Educação e Matemática

Nº 78

Maio/Junho 2004

Periodicidade: 5 números por ano

Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

Certos mecanismos básicos podem produzir formas altamente complexas. Consideremos, por exemplo, o mecanismo básico que permite obter a curva plana designada por epiciclóide, que está descrito na figura 1. O centro da circunferência mais pequena, a circunferência b percorre a circunferência maior, a circunferência a. Ao mesmo tempo o ponto B, roda em torno do centro A e o seu trajecto no plano, descreve a curva e, que se pode observar na figura 2. Se voltarmos a colocar a circunferência pequena sobre a linha entretanto obtida, obtemos uma curva ainda mais complicada (Figura 3).

O processo pode ser iterado e parâmetros adicionais podem ser introduzidos no processo, de modo a tornar este mecanismo mais versátil, obtendo-se deste modo imagens como a que surge na capa do presente número.

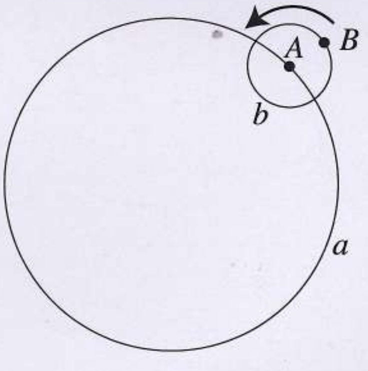


Figura 1

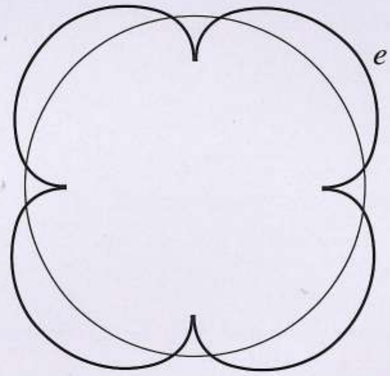


Figura 2

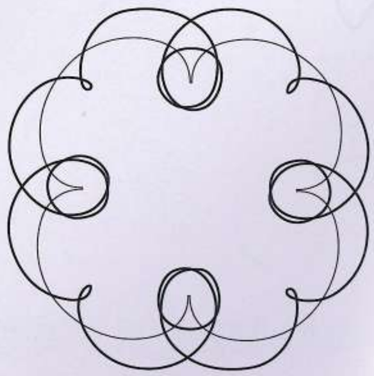


Figura 3

Neste número também colaboraram

Adriano Fonseca, Ana Vieira Lopes, António Bernardes, Celina Pereira, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, Isabel Rocha, João Pedro da Ponte, José Paulo Viana, Leonor Santos, Luís Reis, Manuel Ferreira, Maria Cristina Matos, Maria Dedò, Mariana Mendonça, Otília Moreirinha, Renato Santos, Rita Bastos.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Setembro de 2004.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 79
Setembro/
Outubro
de 2004

APM — A atracção (*fatal*) tem de continuar

Isabel Rocha

Decorria o ano lectivo de 1988/89, quando recebi na escola o folheto que anunciava o ProfMat de Viana do Castelo. Desafiei os colegas do grupo, mas acabei por me inscrever sozinha. No entanto, em Setembro, chegou à escola uma nova colega para o grupo de Matemática, a Manuela (Pires) e, logo neste primeiro contacto falámos da APM e, constatei que já não ia sozinha para Viana do Castelo para aquele Encontro que seria o *meu* primeiro ProfMat. E esta foi a nossa primeira caminhada conjunta.

Mas as surpresas continuaram porque afinal diversos caminhos iam dar a Viana do Castelo onde reencontrei vários colegas e conheci muitos outros.

Que significado, que impacto teve esse primeiro ProfMat na nossa vida pessoal e profissional? Sem dúvida, a criação de novas amizades e o surgir de uma maior capacidade de iniciativa e um protagonismo diferente na nossa actividade e desenvolvimento profissional. Basta dizer que, logo ali, nos intervalos das sessões de trabalho, dos almoços e dos jantares, os muitos colegas da zona de Leiria reuniram e alguns acabaram por serem indigitados (eu própria, a Joana (Castro) e o César (Viana)) para constituir o que seria uma *comissão instaladora* do Núcleo de Leiria da APM.

Foi tal o desasossego causado por este Encontro (e claro, pela APM), que regressámos a Leiria muito convictos de que o Núcleo iria ser uma realidade, o que se concretizou a 12 de Janeiro de 1990.

Claro que esta *atracção fatal* foi sentida por muito mais colegas.

E continuará a ser assim?

Os tempos são outros, vários estudos são reveladores do baixo nível de auto-estima dos professores e, os colegas em início de carreira (bem como os professores do 1.º ciclo com menos de vinte anos de serviço) têm preocupações que, em finais dos anos 80, a grande maioria de nós não tinha, como seja a instabilidade profissional em que vivem, situação que este ano adquiriu contornos mais graves, com as falhas do sistema de colocação de professores. Todos os anos se interrogam se lhes será dada a possibilidade de continuarem a exercer a sua actividade profissional e, de poderem adquirir um protagonismo crescente no desempenho da sua profissão. Por isso, em cada ProfMat, me questiono se esta *luta pela sobrevivência* lhes tirará a disponibilidade para se deixarem *seduzir* pelo *estilo APM*, ou se, pelo contrário, na Associação eles encontram o *porto de abrigo* para se manterem *atraídos* pela profissão que escolheram e para não desistirem de todos os anos recomeçar tudo de novo noutra escola, com outros alunos, mas sempre com grande empenho, entusiasmo e determinação para se assumirem como decisores do currículo para os seus alunos, papel que assume maior relevância nestes momentos de instabilidade que mudanças curriculares pouco discutidas e não fundamentadas (sai área de projecto, entra TIC; o mal amado 3.º ciclo; ….) sempre originam.

De certa forma, a APM pode ser olhada como a construção de um estilo de atracção para os professores de Matemática que tem de continuar a ser reforçada.

E esta é, também, uma causa de todos nós.

Isabel Rocha
Escola Superior de Educação de Leiria

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Paula Canavarro
Subdirectora
Adelina Precatado
Redacção
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia
Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação
Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A,
1500–236 Lisboa
Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras
N.º de Registo ICS: 124051
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Reflectir sobre as práticas de formação

João Pedro da Ponte e Leonor Santos

Reflectir sobre a nossa própria prática de formação foi o mote geral de um seminário para formadores de professores de Matemática promovido pelo Centro de Formação da APM que fomos convidados a dinamizar. Este artigo descreve um pouco o que esta experiência representou para os participantes e também para nós como formadores.

De acordo com os objectivos específicos enunciados, este seminário propunha-se partir das práticas de formação desenvolvidas pelos formadores para identificar pontos comuns e distintos e analisar as suas potencialidades e limitações. Propunha-se, igualmente, reflectir sobre as dificuldades encontradas pelos formadores e sugerir formas de as ultrapassar. Pretendia, ainda, analisar modalidades e dispositivos de formação adequados para promover a inovação curricular e o desenvolvimento profissional e organizacional do professor. E, finalmente, pretendia contribuir para delinear perspectivas de futuro para o trabalho do Centro de Formação.

O seminário decorreu durante dois dias, em regime intensivo, e nele participaram 25 formadores de diversos níveis de ensino e dos mais variados pontos do país. As metodologias de trabalho usadas envolveram discussões em plenário, trabalho em grupo e duas apresentações pelos dinamizadores, uma sobre a problemática da formação e outra sobre a avaliação da formação.

Actividades

Na primeira manhã, com base num breve questionário previamente preenchido pelos participantes, fez-se uma reflexão sobre as características principais da formação realizada no Centro. Notou-se a presença forte de diversos objectivos curriculares actuais, como o uso de novas tecnologias e de materiais didácticos. Mas também se notou em várias acções uma grande dispersão de objectivos, dificultando o processo da sua avaliação, bem como uma relação algo indefinida com a prática profissional do professor. Na verdade, em muitos casos, a prática profissional parece constituir mais um *pano de fundo* do que uma realidade directamente visada pela formação.

Para os participantes, este modo de usar os seus questionários constitui uma surpresa generalizada. Foram vários os que indicaram que a análise das respostas de outros formadores os tinha ajudado a reflectir sobre as suas próprias respostas, apercebendo-se agora da importância de várias questões relativas ao seu próprio trabalho.

Na parte da tarde, trabalharam-se temas actuais da formação de professores, em grande medida com base na experiência dos EUA. Neste país, o movimento de implementação dos

Standards levou ao reconhecimento da necessidade de novos tipos de formação. Assim, assume-se que, para transformar a prática profissional do professor a formação deve ter por base essa mesma prática, encarada tanto quanto possível de forma holística (Smith, 2001). Isso permite ver, por exemplo, como é essencial a consideração da comunicação e do discurso da sala de aula, através do qual se reconhece o *currículo em acção*, e que, como se verificou das discussões, está muito ausente no trabalho de formação realizado entre nós.

Discutiu-se, ainda, uma experiência de formação na modalidade de projecto e que deu uma atenção especial à reflexão e colaboração entre professores (Canavarro e Abrantes, 1995). Reconheceu-se, também, a grande escassez actual de formação realizada nesta modalidade, sem dúvida uma das modalidades mais interessantes pelo seu potencial formativo[1].

No segundo dia, abordou-se o tema da avaliação da formação. Todos os participantes reconheceram que este aspecto do trabalho é mais realizado por rotina do que com a sensação que pode ser uma fonte de aprendizagem profissional. No entanto, a avaliação da formação é essencial como processo regulador desta actividade, do mesmo modo que a avaliação dos alunos é essencial como processo regulador do seu ensino-aprendizagem.

A avaliação não deve assumir um cunho tecnicista, mas sim dirigir-se à compreensão das situações para servir de base a uma actuação fundamentada. Deste modo, a avaliação e a formação interrelacionam-se (Bélair, 1996). Os diversos grupos trabalharam então em estratégias e instrumentos de avaliação que pudessem ajudar a reflectir sobre os seus resultados e a melhorar as suas actividades de formação. Esta actividade teve por base, uma vez mais, os questionários previamente preenchidos pelos participantes.

De tarde, os grupos fizeram uma análise do trabalho do Centro de Formação da APM e apresentaram diversas iniciativas que consideravam essenciais para o futuro próximo. Um dos grupos sugeriu a pertinência da realização de seminários temáticos, sobre questões actuais da educação matemática, com um máximo de dois dias, dos quais poderiam resultar páginas Web, e que poderiam envolver tanto os formadores do Centro como convidados exteriores. Outro grupo salientou a selecção e divulgação de materiais de formação, a realizar por uma equipa a definir pela comissão pedagógica, encarregada de recolher e validar esses materiais. Um terceiro grupo sugeriu que se poderia trabalhar para relançar a formação na modalidade de projecto, tendo por exemplo como público-alvo ex-formandos das acções de formação da APM. Poderia ser um trabalho a realizar durante um ano, com cerca de 30 participantes, divididos em vários grupos, e que começaria com um encontro geral, trabalhando a partir daí sobretudo em rede virtual com momentos de regulação presencial e uma fase final de divulgação da sua experiência. Finalmente, outro grupo sugeriu a criação de grupos de estudo no Centro de Formação sobre temas como a gestão curricular ou a comunicação na sala de aula, promovendo a leitura e discussão de textos e a organização de acções de formação, que poderiam culminar com um encontro ou uma publicação.

Avaliação

No final do seminário foi feita uma breve avaliação, tanto escrita como oral. Das respostas a um pequeno questionário escrito verificamos que diversos formandos consideram que esta formação os ajudou a identificar certos aspectos da formação que até à data não tinham consciência:

> Alertou-me para questões que não tinha colocado e ficaram levantadas questões que me poderão ajudar a não ficar pela simples identificação de dificuldades.

> Nesta formação abordei, discuti e reflecti sobre aspectos da formação de professores aos quais não dava importância devida.

> Foi útil esta formação pois abordou aspectos importantes a ter em conta na organização de uma acção de formação. Chamou a atenção para alguns aspectos que tenho trabalhado menos e que provavelmente darei mais atenção no futuro.

A grande maioria dos participantes reconhece o valor da reflexão realizada sobre as suas práticas de formação e indica ter vontade de continuar essa reflexão no futuro:

> Foi importante reflectir sobre a avaliação das acções de formação pois permitiu perceber melhor que tipo de trabalho se pode desenvolver e dos seus efeitos nos formandos.

> Ao longo das sessões de trabalho fui levada a reflectir sobre a minha prática como formadora, tendo detectado vários aspectos aos quais nunca havia prestado grande importância, e que neste momento me parecem essenciais para um desempenho *sério* do meu trabalho.

> Identifiquei dificuldades específicas. A reflexão que foi proporcionada durante o seminário permitiu encontrar pistas de possível resolução.

> O [seminário] permitiu reflectir sobre determinados aspectos da acção como formador, nomeadamente a avaliação, o que implicará um posterior aprofundamento do modo como desenvolver esta temática [...] Foi importante ouvir e analisar relatos concretos.

> A formação [...] contribuiu para o meu desenvolvimento profissional, mas levantou-me muitas questões que eu não consegui solucionar. Vou ter que investigar. Penso que também era esse um dos objectivos do seminário.

A grande maioria dos participantes mostrou-se também muito sensível à ideia que é necessário fazer uma avaliação aprofundada das acções de formação, o que passa, necessariamente, por uma adequada definição de objectivos de formação para os formandos:

> A forma que foi encontrada visou essencialmente aspectos teóricos

da dificuldade de formulação de objectivos e em termos do processo de avaliação a partir da análise de questionários preenchidos pelos formadores acerca da sua experiência de formação.

Maior consciencialização de algumas debilidades existentes na minha prática de formador (nomeadamente na necessidade de formular de forma mais precisa os objectivos da formação e de organizar melhor a avaliação).

Foi muito rica a actividade de planeamento da avaliação para uma dada formação. Neste momento pude perceber a necessidade de se ter objectivos bem definidos e operacionalizáveis, facilitando deste modo o planeamento da avaliação.

A formação levantou questões pertinentes sobre a definição de objectivos e a forma de avaliação.

Tornou mais claras algumas questões, tomei consciência da importância de formalizar alguns aspectos nomeadamente em relação à avaliação das acções e à definição dos objectivos das acções de formação.

Outro dos aspectos que se pretendia salientar neste seminário era a relação da formação com a inovação curricular. Em particular, era dada uma especial importância à relação entre a formação e as práticas lectivas dos formandos, tendo em vista a sua transformação no sentido das actuais orientações curriculares. Este último aspecto não foi muito visível nas respostas dos participantes, embora haja alguns que lhe façam referência:

> [O seminário levou-me] a reconhecer a proximidade da relação que cada formação (acção) tem com a prática pedagógica.

> A discussão de experiências [...] contribuirá para a mudança de práticas lectivas.

Outro aspecto apontado em algumas sessões foi o interesse do trabalho colaborativo entre formadores no planeamento, realização e avaliação da formação. Na avaliação escrita final este aspecto foi notado apenas por um dos participantes:

> O trabalho colaborativo e cooperativo que esteve subjacente a este seminário reforçou a importância e deu a conhecer potencialidade de uma formação cooperada, em que acredito.

O alcance do trabalho colaborativo na formação e a relação da formação com as práticas lectivas são, certamente, questões que será necessário aprofundar em futuros momentos de trocas de experiências e de reflexão.

Conclusões

Dinamizar este seminário foi para nós um grande desafio. Temos a noção que não existe no nosso país muita tradição de reflexão sobre as práticas de formação. Alguns formadores podem achar que isso é desnecessário, constituindo apenas uma perda de tempo. E, no entanto, devemos perguntar se a formação por nós realizada tem atingido os objectivos pretendidos. Não basta o formador achar que tudo *correu bem* e os participantes afirmarem que *gostaram muito* da formação. Como dizem Loucks-Horsley, Hewson, Love e Stiles (1998), mais importante do que gostar da formação, é sair dela incomodado, com coisas para pensar e com vontade de experimentar outro modo de trabalho na sala de aula. E isso, convenhamos, nem sempre acontece.

A forma empenhada como os participantes neste seminário se envolveram nas actividades e discussões propostas ultrapassou as nossas expectativas. Para nós, confirmou-se o alcance de uma formação que parte da prática, isto é, que procura reconhecer na situação prática vivida pelo formando os problemas existentes e perspectivar a sua resolução à luz da teoria (Smith, 2001). Ter partido de um questionário previamente preenchido que retratou uma actividade de formação desenvolvida pelo próprio, permitiu dar especial significado às discussões realizadas. Os formadores reconheceram que haviam muitas coisas para pensar e muito campo para melhorar nas suas práticas e foram vários os que afirmaram que devia haver novos seminários deste tipo.

Ficámos, também, com a noção que existe uma experiência rica dentro do Centro de Formação da APM e que esta experiência pode ser desenvolvida com o reforço do trabalho de equipa na organização e na avaliação da formação e na partilha de materiais e recursos.

As ideias propostas na última sessão podem constituir um ponto de partida para a estratégia do Centro de Formação da APM num futuro próximo. Mas o mais importante deste seminário terá sido o reforço da ideia que, para melhorar a nossa prática, é necessário reflectir e investigar sobre ela (GTI, 2002). Só dessa forma os formadores poderão adequar cada vez mais as acções que realizam ao grande objectivo de contribuir para transformar a prática profissional do professor tendo em vista a aprendizagem da Matemática por parte dos alunos.

Nota

1 Houve experiências anteriores nesta modalidade de formação que não terão corrido tão bem como se esperava, mas a falta de uma avaliação adequada não permite perceber bem quais as causas dos problemas que eventualmente existiram.

Referências

Bélair, L. (1996). Étude d'un modèle de formation à l'évaluation des apprentissages. *Mesure et évaluation, 19*(1), 95–116.

Canavarro, A. P., & Abrantes, P. (1995). Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Uma experiência num contexto de formação. In A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes, J. Fernandes, & L. S. Almeida (Eds.), *Actas do SIEM V* (pp. 283–295). Lisboa: APM.

GTI (Ed.). (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.

Loucks-Horsley, S.; Hewson, P.; Love, N. & Stiles, K. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. California: Corwin Press.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston: NCTM.

João Pedro da Ponte e Leonor Santos
Departamento de Educação da
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

Cinco pontos, um problema e cinco resoluções

António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, José Paulo Viana, Maria Dedò e Rita Bastos

Depois de nos termos divertido (o António Bernardes, a Cristina Loureiro, a Florinda Costa, a Rita Bastos e eu) a resolver um magnífico problema proposto pelo José Paulo Viana, várias vezes conversámos sobre a hipótese de transformar as diferentes resoluções num artigo para a *Educação e Matemática*. No entanto, as circunstâncias fizeram com que esse artigo fosse publicado sob a forma de um capítulo de um livro de homenagem a Paulo Abrantes, na sequência de um amável convite de Joaquim Giménez, dirigido a diversos autores portugueses. Como na altura o título do livro dizia respeito à resolução de problemas, lembrei-me de pedir a colaboração dos resolvedores desse problema, incluindo Maria Dedò, e escrevemos assim o projectado texto. Com autorização da editorial Graó, é aqui reproduzido em português. O livro de que é extraído é o seguinte:

Actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes
Coordenadores: Joaquim Giménez, João Pedro da Ponte e Leonor Santos
Editorial Graó. Barcelona, Octubre 2004. Colección Biblioteca de Uno, número 209

Eduardo Veloso

No dia 13 de Setembro de 1999 recebi o seguinte *e-mail*:

Caro Eduardo

Deu-me um enorme gozo resolver este problema. Se não o conheceres (do que duvido ....) julgo que também o apreciarás.

São dados cinco pontos A, B, C, D e E. Estes pontos são os pontos médios dos lados de um pentágono PQRST desconhecido. Reconstruir o pentágono.

Um grande abraço

Zé Paulo

José Paulo Viana é professor de matemática e gosta naturalmente de encontrar problemas novos, tanto mais que é autor de uma coluna semanal de problemas num jornal diário português. Tem o bom hábito de desafiar amigos seus que sabe serem amantes de problemas, e foi o que fez com este. Por um outro *e-mail* de resposta da Cristina Loureiro para o José Paulo, de 17 de Outubro, fiquei a perceber que a Cristina e o António Bernardes já o tinham resolvido (*"Eu e o António já resolvemos o problema do pentágono. Obrigado por nos propores desafios tão estimulantes"*). Pela mesma mensagem fiquei também a saber que outro grupo o tinha resolvido (*"Sei que a Rita e a Florinda também já resolveram"*). Entretanto eu próprio tinha encontrado uma resolução do mesmo problema. Uns tempos depois, veio a Portugal Maria Dedò, professora de geometria na Universidade de Milão. Resolvi colocar-lhe também o problema, e surpreendeu-me com uma resposta imediata que se resumia a duas ou três frases curtas.

Em conversas posteriores, comunicámos uns aos outros as nossas resoluções, percebemos que seguiam, pelo menos aparentemente, caminhos diferentes e pensámos na hipótese de escrever um artigo. Mas fomos adiando, pressionados por outros afazeres. Agradecemos aos colegas espanhóis a hipótese que nos dão agora de escrever um texto sobre essa história e sobretudo de o fazer num livro de homenagem ao nosso grande amigo Paulo Abrantes. Nada mais apropriado! Paulo era um apaixonado resolvedor de problemas de matemática. Foi um *leader* e inspirador para todos nós, em muita coisa e também na resolução de problemas. Escreveu um interessantíssimo livro, *Viagem de Ida e Volta*[1], em que mostra como a mesma questão matemática lhe apareceu disfarçada em múltiplas ocasiões e problemas. Apreciaria certamente este texto que lhe dedicamos, em que diferentes estratégias e *matemáticas* são empregues para resolver o mesmo problema.

José Paulo Viana: o prazer de experimentar e descobrir ...

Quando encontrei este problema, pensei imediatamente em experimentá-lo no *Cabri Geomètre*.

Os pontos dados A, B, C, D e E são os pontos médios dos lados do pentágono.

Se conhecessemos um só vértice P do pentágono, o problema ficaria resolvido. Isto porque:

- o vértice seguinte Q é o simétrico de P em relação a A,
- o vértice R é o simétrico de Q em relação a B,
- o vértice S é o simétrico de R em relação a C,
- o vértice T é o simétrico de S em relação a D.

No final, o simétrico de T em relação a E tem de ser P.

Resolvi, usando o *Cabri*, colocar os pontos dados e escolher um ponto qualquer P para primeiro vértice. Fiz as diversas simetrias e é claro que, no fim, o simétrico de T em relação a E não foi P mas um outro ponto P' (figura 1). Teria sido uma sorte imensa ter acertado logo …

Comecei a deslocar P. A figura $PQRST$ alterava-se e o que havia a fazer era deslocar P até que P' coincidisse com ele.

Estava encontrada a solução *artesanal*. Mas como encontrar a posição exacta do primeiro vértice?

Tendo unido por um segmento os dois pontos P e P' (figura 2), verifiquei que, ao deslocar P, esse segmento se alterava mas mantinha sempre um ponto fixo, o seu ponto médio M. Pronto, era lá que tinha de colocar o vértice inicial P (figura 3).

Estava encontrada a solução.

A demonstração de que o vértice inicial tem de ficar na posição M pareceu-me pouco difícil de fazer mas, confesso, depois já não tive paciência para avançar por aí. Pareceu-me tudo tão claro e evidente … (eu sei, eu sei, não é uma atitude muito *matemática* mas que querem? Sou assim.).

Forinda Costa e Rita Bastos: do fim para o princípio …

Resolvemos o problema com a ajuda do *Sketchpad*. Começámos por tentar encontrar uma estratégia de resolução que tivesse em conta o conhecimento de que os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero são sempre os vértices de um paralelogramo. Não conseguimos! Decidimos, então, procurar descobrir relações entre um qualquer pentágono com o que se obtém tomando como vértices os pontos médios dos seus lados, isto é, seguir uma estratégia *do fim para o princípio*. Inicialmente, não descobrimos nada que pudesse servir para fazermos conjecturas que nos aproximassem de uma resolução. Até que construímos o pentágono estrelado com vértices nos pontos médios do original e ainda um outro pentágono, neste caso convexo, cujos vértices eram os pontos médios dos lados do pentágono estrelado. Este último parecia ter lados paralelos com o primeiro! (figura 4).

Com o *Sketchpad* verificámos que tinha e observámos que o pentágono menor estava *invertido* relativamente ao primeiro. Sem efectuarmos qualquer cálculo pareceu-nos que os lados do pentágono original deveriam ser o quádruplo dos seus correspondentes no pentágono *invertido*. De facto, acabámos por verificar com o GSP que os dois pentágonos são homotéticos de razão –4.

A demonstração que fizemos na altura utilizou cálculo vectorial, mas chegámos posteriormente à conclusão que basta duas aplicações sucessivas do teorema de Tales (figura 5). O segmento CD é paralelo a RT e mede metade do seu comprimento, e o segmento $T'R'$ é paralelo a CD e mede metade do seu comprimento. Como $T'R'$ tem sentido oposto a RT, concluímos que a diagonal $T'R'$ é homotética de TR e a razão é –4. O mesmo acontece com os outros pares de diagonais dos pentágonos $P'Q'R'S'T'$ e $PQRST$. Tendo em atenção que os pontos P (e P'), Q (e Q'), etc., pertencem a duas diagonais homotéticas em cada pentágono, os dois pentágonos são homotéticos de razão –4.

Quanto ao centro da homotetia, acabámos por conjecturar, já na altura em que escrevemos este texto, que esse ponto é o centro de gravidade, ou baricentro, comum aos dois pentágonos homotéticos. Ainda não encontrámos uma demonstração, mas a experimentação que fizemos com o GSP fez-nos adquirir a convicção de que a conjectura é verdadeira.

Quando resolvemos o problema através da homotetia, tentámos generalizar para polígonos com qualquer número de lados e concluímos que a situação não é a mesma para todos. Se o número de lados é um número ímpar, existe uma solução, se excluirmos as situações de colinearidade. Se o número de lados é par, só em condições particulares haverá uma

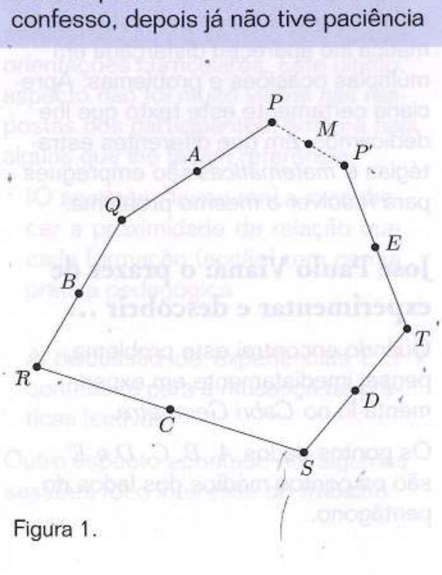


Figura 1.

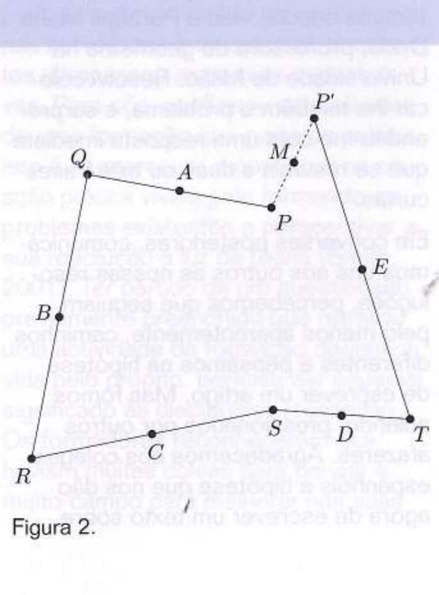


Figura 2.

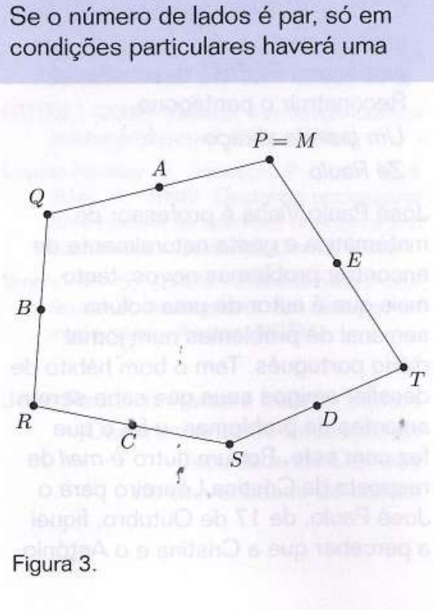


Figura 3.

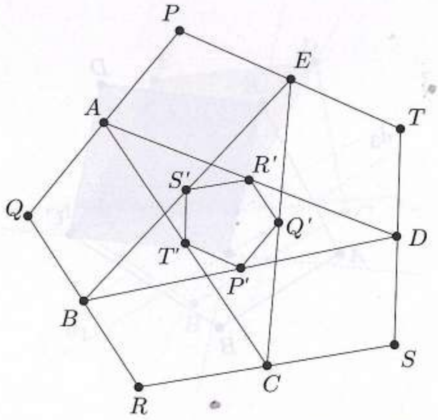


Figura 4.

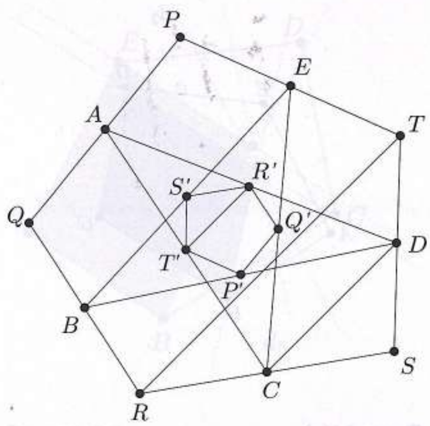


Figura 5.

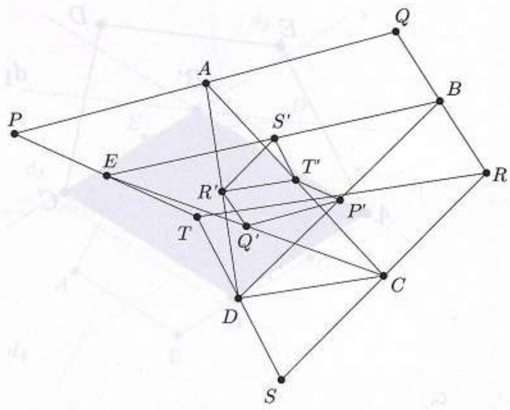


Figura 6.

solução. Por exemplo, para um quadrilátero será necessário que os pontos dados sejam os vértices de um paralelogramo.

Embora na altura não nos tenhamos preocupado com esse aspecto, pensámos agora, ao escrever este texto, que a existência de solução pode estar relacionada com a existência do polígono estrelado definido pelos pontos médios alternados –1°, 3°, 5°, etc. De facto só existe esse polígono estrelado quando o número de vértices é ímpar.

Em conclusão, um algoritmo que nos conduz à solução, de acordo com a nossa resolução, será (figura 4):

São dados cinco pontos A, B, C, D e E e pretende-se determinar o pentágono $PQRST$, sendo A o ponto médio do lado PQ, B o ponto médio do lado QR e assim sucessivamente.

Determinam-se os pontos médios dos lados do pentágono estrelado $ACEBD$, respectivamente T', Q', S', P' e R'.

Sendo A' e B' os pontos médios de $P'Q'$ e de $Q'R'$, o ponto de intersecção dos segmentos AA' e BB' dá-nos o centro de homotetia O.

Depois, é só determinar o pentágono $PQRST$, homotético de $P'Q'R'S'T'$, relativamente ao centro O e à razão –4.

Nota: embora as figuras 4 e 5 mostrem pentágonos $ABCDE$ e $PQRST$ convexos (e de lados que não se intersectam), as considerações que fazemos aplicam-se a quaisquer 5 pontos dados $ABCDE$ (ver exemplo na figura 6).

António Bernardes e Cristina Loureiro: dividir para conquistar ...

Como não estávamos a ver nenhum processo que nos conduzisse à solução, resolvemos construir no *Sketchpad* dois pentágonos convexos quaisquer tais que os vértices de um deles fossem os pontos médios dos lados do outro e começámos a fazer algumas experiências no sentido de tentar descobrir relações entre os dois polígonos. E a certa altura reparámos que a solução podia ser encontrada usando um resultado bem nosso conhecido.

Traçando por exemplo o segmento PS, uma das diagonais do pentágono $PQRST$, este fica dividido em dois polígonos, o quadrilátero $PQRS$ e o triângulo PST (figuras 7 e 8).

O triângulo PST é semelhante ao triângulo EDT e o segmento PS é paralelo ao segmento ED.[2]

Se traçarmos uma recta paralela a BC passando por A e uma outra paralela a AB passando por C obtemos o paralelogramo ABCB' em que B' é o ponto médio da diagonal PS[3] (figura 9).

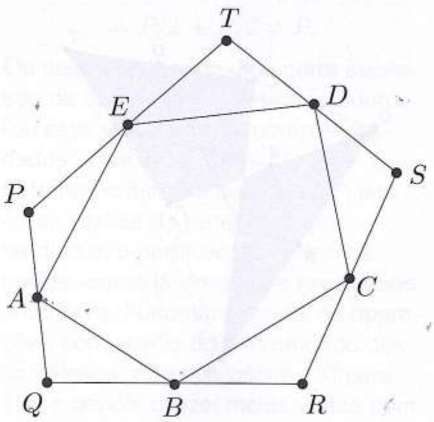


Figura 7.

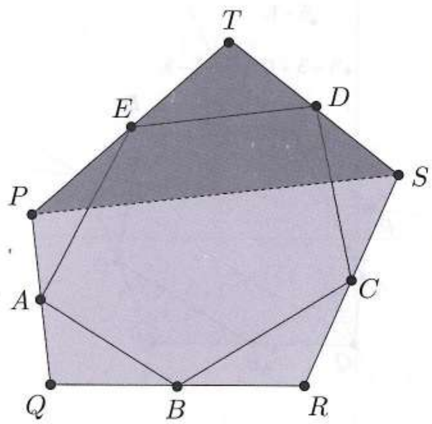


Figura 8.

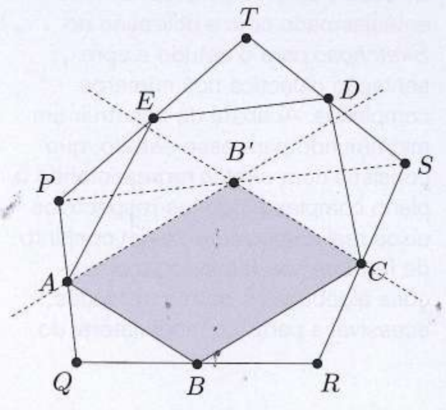


Figura 9.

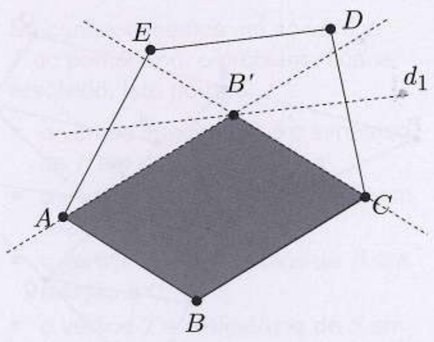


Figura 10.

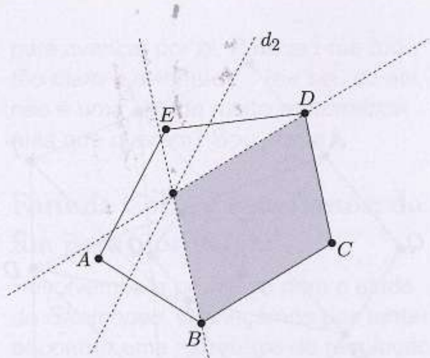


Figura 11(a).

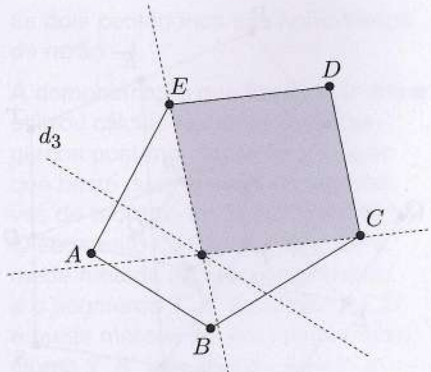


Figura 11(b).

E pronto, estava descoberto o caminho ...

Considerando o pentágono $ABCDE$ e traçando as rectas que passam em A e C e paralelas respectivamente a BC e AB obtemos o ponto B', ponto médio de uma das diagonais do pentágono que pretendemos descobrir. A recta d_1 passando por B' e paralela a ED, contém dois dos vértices desse pentágono (figura 10).

Repetindo este processo vamos obter as cinco rectas que contêm as cinco diagonais do pentágono pretendido (figura 11 e 12).

As intersecções das diagonais duas a duas definem os vértices do pentágono pretendido (figura 13). Esta resolução funciona também para pentágonos não convexos (figura 14).

Eduardo Veloso: o poder geométrico dos números complexos ...

Na época em que recebi o *e-mail* do José Paulo Viana andava muito entusiasmado com a utilização do *Sketchpad* para o estudo e apresentação didáctica dos números complexos. Acabara de construir um micromundo para esse estudo, que consistia num *sketch* representando o plano complexo, com os respectivos eixos real e imaginário, e um conjunto de ferramentas relativas às operações algébricas e outras utilidades, acessível a partir do menu lateral do programa. Na figura 15, mostra-se o espaço de trabalho deste micromundo. No exemplo, a ferramenta escolhida foi a adição de complexos, e são dados os complexos z e w.

Clicando sucessivamente nestes complexos, o programa constrói automaticamente o complexo soma dos dois, $z+w$.

Neste micromundo, podemos dar largas á nossa imaginação e explorar as relações interessantíssimas entre a geometria e os números complexos. De resto, a própria apresentação dos números complexos pode ser feita geometricamente, procurando perceber como poderíamos estender numericamente a recta real para o plano euclidiano, atribuindo um *carácter numérico* aos pontos do plano.

Surgem assim naturalmente os números complexos e a sua estrutura de corpo. Posteriormente, pode ser dada uma *interpretação algébrica a esses novos números* (como classes de equivalência de pares de números reais). Subvertemos assim a rotina habitual.

Munido deste micromundo, nada mais natural do que procurar utilizá-lo para resolver o problema do pentágono. O carácter intrinsecamente geométrico dos números complexos faz com que eles sejam ao mesmo tempo, pontos do plano e números. Utilizamos em cada momento a interpretação mais conveniente. Se são dados os pontos A, B, C, D e E, posso marcá-los no plano como pontos, mas posso também imediatamente pensar neles como números (que podem ser

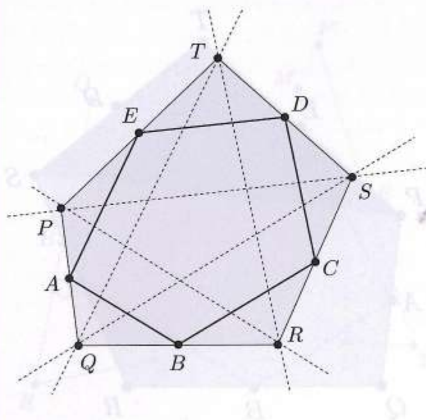


Figura 13.

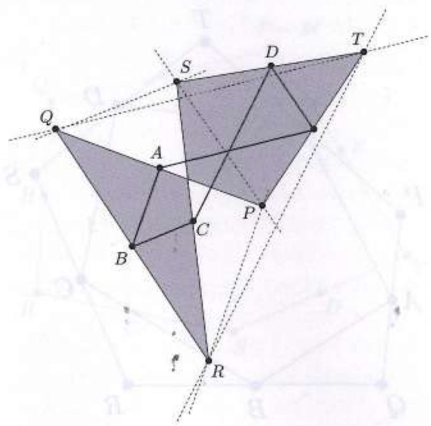


Figura 14.

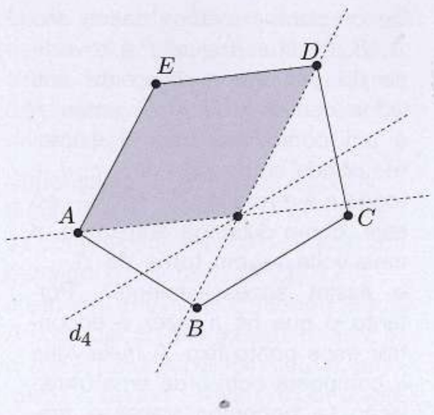


Figura 11(c).

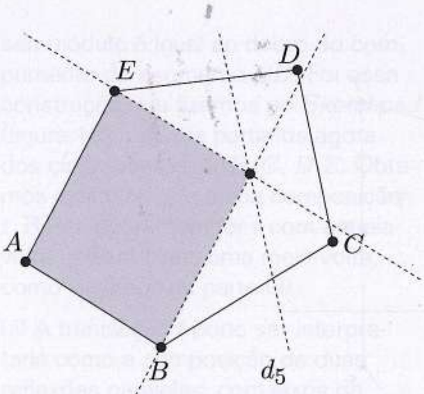


Figura 11(d).

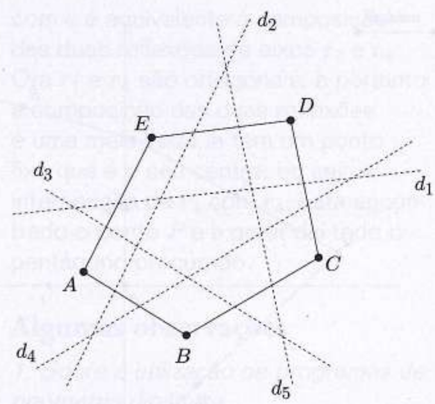


Figura 12.

somados, subraídos, etc.). Em particular, se $PQRST$ é o pentágono cujos lados têm por pontos médios A, B, C, D e E (A ponto médio de PQ, e assim sucessivamente), dado que o ponto médio do segmento PQ — em termos de números complexos — quer dizer média (numérica) dos números complexos P e Q, teremos sucessivamente

$$A = (P+Q)/2,\ B = (Q+R)/2,$$
$$C = (R+S)/2,\ D = (S+T)/2$$
$$\text{e } E = (T+P)/2$$

Mas como temos agora a nosso favor a força visual da geometria e o poder operatório da álgebra, a intuição algébrica sugere-nos que, nestas 5 equações a 5 incógnitas, subtraindo e somando alternadamente os pontos A, B, C, D e E eliminamos 4 incógnitas e ficamos com o valor da quinta ... na realidade, teremos

$$\begin{aligned} A - B + C - D + E &= P/2 + \\ &+ Q/2 - Q/2 - R/2 + R/2 + \\ &+ S/2 - S/2 - T/2 + T/2 + P/2 = \\ &= P/2 + P/2 = P. \end{aligned}$$

Ou seja, efectuando uma certa sucessão de operações a partir dos pontos (ou seja, dos números complexos) dados, a saber $A - B + C - D + E$, obtemos o número complexo P, isto é, um vértice do pentágono pretendido e, a partir deste, todos os outros, como já vimos nas resoluções anteriores. Naturalmente, fiz as operações com auxílio do micromundo dos complexos, obtendo assim P (figura 16), e depois utilizei meias-voltas com

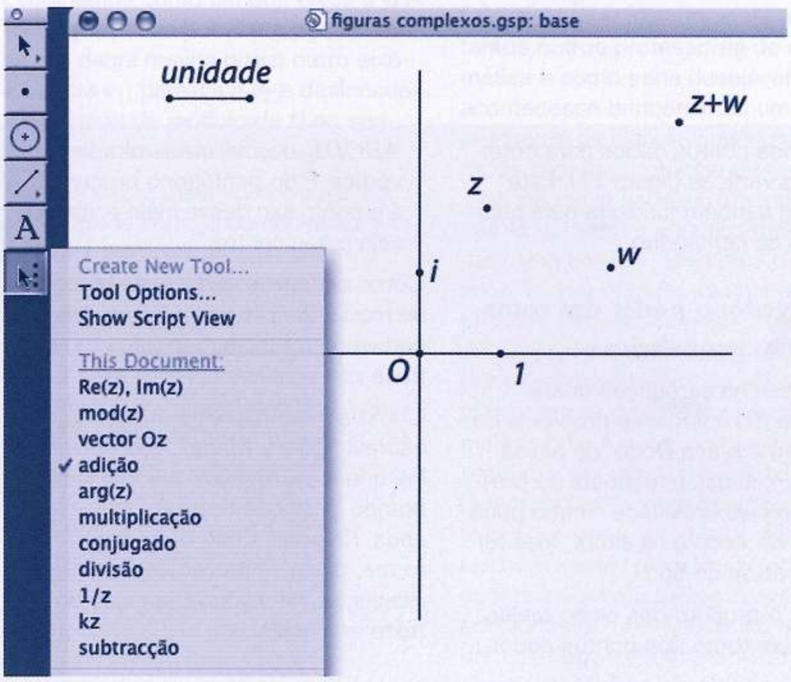


Figura 15.

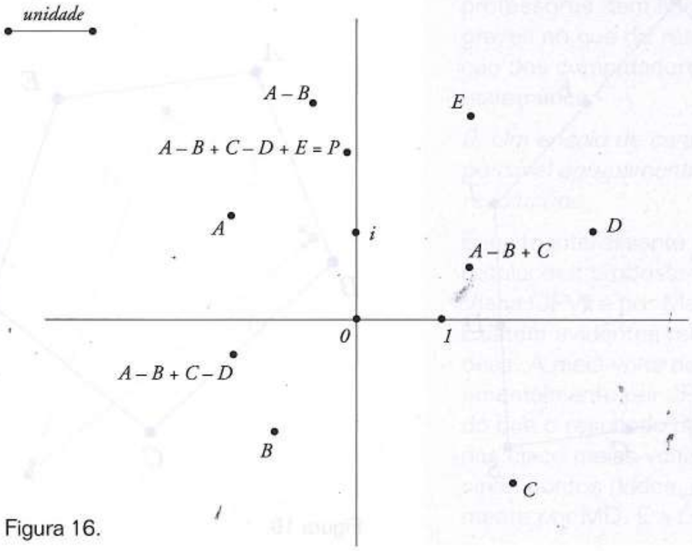


Figura 16.

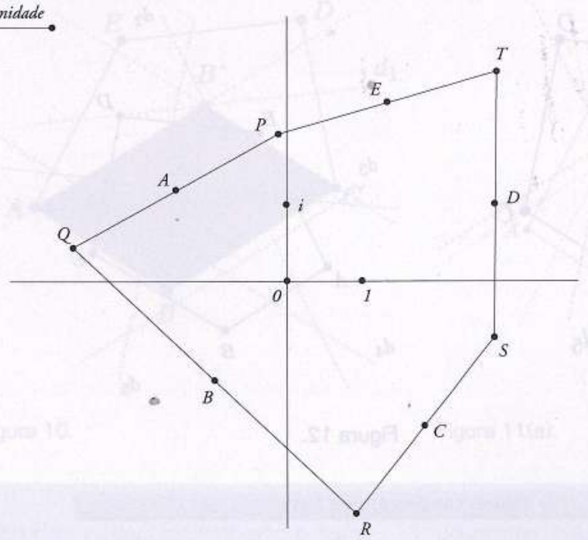


Figura 17.

centros nos pontos dados para obter os outros vértices (figura 17). Esta resolução também funciona para qualquer tipo de pentágono.

Maria Dedò: o poder das transformações geométricas ...

Como disse na introdução deste texto, quando coloquei o problema do pentágono a Maria Dedò, de passagem em Portugal, a resposta surpreendeu-me pela brevidade. Tenho pena de não a ter escrito na altura, mas foi qualquer coisa do tipo:

> "Bom, o produto das cinco meias voltas em torno dos pontos dados $ABCDE$ é uma meia-volta, e um vértice P do pentágono procurado é o ponto fixo dessa meia-volta, ou seja o seu centro."

Como os outros vértices se obtêm de modo óbvio a partir de um deles, estava o problema resolvido com esta frase ...

Como a frase não estava escrita, escrevi agora a Maria Dedò pedindo-lhe que a escrevesse. Não se lembrando já do que teria dito há cinco anos, respondeu-me da seguinte forma, (trata-se na verdade da mesma resolução, na minha adaptação do seu texto em inglês):

> Se os pontos médios dados são A, B, C, D e E e se P é o vértice do pentágono adjacente aos lados contendo A e E, então P é um ponto fixo para a isometria obtida compondo a, b, c, d, e (onde a é a rotação de 180° — ou seja, como dizemos entre nós, a meia-volta — em torno de A, ... e assim sucessivamente). Portanto o que há a fazer é encontrar esse ponto fixo. A meia-volta a composta com b dá uma translação (e podemos traçar o respectivo vector). O mesmo acontece com as duas meias-voltas seguintes, c e d, ou seja, as primeiras quatro meias-voltas resultam numa translação t. Portanto temos que compor t com a meia-volta e. O resultado é ainda uma meia-volta e podemos obter o seu centro (que será o vértice P procurado) por intersecção de duas rectas (ver explicação mais abaixo).

A razão da surpresa de muitos de nós perante esta resolução deriva do facto de Maria Dedò estar aqui a utilizar resultados relativos às transformações geométricas que infelizmente não são conhecidos de grande parte dos professores portugueses, apenas porque, inacreditavelmente, têm estado ausentes da sua prática — dado que as transformações são apenas tocadas ao de leve no ensino básico e completamente ignoradas no ensino secundário — e também não

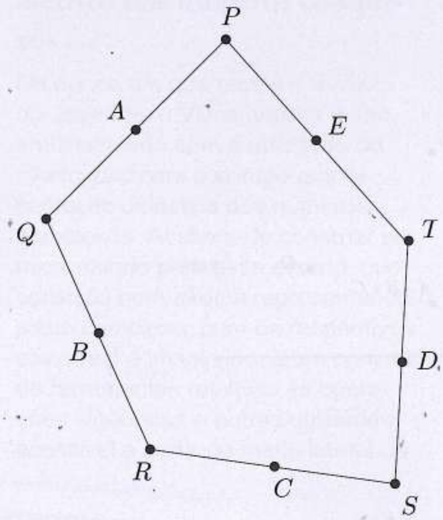


Figura 18.

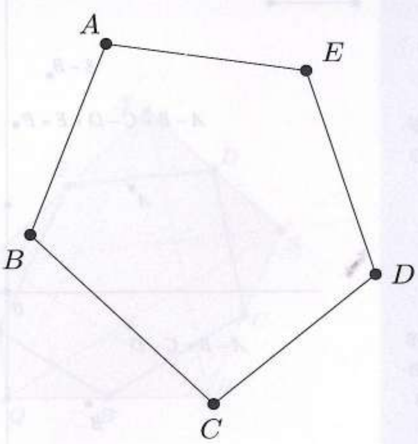
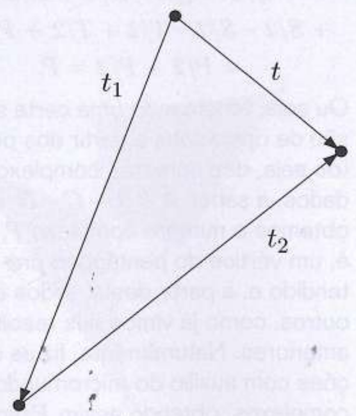


Figura 19.



fazem sequer parte, em muitos casos, da sua educação matemática universitária. Isto justifica também que nos detenhamos um pouco na explicitação da resolução de Maria Dedò.

Suponhamos o problema resolvido (figura 18), e sejam A, B, C, D e E os pontos dados e P é o vértice (do pentágono a determinar $PQRST$) adjacente aos lados contendo A e E. A composição das meias-voltas a, b, c, d e e, por esta ordem (isto é, primeiro a, depois b, e assim por diante) transforma P em si próprio (P é transformado em Q, depois em R, depois em S, depois em T e finalmente de novo em P). Ou seja, P é um ponto fixo para a composição das 5 meias-voltas.

A partir daqui, a resolução de Maria Dedò consiste em (i) determinar a isometria composição das cinco meias-voltas e depois em (ii) determinar P como ponto fixo dessa isometria.

(i) Que tipo de isometria será essa composição? A composição de duas meias-voltas é uma translação, e portanto temos duas translações (t_1, composição de a com b e t_2, composição de c com d). Logo, a composição das quatro meias-voltas, a, b, c, d é a translação composta de t_1 com t_2. Note-se que o vector da translação t_1 é paralelo a AB e o seu módulo é igual ao dobro do comprimento do segmento AB e o vector da translação t_2 é paralelo a CD e o seu módulo é igual ao dobro do comprimento do segmento CD. Foi essa construção que fizemos no *Sketchpad* (figura 19), em que partimos agora dos cinco pontos A, B, C, D, E. Obtemos assim t_1, t_2 e a sua composição t. Resta agora compor t com a meia-volta e. Será ainda uma meia-volta, como veremos na parte (ii).

(ii) A translação t pode ser interpretada como a composição de duas reflexões paralelas, com eixos de direcção perpendicular ao vector de translação e distando metade do módulo do vector da translação. Escolhemos como um dos eixos (r_2) a recta que passa por E e é perpendicular a t, daqui resulta que o outro eixo é a recta r_1, paralela a r_2 e deslocada (de metade do módulo de t) no sentido contrário ao de t (figura 20).

Por sua vez, a meia-volta e pode ser interpretada como a composição de duas reflexões em que os eixos r_3 e r_4 passam pelo ponto E e são ortogonais. Escolhemos para r_3 uma recta coincidente com r_2 e daí resulta que r_4 será a recta passando por E e paralela a t. A composição de t com e é então equivalente à composição de quatro reflexões, primeiro a reflexão de eixo r_1, depois a reflexão de eixo r_2, depois a reflexão de eixo r_3 e finalmente a reflexão de eixo r_4.

Como r_2 e r_3 são coincidentes, a sua composição é a identidade, e portanto concluímos que a composição de t com e é equivalente á composição das duas reflexões de eixos r_1 e r_4. Ora r_1 e r_4 são ortogonais, e portanto a composição das duas reflexões é uma meia-volta, e tem um ponto fixo que é o seu centro, ou seja a intersecção de r_1 com r_4. Está encontrado o ponto P e a partir daí todo o pentágono procurado.

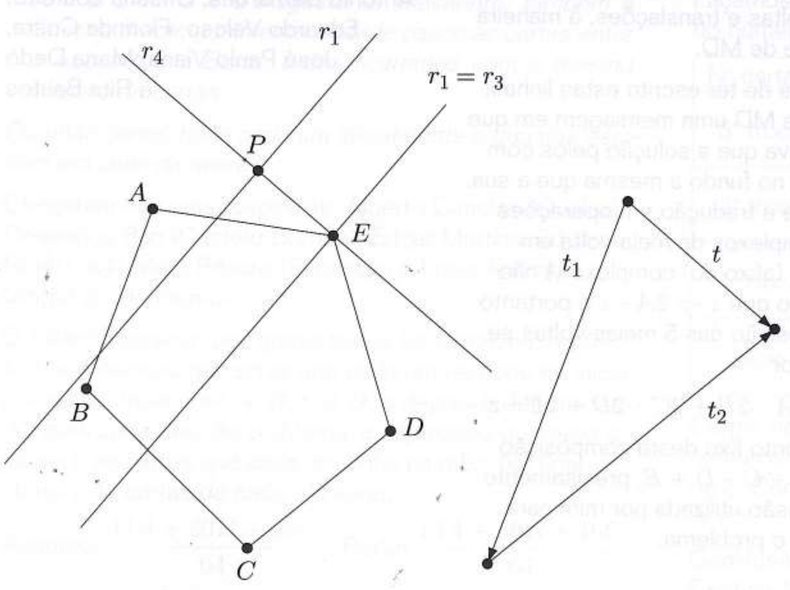


Figura 20.

Algumas observações

1. Sobre a utilização de programas de geometria dinâmica

Em quatro destas cinco resoluções o recurso ao *Cabri* ou ao *Sketchpad* foi importante. Naturalmente, como tantos outros professores de matemática e como seria desejável que acontecesse também com um número crescente de alunos, quando confrontados com um problema de geometria uma atitude já habitual, em muitos de nós, é partir para uma experimentação num ambiente de geometria dinâmica. Sinceramente, só uma atitude primária, provocada pela ignorância ou pelo preconceito, pode recusar por princípio este tipo de utilização da tecnologia na aprendizagem da matemática. Não é necessário estar aqui a repetir o que está demonstrado abundantemente em investigações e escritos recentes, e que é exemplificado também neste texto. Remetemos apenas para uma tradução recente em português de um repositório notável de experiências com software de geometria dinâmica[4]. Aquela atitude primária, infelizmente ainda presente em muitos matemáticos das nossas universidades que preparam futuros professores, tem tido consequências graves no que diz respeito à introdução dos computadores no ensino da matemática.

2. Um ensaio de caracterização e possível agrupamento das diferentes resoluções

É muito interessante comparar as resoluções propostas por José Paulo Viana (JPV) e por Maria Dedò (MD). Existem evidentes relações entre as duas. A meia-volta descoberta experimentalmente por JPV não é mais do que o resultado da composição das cinco meias-voltas, em torno dos cinco pontos dados, prevista teoricamente por MD. E a conclusão, óbvia

— com razão — para JPV, de que o ponto médio do segmento PP' seria a solução (na determinação de um vértice do pentágono pedido) corresponde à afirmação de que o vértice P a encontrar seria *um* (mais tarde se veria que era *o*) ponto fixo da isometria resultante dessa composição. No fundo, estamos a ver aqui em jogo duas intuições, a intuição geométrica resultante da visualização e da experimentação frequentes num contexto de geometria dinâmica — no caso de JPV — e a intuição de quem tem uma experiência prolongada no estudo das isometrias e da álgebra das suas composições, ou seja a intuição (do que é habitual acontecer) no domínio específico das transformações geométricas — no caso de MD. Podemos dizer que as duas resoluções mostram um caminho didáctico no ensino das transformações geométricas — o nível de conhecimento estrutural revelado pela resolução de MD exige a passagem anterior por experiências e aquisição de intuições do tipo revelado pela resolução de JPV.

Também, num certo sentido, é possível associar as resoluções de Florinda Costa e de Rita Bastos (F+R) e de António Bernardes e Cristina Loureiro (A+C). Em ambas é possível encontrar uma estratégia velha de séculos, senão de milénios, na resolução de problemas de geometria: *supor o problema resolvido e procurar relações entre os vários objectos geométricos*, esperando-se que daí resultem indicações para a resolução do problema posto. Essa estratégia resultou em ambos os casos, e é evidente como a utilização inteligente de um programa de geometria dinâmica contribuiu para isso. No entanto, os caminhos e as resoluções são diferentes, e é pedagógico ver em quê. F+R procuraram, e encontraram, um padrão na passagem de um pentágono para outro pentágono (no caso estrelado) em que os vértices são os pontos médios dos lados do primeiro. A matemática como ciência dos padrões ... Por seu lado, a dissecção do pentágono num triângulo e num quadrilátero, feita por A+C, pode sugerir que, conscientemente ou não, recorreram a uma ideia cara a Polya (*"conheces algum problema relacionado com este?"*) e se lembraram do paralelogramo que resulta sempre da consideração dos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer. *Dividiram o pentágono para o conquistar....*

No que diz respeito à resolução que utiliza a aritmética dos números complexos, ela parece afastar-se, por essa razão, das outras. No entanto, essa distinção é mais aparente do que real, como se poderia esperar numa ciência como a matemática, com uma unidade tão profunda. Em particular, a tradução em termos de operações com números complexos das isometrias do plano euclidiano é extraordinariamente simples. Por exemplo, se pensarmos na isometria meia-volta, de centro na origem O, a sua tradução, em termos de números complexos, é o produto por -1! Isto é, se z é um número complexo, o transformado de z pela meia-volta de centro na origem é simplesmente $-z$. Se o centro não é a origem mas um ponto qualquer U, o transformado obtém-se com uma espécie de *sanduiche* de transformações (primeiro deslocamos z para *perto da origem* por meio da translação UO, depois multiplicamos por -1, e depois desfazemos a deslocação inicial por meio da translação OU). Isto é, embora não tenha feito ainda esse trabalho, é minha profunda convicção que a aritmética dos complexos que resolveu o problema poderia ser inteiramente traduzida em termos de meias-voltas e translações, à maneira de JPV e de MD.

Já depois de ter escrito estas linhas, recebi de MD uma mensagem em que comentava que a solução pelos complexos é no fundo a mesma que a sua, dado que a tradução em operações com complexos da meia-volta em torno do (afixo do) complexo A não é mais do que $z \to 2A - z$ e portanto a composição das 5 meias-voltas se traduz por

$$z \to 2A - 2B + 2C - 2D + 2E - z.$$

Ora o ponto fixo desta composição é $A - B + C - D + E$, precisamente a expressão utilizada por mim para resolver o problema.

3. Possíveis extensões

Como é referido por F+R, e também por MD na mensagem que me enviou, o facto de ser um pentágono (sobretudo de ser um polígono com um número ímpar de vértices) tem influência decisiva no facto de podermos encontrar sempre uma solução. Acrescenta MD, numa mensagem mais recente, que na solução F+R a condição para existência de solução é o facto de existir o pentágono estrelado intermédio, e isso depende do facto de se tratar de um número ímpar de lados no polígono pedido. Ora isso também relaciona a solução F+R com a de MD, dado que os lados do pentágono estrelado não são mais do que os vectores das translações que resultam das composições das meias-voltas. O leitor que ficou *apanhado* por este problema poderá investigar o que aconteceria às resoluções descritas aqui no caso do polígono não ser um pentágono.

Notas

1 Abrantes, Paulo. *Viagem de ida e Volta*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1987.

2 Os dois triângulos têm um ângulo comum e os lados que o formam proporcionais já que E e D são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos PT e TS.

3 Os pontos médios de um quadrilátero qualquer definem um paralelogramo.

4 APM. *Geometria Dinâmica*. Selecção de textos do livro *Geometry Turned On*, ed. James R. King e Doris Schattschneider, MAA. Lisboa: APM, 2003.

António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, José Paulo Viana, Maria Dedò e Rita Bastos

José Paulo Viana

Pedras através do aro

Quatro miúdos inventaram um jogo. Penduraram um velho aro metálico bem alto num ramo de árvore. Todos têm igual número de pedras e vão atirá-las uma a uma, tentando fazê-las passar através do aro. O sistema de pontuação é o seguinte:

- Se a pedra passar pelo interior do aro sem lhe tocar: 2 pontos.
- Se passar pelo interior mas tocar no aro: 1 ponto.
- Se não passar pelo interior do aro mas lhe tocar: 0 pontos.
- Se passar por fora do aro sem lhe tocar: desconta 1 ponto.

Feito o jogo, a classificação final foi a seguinte: 1° Daniel; 2° Joana; 3° Francisco; 4° Catarina

Reparei que, se o que contasse fosse apenas a pedra atravessar o aro sem lhe tocar, não marcando nem descontando nada nos outros casos, a classificação teria sido precisamente a inversa. E mais: isto seria impossível de acontecer se eles tivessem menos pedras. No total, 12 pedras bateram no aro. Que pontuação tiveram os quatro amigos e como foram os lançamentos de cada um?

(Respostas até 31 de Dezembro)

As cartas mal distribuídas

O problema proposto no número 77 de *Educação e Matemática* foi adaptado de um, muito mais simples, publicado no número de Abril de 2003 da revista *Mathematics Teacher*. Era o seguinte:

O Augusto pegou num baralho de 52 cartas. Entregou um montinho delas à Berta, outro à Cristina, mais um ao Domingos, ficou com algumas para ele e deixou as restantes em cima da mesa.

— Não temos todos o mesmo número de cartas — reclamou a Berta.

— Não faz mal — retorquiu o Domingos. — Se o Augusto dividir igualmente metade das suas cartas entre a Berta e a Cristina, depois a Berta fizer o mesmo com a Cristina e o Augusto e, finalmente, também a Cristina dividir igualmente metade das suas cartas entre o Augusto e a Berta, todos ficaremos com o mesmo número de cartas.

Quantas cartas tinha cada um inicialmente e quantas estavam em cima da mesa?

Chegaram-nos seis respostas: Alberto Canelas (Queluz), Domingos Rijo (Castelo Branco), Edgar Martins, Eduardo Cunha, Iola Mara Ribeiro (Estarreja) e Luisa Andrade (Angra do Heroísmo).

O método seguido por quase todos foi o mesmo: representar o número de cartas que cada um recebeu no início por respectivamente A, B, C e D, e depois ir determinando, para cada fase do problema, a expressão que dava o número de cartas que cada um tinha na mão. No final, o número de cartas de cada um seria:

Augusto: $\dfrac{41A+20B+16C}{64}$ Berta: $\dfrac{13A+36B+16C}{64}$

Cristina: $\dfrac{5A+4B+16C}{32}$ Domingos: D

Estes quatro valores são todos iguais, pelo que obtemos um sistema de 3 equações a quatro incógnitas, com a restrição de ser $A+B+C+D<52$

Resolvendo-se o sistema de modo a obter três das incógnitas em função de uma delas e fazendo algumas tentativas, rapidamente se chegava à solução.

No entanto, a Iola e o Alberto (este, numa segunda abordagem), usam o processo, muito mais simples e menos trabalhoso, de partir do fim para o princípio. Veja-se como eles fizeram.

Seja N o número de cartas com que todos ficam no fim. Como o baralho tem 52 cartas, terá de ser:

$$4N < 52 \text{ ou } N < 13$$

Façamos agora uma tabela com a evolução, a partir do fim, do número de cartas de cada um.

N° cartas:	Augusto	Berta	Cristina	Domingos
3ª troca	N	N	N	N
2ª troca	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{2}$	$2N$	N
1ª troca	$\frac{N}{4}$	N	$\frac{7N}{4}$	N
Início	$\frac{N}{2}$	$\frac{7N}{8}$	$\frac{13N}{8}$	N

Como, na última linha, todas as expressões têm de dar números inteiros, N tem obrigatoriamente de ser múltiplo de 8. Como vimos que $N<13$, a única hipótese é ser $N=8$.

Conclusão: o Augusto recebeu 4 cartas, a Berta 7, a Cristina 13 e o Domingos 8.

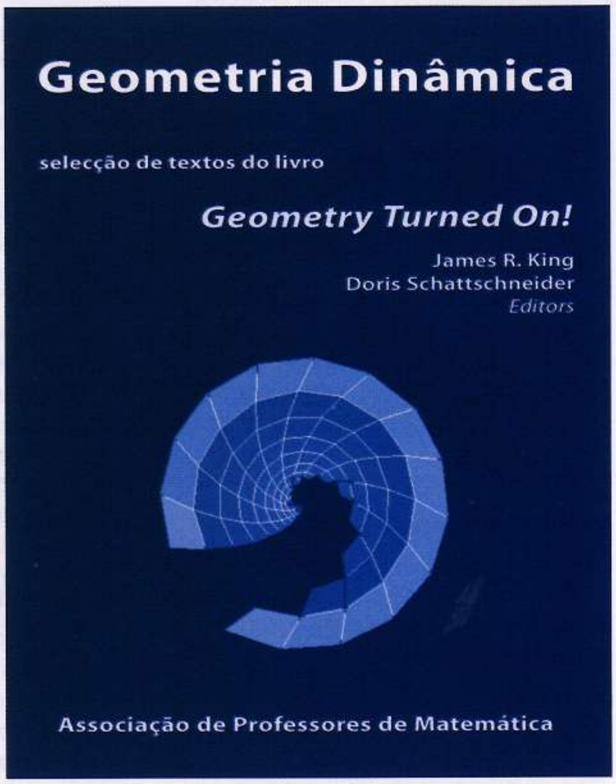
Em cima da mesa ficaram as restantes cartas: 20.

APM
Publicações

Geometria Dinâmica
Selecção de textos do livro *Geometry Turned On!*

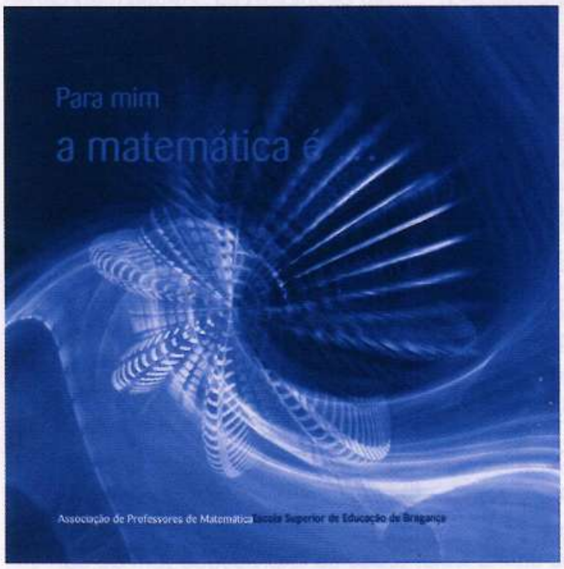
149 pp. APM, 2003

Sócio: €8,00
PVP: €16,00



Este livro contém a tradução de 13 textos incluídos no livro *Geometry Turned On*, publicado em 1997 pela Mathematical Association of America (MAA). A maior parte dos textos da edição americana são extensões de comunicações apresentadas num encontro anual do MAA, no âmbito de uma sessão especial dedicada à geometria dinâmica.

A publicação desta colectânea em português é uma iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM e tem por objectivo tornar mais acessível aos professores de Matemática em Portugal um excelente conjunto de relatos e análises sobre a utilização do software de geometria dinâmica nos ensinos básico, secundário e superior.



Para mim a Matemática é …

144 pp. APM e ESE Bragança, 2003

Sócio: €6,00
PVP: €12,00

Esta edição apresenta uma colectânea de textos sobre a matemática na escola recolhidos ao longo dos anos de 2000 e 2001. Os autores dos textos são pessoas do distrito de Bragança, incluindo alunos, educadores e professores, das mais diversas idades, percursos escolares, tipos de escolas e áreas disciplinares (línguas, ciências sociais, ciências da natureza, educação física, educação musical e plástica), que se exprimem em prosa, poesia, ilustração e fotografia.

A edição deste livro é um contributo para que se tenha uma melhor visão social da matemática e resulta da parceria entre a APM (através do seu Núcleo Regional de Bragança) e da Escola Superior de Educação de Bragança.

Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas

Os temas do Encontro Internacional em homenagem a Paulo Abrantes

Nos dias 14 e 15 de Julho de 2005 vai realizar-se na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa o encontro internacional *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, em homenagem a Paulo Abrantes. O primeiro anúncio deste encontro já começou a ser divulgado e é possível ir sabendo todas as informações sobre ele a partir da consulta do site www.apm.pt/emce_pa. Este encontro, que conta com o apoio da Associação de Professores de Matemática (APM), tem como principal objectivo *analisar a situação presente na Educação Matemática e discutir perspectivas actuais nesse domínio, adoptando como temas dessa análise e discussão as principais linhas de orientação do trabalho desenvolvido por Paulo Abrantes como investigador, como líder no movimento de renovação do ensino da Matemática em Portugal e como iniciador de um projecto nacional de desenvolvimento curricular envolvendo professores e escolas*

Os temas a discutir durante o encontro serão quatro: desenvolvimento curricular, formação de professores, avaliação e experiências de aprendizagem. Neste número da Educação e Matemática publicamos o texto que a Comissão Científica do encontro preparou sobre eles.

Desenvolvimento curricular

Hoje em dia é possível identificar um conjunto de finalidades que resumem as tendências curriculares que se foram precisando nos últimos anos — como, por exemplo, promover uma educação matemática para todos os alunos, dar ênfase à actividade matemática, aos processos matemáticos, às aplicações da Matemática. No entanto, é reconhecida a dificuldade na definição dos caminhos que as permitam alcançar, sendo cada vez maior a consciência de que não basta um bom currículo oficial — o processo de desenvolvimento curricular é complexo e envolve muitos actores, em especial, os professores, principais responsáveis pelo currículo em acção, nas escolas, junto dos alunos. Como conseguir deixar para trás uma lógica de listagem de tópicos matemáticos e entender o currículo como um conjunto integrado e coerente de objectivos, conteúdos, métodos e avaliação? Que margens de flexibilidade deve o currículo prever? Como evoluir da lógica do professor como transmissor de conteúdos para uma atitude de desenvolvedor curricular, que exige tomada de decisões e resolução de problemas?

A formação de professores

A formação de professores é reconhecidamente um domínio central na Educação Matemática, lugar de discussão e controvérsia, quer ao nível das perspectivas e políticas de formação, quer ao nível dos modelos e das práticas. Quais os principais problemas ou questões que hoje se colocam na formação de professores, seja ao nível da formação inicial, seja ao nível da formação contínua? Que especificidade deve ter a formação em Matemática nos cursos destinados a futuros professores? Que experiência e conhecimento matemáticos devem estes cursos proporcionar? Justifica-se diferenciar essa formação consoante o nível de ensino a que se destinam os professores? Que lugar e que papel tem a prática pedagógica na formação inicial de professores? Quais as principais dificuldades que levanta a integração desta componente neste nível de formação? Que modalidades de formação se têm revelado particularmente conseguidas nesta integração? Como percepcionam os professores em serviço a sua formação ao longo da carreira e que necessidades e interesses prioritários manifestam? Têm sido identificadas particularidades relevantes a este nível nos professores nos primeiros anos de exercício profissional? Qual o papel da escola e das instituições de ensino superior neste domínio e, de um modo mais geral, na formação contínua dos professores? Que estratégias e experiências se têm revelado particularmente adequadas a este nível de formação? Na formação dos professores e, nomeadamente, no seu desenvolvimento profissional, como equacionar a formação ao nível da pós-graduação e que papel lhe pode ser atribuído?

A avaliação

A avaliação das aprendizagens em Matemática tem vindo nas últimas décadas a constituir uma área de particular atenção de forma a acompanhar as restantes tendências e orientações curriculares. De uma perspectiva essencialmente selectiva e certificativa, procura-se orientar a avaliação para a regulação das aprendizagens e do ensino. De um entendimento de avaliação como medida, ela é hoje essencialmente encarada como um acto de comunicação social. Como pressupostos orientadores dos processos avaliativos podemos, entre outros, destacar a intencionalidade das práticas de acompanhamento e compreensão do trabalho que se desenvolve no dia a dia da sala de aula de Matemática, o papel central do aluno enquanto principal agente regulador das suas aprendizagens e da auto-correcção dos seus erros, e o recurso a instrumentos diversificados de avaliação. Se é certo que inovar em educação é, no geral, um processo exigente e complexo, certamente que no que respeita a avaliação as dificuldades se redobram dada a visibilidade social de que a avaliação sempre se reveste. Como mudar as práticas avaliativas sem enfrentar a resistência da sociedade em geral e dos pais, em particular? Como ter uma visão crítica face à crença cega da objectividade? Como conciliar processos de avaliação formativa e sumativa? Que instrumentos usar e como os usar de acordo com aquilo que se pretende em cada momento? Em que medida as actuais orientações curriculares estão a ser levadas à prática? Quais as principais dificuldades com que se defrontam os professores? Que nos diz a investigação recente em diversos países sobre a realidade nas escolas? Que atenção tem sido dada à avaliação na formação inicial de professores?

Experiências matemáticas

• Resolução de problemas

O trabalho de George Pólya transformou a resolução de problemas num conceito fundamental da Educação Matemática. Desde os anos 80 é também um conceito chave do currículo de Matemática, que continua a merecer o interesse de muitos professores e educadores matemáticos. Que diz a investigação recente sobre os processos cognitivos dos alunos nesta actividade? Que factores podem favorecer ou dificultar o desempenho dos alunos na resolução de problemas? Que estratégias bem sucedidas têm sido identificadas para os professores integrarem a resolução de problemas na sua prática lectiva? Que novas perspectivas têm sido avançadas para a integração da resolução de problemas no currículo?

• Explorações e investigações matemáticas

No livro A Renovação do Currículo de Matemática, da APM, fala-se profusamente nas explorações e investigações matemáticas. Trata-se de tarefas problemáticas, de natureza aberta, que se apresentam com grandes potencialidades para servir de base a situações de aprendizagem. Em que medida este tipo de trabalho é valorizado no currículo dos diversos países? De que modo ele tende a ser visto pelos professores dos diferentes níveis de ensino? Que dificuldades têm sido registadas para a sua divulgação? Em que medidas as potencialidades apontadas a estas tarefas se têm vindo a confirmar na prática pedagógica? Existem diferenças significativas de nível de ensino para nível de ensino? Como se pode perspectivar a sua integração curricular? Que experiências existem neste campo na formação inicial de professores?

• Trabalho de projecto

Há pelo menos duas boas ordens de razões para a realização de projectos exclusivamente matemáticos ou com uma grande componente matemática. São os contributos únicos que os projectos dão à matemática escolar, uma componente de interpretação e leitura do mundo que só a matemática permite. É a metodologia de carácter investigativo que permite compreender como se aprende numa perspectiva de desenvolvimento. A realização de projectos parece ser assim uma das experiências de aprendizagem indispensáveis, mas é também umas das menos conhecidas. Que experiências existem e o que poderemos aprender com elas? Como pode ser encarada a realização de projectos nos diversos níveis de ensino? Que implicações tem no currículo e na maneira de organizar o currículo? Como é que os professores os encaram? Que tipo de dificuldades lhes traz? Que necessidades acarretam? Como é que a tecnologia potencializa a realização de projectos? Que papel deverão ter os projectos na formação inicial de professores? Como é que a investigação tem trabalhado sobre a realização de projectos?

• A Matemática e a realidade

A relação da matemática com a realidade constitui uma importante orientação curricular que tem vindo a ganhar cada vez mais destaque nos currículos de matemática, nomeadamente no que diz respeito ao desenvolvimento da modelação matemática. Representa uma grande oportunidade de tornar a Matemática significativa para os alunos, contribuindo simultaneamente para o desenvolvimento de uma atitude mais informada e crítica sobre o mundo que os rodeia. No entanto, a concretização desta ideia na sala de aula tem as suas dificuldades. Como escolher situações reais adequadas para explorar com os alunos? Que grau de realismo é desejável e possível preservar? Como pode a relação matemática-realidade ser desenvolvida nos diferentes níveis de ensino? Quais as potencialidades dos diversos tipos de tarefas (problemas, investigações, projectos) no desenvolvimento desta actividade? Que lugar para a interdisciplinaridade? Quais os contributos dos recursos tecnológicos actualmente ao dispor? Que dificuldades enfrentam os professores?

Uma estreia atribulada

Sempre que fazemos esta secção, nós ou quaisquer outros colegas da redacção da Revista, começamos pelo mesmo: olhar para as notícias da imprensa e escolher uma sobre um assunto que nos pareça relevante e, claro, actual. Há alturas em que há vários assuntos e alguma indecisão na escolha, há outras de algum vazio em que é preciso procurar bastante... Mas este momento é diferente. Hoje, dia 1 de Setembro, o assunto é óbvio e as notícias sobre ele estão em toda a imprensa: o concurso de colocação de professores. Na verdade, o assunto até não é novo, "praticamente desde o início do ano que não houve um mês em que o novo concurso de professores não tenha sido notícia".

Os problemas começaram logo com o aviso da abertura do concurso que sofreu um atraso de um mês sobre a data estipulada pelo Ministério da Educação. Sabendo que o concurso estaria sujeito a novas regras e se iria processar noutros moldes, a ansiedade natural de muitos professores inevitavelmente fez-se sentir. As suspeitas sobre a fiabilidade do novo sistema expressas na fraca adesão dos professores à candidatura electrónica revelaram-se plausíveis aquando da publicação da lista em que as falhas foram para além dos limites do razoável, tal como admitiu o Secretário de Estado da Administração Educativa. Numa segunda tentativa, mantêm-se erros inaceitáveis que geram 30 mil reclamações, correspondendo a cerca de 1/3 dos candidatos. Os dirigentes assumem a responsabilidade política das falhas e "prometem assumir as consequências que vierem a ser apuradas pelo inquérito" externo entretanto solicitado. Mas que dirigentes? Os responsáveis de então já estão afastados. Que responsabilidade cai sobre os actuais? Afinal sobre quem vão recair os danos deste processo mal conduzido?

Consequências existirão certamente, mesmo que se acelere o processo ao máximo, mesmo que só se admitam candidaturas pela internet e não se aceitem reclamações, mesmo que as aulas se iniciem dentro dos prazos estipulados. Temos de ter consciência que estamos a falar de um universo de 109595 candidatos a professores, que correspondem aproximadamente a 2/3 dos professores efectivamente em funções no nosso sistema de ensino. Além das vidas pessoais de muitos professores que ficaram irremediavelmente afectadas, não se pode pensar que o trabalho nas escolas se inicia maquinalmente com a chegada dos professores. Há uma integração a fazer, trabalho a preparar, uma cultura de escola a reconstruir. Que espaço estamos a atribuir às preocupações que consideramos fundamentais no sistema de ensino?

Helena Amaral
Lina Brunheira

ESTREIA DO NOVO REGIME DE CONCURSOS COM ATRASOS E MUITA POLÉMICA

Praticamente desde o início do ano que não houve um mês em que o novo concurso de professores não tenha sido notícia. Atrasos sucessivos, erros nas listas provisórias, divergências quanto à interpretação da lei, chamadas da equipa ministerial ao Parlamento e muita polémica têm marcado a estreia das novas regras. Todos os sindicatos deram o seu acordo ao novo diploma, mas a operacionalização tem-se revelado problemática. Com três meses de atraso, foram ontem conhecidas as listas definitivas de colocação, ordenação e exclusão. Seguem-se ainda as fases de destacamento, afectação e contratação.

27 de Fevereiro Com um mês de atraso face ao previsto na lei, é publicado em "Diário da República" o aviso da abertura do concurso de educadores de infância e professores para 2003/2004. O recrutamento e selecção do pessoal docente passa a fazer-se de [illegible] comuns [illegible] o e pre- [illegible] de can- [illegible] sistema [illegible] sistema, [illegible] Compta – empresa vencedora do concurso público – e que obriga a um investimento de 600 mil euros.

apenas dez por cento fazem-no através da Internet.

1 a 10 de Março Cerca de cem mil professores apresentam a sua candidatura. No ano de estreia da candidatura electrónica, apenas dez por cento fazem-no através da Internet.

3 de Maio O Ministério da Educação (ME) divulga as primeiras listas provisórias de ordenação e exclusão. Ao longo do dia, os sindicatos vão-se apercebendo de que as listas estão profundamente erradas. Exclusão de todos os candidatos dos Açores e da Madeira, tempos de serviço mal contados, alegadas faltas [illegible] de [illegible] s há [illegible] ção [illegible] são [illegible] os e [illegible] e 20 [illegible] dia o ME anunciava que, ainda este mês, iria divulgar uma nova lista provisória.

O Governo mantem que o início do ano lectivo se fará tempo e horas, ou seja entre os dias 16 e 17 de Setembro.

6 de Maio Um "caos", apontam os sindicatos. Para além dos erros nas listas provisórias, os verbetes – uma espécie de recibo que confirma a candidatura – são emitidos com informações diferentes daquelas que os candidatos deram e dos dados constantes nas listas. Ninguém consegue explicar a situação.

7 de Maio O secretário de Estado da Administração Educativa, Abílio Morgado, diz que as falhas vão "para além dos limites do razoável", assume a responsabilidade política e anuncia a realização de uma auditoria externa aos ser- [illegible] tos insistem na [illegible] etário de Estado [illegible] Educação David [illegible] mantém-se no [illegible] tem assumir as [illegible] ue vierem a ser [illegible] uérito.

O secretário de Estado da Administração Educativa, Abílio Morgado, diz que as falhas vão "para além dos limites do razoável", assume a responsabilidade política e anuncia a realização de uma auditoria externa aos serviços.

[illegible] sembleia da Re- [illegible] do ME anuncia [illegible] ção-Geral das Fi- [illegible] uditoria ao pro- [illegible] sos e aos "erros [illegible] ompreensíveis e [illegible] ncionamento de qualquer administração".

31 de Maio Data inicialmente prevista para a divulgação das listas definitivas de graduação e exclusão. As segundas listas provisórias também não ficaram prontas até ao final do mês.

14 de Junho São divulgadas as segundas listas provisórias. Os sindicatos falam em mais de 14 mil candidaturas novamente excluídas e manutenção de "erros inaceitáveis". O ME afirma que existem 8700 candidatos excluídos e 220 afastamentos parciais (para um grupo de docência, por exemplo). Abílio Morgado diz mesmo que "nunca existiram listas tão transparentes e fiáveis" e realça que 92 por cento das candidaturas foram admitidas. Apresenta uma lista de 52 motivos de exclusão detectados que têm sobretudo a ver com mau preenchimento dos boletins, incorrecta interpretação das regras, falta de documentos.

15 a 21 de Junho Mais de 30 mil candidatos reclamam das listas provisórias, ou seja, quase um terço do total de professores que se apresentaram a concurso. Na Direcção-Geral dos Recursos Humanos da Educação uma equipa de duas dezenas de pessoas analisa diariamente perto de 900 casos. A intenção é "salvar todas as candidaturas", tranquiliza Abílio Morgado.

14 de Julho O ME promete para [illegible] primeira quinzena de Agosto a [illegible] ção das listas definitivas de colo[illegible] nos quadros de escola e zona pe[illegible]ica.

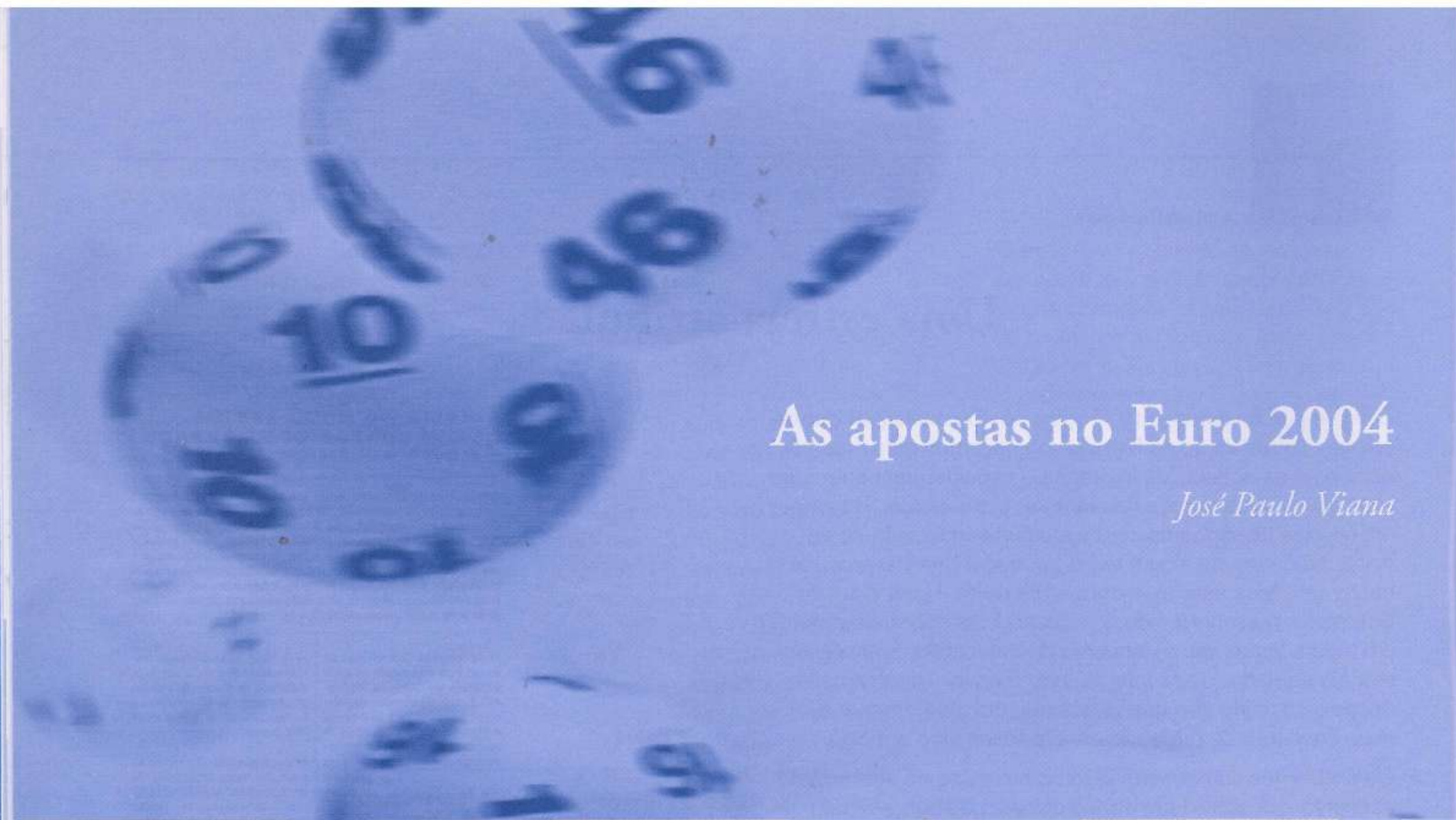
23 de Julho Os resul[illegible] voltam a ser adiados, desta feita para o final de Agosto, entre 28 a 30. O Governo mantem que o início do ano lectivo se fará tempo e horas, ou seja entre os dias 16 e 17 de Setembro. Os sindicatos garantem que é impossível.

Agosto Os professores que viram a sua reclamação indeferida são notificados pelo ME, mesmo depois de expirados os prazos previsto na lei. Acresce que muitos não compreendem o porquê do indeferimento e começam a recorrer aos tribunais, com recursos hierárquicos e providências cautelares. Os tribunais dão razão aos professores que interpõem providências cautelares, obrigando o ME a admitir os candidatos que tinham sido excluídos.

20 de Agosto São publicadas em Diário da República alterações transitórias aos concursos para tornar o processo mais célere. Acabam-se com as dilações de prazos para candidatos das regiões autónomas e estrangeiro, com o período de reclamações e obriga-se à candidatura pela Internet.

31 de Agosto O Ministério da Educação divulga as listas definitivas do concurso de professores. ▪ ISABEL LEIRIA

In Público, 1 de Setembro de 2004.



As apostas no Euro 2004

José Paulo Viana

Sempre que há um acontecimento que me pareça que vai atrair as atenções ou o entusiasmo dos meus amigos e conhecidos, organizo umas apostas. É uma maneira de me divertir, de falar, comentar e discutir com quem está à minha volta e de introduzir uma pontinha de emoção extra ao que vai acontecer. E tem uma vantagem adicional: se tudo correr na normalidade ainda tenho um lucro(zinho).

Faço isto desde os meus tempos de estudante. Aproveitava muita coisa. Lembro-me, por exemplo, dos festivais da canção da Eurovisão — é verdade, era um acontecimento nacional e todo o país parava nessa noite (para ver a canção portuguesa ter um ponto e ficar em último lugar ...). Uma vez fiz mesmo apostas sobre os resultados das eleições presidenciais dos Estados Unidos (mas eram outros tempos, ou melhor, eu é que era outro ...). As eleições portuguesas também são um belo motivo, embora só depois de 1974 porque, até aí, os resultados não ofereciam qualquer emoção: já eram conhecidos de véspera ....

No entanto, os acontecimentos preferidos, meus e dos meus amigos, eram e são, sem dúvida, os Campeonatos do Mundo e da Europa de futebol. Têm muitas vantagens: de dois em dois anos realiza-se um deles, para apostar uma pessoa pode escolher entre 16 ou 24 países (agora, no mundial, até já são 32), e há apostas que podem dar um belo prémio. Mas, para mim, existe um aliciante extra: é possível (e mesmo imprescindível) aplicar alguma teoria matemática para que tudo corra bem, isto é, para que as hipóteses de eu ter prejuízo sejam reduzidas ou nulas. É o que mais me diverte.

Para estas apostas, uso o *Sistema Inglês*. Chamo-lhe assim porque esta maneira de apostar está muito difundida no Reino Unido e, oficialmente, não é usada em Portugal.

As apostas mútuas

No nosso país, estão legalizadas apenas as *apostas mútuas*. É o sistema do Totoloto, do Totobola e do Joker. Quando, por exemplo, um de nós faz uma aposta no Totoloto, não está a jogar com a entidade organizadora, a "Santa" Casa da Misericórdia, está a jogar com (contra) os outros apostadores todos. É por isso que, se poucos acertam, cada um recebe muito e se muitos acertam, cada um tem um prémio pequeno. E, antes do sorteio, não podemos saber qual será o nosso prémio se acertarmos.

Antes de continuar, um pequeno comentário sobre estes jogos legais. Para um jogo ser equilibrado e completamente honesto, a *média* ou esperança matemática do jogo tem de ser 0. Assim, se uma pessoa jogar *muitas* vezes, no final o que ganhou é igual ao que pagou.

Se essa média ou esperança matemática for positiva, o jogo é vantajoso (mas não há jogos desses ...), e se a média for negativa, o jogo é desvantajoso (todos são ...). No artigo sobre os casinos, saído na *Educação e Matemática* nº 77, vimos que a esperança matemática da roleta era de –0,027. Ou seja, por cada euro apostado o jogador, em média, perde 2,7 cêntimos. É normal que a casa organizadora tenha uma pequena vantagem: tem de investir na criação do local de jogo, tem de pagar a quem lá trabalha e, claro, tem de ter lucro.

Mas com o Totoloto, Totobola e Joker, a esperança matemática do apostador é de –0,55. Ou seja, em média, por cada euro apostado perde-se 55 cêntimos ... Um verdadeiro roubo (permitido pelos lesados, diga-se de passagem). E com uma outra componente um pouco irritante: a organização não corre qualquer risco: ganha sempre 55% do total das apostas. Nos casinos isso não acontece: a casa pode ter prejuízo se um jogador apostar muito forte e ganhar (é raro mas acontece).

Devo dizer-vos que, tirando eventuais casos de burlas e contos do vigário, não conheço jogo mais desonesto que o Totoloto. É por isso que me sinto obrigado a usar as aspas quando escrevo o nome da entidade que o organiza, a "Santa" Casa da Misericórdia ...

A propósito deste jogo, Monique Lloyd tem uma frase que acho deliciosa:

O Totobola é um imposto sobre quem não sabe Matemática.

O sistema inglês

Neste sistema, ao contrário das apostas mútuas, a aposta de cada jogador é feita *contra* a casa organizadora. Assim, o eventual prémio não depende da forma como os outros jogadores apostarem.

Vejamos, com um exemplo, como isto funciona. Quando eu abri as apostas entre os meus amigos, a cotação da Grécia era de 1/40. Quer isto dizer que, quem apostou nesse dia na Grécia, recebeu no final uma quantia 40 vezes maior. Ou seja, no momento da aposta o jogador já sabe quanto receberá se acertar, independentemente da forma como os outros apostadores jogarem: apostando 5€ terá direito a 200€ em caso de vitória (e foi o que aconteceu com um dos meus amigos ...).

Claro que as cotações vão evoluindo com o decorrer do tempo. Por exemplo, a da Grécia foi sendo sucessivamente 1/40, 1/30, 1/20, 1/15, 1/10, 1/12 e 1/4. Claro que, quando alguém aposta, a cotação válida é a desse momento. Por exemplo, quem apostou quando estava a 1/10 recebeu 10 vezes o valor da aposta, embora quem apostou no início recebesse 40 vezes e quem apostou a seguir recebesse 12 vezes (quando estava a 1/4 ninguém apostou na Grécia ...).

Que os ingleses gostam de apostar e que as apostas fazem parte da cultura inglesa já eu sabia. Mas não deixei de me surpreender quando, em Março passado, depois de organizar as minhas cotações para o Euro 2004, resolvi ir à página da Internet da Ladbrokes, uma famosa casa de apostas inglesas. Na página de abertura há logo umas dez opções diferentes de tipos de acontecimentos. Escolhi desporto e, depois, perante mais uma dezena de possibilidades, fui para o futebol.

Era uma segunda feira, já se tinham realizado quase todos os jogos das principais ligas europeias de futebol. E qual era o primeiro jogo que aparecia para se apostar? Nem mais nem menos que o Académica–Porto! Fiquei de boca aberta. Que em Inglaterra soubessem quem é o F.C. Porto não me admirou (até iria ser Campeão Europeu dois meses depois) mas que conhecessem a Académica, isso é que me deixou perplexo ...! E, mais ainda, que houvesse quem estivesse disposto a apostar em tal jogo!

Além disso, era possível apostar, não só em quem ganhava ou se empatavam, mas também no resultado final em golos, se havia algum golo nos 3 primeiros minutos de jogo, em quem marcava o primeiro golo, em quem marcava o último, em qual era o resultado ao intervalo e no fim, e sei lá que mais.

Análise matemática

Vamos aliás aproveitar o jogo Académica–Porto para, com as cotações da Ladbrokes, fazer um estudo de como isto funciona do ponto de vista matemático.

Nesse dia, as cotações eram:

- Vitória da Académica: 1/8
- Empate: 1/4
- Vitória do Porto: 3/4 (1)

Recapitulando, quem apostasse 1€ na Académica, receberia 8€ em caso de vitória dessa equipa (e teria um lucro de 7€). Quem apostasse 3€ no Porto, receberia 4€ (tendo um lucro de apenas 1€ — acreditava-se muito na vitória do Porto e com razão ...).

Repare-se que, como é natural, quanto menos provável é o acontecimento maior é o lucro caso ele se verifique.

A primeira pergunta que se põe é: como aparecem estes números?

Não é fácil responder. Para o tentar, façamos o seguinte.

Comecemos por somar as três cotações:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$$

Obtemos um número maior do que 1 (veremos adiante porquê).

Vamos dividir cada cotação por este número:

Académica: $\frac{1}{8}\div\frac{9}{8}=\frac{1}{9}$

Empate: $\frac{1}{4}\div\frac{9}{8}=\frac{2}{9}$

Porto: $\frac{3}{4}\div\frac{9}{8}=\frac{6}{9}$

Agora, a soma destes três números já dá (tinha de dar ...) 1. Podemos admitir que cada um destes resultados é a *probabilidade* do acontecimento respectivo.

Aqui temos de parar por momentos. É impossível saber qual é a probabilidade de a Académica ganhar o jogo. Essa probabilidade existe mas não existe qualquer hipótese de a determinar. No entanto, para o organizador das apostas, o que interessa não é a verdadeira probabilidade do acontecimento mas sim a maneira como os apostadores, na globalidade, estão a colocar o seu dinheiro. E eles estão apostar muito no Porto e pouco na Académica. Ou seja, os números

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \text{ e } \frac{6}{9}$$

são as frequências com que as apostas estão a ser feitas em cada uma das três possibilidades de resultado. Ou seja, por cada 9€ apostados, 6€ são no Porto, 2€ no empate e 1€ na Académica. Portanto,

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \text{ e } \frac{6}{9}$$

são as *probabilidades* que os apostadores atribuem, colectiva e inconscientemente, aos três acontecimentos.

E veja-se agora o que acontece do ponto de vista do organizador, por cada 9€ apostados:

- 1€ foi na Académica — se ela ganhar, paga-se 8 e tem-se 1 de lucro,
- 2€ no empate — se isso acontecer, paga-se 8 e tem-se 1 de lucro,
- 6€ no Porto — se ele ganhar, paga-se 8 e tem-se 1 de lucro.

Ou seja, por cada 9€ apostados, a casa tem 1€ de lucro, qualquer que seja o resultado ...

Mas esta é a situação ideal, porque as cotações são definidas à priori. Nada garante que os futuros jogadores apostem com estas frequências relativas. Se, por exemplo, começarem a aparecer mais apostas na Académica do que o previsto, a casa ganha mais em caso de empate ou de vitória do Porto mas tem prejuízo se a Académica ganhar. Então, para evitar esse risco, é preciso passar a pagar menos à Académica e mais às outras duas hipóteses: há que alterar as cotações. Só que as apostas entretanto feitas, foram-no às cotações antigas e portanto os lucros não são garantidos ...

No entanto, para uma casa de apostas que recebe milhares de apostas e vai fazendo regularmente as actualizações das cotações, é claro que o lucro está praticamente garantido (embora haja sempre o risco de, à última hora, aparecer uma grande aposta que já não seja possível contrabalançar).

Voltemos ao caso do Académica–Porto, em que a soma das cotações é

$$\frac{9}{8}$$

ou 1,125. Aqueles 0,125 que excedem a unidade representam a margem de segurança do organizador: se não houvesse flutuações nas frequências com que os apostadores jogam nos três resultados possíveis, a casa teria um lucro de

$$\frac{0,125}{1,125} = \frac{1}{9} = 0,111$$

ou 11%. Devido a essas flutuações, o lucro esperado vai ser inferior a 11%.

Uma última questão: e no início, antes de haver qualquer aposta, como são as cotações? Começarão no princípio as cotações por ser todas iguais?

Não, isso seria um enorme risco para o organizador. As cotações iniciais são definidas pelo organizador em função daquilo que ele pensa que os apostadores irão fazer. E depois, de acordo com a forma como as apostas forem feitas, as cotações vão sendo corrigidas.

As cotações do Euro 2004

Veja-se agora quais eram, naquela casa de apostas, as cotações antes do Euro 2004 começar.

País	Cotação
França	1 / 4
Itália	1 / 5,5
Portugal	1 / 6
Espanha	1 / 7
Inglaterra	1 / 8
Holanda	1 / 9
Rep. Checa	1 / 13
Alemanha	1 / 17
Suécia	1 / 26
Dinamarca	1 / 34
Bulgária	1 / 41
Croácia	1 / 41
Suíça	1 / 41
Grécia	1 / 51
Rússia	1 / 51
Letónia	1 / 151

Repare-se que a Ladbrokes estava a pagar melhor do que eu pela Grécia, mas eu na Bulgária e na Suíça pagava mais ...

Se somarmos estas cotações todas obtemos 1,3001. A margem de segurança era, nesta altura, de 0,3001. Ao longo do tempo, fui voltando a esta página da Internet e reparei que, devido ao afluxo de apostas, a Ladbrokes foi diminuindo a margem de segurança.

No meu caso, a margem de segurança teve de ser maior porque o meu número de apostas é muito pequeno: apenas tive 116. E nunca consegui o equilíbrio que me assegurasse, à partida e independentemente de quem fosse campeão, um lucro garantido. Houve três países que me estiveram a dar prejuízo enquanto não foram eliminados. Felizmente nenhum deles foi a Grécia ...

Nota

(1) Na realidade, a forma de apresentar as cotações é diferente desta. O que lá aparecia era: Académica 1/7, empate 1/3, Porto 3/1. Isto significa que, se apostar 1€ na Académica e ganhar, recebo esse euro de volta e um prémio de 7€. No caso da vitória do Porto, por cada 3€ apostados recebe-se 1€ de prémio, além do reembolso dos 3€ da aposta.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Vergílio Ferreira, Lisboa

Dois jogos para o tabuleiro deste número

Propomos dois jogos para o mesmo tabuleiro, ambos tradicionais do sul da Índia e do Sri Lanka. São ambos jogos de guerra mas o primeiro tem a característica pouco comum de ser disputado entre forças desiguais, com objectivos e poderes diferentes, pertencendo por isso à categoria dos jogos de caça.

Vacas e Leopardos

Material: Tabuleiro formado por uma grelha de 5x5 pontos ligados na ortogonal e diagonal, a que se acrescentam *triângulos* em cada lado da grelha, de acordo com a figura.

24 peças para representar as vacas; 2 peças para representar os leopardos.

Número de jogadores: 2

Objectivo. As vacas ganham se encurralarem os leopardos e estes ganham se matarem todas as vacas.

Regras: Os jogadores jogam alternadamente, começando os leopardos.

Nas duas primeiras jogadas cada jogador coloca uma peça num ponto livre do tabuleiro.

Nas jogadas seguintes, as vacas terminam a sua colocação no tabuleiro, uma a uma, e os leopardos efectuam movimentos ou capturas.

As vacas só se podem movimentar depois de estarem todas colocadas no tabuleiro (entretanto algumas podem já ter sido capturadas pelos leopardos). Os movimentos das peças devem efectuar-se para pontos adjacentes livres, sobre as ligações traçadas no tabuleiro.

Um leopardo mata uma vaca saltando por cima, na mesma linha, até ao ponto vago imediatamente a seguir à vaca. A vaca morta é retirada do tabuleiro.

As vacas não podem matar os leopardos mas devem tentar encurralá-los, de modo que um leopardo não se possa deslocar.

Variantes. Como o jogo é vantajoso para as vacas, podem inventar-se variantes, por exemplo:

- diminuir o número de vacas para 20;
- impor a regra adicional "as vacas não podem ser colocadas em nenhum dos 12 cantos do tabuleiro".

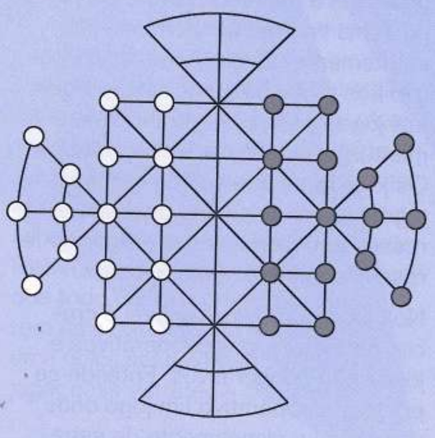
Dezasseis Soldados

Material: Tabuleiro; 16 peças brancas; 16 peças pretas

Número de jogadores: 2

Objectivo. Tomar todas as peças do adversário ou conseguir uma posição em que o adversário seja incapaz de se mover.

Regras: Colocar as peças no tabuleiro de acordo com a figura.



Os jogadores jogam alternadamente, podendo mover uma peça para um ponto adjacente vago, numa das direcções inscritas no tabuleiro, ou capturando uma peça adversária, saltando-lhe por cima para o ponto livre imediatamente a seguir.

Pode haver mais do que uma captura na mesma jogada.

Vence o jogador que:

- conseguir tomar todas as peças do adversário ou
- possuir mais peças quando for aparente que não vai haver mais capturas ou
- impossibilitar o movimento das peças do adversário.

Regra adicional: um jogador pode *comer* a peça do adversário quando reparar que ela não fez uma captura possível, sem prejuízo da sua própria jogada.

Notas. O quadrado central deste tabuleiro serve para jogar os jogos Alquerque e Bagh Chal (o jogo nacional do Nepal). Se usarmos a zona central e dois *triângulos* opostos, podemos jogar o Kungser, um jogo tibetano entre 2 príncipes governantes e 24 monges budistas (lamas).

Teoria de Jogos: Jogos de Dois Jogadores de Soma Variável

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

Os jogos que estudámos até agora eram de soma zero, isto é, os ganhos de um jogador equivalem às percas do seu oponente. No presente trabalho vamos analisar jogos de soma variável. Os jogos de soma variável são muito mais complicados que os jogos de soma nula e apresentam situações que não se verificam em jogos de soma nula. Na teoria dos jogos de soma nula é sempre possível encontrar uma solução óptima. No entanto, são os jogos de soma variável que melhor representam os conflitos da vida real que diariamente se encontram. Nesta classe de jogos não podemos afirmar *esta é a melhor estratégia que se deve usar* uma vez que não possuem uma solução universalmente aceite, isto é, não existe uma única estratégia óptima que é preferível a todas as outras. Os jogos de soma variável também não são estritamente competitivos, em oposição aos jogos de soma nula, porque tais jogos possuem, geralmente, elementos competitivos e cooperativos. Os jogadores que se confrontam em jogos de soma variável possuem interesses complementares e alguns interesses completamente opostos.

Nos jogos de soma variável é crucial distinguir jogos cooperativos e jogos não cooperativos. Entende-se por jogo cooperativo um jogo onde é possível o planeamento de estratégias em conjunto pelos jogadores — por exemplo o piloto de avião e um controlador de tráfego aéreo estão empenhados num jogo com um objectivo comum: conseguir uma aterragem segura. Nos jogos não cooperativos não é possível o planeamento de estratégias em conjunto — um vendedor de automóveis a negociar com um cliente, ambos desejam consumar a venda, ainda que discordem do preço. Saliente-se que, mesmo não havendo cooperação, os objectivos de cada jogador orientam o resultado do jogo para uma situação estável.

Dilema dos prisioneiros

A fronteira entre Teoria de Jogos pura e aplicada é vaga; alguns desenvolvimentos na teoria pura foram motivados por aplicações. É o caso do exemplo que A. W. Tucker apresentou numa audiência dirigida a psicólogos na Stanford University (1950) com o objectivo de ilustrar a dificuldade da análise de certo tipo de jogos. Este exemplo salienta a racionalidade exigida quando dois indivíduos se encontram numa posição onde a decisão de um depende da decisão do outro.

Dois indivíduos, supostos criminosos, Zé e Tony, são presos. O problema para a polícia é, partindo do princípio que existe envolvimento dos dois, e na ausência de provas, a necessidade de confissão. Presos em celas individuais e distantes, não havendo comunicação entre eles, a cada um são explicadas as regras deste caso:

- *Se nenhum dos dois opta por confessar ambos são acusados de um*

- *delito menor que implica uma pena simbólica de apenas um mês de prisão.*
- *Se ambos confessam assumindo a participação no crime, então, os dois são condenados a seis meses de prisão.*
- *Por fim, se um confessa e o outro não, então aquele que confessa é libertado imediatamente, e o outro é condenado à sentença máxima permitida pela lei: nove meses de cadeia (seis meses pelo crime e mais três por obstrução à justiça).*

As estratégias neste caso são: confessar ou não confessar. Os *payoffs* são as sentenças. Podemos expressar este exemplo usando a seguinte matriz de *payoffs*:

		Tony	
		Não confessa	Confessa
Zé	Não confessa	*(1,1)*	*(9,0)*
	Confessa	*(0,9)*	*(6,6)*

Chegados a este ponto já sabemos que Zé escolhe uma linha enquanto Tony escolhe uma coluna. Os dois números de cada célula exprimem a sentença de cada prisioneiro e correspondem ao par de estratégias por eles escolhidas. O número à esquerda corresponde ao *payoff* do prisioneiro que escolheu as linhas (Zé) enquanto que o número da direita corresponde ao *payoff* do prisioneiro que escolhe as colunas (Tony). Assim, lendo a primeira coluna no sentido descendente, se nenhum dos dois confessar, cada um é condenado a uma sentença de 1 mês, mas se Zé confessar e Tony não, Zé sai em liberdade enquanto que Tony é condenado a uma sentença de 9 meses.

Como se pode verificar este jogo não é um jogo de soma zero. Os *payoffs* dependem da estratégia escolhida por cada prisioneiro. Por esta razão o *Teorema Minimax* não se aplica. Então, como vamos resolver este jogo: *"Quais serão as estratégias racionais de forma que cada um dos criminosos minimize o tempo que irá passar na prisão?"*. Uma forma de abordar o problema, que anteriormente nos deu bons resultados, consiste em contemplar o jogo do ponto de vista de um dos jogadores.

Analisando o jogo do ponto de vista do Tony, duas coisas podem acontecer: Zé confessa ou Zé não confessa. Ora, se Zé confessa, temos:

Zé confessa	Tony não confessa	Tony é condenado com uma pena de 9 meses de prisão
	Tony confessa	Tony é condenado a uma pena de 6 meses de prisão

Por outro lado, se Zé não confessa, vem:

Zé não confessa	Tony não confessa	Tony é condenado com uma pena de 1 mês de prisão
	Tony confessa	Tony sai em liberdade

Observando as duas tabelas anteriores, concluímos que, em ambos os casos, o melhor para Tony é confessar.

Invertendo os papéis de Zé e Tony, também será melhor para Zé confessar. A solução do jogo implica pois que os dois prisioneiros confessem o crime, a racionalidade dos dois prisioneiros faz com que os mesmos escolham a estratégia de confessarem o crime.

Esta situação deve-se ao facto dos dois criminosos se encontrarem perante uma *estratégia de equilíbrio dominante*; independentemente das combinações de estratégias que cada um dos criminosos faz, a melhor escolha é sempre a mesma, *confessar* e por isso se chama *estratégia dominante*. Como os dois jogadores *jogam* a estratégia dominante, *caem* na *estratégia de equilíbrio dominante*. Desta forma, podemos pois concluir que todo o jogo no qual um jogador tem uma estratégia dominante tem uma única solução que consiste em jogar essa estratégia dominante.

Competição de preços

Como vimos anteriormente, se num jogo um jogador possui uma estratégia dominante a sua solução implica que essa estratégia seja a escolhida para se encontrar a solução do jogo. Mas, e no caso de jogos que não possuem estratégias dominantes? Como encontramos a respectiva solução?

Tomemos o seguinte exemplo de duopólio, baseado em W. Nutter.

Duas empresas, *VILEC* e *HIPEREL*, vendem *peças* pelo preço de 1€, 2€ ou 3€ por *peça*. Pressupõe-se que:

- *Os payoffs são os lucros, retirados todos os custos fixos; a companhia que praticar preços mais baixos tem mais clientes; a companhia que praticar preços mais baixos receberá mais lucros, com limites, que a companhia que praticar o preço mais elevado.*

A *matriz de payoffs* associada a este exemplo é:

		VILEC		
		1€	2€	3€
HIPEREL	1€	*(0,0)*	*(50,–10)*	*(40,–20)*
	2€	*(–10,50)*	*(20,20)*	*(90,10)*
	3€	*(–20,40)*	*(10,90)*	*(50,50)*

Como se pode verificar este jogo não é um jogo de soma zero. Os lucros poderão ser de 100€, 40€, 20€ ou 0€, dependendo da estratégia escolhida por cada empresa. Por outro lado, podemos verificar que não existe nenhuma estratégia dominante atendendo ao seguinte raciocínio: *se VILEC escolhe um preço de 3€, então para HIPEREL o melhor preço é 2€, mas, para este preço de HIPEREL, 1€ será o melhor preço para VILEC.*

Uma vez explorados os conceitos de equilíbrio estudados até agora podemos constatar que nenhum nos soluciona o problema. De facto torna-se necessário definir um novo conceito de equilíbrio para solucionarmos este tipo de jogos — *Equilíbrio de Nash* — conjunto de estratégias tal que nenhum jogador pode melhorar o seu *payoff* através de uma mudança unilateral da sua estratégia.

Apliquemos esta definição ao nosso jogo. Examinando, por exemplo, a estratégia relativa à escolha de preço de 3€ para cada uma das empresas, concluímos que cada empresa pode beneficiar reduzindo o preço desde que a sua concorrente mantenha a sua estratégia inalterada. Considerando agora a estratégia correspondente ao preço de 3€ para *HIPEREL* e 2€ para *VILEC*, pode fazer-se um raciocínio análogo ao anterior: *HIPEREL* pode beneficiar reduzindo o seu preço para 1€. Continuando esta análise eliminamos todas as estratégias excepto o par em que ambas as empresas colocam o preço em 1€.

Assim conclui-se que o *equilíbrio de Nash* neste jogo corresponde ao par de estratégias de menor preço.

É difícil jogar jogos que representam a vida real

Um dos elementos mais importantes do jogo é a personalidade dos participantes, e é evidente que duas pessoas não reagem sempre da mesma maneira perante uma situação idêntica. Portanto, se queremos ter uma probabilidade de acertar nas nossas predições, para além de analisarmos as regras formais de um jogo, é necessário que estudemos as atitudes dos jogadores. Esta é, de facto, uma tarefa realmente complicada.

Olhando de novo o Dilema do prisioneiro, por exemplo, constatamos que a solução a que chegamos pode não ser a mesma se não partirmos do pressuposto que os jogadores agem racionalmente ou se supusermos que os prisioneiros podem comunicar entre si. Por esta razão, nesta classe de jogos não podemos afirmar *esta é a melhor estratégia que se deve usar* uma vez que não existe uma estratégia que seja claramente preferível às outras, nem existe um resultado único, definido e previsível.

O modo útil de pensar em jogos de soma variável é entendê-los como alegorias. As alegorias são úteis na medida em que nos ensinam a aplicar o que aprendemos numa situação simples a situações mais complicadas como as que encontramos na vida real.

Qual das caixas fortes assaltar? — Solução

O vigilante deve dirigir-se 90 vezes em cada 100 vezes à caixa forte que contém 90.000€ (que é a mais apetecível para o ladrão), mas o ladrão tentará roubar 90 vezes em cada 100 vezes a caixa forte que contém os 10.000€ (que é a que supõe menos vigiada). Logo *payoff esperado* para o assaltante será 9.000€.

Bibliografia

[1] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[2] Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] Dresher, Melvin, *Games of strategy: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

[6] Luce, Ducan R.; Raiffa, Howard, *Games and Decisions*, New York, John Wiley and Soons, 1957.

[7] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[8] Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*; Oxford University Press, 2000.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu, Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

Materiais para a aula de Matemática

Métodos de apoio à decisão — Plinio, *o Jovem*

A actividade apresentada faz parte do conjunto de materiais utilizados nos Círculos de Estudo realizados no âmbito do *Acompanhamento do Programa Ajustado de Matemática do Ensino Secundário*, para apoiar a implementação do programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS).

Foi construída por um grupo de acompanhantes e adaptada de: Steen, L. A. (coord). *For all Practical Proposes — Introdutions to Contemporary Mathematics*. COMAP. W. H. Freeman and Company. New York. 1991.

Esta proposta está formulada para alunos, como actividade possível de ser trabalhada em sala de aula. Não foi ainda experimentada. A mesma situação pode originar tarefas diferentes. Por exemplo, pode ser interessante explorar as seguintes questões:

1a. Que aconteceria se as três hipóteses fossem votadas em simultâneo?

1b. E se as três situações fossem voadas duas a duas? Que poderia acontecer?

2. O que seria de esperar que acontecesse se houvesse uma primeira votação *inocente vs culpado*, eventualmente seguida de outra para decidir qual a pena a aplicar?
3. Se se optasse por votar preliminarmente qual a pena a aplicar no caso de culpa, que seria de esperar para o réu?
4. Que comentário te sugere este conjunto de cenários e suas consequências?

Ana Vieira Lopes e Otília Moreirinha

Escola..

Ano/Turma........................ Data................... Aluno(a).........................

Métodos de apoio à decisão

Plínio, o *Jovem*

Quase dois séculos atrás o historiador Gaius Plinius Caecilius Secundus (61 ou 62–113) — conhecido como Plínio, o jovem — debatia-se com um dilema em torno de uma questão de votações:

Tudo começara quando o cônsul Afranius Dexter foi encontrado morto e as suspeitas recaíram sobre os seus escravos libertos.

De acordo com uma moção colocada ao Senado, Dexter poderia ter morrido ou pelas próprias mãos ou pela mão dos seus *ex*-escravos e, neste caso, poderiam tê-lo feito em obediência aos desejos do próprio Dexter ou não.

Se, após o inquérito, se pensasse ser caso de suicídio, os *ex*-escravos seriam considerados inocentes e consequentemente libertados; caso contrário seriam condenados ou ao desterro ou à morte conforme a morte tivesse sido ou não a pedido do próprio Dexter.

Supondo que as opiniões dos senadores se distribuíam desta forma,

libertação	desterro	execução
40%	35%	25%

discute os diversos cenários possíveis para a votação no Senado e descobre o que pode ter acontecido aos escravos libertos. Comenta.

Adaptado de materiais da Formação de Acompanhantes Locais dos novos Programas de Matemática, Dezembro de 2001

Programa de Empréstimo

TEXAS INSTRUMENTS

education.ti.com/portugal

A Texas Instruments disponibiliza empréstimos de calculadoras e acessórios aos professores de matemática e ciências. Os empréstimos terão uma duração máxima de duas semanas, estão sujeitos à disponibilidade do material e tem como objectivo principal a realização de acções de formação e workshops.

Os seguintes **produtos estão disponíveis:**

- TI-83 Plus
- TI-89
- TI-92 Plus
- Voyage 200™
- Calculator-Based Laboratory™ (CBL™) System
- CBL 2™
- Calculator-Based Ranger™ (CBR™) System
- Cabri Geometry II™
- TI Presenter™

Poderá pedir sensores para a sua acção com o CBL. Pode pedir posters, transparências e literatura para distribuir aos participantes durante a sua acção.

Lista de Sensores	Ref #	Lista de Sensores	Ref #
Acelerómetro até 25g	ACC-DIN	Sensor de pressão de 0 a 2.1 atm	GPS-BTA
Acelerómetro de 3 eixos	3D-BTA	Detector de batimentos cardíacos	HRM-DIN
Barómetro	BAR-DIN	Microfone	MCA-CBL
Colorímetro	COL-DIN	Sensor de PH	PH-DIN
Conductividade	CON-DIN	Sensor de humidade relativa	RH-DIN
2 amperímetros e 2 voltímetros	CV-DIN	Monitor de radiações	SRM-DG
Temperatura	DCT-DIN	Termopar tipo K-temperaturas de -200 a 1400°C	TCA-DIN
Sensor de força de duplo alcance	DFS-DIN	Sensor de luminosidade TI	CBL/CA/C
Sensor de electrocardiograma	EKG-DIN	Sensor de voltagem TI	CBL/CA/G
Monitor de batimentos cardíacos para exercício	EHR-DIN	Sensor de campo magnético	MG-DIN
Sensor de fluxo da água	FLO-CBL	Detector de movimento por ultrasons	MD-CBL

USUFRUIR DOS NOSSOS EMPRÉSTIMOS É GRÁTIS E FÁCIL!

As calculadoras e o ViewScreen™ (caso seja pedido), serão entregues pela nossa transportadora em mala própria, um dia ou dois antes do começo da sua acção. No fim, apenas terá de arrumar as calculadoras na mala, colar a etiqueta fornecida e telefonar para o serviço de entregas para fazer o levantamento.

Não se esqueça de nos contactar pelo menos com um MÊS DE ANTECEDÊNCIA.

CARTA: CSC (Centro de Suporte ao Cliente) C/o Sitel Belgium Woluwelaan 158–1831 Diegem — Bélgica

TELEFONE: 800 832 627 (número gratuito) | **FAX:** 21 424 51 30 | **E-MAIL:** ti-loan@ti.com | **INTERNET:** http://education.ti.com/portugal/apoio/pemprestimo/

Se quiser fazer o pedido por fax ou carta, por favor preencha o formulário seguinte:

Nome: ____________________ Escola e cursos ensinados: ____________________

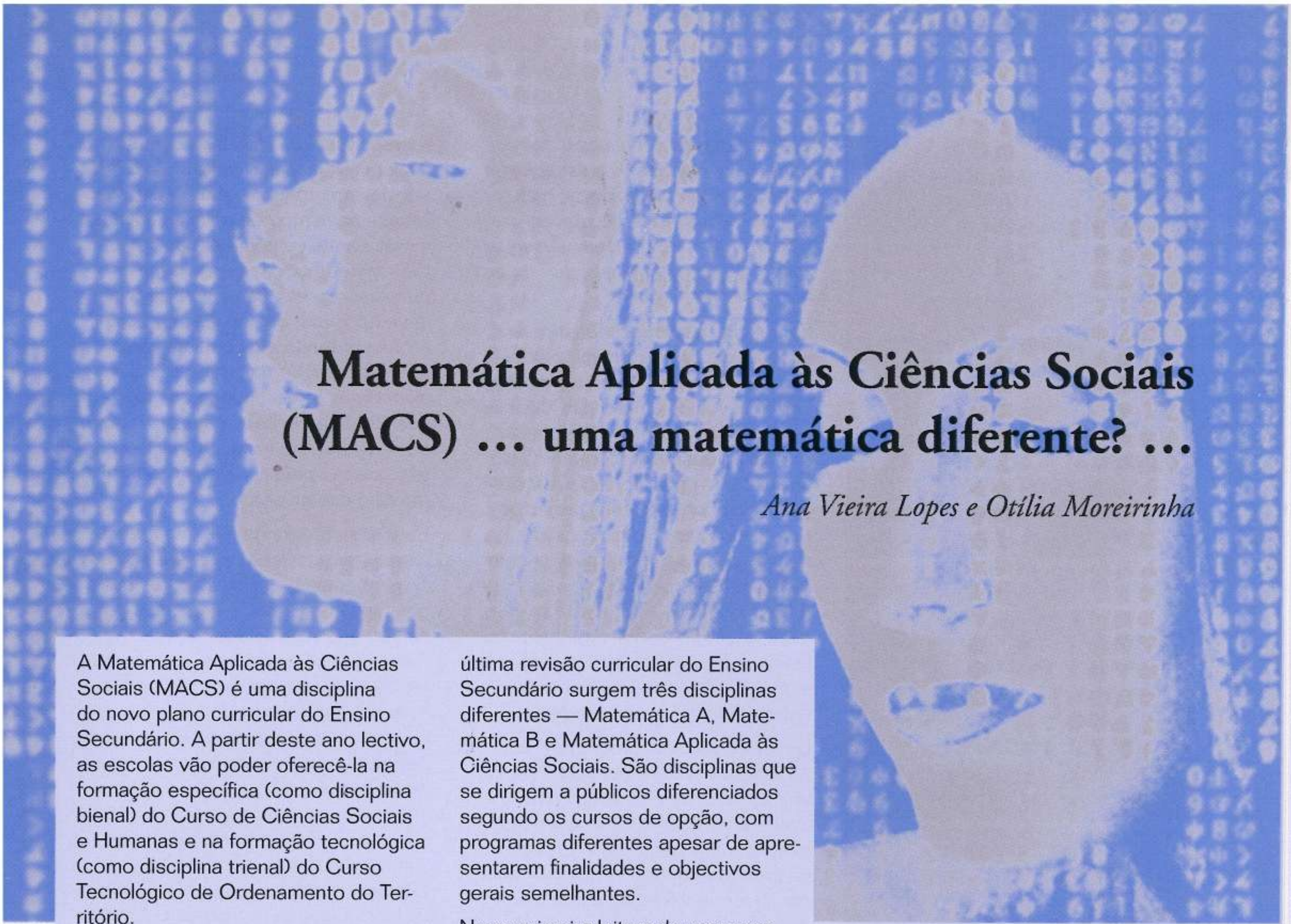
Data do inicio da formação: ____________________ Data do fim da formação: ____________________

Telefone (escola): ____________________ Telefone (casa): ____________________

Morada: ____________________ Fax: ____________________

E-mail: ____________________

Produtos Necessários	Quantidade	C/ Viewscreen (Sim ou Não)



Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) ... uma matemática diferente? ...

Ana Vieira Lopes e Otília Moreirinha

A Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) é uma disciplina do novo plano curricular do Ensino Secundário. A partir deste ano lectivo, as escolas vão poder oferecê-la na formação específica (como disciplina bienal) do Curso de Ciências Sociais e Humanas e na formação tecnológica (como disciplina trienal) do Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

Em Portugal não há tradição de coexistirem diferentes disciplinas de Matemática no ensino secundário. Os Métodos Quantitativos, disciplina anual de frequência obrigatória para todos os alunos que não tinham no seu plano curricular Matemática, podem, talvez, ser considerados como uma primeira experiência para diversificar a oferta em termos da aprendizagem da Matemática. Nesta última revisão curricular do Ensino Secundário surgem três disciplinas diferentes — Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais. São disciplinas que se dirigem a públicos diferenciados segundo os cursos de opção, com programas diferentes apesar de apresentarem finalidades e objectivos gerais semelhantes.

Numa primeira leitura do programa de MACS o que salta à vista, logo na introdução, é o conjunto de temas propostos. O primeiro tema, Métodos de Apoio à Decisão, é um tema *novo* que suscita curiosidade pois envolve a Matemática no estudo de aspectos da vida social e política até agora não abordados de forma sistemática neste nível de ensino. Por exemplo, os sistemas eleitorais são estudados na disciplina de História, do ponto de vista da sua evolução e diversidade, ligados ao estudo dos vários regimes sociais e políticos mas sem qualquer referência aos aspectos matemáticos envolvidos. É um tema importante na área das Ciências Sociais e que habitualmente só é abordado no ensino superior, em contextos específicos.

"Ao definir o currículo de uma disciplina desta índole, também se tem em vista propósitos de Educação para a cidadania e o papel importante assumido pela Escola, para esse fim. (...)
De entre inúmeros assuntos interessantes que ligam a Matemática à vida de todos os dias, foram seleccionados alguns que são potencialmente mais aliciantes, nomeadamente:

1. Métodos de Apoio à Decisão
   - Teoria Matemática das Eleições (módulo inicial)
   - Teoria da Partilha Equilibrada
2. Modelação Matemática
   - Modelos de Crescimento Populacional (linear e não linear)
   - Modelos Financeiros
   - Modelos de Grafos
3. Estatística (e Probabilidades)"

(in *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*)

Os *Métodos de Apoio à Decisão* são uma área da Matemática Discreta que envolvem o estudo de problemáticas que nos são familiares, como por exemplo os sistemas eleitorais, a partilha de bens, a constituição de comissões representativas, os jogos, etc. mas cujo estudo não faz habitualmente parte dos programas das disciplinas curriculares. Utilizar ferramentas matemáticas para analisar e comparar sistemas eleitorais, para resolver problemas de partilhas ou para definir critérios de representatividade em comissões ou ainda para discutir problemas clássicos, como o da divisão dos camelos de Malba Tahan, é um dos desafios que este programa coloca. A Matemática envolvida no

"Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:
— Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução
(...)
— Seleccionar estratégias de resolução de problemas
— Formular hipóteses e prever resultados
— Interpretar e criticar resultados no contexto do problema
(...)"
(in *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*)

"As provas escritas (ou testes) tradicionais de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos (...) perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação"
(in *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*)

"(...) como os temas não são habituais e como as metodologias envolvem problemas reais e projectos que intersectam naturalmente outras áreas disciplinares, poderão surgir novas dificuldades. Tem-se consciência de que a implementação deste programa só poderá ser feita gradualmente, devendo os professores esforçar-se por cumprir mais cabalmente os objectivos propostos de ano para ano."
(in *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*)

tratamento destas questões é de nível elementar, mas a sua abordagem, tal como é preconizada no programa, é exigente do ponto de vista das capacidades e aptidões que os alunos vão ter que mobilizar. O programa refere estas capacidades, na introdução, quando define os objectivos gerais e as competências a desenvolver.

O programa valoriza o tratamento matemático de *"problemas da vida real, mais numa perspectiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica"*, refere que *"os estudantes devem usar correctamente o vocabulário e simbologia específicos da Matemática"* mas esclarece que estes não devem ser o centro da aprendizagem, secundarizando o desenvolvimento de *"rigores formais"*.

Em relação ao tema *Estatística e Probabilidades* o programa propõe que os exemplos a trabalhar sejam significativos no âmbito das Ciências Sociais. Na Estatística é retomado o trabalho desenvolvido no 3º Ciclo, tendo como ponto forte *"a elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola"* abrindo caminho para trabalhar com modelos de regressão linear. Só mais tarde, depois de algum trabalho de modelação, se voltará ao tema Estatística (e Probabilidades) para abordar alguns modelos de Probabilidades e entrar na *Inferência Estatística*.

Um outro tema do programa é a *Modelação Matemática*. Os alunos vão trabalhar em diversos contextos, analisando fenómenos como o crescimento de populações — modelos de crescimento populacional — estudando a rentabilização de recursos, desde os financeiros — modelos financeiros — à organização de redes de venda e distribuição — modelos de grafos. Com este tema *"pretende-se mostrar como alguns modelos matemáticos, ainda que simples, podem ser úteis"*.

É um programa de natureza diferente daqueles com que temos trabalhado, que exige na sala de aula metodologias diferentes das tradicionais e um sistema de avaliação articulado com a prática desenvolvida.

As propostas de trabalho devem explorar situações o *mais reais possível*, devem proporcionar o debate de ideias, momentos de reflexão escrita e oral. Como se pode ler nas sugestões metodológicas gerais o maior ou menor aprofundamento dos temas deve depender das opções de cada professor tendo em conta as características das turmas e os recursos disponíveis, pressupondo que existe a possibilidade de usar materiais e equipamentos diversificados. A avaliação tem que ser pensada em função do trabalho desenvolvido.

Sendo um programa que, à partida, parece ter condições para ser interessante e permitir envolver alunos que normalmente são afastados da matemática sem terem adquirido uma formação básica nesta área, representa também um desafio para nós professores. A par de expectativas naturais perante uma situação nova muitos de nós sentiremos provavelmente alguma insegurança até porque em muitos casos a exigência do programa poderá colidir com factores adversos como a insuficiência de recursos e apoios. Em muitas escolas, só um professor irá leccionar este programa, o que não é, à partida, uma situação confortável, nem favorece um trabalho conjunto com outros professores. Por outro lado, sabemos que tem havido alguma formação, que há alguns materiais e que existe alguma bibliografia em português (apesar de predominar a de língua inglesa). Não temos uma situação ideal, temos mais um desafio! ...

Ana Vieira Lopes
E. S. Passos Manuel
Otília Moreirinha
E. S. Seomara da Costa Primo

Algumas páginas de Internet que podem ter interesse para além das referidas na bibliografia do programa:

www.cne.pt — Página da Comissão Nacional de Eleições com acesso a legislação referente aos vários actos eleitorais existentes em Portugal, publicações, ...

www.stape.pt — Pág. do Secretariado Técnico dos Assuntos para o processo Eleitoral com acesso a legislação, dados sobre recenseamento eleitoral, resultados de eleições e referendo, ...; simulação do Método d' Hondt e *motor de busca*.

www.sci.wsu.edu/math/Lessons/Voting/ — Página sobre diversos Métodos de eleição com exemplos e nalguns casos permitindo simulações do Departamento de Matemática da Washington State University.

Investigando com cálculos repetidos

Celina Pereira

Cálculos repetidos (1)

Quando se coloca um cálculo simples no computador ou na calculadora e em seguida se faz a repetição do mesmo cálculo várias vezes, podem acontecer coisas aparentemente estranhas. Vais investigar algumas delas recorrendo à calculadora.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
2. Pressiona a tecla [ENTER]
3. Pressiona:
   + (verifica que surgiu ANS+)
   2
   x
   3
   [ENTER]
4. Continua a pressionar [ENTER]
5. Regista os novos números. Descobre uma lei de formação.
6. Faz variar o valor que introduziste inicialmente e repete o processo. Confirma se a tua lei de formação continua válida e se constitui um bom processo para calcular um termo de qualquer ordem.

Cálculos repetidos (2)

Modificar levemente as coisas pode fazer uma grande diferença no que acontece. Esta experiência utiliza os mesmos números e sinais, mas a ordem é diferente. O que é que achas que acontecerá desta vez? Pensa antes de fazeres.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o.
2. Pressiona a tecla ENTER
3. Pressiona:
   * (verifica que surgiu ANS*)
   3
   +
   2
   ENTER
4. Continua a pressionar ENTER. Se continuasses a pressionar ENTER durante muito tempo o que é que achas que aconteceria?
5. Faz variar o valor inicial que introduziste e repete o processo. Confirma-se a tua previsão anterior ou não?
6. Cada um dos novos números que te aparecem é um termo de uma sucessão. Regista, de uma forma organizada, o processo de geração de números feito pela calculadora (Sugestão: Se indicares as operações sem efectuar os cálculos perceberás melhor o processo de geração).
7. Compara os teus resultados com os dos teus colegas. São semelhantes ou diferentes? Em quê? Porquê?

Cálculos repetidos (3)

Os matemáticos querem sempre descobrir mais acerca da matemática. Por isso, continuam a mudar as coisas para descobrir o que acontecerá. Desta vez fez-se outra alteração.

Sê como um verdadeiro matemático.

Experimenta, olha, pensa.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
2. Pressiona ENTER
3. Pressiona:
   / (verifica que surgiu ANS /)
   2
   +
   3
   ENTER
4. Continua a pressionar ENTER
5. Faz variar o valor inicial que introduziste e repete o processo. És capaz de fazer uma conjectura para o que aconteceu?
6. Experimenta com outros números. Confirma-se a tua conjectura?
7. Discute os resultados com os teus colegas.

Contextualizando a tarefa

No ano lectivo 2003/04, leccionei Matemática a três turmas do 11° ano. No início de Maio, quando me preparava para iniciar o último tema do programa, Sucessões, decidi realizar com os alunos uma tarefa de investigação que me tinha cativado desde o primeiro momento — foi mesmo amor à primeira vista.

Em traços gerais, trata-se de efectuar, com a calculadora uma determinada sequência de cálculos, repetir as vezes que for necessário e observar e analisar os números obtidos. Esses números constituem sequências ou sucessões que podem ser analisadas de forma diferente quando se conhecem e dominam os conceitos relacionados. Mas eu decidi propor a tarefa aos alunos antes de iniciar o novo tema. Penso que nessa altura os seus raciocínios não estão *viciados* em novos conceitos e procedimentos e, daí, a minha curiosidade em relação à forma e à linguagem com que os resultados iriam ser apresentados.

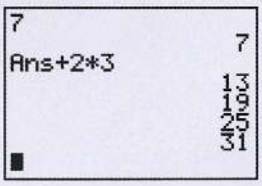
A tarefa foi realizada numa aula de 45 minutos, em grupos de 3 ou 4 alunos, com indicação para todos registarem as notas que julgassem convenientes, pois na aula seguinte deviam entregar-me os correspondentes relatórios individuais, podendo, por isso, continuar as investigações em casa, se assim o entendessem. Por condicionantes de horários, numa das turmas, os ditos 45 minutos eram a primeira parte de um bloco de 90. Como já estávamos em contagem decrescente para o final das aulas e havia um tema inteiro para leccionar, aproveitei a segunda parte desse bloco para introduzir alguns conceitos relativos às Sucessões. Como era de esperar, alguns alunos incorporaram no seu relatório alguns desses conceitos. Na totalidade das outras duas turmas, apenas uma aluna apresentou alguma notação específica das sucessões (ainda não apresentada na aula) após consulta efectuada ao manual escolar, o que, aliás, é seu hábito.

Durante a realização da tarefa não surgiram dificuldades na interpretação das instruções contidas no enunciado. Foi gratificante observar as reacções de satisfação dos alunos quando faziam alguma descoberta significativa, me solicitavam no sentido de se assegurarem de que iam no bom caminho e eu os incentivava a continuar, colocando, eventualmente, questões que os ajudassem a prosseguir.

Os relatórios

A sequência obtida na primeira exploração consistia num conjunto de termos de uma progressão aritmética de razão 6 (2x3).

A maioria dos alunos referiram que se



iam obtendo números de 6 em 6 e, como lei de formação, indicaram, simplesmente, $x+6$ ou $y=x+6$. Houve, no entanto, respostas mais completas:

- $z=y+x(2\times 3)$, em que y é o número escolhido e x o número de vezes que a operação foi repetida *(Jóni, 11°C)*

- $y = x + 6 \times n \Leftrightarrow y = x + 6n$
  Em que:
  x: é o número escolhido
  y: é o resultado obtido quando se repete o processo
  n: nº de vezes que se repete o processo *(Ana Isabel, 11ºB)*
- *"qualquer que seja o número, é igual ao seu anterior adicionado de 6 unidades" (Inês Prata, 11ºF) (João Nobre, 11ºC)*

$$\begin{cases} t_1 = b & \text{(sendo } b \text{ um número qualquer);} \\ t_n = t_{n-1} + 6 & n > 1. \end{cases}$$

Em relação à segunda investigação dos cálculos repetidos, a maioria dos alunos registou a lei de formação de forma correcta.

Eis alguns exemplos:

```
13
             13
Ans*3+2
             41
            125
            377
           1133
```

"A lei é o número anterior multiplicado por A (neste caso é 3) e só depois lhe é somado B (neste caso 2)" *(João Nuno, 11ºB)*

"... tendo um número qualquer na operação inicial, o resultado do número seguinte vai ser sempre a sua multiplicação por x mais a soma de y" *(Ana Moita, 11ºB)*

"... os resultados obtidos servem de ponto de partida para a repetição do processo, o qual pode ser traduzido pela expressão $x \times 3 + 2$, onde x representa um termo qualquer da sucessão, ao qual é aplicada aquela operação" *(Diana, 11ºB)*

"... o modo de formação é multiplicando o resultado anterior por 3 e somando 2, pelo que se pode concluir uma definição por recorrência $t_n = (t_{n-1} \times 3) + 2, n > 1$, em que $t_1 = x$." *(Pedro Silva, 11ºC)*

Quanto à conclusão relativa às sequências obtidas, a maioria dos alunos referiu que se obtinham

```
     1807962281
     5423886845
1.627166054E10
4.881498161E10
1.464449448E11
4.393348345E11
1.318004504E12
```

"números cada vez maiores", mas também houve quem concluísse que não era bem assim:

"... para números iniciais positivos, os resultados obtidos são sempre superiores ao resultado anterior e que para números iniciais negativos, os resultados obtidos são sempre inferiores ao resultado anterior" *(Ana Fajardo, 11ºC)*

"Ao pressionarmos continuamente a tecla Enter, o número tornar-se-á cada vez maior (...), pois ao fim de algum tempo começam a ser escritos sob a forma de potência. Se o número inicial for negativo, o resultado é exactamente ao contrário, uma vez que quanto mais pressionarmos a tecla Enter, o resultado será um número cada vez mais pequeno." *(Nádia, 11ºF)*

A terceira investigação era a mais desafiante. E as relações descobertas pelos alunos foram também as que mais me surpreenderam.

```
50
             50
Ans/2+3
             28
             17
           11.5
           8.75
```

Os alunos descreveram, com mais ou menos pormenores o que observaram:

"Ao variarmos o valor de x, concluímos que o resultado continuava a tender para 6. Ex.: $\pi/2 + 3 \times 6$; $5/2 + 3 \times 6$; $10/2 + 3 \times 6$.

```
           8.75
          7.375
         6.6875
        6.34375
       6.171875
      6.0859375
     6.04296875
```

Contudo, observámos uma pequena diferença, quando estudámos pormenorizadamente os números 5 e 10. Quando $x > 6$, o resultado inicial maior que 6. Ao longo das vezes que pressionámos no Enter, esse número diminuía e tendia para 6. Por outro lado, quando $x < 6$, acontecia o oposto, isto é, o resultado começava menor que 6, até que tendia para este valor. *(Ana Marguerita, 11ºC)*

```
     6.00000002
     6.00000001
    6.000000005
    6.000000003
    6.000000001
    6.000000001
              6
```

Quando a aluna escreve, por exemplo, $5/2 + 3 \times 6$, quer dizer que ao considerar 5 o número inicial, dividindo-o por 2 e adicionando 3 ao quociente e repetindo o processo algumas vezes, obtém-se uma sequência de números que tendem para 6.

"Tal facto acontece apenas quando o número pelo qual se divide não é 1, pois, deste modo, estaríamos apenas a adicionar o número que lhe seguia, nunca obtendo um número que não mudasse mais" *(Sandra, 11ºB)*

Ou

"Quando $a = 1$, a sequência nunca atinge um valor constante, pois a operação é reduzida a uma simples adição" *(Diana, 11ºB)*

Os alunos formularam conjecturas e testaram-nas:

"Basta agora determinar uma maneira de chegar a esse número, estudando a sua origem. Será que o 6 provém de 2×3? Ao experimentar com outros números concluí que não." *(Ana Isabel, 11ºB)*

Uns tentaram compreender o que acontecia:

"Ora, aqui veio uma surpresa. Aparentemente, qualquer que seja o valor de x, quanto mais se avança na sucessão, mais esta se aproxima de 6. Porquê? Para descobrir isso, constatámos que 6 era o número que não se alterava aplicando a operação, pelo que o tomámos como referência. Se o número inicial fosse maior que a referência, dividi-lo por 2 faria com que se *cortasse* mais que 3, metade da referência, pelo que ao somar 3 isto iria criar uma aproximação a 6 que deixaria o resultado mais próximo de 6 que antes, repetindo-se o processo. Se o valor inicial fosse menor que a referência, dividi-lo por 2 iria *cortar* menos que 3, pelo que ao adicionar 3 o resultado se aproximaria de 6 e por aí adiante" *(Pedro Silva, 11ºC)*

Alguns dos alunos que encontraram uma expressão para o valor do limite da sucessão, justificam-na como resultado de v rias tentativas. Essa expressão assumiu diferentes formas (equivalentes):

$$\frac{y \times z}{y-1} \text{ ou } \frac{y}{x-1} + y$$

Mas houve quem pormenorizasse essas tentativas:

Outro padrão encontrado foi o modo como se obtêm os números para que o resultado tende. (...) No caso do 2 a dividir, foi fácil perceber a relação: era sempre a multiplicar: $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 5 = 10$, etc. Nos outros foi mais difícil pois obtínhamos os números na forma decimal e não encontrávamos padrão. Só aquando de uma dica da professora para pormos os números em fracção é que reparámos que o modo era igual, era também a multiplicar. No entanto, era só para o numerador. Todos os resultados em fracção davam para o denominador o mesmo número. Esse número com o 3 a dividir era sempre 2, para o 4 era 3, para o 5, era 4 (...) sempre um número abaixo do número que estava a dividir na expressão inicial. Uma fórmula para descobrirmos o número para o qual vai tender o resultado é: (tendo em conta que o x é o número que está a dividir e y o que está a somar) $x * y/(x-1)$." *(Ana Moita, 11ºB)*

Depois das tentativas iniciais houve quem encontrasse um raciocínio lógico que justificasse o limite obtido em cada caso:

"... depois de pressionarmos o Enter várias vezes, o resultado ia-se aproximando cada vez mais de um número, até chegar a ele e não passava de lá. Assim, cheguei à conclusão que podíamos obter esse número

$$\frac{x}{A} + B = x$$

com a fórmula , pois havia um número que dividido por A e somado B iria dar a ele próprio" *(João Nuno, 11ºB)*

Diferentes relações foram descobertas por alguns grupos:

"... os resultados seguintes iriam findar em apenas um número, com a expressão inicial foi o número 6. Assim experimentámos com outros números, por exemplo $2 + 4$ e por aí adiante (com o 2 a dividir) com o fim de descobrir uma sequência. E no final descobrimos. O número para que tende era sempre par e sempre mais 2 que o anterior. Resolvemos experimentar com outros números a dividir: 3, 4, 5, ... e continuámos a achar uma sequência, no entanto sempre diferente de número para número, com o 3 a diferença entre os números para que tende o resultado era de 1,5 (3/2) para o 4 era de 1,33333... (4/3) e para o 5 era de 1,25 (5/4). Como é visível, o resultado vai diminuindo (...): 2/1, 3/2, 4/3, 5/4. (...) Se quiséssemos arranjar uma fórmula para este padrão (a diferença entre os números para o qual tende o resultado), poderíamos considerar x o numerador que vai dividir, esta seria assim: $x/x-1$. *(Ana Moita, 11ºB)*

De todos os relatórios que analisei (66, no total), o que mais me surpreendeu foi o da Nádia, do 11º F. É uma aluna de nível suficiente com alguns deslizes a níveis negativos, que acabou o ano com 12 a Matemática quando começou com 9. O grupo com que trabalhou não fez nenhuma descoberta relevante durante a aula, mas ela, em casa, continuou a investigação e fez algumas generalizações importantes, ainda que parcelares:

"Ao dividirmos um número por 2 e somando outro número z, a sucessão tenderia a aproximar-se de número $2z$.

600/2+3=303
=154,5
=80,25
=43,125
...
=6

600/2+4=304
=156
=82
=45
...
=8

600/2+5=305
=157,5
=83,75
=46,875
...
=10

Se substituirmos a expressão $y = x/2 + 3$ por $y = x/z + 2$, em que z é um número positivo ímpar, maior ou igual a 3, o y tende a aproximar-se sempre de z/k, em que k é o número de ordem de z, relativamente à sua posição na sequência dos números ímpares positivos, maiores ou iguais a 3. Assim, o número 3 corresponde ao 1, o número 5 ao 2, o número 7 ao 3 e assim sucessivamente.

200/3+2=68,667
=24,889
=10,296
...
=3 (3/1)

400/3+2=135,333
=47,111
=17,703
...
=3 (3/1)

600/3+2=193,667
=66,556
=24,185
...
=3 (3/1)

172/5+2=36,4
=9,28
=3,856
...
=2,5 (5/2)

236/5+2=49,2
=11,84
=4,368
...
=2,5 (5/2)

423/5+2=86,6
=19,32
=5,864
...
=2,5 (5/2)

78/7+2 =13,1428
=3,8775
=2,5539
...
=2,33 (7/3)

314/7+2=46,8571
=8,6938
=3,2419
...
=2,33 (7/3)

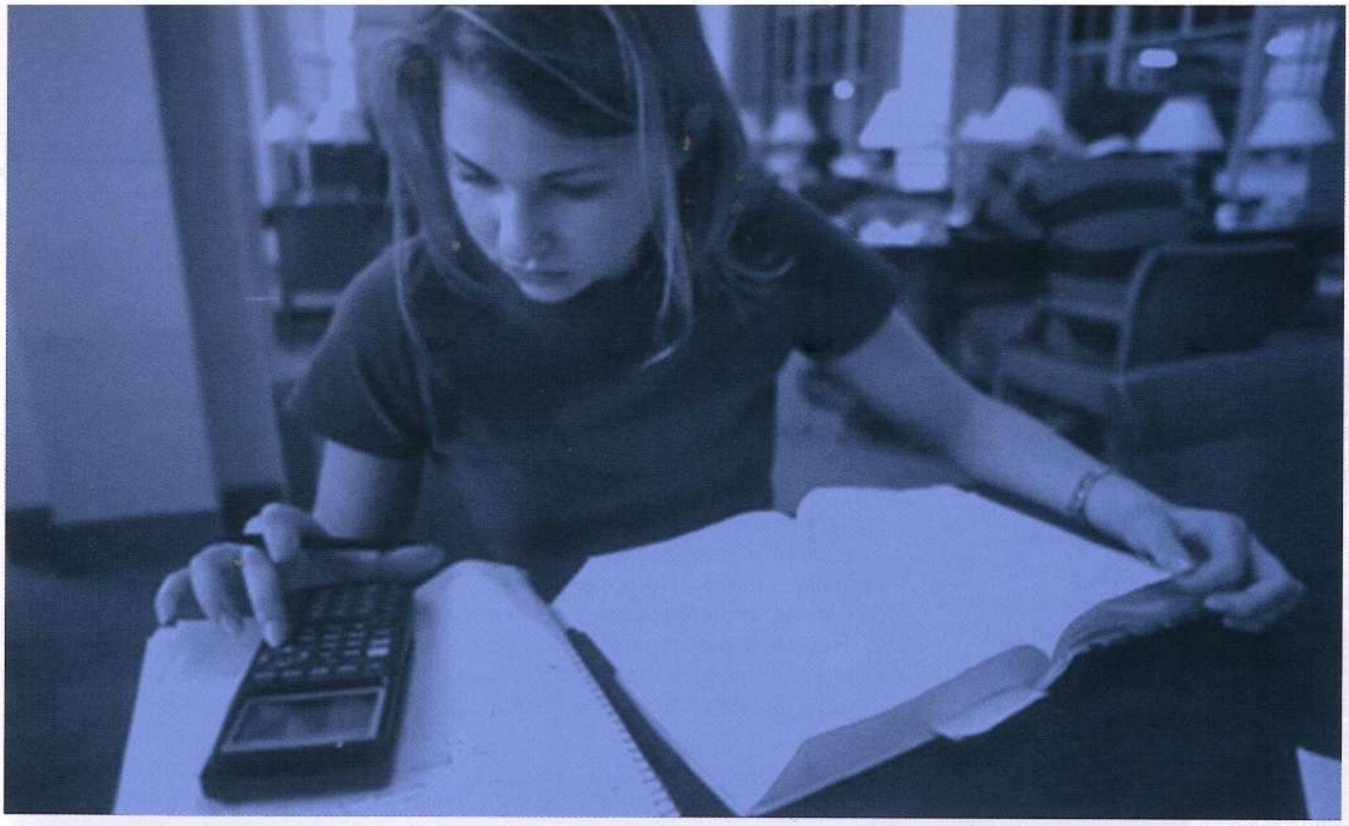
507/7+2=74,4285
=12,6326
=3,8046
...
=2,33 (7/3)

x/9+2= (...), 2,25 (7/3)

x/11+2= (...), 2,22 (11/5)

(Nádia, 11ºF)

Para completar esta exploração



apenas faltaram duas situações: considerar z um número par qualquer e z ímpar mas k qualquer, em $y = x/z + k$.

Durante a realização do trabalho de grupo, foi necessário explicar a alguns alunos que aquilo que a calculadora nos mostra nem sempre está correcto. Quando, após sucessivos Enter, aparece no visor o número 6, num primeiro impulso todos os alunos aceitaram esse valor como um valor exacto dado pela expressão com que trabalhavam. Foi uma oportunidade para lhes lembrar que a calculadora faz arredondamentos e que esse 6 não era mais que isso, devido ao número de algarismos significativos que a máquina usa nos resultados que apresenta no écran principal.

A avaliação dos relatórios

E quanto à avaliação? Como avaliar um trabalho deste tipo? É óbvio que não tenho uma resposta única, perfeita, que seja a mais justa.

Há alguns anos atrás, quando comecei a pedir aos alunos trabalhos que envolvessem redacção (composições, relatórios, ...), senti algum desconforto em relação à sua avaliação. Na altura, eu e outras colegas com quem trabalhava em conjunto e que pediam os mesmos trabalhos, começávamos por fazer uma leitura de todos os trabalhos e depois classificávamo-los qualitativamente, usando a comparação como aspecto importante na atribuição da classificação. Com o decorrer do tempo e após alguma experiência, comecei a definir critérios mais específicos, de modo a obter uma classificação quantitativa. Foi o que fiz com esta tarefa de investigação. Tentei que não fossem muito penalizadores, de modo a permitir que um aluno fraco ou médio que descrevesse alguns aspectos com um mínimo de clareza e correcção obtivesse classificação positiva.

Assim, num total de 200 pontos, reservei 140 para a apresentação dos resultados obtidos nas investigações: 40 para os cálculos repetidos (1), outros 40 para os (2) e 60 para os (3). Os restantes 60 pontos dividi-os, 30 para os aspectos matemáticos envolvidos e 30 para os aspectos linguísticos e a organização da exposição. Depois de classificados os trabalhos, ao analisá-los e às respectivas classificações, não senti que destes critérios tivessem resultado injustiças. Mas claro que os resultados poderiam ter sido outros se os critérios tivessem sido diferentes.

Apesar deste processo de classificação destes trabalhos ter sido algo penoso pelas horas que me levou (foram 66 relatórios, que tinham entre 1 e 6 páginas cada um), foi um processo enriquecedor, valeu a pena. Foi interessante descobrir o que os alunos são capazes de descobrir e perceber as formas que usam para comunicar os resultados. O facto da investigação ter sido feita em grupo pouco condicionou os relatórios individuais, apenas no que diz respeito aos processos utilizados e às descobertas feitas em conjunto. Pude, também, aperceber-me da forma de funcionamento dos grupos. Houve dois grupos em que aquele ou aqueles que descobriram algumas relações, nomeadamente na terceira investigação, não conseguiram que todos os restantes elementos do grupo as compreendessem. Suspeitei disso durante a realização da tarefa e constatei-o ao ler os respectivos relatórios.

A concluir

Com esta tarefa de investigação, os alunos fizeram, de facto, matemática. Formularam hipóteses e previram resultados, estabeleceram e validaram conjecturas. Ao apresentarem conceitos e raciocínios por escrito, usando linguagem corrente, vocabulário ou simbologia específica da Matemática, desenvolveram a capacidade de comunicar. E também é importante referir que na realização desta tarefa estiveram presentes dois aspectos que considero indispensáveis no ensino da Matemática: o trabalho em pequenos grupos e a utilização da tecnologia.

Celina Pereira
Esc. Sec. Eng. Calazans Duarte

A tecnologia na escola de hoje: exclusão feminina?

Nas últimas décadas temos assistido a uma constante evolução da tecnologia, principalmente na área dos computadores. Começou-se por ter um computador em casa e acabou-se na leccionação de disciplinas informáticas nas escolas.

Hoje, mais do que pertencer a uma disciplina de informática, os computadores tentam entrelaçar-se com outras áreas da Educação, invadindo ainda mais as escolas, exigindo muito mais dos professores.

Fala-se em integrar os computadores na sala de aula de modo a permitir uma melhor aprendizagem e motivação da disciplina. Este é um assunto bastante frágil e que aborda diversos aspectos. Inicialmente, podemos julgar que os alunos irão gostar mais de uma aula com os computadores, pela novidade, pela tecnologia e por todos os recursos que nos dá e ajuda a uma melhor aprendizagem do aluno. Contudo, experiências provam que nem sempre é assim. Apesar de vivermos num mundo onde a tecnologia parece reinar, ainda há jovens que não possuem um computador em casa e, às vezes, mesmo tendo-o, não sabem trabalhar com ele. Ora, compreende-se assim que alguns alunos se sintam atrapalhados durante a realização de aula com computadores, como afirma uma aluna 9º ano "Senti dificuldades pois não sei usar muito os computadores, prefiro uma aula normal". Esta aluna era uma aluna de nível 4, com quem juntei, na aula, um aluno de nível 2, esperando que a aluna o ajudasse. Surpresa! Aconteceu exactamente o contrário. O aluno terminou a tarefa sozinho, além de ter compreendido os conteúdos.

De facto, houve uma barreira entre a aluna e o computador: a sua utilização. Note-se que lhes foi fornecido uma ficha-guia com todos os passos a usar no computador e, mesmo assim, a aluna teve dificuldades. O mesmo aconteceu a uma aluna de nível 5. Aliás, tinha mesmo alunas que se recusavam a utilizar o rato, demonstrando um certo medo e desconhecimento. Reparei que os rapazes realizavam a ficha com maior compreensão e rapidez, mostrando um certo fascínio e domínio da tecnologia.

Se analisarmos bem, desde crianças que os rapazes brincam com jogos, inclusive — e cada vez mais — nos computadores. Parece que há uma tendência social, e até mesmo cultural, de fazer vincar essa relação homem/tecnologia. Aliás, pode-se reflectir pelo número de rapazes e raparigas que escolhem áreas tecnológicas.

Eventualmente, em crianças de sexos diferentes, entre os 6–10 anos, não se evidenciam muitas diferenças face à visão, uso e interesse pelos computadores. É na pré-adolescência que as diferenças começam a sentir-se, muitas vezes associadas a esses factores sociais e culturais, fazendo com que as raparigas se distanciem, desinteressem e se sintam frustradas.

Na verdade, a sociedade já quase exclui as raparigas da tecnologia, desencorajando-as para esta área. Deste modo, não admira que estas atinjam a adolescência dotadas de um medo face aos computadores e a todo o seu mundo. Aliás, muitas das raparigas associam os computadores aos jogos que os rapazes utilizam, não verificando nenhuma verdadeira utilidade, muito menos aprendizagem. Assim, é normal as raparigas de hoje ficarem hesitantes quanto à vantagem da aprendizagem através de um computador. Elas próprias já criaram um mito dentro delas, que nesta idade é já difícil quebrar.

Os factores sociais e culturais em que vivemos hoje são, sem dúvida, muito influentes e responsáveis por toda esta diferença de ideias e visões por parte de jovens de sexos diferentes. Mas, e também sendo reflexo desses factores, não terão os pais muita culpa nisto? Se um casal tiver uma filha e um filho, a quem darão eles um computador com mais facilidade? Será à rapariga? Não. Salvo raras excepções, os próprios pais associam os seus filhos à tecnologia, defendendo que não são assuntos para raparigas. Os pais são os primeiros a vincar estas diferenças, criando nas suas filhas um preconceito face aos computadores e uma ideia de que não é material para elas.

No ano passado presenciei uma situação que revela um pouco esta ideia. Uma aluno do 9º ano tinha dito que tinha pedido um computador aos pais para o Natal. De facto, a aluna estava muito entusiasmada com o assunto, o que é óptimo e revela que, passo a passo, vai-se derrubando esta ideia tradicional de que os computadores são para os rapazes. Ora, a verdade é que, depois das férias, perguntei-lhe se tinha recebido o computador que tanto desejava e ela simplesmente respondeu "Não, teve o meu irmão, eu tive outras coisas". Isto remete-nos para essa ideia de que os pais defendem a ideia homem/tecnologia. Mais do que nós, professores, tentarmos combater estas diferenças, permitindo a todos os alunos a compreensão da utilização destes materiais, cabe aos próprios pais trabalhar nesse sentido. Se não começar em casa, como poderão os professores fazer milagres?

No entanto, mesmo sem a ajuda dos pais, tentemos lutar pelos nossos alunos. Numa era em que o futuro parece igualar-se à tecnologia, é importante que os professores ajudem os seus alunos numa melhor preparação. Daqui poucos anos, já quase não existirão empregos em

que não sejam exigidos conhecimentos informáticos. Nesta perspectiva, cabe a nós, professores, trabalhar no sentido de mostrar a estas raparigas a importância e as vantagens do uso (moderado) do computador. Mais do que isso, é responsabilidade nossa, PROFESSORAS, dar o exemplo, encorajando-as para esta área, mostrando-lhes que somos capazes e que a informática não foi criada em função dos rapazes.

Assim, talvez seja importante, numa aula com computadores, tratar todos os alunos do mesmo modo, não realçando dificuldades maiores que alguns alunos/alunas possam ter.

Para evitar que haja estas discrepâncias face ao uso de computadores por parte dos alunas/alunas, dever-se-ia começar a fazer esta abordagem desde a escola básica, fazendo com que as meninas se sintam seguras. Deste modo, essa segurança seria transportada para a adolescência de uma maneira mais sólida.

A tecnologia deve ser vista como uma ferramenta que podemos utilizar para ensinar os alunos. Devemos fazer sempre o melhor uso dela, sem os/nos prejudicar. Não deixemos que a sociedade estrague o futuro dos nossos alunos. Mesmo com computadores, continuemos a lutar por um ensino PARA TODOS!

Mariana Mendonça

Grande colégio universal, Porto

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar compatível a inclusão de todas as contribuições no espaço disponível da revista.

Formação a distância

Os cursos de formação a distância, não sendo uma coisa nova estão a surgir cada vez com mais frequência em todas as áreas.

O que se pretende de um curso deste tipo?

Pretende-se essencialmente utilizar os meios tecnológicos disponíveis para permitir uma maior acessibilidade a todos.

Como tudo se passa via Internet fica eliminada a necessidade da presença física dos formandos num determinado local, o que dá possibilidade a pessoas de regiões muito diferentes poderem frequentar o mesmo curso. Os materiais são disponibilizados pelo formador e os trabalhos a realizar são feitos ao ritmo de cada formando.

Há normalmente grande contacto com o formador, via correio electrónico, na maior parte dos casos são marcadas sessões de chat e pretende-se que a discussão de questões lançadas pelo formador ou pelos formandos sejam feitas em foruns.

O Centro de Formação da APM realizou o primeiro curso on-line, que decorreu entre Janeiro e Maio.

Tratou-se de uma primeira experiência deste tipo e a opinião que apresento é de alguém que esteve de algum modo envolvido na sua organização, mas tento ser o mais objectiva possível.

O primeiro facto a salientar foi o elevado número de inscrições. Devido às restrições impostas, mais de metade dos inscritos não foram seleccionados. Ficou-me a dúvida se esta resposta dos colegas se ficou a dever ao interesse que o tema despertou, à vontade de experimentarem uma modalidade diferente, ou à possibilidade que lhes era oferecida de seguirem o curso a partir de casa ou do local de trabalho.

A primeira sessão e a última foram presenciais e todas as restantes online.

Foi necessário satisfazer algumas condições impostas pelo CCFCP como, por exemplo, a existência das duas sessões presenciais e a obrigatoriedade da presença nas sessões on-line. Note-se que esta modalidade não está contemplada na legislação e portanto houve que fazer algumas concessões para que um curso destes pudesse ser creditado.

De um modo geral o curso correu bem. Houve uma boa participação da maior parte dos formandos nas sessões de chat e os trabalhos apresentados excederam em muito aquilo que lhes foi pedido.

A Escola Superior de Biotecnologia da Universidade Católica disponibilizou, sem qualquer custo, a utilização da plataforma (TWT) assim como o espaço no servidor para a colocação do site.

Tivemos possibilidade de ter participantes de várias zonas do país (Porto, Lisboa, Açores, Castelo Branco, etc, etc.), o que constitui uma mais valia de qualquer curso deste tipo.

Inicialmente houve uma grande falta de disciplina de participação nas sessões de chat, que foi sendo resolvida e surgiram alguns problemas técnicos com a utilização da plataforma que também se resolveram.

Alguns dos participantes não tinham grande experiência na área de informática, o que não constituiu obstáculo. O meu papel neste curso foi precisamente o de dar apoio técnico sempre que necessário.

Há alguns aspectos que gostaria de salientar (uns foram contemplados nesta formação mas outros não) e que gostaria de implementar se alguma vez tiver oportunidade de voltar a estar envolvida num próximo curso.

As sessões marcadas, ditas presenciais (chat) devem ser de dois tipos. Algumas, de discussão alargada em que todos estão presentes e outras facultativas em que o formador está obrigatoriamente presente para tirar dúvidas e prestar esclarecimentos apenas àqueles que necessitam de ajuda.

Uma das vantagens da formação a distância é permitir que cada formando tenha a possibilidade de frequentar o curso segundo o seu ritmo e gerindo o tempo da melhor maneira, portanto a obrigatoriedade da presença em todas as sessões (como foi o caso) não é compatível com esta característica importante.

O formador deve colocar uma série de questões para serem trabalhadas durante um determinado período de tempo e para isso a utilização do forum deve ser mais aproveitada do que foi neste curso. Penso que o forum é o local indicado para discutir as questões colocadas pelo formador ou por qualquer dos formandos. As intervenções de todos no forum são muito mais reflectidas do que no chat.

Deve haver sempre grande contacto por e-mail entre o formador e os formandos, sendo estes avisados sobre a colocação de novos textos ou de novas contribuições para o forum.

O apoio informático é indispensável e, se possível, estar a cargo de alguém com grande envolvimento no curso para não assumir um carácter puramente técnico. Não tenho dúvidas que o apoio resultará melhor, se o dito técnico estiver de algum modo dentro do assunto do curso para perceber exactamente as dúvidas dos formandos, mas tenho perfeita consciência que isto só será possível num número muito reduzido de casos.

A elaboração do site tem de ser muito cuidada de modo a torná-lo, principalmente, funcional.

Num workshop a que assisti sobre concepção de cursos de e-learning (que não é precisamente a mesma coisa que ensino a distância, ou formação a distância, embora estejam relacionados), foi apresentada uma definição de ensino a distância como "um processo planeado em que o ensino e a aprendizagem ocorrem em sítios diferentes. Em consequência exige técnicas pedagógicas especiais e é suportado por plataformas tecnológicas de comunicação, bem como procedimentos de gestão e administração particulares" (Michael Moore). Penso que este conceito se poderá aplicar à formação a distância e como tal apresento algumas ideias colocadas pelo orientador (Doutor Carlos V. Carvalho) nessa sessão, sobre a concepção de conteúdos de um site para este tipo de formação:

- Mensagens concisas
- Gráficos e imagens com boa apresentação mesmo a baixas resoluções e apenas os necessários. Os grafismos excessivos são de evitar, assim como muitas animações, muitas cores, etc)
- Principais páginas do site com tempos de download pequenos
- Facilidade de navegação (links fáceis de entender, as páginas anterior e seguinte devem estar facilmente acessíveis, ligação permanente à página principal)
- Utilização de botões de navegação consistentes em todas as páginas do site
- Atenção a detalhes como, por exemplo, o título corresponder ao conteúdo da página, todas as páginas com barra de navegação, verificação e re-verificação dos erros de ortografia, consistência dos elementos do design, etc)

Muito se poderia dizer sobre este assunto e provavelmente voltarei a ele; mas não sou especialista nem tenho prática suficiente, portanto as minhas observações resultam apenas de alguma leitura e de grande convicção da importância que este tipo de trabalho pode vir a ter em termos de formação.

Navegando pela Internet

A viagem de hoje começa por um site destinado a professores, alunos e encarregados de educação:

SITES FOR TEACHERS

http://sitesforteachers.com/index.html

Sitesforteachers é uma lista de recursos e de sites educacionais, para várias disciplinas.

Através deste site pode seguir, por exemplo para uma página com uma colecção de mais de 2000 planos de aula, a maior parte dos quais para os primeiros níveis de escolaridade, desenvolvido por K. Yamnitz na Universidade de Missouri.

Lesson Plans Page.com

http://www.lessonplanspage.com/Math.htm

Este link leva-o directamente para a área da Matemática do site referido

The Triangles Web

http://www.xtec.es/-qcastell/ttw/ttwcat/portada.html

É um site de geometria (em catalão e agora em inglês) que se dedica especialmente ao estudo da geometria do triângulo, que nas palavras do autor da página "nos leva para um espantoso e inesperado número de propriedades de uma forma tão elementar e ao mesmo tempo para as suas múltiplas conexões internas"

The Prime Pages

prime number research, records, and resources

http://primes.utm/edu/

Este é mais um site dos inúmeros existentes sobre números primos. Contém informações, resultados da investigação, records, artigos, conjecturas, numerosos links para outras páginas sobre números primos

http://www.cartograma.com

Cartograma é um site em língua espanhola onde encontra informações sobre a origem dos mapas, a evolução desde o mundo clássico até à idade moderna. Contém ainda um dicionário de termos mais usados em cartografia e uma lista de nomes que de algum modo ficaram ligados a este assunto, com uma breve descrição da sua contribuição para a elaboração e estudo dos mapas.

Na já habitual visita a museus indico:

exploratorium

the museum of science, art and human perception

http://www.exploratorium.edu

Este museu, fundado em 1969, fica em San Francisco, no Palace of Fine Arts, tem uma colecção de mais de seiscentas exposições sobre ciência, arte e percepção humana e é líder na promoção dos museus como centros educacionais.

http://www.old-computers.com/museum/default.asp

Museu sobre computadores antigos. Tem uma boa colecção de imagens e dados sobre estes computadores, além da história muito completa sobre a sua evolução.

Número: Essência da Matemática

Adriano Fonseca

A todo instante de nossa vida nós utilizamos algum método para quantificar e ordenar determinados objetos que manuseamos. E é exactamente essa necessidade de acumular quantidades e ordená-las de maneira que possam representar coisas materiais que surgiu a necessidade de se contar, ou seja, surgiu a necessidade de criar um sistema de numeração que represente qualquer quantidade de objectos.

Assim como uma criança utiliza seus dedos para contar é de se esperar que inicialmente os povos antigos também utilizaram essa técnica, pois segundo as normas da Sociologia e da Etnografia, os povos, em seu conjunto, partem de um estado inicial comum, e vão socializando seus conhecimentos, isto é, presume-se que os grupos humanos evoluem culturalmente sempre da mesma forma, transmitindo aos pósteros os conhecimentos acumulados.

O mais simples e primitivo dos procedimentos equivalentes à contagem parece ser o que Taylor, na *Primitive culture*, observou em uso entre os indígenas da Austrália, Malásia e Madagascar, que davam aos filhos os mesmos nomes segundo a ordem do nascimento, processo que converte cada nome em um número. Neste estágio de evolução não há ainda nomes de números, mas equivalentes concretos da numeração.

Lévy-Brühl, em seu trabalho *Les fonctions mentales dans les sociétes inferieures*, afirma que nas ilhas Murray, situadas no estreito de Torres, os indígenas só tinham linguagem numérica para os seguintes números:

netat — um
neis — dois

Na operação de contagem, procedem por associação e repetição dessas palavras, como por exemplo:

neis netat — três
neis neis — quatro
neis neis netat — cinco
neis neis neis — seis

No Alto Xingu, Estado de Mato Grosso, vive o povo kuikúro, indígenas do tronco linguístico karib, estudados por Scandiuzzi da UNESP — São José do Rio Preto — SP–Brasil. Seu trabalho com esse povo é de assaz importância pois ele com muita dificuldade coletou as primeiras informações de contagem na aldeia kuikúro. Seu sistema de contagem segue uma ordem específica: eles contam a partir do polegar da mão direita passando por todos os dedos e depois vão para a mão esquerda também começando pelo polegar e após passar por todos os dedos das mãos eles utilizam os dedos dos pés seguindo o mesmo esquema. Baseado no sistema quinário veja como eles contam de 0 até 10:

Inhalü — zero
Aetsi — um
Takiko — dois
Tilako — três
Takakegeni — quatro
Nhatüi (mão) — cinco
Aetsi ingugetoho (um da outra mão) — seis
Takiko ingugetoho (dois da outra mão) — sete
Tilako ingugetoho (três da outra mão) — oito
Takakegeni ingugetoho (quatro da outra mão) — nove
Timüho (duas mãos) — dez

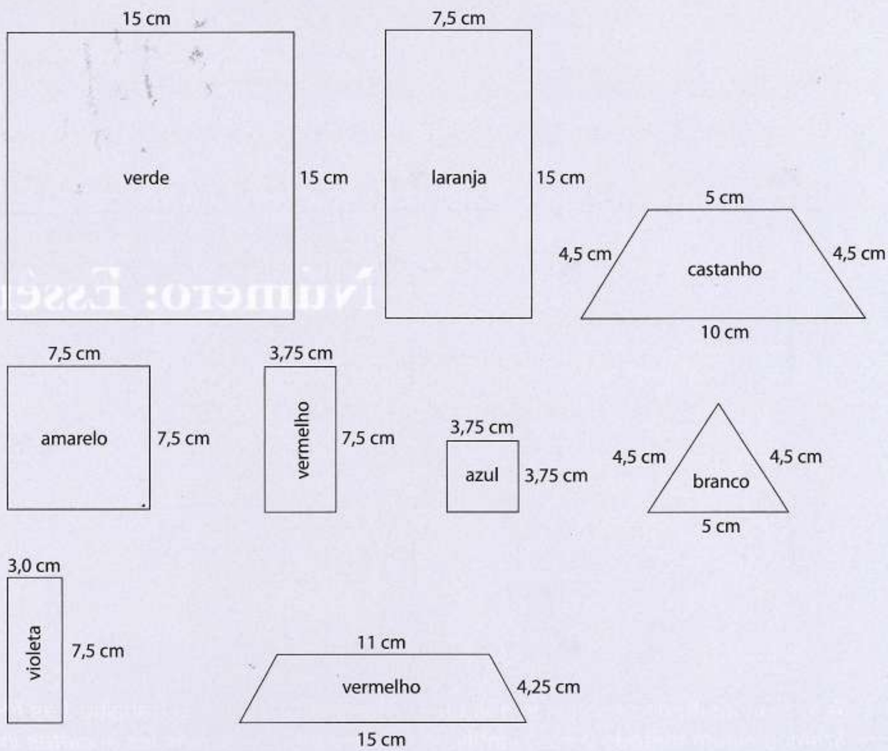
No mundo ocidental o sistema de numeração mais usado é o sistema indo-arábico ou sistema decimal. Nesse sistema existem dez símbolos que quando combinados representam qualquer quantidade. Mas ao contrário do que a maioria das pessoas pensam existem vários outros sistemas de numeração que não o decimal, como foi visto acima. Nesta maioria estão enquadrados os alunos, pessoas da sociedade em geral e pessoas da área de humanas e biológicas que só tiveram acesso ao sistema decimal. Existem sistemas com apenas dois símbolos, três símbolos, quatro símbolos e assim por diante. O sistema binário é hoje em dia muito utilizado mesmo que indiretamente: é a linguagem oficial dos computadores e das etnias indígenas do tronco linguístico macrojê, habitantes do Brasil. A velocidade com que eles processam as informações, tanto os computadores quanto os indígenas, é em parte devido ao uso do sistema binário.

Segundo relatos históricos, a utilização do sistema de numeração decimal pelos povos ocidentais ocorreu devido a aspectos político-económicos, pois no século XVI, durante o Renascimento, houve a difusão desse sistema — criado pelo matemático hindu al-khwarismi — pelos comerciantes árabes por toda Europa e Inglaterra sendo trazido mais tarde ao continente americano. Durante esse período do Renascimento, houve uma grande evolução na arte e na cultura dos povos e com a criação da imprensa, houve a predominância dos algarismos indo-arábicos, por esse sistema ser mais prático do que o sistema de numeração romano em uso na época, que por ser muito complicado, só podiam ser efetuados os cálculos no ábaco. Como estamos habituados a utilizar o sistema na base 10, quando nos deparamos com sistemas em outras bases, parece não ter significado, mas na verdade são símbolos do sistema indo-arábico de forma reduzida, ou seja, sistema na base 2: símbolos 0 e 1; na base 3: símbolos 0, 1 e 2; na base 4: símbolos 0, 1, 2 e 3, e assim por diante.

Seja usando pontos, traços, figuras inanimadas ou outros símbolos, todo sistema de numeração obedece sempre a uma correspondência e a uma ordem. Segundo pensa Piaget, duas condições se fazem necessárias para que exista abstração do conceito de número: a conservação do todo (correspondência) e a ordem.

A representação gráfica dos números, que precede à escrita como meio de transmissão de mensagens, surge muito tempo depois do homem ter aprendido a contar. Logo por que não utilizar materiais concretos para trabalhar o conceito de número na criança?

O material concreto é uma ferramenta muito importante que auxilia o professor na sua tarefa diária. Ubiratan D'Ambrósio sempre nos lembra que o conhecimento cotidiano da criança



Material Fichas Multibase.

deve ser levado em consideração e trabalhado em sala de aula.

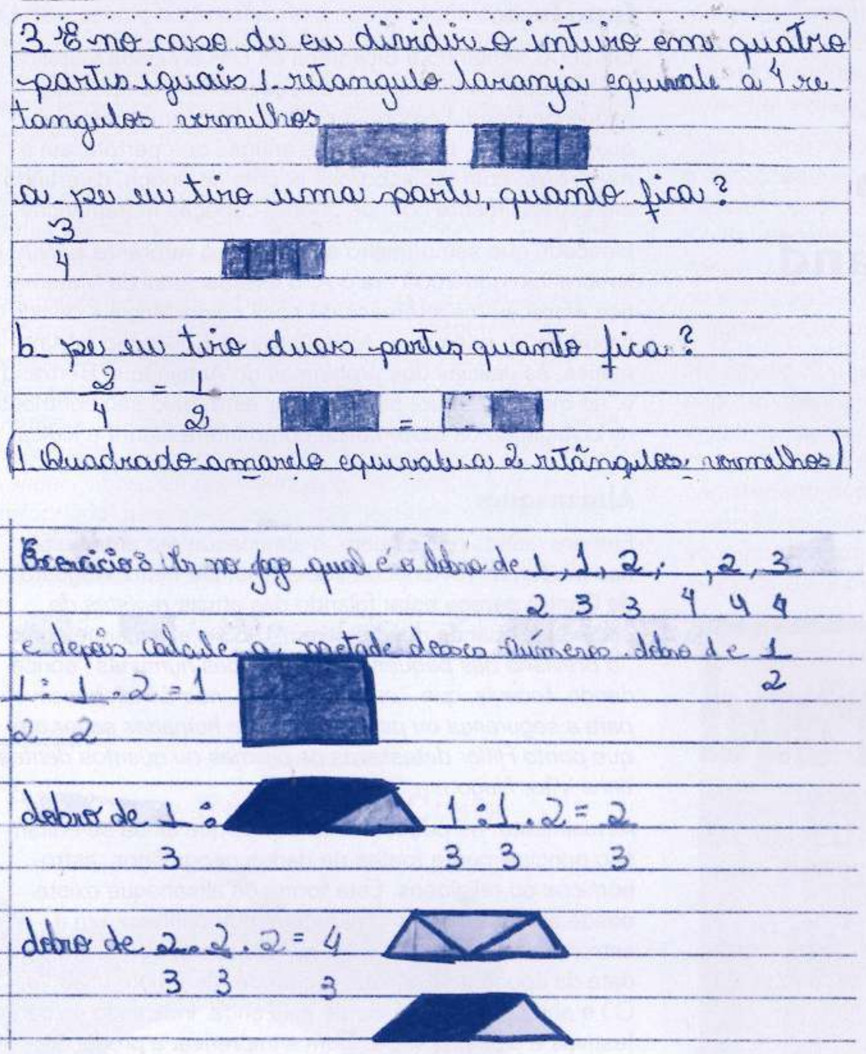
No que diz respeito à simbologia, a matemática implica uma linguagem diferente da falada e escrita habitualmente pelos alunos, com significados e leituras específicas e precisas, o que exige capacidade de abstração para a sua compreensão e manipulação. Essa abstração é muitas vezes responsável pelos insucessos ou experimentações progressivas de dificuldades na matemática.

Tomando como base as ideias de Piaget de que *as operações mentais devem ser consideradas como formas interiorizadas das operações concretas*, justificam em parte o uso de materiais concretos em sala de aula.

Um material de grande potencial para trabalhar esse conceito abstrato de número na criança de maneira concreta é o material fichas multibase, confeccionado por mim, que é uma combinação dos blocos lógicos e do material multibásico. Esse material além de mostrar como se dá o processo de construção de um sistema de numeração, trabalhando com outras bases numéricas além da decimal, também pode ser utilizado para trabalhar as operações fundamentais em qualquer base, frações, conceito de área e volume de figuras geométricas planas e tridimensionais, conceito de potência, proporção, jogo das quatro cores, despertando no aluno seu raciocínio lógico e lúdico, podendo ser trabalhado em todos os níveis do ensino fundamental. Esse material é constituído de 4 quadrados verdes, 8 retângulos laranjas, 16 quadrados amarelos, 32 retângulos vermelhos, 64 quadrados azuis, 40 retângulos violetas, 10 trapézios vermelhos, 10 trapézios castanhos e 80 triângulos isósceles brancos, podendo ser confeccionados em cartolina ou papel cartão, que quando manuseados, explicam os conceitos matemáticos de forma concreta.

Em 2001, trabalhei constantemente com este material, sempre o analisando e melhorando, junto com o professor Scandiuzzi da UNESP, apresentando-o em congressos locais e no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional realizado em Belo Horizonte.

Trabalhei também esse material com professores da FEBEM (Entidade Pública que trabalha com menores


3 'E no caso de eu dividir o inteiro em quatro partes iguais 1 retangulo laranja equivale a 4 retangulos vermelhos

a. Se eu tiro uma parte, quanto fica?

$\frac{3}{4}$

b. Se eu tiro duas partes quanto fica?

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ =

(1 Quadrado amarelo equivale a 2 retângulos vermelhos)

Exercício: ... no jogo qual é o dobro de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$

e depois calcule a metade desses números. dobro de $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} . 2 = 1$

dobro de $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} . 2 = \frac{2}{3}$

dobro de $\frac{2}{3} . \frac{2}{3} . 2 = \frac{4}{3}$

Extractos do trabalho de dois alunos.

infratores, em regime fechado) —, em forma de iniciação científica, ensinando a eles como trabalhar com o material fichas multibase, sendo finalizado esse estágio, com trabalho realizado com os detentos da unidade. Também, trabalhei esse material com alguns educadores de Mato Grosso e Goiás (dois Estados brasileiros), cujo interesse pelo material foi muito grande devido ao enorme auxílio que esse material pode trazer ao professor.

Em 2002, uma experiência recente feita com esse material em duas 5ª Séries do Ensino Fundamental Regular, da EMEF Professora Darci Helena Delgado Januário mostra o potencial desse material.

O assunto foi frações: inicialmente organizei a classe em grupos de no máximo quatro alunos e distribuí o material fichas multibase para cada grupo. Fazendo perguntas do tipo: "Se eu dividir o inteiro em duas partes iguais e tiro uma parte, quanto fica? Como eu represento a parte que ficou?" e ainda "Qual é o dobro de 1/2, 1/3, 1/4? E a metade desses números?", verifiquei que automaticamente eles usavam as fichas coloridas do material para dar as respostas das perguntas. Percebi também a facilidade de manuseio e raciocínio que eles tiveram com o auxílio do material. O impressionante é que todos os alunos queriam participar da *brincadeira* com as fichas coloridas.

Todo o trabalho com esse material, ou seja, a representação das frações de maneira concreta, foi registrado no caderno dos alunos.

Concluindo, o material fichas multibase, contribui com a conceituação, abstração e sistematização do número, possibilitando uma aprendizagem dinâmica, com diálogo, socializando o conhecimento.

O professor enquanto educador deve fazer com que o aluno usufrua do/a tempo/aula com motivação renovada principalmente quando consideramos os aspectos socioculturais, informando-os dos fatos históricos que ajudaram para o desenvolvimento do conhecimento dos números.

Bibliografia

1. Secretaria de Estado da Educação. Treinamento de professores do ensino de primeiro grau por multimeios. São Paulo, 1978. 80p.
2. Fontes, H.C.d'O. No passado da matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: Cortes Gráficas Gomes de Souza S.A., 1969. 127p.
3. Imenes, L. M. A Numeração Indo-Arábica. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1989. 47p.
4. Bezerra, M. J. O Material Didático no Ensino da Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: Diretoria do Ensino Secundário, 1962. 117p.
5. Scandiuzzi, P.P. A Dinâmica da Contagem de Lahatua Otomo e suas Implicações Educacionais: Uma Pesquisa em Etnomatemática. 1997. 214f. Tese (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
6. Piaget, J. A Formação do Símbolo na Criança: Imagem Jogo e Sonho, Imagem e representação. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1978.
7. Piaget, J. O Nascimento da Inteligência na Criança. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1970.
8. Dienes, Z.P. Lógica e Jogos Lógicos. v.1. 2. ed. São Paulo: Editora Herder, 1969. 127p.
9. D'Aambrósio, U. Socio-Cultural Basis for Mathematics Education. São Paulo: Unicamp, 1985. 107p.
10. D'Ambrósio, U. Educação Matemática: da teoria à prática. São Paulo: Editora Papirus, 1997.
11. D'Ambrósio, U. Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Editora Ática, 1990. 88p.

Adriano Fonseca
UNESP — São José do Rio Preto — SP — BRASIL

A Matemática Recreativa e o Centenário do Almanaque Bertrand

Renato Santos

Introdução

Em 2000, visitando a Biblioteca da Universidade Católica Portuguesa, encontrei uma coleção completa do Almanaque Bertrand. Lembrei-me, então, de como gostava, quando criança, de ler edições antigas que pertenciam a meus pais, com tão saborosa escrita da época, divertindo-me especialmente com os quebra-cabeças matemáticos.

Descobri que seu primeiro número foi o referente a 1900 e lembrei-me que 2000 era o Ano Internacional da Matemática. Pareceu-me interessante essa coincidência e decidi propiciar, ou relembrar, aos leitores de Educação e Matemática, as delícias dos problemas do Almanaque Bertrand e, ao mesmo tempo, homenagear este, pelo seu contributo na divulgação da Matemática como interessante e lúdica.

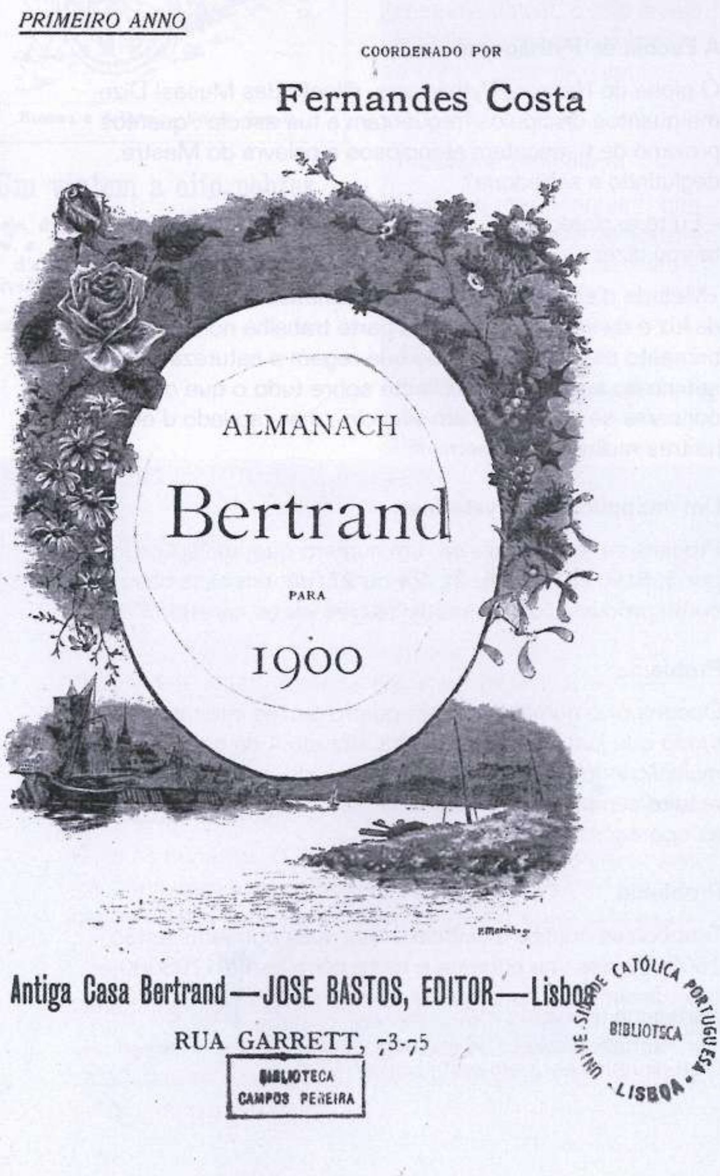
Almanaques

Embora muitos não saibam, o almanaque é o antecessor das modernas revistas de sociedade. De facto, Augusto de Castro parece estar falando das atuais *revistas de sociedade* quando descrevia em 1953 o almanaque como *"o breviário das pequenas curiosidades humanas"* concedendo, todavia, que *"evidentemente, não é indispensável para a segurança ou para a felicidade humanas saber até que ponto Hitler detestavas os pijamas ou quantos dentes tinha Vítor Hugo em Guernesey."*[1]

Actualmente, os poucos almanaques que ainda se editam são principalmente fontes de dados geográficos, astronómicos ou religiosos. Esta forma de almanaque existe desde as mais antigas civilizações que conheceram a astronomia, sendo que o exemplar mais antigo conhecido data da época de Ramsés, o Grande, do Egipto (1200 a. C.) e abrange um período de seis anos, indicando as datas festivas e dias propícios. Com a imprensa, a produção de almanaques teve um grande impulso, tendo o primeiro almanaque impresso sido publicado em Viena em 1457, por Purbach. Em Portugal destaca-se o célebre *Almanach Perpetuum*, de Abraão Zacuto, impresso em Leiria em 1496 e do qual saíram as tabelas com as declinações solares que foram usadas na marinharia portuguesa da época. Os primeiros almanaques dos países cristãos ligavam-se estreitamente com os devocionários e incluíam as datas das festas e dias feriados, além dos ciclos solar e lunar, letra dominical, epacta, áureo numero, etc. A partir do século XVI, começou a ser frequente o aparecimento de obras de cunho muito diferente, visando um publico muito mais vasto e que vieram a dar origem aos almanaques como os conhecemos hoje.

Seu conteúdo variava de ano para ano, consoante o gosto e as necessidades dos leitores a que era destinado. Continham elementos de cosmografia, tábuas de fases da lua, de marés e de eclipses, regras úteis para a navegação, conselhos sobre a agricultura e a pecuária, prognósticos duvidosos sobre o bom ou o mau tempo e predições astrológicas. De tal forma esta parte dedicada à astrologia era apreciada que ditou o sucesso dos almanaques, sendo característica comum a todos os livros congéneres, até os nossos dias. Mas podiam incluir também breves tratados de teologia, notas referentes à história da Igreja, os dias de despacho e audiências reais, os horários dos serviços públicos, estatísticas úteis e receitas para o tratamento das enfermidades mais comuns. Constituíam-se, assim, numa enciclopédia prática para uma população que em sua grande maioria morava e vivia do campo. Quase todos os seus redactores eram astrónomos e médicos e não hesitaram em publicar almanaques autores de renome desde Benjamin Franklin (*Poor Richard's Almanack*, 1732) a Bertold Brecht (*Kalendergeschichte*, 1949).

Se, inicialmente, os almanaques competiam pela precisão dos seus calendários e previsões meteorológicas e astrológicas, Benjamin Franklin com seu *Poor Richard's Almanack* em 1732 muda completamente as regras, considerando astuciosamente que *"embora o calendário fosse necessário, era o material adicional que faria o almanaque vender"*[2]. Franklin considerava-o, também, um 'veículo apropriado' para a educação das pessoas comuns, que raramente compravam outro livro senão o almanaque e, com esse objectivo incluiu seus famosos aforismos *"procurando inculcar a indústria e a frugalidade como meios de obter riqueza e garantia da virtude"*[3].



Assim, embora composto a partir de compilações, plágios e imitações mútuas, os agricultores, marinheiros e pescadores consideravam o almanaque fonte de informação muito necessária, assegurando-lhe um mercado, e tornando-o uma forma de literatura folclórica muito apreciada onde a leitura era escassa e que parece representar um fenómeno europeu[4].

No século XIX, ao lado dos almanaques de carácter mais popular, que se mantiveram mais ligados à tradição astrológica de que provinham e ao gosto do seu público principalmente dos meios rurais, apareciam outros com um carácter astrológico e divinatório muito reduzido, enquanto estendia-se muito a parte informativa. Tais almanaques desempenharam um papel educativo e moral, procurando melhorar a agricultura e a condição dos camponeses.

Surgiram, assim, almanaques que visavam, sobretudo, os interesses de um sector de público especializado, como os almanaques agrícolas, astronómicos, genealógicos, náuticos, militares, etc.; os almanaques relativos a certas povoações, como como o *Almanach de Fafe*, o *Almanak da Cidade de Braga*; almanaques de publicações periódicas, como os do Século e do Diário de Notícias; e almanaques ilustrados, para um público visivelmente da classe média, com pequenos artigos sobre factos históricos e geográficos, poemas e pequenos contos frequentemente oferecidos por leitores, anedotas, provérbios, curiosidades, recreações científicas, adivinhas e passatempos, como o Almanach Hachette e os publicados em Portugal pelas livrarias Bertrand, Ferin e Palhares. O almanaque teve até mesmo um papel peculiar no renascimento da língua d'Oc em França, tendo havido mesmo em 1922 um *Almanach occitan* mantido pelos colaboradores da revista *Oc*[5].

Saborosamente, Augusto de Castro descreve o almanaque como *"o breviário das pequenas curiosidades humanas"*[6], com as quais, *"espreita-se pelo buraco da fechadura, deciframm-se palavras cruzadas, desvenda-se a melhor maneira de escolher os melões, quantas camisas tinha Maria Antonieta, e ensina-se a melhor forma de guisar um coelho sem que ele dê por isso."* Por outro lado, parece estar a descrever as actuais *revistas de sociedade*: *"Evidentemente, não é indispensável para a segurança ou para a felicidade humanas saber até que ponto Hitler detestavas os pijamas ou quantos dentes tinha Vítor Hugo em Guernesey."* Mas defende sua utilidade pois que essas *pequenas curiosidades "são por vezes mais úteis ao pobre fantoche, escravo dos seus hábitos e das suas inquietações, que é o homem de hoje."*

O Almanaque Bertrand

A primitiva Livraria Bertrand, fundada na primeira metade do século XVIII pelos franceses irmãos Bertrand, após uma série de percalços económicos em mãos de seus sucessores, esteve para fechar em 1893, quando José Gregório Mamede Campos Bastos, seu ex-director, fez um esforço para salvar a firma Bertrand e a cultura que nela se havia formado, ponto de encontro e discussão dos intelectuais durante gerações. Conseguindo a posse da casa e do fundo editorial, transforma virtualmente a Livraria José Bastos na Livraria Bertrand. Talvez, então, para comemorar tal sucesso, lançou um almanaque, o *Almanach Bertrand*, em 1899, que sobreviveu até 1969. A tiragem do Almanaque Bertrand foi, no seu primeiro ano de publicação de cinco mil exemplares, que passaram em 1908 a quinze mil exemplares até 1969, ano do seu último número[7]. O Almanaque teve *"recepção festiva"*[8] por parte de toda a imprensa do país, embora tenham sugerido, *"com a mais lisonjeira das intenções"*[9], tratar-se de uma imitação da francêsa Hachette, a qual, todavia o editor dizia parecer tanto com o Almanaque Bertrand *"como um cysne se póde parecer com um canario"*[10] e afirmando, por outro lado, que *"nem o Hachette, nem ninguem, nos substitue."*[11]

As recreações matemáticas do Almanaque Bertrand

Tal como seus congéneres, o Almanaque Bertrand esforçou-se sempre por ser obra *"muito noticiosa, muito variada, muito encyclopedica, e sobretudo apenas suggestiva, tocando em tudo com ligeireza, saltando de assumpto para assumpto, sem carregar muito a mão em nenhum"*[12], entatizando *"o deleite, a distracção e a utilidade"*[13]. Uma forma de *deleite* e *distracção* que ministrou, foram os problemas e curiosidades matemáticas, no que seguiu o exemplo do *Almanach de Lembranças Luso-Brasileiro*, criado em 1851 por Alexandre Magno de Castilho, escritor e matemático, muito apreciado pelos charadistas[14]. Assim, dizia o editor do Almanaque Bertrand que os problemas, enigmas e jogos, *"que, em avultado numero, propômos á sagacidade dos nossos leitores, visam a dar-lhes uma distracção intellectual de ordem elevada, e procuram ser dignos de occupar intelligencias que se não comprazem em descer a absolutas frivolidades."*[15] Elevado número, de facto, que, de meia centena no seu lançamento, chegou a uma centena em 1910, voltando curiosamente para meia centena em 1970, ano da última edição.

Vejamos alguns exemplos de problemas matemáticos de dificuldade variada, extraídos do *Almanaque Bertrand para 1900*. A grafia original foi mantida em benefício dos saudosistas e para a curiosidade dos leitores actuais:

Enigma

digo que 4 são 6,

E que 6 são 4, digo.

Em 1 ha 2, e prosigo.

Que 5 em 13 vereis.

Se acaso não entendeis,

Discorrei com mais afinco;

Pois em todos vereis 5,

Como 3 e 1 são 6.[16]

Problema popular

Nem todos são capazes de dizer, immediatamente, em quanto importam sete sardinhas e meia, a real e meio sardinha e meia![17]

Problema facil

Achar um numero que esteja tanto acima de 50 como o seu quadruplo está acima do mesmo numero 50.[18]

Curiosidade arithmetica

Tome-se qualquer dos numeros-digitos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Multiplique-se o numero tomado por 2, e junte-se-lhe 4. A somma resultante mutiplique por 5, e junte-lhe 12. Esta ultima somma multiplique por 10 e tire-se-lhe 320. O resto divida-se por 100. Encontra-se, sempre, o numero que se tomou.

Effectuando este conjunto de operações, sucessivamente com todos elles, encontra-se, tambem sucessivamente, a serie natural:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.[19]

A Escola de Pythágoras

Ó gloria do Hélicon, Pythágoras, dilecto das Musas! Dize-me quantos discipulos frequentam a tua escola ; quantos proximo de ti, escutam atenciosos a palavra do Mestre, deglutindo a sabedoria?

– Eu te esclareço, Polycrates , grava no teu espirito o que te vou dizer :

«Metade d'elles estudam as mathematicas, a sciencia da luz e da verdade ; a quarta parte trabalha no descobrimento das leis immortaes que regem a natureza ; um setimo do numero total reflecte sobre tudo o que ouve, e conserva-se sentado e em silencio ; mas, ao lado d'elles, ha tres mulheres tambem.»[20]

Um multiplicando mysterioso

Procure-se, e encontre-se, um numero que, multiplicado por 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ou 27, dê, em cada caso, como producto, o mesmo digito tres vezes repetido.[21]

Problema

Decompôr o numero 100 em quatro partes inteiras, de modo que juntando 4 á primeira, tirando 4 da segunda, multiplicando por 4 a terceira e dividindo a quarta por 4, resulte sempre a mesma quantidade depois de effectuadas as operações.[22]

Problema

Tres bolsas contêem dinheiro. Nas duas primeiras estão 160$000 réis ; na primeira e na terceira estão 170$000 réis ; finalmente, na segunda e na terceira estão 200$000 réis.

Que dinheiro está em cada bolsa?[23]

Romeu e Julieta... fim do seculo

Um vintem a oito pobres

Hoje, dá se um vintem de esmola a um pobre, e nem sempre elle fica satisfeito. Pois d'antes, e ainda não ha muito, era possivel repartir um vintem por oito pobres, dando esmola a todos!

Como se fazia isto?

Uma transação complicada

Manuel dá a Pedro tantos tostões quantos os que Pedro tem. Pedro dá então a Manuel tantos tostões quantos aquelles com que elle ficara.

Feito isto, Manuel acha-se com 3$600, e Pedro com 4&200 réis.

Quanto era o dinheiro que tinha cada um d'elles antes da transação?[24]

O problema da escada

Quantos degraus tem uma escada que, paraser descida ou subida, galgando os degraus a dois e dois, resta um ; a tres e tres, restam dois; a quatro e quatro, restam tres; a cinco e cinco, restam quatro ; a seis e seis, restam cinco ; e, finalmente, a sete e sete não resta nenhum?[25]

Problema difficillimo

Qual é o menor numero que, dividido por 2, dá de resto 1 ; dividido por 3, dá de resto 2 ; dividido por 4, dá de resto 3 ; dividido por 5 dá de resto 4 ; dividido por 6, dá de resto 5 ; dividido por 7, dá de resto 6 ; dividido por 8, dá de resto 7 ; dividido por 9, dá de resto 8 ; e dividido por 10, dá de resto 9?[26]

Contas certas

Dizia um rapazito para outro: «Se me desses um vintem, ficava com o dobro do teu dinheiro».

«Isso não deve ser assim, respondeu o outro. Tu é que devias dar-me um vintem, para ficarmos com a mesma conta.

Quanto tinha cada um?[27]

Um resultado exiguo

Com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, compôr duas fracções, cuja somma seja egual á unidade. Deve empregar-se cada algarismo uma vez sómente, e devem empregar-se todos.[28]

Uma familia numerosa

Um lavrador e sua mulher teem quinze filhos, nascidos com intervallos regulares, sendo a differença, de uns para outros, de anno e meio.

O mais velho tem oito vezes a edade do mais novo.

Qual é a edade d'este ultimo?[29]

Quantas libras?

No tempo em que as havia entre nós, perguntaram a alguem quantas libras levava na bolsa. E esse alguem respondeu:

«Se á conta das que levo juntasse metade do seu numero, e ainda mais dois terços, e ainda mais tres quartos, e ainda mais quatro quintos, e ainda mais cinco sextos, e ainda mais nove, levaria exactamente 100.»

Pretende-se saber, em resumo, quantas levava.[30]

Quebra-cabeças

Achar um ou mais numeros de cinco algarismos que, multiplicados por 7, dêem um producto constituido todo pelo mesmo algarismo.

Dizer com quantos numeros de cinco algarismos se pode dar este caso.[31]

As graças e as musas

As tres Graças, levando cada uma seu ramo, composto do mesmo numero de rosas, encontram um dia com as nove Musas. Cada Graça deu a cada Musa a decima oitava parte do seu ramo, e finda a distribuição viu-se que cada Musa tinha menos doze rosas do que cada uma das tres Graças.

Quantas rosas tinha cada Graça, primitivamente?[32]

Uma divisão difficil mas que póde ser feita de duas maneiras

Um negociante de vinhos tem na sua adega 21 cascos. Sete cheios de vinho ; sete meio-cheios, e sete vasios.

Como póde elle dividil-os (sem transvasar nenhuma gotta de liquido de casco para casco) entre seus tres filhos – Guilherme, Henrique e Thomaz, – de maneira que cada um d'elles tenha não sómente a mesma quantidade de vinho, mas ainda egualmente o mesmo numero de cascos?

Como dizemos que o problema tem duas soluções, esperamos que o leitor terá a curiosidade de procurar ambas.[33]

Pergunta arithmetica

Quanto vem a ser um terço e meio de cem?[34]

Problemas de Caramuel

Os tres problemas, que em seguida publicâmos, traduzidos pelo coordenador d'este Almanach, foram inventados pelo celebre bispo hespanhol João Lobckowitz Caramuel, o qual floresceu no seculo xvii, entre os annos de 1606 e 1682.

Caramuel era altamente versado em mathematicas, e tão predilectos lhe foram sempre estes estudos, que as proprias questões theologicas era pelas mathematicas, que intentava demonstral-as e resolvel-as. [...]

Foram elles propostos pelo seu auctor n'um certamen mathematico, e encontram se no Tratado elemental de Matemáticas, escrito por órden de S. M... por D. José Mariano Vallejo, 4ª ed., Madrid, 1841, in-4°, e n'uma nota ás Adivinanzas colligidas por Francisco Rodriguez Marin.

1° problema

Um dia, perguntava Diodóro
Embaixador do principe do Egypto,
Que edade tinha o Macedonio invicto?
E logo, Artemidóro
Lhe responde engenhoso:
«Tem só dois annos mais o bellicoso
«Rei, que o seu predilecto Ephestião,
«Cujo pae, quatro mais que os dos contava.
«Quando o pae d'Alexandra ennumerava,
«(Elle, o Nestor dos reis),
«–No percurso d'Apollo fugitivo,–
«Gyros noventa e seis.
«Tinha a somma dos tres, e estava vivo!»"

2° problema

Hercules, um dia, visitou Augeu,
Rei opulento, como mais ninguem,
E a si proprio, na mente, prometteu
De lhe roubar as vaccas, cem a cem.
Começa a perguntar-lhe, com cuidado,
O numero, e as pastagens do seu gado:
«Eu cá, responde o velho á boa fé,
«Não tenho a conta certa aqui presente,
«Mas já vou responder, e brevemente:
«Do Alfeu pelas campinas, mesmo ao pé,
«Orladas d'ouro, em fundos d'esmeralda,
«Do meu gado, metade anda pastando.
«Anda, d'elle um oitavo, junto á falda
«do monte de Saturno, o velho deus
«Com seus longos bramidos atroando.
«E na linha, onde a terra une aos ceus,
«Descubro a parte decima-segunda,
«Que, por sua braveza desusada,
«Nos campos, que o Alfeu já não fecunda,
«Precisa andar das outras apartada.
«A vigesima parte, mansa e lenta,
«Na Elida segura se apascenta;
«E na Arcadia a trigesima demora.
«Cincoenta, feita a conta, inda me ficam.
«Quem fizer o que os calculos lhe indicam,
«Póde a conta total saber agora.»
Mover a clava, porém não a penna,
Era o saber do filho d'alcmena.
Hercules ficou sem perceber, portanto,
O que ao principio desejava tanto.
Mas o leitor, que é muito mais esperto,
Descubra o que deixâmos encoberto.

3° problema

Entre liquida prata,
Descobri não sei quantas Galatheas,
E, mais longe, no ponto onde remata
A selva escura, um côro de Napêas:
Thétis a todas com amor retrata;
Mas formosas aquellas, estas feias,
Na especie deseguaes, ou tanto monta,
Eram, tambem, deseguaes na conta.
Não podendo contal-as,
Apóllo consultei, que ali vivia,
E c'rôas e collares, para ornal-as,
De perlas desatadas lhes tecia.
E o deus intonso, para mais honral-as,
Não me quis ensinar o que sabia.
Porém, ao som das vagas indiferentes,
Estas palavras disse, tão sómente:
«Se deixam seus crystaes,
«Tres nymphas bellas, que á floresta chama
«Uma filha dos deuses immorates
«De rosas adornada e não de escama,
«Todas, na conta, ficarão eguaes;
«Porém, se vendo que Tritão as ama,
«Para as ondas partirem tres Napêas,
O dobro ficará de Galathêas.»[35]

Problema

Decompôr o numero 100 em quatro partes inteiras, de modo que juntando 4 á primeira, tirando 4 da segunda, multiplicando por 4 a terceira e dividindo a quarta por 4, resulte sempre a mesma quantidade depois de effectuadas as operações."[36]

Um multiplicando mysterioso

Procure-se, e encontre-se, um numero que, multiplicado por 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ou 27, dê, em cada caso, como producto, o mesmo digito tres vezes repetido."[37]

O monte de pedras

Dois amigos passam ao lado de um monte de pedras; um d'elles pergunta ao outro quanto tempo presume que terá de empregar para dispôr 100 pedras, de 2 em 2 metros, em linha recta, indo buscal-as ao monte, a uma e uma, para de cada vez ir collocal-as no logar devido.

O interpelado julga o caso simpicissimo, não lhe parecendo que o tempo exigido seja uma cousa por ahi além; e tão convencido está d'isso, que mette mãos á obra, e começa logo ali a resolver praticamente o problema.

Queremos saber se elle desanimou antes de concluir a tarefa, por esta lhe ter sahido maior do que julgava, e quanto tinha de andar, ao certo, para collocar as pedras todas até á centesima?[38]

O creado infiel

Enviaram a um sujeito, muito cauteloso e methodico no arranjo das suas cousas, e profundamente desconfiado, uma caixa com 32 garrafas de vinho da Madeira. Desencaixotando-as, á vista de um creado, collocou-as na dispensa, em uma prateleira quadrada, e fez-lhe observar que, de cada lado d'esta, se contavam 9 garrafas. A disposição era a seguinte:

1	7	1
7		7
1	7	1

O creado, estudando o assumpto, como o leitor (que o não conheça já) de certo vae fazer tambem, embora com fim muito diverso do d'elle, tirou 4 garrafas, e arrumou as restantes, por fórma que se contavam 9 de cada lado, como primitivamente.

Tendo se dado bem com a operação, voltou á carga e tirou – para seu uso, bem entendido – outras 4 garrafas; e novamente as arrumou com tal engenho que, de cada lado se contavam 9, como das outras vezes.

Não se resignou a parar logo em tão bom caminho, e tirou mais 4 garrafas. Quando o patrão, na forma do costume, visitou a dispensa, ficou perfeitamente descançado. Lá estavam 9 garrafas de cada lado da prateleira!

O creado, porém, entendeu não dever prosseguir na sua habilidade, ou não poude, que é o mais certo.

Trata-se de saber quaes foram as disposições imaginadas pelo creado, para os differentes grupos de garrafas, afim de se contarem sempre 9 por banda, depois de reduzidas as 32, a 28, a 24, e a 20, finalmente.[39]

O *Almanaque Bertrand* desenvolveu uma relação muito especial com seus solucionistas. Havia-os até mesmo em Angola, Cabo Verde, Brasil, ou nos EUA e em todo Portugal de Régua e Caldas de Vizela a Setúbal. Muitos usavam curiosos pseudónimos tais como *A Sobrinha do Envergonhado, Andes, Berlogofer, Carolino, Hera, Jogofer, Marcus Petrus, Velha Amiga do Betrand, Um alemtejano* ou *Um Maduro*[40]. Os editores declaravam ter em *"muitissima consideração" "as elevadas occupações e recreações intellectuaes de amigos do* Almanach Bertrand. *"*[41] Assim, logo incluíram uma página para reconhecer os solucionistas que se destacavam pelo número de quebra-cabeças resolvidos da edição anterior. Reconheceram, por exemplo, um solucionista que *"distinguiu-se, como sempre, na vanguarda dos nossos melhores decifradores"*, tendo resolvido cinquenta dos problemas do Almanaque para 1910 acrescentando: *"Nunca deixe de nos visitar, porque é sinceramente estimado aqui."*[42] Ou a outro que *"foi um dos primeiros de quem recebemos a lista das soluções": "devemos cumprimentos e agradecimentos; aquelles pelo avultado numero de soluções exactas, que nos remetteu; estes, pelos passatempos de sua lavra, que teve a amabilidade de nos offerecer."*[43]

A Matemática Recreativa

É interessante que quebra-cabeças matemáticos fossem apreciados, a par das poesias, contos e anedotas, pelos leitores de uma publicação popular como um almanaque. Polya, argumenta que o espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e outros enigmas parece demonstrar que as pessoas apreciam passar algum tempo a resolver problemas[44], apenas pelo desafio, pelo triunfo da descoberta[45], tal como o comum das pessoas gosta de um jogo de futebol. E qual lugar mais óbvio para aprender-se a resolver problemas e a gostar deles, senão as aula de Matemática?

Lopes[46], porém, denuncia que *"o ensino de Matemática ministrado nas escolas prepara alunos com alguma capacidade de cálculo, mas incapazes de resolver problemas. Este facto não é de estranhar uma vez que, na prática, os objectivos do ensino da Matemática se têm centrado na aprendizagem de conteúdos, sendo os alunos solicitados a memorizar informação e regras para utilizar mecanicamente, dispensando-se muito pouca atenção ao desenvolvimento de capacidades fundamentais à resolução de problemas."* O próprio Almanaque Bertrand cuidava para que os problemas preservassem seu carácter lúdico, fugindo *"discretamente, de cultivar apenas transcendencias, só accessiveis a poucos"* e dirigindo-se a *"quasi todos os que los lêem, não demandando mais do que uma certa vivacidade cerebral, que o proprio exercicio attento póde ainda desenvolver ou determinar."*[47]

Assim, *"a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada no curso ... Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática ... Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la."*[48]

Conclusão

Hoje, os quebra-cabeças são o tormento dos estudantes. Uma aluna minha, futura professora de Matemática, em férias na aldeia em 1995, foi desafiada por um idoso parente, senhor simples, do campo, com uma série de quebra-cabeças. Aparentemente, na época áurea do Almanaque Bertrand, os quebra-cabeças faziam parte da cultura popular, a par das adivinhas, cantigas e jogos de salão. O próprio Almanaque Bertrand cuidava para que os problemas preservassem seu carácter lúdico, dirigindo-se a *"quasi todos os que los lêem, não demandando mais do que uma certa vivacidade cerebral, que o proprio exercicio attento póde ainda desenvolver ou determinar."*[49] O que se passou entretanto? Qual a causa de tal mudança de cultura?

Notas

1 Castro, Augusto, Almanaque, *in Almanaque Diário de Notícias 1953*, Diário de Notícias, Lisboa, 1953, pp. 11–12.
2 Dodge, Robert K., Access to Popular Culture: Early American Almanacs, Kentucky Folklore Record, 25, January-June, 1979, p. 11–15, pp. 11–12.
3 Mott, Frank Luther and Chester E. Jorgenson, *Benjamin Franklin*, New York, 1936, p. 84, cited in Dodge, Robert K., *op. cit.*, pp. 592–605, pp. 597–598.
4 *Dictionnaire des Littératures Francaise et étrangéres*, Jacques Demougin, (dir.), Larousse, Paris, 1994, s.v. almanach.
5 *Dictionnaire des Littératures Francaise et étrangéres, op. cit.*
6 Castro, Augusto, Almanaque, *op. cit*, pp. 11–12.
7 *in Almanaque Bertrand para 1910*, Maria Fernandes Costa (coord.) , José Bastos & Cia., Lisboa, 1909, p. ii.
8 Correspondência *in Almanach Bertrand para 1901*, José Bastos (ed.), Lisboa, 1900, pp. 314–315.
9 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
10 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
11 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
12 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
13 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
14 *Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira*, Editorial Enciclopédia, Lisboa e Rio de Janeiro, s.d., *s.v.* almanaque.
15 Correspondência, *in op. cit*, pp. 314–315.
16 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 16.
17 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 100.
18 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 126.
19 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 57.
20 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 123.
21 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 236.
22 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 204.
23 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 128.
24 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 134.
25 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 140.
26 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 134.
27 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 115.
28 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 136.
29 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 115.
30 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 99.
31 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 101.
32 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 102.
33 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 116.
34 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 247.
35 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 149-151.
36 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 204.
37 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 236.
38 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, p. 132.
39 *in Almanaque Bertrand para 1900, op. cit.*, pp. 168.
40 *in Almanaque Bertrand para 1970*, Judith de Quental (coord.) , Editora Bertrand, Lisboa, 1969, p. 271.
41 *in Almanaque Bertrand para 1910, op. cit*, p. ii.
42 *in Almanaque Bertrand para 1910, op. cit*, p. 366.
43 *in Almanaque Bertrand para 1910, op. cit*, p. 366.
44 Polya, G., *How to Solve It*, Princeton University Press, 1975, ed. port.: *A Arte de Resolver Problemas*, Interciência, Rio de Janeiro, 1978, Prefácio, p. vi.
45 Polya, G., *How to Solve It, op. cit.*, Prefácio, p. v.
46 Lopes, Ana Vieira, et alli, *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*, Texto, Lisboa, 1992, (2ª ed.), p. 7.
47 Correspondência, *op. cit*, pp. 314–315.
48 Educational Testing Service, apud Polya, G., *How to Solve It*, Princeton University Press, 1975, ed. port.: *A Arte de Resolver Problemas*, Interciência, Rio de Janeiro, 1978, p. viii.
49 Correspondência, *op. cit*, pp. 314–315.

Bibliografia

Almanaque Bertrand, Bertrand, Lisboa, 1899-1970, integralmente disponível na Biblioteca Universitária João Paulo II (Universidade Católica Portuguesa, Lisboa), 'Biblioteca Campos Pereira'.

Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, Editorial Enciclopédia, Lisboa e Rio de Janeiro, *s.d.*, *s.v.* 'almanaque' e 'Bertrand, família de livreiros franceses'.

Grande Dicionário Enciclopédico Ediclube, Ediclube, Alfragide (Portugal), 1996, *s.v.* 'almanaque'.

Dictionnaire des Littératures Francaise et étrangéres, Jacques Demougin, (dir.), Larousse, Paris, 1994, *s.v.* 'almanach'.

Encyclopædia Britannica Online, "almanac", http://members.eb.com/bol/topic?eu=1613&sctn=1 [acedido em 00/02/08].

Albuquerque, Luís de, *Grande Dicionário de História de Portugal*, Joel Serrão, (ed.), Livraria Figueirinhas, Porto, *s.d.*, *s.v.* 'almanaque'.

Brainard, Rick, *Almanacs, Reference resources of the 18th century* About.com, http://history1700s.about.com/education/history1700s/library/weekly/aa112997.htm?rnk=r1&terms=almanac [acedido em 97/11/29].

Dodge, Robert K., *Didactic Humor in the Almanacs of Early America*, Journal of Popular Culture, Fall, 1972, pp. 592–605.

Dodge, Robert K., *Access to Popular Culture: Early American Almanacs*, Kentucky Folklore Record, 25, January-June, 1979, p. 11–15.

Machado, José Pedro, in *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa*, Livros Horizonte, 4ª ed., 1987, *s.v.* 'almanaque'.

Renato P. dos Santos
Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, Brasil

Quota 2004

No ano de 2004 o valor da quota é de €43,70 para professores, €31,00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,70 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome:______________________________ Sócio nº:__________

Morada: ______________________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ Email: __________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte:__________

Nº do B.I. __________ Arquivo: __________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de ensino: __________

Categoria profissional: __________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: __________ Email: __________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome)______________________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número I__I__I__I__I I__I__I__I__I I__I__I__I__I I__I__I__I__I cvv I__I__I__I *

Visa ☐ **MasterCard** ☐

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________

__________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a) €10,30

☐ Sócio(a) residente no estrangeiro €12,80

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: geral@apm.pt

Índice

1 **APM — A atracção (*fatal*) tem de continuar**
Isabel Rocha

2 **Reflectir sobre as práticas de formação**
João Pedro da Ponte e Leonor Santos

5 **Cinco pontos, um problema e cinco resoluções**
António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, José Paulo Viana, Maria Dedò e Rita Bastos

13 O problema deste número
Pedras através do aro

15 **Os temas do Encontro Internacional em homenagem a Paulo Abrantes**

17 Actualidades
Uma estreia atribulada, *Helena Amaral e Lina Brunheira*

18 Matemática e Jogo

18 **As apostas do Euro 2004,** *José Paulo Viana*

21 **Regras do jogo**

22 **Teoria de Jogos: Jogos de Dois Jogadores de Soma Variável,** *Mª Cristina Matos e Manuel Ferreira*

24 Materiais para a aula de Matemática
Métodos de apoio à decisão — Plínio, *o Jovem*

27 **Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) ... uma matemática diferente? ...**
Ana Vieira Lopes e Otília Moreirinha

29 **Investigando com cálculos repetidos**
Celina Pereira

34 Pontos de vista, reacções e ideias ...
A tecnologia na escola de hoje: exclusão feminina?, *Mariana Mendonça*

36 Tecnologias na educação matemática
Formação a distância

39 **Número: Essência da Matemática**
Adriano Fonseca

42 **A Matemática Recreativa e o Centenário do Almanaque Bertrand**
Renato Santos