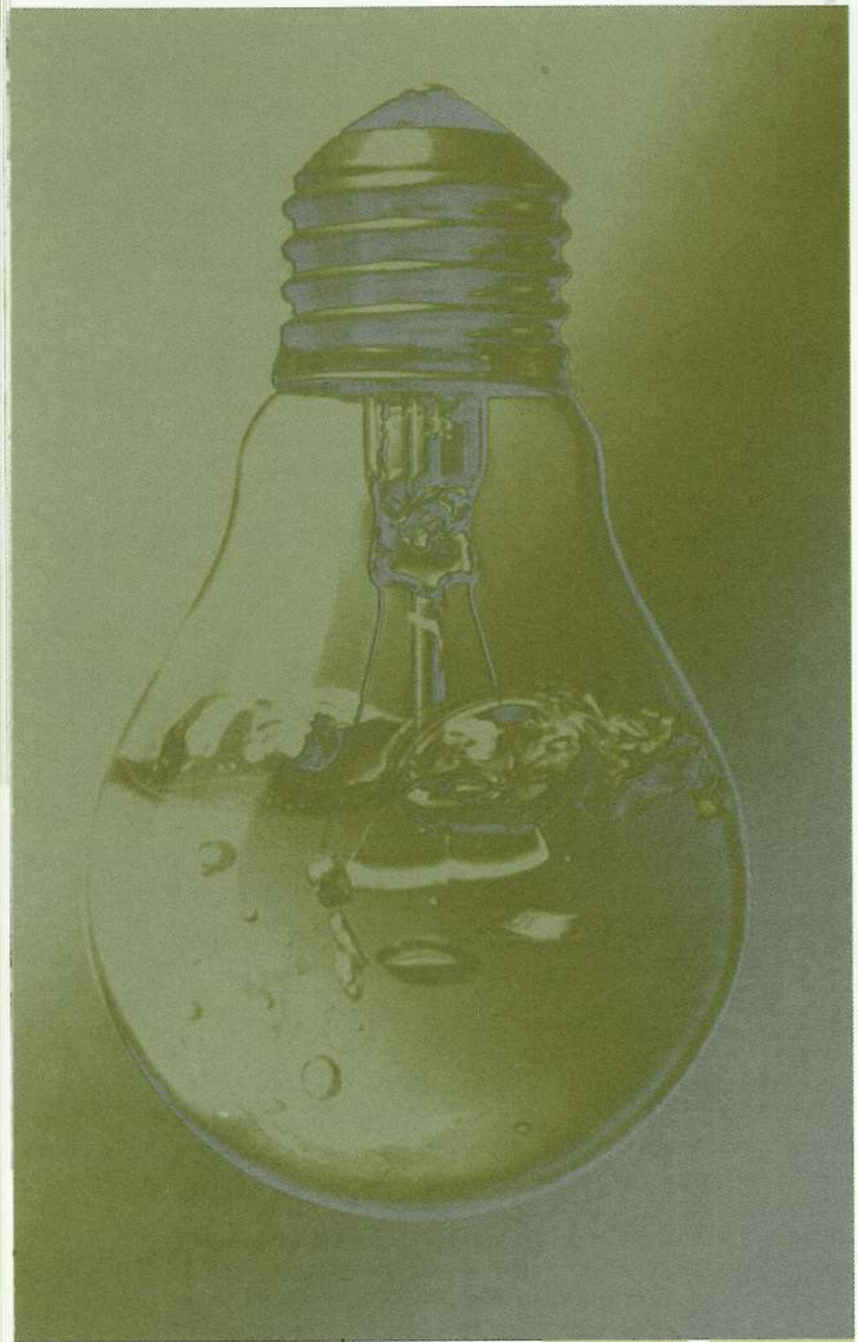
Em finais de 1988, a *Educação e Matemática* publicava um número com um "tema central" que era a resolução de problemas. No editorial *Mudam-se os tempos, mudar-se-ão as vontades?*, Paulo Abrantes começa por se referir a um desabafo que diz frequente entre alguns professores — "gostaria de resolver problemas com os meus alunos mas não posso, não tenho tempo, preciso de cumprir o programa!"— acrescentando com o toque de humor que lhe era característico: "não há memória de se ter ouvido dizer: gostaria de resolver mais exercícios de operações com polinómios mas não posso, não tenho tempo, preciso de resolver problemas para cumprir o programa" (EeM nº 8, 1988, p. 1).

Criticava assim os programas *antigos* e interpelava com ironia os professores, ao mesmo tempo que alertava para o que os *novos* programas deviam consagrar: "a resolução de problemas deve ser não só um objectivo geral e uma metodologia privilegiada mas ainda um conteúdo essencial" ou seja, como também diz, que "conhecer e ensaiar estratégias de resolução de problemas, conjecturar, explorar situações, matematizar, argumentar, etc, devem ser elementos obrigatórios do programa"; deste modo, para cumprir o programa, ter-se-ia que "proporcionar aos alunos actividades ricas e diversificadas em que, claramente, esses elementos constituam o fundamental" (EeM nº 8, 1988, p. 2).

A resolução de problemas como um conteúdo, como uma metodologia, como uma meta no ensino da Matemática, neste último caso entendida como o desenvolvimento nos alunos da capacidade a ela associada. Três ideias que, a serem consideradas, implicavam, como Paulo Abrantes faz notar, uma nova visão do programa, relacionando temas, objectivos métodos e avaliação, e uma maior ênfase nos objectivos ao nível dos *processos*. Numa altura em que os programas pouco mais tinham que uma lista de temas e tópicos matemáticos e um conjunto de objectivos comportamentais, a ideia de uma maior ênfase nos processos tinha toda a justificação, que hoje ainda terá, apesar das diferenças — nos programas e nas práticas em muitas escolas — que não cabe aqui enunciar.

No entanto, certamente reconheceremos que binómios como conteúdos/metodologias, conteúdos/processos ou conhecimentos/capacidades são (alguns dos) aspectos problemáticos no ensino da Matemática, questões persistentes, *não resolvidas*, e que vale a pena ter sempre presentes. A propósito de conteúdos e processos, por exemplo, não será por acaso que, nos últimos *Standards* do NCTM há o cuidado explícito em considerar que esses dois domínios não devem ser vistos e trabalhados como domínios disjuntos, mas como áreas fortemente inter-relacionadas, "inextrincavelmente ligadas", como é afirmado no capítulo introdutório, onde se especifica esta ideia exemplificando: "Não conseguimos resolver problemas sem compreender e utilizar conteúdos matemáticos" (NCTM, 2000, p. 7)[5]. Na apresentação do conjunto dos dez *standards* que são propostos, acrescenta-se ainda a este respeito: "os processos podem ser aprendidos no interior das Normas de Conteúdo e o conteúdo poder ser aprendido no interior das Normas de Processo" (pp. 30–31). E parece uma verdade de La Palice ...

A epígrafe que utilizo para abrir este texto sobre a contribuição do Paulo Abrantes na revista *Educação e Matemática*, relacionada com aspectos da experiência matemática, foi retirada das primeiras linhas de um livro que ele escreveu — *Viagem de ida e volta* — publicado em 1988 pela APM. É um pequeno livro sobre um problema que realmente nos transporta numa interessante viagem *por* e *com* um problema, ao longo da qual, por um lado o problema é abordado e resolvido do ponto de vista matemático e são explorados aspectos das relações da Matemática com a realidade, e, por outro lado, são discutidos o lugar e o papel dos problemas no currículo e na aula de Matemática.



A resolução de problemas, como aí é dito, pode ser de facto "fascinante" mas é certamente "difícil", se estivermos a pensar na sua integração curricular e sobretudo na sua concretização em aula. Difícil e problemática — passe a redundância — e tem levantado (e irá continuar a levantar) dúvidas, equívocos e controvérsias entre quem se interessa pelo ensino da Matemática.

Hoje, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas integra uma das finalidades estabelecidas para o ensino da Matemática nos programas em vigor e é um dos objectivos gerais neles definidos. Para além disso, na apresentação dos grandes temas desses programas, são frequentes referências do tipo "resolver problemas que envolvam ...", ou "resolver problemas ligados à vida real ...". Nas suas orientações metodológicas, assume-se que o desenvolvimento daquela capacidade é "um eixo organizador do programa" e que esse desenvolvimento resulta "de sucessivas experiências e da prática continuada de resolução de muitos tipos de problemas", cuja resolução, acrescenta-se, "proporciona um contexto no qual se constróem conceitos e descobrem relações"; para a aquisição de conhecimentos conhecimentos, diz-se ainda, "deve partir-se preferencialmente de situações problemáticas" (ME, 1991, pp. 151–167)[6].

Que quer isto dizer?

"Que afinal os programas são *bons* mas os professores preferem executar *maus* programas?". Esta interrogação é do Paulo no editorial já mencionado (EeM n° 8, 1988, p. 1) e ele próprio responde-lhe assim: "Certamente que não! Uma tal conclusão seria absurda. Responsabilizar apenas os programas seria um equívoco; mas ilibar esses programas e as orientações oficiais e atribuir as culpas aos professores, seria um erro e uma injustiça enormes" (p. 1). Esta resposta, como a pergunta, refere-se aos programas *antigos* e todos vemos o muito de verdade que contém, mesmo no contexto dos programas actuais. Mas que isto dá que pensar, lá isso dá.

Notas

1 *Educação e Matemática* n° 2, 1987.

2 *Educação e Matemática* n° 6, 1988.

3 Veja-se *Um (bom) problema (não) é (só)...* (EeM n° 8, 1988), ou *Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real?* (EeM n° 23, 1992).

4 Sobre a questão do que é um *bom* problema há um artigo da sua autoria na revista com uma discussão a este propósito (ver nota anterior) e o seu livro *Viagem de ida e volta* (APM, 1988) contém muitos elementos a este respeito.

5 *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

6 *Organização curricular e programas*, 3° ciclo, 1° volume. Lisboa: Ministério da Educação.

Henrique Manuel Guimarães

Promoção do sucesso escolar: Se importante, para quando urgente?

A procura esforçada de notícias interessantes para constituirem a base da secção Actualidades não se mostrou muito produtiva. A discussão do Programa de Governo raramente teve por tema assuntos de Educação. As notícias com que nos fomos deparando referiam temas de intervenção específica e pontual, que não deixam de ser desafiantes para a Educação e para as escolas, mas não referem intervenções nos problemas identificados como fundamentais.

O artigo de opinião *O urgente e o importante: a promoção do sucesso escolar*, publicado no jornal Público em 4 de Abril, captou a nossa atenção pelo facto de, finalmente, surgir nos títulos dos jornais a *Promoção do sucesso escolar* em vez do usual insucesso.

A referência da promoção do sucesso, em lugar do combate ao insucesso, poderá constituir uma tendência de alteração de paradigma na abordagem do tão antigo problema.

Parece consensual que a problemática em torno dos baixos níveis de literacia na população e da referenciada ineficácia do sistema educativo português é uma questão importante.

O que não é percebido como urgente no quotidiano é usualmente transferido para uma outra oportunidade. "É urgente pagar as contas da electricidade, da água, do telefone ou da Internet, senão esses serviços ser-nos-ão cortados. É importante, mas não urgente, estar com a família e os amigos. A tendência é dar primazia às questões urgentes em detrimento das importantes."

O autor recoloca a questão da promoção do sucesso como urgente e como tal inadiável, exigindo medidas concretas, viáveis e com consequências reais.

A análise sucinta dos programas já desenvolvidos no nosso país neste sentido (PIPSE e TEIP's) e de programas semelhantes desenvolvidos por franceses e ingleses, coloca como prioritárias questões de opção de intervenção, de indicadores de avaliação, de gestão, e acima de tudo a operacionalização do que se entende por *insucesso escolar*.

Quando se pretende abordar com seriedade estas questões torna-se necessário definir os parâmetros a considerar, prever mecanismos de avaliação reais e uma consistente divulgação de resultados, bem como, não desprezar as problemáticas dos desenvolvimentos locais sustentados.

Helena Amaral
Helena Rocha

A Economia da Política
Paulo Trigo Pereira*

O urgente e o importante: a promoção do sucesso escolar

Na vida das pessoas, das empresas e das sociedades, há coisas que são urgentes e outras que são importantes. As primeiras têm uma data fixa para serem realizadas e existe geralmente um mecanismo mais ou menos rápido de sanção em caso de não cumprimento. É urgente, tem que ser feito. Já as coisas importantes muitas vezes não têm data

A promoção do sucesso escolar é importante. Mas não é percebido como urgente, precisamente porque não tem uma data precisa para ser alcançado e o insucesso já é um problema antigo.

dência e dar prima… questões urgentes em detrim… das importantes. Na actividade …ómica, política e em particular … ernativa … ção poderia s… generalizad… mas ficaremos por um cas…

A promoção do sucesso … portante. Mas não é percet… gente, precisamente por… uma data precisa para ser … insucesso já é um problema … cionalmente, não têm existido sanções políticas em relação ao não cumprimento de algo que tem estado inscrito nos programas governamentais de quase todos os sucessivos governos constitucionais.

Assegurar a igualdade de oportunidades através de uma discriminação positiva para com os mais desfavorecidos,

O programa do XVII Governo Constitucional tem como meta, entre outros objectivos, a … drástica do … no ensino … tarefa nos … será vasta

tem sido desenvolvido em vários países.

Assegurar a igualdade de oportunidades através de uma discriminação positiva para com os mais desfavorecidos, tem sido desenvolvido em vários países.

progr… diferentes direccionados total… cialmente para o sucesso edu… c… o PIPSE (Programa Integrado de Promoção do Sucesso Educativo) e os TEIP (Territórios Educativos de Intervenção Prioritária). Interessa confrontar experiências para perceber as opções de política que se colocam aos decisores políticos. *(1)*

Antes do mais, trata-se de saber se é melhor considerar um programa específico de promoção do sucesso escolar, que distinga certas escolas, que estão no programa, de outras que não estão, ou se alternativamente se opta por não ter programa específico e realizar, com a estrutura política e administrativa ex… tente, a discriminação positiva atra… de medidas direccionadas a escolas e… tudantes específicos, com base em i… cadores claros e facilme… monitorizáveis.

Caso se opte por um programa, i… ressa saber se se adopta uma metod… gia de cima para baixo ("top down"… de baixo para cima ("bottom up"). I… é, a decisão de integrar um program… a forma de afectação de recursos é ess… cialmente do Ministério da Educação … é das escolas ou agrupamentos. A expe… …ortuguesa dos PIPSE foi "top … …sim como a inglesa o é em par… …TEIP foram sobretudo "bottom … …scolas decidiam da criação de …"), assim como as ZEP france… …reitores de academia esco…

…utra questão central que é necessario precisar é o conceito de eq… de. Pretende-se discrim… positivamente que proporção de … dantes do básico? Um por cento, doi… co, dez, vinte? Quando surgiram a… francesas, entre oito e dez por cen… estudantes estavam em escolas ZE… te anos depois essa proporção dup… sendo agora de cerca de dois milh…

estudantes. Há aqui uma opção política a fazer, entre concentrar recursos adicionais num segmento mais limitado ou alargá-los a uma população mais va…, mas em menor montante.

Os estudos existentes usam … …mente dados sobre o percurs… …r de es…

O programa do XVII Governo Constitucional tem como meta, entre outros objectivos, a redução drástica do insucesso no ensino básico. A sua tarefa nos próximos meses será vasta. Desde logo operacionalizar o que entende por "insucesso escolar".

efectivamente contribuiu para a melhoria das qualificações dos que entraram. Há aqui também opções a fazer sobre a produção estatística desejável e sobre a forma de a disponibilizar.

Finalmente, há opções a fazer do … …to de vista da estrutura admini… …tiva e política de gestão da educaç… …rá que o modelo centralizado, ai… …e descon…

como acontece em tantos países?

O programa do XVII Governo Constitucional tem como meta, entre outros objectivos, a redução drástica do insucesso no ensino básico. A sua tarefa nos próximos meses será vasta. Desde logo operacionalizar o que entende por "in… …epois clarificar que … devem estar dispo… …liação do desempe… …ativo e aperfeiçoar …istentes em confor… …o definir uma estra… …o insucesso, desde …ntil alvo, as escolas …ade neste combate, …inistração central …utros ministérios), …s envolvidos e sobre… …os de política (que recursos adicionais? que selectividade? onde aplicar? que incentivos especiais para professores em escolas difíceis?). Finalmente, articular a política de promoção do sucesso educativo com a política das cidades e o papel crescente que as autarquias deverão desempenhar, nomeadamente nas actividades extra-lectivas.

Finalmente, articular a política de promoção do sucesso educativo com a política das cidades e o papel crescente que as autarquias deverão desempenhar, nomeadamente nas actividades extra-lectivas.

…stas destes países estarão …de Abril) na Fundação …EG em seminários …ISEP (ver http:// …cisep/)

…do ISEG

In Publico, 4 Abril 2005

Évora — 20 anos de encontros

O encontro nacional de professores de Matemática promovido pela nossa Associação realiza-se este ano em Évora. Será na Escola Secundária Gabriel Pereira, a mesma que há dez anos recebeu o ProfMat 95 — mas desta vez vamos encontrá-la mais bonita, maquilhada com pinturas que os alunos generosamente distribuiram pelos diferentes espaços.

O encontro decorre de quarta a sábado, mais precisamente entre 9 e 12 de Novembro. Apanhamos assim o Verão de São Martinho — mas mais prudente é não prometer Sol em todos os dias. No entanto, se tiver oportunidade, vá para Évora logo no domingo, pois segunda e terça-feira propomos-lhe programas que lhe poderão interessar. À semelhança do que tem acontecido em anos anteriores, poderá optar por participar no Seminário de Investigação, organizado por colegas da ESE de Setúbal, ou num curso dos muitos que o Centro de Formação da APM teve o cuidado de seleccionar para si — repare que este ano existem novas ofertas. Qualquer uma destas hipóteses representa certamente uma nova oportunidade de aprendizagem. As informações necessárias para se inscrever nos cursos ou no Seminário de Investigação encontra-as nos folhetos de divulgação que recebe junto com o anúncio do ProfMat, por esta altura a chegar aos sócios da APM.

Mas do que lhe queremos falar agora é mesmo do ProfMat 2005. Aqueles que já receberam o anúncio, puderam constatar que o preço de inscrição foi mantido em relação ao ano passado. Todos sabemos que 2005 é um ano especialmente profícuo em termos de encontros — só em Julho, realizam-se em Portugal dois encontros internacionais, anunciados com destaque na última revista, em que certamente gostará de participar. Assim, para ajudar a não desiquilibrar o orçamento, a inscrição do ProfMat mantém-se em 76€, isto para aqueles que se inscreverem no primeiro prazo, ou seja, até 27 de Maio. Este valor contempla a sua participação em todo o programa científico, incluindo a documentação e materiais associados, em particular as actas, bem como a sua participação no programa social e cultural, que lhe dará acesso a espectáculos variados, à prova da castanha e ainda a um jantar de confraternização.

O programa científico do encontro está a ser elaborado com a intenção de destacar os temas que parecem especialmente interessantes para os professores de Matemática, procurando diversificar as contribuições, sem esquecer nenhum nível de ensino. Assim, entre painéis, conferências e grupos de discussão, teremos oportunidade de debater temas mais clássicos relacionados com a abordagem dos Números e do Cálculo, da Geometria, das Probabilidades e Estatística, mas também outros assuntos decorrentes do actual momento que se vive no ensino da Matemática, em particular relacionados com mudanças curriculares mais ou menos recentes — exemplos são a flexibilização curricular, os esperados programas do ensino básico, as diferentes disciplinas de Matemática do ensino secundário. Dedicamos também atenção à discussão da avaliação das aprendizagens dos alunos e aos rankings das escolas — se se verificarem as previsões, no sábado contamos ter um painel-debate bem polémico e animado sobre este assunto. Outro motivo de interesse tem a ver com a análise dos resultados do PISA — tendo em conta os bons resultados da Finlândia, convidámos um especialista finlandês para nos dar a conhecer a experiência daquele país. E, reconhecendo a importância da Física que este ano celebra o seu ano internacional, criámos espaços para a discussão das relações da Matemática com aquela ciência — não esquecendo as outras ... Claro que a formação de professores também marca presença, sendo um tema incontornável num encontro como o nosso. E a vida da Associação tem um espaço privilegiado no programa — a conferência plenária de abertura do encontro é dedicada aos vinte anos do ProfMat. Um último destaque vai para a homenagem a Paulo Abrantes no ProfMat 2005: para além da presença da exposição biográfica que está a ser preparada para o encontro que se realiza em Julho, em Lisboa, poderá ainda participar em outros momentos especialmente idealizados com o mesmo propósito.

Mas aquilo que agora lhe revelamos é apenas uma parte do programa, aquela que compete à comissão organizadora definir. Não se esqueça que o ProfMat é um espaço de troca de experiências e partilha de ideias, e que por isso precisa da sua participação activa. A outra parte muito significativa do programa resulta das contribuições que os participantes se predispõem a oferecer da sua iniciativa, imprescindíveis para acrescentar pluralidade às temáticas em discussão e para tornar o ProfMat um espaço de maior encontro dos interesses e preocupações de todos nós. Sabe que pode apresentar contribuições segundo diversos formatos, sejam sessões práticas, grupos de discussão, comunicações orais, apresentações de materiais ou de projectos, sessões especiais — basta preencher a respectiva ficha e enviá-la com o resumo. Sabe também que estamos à espera do seu contributo para completar o programa científico do nosso encontro. Receberá a sua versão escrita depois do Verão.

Quanto ao programa social e cultural, pode ficar descansado, está no Alentejo ... Não faltarão os cantares da terra e os bons petiscos da região — e para além do que nós lhe proporcionamos, estamos certos que encontrará boas oportunidades de explorar as delícias locais nos (poucos ...) tempos livres do encontro. Mas a noite de sexta-feira, tem de a reservar para a festa de comemoração dos vinte anos do ProfMat. Será uma festa a sério, com jantar, bolo de anos, velas para soprar, presentes, diversão, música e baile! A passagem dos vinte anos do nosso encontro é algo de que muito nos orgulhamos e que merece ser celebrada, com o mesmo entusiasmo com que em 1995 celebrámos os dez anos.

Venha até Évora em Novembro, estaremos cá à sua espera. Entretanto, vá espreitando no site do ProfMat 2005 (`http://profmat2005.apm.pt`), onde prometemos ir divulgando as últimas novidades.

A Comissão Organizadora

O contínuo [espaço — tempo relativo] e o discreto [quântico], o caos e a ordem

M. Mercês Ramos e J. Sousa Ramos

2005, ano mundial da Física! Comemora-se igualmente os 100 anos da relatividade restrita e as interpretações do efeito fotoeléctrico e do movimento browniano apresentados em 1905 por Einstein, numa série de seis artigos. No primeiro artigo, Einstein explica o efeito fotoeléctrico como uma consequência da natureza quântica da luz, introduzindo o fotão (quantum de energia que se move sem se dividir, sendo produzido e absorvido como uma unidade). No terceiro e sexto trata o efeito browniano. O quarto, o famoso artigo *On the Electrodynamics of Moving Bodies* e o quinto dizem respeito à relatividade restrita. Neste último Einstein deduziu a célebre fórmula

$$E = mc^2.$$

A fórmula mais importante dos 100 anos que se comemoram.

A concepção que temos hoje de espaço-tempo foram estabelecidas, há um século, por Poincaré, Lorentz e Einstein, ao descobrirem a estrutura do grupo das transformações geométricas que caracterizam as transformações de coordenadas das medidas das posições e dos instantes (designados hoje por grupo de Lorentz e grupo de Poincaré).

Einstein ao interpretar aqueles grupos de transformações quebrou a ideia de espaço e tempo absolutos paradigma estabelecido (séc. XVII) e aceite desde Newton. Cria, assim, a teoria da relatividade restrita. Contudo, nesta teoria mantém-se a ideia do contínuo espaço-temporal. Porém, o mesmo Einstein, ainda em 1905, como dito atrás, para interpretar os resultados experimentais da emissão de electrões por metais somente quando iluminados por radiação de determinada frequência, considera que a luz não pode ser apenas como uma onda, mas composta de quanta de energia independentes — a ideia de quanta de energia fora introduzida por Planck em 1900 no estudo do radiamento térmico do corpo negro. Assim, ao exigir a existência de trocas discretas

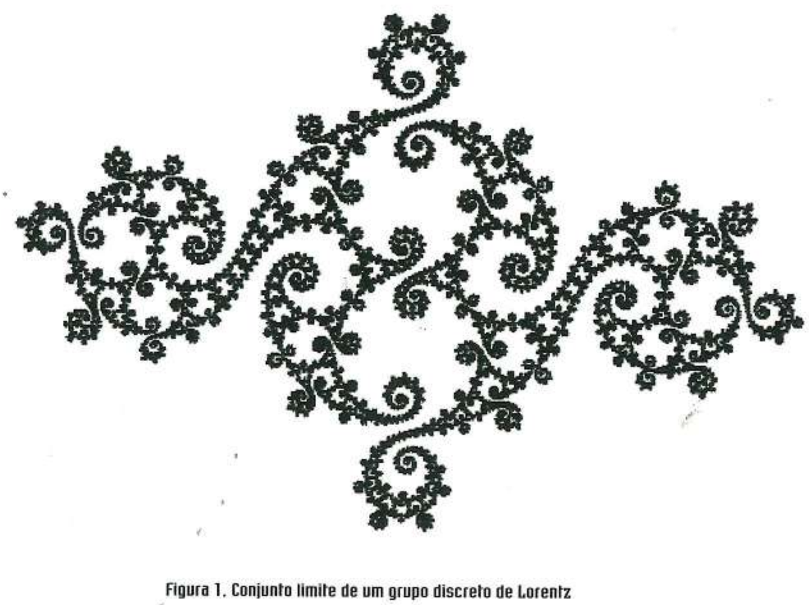


Figura 1. Conjunto limite de um grupo discreto de Lorentz

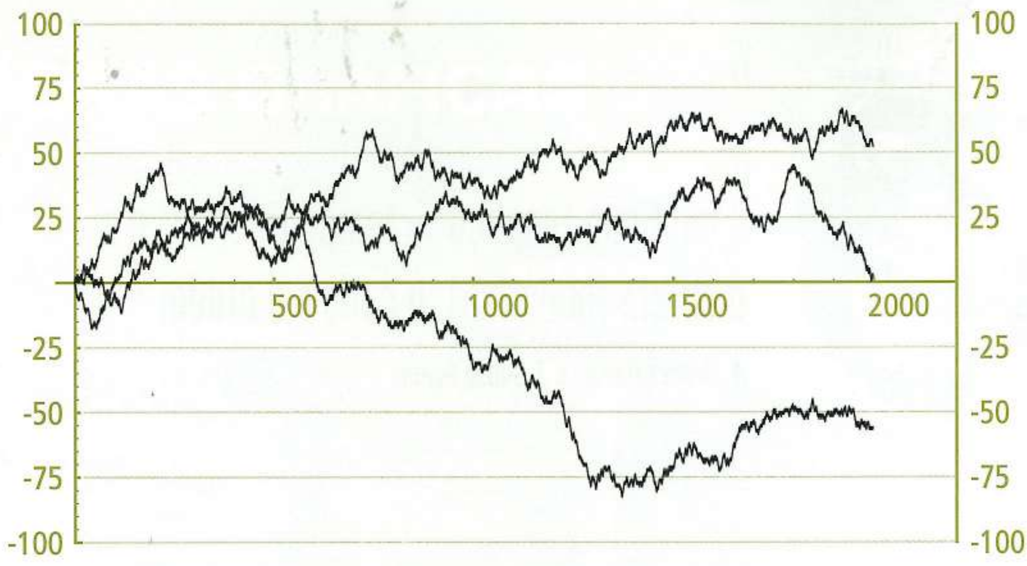


Figura 2. Três caminhos aleatórios, começando na mesma posição inicial

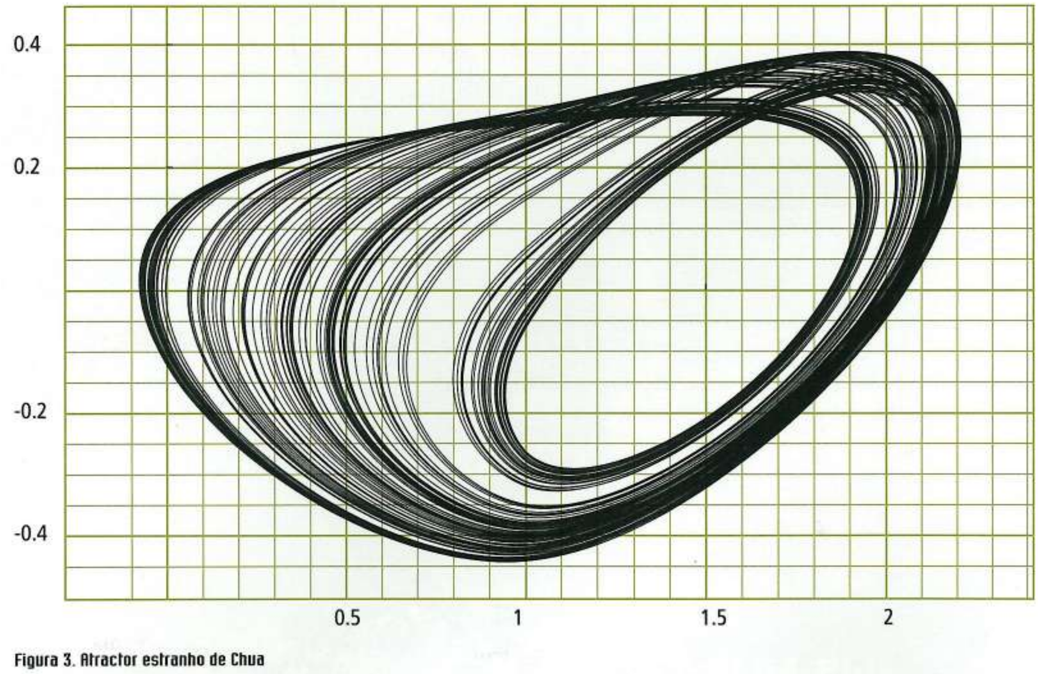


Figura 3. Atractor estranho de Chua

de energia — os quanta, os fotões, explica o fenómeno que se denominou efeito fotoeléctrico.

A dialéctica entre o contínuo espaço-temporal e o discreto nas trocas de energia é estabelecida e os anos seguintes com Bohr 1913, De Broglie 1923, Heisenberg 1925, Schrödinger 1926, Dirac 1927, aprofundam esta dialéctica, entre o contínuo e o discreto, nas teorias quânticas, mas também entre o determinismo (teorias clássicas — Newton, Laplace, ...) e o (aparente) indeterminismo (teorias quânticas).

As geometrias aprofundam o contínuo, as álgebras o discreto. Por fim a geometria e a álgebra fundem-se, na geometria não-comutativa (Connes 1982). A geometria não-comutativa associa um espaço geométrico a toda a álgebra, comutativa ou não (no caso da álgebra comutativa, que pode ser interpretada como uma álgebra de funções sobre um espaço topológico, temos os espaços habituais). Mas o século não acaba assim na harmonia geometria-álgebra, do clássico e do quântico, numa interpretação não comutativa do universo.

O movimento Browniano, descoberto um século antes, é interpretado por Einstein combinando a teoria cinética dos gases e a hidrodinâmica clássica e deriva a equa-

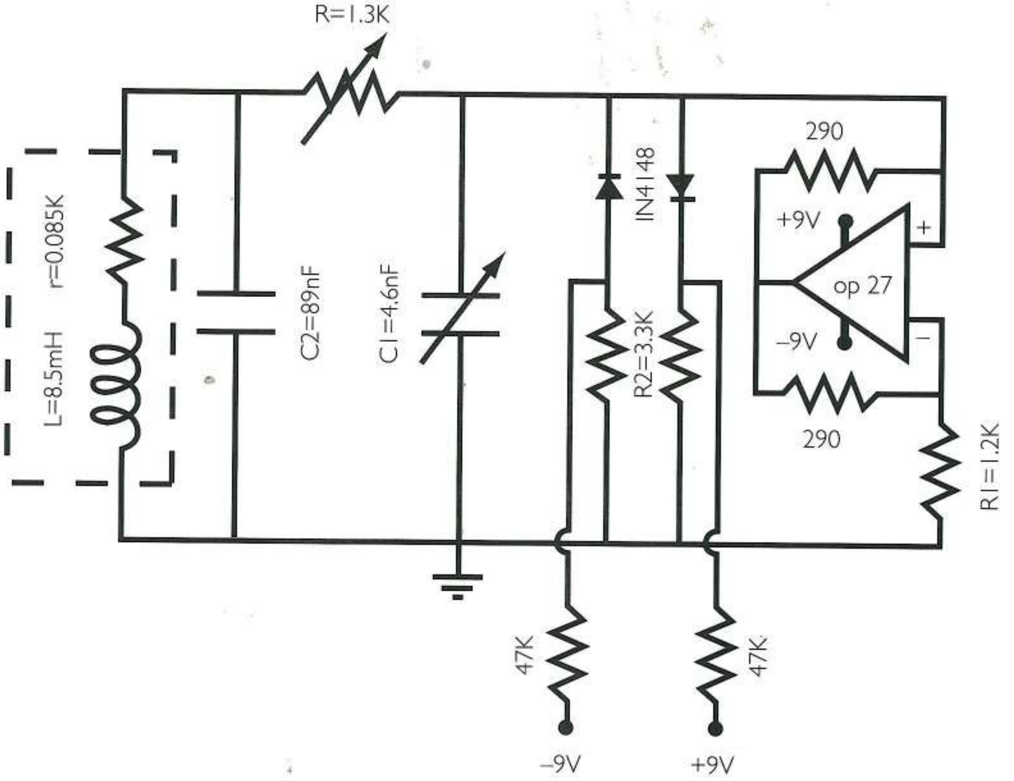


Figura 4. Sistema dinâmico não-linear circuito de Chua

ção para o deslocamento das partículas Brownianas. Assim, a interpretação do movimento browniano fornece o meio de reconciliação entre duas grandes contribuições da física, na altura, a termodinâmica (que estuda os processos irreversíveis) e a teoria cinética dos gases (isto é a mecânica de Newton na qual os fenómenos são reversíveis). Desta forma, abre-se uma nova perspectiva para a interpretação dos fenómenos físicos. As características aparentemente aleatórias do comportamento das partículas entusiasmaram Eintein. Aquele estudo, continuado nos resultados sobre caminhos aleatórios (random walks) atravessa a teoria moderna do caos (ver figura 2).

Já antes, Poincaré em 1890, numa área do conhecimento físico completamente diferente, apontara para esta nova perspectiva ao estabelecer as bases dinâmicas do estudo da complexidade. Ao estudar o problema de três corpos (Sol, Terra e Lua) encontrou pontos homoclínicos, e órbitas de extrema complexidade. Quando variava os parâmetros de que o sistema dependia, sucediam-se mudanças no tipo de órbitas e identificou algumas dessas mudanças ou bifurcações (primeiro suporte para os desenvolvimentos da teoria do caos que ocorrem actualmente).

A dialéctica entre o determinismo e o indeterminismo atravessam todo o século passado e a vida científica de Einstein, sobretudo nas discussões sobre os fundamentos da mecânica quântica. A física estatística para a qual contribuiu com vários trabalhos (lembremos por exemplo a estatística de Bose-Einstein, que é usada na descrição do comportamento colectivo de partículas como o fotão) não causou tanta discussão.

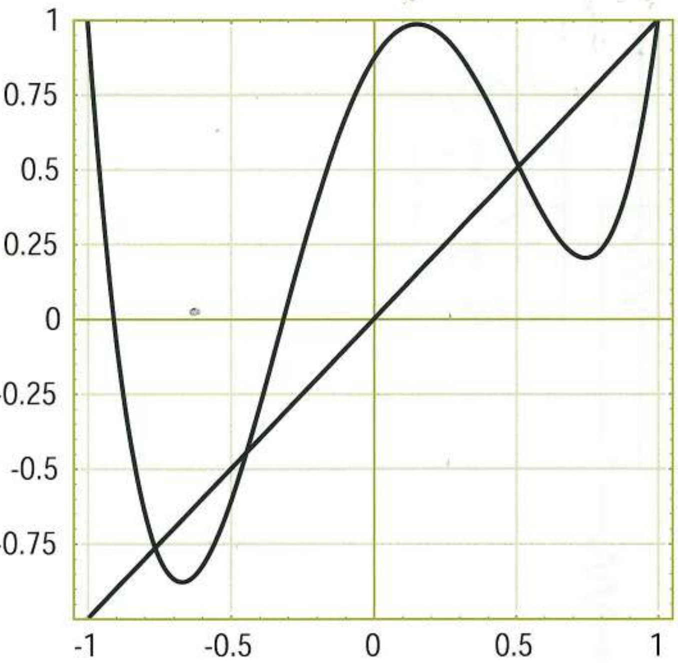
Os germes lançados por Poincaré com o estudo da dinâmica não linear acabaram por germinar. Emergem especialmente a partir dos anos 60 do séc. XX e estendem-se progressivamente à generalidade das ciências. Para esse desenvolvimento contribuíram também os trabalhos, que na continuidade da perspectiva de Laplace, procuravam uma compreensão determinista do universo. São de referir os inúmeros trabalhos realizados por Whitney, Birkoff, van der Pol, Andronov, Thom, Kolmogorov, Anosov, Arnold, Sharkovsky, Smale, Sinai, Lorenz, Takens, Ruelle, ... e que conduziram ao estudo de soluções tipo atractor estranho (ver figura 3).

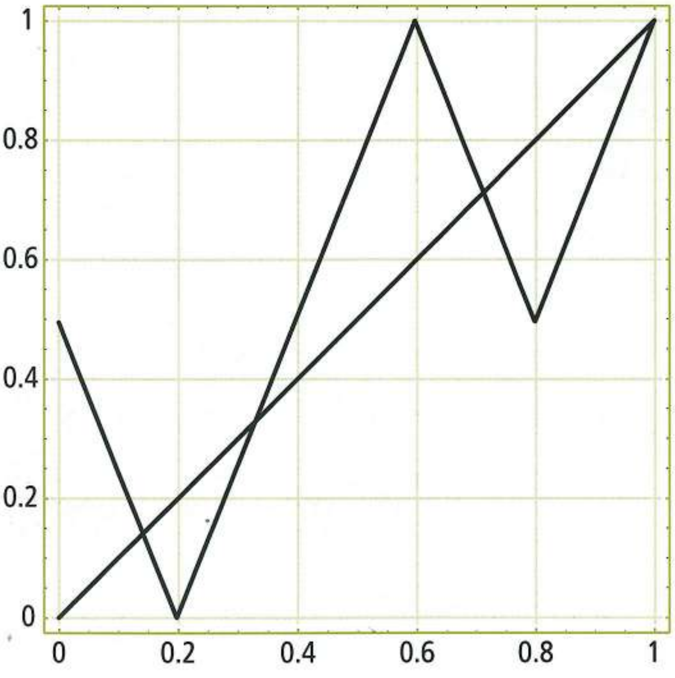
Soluções não periódicas de sistemas dinâmicos, mas que escondem a existência de infinitas órbitas periódicas. Mas, a principal novidade surge com Sharkovsky em 1962, a ordem do caos. A existência de um certo tipo de órbita, numa dinâmica, força a existência de outras em número finito ou infinito, numa ordem universal, que se designa por ordem de Sharkovsky:

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 2^k \prec \ldots \prec 2^\infty \prec \ldots \prec$$
$$7\ 2^k \prec 5\ 2^k \prec 3\ 2^k \prec \ldots \prec 7\ 2^2 \prec$$
$$\prec 5\ 2^2 \prec 3\ 2^2 \prec \ldots \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

O *desassossego* (dialéctica) instala-se de novo como há um século entre o espaço-tempo absolutos (clássico) e o

Figura 5. Aplicações equivalentes — a sua iteração determina o mesmo tipo de caos





relativístico, o contínuo e o discreto (quântico), o comutativo (clássico) e o não comutativo (quântico), agora está presente na dialéctica entre a ordem e o caos. O absoluto e o relativo, o contínuo e o discreto, o clássico e o quântico, a geometria e a álgebra, já não estão em contradição, pois são integrados de modo coerente e não contraditório nos conceitos e técnicas da teoria do caos e da geometria fractal, recorrendo a técnicas e conceitos da matemática discreta. Tecnologicamente é a realização e o êxito do digital.

A dinâmica caótica é o comportamento, a realização temporal da complexidade; os fractais são a realização espacial. Num sistema dinâmico ou num conjunto fractal, é sempre possível passar de um comportamento caótico para um conjunto fractal e de um fractal para um comportamento caótico. Tal como o espaço-tempo o fractal-caos são dois aspectos de uma só realidade.

O estudo das dinâmicas não lineares de espaços contínuos e tempo discreto, introduzidos pela iteração de aplicações do intervalo (repetição da composição de uma função com ela própria), do círculo ou da recta real, é transferido para os sistemas discretos, cadeias de Markov topológicas, ou subshifts de tipo finito, recorrendo a técnicas da dinâmica simbólica, muito bem estabelecidas, que tiveram a sua origem aproximadamente há um século (Koebe, Hadamard 1886, Morse 1921, Hedlund 1935, Bowen 1972, ...).

Hoje as geometrias finitas, a combinatória, a teoria dos semigrupos são ferramentas essenciais no estudo da dinâmica não linear, na teoria do caos e na geometria fractal. As geometrias discretas e os sistemas algébricos interpenetram-se quebrando as barreiras entre as matemáticas tradicionais e as classificações rígidas. As contradições entre o comutativo e o não comutativo, entre o clássico e o quântico esvaem-se numa complementaridade natural e compreensível.

O que resta então de aparentemente contraditório é o facto do caos ser ordem. Da complexidade ser compreensível, classificável, mensurável. Sentimento este muito característico de Einstein. Aí de novo o Homem se encontra consigo próprio, tal como na origem da ciência grega. O complexo está no DNA, na dinâmica dos neurónios, nos sistemas económicos e sociais, no clima, na rede internet. Mas a questão sem resposta permanece: Por onde irá passar a evolução? Pela rede é hoje uma possibilidade.

Mas onde está o Einstein do nosso século, capaz de como ele perceber o fundamental? Em três conjuntos de trabalhos realizados em 1905, há 100 anos, conseguiu marcar as três linhas principais da física e da matemática do século XX: a relatividade, a mecânica quântica e a teoria do caos. Acreditemos que essa nova personagem pode ser um dos nossos alunos que estão saindo das nossas escolas.

M. Mercês Ramos
ESELx, Politécnico de Lisboa

J. Sousa Ramos
Dep de Matemática, Instituto Superior Técnico

Abrir a janela à Ciência

Ana Paula Gonçalves, Graciete Botas, Helena Horta, Helena Cruz,
Mª de Jesus Valadas, Natércia Parra, Paulina Gomes e Paulina Rebelo

Desde que a nossa escola, EB1 nº 3 de Agualva, concorreu com um projecto ao programa Ciência Viva do Ministério da Ciência e Tecnologia, em 1998, passou a desenvolver sistematicamente actividades no âmbito do ensino experimental das Ciências.

Com a realização destas actividades pretendemos incutir nos nossos alunos o gosto pela Ciência e desenvolver competências de observação, curiosidade e pesquisa a fim de poderem explorar, interpretar e construir conhecimento do mundo que os rodeia. As abordagens que privilegiamos são aquelas em que os próprios alunos manipulam os materiais, colocam questões prévias à realização das experiências, fazem previsões, registam as observações e, gradualmente, vão aprendendo a tirar conclusões. Com este espírito, são feitos, ao longo dos quatro anos de escolaridade, estudos e experiências, de carácter interdisciplinar que têm, muitas vezes, como ponto de partida, o Estudo do Meio e que se realizam na sala de aula, no laboratório e até no recreio. São exemplos, o estudo das árvores do recreio, dos solos, das metamorfoses do bicho-da-seda e experiências com plantas, ar, água, som, magnetismo, electricidade, sobre propriedades dos materiais e exercícios de orientação com recurso à observação do movimento aparente do Sol e ao uso de bússolas.

Nestes estudos e experiências, temos também a preocupação de criar situações em que os alunos sintam necessidade de recolher, organizar e tratar informação, como por exemplo, a elaboração e tratamento de inquéritos para saber se os alunos da escola poupam ou desperdiçam água, saber como os diferentes anos de escolaridade participam no problema do mês, e averiguar a qualidade dos lanches que os alunos trazem para a escola.

A necessidade de fazer pesquisas surge, frequentemente, nestas abordagens com carácter experimental. Por exemplo, quando os alunos estão a fazer experiências no âmbito da orientação, as observações do movimento do Sol ao longo do dia, conduzem, naturalmente, ao gosto de querer saber mais sobre Galileu e da sua influência na aquisição destes conhecimentos. Mas, por vezes, são factores externos que, aproveitados pelos professores, mobilizam os alunos na realização de pesquisas, como aconteceu no Euro 2004. O Projecto Curricular de Escola aproveitou este acontecimento para mobilizar professores, alunos, funcionárias e encarregados de educação na realização do desfile de Carnaval. Neste projecto, não nos interessava apenas a confecção de fatos alusivos aos diferentes países participantes no Euro mas, principalmente, que ele constituísse um pretexto para realizar pesquisas sobre esses países que, para além da recolha de informação em livros ou Internet, implicaram o contacto com as embaixadas.

Nesta comemoração, bem como nas diferentes tarefas ligadas ao desenvolvimento e gosto pela Ciência e pelo conhecimento, o facto de os professores trabalharem em equipa e terem uma gestão forte e sensível ao desenvolvimento destes projectos, é que permitiu o seu êxito.

Com financiamento do programa Ciência Viva, foi montado um laboratório que tem vindo a crescer, apesar da interrupção de candidaturas a este programa, porque a escola está também, desde 1999, integrada no projecto *Vamos Brincar aos Materiais*, do Instituto Superior Técnico (departamento de engenharia de materiais) que forma os professores interessados em desenvolver trabalho experimental com os seus alunos. Neste âmbito, o IST fornece conjuntos de materiais, em número suficiente, que permitem aos alunos trabalhar em grupo, documentação alusiva a cada experiência,

que inclui: o guia da experiência, as regras de segurança, a lista ilustrada dos nomes dos instrumentos usados e uma secção chamada *Um pouco de Ciência*, que contém, com uma linguagem adequada ao nível etário das crianças do primeiro ciclo, um texto sobre os conceitos que se vão trabalhar e um pouco da sua história e a dos cientistas que os desenvolveram. Além deste apoio, beneficiamos de uma enorme disponibilidade da parte do coordenador do projecto, com o qual podemos sempre tirar dúvidas de carácter científico e técnico e que, quando as experiências exigem muita manipulação de materiais e temos dificuldade em apoiar todos os grupos, nos proporciona o apoio de colaboradores, por vezes, alunos daquele ramo de engenharia.

Este apoio contínuo é bastante relevante, pois, muitas vezes, quando os professores querem aplicar, com os alunos, as actividades desenvolvidas nas acções de formação, podem surgir-lhes dúvidas e é sempre benéfico ter a quem recorrer para que possa haver um esclarecimento a nível científico. Este contacto é importante para que o professor possa introduzir, o mais correctamente possível, os conceitos científicos, que os alunos vão construindo ao longo do 1° Ciclo. Por sua vez, cada professor, tem o compromisso de, elaborar um relatório, por experiência. Este relatório permite por um lado, que os professores façam uma reflexão do trabalho desenvolvido com os alunos, nomeadamente no que diz respeito ao número de horas utilizadas, às principais dificuldades na organização e realização do trabalho, às capacidades e conhecimentos desenvolvidos ou adquiridos pelos alunos, às observações e comentários dos alunos e dos professores e, por outro lado, que o IST de Lisboa recolha informação para possíveis reformulações dos procedimentos das experiências.

Arquimedes visita a escola

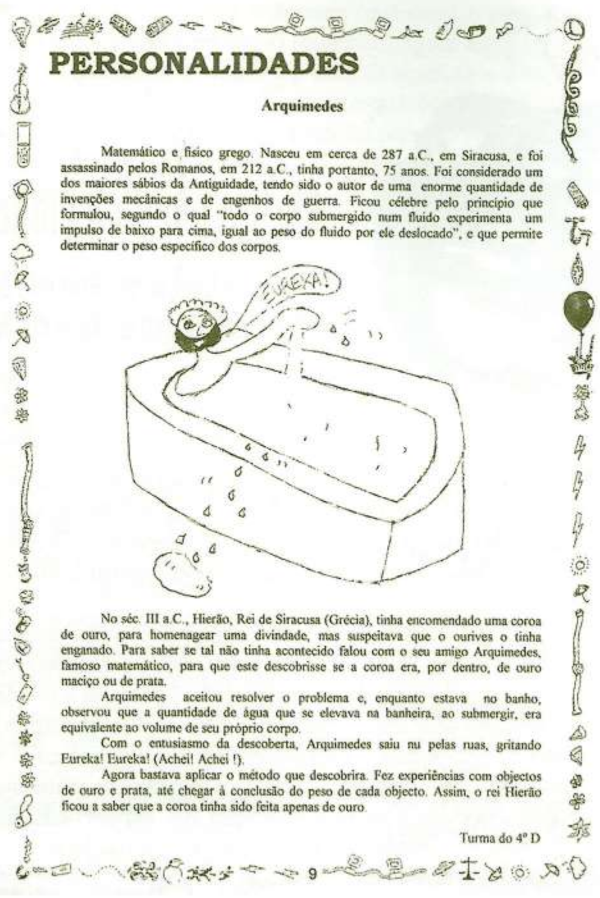
Sendo 2005 o Ano Internacional da Física, a nossa escola, não podia deixar de o comemorar e desenvolver com os seus alunos diversas actividades no seu domínio. Para este artigo, entre várias experiências realizadas, destacámos *Arquimedes visita a Escola* (figura 1), por considerarmos que nesta experiência há uma forte ligação entre a Física e a Matemática, na medida em que os alunos utilizam vários instrumentos com os quais medem e registam propriedades dos corpos, como a massa e o volume e calculam a sua densidade, identificando o material de que é formado o corpo, ao comparar os valores obtidos com os de uma tabela que lhes é fornecida.

A experiência *Arquimedes visita a escola*, cujo guia se encontra no final deste artigo (página 22), foi realizada nos terceiro e quarto anos e possibilitou uma grande diversidade de propostas de trabalho a nível interdisciplinar.

Ao nível Língua Portuguesa e de História, algumas turmas leram e interpretaram e reescreveram textos relativos à vida de Arquimedes. A figura 2 mostra um desses textos feito por alunos do quarto ano, que foi publicado na secção *Personalidades*, na nossa revista *O Cientista Agualvinha*. A leitura do Livro da Experiência e a interpretação dos procedimentos previstos também obrigam a desenvolver competências no domínio da Língua.

No âmbito da Matemática e Física os alunos lidam com os conceitos de massa, volume e densidade. O conceito de densidade não é o mais relevante para os alunos deste ciclo. O que é relevante é que os alunos usem instrumentos de medição, como as balanças e provetas para determinação

Figura 1.



PERSONALIDADES

Arquimedes

Matemático e físico grego. Nasceu em cerca de 287 a.C., em Siracusa, e foi assassinado pelos Romanos, em 212 a.C., tinha portanto, 75 anos. Foi considerado um dos maiores sábios da Antiguidade, tendo sido o autor de uma enorme quantidade de invenções mecânicas e de engenhos de guerra. Ficou célebre pelo princípio que formulou, segundo o qual "todo o corpo submergido num fluido experimenta um impulso de baixo para cima, igual ao peso do fluido por ele deslocado", e que permite determinar o peso específico dos corpos.

EUREKA!

No séc. III a.C., Hierão, Rei de Siracusa (Grécia), tinha encomendado uma coroa de ouro, para homenagear uma divindade, mas suspeitava que o ourives o tinha enganado. Para saber se tal não tinha acontecido falou com o seu amigo Arquimedes, famoso matemático, para que este descobrisse se a coroa era, por dentro, de ouro maciço ou de prata.

Arquimedes aceitou resolver o problema e, enquanto estava no banho, observou que a quantidade de água que se elevava na banheira, ao submergir, era equivalente ao volume de seu próprio corpo.

Com o entusiasmo da descoberta, Arquimedes saiu nu pelas ruas, gritando Eureka! Eureka! (Achei! Achei !).

Agora bastava aplicar o método que descobrira. Fez experiências com objectos de ouro e prata, até chegar à conclusão do peso de cada objecto. Assim, o rei Hierão ficou a saber que a coroa tinha sido feita apenas de ouro.

Turma do 4º D

9

Figura 2.

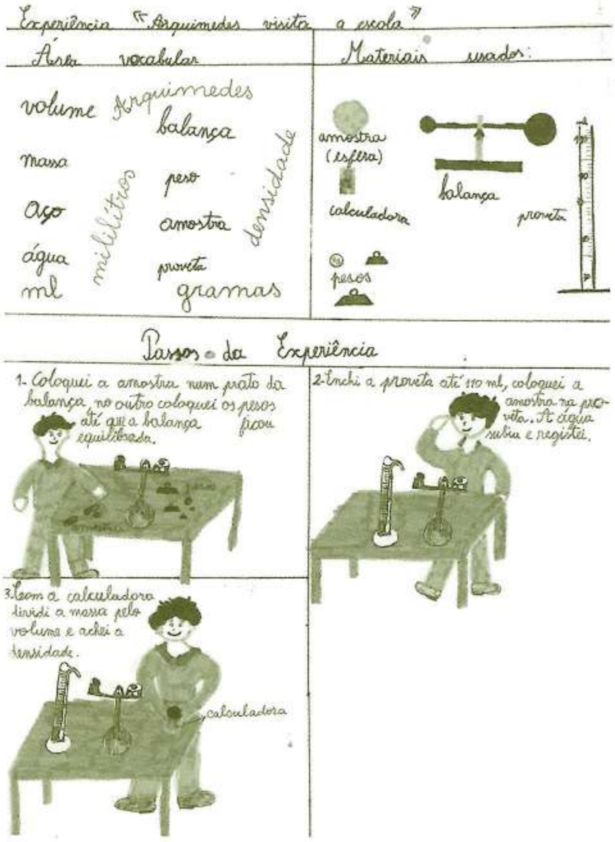
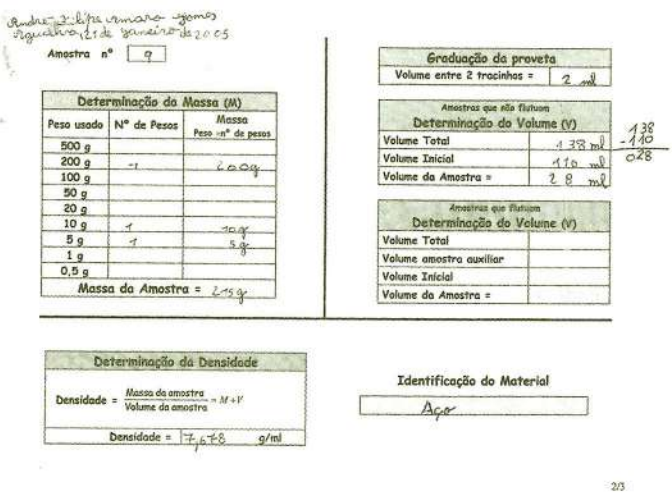


Figura 3.



André Filipe Amaro Gomes
Agualva, 21 de Janeiro de 2005

Amostra nº 9

Determinação da Massa (M)		
Peso usado	Nº de Pesos	Massa Peso × nº de pesos
500 g		
200 g	1	200g
100 g		
50 g		
20 g		
10 g	1	10g
5 g	1	5g
1 g		
0,5 g		
Massa da Amostra = 215g		

Graduação da proveta	
Volume entre 2 tracinhos =	2 ml

Amostras que não flutuam Determinação do Volume (V)	
Volume Total	138 ml
Volume Inicial	110 ml
Volume da Amostra =	28 ml

138
-110
028

Amostras que flutuam Determinação do Volume (V)	
Volume Total	
Volume amostra auxiliar	
Volume Inicial	
Volume da Amostra =	

Determinação da Densidade	
Densidade = $\frac{\text{Massa da amostra}}{\text{Volume da amostra}} = M \div V$	
Densidade =	7,678 g/ml

Identificação do Material

Aço

2/3

Figura 4.

da massa e do volume de sólidos através da deslocação de líquidos, como ilustrou um dos nossos alunos (figura 3). Não só vão desenvolvendo estes importantes conceitos como aprofundam o conceito de medida, unidade de medida e número.

Na leitura da graduação da proveta, surgem alguns erros por ela estar graduada de 2 em 2 ml e os alunos estarem mais habituados, à leitura de copos medidores em que cada tracinho corresponde a 1ml, a 10ml ou 100ml. Pensamos que esta é uma dificuldade benéfica, uma vez que a realização de experiências educativas usando recipientes com diferentes graduações é um aspecto importante porque desperta, nos alunos, a necessidade de focar a sua atenção nos materiais usados. Por outro lado, esta experiência, que permite relacionar a medida do volume de um sólido com a medida do volume do líquido deslocado, aborda o conceito de volume num contexto pouco trabalhado no 1° Ciclo. Na figura quatro podemos ver o registo da experiência realizado por um dos nossos alunos.

As questões que surgem, no desenvolvimento desta experiência, são do tipo: "Se a água está na proveta até 110ml e se, ao mergulhar uma amostra, a proveta marcar 130ml, será que o volume da amostra é de 130ml? O que se terá de fazer para calcular o volume da amostra?", ou " Amostras com a mesma forma e tamanho, mas uma de madeira e outra de aço, têm o mesmo volume? E a massa?", ou "Se a amostra flutua, como resolver o problema para achar o seu volume?".

Após a determinação da densidade, os alunos consultam uma tabela de densidades e têm de saber situar o número calculado num intervalo de valores, para identificar o material de que é feita a amostra.

Para além de toda esta actividade que a experiência *Arquimedes visita a escola* permite, há também uma exploração a nível da Educação e Expressão Plástica, que ilustra o gosto e entusiasmo com que são feitos estes trabalhos.

Gostaríamos de acabar este artigo, salientando que, embora o apoio, formação e equipamento que nos foi cedido pelo IST sejam um excelente motor no desenvolvimento do ensino experimental das Ciências, na nossa escola, também recorremos, com frequência, a materiais simples do nosso quotidiano para dinamizar experiências enriquecedoras que despertem o gosto pela ciência, nos nossos alunos. Ainda gostaríamos de realçar que estas actividades experimentais só têm impacto na aprendizagem se realizadas com regularidade e exploradas convenientemente, dando tempo aos alunos para experimentar, questionar e reflectir.

Opiniões dos alunos:

Aprendi o que é a densidade e também aprendi a pesar. Foi giro! (André)

Aprendi que quando alguma coisa é mergulhada na água, a água sobe.(Fábio)

Gostei de pesar e de colocar as amostras dentro de água.(Miguel)

Gostei de mexer na proveta.(Cláudia)

Gostei de pesar as amostras.(Ana)

Adorei fazer a experiência.(Manuel e Sara)

Ana Paula Gonçalves; Graciete Botas; Helena Trigueiros Horta; Helena Quelhas Cruz; Maria de Jesus Valadas; Natércia Parra; Paulina Gomes; Paulina Rebelo.
EB1 nº 3 de Agualva

Guia da Experiência: Arquimedes visita a Escola

Identificação da amostra

Recolhe um objecto. Regista o número na ficha de experiência.

Determinação da Massa

Coloca a amostra no prato de pesagem e põe os pesos no outro prato. Começa pelos maiores e vais usando os seguintes até equilibrares os dois pratos da balança. Anota os pesos que usaste na tua ficha de experiência. Calcula a massa do objecto.

Determinação do Volume

Estuda a graduação da proveta. O que observas?

Coloca a pinça de metal dentro da proveta. Enche a proveta de água até à marca de, por exemplo, 110 ml. Lê o valor do nível de água.

Presta atenção! A *pinça* quando próxima do vidro faz subir o nível do líquido — experimenta e observa. Quando realizares as tuas medições coloca a pinça de forma a não perturbar os valores medidos. Nota também que para leres o valor correcto deves olhar paralelamente à superfície inferior do líquido como mostra a figura.

Anota o valor medido na tua ficha de experiência. Vamos chamar a este valor *Volume Inicial*.

Puxa a pinça para fora da proveta até conseguires colocar lá a amostra. Mergulha lentamente a pinça com a amostra na água e lê o novo valor do nível de água. Este é o *Volume Total*. Anota-o na tua ficha de experiência.

Calcula o volume da amostra.

Se a amostra flutuar, afunda-a com a ajuda de uma amostra pesada, do qual já saibas o volume. No caso destas amostras, tem em atenção que: Volume Total = Volume da amostra ensaiada + Volume da amostra auxiliar (valor já calculado). A que será igual o volume da amostra ensaiada?

Determinação da Densidade

Calcula a Densidade da amostra como é indicado na ficha de experiência.

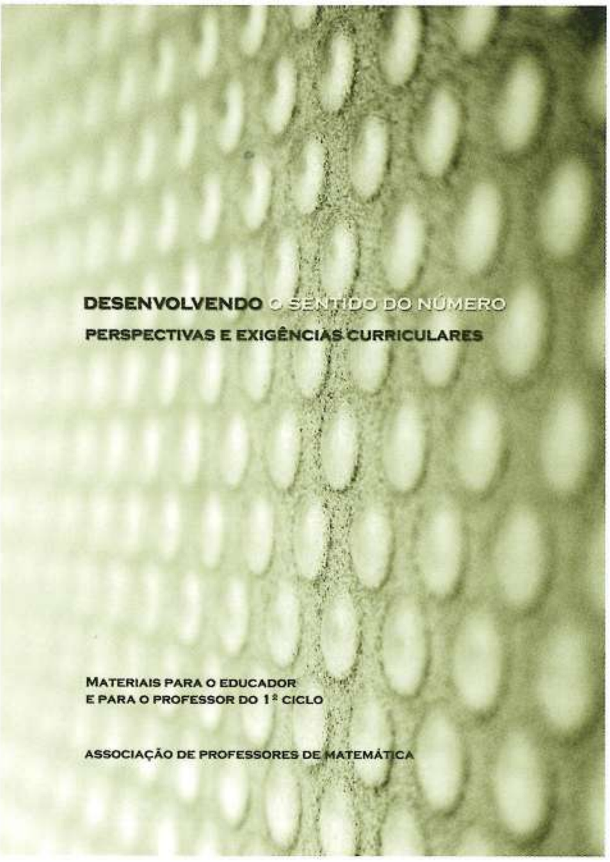
Identificação do Material

Compara o valor obtido com os valores da tabela e identifica o material. Anota tudo na tua ficha de experiência.

Tabela de densidades

Metais	Densidade (g/cm^3)	Polímeros	Densidade (g/cm^3)
Aços	7,6 – 7,8	PVC	1,3 – 1,5
Alumínios	2,6 – 2,9	Nylon	1,1 - 1,2
Titânios	4,4 – 4,9	PE – Polietileno	0,9 – 1,0

Vidros e Cerâmicos	Densidade (g/cm^3)	Compósitos	Densidade (g/cm^3)
Vidro de Chumbo – Cristal	2,8 – 2,9	Kevlar + Resina (60% fibras)	1,4
Esteatite	2,5 – 2,7	Vidro + Polyester (45% a 65% fibras)	2,0 – 2,2
Vidro de Borossilicato Pyrex – Duran	2,1 – 2,3	Cortiça	0,13
Diamante	3,5	Pinho (madeira)	0,5 - 0,7



Desenvolvendo o sentido do número
Perspectivas e exigências curriculares

146 pp. APM, Março 2005
Sócio 6,00€ PVP 12,00€

Centrada no tema dos números e das operações esta publicação reúne três tipos de materiais: tarefas destinadas a alunos entre o 5 e os 7 anos acompanhadas de sugestões para o educador/professor, textos que explicitam as principais opções que influenciam o desenvolvimento das tarefas e descrições de momentos vividos em sala de aula durante a fase de experimentação das tarefas.

Esta publicação resulta do trabalho realizado pela equipa do projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* e reflecte uma abordagem inovadora ao tema dos números e operações.

Raciocínios e Métodos da Tradição Matemática Árabe

32 pp. APM, Dezembro 2004
Sócio 3,00€ PVP 6,00€

Abu al-Biruni usou a Geometria para justificar os resultados obtidos na multiplicação e divisão de números racionais. Ibn al-Banna descreveu o Método dos Pratos, usado para resolver problemas. Estes dois matemáticos árabes, respectivamente dos séculos X e XIII, estão referenciados em dois textos que descrevem métodos de resolução de problemas e diversos raciocínios característicos da tradição matemática árabe. Estes foram traduzidos e fazem parte do terceiro Caderno do GTHEM (Grupo de Trabalho de História e Ensino da Matemática) que já se encontra à venda. Na publicação foram também incluídas duas actividades para alunos do terceiro ciclo, elaboradas com base nos dois textos.

Os Cadernos do GTHEM têm como objectivo principal a divulgação de aspectos diversificados da História da Matemática, tornando acessíveis textos que, de outro modo, não o seriam. Procuram ainda tornar evidentes algumas das potencialidades da História da Matemática enquanto geradora de situações significativas de ensino e aprendizagem.

Poesia e Matemática

No passado ano lectivo de 2003/2004, estive a leccionar a disciplina de Métodos Quantitativos a três turmas do curso de Humanidades, 10° ano, na Escola Secundária Filipa de Vilhena, no Porto. Esta escola preza e desenvolve as mais variadas actividades académicas, culturais e desportivas.

Uma das actividades desenvolvidas nesse ano foi promovida pelos coordenadores da Biblioteca, sempre muito empreendedores, e teve por título *Poesia e...*: Poesia e Matemática, Poesia e Biologia, Poesia e Química, etc, relacionando as várias disciplinas com a Poesia através da divulgação de textos poéticos de autores conhecidos que neles juntaram ciência e arte. Ao longo dos 2° e 3° Períodos, cada mês foi dedicado a uma disciplina diferente, sendo colocados, em diferentes locais da escola, folhetos gratuitos com esses textos.

Como só tive conhecimento deste projecto no final do 1° Período, e o primeiro mês, de Janeiro, foi dedicado ao tema *Poesia e Matemática* não pude propor a participação dos meus alunos com algum trabalho seu para esse mês.

No entanto, a Feira da Ciência estava prevista para meados de Março, e a ideia poderia ser igualmente aproveitada. Mais ainda que tinha implementado o projecto do Portefólio e um trabalho desse tipo enquadrava-se completamente nos seus objectivos.

Assim sendo, em Janeiro, e chamando a atenção dos alunos para o projecto da Biblioteca, propus-lhes a elaboração de um poema *matemático*. Com base no livro *Fascínios da Matemática*, de Theoni Pappas (Editora Replicação), encontrei alguns assuntos que me pareceram passíveis de algum *tratamento poético*. Escolhi, para cada aluno, o tema que achei mais adequado às suas características, havendo repetição de temas entre os alunos. E os temas foram os seguintes: *O Teorema de Pitágoras, A caligrafia, a tipografia e a matemática, O tecto parabólico do Capitólio, A catenária e as curvas parabólicas, Hotel Infinito, A geometria da trajectória de um electrão, Lewis Carrol — o matemático, Contando pelos dedos, Googol e googolplex, O calendário azteca, A curva do floco de neve* e *Stonehenge*.

Em termos de avaliação, esses trabalhos seriam classificados qualitativamente, e incluídos na avaliação do Portefólio, tendo em conta o respeito pelo tema atribuído, a investigação sobre o tema (que também deveria ser apresentada), a apresentação das ideias mais importantes e a qualidade do texto (apesar de eu não ser obviamente professora de Português). Em relação a este último aspecto, pedi alguma ajuda às professoras de Português destas turmas, mas, sem dúvida, que esta actividade teria outra dimensão e maior adesão num projecto inter-disciplinar, pelo qual optarei numa futura oportunidade.

Para este trabalho, os alunos investigavam, em especial na Internet, traziam as suas dúvidas para a aula para que eu os esclarecesse, tentavam depois elaborar um poema, que eu corrigia, fazendo sugestões, e melhoravam o seu texto. Esta actividade prolongou-se por um mês, sendo a maior parte do trabalho realizado em casa.

Apesar de a todos ser pedido este trabalho, apenas cerca de um terço dos alunos terminou o projecto, havendo alguns que o começaram mas que não apresentaram o trabalho corrigido e finalizado, alegando falta de inspiração para melhorarem o seu poema. Outros houve que, desde o início, consideraram muito difícil tornar a matemática *poética* e não revelaram qualquer empenho nesta tarefa.

Os que terminaram e embelezaram o seu trabalho num cartaz, viram o seu trabalho exposto e apreciado no dia 11 de Março de 2004, durante a Feira da Ciência.

E, na avaliação que fizeram desta actividade, no seu Portefólio, todos eles foram unânimes em que, com este trabalho, conheceram matemática sob uma nova perspectiva e de uma forma nova e interessante, relacionada com os seus interesses, já que eram alunos da área das Humanidades, e valorizaram o seu Portefólio, sendo esse, para alguns, o seu trabalho preferido. Provaram também, aos seus colegas de turma e de escola, que a matemática e a poesia podem juntar-se perfeitamente, bastando para isso trabalho, criatividade e imaginação.

Segue um exemplo para ilustrar.

Cristina Pereira
Escola Secundária Filipa de Vilhena, Porto

O Tecto Parabólico do Capitólio

Vou-vos tentar falar
Do tecto parabólico do Capitólio,
Que é um trabalho importante
Para pôr no meu portefólio

Perto do século XIX
Um projecto se empreendeu
O Capitólio foi projectado
E algo de novo ocorreu...

Foi no Statuary Hall,
Onde a Câmara dos Representantes reunia,
Que se descobriram os reflectores
E o efeito que destes surgia

Foi John Quincy Adams
Que os reflectores descobriu
Quando durante uma campanha
Os outros candidatos ouviu

Uns numa ponta
E outros na outra
Ouvem-se bem,
Mesmo com voz rouca

Os que estão no meio
Bem que podem falar
Porque os da ponta
Não conseguem incomodar

O que acabámos de aprender
Põe qualquer pessoa espantada
A matemática que conhecemos
Anda "por aí" espalhada!

Teresa Melo Campos, n° 26, 10°I

E tu?... Como vês a Matemática?

Quinze de Setembro de 2003. É o início de um novo ano lectivo que se avizinha, no Centro Helen Keller. Vou pela primeira vez, no meu percurso de professor de Matemática, ter alunos cegos ou com baixa visão. Perante esta realidade, o desafio de ensinar Matemática ganha outros contornos. Sinto que este é diferente dos que já encontrei anteriormente e que se colocam a muitos professores, no início de cada ano lectivo, quando contactam com novas turmas. A aprendizagem da Matemática, por parte dos alunos cegos, despertou-me, desde logo, muita curiosidade. Afinal como é que a Matemática é vista por eles?

A forma como deveria abordar a Matemática na sala de aula, onde estes alunos estavam juntamente com outros alunos não cegos, não poderia ser a habitual. Acredito que a inclusão dos alunos se torna realidade quando têm condições para participar activamente no decorrer da aula. Mesmo que esse contributo seja simples, é importante que todos os alunos tenham a oportunidade de intervir. Cabia-me a mim o papel de facilitador da inclusão e isso passava pela atenção às actividades propostas e pelas adaptações necessárias aos alunos com necessidades educativas especiais.

Para a geometria, encontram-se facilmente alternativas às ilustrações em livros. O uso de materiais manipulativos é bem acolhido pelos alunos dos 2° e 3° ciclos. Muitos materiais, como os sólidos de madeira, os polydrons, o geoplano, ou as cartolinas estão ao nosso alcance e podem ser utilizados com toda a turma. É importante que os alunos cegos, tal como os outros, tenham tempo para explorar estes materiais. As representações em relevo de figuras simples como quadriláteros, triângulos e outros polígonos são outro material que se encontra disponível com o manual adoptado. Mas a representação de sólidos com diferentes tipos de relevo, é de exploração mais complexa. Para um aluno cego, perceber qual a aresta que não está visível faz pouco sentido, pelo que o acompanhamento do professor ou par, pode fazer toda a diferença. Estas representações permitem que o aluno cego possa ter à sua disposição um maior leque de recursos além da manipulação de objectos concretos.

Os relevos também são úteis no estudo da Estatística, pois tornam acessíveis, aos alunos cegos, os mesmos gráficos que os outros colegas têm para explorar, substituindo nestes as cores diferentes por texturas diferentes.

Os alunos cegos utilizam, nas aulas, uma máquina semelhante à de escrever. É nela que fazem os seus registos. Para eu descobrir como se construía um gráfico ou uma tabela, foi essencial conhecer a escrita Braille.

Encontrei, no Departamento de Braille responsável pela tradução de todos os materiais para os alunos cegos do Centro Helen Keller, uma ajuda muito importante na minha aprendizagem do que é a escrita Braille e a Grafia Matemática Braille. A forma como os alunos cegos escrevem e lêem Matemática foi o alvo seguinte da minha curiosidade. Afinal, como funciona todo aquele conjunto de pontos que se podem sentir? E como é que aí se pode ver a Matemática?

Fui conhecendo as letras do alfabeto Braille, que o contacto diário com esta realidade facilitou. A oportunidade de frequentar um curso de Grafias Específicas Braille foi o passo seguinte, para descobrir como é que aqueles pontos traduzem Matemática. Considero que, sem saber Braille, seria muito pouco eficiente, como professor, no acompanhamento dos meus alunos cegos.

A Grafia Matemática Braille permite representar todos os símbolos matemáticos usuais. O conhecimento da Grafia Matemática Braille pode revelar-se muito importante para que algumas indicações não sejam contraditórias. Por exemplo, na escrita de números fraccionários, e no caso particular de ½ um aluno cego representa o símbolo correspondente ao 1 ligeiramente descido em comparação com o símbolo 2. O domínio do uso correcto da simbologia tem importância quando pensamos no desenvolvimento da autonomia do aluno quando consulta o livro para estudar ou outros livros. Também na participação e trabalho com outros colegas é importante que se reconheça a diferença da escrita, conduzindo a interacções mais ricas e frutuosas, entre pares.

Apesar de, com os números, tudo se tornar mais simples, há, ainda assim, desafios que vão além da escrita. No 7° ano de escolaridade, é usual abordar-se o crivo de Eratóstenes como processo de determinar os números primos, tendo a noção de múltiplos e divisores de um número. Mas, para mim, este sempre foi um processo totalmente gráfico, e mais ... um processo colorido, pois era usual pedir que cada conjunto de múltiplos de um número fosse riscado com uma cor específica. Na lista de números fornecida, os alunos normovisuais riscavam, com traços coloridos, os números com mais de dois divisores e os alunos cegos, com o dedo, apagavam esses números. No final, ambos ficaram com a lista de números primos, depois de um trabalho colaborativo e enriquecedor para ambos. É nesta forma de trabalho que acredito poder contribuir para que a inclusão destes alunos se torne uma realidade visível.

Quando queremos saber como cada um vê a Matemática, estamos a aceitar um desafio que nos enriquece e ajuda a crescer. Tal pode aplicar-se tanto a alunos como a nós, professores. A realidade das nossas salas de aula permite que encontremos muitos alunos diferentes a quem podemos perguntar: E tu? ... Como vês a Matemática?

Nuno Santos
Centro Helen Heller

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

> "Ser ou não ser, eis a questão
> É mais nobre o espírito sofrer
> Os golpes e dardos do destino ultrajante
> Ou pegar em armas contra um mar de infortúnios
> Que ao enfrentar, eliminamos?"
>
> **William Shakespeare**, *Hamlet*

Ser ou não ser, eis a questão

Daniel Olesen e Luís Reis

Recentemente tive a oportunidade de visitar duas escolas secundárias dinamarquesas, no âmbito de um curso de literacia digital em línguas estrangeiras, promovido pelo Centro de Recursos Educativos para a região da Jutlândia do Sul, na Dinamarca.

Uma delas foi a Escola Secundária (Gymnasium) de Tønder, uma cidade junto à fronteira com a Alemanha. A Escola tem cerca de 60 professores e 500 alunos nos 3 últimos anos do ensino secundário, dos 16 aos 18 anos.

Havia a possibilidade de contactar com aulas de diferentes línguas estrangeiras: inglês, alemão, francês, espanhol e russo. Escolhi o francês.

Quando entrei na sala a aula já havia começado. Os alunos estavam dispostos em U, a trabalhar com computadores portáteis, individualmente ou em pequenos grupos. Provinham de diferentes turmas e estavam no segundo ano de aprendizagem de francês.

A professora, Lis Ilsøe-Petersen, colocou-me ao lado do Daniel, que me explicou o que estavam a fazer: uma das tarefas consistia no preenchimento de espaços em branco de frases em francês, onde a palavra em falta estava escrita em dinamarquês entre parênteses; também havia que completar um texto referente à obra em estudo (a autora era argelina e casada com um terrorista).

O Daniel recorria ao dicionário dinamarquês-francês no seu computador quando lhe faltava algum termo em francês ou pretendia validar a sua escolha.

De repente alguns alunos começaram a sair, outros ficaram na sala. Mas era cedo para a aula ter terminado, as aulas duram 90 minutos! Perguntei à professora, que me respondeu: "eles agora podem fazer o trabalho sozinhos, se ficassem aqui dentro gerava-se muito barulho". Decidi acompanhá-la na ronda. Falei com alunas que preferiram ir trabalhar para uma mesa no refeitório (qualquer semelhança com aqueles a que estamos habituados é pura coincidência), outros foram para a Sala dos Alunos. Apreciei o conforto geral das instalações, apesar do edifício onde estávamos datar de 1920.

O dia em que visitei a escola (2 de Fevereiro) era especial: estava-se em campanha eleitoral e todos os alunos iam assistir a um debate com representantes dos partidos políticos, que começava às 11 horas no ginásio. Mesmo que a maioria ainda não tivesse idade para votar …

Falei com professores acerca do trabalho envolvendo os computadores, mas achei preferível pedir a um aluno, precisamente o Daniel, o meu *anfitrião* na aula de Francês, que escrevesse o seu testemunho sobre a utilização dos computadores portáteis.

Testemunho

O meu nome é Daniel, sou um aluno dinamarquês na escola secundária de Tønder. Estou no segundo ano (num total de 3) e é o meu décimo terceiro ano de escolaridade. Como qualquer aluno do ensino secundário tenho disciplinas como Dinamarquês, Inglês, História, Educação Física, Geografia e tenho, ou terei, Biologia, Música e Arte. Como sou estudante da área de línguas (em vez da área científica), tive Latim no ano passado e este ano tenho Alemão e Francês. Se fosse aluno da área científica teria Matemática, Química e Física, mas em vez disso tenho todas essas disciplinas reunidas numa só, chamada Ciências.

A nossa escola tenta ser precursora na utilização da tecnologia nas aulas, razão pela qual a maioria dos alunos possui um computador portátil (na realidade quase todos e na minha turma são 28 em 29) que levam todos os dias para a escola. Essencialmente são usados para três coisas. Primeiro, tomar apontamentos em quase todas as disciplinas (com excepção de Educação Física, naturalmente), o que constitui uma grande ajuda porque não se perdem os papéis e podemos organizar melhor os nossos apontamentos quando estão no computador. Também é verdade que alguns de nós teclamos muito mais rapidamente do que escrevemos à mão, além da escrita no computador ser sempre fácil de ler, ao invés da caligrafia.

Segundo, para as aulas de Ciências. Temos um programa chamado TI Interactive. Apesar do nome, não se trata meramente de uma calculadora TI, mas de um programa matemático muito mais avançado. É especialmente eficaz para resolver equações e fazer rapidamente a verificação

das soluções quando se resolve um problema de matemática. Também traça gráficos e ajusta-lhes a fórmula exacta ou traça a melhor recta que liga um conjunto de pontos provenientes de dados estatísticos, mostrando o melhor gráfico e a respectiva equação. Graças a este programa e à opção de escrever as respostas em computador, sou capaz de resolver testes de matemática concebidos para 90 minutos em apenas 45 minutos. O único contratempo é a burocracia que não dá a liberdade de usar este programa no exame. O nosso professor tem estado em contacto com o Ministério da Educação da Dinamarca para ser autorizada a utilização deste programa nos exames.

Por último, usamos computadores para a Internet e intranet. Todos os portáteis possuem uma placa de rede sem fios e cada sala de aula tem um *router* sem fios. Isso prende-nos a todos à Internet, que usamos ocasionalmente durante as aulas para fazer pesquisa. Contudo, é com a intranet que usamos principalmente a tecnologia. Todos os professores e alunos têm uma conta pessoal e acesso a diversas zonas, como lhes chamamos, cada uma com um objectivo específico. Cada turma tem a sua zona, assim como cada disciplina. Há também zonas para as diferentes organizações escolares, há zonas privadas onde só os alunos entram e não os professores, e há várias meramente informativas e que podem ser difíceis de acompanhar. As zonas funcionam como placares de informações, onde podemos colocar recados. Fica registado o autor e a data e todos os que têm acesso podem ler e responder. Ou então escrever o seu próprio recado sobre outra coisa qualquer. É particularmente eficaz para discutir e organizar ou para entregar algo a todos. Em vez de fazer 29 cópias de uma folha de papel, o professor simplesmente anexa um ficheiro e escreve uma mensagem na nossa zona. Depois podemos descarregar o anexo e ficar com ele no nosso computador. Isto poupa imenso papel e muito tempo também, pois já não precisamos de escrever tudo. Também é uma vantagem quando fazemos trabalho individual, mandamos os nossos apontamentos para a zona ou para a caixa de correio privada do nosso professor e ele pode verificar o que fizemos e qual o progresso alcançado. Depois é fácil discutir na sala de aula, basta ter um computador ligado a um projector (há projectores em alguma salas de aula e para as que não têm também há projectores portáteis na escola) e todos podem ver num ecrã.

Naturalmente, há problemas. Ter todos os apontamentos no computador torna-nos vulneráveis se algo lhe acontecer, por isso somos encorajados a fazer *backups* com frequência. E nem sempre o *router* de Internet sem fios ou o servidor de Internet estão a funcionar, podendo transtornar uma aula. Ou então o servidor de intranet pode avariar (o que aconteceu no verão passado devido ao calor excessivo e à falta de arrefecimento adequado). No entanto tudo melhorou, em particular com novos cabos de fibra óptica, que fornecem uma velocidade de 100 *megabit* na Internet (ao contrário dos anteriores 2 *megabit*).

Alguns professores ainda preferem os velhos métodos, o que significa usar ou não a intranet e os computadores. Sem dúvida que, em comparação com o passado recente, o uso de tecnologia progrediu imenso e apesar de haver somente muito poucos lugares tão evoluídos quanto a Escola Secundária de Tønder, outros há que lentamente se vão modernizando.

Daniel Olesen
Tønder Gymnasium [http://www.toender-gym.dk]

Luís Reis
Centro de Competência Nónio ESB/UCP

Cabri 3D

Como já foi referido num número anterior desta secção, foi lançada em Setembro no CabriWorld 2004, uma versão do Cabri destinada essencialmente ao estudo da geometria no espaço.

O ecrã inicial do Cabri 3D apresenta apenas um plano e um referencial no espaço.

Do mesmo modo que as versões já conhecidas do Cabri, para o estudo da geometria plana, o Cabri 3D parte de um conjunto de objectos iniciais. Além dos pontos, segmentos, rectas, semi-rectas, circunferências, etc., que neste caso podem pertencer ao plano inicial ou não, agora também os planos, cilindros cones e esferas surgem como objectos iniciais, assim como os cinco sólidos platónicos. (Figura 1 e 2)

A esfera é um objecto que pode ser construída a partir do centro e de um ponto ou a partir de quatro pontos.

Em qualquer momento é possível movimentar o plano e visualizar os objectos de outro ponto de vista.

A textura e a cor dos planos e dos sólidos podem ser alteradas e no caso dos sólidos estes podem tornar-se transparentes, ficando apenas as arestas visíveis.

As construções predefinidas são apenas quatro: ponto médio, recta ou plano paralelos a uma recta ou a um plano; recta perpendicular a um plano ou plano perpendicular a uma recta e soma de dois vectores.

As transformações geométricas possíveis são: a rotação definida por um eixo e dois pontos; a translação definida por um vector e as reflexões em relação a um ponto, a um eixo ou a um plano. (Figura 3 e 4)

Construída uma figura, o Cabri 3D dá a possibilidade de visualizar noutras janelas as diferentes projecções das vistas de topo, de frente, da esquerda, da direita, etc. (Figura 5)

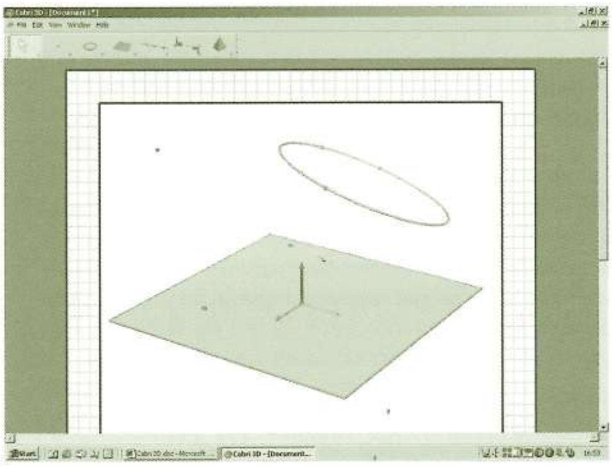


Figura 1.

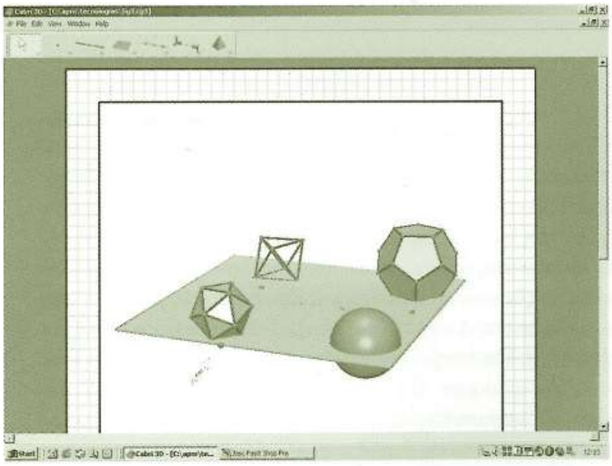


Figura 2.

Os cortes num sólido por um plano, ou a intersecção de dois sólidos são relativamente fáceis de serem visualizados, utilizando o comando *curva de intersecção*. (Figura 6)

Faltam algumas coisas importantes nesta primeira versão como, por exemplo, medidas, coordenadas e equações, que se prevê virem a ser incluídas em próximas edições deste programa.

Existem já na Internet algumas páginas dedicadas a este software.

Na página:

`www.adrianoldknow.org.uk`,

encontram-se alguns artigos sobre o Cabri 3D.

Na página

`www.chartwellyork.com/cabri3d/introtocabri3d.htm`

está publicada uma introdução ao programa, feita por Kate Mackrel, com base num workshop dinamizado por Eric Bainville e realizado no Cabriworld 2004.

Encontra-se disponível para download uma versão de demonstração em:

`www.cabri.com/web/nsite/html/logiciels.html`

Desde 1 de Março, esta versão funciona em sessões de quinze minutos e não permite gravar, copiar, cortar, colar ou imprimir.

Na página

`users.libero.it/prof.lazzarini/Cabri3D/`

existem vários ficheiros em Cabri3D sobre esferas, cortes no cubo, etc.

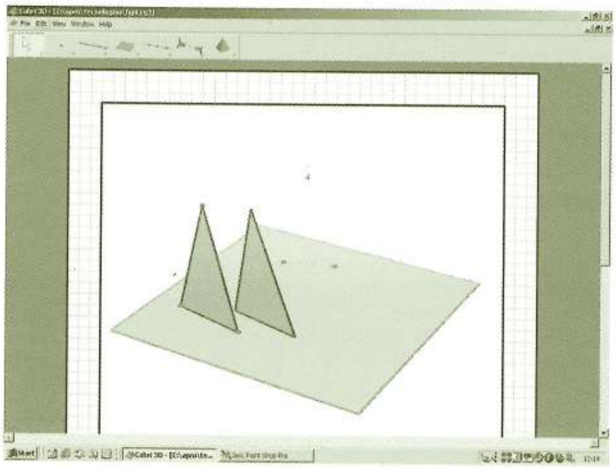


Figura 3.

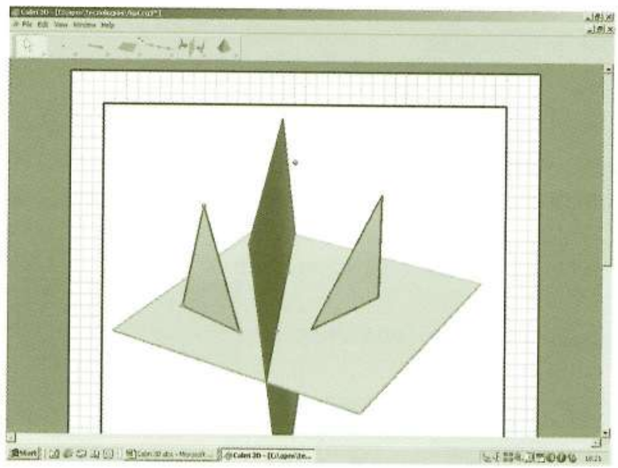


Figura 4.

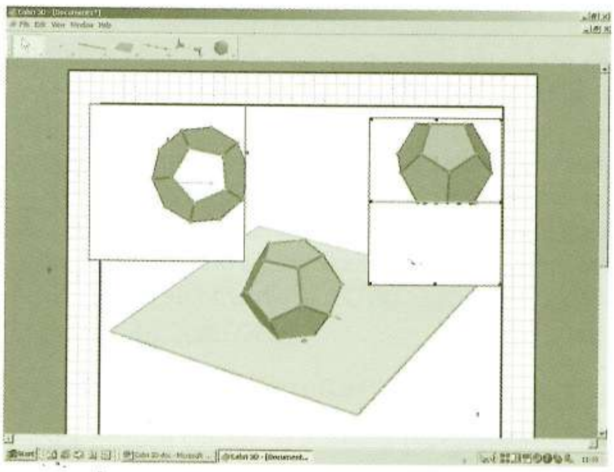


Figura 5.

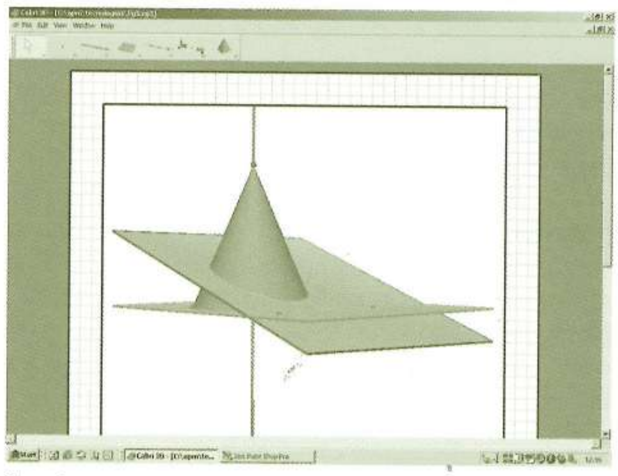


Figura 6.

Navegando na Internet

À procura de páginas sobre o Cabri3D encontrei a página

`http://gtulloue.free.fr/Cabri3D/`

que, contrariamente ao que previa, nesta página não se usa este programa mas sim a versão Cabri II. Encontram-se macros e indicações passo a passo para fazer algumas construções no *espaço*.

Usando apenas a primeira parte do endereço anterior, encontram-se ficheiros para simulação de actividades da área da Física utilizando também o Cabri.

A página espanhola *El Paraíso de las Matemáticas* em

`www.matematicas.net/`

é um portal interessante para vários temas. Se entrar no tema Geointeractiva pode utilizar muitos applets construídos em Cabri Java.

Entre outras coisas, chamo a atenção para um dicionário de termos matemáticos embora se encontre ainda em fase de construção.

A propósito de dicionários, na página

`www.mathsnet.net`

tem acesso a um pequeno dicionário interessante principalmente no modo de visualizar os significados das palavras.

Continuando na Internet, ao fazer uma pesquisa sobre relógios de sol, encontrei o site

`http://www.sundials.co.uk`

que é referenciado em muitos outros como sendo o site mais completo sobre este tema.

Poderá não ser *o* mais completo mas tem de facto muitas indicações, fotografias e dados interessantes sobre os relógios de sol. Em particular tem um local onde apresenta *caminhos dos relógios de sol* em muitos pontos do mundo. Um dos mais recentes é o chamado caminho francês de Santiago, onde apresenta fotos dos relógios de sol que se encontram ao longo desse trajecto.

Ainda sobre este assunto encontra em

`www.analema.biz/`,

um outro site com uma boa colecção de imagens muito bonitas de todo o tipo destes relógios.

E quem navega na Internet já não se admira com a quantidade e variedade de assuntos. Ali encontramos quase tudo, até um site em que se indica como *tricotar* uma banda de Mobius!!

Está em

`http://www.geom.uiuc.edu/docs/doyle/mpls/handouts/node15.html`

Materiais para a aula de Matemática

Esta actividade, tal como aqui é apresentada, foi proposta a uma turma do 12° ano. Nesta aula, o modelo não foi descoberto por experimentação, porque a grandeza dos números envolvidos leva a que pequenas oscilações nos parâmetros se traduzam em grandes alterações no gráfico. Para superar esta dificuldade, sugeriu-se aos alunos o tipo de modelo e que descobrissem os parâmetros utilizando os dados da tabela.

Esta actividade (com algumas alterações) foi posteriormente proposta a um grupo de professores no âmbito de uma sessão prática intitulada *Explorando o TI interactive*, decorrida no encontro *Évoramat 2005*. Nessa sessão não foram feitas sugestões sobre o modo como o modelo poderia ser descoberto. Uma ideia é a utilização da regressão logarítmica, disponível nesse programa.

Uma ideia é a utilização da regressão logarítmica, disponível quer no TI interactive quer na calculadora gráfica.

Na escala de Richter a magnitude (M) é definida em função da energia libertada (E) por $M = 0{,}67 \log E - 7{,}9$. A propósito de actividades com sismos pode ser consultado o artigo *Sismos, Exponenciais e Logaritmos: uma proposta de modelação matemática* da autoria de António Bernardes e Teresa Colaço, publicado na revista *Educação e Matemática* n° 43 e também a actividade *Sismos na Internet*, publicada na brochura de Funções do 12° ano, edição do Departamento de Ensino Secundário.

Ana Cristina Cruz
Ana Patrícia Gafanhoto
Liliana Raposo
Liliana Ribeiro
Esc. Sec. de Montemor-o-Novo

A Terra volta a tremer

O sismo ocorrido no passado dia 26 de Dezembro produziu um maremoto que se encontra entre os mais mortais desastres naturais da história moderna, tendo devastado a costa de vários países, como a Indonésia, Sri Lanka, Índia e Tailândia, com ondas até 15 metros de altura e atingindo a Somália (África), a 4500 km a Oeste do epicentro.

Um sismo é um fenómeno físico resultante da libertação súbita de grande quantidade de energia, que se foi acumulando em determinada região da crosta terrestre, durante um certo intervalo de tempo e que provoca vibrações que se transmitem a uma extensa área circundante. A zona no interior da terra na qual se dá a libertação de energia que provoca o sismo designa-se por foco ou hipocentro.

A dimensão de um sismo pode ser caracterizada por vários parâmetros, sendo os mais utilizados a magnitude e a intensidade. Cada sismo tem apenas um valor de magnitude, mas produz uma distribuição de intensidades na área afectada.

A *magnitude* é um parâmetro instrumental que caracteriza a dimensão relativa de um sismo e está directamente relacionada com a *energia libertada no foco*. O seu cálculo baseia-se no valor do movimento máximo do solo registado por um sismógrafo.

A escala de magnitude sísmica mais utilizada é a *Escala de Richter*. O sismo que abalou a costa sudoeste asiática a 26 de Dezembro de 2004 teve uma magnitude de 8,9, tendo sido por isso o quarto maior sismo desde 1900, altura em que se iniciou o registo sismográfico. Desde 1900, o maior sismo que ocorreu no mundo foi no Chile, a 22 de Maio de 1960.

De um modo geral, os sismos de magnitude inferior a 2,5 não são sentidos pelas pessoas e só se observam danos quando os sismos têm magnitude superior a 4 ou 5.
A tabela seguinte contém registos das energias libertadas e magnitudes (na escala de Richter) de alguns sismos ocorridos nos últimos anos.

Localização geográfica. Data	**Energia (ergs)**	**Magnitude**
Guerrero, México. 10/01/2003	$1{,}79 \times 10^{19}$	5,0
California, Estados Unidos da América. 22/02/2003	$3{,}57 \times 10^{19}$	5,2
Ao largo da costa de Jalisco, México. 22/01/2003	1×10^{20}	5,5
Ao largo da costa de Oregon, Estados Unidos da América. 16/01/2003	$5{,}58 \times 10^{20}$	6,0
Próximo da costa da Guatemala. 21/01/2003	$1{,}57 \times 10^{21}$	6,3
Província de Niigata, Japão. 23/10/2004	$8{,}72 \times 10^{21}$	6,8
Ilha de Hokkaido, Japão. 06/12/2004	$1{,}73 \times 10^{22}$	7,0
Próximo da costa de Michoacan, México. 22/01/203	$4{,}86 \times 10^{22}$	7,3
Ilhas Salomão. 20/01/2003	$9{,}66 \times 10^{22}$	7,5
Ilha de Sumatera, Indonésia. 02/11/2002	$9{,}66 \times 10^{22}$	7,5
Alaska, Estados Unidos da América. 03/11/2002	$3{,}82 \times 10^{23}$	7,9

Fontes: El correo de Santiago, Vanguardia, Instituto de Geofísica da Universidade de Évora, Instituto de Meteorologia, Instituto Geofísico — Universidad Javeriana.

1. Constrói um gráfico com vista ao estudo da relação entre a energia libertada x e a respectiva magnitude y.

2. Que tipo de modelo matemático sugere esta situação? Justifica.

3. Compara as diferenças de energia em intervalos cujas diferenças de magnitude são iguais.
O que concluis?

4. A magnitude M de um sismo está relacionada com a energia libertada E (em ergs), através de uma função do tipo $M = a \log E + b$, em que a e b são constantes reais.
Utiliza os dados da tabela para encontrar uma função que relacione a magnitude de um sismo com a energia libertada.

5. O maior sismo documentado na Europa foi o que ocorreu em Lisboa, a 1 de Novembro de 1755. Sabendo que este sismo libertou $7{,}09 \times 10^{24}$ ergs de energia, qual foi a sua magnitude na escala de Richter?

6. O sismo sentido no passado dia 11 de Janeiro em Montemor-o-Novo teve uma magnitude de 4,3 na escala de Richter. Determina a energia libertada por este sismo.

7. Qual a relação existente entre as energias libertadas por dois sismos cujas magnitudes diferem de uma unidade?
Compara este resultado com a conclusão tirada na pergunta 3.

Jacob Steiner e o problema da menor malha viária

José Luiz Pastore Mello

O problema da menor malha viária

O caminho mais curto ligando dois pontos no plano euclidiano é a linha recta, mas qual seria o caminho mais curto ligando quatro pontos?

Do ponto de vista prático, esse problema poderia ser apresentado da seguinte forma: se quisermos construir estradas ligando quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível? Para simplificar a análise do problema, admitiremos que cada cidade esteja localizada no vértice de um quadrado de lado unitário.

A figura 1 (página seguinte) indica seis possíveis projetos de malha viária ligando as cidades A, B, C e D.

No projeto (1) temos a malha com as menores distâncias ligando duas cidades quaisquer, contudo, seu comprimento total $(4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83)$ ainda pode ser sensivelmente reduzido. Na opção (2), por exemplo, conseguimos reduzir o comprimento da malha para $2\pi(0,5 \cdot \sqrt{2}) \approx 4,44$. Essa opção pode ainda ser melhorada, como mostra o projeto (3), onde o comprimento total se reduz para 4 unidades.

O projeto (4) continua garantindo a ligação entre as quatro cidades e reduz o comprimento total da malha para 3 unidades. O projeto (5) não reduz o comprimento da malha em relação ao anterior, mas melhora sua eficiência, já que nele pode-se ir da cidade A para B percorrendo um caminho mais curto do que em (4).

Dos seis projetos apresentados, (6) é o de malha viária mais curta $(2\sqrt{2} \approx 2,83)$, contudo ele não constitui a solução do problema apresentado inicialmente, como veremos a seguir.

A mais curta entre todas as malhas possíveis

A figura 2 indica a configuração da mais curta malha viária possível (as duas malhas apresentadas nessa figura diferem apenas por uma rotação de 90°).

Figura 1.

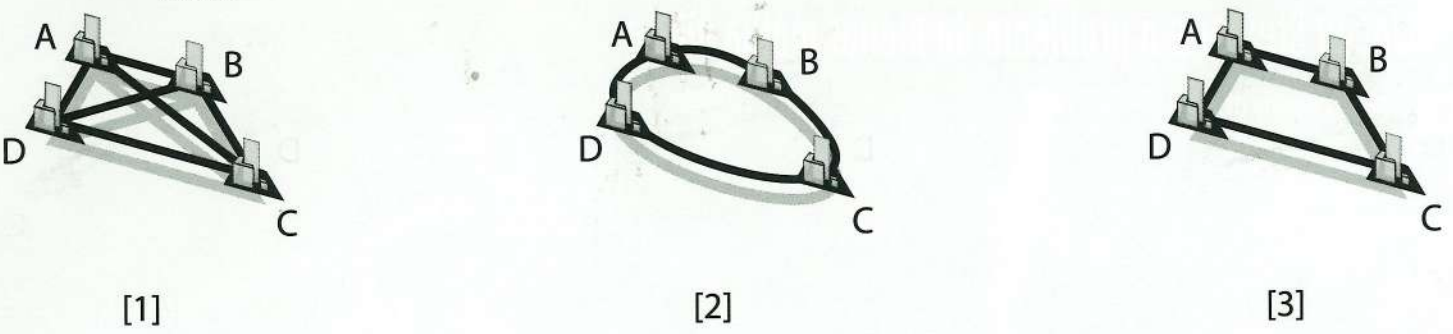


Figura 2.

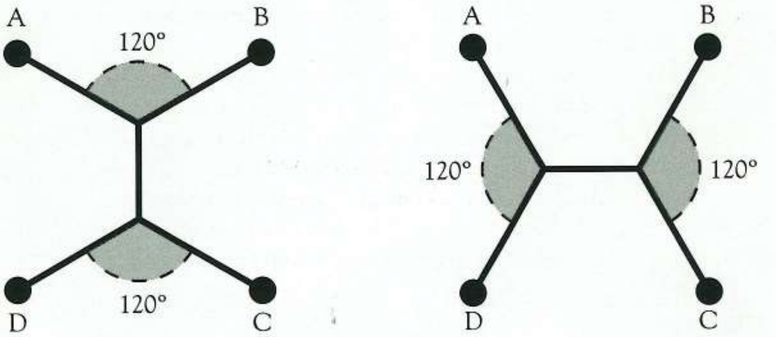
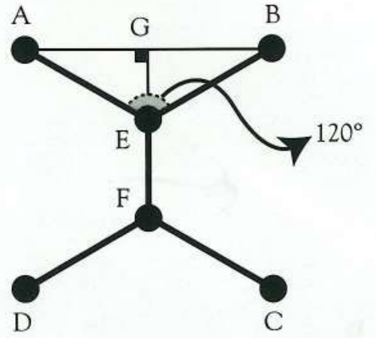


Figura 3.



Antes de demonstrarmos que tal malha constitui o mais curto caminho possível, vamos calcular o seu comprimento total tomando como referência a figura 3.

O ΔABE (figura 3) é isósceles, com ângulos da base medindo 30°. Aplicando a lei dos senos, temos que

$$1/\text{sen } 120^\circ = \overline{AE}/\text{sen } 30^\circ,$$

ou seja,

$$\overline{AE} = \sqrt{3}/3$$

(observe nesta malha que $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DF}$).

Como $\overline{AG} = 0,5$ e o ΔAGE é retângulo,

$$\overline{GE} = 0,5 \cdot \text{tg } 30^\circ,$$

ou seja, $\overline{GE} = \sqrt{3}/6$. Da figura concluí-se que

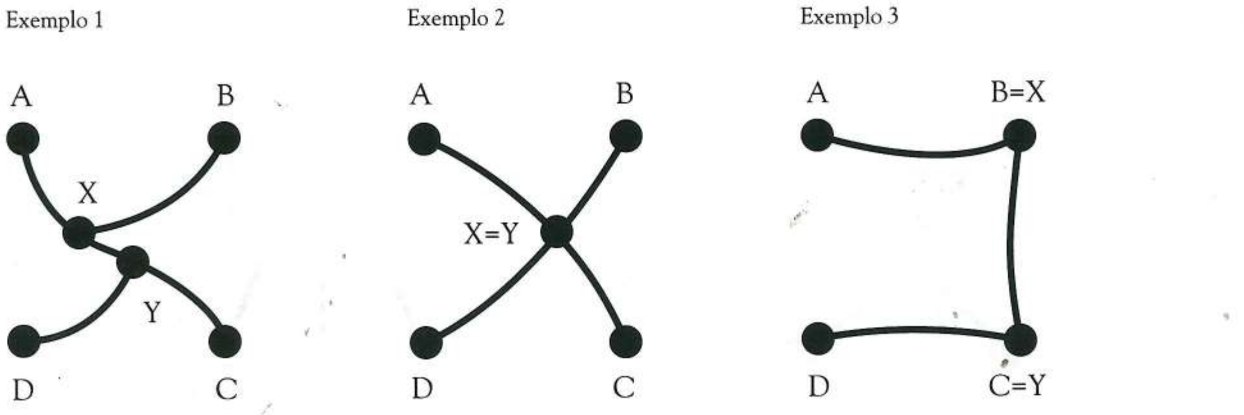
$$\overline{EF} = 1 - 2\overline{GE},$$

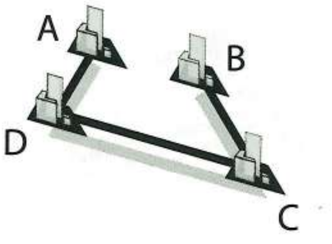
ou seja, $\overline{EF} = (3 - \sqrt{3})/3$. Como a malha total mede $4\overline{AE} + \overline{EF}$, seu comprimento será igual a $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$. Esse resultado é 4% menor do que o valor encontrado na malha (6) da figura 1.

Demonstração matemática da solução do problema

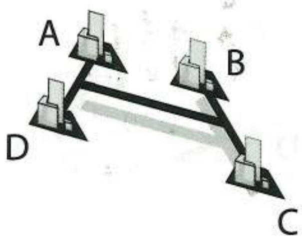
Jacob Steiner (1796–1863), qualificado por muitos historiadores como o maior geômetra desde Apolônio, foi o primeiro a propor o problema da conexão de três ou mais pontos no plano por meio de um caminho total de comprimento mínimo. Como Steiner foi reconhecidamente um geômetra

Figura 4.

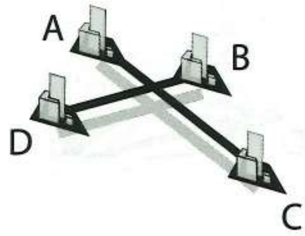




[4]

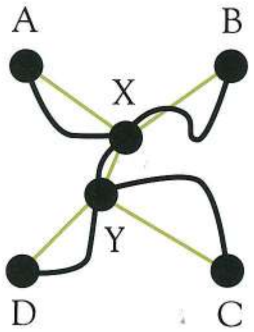


[5]



[6]

Figura 5.



que não apreciava o método analítico — considerado por ele uma "muleta para os espíritos menos dotados" — seus estudos sobre caminhos mínimos sempre privilegiaram o método geométrico puro. O encaminhamento que faremos da solução do problema da malha mínima ligando quatro pontos nos vértices de um quadrado ilustra, de maneira relativamente simples, o alcance desse método de investigação, como veremos a seguir.

Chamemos de caminho l qualquer ligação que conecte o vértice A ao C do quadrado. Para que exista um caminho que conecte os quatro vértices do quadrado, B e D devem se conectar-se ao caminho l. Chamaremos os pontos de conexão de B e D com l de X e Y, respectivamente (esses pontos são chamados de pontos de Steiner). Observe (figura 4) que, dependendo dos caminhos de B e D até l, X e Y podem ser dois pontos distintos (exemplo 1), pontos coincidentes (exemplo 2), ou ainda vértices do quadrado (exemplo 3).

Como estamos interessados na malha total mais curta, devemos observar ainda que um caminho intermediário em linha recta ligando dois pontos será sempre mais curto do que um caminho em linha curva, como ilustra a figura 5.

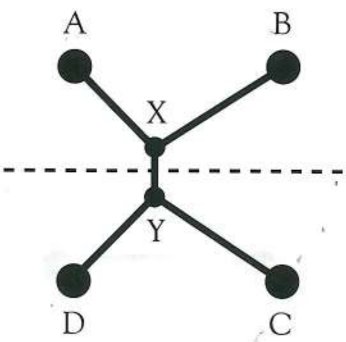
Resumindo as informações que temos até o momento, é possível concluir que o diagrama que resolve o problema é composto de cinco (ou menos) caminhos intermediários em linha recta, com dois pontos de Steiner (ou um).

Se a solução do problema fosse alguma configuração de malha com um único ponto de Steiner, ou seja, uma solução com $X = Y$, a mais curta configuração possível seria aquela que analisamos em (6) da figura 1. Contudo, a malha da figura 2 (e sua rotação de 90°), que possui dois pontos de Steiner, constitui uma configuração mais curta do que a malha (6) da figura 1, o que implica dizer que a configuração da menor malha viária não pode ter apenas um ponto de Steiner. Resta-nos provar agora que entre todas as malhas com dois pontos de Steiner, a da figura 2 é a de menor comprimento total.

Dada uma malha ligando os quatro vértices de um quadrado, uma reflexão sobre eixo de simetria horizontal (ou vertical) do quadrado reduzirá, de forma eficiente, a malha para uma situação semelhante a (I) ou a (II) da figura 6.

Figura 6.

(I)
Eixo de simetria horizontal do quadrado



(II) Eixo de simetria vertical do quadrado

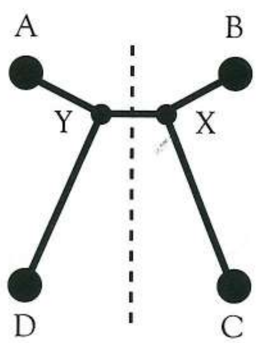


Figura 7.

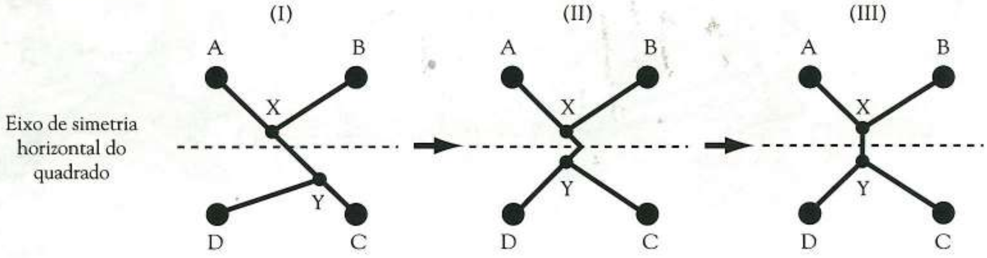
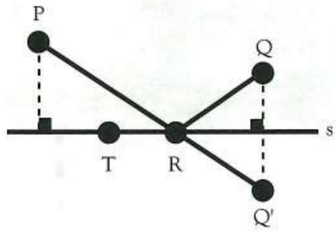


Figura 8.



Para ilustrar tal processo, vamos admitir a malha (I) da figura 7, onde $\overline{AX} \neq \overline{DY}$ e $\overline{BX} \neq \overline{CY}$, e verificar como ela pode ser substituída por uma malha mais curta onde $\overline{AX} = \overline{DY}$ e $\overline{BX} = \overline{CY}$.

Partindo de (I) na figura 7, dividimos a malha em duas partes pelo eixo de simetria horizontal do quadrado, fazendo em seguida uma reflexão da metade menor da malha sobre a maior, como em (II). O comprimento da malha (II) pode ser reduzido ainda mais com a substituição da ligação entre os dois pontos de Steiner por uma linha recta, como em (III). Observe que em (III) temos uma malha total mais curta do que em (I), e com $\overline{AX} = \overline{DY}$ e $\overline{BX} = \overline{CY}$.

Processo semelhante poderia ser feito, com outras malhas, utilizando o eixo de simetria vertical do quadrado; neste caso a malha resultante teria $\overline{AY} = \overline{BX}$ e $\overline{DY} = \overline{CX}$.

Até este momento sabemos que:

i. A configuração que resolve o problema possui dois pontos de Steiner (X e Y);

ii. Os cinco segmentos definidos por um diagrama com dois pontos de Steiner devem ser linhas rectas;

iii. A configuração da malha mínima ligando os vértices A, B, C e D do quadrado deverá ter $\overline{AX} = \overline{DY}$ e $\overline{BX} = \overline{CY}$ (ou $\overline{AY} = \overline{BX}$ e $\overline{DY} = \overline{CX}$).

Para demonstrar que a configuração apresentada na figura 2 representa a solução do problema do caminho mínimo, precisamos provar que as três linhas que partem dos pontos X e Y formam, em torno de X e de Y, três ângulos de 120°. Para isso usaremos o seguinte teorema:

Se P e Q são dois pontos de um lado da recta s, e R é um ponto de s tal que a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ seja mínima, então os ângulos formados entre PR e s, e RQ e s são congruentes.

Demonstração:
Inicialmente marcamos o ponto Q', resultado da reflexão de Q sobre s, conforme mostra a figura 8.

Sendo T um ponto móvel sobre s, todos os possíveis triângulos TQQ' serão isósceles com $\overline{TQ} = \overline{TQ'}$, o que implica dizer que $\overline{PT} + \overline{TQ}$ é igual a $\overline{PT} + \overline{TQ}'$.

Segue que o menor valor possível para $\overline{PT} + \overline{TQ}'$ ocorrerá quando os pontos P, T e Q' estiverem alinhados, ou seja, quando o ponto móvel T coincidir com o ponto R, garantindo assim que os ângulos formados entre PR e s, e RQ e s sejam congruentes.

Partindo agora de um diagrama que atenda as condições i, ii e iii, como por exemplo a malha (I) da figura 6; e assumindo que neste diagrama a medida $\overline{AX} = r$ seja a exacta medida de $\overline{AX} = r$ no diagrama da mais curta malha total possível, traçaremos um círculo de raio r e centro

Figura 9.

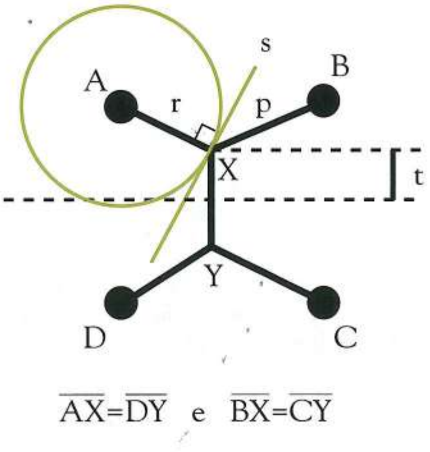


Figura 10.

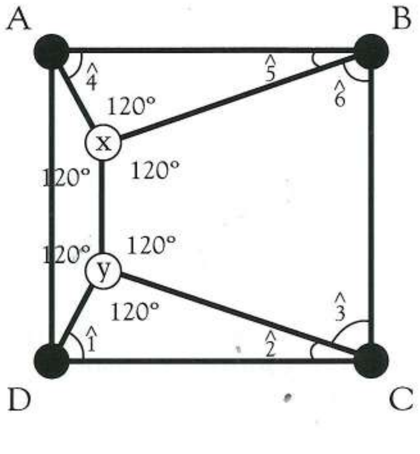


Figura 11.

A, e uma recta s tangente à circunferência no ponto X (figura 9).

Para que o diagrama represente a malha total mínima, ou seja, a menor soma $2r + 2p + 2t$, com r dado, devemos encontrar a menor soma $2p + 2t$, o que é equivalente a procurar uma configuração de malha com a menor soma $p + t$. Pelo teorema demonstrado, se $p + t$ é mínimo, então o ângulo formado entre p e s é congruente ao ângulo formado entre t e s, o que implica dizer que

$$\angle AXY = \angle BXA = \angle BXY = 120^\circ$$

na situação da malha de comprimento mínimo. Com auxílio de um círculo de centro D e raio $\overline{DY} = r$, resultado análogo pode ser obtido para os ângulos em torno de Y.

Se provarmos agora que $r = p$ (ou seja, que $\overline{AX} = \overline{DY} = \overline{BX} = \overline{CY}$), concluiremos que a configuração apresentada na figura 2 representa a malha do menor comprimento possível.

Supondo inicialmente $r < p$, como mostra a figura 10, teremos $\hat{1} > 30^\circ$ e $\hat{2} < 30^\circ$, implicando $\hat{3} > 60^\circ$; e $\hat{4} > 30^\circ$ e $\hat{5} < 30^\circ$, implicando $\hat{6} > 60^\circ$, o que caracteriza uma contradição, já que a soma dos ângulos internos do quadrilátero $BCXY$ deve ser 360°.

Por raciocínio análogo também não poderemos ter $r > p$, o que garante $r = p$ e resolve definitivamente o problema da malha mínima.

Uma demonstração experimental da solução

O problema que acabamos de resolver matematicamente pode também ser solucionado com auxílio de uma experiência com bolhas de sabão. Se mergulharmos em uma solução com água e sabão um dispositivo com duas chapas paralelas fixadas por quatro pinos de comprimento h formando um quadrado, ao retirarmos o dispositivo da água, a bolha de sabão formada terá superfície mínima (devido ao equilíbrio termodinâmico), o que equivale no plano bidimensional a solução do problema que acabamos de resolver (figura 11):

Bibliografia recomendada

[1] Courant, R., Robbins H. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000 (pág. 467–480).

[2] Eves, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995 (pág. 593).

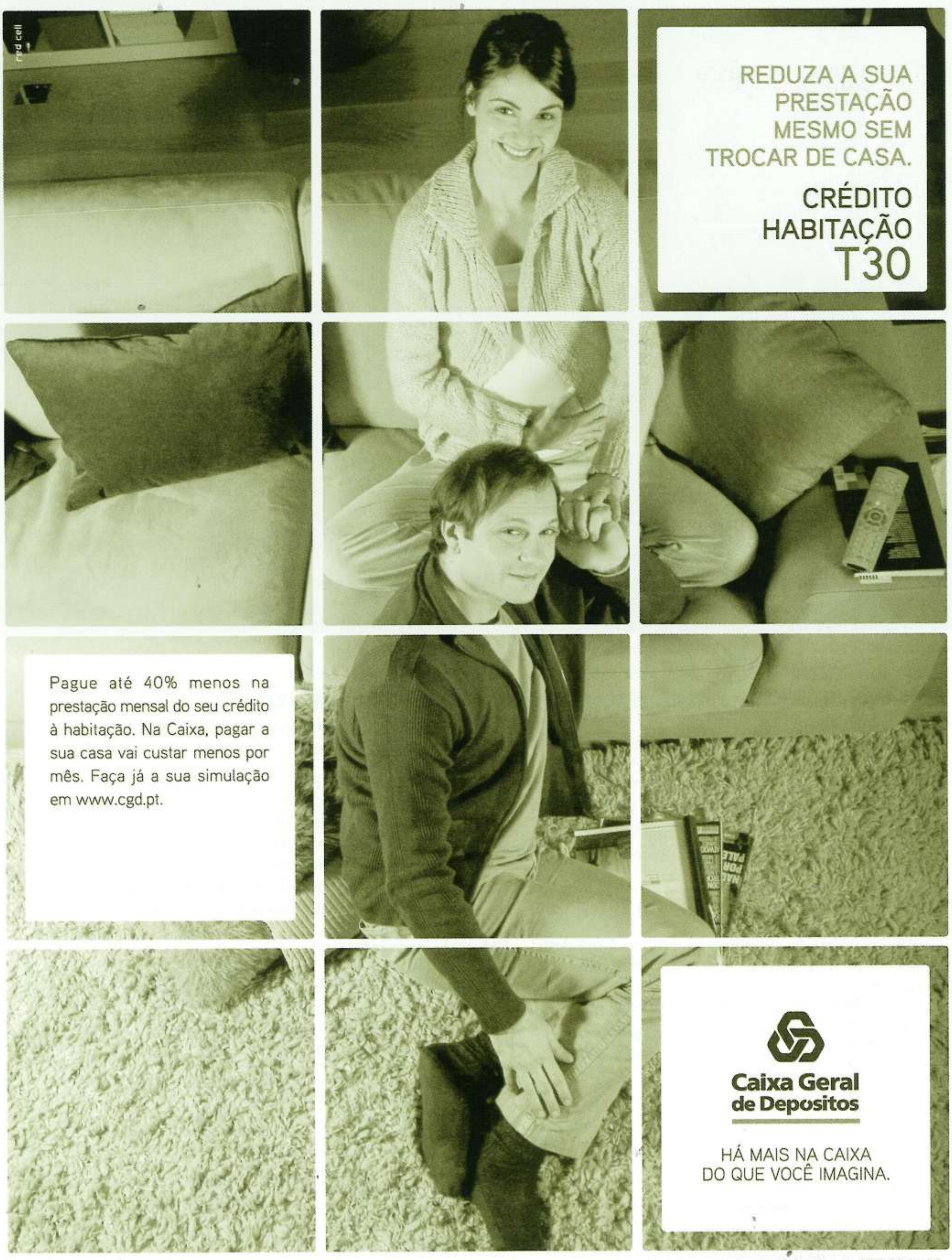
[3] Gardner, M. *As últimas recreações*. Lisboa: Gradiva, 2002 (pág. 291–304).

[4] Isenberg, C. *The science of soap films and soap bubbles*. New York: Dover, 1992 (pág. 53–59).

[5] Tanton, J. S. *Solve This: Math Activities for Students and Clubs*. Washington: The Mathematical Association of America, 2001 (pág. 169–171)

José Luiz Pastore Mello

Colégio Santa Cruz (São Paulo, Brasil)


REDUZA A SUA PRESTAÇÃO MESMO SEM TROCAR DE CASA.
CRÉDITO HABITAÇÃO T30
Pague até 40% menos na prestação mensal do seu crédito à habitação. Na Caixa, pagar a sua casa vai custar menos por mês. Faça já a sua simulação em www.cgd.pt.
Caixa Geral de Depositos
HÁ MAIS NA CAIXA DO QUE VOCÊ IMAGINA.

Triângulos no trapézio

O trabalho numa aula de Matemática, feito em grupos de dois, consistia em desenhar um trapézio qualquer, traçar as duas diagonais e, fazendo as medições necessárias, calcular a área de cada um dos quatro triângulos obtidos.

A Rita e a Carolina dividiram as tarefas entre si, ficando cada uma com dois triângulos.

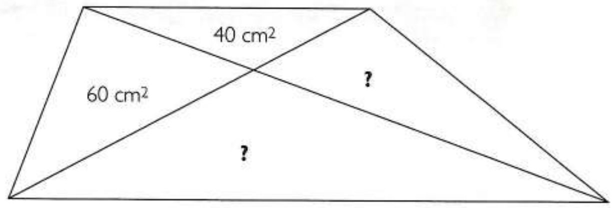
A Carolina, depois de fazer cuidadosamente as medições necessárias, concluiu que um triângulo tinha uma área de 40 centímetros quadrados e o outro de 60.

A Rita foi dar uma volta. Quando chegou, olhou para as áreas encontradas pela Carolina e disse:

— Oh, eu nem preciso de medir nada. Já sei a área dos meus.

Que área tinham os triângulos da Rita?

(Respostas até 30 de Junho)



Berlindes em quatro taças

O problema proposto no número 80 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O Valter colocou quatro taças, uma em cada vértice de um quadrado, e em cada taça pôs um berlinde. Depois, carregado com um grande saco de berlindes, partiu de um dos vértices e seguiu sempre ao longo dos lados do quadrado. Só parava quando chegava a uma taça e então:

— *se viesse segundo o sentido dos ponteiros do relógio, deitava na taça tantos berlindes quantos os que se encontravam na taça de onde vinha;*

— *se viesse em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, retirava ou punha na taça os berlindes necessários, de modo a que ficasse lá uma quantidade igual à da taça de onde vinha.*

Como fez o Valter para que cada taça ficasse com 98 berlindes?

Tivemos 6 respostas: Ana Luísa Correia (Lisboa), Augusto Taveira (Faro), Célia Lobo (Guimarães), Filipe Carvalho (Viana do Castelo), Helena Lopes (Portalegre) e Pedrosa Santos (Queluz).

Para simplificar, chamemos R ao sentido dos ponteiros do relógio e C ao contrário.

As soluções apresentadas são quase todas diferentes, com um número de movimentos que, no máximo, foi de 20. Todas as resoluções faziam várias considerações prévias sobre o tipo de movimentos que se teria de efectuar, mas a Ana Luísa e o Filipe chegaram mesmo a teorizar. Eis as conclusões do Filipe:

1. Só é possível obter a primeira taça com 98 berlindes através de um movimento R.
2. Com um movimento C seguido de outro R duplicamos o número de berlindes de uma taça.
3. Com dois movimentos C seguidos de outros dois R triplicamos o número de berlindes de uma taça.
4. Basta obter uma taça com 98 berlindes para que, com três movimentos C, todas elas fiquem com 98 berlindes.

O Pedrosa *tropeçou* num palpite: os divisores de 98 (2, 7, 14 e 49) devem ser importantes para a solução. E, com algumas tentativas, descobre forma de lá chegar, embora depois escreva que "este processo não será um método matemático". Bem, na nossa opinião, a investigação matemática passa muitas vezes por estes processos experimentais, só que depois eles não são valorizados quando se apresentam os resultados. Daí a nossa tendência para os julgar secundários ou mesmo *não matemáticos*.

A solução mais económica, com apenas 16 movimentos, pertence ao Filipe. Ei-la, com a indicação do número de berlindes em cada taça após cada movimento:

Taça	Taça	Taça	Taça	Movimento
1	1	1	1	
1	**2**	1	1	R
1	2	**3**	1	R
1	**3**	3	1	C
1	3	**6**	1	R
1	**6**	6	1	C
1	6	**12**	1	R
1	**12**	12	1	C
1	12	**24**	1	R
1	**24**	24	1	C
1	24	**48**	1	R
1	24	48	**49**	R
1	24	**49**	49	C
1	24	49	**98**	R
1	24	**98**	98	C
1	**98**	98	98	C
98	98	98	98	C

Saberes matemáticos de todos os cidadãos no séc. XXI

A publicação *Saberes Básicos de todos os cidadãos no séc. XXI*, referenciada de Julho de 2004, conjuga o *Relatório do Estudo de Saberes Básicos de Todos os Cidadãos no Séc. XXI* com as actas do seminário realizado em 11 de Março de 2004, pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), sob o tema do desenvolvimento de competências e sobre o relevo curricular a dar ao conhecimento, às capacidades e às atitudes.

Da publicação, para além de uma nota prévia de enquadramento, da autoria do Secretário-Geral do CNE, Manuel Miguéis e do relatório do estudo que serviu de base ao seminário, consta:

(i) Textos de abertura do Seminário, do Presidente do CNE de Manuel Porto e do Ministro da Educação David Justino;

(ii) Intervenções no painel *Saberes Básicos e Sociedade do Conhecimento* de Manuel Carmelo Rosa (Presidente da Mesa), António Cachapuz, Idália Sá-Chaves e de Fátima Paixão

(iii) *Competências Essenciais no Curriculum: Que Práticas nas Escolas?* de Luísa Alonso

(iv) *Competências na Cultura de Escolas do 1º Ciclo* de Maria do Céu Roldão

(v) Intervenções no *Debate*.

Em 2000/2001 o tema das competências essenciais para todos os cidadãos esteve no centro de muitos debates em torno da escola, nomeadamente no ensino básico.

Nessa altura, a presidente do CNE, Teresa Ambrósio, propôs a realização do estudo sobre *Saberes Básicos de Todos os Cidadãos no Séc. XXI*. Esse estudo foi realizado por uma equipa coordenada por António Cachapuz da Universidade de Aveiro e foi apresentado em 2002 no CNE.

O estudo reconhece como fundamental a identificação dos saberes básicos a desenvolver pelos cidadãos e as suas implicações no âmbito da escola.

O estudo faz a proposta de cinco saberes básicos e analisa de que forma é que são considerados no Currículo Nacional concluindo que genericamente o *discurso desenvolvido nas propostas apresentadas pelo ME é globalmente congruente com os quadros de referência apresentados* no estudo.

Define depois cinco princípios para a reconceptualização curricular e volta a analisar de que forma estes princípios estão presentes no Currículo Nacional e conclui pela sua presença de forma satisfatória.

Considera o estudo em causa que se os princípios curriculares identificados na legislação portuguesa parecem ter a configuração desejada, já o mesmo não se pode dizer dos modelos de organização/estrutura do sistema educativo e curricular, e por isso, passa a fazer propostas de desenvolvimento curricular, para melhorar o sistema, ao nível do modelo de organização/estrutura do sistema educativo, do currículo e da sua gestão, da formação de professores e da investigação educacional.

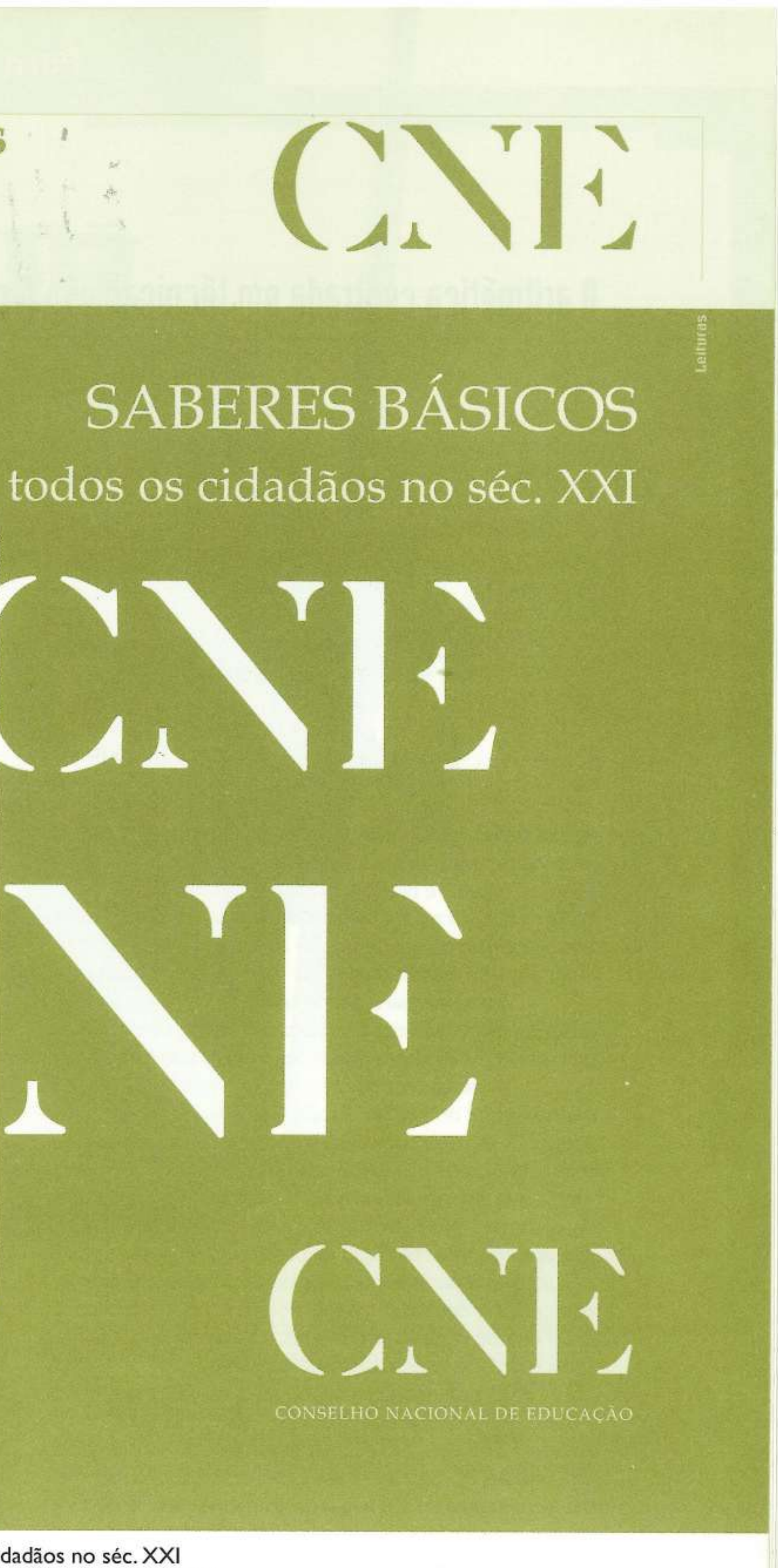
A intervenção de António Francisco Cachapuz centra-se na importância da nova relação que se deve estabelecer com o conhecimento.

Idália Sá-Chaves apresenta a segunda parte do estudo, sobre *Tendências para a Reconceptualização Curricular* e Fátima Paixão apresenta as propostas para melhorar o modelo actual de organização/estrutura do sistema educativo e curricular.

Os textos de Luisa Alonso e de Maria do Ceú Roldão são contribuições que os responsáveis pela preparação do seminário entenderam solicitar por constituirem um enriquecimento para a discussão no seminário.

O texto de Luisa Alonso tem por base os primeiros resultados parciais do estudo *Projecto de Investigação sobre Inovação Curricular* que pretende dar continuação ao parecer elaborado em 2001 sobre o Projecto de Gestão Flexível (publicado *on-line* na página `www.deb.min-edu.pt`).

Em jeito de conclusão o texto refere (...) *faz-nos pensar que existem nichos de sucesso e de inovação, onde se demonstra que a mudança é possível sempre que se construam as condições políticas, culturais, organizacionais e formativas necessárias para que os professores recuperem a paixão de educar com inteligência, emoção e sentido ético, ou seja, com profissionalidade* e termina perguntando: *E agora? Mudamos de novo a página sem a ter lido e especialmente sem a ter compreendido?*



O texto de Maria do Céu Roldão (MCR) é centrado na Cultura de Escolas do 1° ciclo. No entanto, começa por referir que todas as mudanças introduzidas pelo processo da reorganização curricular, que não estão a ser apropriadas por este nível de ensino, terão também que ser consideradas em todos os restantes níveis do sistema. MCR centra a análise no facto do processo da reorganização curricular não ser uma mudança de programas, não ser uma reforma curricular formal, não ser uma alteração do desenho curricular, não ser a introdução de três novas áreas curriculares, e no entanto, serem estes quatro aspectos aqueles que aparecem com maior visibilidade aos olhos dos professores e do sistema.

A leitura dos estudos e reflexões contidas nesta publicação parecem-me de uma enorme actualidade e de leitura muito agradável e próxima dos professores e das escolas. Estamos a chegar ao fim de um ciclo. Os alunos que iniciaram o processo da reorganização curricular terminam este ano o ensino básico, o 9° ano. O documento Currículo Nacional deveria ter sofrido um processo de revisão que deveria estar concluído em 2003-2004. Este processo foi interrompido e não se sabe o que se seguirá. Aproveitemos este compasso de espera para discutir as questões que estes textos levantam e juntemos forças para contribuir empenhadamente para a *continuação revista* do processo generalizado em 2001/2002 com o Decreto-Lei 6/2001.

Paula Teixeira
Esc. Secundária D. João V, Damaia

Saberes Básicos de todos os cidadãos no séc. XXI
Actas do Seminário realizado em 11 de Março de 2004

Editora : CNE – Ministério da Educação (www.cnedu.pt)
2004; 215 pp.
ISBN 972-8360-30-4
Série Estudos e Relatórios
Preço PVP: 14,00€

A aritmética centrada em técnicas não é matemática

Neste número da *Educação e Matemática* publicamos uma mensagem da Presidente do NCTM, Cathy L. Seeley, emitida nos NCTM News Bulletin de Outubro e Novembro de 2004, com o título original *Hard Arithmetic Is Not Deep Mathematics* e *Engagement as a Tool For Equity*, respectivamente. Cathy reforça as orientações dos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* publicados nos Estados Unidos, em 2000 e que está previsto que sejam traduzidos e publicados, ainda este ano, pela APM.

A autora apresenta duas ideias chave: a primeira, sobre o ensino da matemática em profundidade em contraste com o ensino centrado numa aritmética de algoritmos e procedimentos; a segunda ideia, sobre a importância do envolvimento activo dos alunos no seu processo de aprendizagem. Estas duas ideias implicam um currículo adaptado ao tipo de matemática que os alunos precisam na actualidade e alterações na prática pedagógica no sentido de se alcançar um processo de ensino mais justo e eficaz para todos os alunos.

Embora a autora referencie a realidade americana, as metas e os factores inibidores apontados são muito próximos dos da nossa realidade, quando aspiramos a elevar os padrões de aprendizagem e o nível de competência matemática dos nossos alunos.

Ajudar, todos os alunos, a desenvolver um alto nível de competência matemática é mais importante do que nunca. Quase todos os estados e províncias aumentaram o nível de exigência de requisitos para a conclusão do secundário e quase todos concordamos que temos de elevar os nossos padrões e exigir mais dos nossos alunos.

Tentativas para definir o que quer dizer elevar padrões ou exigir mais dos alunos conduziram a interessantes e por vezes contundentes discussões a nível local ou regional.

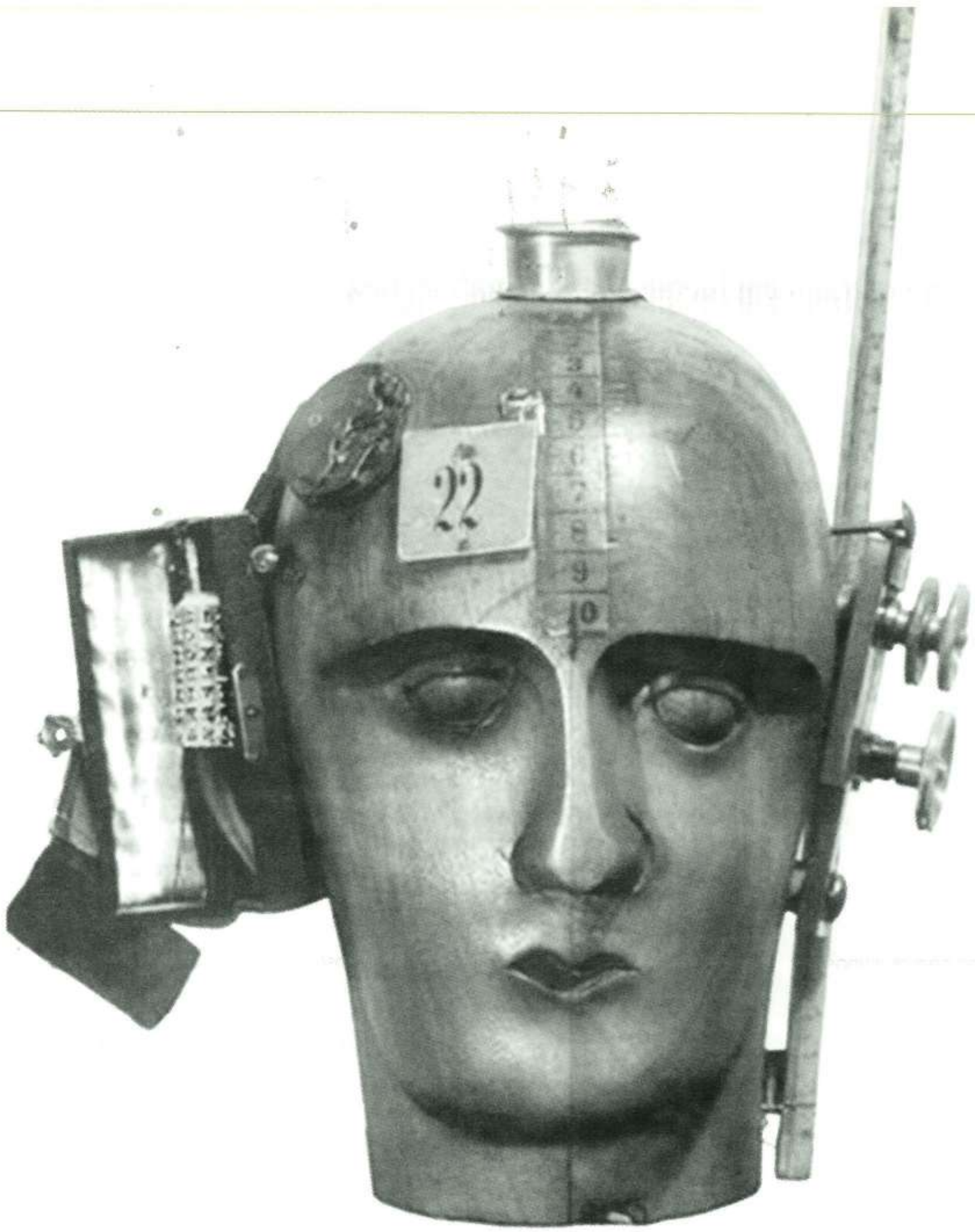
A mensagem dos *Princípios* e *Normas para a Matemática Escolar* do NCTM é clara. Os alunos precisam de um programa de matemática equilibrado que lhes permita estarem activamente ocupados nas aulas de matemática de tal modo que possam desenvolver uma compreensão profunda, o pensamento matemático e a capacidade para aplicar o que aprendem na resolução de problemas. A competência de cálculo é uma parte importante de tal programa. Contudo, a competência de cálculo não é o objectivo prioritário de um programa de matemática. É, antes, uma ferramenta usada ao serviço de uma matemática mais profunda.

O tipo de matemática que os alunos precisam hoje — que o cidadão adulto precisa — vai muito além do que antes era suficiente. No passado, pode ter sido suficiente para um cidadão literado saber ler, escrever e usar conhecimentos elementares de medida e de aritmética na vida de todos os dias. Há alguns anos, pode ter sido suficiente para os alunos que iam seguir cursos superiores na área das Ciências dominar uma série de ferramentas algébricas. Mas, o mundo de hoje é caracterizado por mudanças rápidas, por uma infiltração tecnológica e por empregos que não existiam há cinco anos atrás. Tudo isto exige um conjunto de competências matemáticas mais amplas como a capacidade de raciocinar e aplicar a matemática a uma série de problemas novos e variados. A realidade de vida de hoje, é que, provavelmente, muitos mais alunos irão prosseguir estudos após terminarem o Secundário.

Neste contexto, como elevar o nível de competência matemática, que esperamos de todos os alunos? E que probabilidade existe de que todos os alunos atinjam os objectivos que fixámos?

Em resposta à primeira questão, podemos elevar o nível de competência matemática escolhendo menos tópicos para cada ano e ensinar esses tópicos com grande profundidade. *Profundidade* significa, por exemplo, que os alunos saibam bastante acerca da multiplicação antes de trabalharem com o algoritmo da multiplicação. *Profundidade* significa que, quando as fracções são introduzidas, as ensinemos de tal maneira que os alunos realmente conheçam o que é que as fracções representam, em que tipo de situações elas podem ser úteis, como se comparam umas com as outras, como se relacionam com o que os alunos sabem acerca dos números inteiros, o que significa quando o numerador ou denominador aumenta ou diminui, etc. *Profundidade* significa que antes de os alunos se confrontarem com as regras para operar com fracções — tal como reduzir ao mesmo denominador, inverter fracções, multiplicar os extremos e os meios, etc. — nos asseguremos que eles sabem muito acerca de fracções e de operações. *Profundidade* significa que os alunos aprendam como resolver proporções e reconheçam e usem raciocínios proporcionais de modo que relacionem as ideias matemáticas da infantil ao 12º ano. E *profundidade* significa que os alunos que obtenham créditos para um curso superior de álgebra, saibam resolver equações e usar representações e ferramentas algébricas para resolver muitos tipos de problema, tanto dentro como fora da matemática.

Profundidade não significa pôr todos os alunos a dominar todos os procedimentos de aritmética, mais cedo ou com mais dígitos. Um sistema escolar, cujas normas incluam



o domínio de operações com fracções mais cedo do que as normas de outro sistema, não tem necessariamente um currículo mais rigoroso. *Profundidade* não significa limitar o nosso currículo aos números e operações, em detrimento da medição, geometria e análise de dados, onde os números e operações são, de facto, usados. *Profundidade* não significa, necessariamente mais exercícios. Incidir em mais procedimentos aritméticos, ou números com mais dígitos, em detrimento de uma exploração mais profunda e da resolução de problemas, não significa elevar as nossas expectativas para todos os alunos. E *profundidade* não tem que ser dolorosa ou entediante.

Em escolas que visitei, encontrei muitos exemplos maravilhosos onde os alunos aprendem matemática em profundidade. Nessas aulas, a matemática é ensinada com maior profundidade e os alunos estão envolvidos activamente, o que abre as portas a todos os alunos para enfrentarem desafios matemáticos. *Profundidade* não é o mesmo que aritmética difícil. A *profundidade* acontece quando os alunos *agarram*. Isso significa que os alunos precisam de ver os contextos em que as ideias matemáticas surgem, precisam de lutar com essas ideias em problemas que levam tempo a resolver e precisam de oportunidades para representar e comunicar o que aprenderam. (...)

Se definirmos o nosso currículo de matemática — as normas desenvolvidas nos nossos estados e províncias — de modo que incidam no conhecimento e no uso matemático dos alunos, e não na aritmética centrada em técnicas, poderemos atingir essa profundidade. E se acompanharmos isso com uma alteração no modo como estruturamos as nossas aulas, podemos assegurar que todos os estudantes têm uma oportunidade de alcançar os ambiciosos objectivos que estabelecemos. (...)

Envolvimento como uma ferramenta para a equidade

Hoje, temos a responsabilidade de fazer chegar os conteúdos matemáticos relevantes a um muito maior número de alunos do que tiveram, no passado, os tradicionais currículos matemáticos. (...)

Gostaria de falar acerca de outro elemento que afecta grandemente o sucesso dos alunos — o envolvimento activo do aluno na sua própria aprendizagem. Este envolvimento é, talvez, a ferramenta mais importante na nossa batalha pela equidade.

Muitos professores descobriram que os seus alunos podem ter mais sucesso quando estão envolvidos a fazer matemática — a escrever sobre matemática, a modelar situações matemáticas, discutir matemática, a explorar ideias matemáticas — mais do que a ver o seu professor a fazer matemática. Isto significa ensinar de um modo diferente daquele que a maioria de nós viveu — a dizerem-nos o que deveríamos saber. Hoje em dia, as turmas de maior sucesso parecem completamente diferentes, mesmo das melhores da minha infância, quando a moda era a aula expositiva do professor.

Embora não haja um modelo único para as turmas ou estilos de ensino, muitos professores estruturam, agora, as suas aulas começando por apresentar um problema ou tarefa estimulante, retirada do mundo real ou de um contexto matemático interessante. Depois de uma discussão do problema no grupo turma, os alunos podem trabalhar em pares ou em pequenos grupos. A discussão dentro de um pequeno grupo é um aspecto importante do envolvimento dos alunos, uma vez que beneficiam em falar da matemática que estão a fazer, algumas vezes fazendo conjecturas, discutindo, justificando ou mesmo argumentando sobre métodos, aproximações ou respostas. O professor está disponível, quando necessário, mas muitas vezes a sua intervenção assume a forma de perguntas que apelam ao raciocínio do aluno (Como sabes isso? O que te faz pensar assim? O que farias se estivesses a tratar de 5 casos em vez de 50?).

Ensinar tendo em vista o envolvimento dos alunos não significa dar uma aula não estruturada ou desorganizada. Pelo contrário, o professor deve transmitir expectativas claras e bem definidas aos alunos. Um elemento importante deste tipo de ensino é ajudar os alunos a estabelecer conexões entre o seu trabalho, num problema ou tarefa, com os conceitos e técnicas matemáticas envolvidos. Ajudar os alunos a estabelecer estas conexões, de modo a conhecerem a matemática que estão a aprender, é o culminar deste trabalho. Assim, provavelmente terão, no futuro, mais facilidade de reconhecer situações similares, onde podem usar os mesmos processos, ou outros semelhantes. O professor pode ajudar os alunos a consolidarem estas conexões levando-os a fazer um diário, ou bloco de apontamentos, onde registem as ideias matemáticas importantes, técnicas e definições que resultem do seu trabalho.

Implementar, na turma, um modelo baseado no envolvimento do aluno pode exigir maiores ou menores mudanças. Alguns professores, que dão predominantemente aulas expositivas, já enriquecem esse modelo ao encorajar os alunos a fazer perguntas durante a sua exposição e propondo uma prática guiada. Para estes professores, adaptar-se a um modelo menos expositivo, com mais oportunidades de discussão para os alunos, pode trazer resultados positivos. Outros professores podem precisar de analisar seriamente a sua abordagem pedagógica tendo em vista a eficácia para a maioria dos alunos e podem precisar de uma mudança mais radical para envolver os alunos e ver os resultados que pretendem.

Há muitas maneiras de envolver activamente os alunos na sua própria aprendizagem da matemática. Mas implementar um processo de envolvimento dos alunos pode levantar muitas questões aos professores. Como é que esta abordagem encoraja a proficiência de cálculo que provavavelmente é exigida nos testes-padrão? Como adaptar materiais existentes para um método mais participativo? Como aprender a colocar questões para estimular o raciocínio do aluno, especialmente se não conheço, necessariamente, todas as respostas? São questões importantes em que se pode basear o desenvolvimento profissional e o apoio a dar aos professores. Para além disto, ensinar de modo a envolver os alunos exige materiais que os levem a participar em tarefas mais ricas. Também requer, pelo menos, tanto trabalho como para preparar uma boa aula centrada no professor. Mas o trabalho vale claramente o esforço, quando esse envolvimento conduz a que mais alunos aprendam, mais do que anteriormente conseguimos.

A partir da minha perspectiva, deixo várias questões à vossa consideração (...). Estão a ouvir a vozinha dentro de vós a perguntar se estão a fazer tudo o que podem para envolver os vossos alunos na sua própria aprendizagem? Têm exemplos de estratégias de envolvimento dos alunos que ajudem todos, incluindo aqueles que anteriormente não tiveram sucesso? Que modelos foram mais eficazes para si? Que lições aprenderam que possam ajudar outros professores a envolver os seus alunos? Que programas e serviços o NCTM pode oferecer que o ajudem a si e aos seus colegas a melhorar a sua maneira de ensinar?

(...)

As novas oportunidades da Matemática na Inovação Curricular

Cláudia Domingues

A primeira vez que trabalhei na Inovação Curricular do ensino básico, tive como funções ser Directora de Turma de 7° ano, professora de Estudo Acompanhado, de Área de Projecto, de Formação Cívica e de Educação para a Saúde, para além da leccionação da disciplina de Matemática.

O desafio era grande e, em equipa, elaborámos o projecto curricular da turma com base nos diagnósticos que iam sendo feitos por todos os professores do Conselho de Turma. Definimos as necessidades prioritárias da turma e planificámos actividades para as áreas não disciplinares. (Figura 1)

A Área de Projecto

Entretanto, na Área de Projecto as actividades desenvolviam-se no sentido de orientar a turma a desenvolver um projecto comum. Os alunos chegaram à conclusão que queriam trabalhar o tema *A Segurança na Escola* e a turma organizou-se em grupos para deitar mãos à obra.

Os professores, com base no plano feito pelos alunos, planificaram, em Conselho de Turma, as actividades para as disciplinas de acordo com o tema, orientando os alunos na execução do seu projecto, sem perder de vista a aquisição das competências disciplinares e dos conteúdos associados.

A Área de Projecto e a Matemática

Um dos grupos, em Área de Projecto, elaborou um inquérito a aplicar à comunidade escolar com questões sobre a segurança dos alunos no dia-a-dia da escola. O inquérito foi apresentado, discutido e reformulado por toda a turma, resultando numa versão melhorada e consensual. Muitos dos aspectos importantes da formulação de um inquérito para fins estatísticos, foram discutidos, levando os alunos a reflectir sobre o melhor método de recolher informação de forma clara e de fácil quantificação. Outro aspecto interessante foi a escolha do método de amostragem a aplicar e das implica-

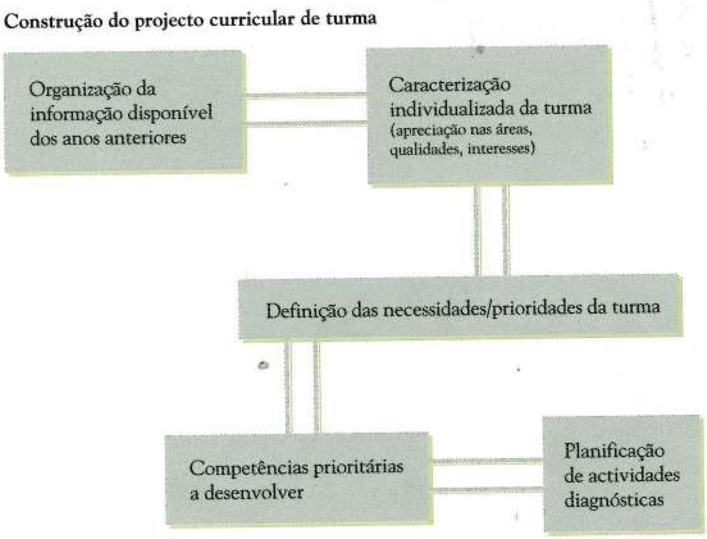


Figura 1.

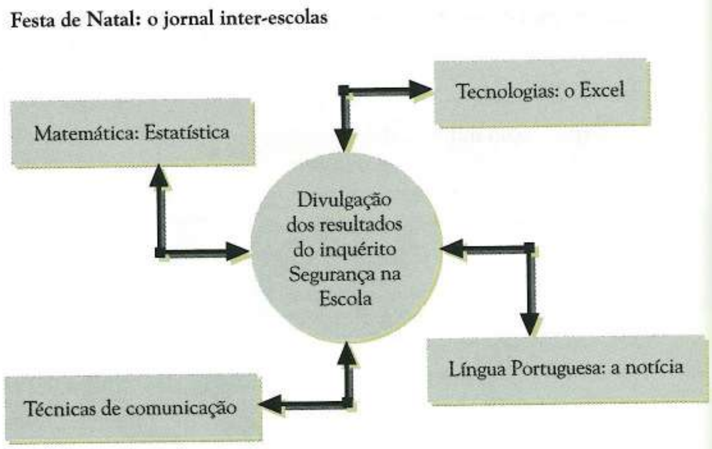


Figura 2.

ções dessa escolha. A turma aplicou o inquérito à comunidade escolar, segundo as regras estabelecidas, e fez a contagem das respostas em trabalho de pares.

Recolhidos os dados passámos a trabalhar, na aula de Matemática, a construção de tabelas e de gráficos — manualmente e no Excel — e os resultados foram analisados através da visualização dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos em suporte de acetato. Em Área de Projecto os grupos continuaram a desenvolver outras actividades do seu projecto.

A divulgação à comunidade escolar

A turma elaborou cartazes com os resultados do inquérito para afixar na sala do aluno, mas decidiram fazê-lo só depois da Festa de Natal, onde divulgariam aos alunos do 7° ano os resultados em formato noticioso. A ideia era fazer um noticiário em directo, no meio da festa, informando os presentes dos principais resultados apurados.

Alguns alunos estavam ocupados com outras actividades a apresentar na festa e os que estavam interessados no noticiário discutiam ideias para o pôr em palco. Aplicaram os recentes conhecimentos aprendidos na disciplina de Língua Portuguesa e redigiram a notícia para o Jornal Inter-escolas (como lhe chamaram) com que o pivot abriria o noticiário. Acharam que devia existir um comentador e vários alunos da turma para comentar os resultados. Colocaram-se, então, a questão: "*Como apresentar os gráficos de forma visível à plateia?*" Vistas todas as hipóteses, desde a projecção em *PowerPoint*, inviabilizada por não haver um projector multimédia, até ao cartaz, decidiram aproveitar os acetatos usados na aula e experimentá-los no palco. Os alunos ensaiaram e fizeram as experiências necessárias para que houvesse uma boa visualização dos gráficos. Entretanto, tinham já elaborado o texto com as intervenções do comentador e os comentários dos alunos que representavam a turma, enquanto o *pivot* do noticiário ia apresentando os respectivos gráficos. A elaboração deste texto foi muito interessante por revelar a dificuldade em aceitar os resultados estatísticos quando estes eram opostos à opinião da turma. (Figura 2)

As competências

A turma em questão não era, na sua maioria, bem sucedida e verificou-se que todas as formas de trabalho que privilegiaram os processos participativos, democráticos e libertadores de capacidades favoreceram a aprendizagem. As estratégias usadas desde tempestades de ideias, assembleias de turma, trabalho de grupo diferenciado, comunicações dos trabalhos à turma, entre outras, evidenciaram os problemas da turma permitindo orientar todo o processo tendo em conta as competências a desenvolver.

Neste subprojecto do projecto dos alunos sobre a Segurança foi possível trabalhar as competências definidas como prioritárias e a turma teve oportunidade de mostrar a sua autonomia e de *fazer* aprendendo.

Cláudia Domingues
Agrup. de Escolas. Dr. Francisco Sanches em Braga

A promover em todas as áreas:

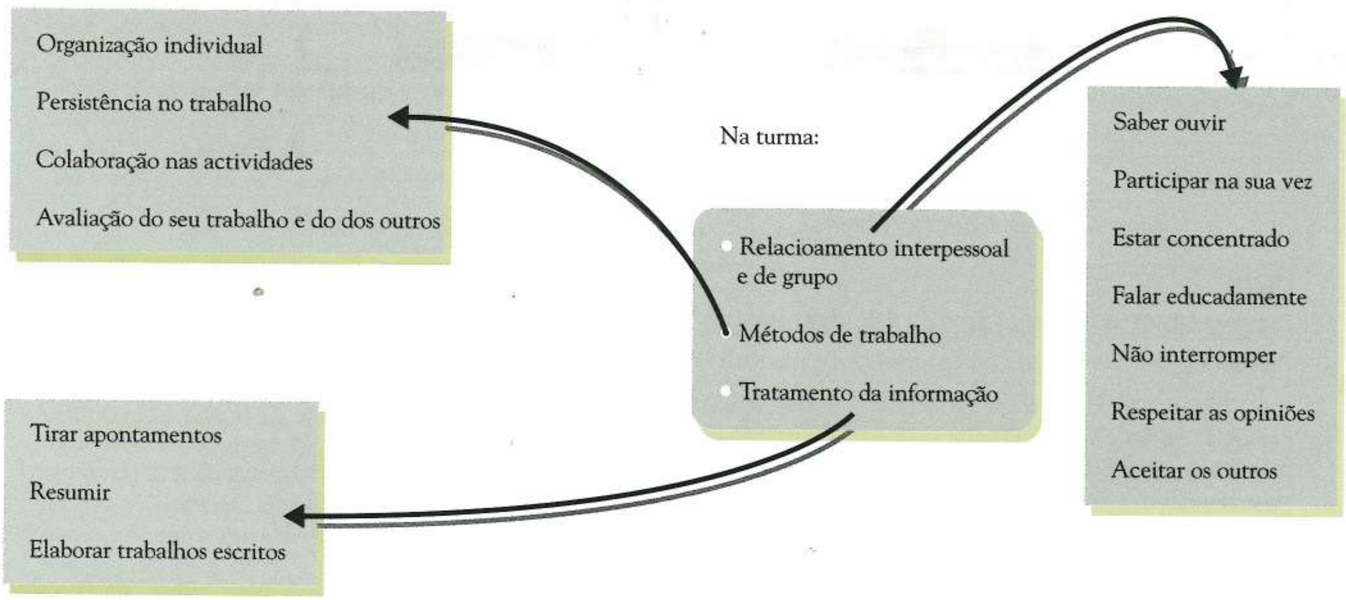


Figura 3.

Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas

Encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes

Lisboa, 14 e 15 de Julho de 2005, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

A não perder!

Tem sido anunciada a realização em Lisboa, em 14 e 15 de Julho, do encontro internacional *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, em homenagem a Paulo Abrantes. Pode acontecer, no entanto, que ainda não tenha sido compreendida em toda a sua extensão a importância que um tal encontro pode ter no nosso desenvolvimento profissional. Trata-se de uma oportunidade única de participar na discussão dos principais temas que estão no centro das nossas preocupações como professores de Matemática: os objectivos do ensino, a evolução dos currículos, a experiência matemática na sala de aula, a avaliação das aprendizagens, a formação dos futuros professores.

Participam neste encontro especialistas portugueses e alguns dos mais conceituados investigadores estrangeiros nestes temas. Mas o encontro destina-se a um público largo de professores e não se reduz a uma assembleia restrita de especialistas. As intervenções descreverão em termos claros e acessíveis a situação actual das questões mais relevantes que dizem respeito aos temas em discussão. E ainda procurarão perspectivar a sua evolução futura.

Não é por acaso que este encontro tem estas características. Trata-se de um encontro em homenagem ao nosso colega Paulo Abrantes, e entendeu a Comissão Organizadora que o melhor meio de o fazer seria tomar como temas do encontro as questões do ensino da matemática pelas quais o Paulo sempre lutou durante toda a sua vida profissional.

Na realidade, a melhor homenagem será a nossa participação em grande número neste encontro. Isso levar-nos-á certamente a reflectir com maior profundidade nesses temas e a prosseguir com maior vigor os esforços para a melhoria do ensino da Matemática, reforçando em particular a intervenção da APM na política educativa em Portugal.

Para informações detalhadas sobre o encontro, consultar o site `http://www.apm.pt/emce_pa`.

Leonor Santos, Eduardo Veloso

XII JAEM

O XII Congresso JAEM vai realizar-se entre os dias 4 e 7 de Julho de 2005, em Albacacete, Espanha, um importante congresso sobre Ensino e Aprendizagem da Matemática, organizado pela Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas (SCMPM). Para mais informações consulte o site

www.albacete.org/xiijaem.

CIEAEM
Comissão Internacional para o Estudo e a Melhoria do Ensino de Matemática

O encontro CIEAEM é organizado pela comissão internacional para o estudo e a melhoria do ensino de matemática e realiza-se em Palermo, Itália, de 23 a 29 de Julho de 2005, subordinado ao tema *Mudanças na sociedade: um desafio na educação matemática*. Para mais informações consulte o site

http://www.uhu.es/gmmrm

V CIBEM
Congresso Ibero-americano de Educação Matemática

O V CIBEM é um encontro internacional de professores e investigadores em educação matemática organizado pela APM, a decorrer nas instalações do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, na Rua do Campo Alegre, de 17 a 22 de Julho de 2005. Para mais informações consulte o site

http://www.mytwt.net/cibem5.

Educação Matemática
Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes

Em 14 e 15 de Julho de 2005 vai realizar-se na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa o encontro internacional Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas, em homenagem a Paulo Abrantes (1953–2003).

O objectivo principal desta realização é analisar a situação presente da Educação Matemática e discutir perspectivas futuras em relação aos seus principais temas: currículo, resolução de problemas, explorações e investigações matemáticas, trabalho projecto, matemática e realidade, avaliação, formação de professores. Entre 1 de Maio e 15 de Junho, a inscrição incluíndo actas e programa cultural é de 60€; a partir de 6 de Junho é de 75€. Para mais informações consulte o site

http.//www.apm.pt/emce_pa.

V CAREM
Conferência Argentina de Educação Matemática

A SOAREM — Sociedad Argentina de Educación Matemática vai realizar nos dias 5, 6 e 7 de Outubro de 2005 a V Conferência Argentina de Educação Matemática, a decorrer no Instituto no Instituto del Professorado Sagrado Corazón, na cidade de Buenos Aires. Mais informações sobre este evento em

http://www.soarem.org.ar/CAREM/base_3/carem.htm.

III CIEM
Congresso Internacional de Ensino da Matemática

A Universidade Luterana do Brasil vai promover o III Encontro Internacional de Ensino de Matemática que ocorrerá no Campus Canoas, Rio Grande do Sul, nos dias 20, 21 e 22 de Outubro de 2005.

Este encontro congrega professores, investigadores e instituições de ensino do Brasil e de alguns países convidados, tais como: Argentina, Bolívia, Espanha, Itália, México e Venezuela. Mais informações em

http://www.ulbra.br/ciem2005.

ProfMat 2005

O ProfMat vai realizar-se em Évora de 9 a 12 de Novembro de 2005, na Escola Secundária Gabriel Pereira. Mais informações em

http://profmat2005.apm.pt

Mais perto da APM

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição ligada ao Ensino da Matemática, abrangendo todos os níveis de escolaridade. Um dos seus objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na vida política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais. Descrevem-se, de seguida, as condições de adesão à APM:

Quadro 1

<table>
<tr><th>Sócio</th><th>Sócio residente no estrangeiro</th><th>Sócio Estudante</th><th>Sócio Aposentado</th><th>@-Sócio*</th></tr>
<tr><td>44,50€</td><td>48,50€</td><td>31,50€</td><td>35,00€</td><td>35,00€</td></tr>
<tr><td colspan="4">Revista Educação e Matemática impressa e on-line
(saem 5 números por ano e uma delas é temática)</td><td>Revista Educação e Matemática on-line</td></tr>
<tr><td colspan="4">APMinformação impresso e on-line (5 números por ano)</td><td>APMinformação on-line</td></tr>
<tr><td colspan="5">Opção de assinatura da revista Quadrante impressa (2 números por ano -10,50 €)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acesso à zona on-line para sócios</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar de desconto nas inscrições para os Encontros promovidos pela APM (30 a 40%)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usufruir de desconto na aquisição das edições APM: 50% sobre o preço de capa
Usufruir de desconto na aquisição de publicações de outras editoras: 15% sobre o preço de capa</td></tr>
<tr><td colspan="5">Beneficiar dos acordos resultantes dos protocolos da APM com outras instituições</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ter acesso prioritário a todo o material do Centro de Recursos de acordo com o seu regulamento</td></tr>
<tr><td colspan="5">Poder recorrer à APM para divulgação de iniciativas no âmbito da Educação Matemática, através de propostas enviadas à Direcção</td></tr>
</table>

* O estatuto de @-sócio oferece muitos benefícios, mas não inclui acesso à **informação impressa**.

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço **www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336**

Instituições

Quadro 2

Opções			**Valor**
Opção 1		Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números)	**33€**
Opção 2		Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	**20€**
Opção 3	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	**44€**
	B	Assinatura anual da revista *Quadrante* (2 números)	**15€**
Opção 4	A	Assinatura anual da revista *Educação e Matemática* – 2 exemplares de cada número (5 números); APM*informação* (5 números); Requisição do material do Centro de Recursos da APM; Aquisição de materiais e publicações a preço de sócio; Actas do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática)	**63€**
	B	Assinatura anual da revista Quadrante (2 números)	**15€**

Para efectuar a sua inscrição como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço **www2.apm.pt/portal/index.php?id=19336**

Publicações — Loja on-line

Agora já pode encomendar as publicações da APM na nossa loja virtual, no endereço **http://loja.apm.pt/index.asp**, onde tem todas as informações sobre as modalidades de pagamento. A sua encomenda ser-lhe-á enviada pelo correio.

índice

Editorial

Artigos

Secções