Educação e Matemática

Nº 78

Maio/Junho 2004

Periodicidade: 5 números por ano

Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

A capa deste número constitui aquilo que se designa de um *fractal poligonal*. Este tipo de fractal é muito simples, tudo se inicia com um polígono regular e, numa primeira iteração, desenham-se novos polígonos (do mesmo tipo) centrados nos vértices do polígono inicial. O processo continua, usando agora os vértices dos polígonos entretanto introduzidos (ver fig. 1).

Introduzindo uma orientação nos vértices é possível prescrever transformações que os polígonos associados a cada vértice devem sofrer. As possibilidades são muitas, entre elas, aspectos como, cor, transparência ou modificações do tipo euclidiano podem ser prescritas *a priori*. Não deixa de ser surpreendente que partindo de figuras muito simples se consiga obter (ao fim de alguns milhares de iterações) imagens tão complexas como a da capa do presente número.

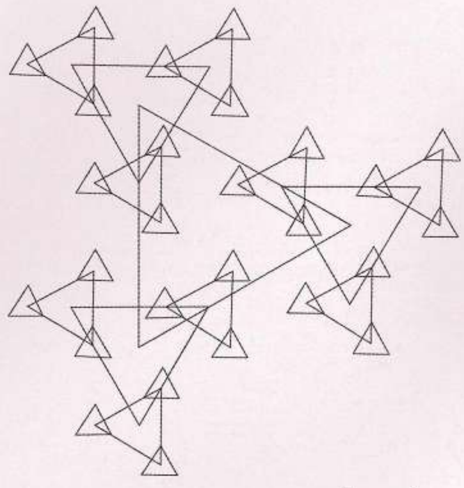


Figura 1.

Neste número também colaboraram

Ana Isabel Carvalho, António Guerreiro, Arsélio Martins, Clotilde Assunção, Departamento de Matemática da E. S. de Tecnologia e Gestão de Leiria, Helena Paula Pires, Henrique Manuel Guimarães, Isabel Paula, Jaime Carvalho e Silva, João Renato Sebastião, Luís Reis, Manuel Alberto Martins Ferreira, Maria Cristina Peixoto Matos, Maria das Dores Fernandes, Maria de La Salete Ferreira, Paula Teixeira, Paulo Jorge R. Dias, Rosa Marques, Rosário Ribeiro, Sara Morgado Nunes, Sónia Costa, Soraia Ramos, Susana Diego

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Junho de 2004.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 78
Maio/
Junho
de 2004

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Paula Canavarro
Subdirectora
Adelina Precatado
Redacção
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia
Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação
Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras
N.º de Registo ICS: 124051
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Mais escola, melhor escola?

Henrique Manuel Guimarães

Passaram 30 anos, três vezes dez, trinta.

Trinta anos decorreram depois do 25 de Abril de 1974. Muito tempo para uma vida, para a vida de uma pessoa pelo menos. Tanto, que dá para que quase metade da população portuguesa de hoje tenha nascido já depois dessa data.

Muito tempo passou desde esse Abril e é impossível não reconhecer que nesse muito tempo, muitas, tantas e variadas coisas, mudaram no nosso país, mudaram o nosso país. Na educação também, claro, e na escola e no ensino, da Matemática naturalmente. Mas é justamente ao pensar na educação, na escola e no ensino que (ainda) temos que me chega (e se instala) um sentimento ambivalente que explícito do seguinte modo: muitas coisas mudaram, mudou muita coisa?

Temos *mais* escola? Há hoje mais gente na escola, mais gente e gente mais diversificada, e está mais tempo na escola. Em finais dos anos noventa, excluindo o 1º ciclo do ensino básico, frequentavam o ensino regular diurno cerca de um milhão de alunos, duas vezes e meia mais do que no início dos anos setenta. Neste período, a população escolar no 3º ciclo duplicou e no ensino secundário cresceu quase 12 vezes. Mas ...

Todos os anos abandonam a escola cerca de quarenta mil alunos sem a escolaridade obrigatória e, no que se refere ao ensino secundário, dados recentes apontam também para uma situação bastante negativa, com apenas cerca de 20% dos portugueses entre 25 e 64 anos a completarem o ensino secundário[1]. Uma notícia também recente[2] dá conta de um estudo europeu, incluindo já os novos países da União europeia, que apresenta Portugal como o país em que a média de anos de escolaridade concluídos é a mais baixa (7.39). E ...

O relatório do projecto *Matemática 2001* diz-nos que cerca de 40% dos alunos do 9º ano das escolas da zona da grande Lisboa não atingem o nível três (dados de 1996/97), e chamo a atenção que a grande Lisboa é uma zona onde outros estudos localizam a população escolar com maior sucesso. O mesmo relatório, relativamente ao ensino secundário e para o mesmo ano lectivo, diz-nos que a nota média em Matemática, no exames do 12º ano dos alunos internos, foi de 8.8 valores, com mais de 60% a terem nota negativa. Para além disto, comparando estes resultados com os resultados dos alunos no conjunto das disciplinas, verificámos que é em Matemática que, de um modo geral, os resultados são piores. Temos *melhor* escola?

Os níveis e as notas dos alunos, positivos ou negativos, as suas classificações em provas de aferição ou em exames, ou as pontuações que obtêm em testes, internacionais ou nacionais, ou mesmo ao nível de aula, não nos dizem, directamente pelo menos, e por si só, se a escola está melhor ou pior e muito menos nos dão disso alguma explicação. Os dados que este tipo de instrumentos fornecem não significam, necessariamente, uma escola ou aulas de boa ou má qualidade, professores mais ou menos competentes ou alunos mais ou menos capazes.

Penso no entanto que os devemos enfrentar, deixarmo-nos interpelar pelo retrato negativo que têm fornecido e procurar perceber as suas razões, não apenas por ser negativo, mas porque nesse retrato, aparentemente, a Matemática tem uma contribuição significativa, e para além disso, porque ele é consistente com o sentimento muito generalizado de que a escola não é um lugar atractivo, de que nos alunos pesa a desmotivação e, nos professores, o desalento.

Temos *mais* escola — não *demais*, julgo mesmo que ainda é *de menos* — falta *melhor* escola (não achamos todos?).

Mas mais escola só inteiramente se realiza com melhor escola, e vice-versa. Isto significa, no que diz respeito ao ensino da nossa disciplina, que falta conseguir que mais alunos tenham sucesso em Matemática, um sucesso que resulte de experiências de aprendizagem ricas, diversificadas, significativas e que traduza mais e melhor Matemática aprendida: ao nível da aquisição e desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades matemáticas, mas também ao nível da sua mobilização e utilização em contextos diversificados; um sucesso que, desde os primeiros anos na escola, resulte de uma experiência em Matemática genuína e relevante, a que os alunos atribuam valor e significado, que favoreça uma melhor compreensão do mundo, o desenvolvimento da autonomia e auto-confiança, do espírito de iniciativa e capacidade de intervenção crítica.

Significa isto aceitar que continua à nossa frente, *trinta anos depois*, o desafio da qualidade, o desafio para melhorar a escola e o ensino que (ainda) temos. O professor não o conseguirá sozinho, mas quem acredita que tal é possível sem o professor? Vencer este desafio significa continuar a aceitá-lo, obriga a persistir e insistir, aos mais diversos níveis, na melhoria que acreditamos ser necessária. Obriga a que, em primeiro lugar, esta exigência seja colocada a nós próprios, no que fazemos nas nossas escolas, naquilo que propomos e exigimos dos nossos alunos, em cada dia, em cada aula.

Notas

1 A média entre os países da OECD é 64%, dados de 2001 (*Education at a glance 2002*, www.oecd.org).

2 Em Espanha esta média é de 10.56 e nos países do alargamento recente é de 11.5, dados, segundo o jornal Diário de Notícias de 20 de Maio passado, de um estudo comparativo da *European Social Survey* que analisou 20 países da Europa.

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências da
Universidade de Lisboa

Revista temática de 2004

O número temático da revista Educação Matemática, que este ano corresponde à revista de Novembro/Dezembro, terá como objectivo a realização de um ponto da situação relativo ao ensino da Matemática em Portugal. Como tem evoluído o currículo de Matemática no nosso país? Qual o balanço sobre as aprendizagens dos alunos portugueses? O que nos dizem, em particular, as provas de aferição sobre este assunto? E como se caracterizam as práticas profissionais que têm vindo a desenvolver os professores que ensinam esta disciplina? De que modo é o ensino da Matemática vivido nas escolas? E, no presente contexto, que problemas e desafios se colocam à formação de professores de Matemática?

Numa altura em que o ensino da Matemática se debate com tantas questões, temos a expectativa de contribuir para a sua discussão e perspectivação. Contamos também com a voz dos colegas que nos queiram fazer chegar o seu ponto de vista, alguma reacção ou ideia, um testemunho. Fica aqui o convite à participação, que se estende pelo Verão. A data limite para a recepção do seu texto, que deve enviar para revista@apm.pt, é dia 11 de Setembro.

Provas de aferição, exames, conhecimentos e competências ano a ano ...
para que vos quero?

Depoimentos

As provas de aferição, os exames no 9° ou no 6° ano, a definição de conhecimentos e competências que cada aluno deve atingir ano a ano e disciplina a disciplina, são assuntos que têm estado na ordem do dia. Sobre eles têm sido anunciadas novas medidas por parte do Ministério da Educação e produzida argumentação pouco consensual.

Dada a importância destes temas e no sentido de continuar um debate iniciado na revista anterior procurámos ouvir a opinião de professores(as) dos diferentes ciclos que no terreno lidam com os problemas e/ou que sabemos terem reflectido sobre estes assuntos. Aceitaram o desafio a Rosário Ribeiro, professora do 1° Ciclo na Escola EB1, n° 29, Lisboa, a Isabel Paula, professora do 2° Ciclo na Escola E. B. 2, 3 de Oeiras e a Paula Teixeira, professora do 3° ciclo e ensino secundário na Escola Secundária D. João V, Amadora.

Como ponto de partida para os depoimentos pedimos-lhes que comentassem duas passagens de um artigo do Ministro da Educação, publicado na página da Internet Educare[1], sob o título *Exames para que vos quero?* que reproduzimos antes dos depoimentos.

... Uma das conclusões mais evidentes da experiência de quatro anos das provas de aferição é a da sua progressiva desvalorização aos olhos dos alunos e de muitos professores. Como não contam para nada, não é necessário estudar, treinar e muito menos desenvolver qualquer esforço de forma a responder bem às questões colocadas. O número crescente de não respostas ou de comentários escritos feitos ao abrigo do anonimato é sintomático da pouca importância atribuída a estas provas. Não deixa de ser elucidativo o facto de os melhores resultados das provas de aferição terem sido obtidos no seu primeiro ano, precisamente quando se receava que os resultados viessem a ter consequências.

Admitamos agora que fazemos essas mesmas provas, mas que consideramos os seus resultados na classificação final do aluno com uma determinada ponderação (por exemplo, 30%). Não será uma forma de recuperar a credibilidade e eficácia avaliativa que se propunha atingir? ...

(David Justino, Ministro da Educação)

Rosário Ribeiro — Depois de ter lido este artigo as primeiras questões que me surgem são:

- será que as provas de aferição existem para assustar os alunos, de modo a que eles, com medo, estudem mais?
- será assim que o actual Ministro da Educação quer ajudar esta nova geração, que, ainda por cima, nas palavras do Ministro, "para se afirmar vai ter mais dificuldades e vai enfrentar mais obstáculos"?

Se eu fosse jovem, garanto-vos que dispensava uma ajuda destas.

Não nos podemos esquecer que já não vivemos no *antigamente* e que os tempos de hoje são bem diferentes daqueles que se viviam antes. Nessa altura, de facto, o que contava era o exame e pouco ou nada interessava o processo vivido pelo aluno ao longo da sua formação.

Nesse tempo, também não interessava se o que se estudava e se decorava para o exame tinha, ou não, alguma utilidade prática.

Felizmente, hoje em dia, alguma coisa mudou e apesar do sistema de ensino continuar carregado de males, é já hoje assente que não adianta encher uma cabeça de conhecimentos sem a dotarmos da capacidade de os utilizar adequadamente. Disso parece que todos temos a certeza. Ou será que estou enganada?

Desde há uns anos, no seio da Educação, tem-se vindo a falar na aquisição de conhecimentos associada ao desenvolvimento de competências, como algo que faz parte integrante do processo ensino/aprendizagem.

Ora se assim é, como é possível pensarmos em continuar a usar um modelo de avaliação quase idêntico ao que se usava antes do 25 de Abril?

Tal como se refere no Despacho Normativo n ° 30/2001, actualmente em vigor, um dos princípios da avaliação assenta na "consistência entre os processos de avaliação e as aprendizagens e competências pretendidas, através de modos e instrumentos de avaliação diversificados, de acordo com a natureza das aprendizagens e dos contextos em que ocorrem".

Julgo que, com a forma como o Ministro da Educação perspectiva as provas de aferição, caminhamos para uma filosofia de avaliação que vem desvirtuar o princípio atrás referido.

Não nos podemos esquecer que, segundo a Reorganização Curricular do Ensino Básico "as provas de aferição constituem um dos instrumentos de avaliação do desenvolvimento do currículo nacional e destinam-se a fornecer informação relevante aos professores, às escolas e à administração educativa, não produzindo efeitos na progressão escolar dos alunos".

Muito se tem dito e se tem escrito acerca do estado da Educação em Portugal, mas mesmo assim, nada parece ser suficiente para que os responsáveis pela Educação percebam (ou queiram aceitar) que os alunos só podem aprender com sucesso e estudar com prazer se as medidas a tomar vierem no sentido de melhorar todos os recursos humanos, físicos e financeiros que nós, nas escolas, sabemos que fazem falta. É claro que isso só acontecerá se deixarmos de querer resolver o problema do insucesso com exames e com outras medidas deste tipo que apenas irão contribuir para *cortar as pernas* aos que têm mais dificuldades, sem nada contribuírem para os ajudar.

Ou será que não sabemos onde estão as feridas que tanto fazem sofrer o nosso sistema de ensino?

Os grandes males da educação não são fáceis de resolver. Todos nós temos consciência disso. Mas, provavelmente, o que está em causa, neste momento, é se há ou não vontade política de resolver os problemas, ou se o que vamos fazer, daqui para a frente, é acreditar que medidas como estas vão melhorar a qualidade de ensino dos nossos alunos e vão, de alguma maneira, diminuir o insucesso. Estou certa de que há formas mais sérias de ajudar esta geração que, no entender do nosso Ministro, vai ter de enfrentar uma sociedade tão adversa.

E não se pense que sou contra as provas de aferição, pois nada tenho contra o facto de nos servirmos dessa ferramenta para avaliar os professores e as escolas.

Acredito que uma avaliação aferida nos pode ajudar a tirar algumas conclusões acerca do tipo de ensino praticado e corrigir ou melhorar alguns aspectos negativos que venham a ser detectados.

Mas para que isso seja verdade, não precisamos de assustar os alunos, nem precisamos de nos servir das provas de aferição para os levar a estudar. Estaremos decerto a ser maus educadores, se não optarmos por outras formas de trabalho e de avaliação mais consistentes, que levem os alunos a desfrutar do prazer de aprender e a terem consciência do seu próprio processo de aprendizagem.

Isabel Paula — Como professora do 2º ciclo com cerca de 30 anos de serviço e que já correu muitos ciclos de escolaridade em várias disciplinas (excepto 1º ciclo), sempre com actividades na escola, em várias zonas deste país, quero dizer o seguinte:

A avaliação interna dos alunos é formativa e sumativa, constituída por diversas fontes de informação (ME, 1991), sendo recomendadas a observação directa pelo professor durante o trabalho nas aulas, responsabilidade individual, comunicação e exposições orais, realização de testes, relatórios e produções escritas dos alunos. Compete ao professor a adequação desses meios com a turma e às experiências de aprendizagem.

Numa sociedade aberta, com os meios de comunicação actuantes como temos, tudo tem visibilidade e é posto em questão, nomeadamente o papel do professor. É preciso dialogar com os Encarregados de Educação, ter atenção ao papel desempenhado por gestores de colégios privados de tempos livres, *pagos por estes [E. Educação]*, pois se alguns não têm conhecimentos culturais nem científicos, nem se deslocam às escolas, outros pressionam terrivelmente os professores, só se preocupando com a classificação dos testes e de finais de período e muito pouco com os processos de aprendizagem.

Tal como afirma António Damásio, a questão não é cartesiana *penso logo existo*, mas global, sentir e pensar são duas funções concomitantes que ligando desenvolvimento pessoal e social, interferem na avaliação, a qual tem de servir para melhorar o ensino, tendo de estar associada aos processos de aprendizagem para os melhorar, integrando frequentemente o aluno e o professor no seu contexto.

As provas de aferição têm um carácter diferente dos exames, não podendo ser com estes identificadas e o facto de não haver avaliação exposta aos alunos, não quer dizer que *não contem para nada*, pois:

- permitem identificar pontos fortes e fracos de determinada escola e região relativamente aos itens de conhecimento e competências, possibilitando reajustamentos dos professores nas suas opções para cada turma;
- permitem caracterizar as áreas de formação contínua que os professores devem desenvolver;
- permitem que a nível nacional se perceba de que modo está a ser interpretado pelos professores o programa, que sugestões e ajudas deve o Ministério dar às escolas que têm baixos resultados, que reflexão se pode fazer das que têm melhores resultados, sem cairmos na separação exclusivista dos *meninos ricos e pobres.*

"Os alunos não têm que treinar para estas provas" (Sr. Ministro), claro que não! O mal é mesmo essa concepção de que em Matemática, e na aprendizagem escolar, tudo se consegue só, e apenas, pelo treino! Depois do treino vem *o resto*? Naturalmente, por obra e graça das capacidades dos alunos? Igual para todos?

Com os dados disponíveis das primeiras provas (continuamos sem saber nada das segundas, embora o Sr. Ministro tenha faltado à verdade na entrevista televisiva de 09/05/04, dizendo que foram enviadas para as escolas) parece-me que o Sr. Ministro desconhece os dados internacionais dos nossos alunos, onde é precisamente nas respostas mais elaboradas, e não no treino, que residem as nossas falhas (GAVE). E estando cobertos pelo anonimato, nada sabemos da origem social dos alunos. Teríamos grandes surpresas se soubéssemos.

Não entendo como se poderá operacionalizar uma classificação interna, por exemplo de 30% com as provas de aferição, se a classificação dos alunos está referida numa escala de 1 a 5! Esta ideia de que tudo apenas se mede e quantifica, tal como no desporto, em fracções de segundo e por eliminação de provas, não é consequente com a aprendizagem, que requer tempo, esforço dos alunos para superar maus resultados e melhorar. Como se irá proceder, quando os diplomas legais (ME, 1991 e 2001), afirmam que o currículo se deve adaptar às turmas e aos alunos? Será justo trabalhar de uma maneira e avaliar de outra?

Pelo que expus, não me parece necessário que todos os anos, todas as escolas sejam sujeitas a provas de aferição, mas que, periodicamente, por exemplo de cinco em cinco anos, o sejam, e nesse intervalo fariam outras, num número mais restrito, de onde fosse possível, isso sim extrair dados e conclusões mais pormenorizados, havendo previamente formação aos professores dessas escolas, com carácter obrigatório, da responsabilidade da tutela.

É ainda possível, na amostragem das escolas, não haver um absoluto anonimato do aluno, por exemplo, recorrendo aos sistemas de identificação de turmas de determinada escola, devidamente codificadas. Aí se calhar alguns professores já não gostavam tanto e os alunos já se sentiam mais empenhados.

A recuperação da credibilidade passa por todos os envolvidos no processo avaliativo terem clareza das finalidades da avaliação em si mesma e não desta ou daquela forma de recolha de elementos.

Paula Teixeira — Desde o início que sou contra as provas de aferição aplicadas a todos os alunos do 4º, 6º e 9º anos. Quando as provas passaram a ser realizadas por amostragem eu aplaudi a medida. Defendo que o sistema de ensino deve ser avaliado periodicamente de modo a que possamos ir traçando rumos que contribuam para melhorar a educação, que um dos elementos dessa avaliação pode consistir em aplicar provas a uma amostra significativa de alunos, mas nunca a todos os alunos. A sua aplicação ao universo dos estudantes em anos terminais de ciclo leva-me a desconfiar de objectivos ocultos e que se pretendem atingir com essa aplicação generalizada. Também não aceito o argumento que as provas teriam um efeito benéfico na prática lectiva porque alertariam os professores para itens que eles poderiam estar a descuidar. Para mim é inaceitável que se dêem indicações aos professores através de provas realizadas aos alunos. O Ministério da Educação que, para o ensino básico, não tem aceite elaborar materiais que considere exemplares com o argumento que não quer passar um atestado de incapacidade aos professores e por isso não lhes quer sugerir *receitas*, não deve utilizar as provas de aferição para indicar caminhos. Aliás, não acredito que seja essa a ideia porque seria bem mais simples e barato enviar uma brochura para as escolas com uma série de itens. Daí que considere que há objectivos não clarificados.

No início do processo da aplicação das provas de aferição o parecer do Conselho Nacional da Educação reconhecia a bondade das mesmas, mas alertava para algumas dificuldades que iriam ser encontradas. Entre as dificuldades estava o facto dos alunos saberem que estas provas não iriam ter qualquer influência na sua avaliação. Apesar deste alerta nunca no passado pude imaginar até que ponto esta era uma dificuldade real. No que me é dado observar, as provas estão de facto desvalorizadas aos olhos dos alunos e de muitos professores. Muitos alunos não fazem qualquer esforço para responder bem às questões colocadas e para que não faltem é preciso que os professores façam alguns *malabarismos*. É claro que esta desvalorização se acentua à medida que se avança nos anos de escolaridade. No início ainda as provas de aferição eram notícia nos órgãos de comunicação social. Agora fazem, quando fazem, uma breve referência.

Até há dois anos atrás, os resultados das provas eram publicamente apresentados e devolvidos às escolas na convicção que esta medida poderia constituir uma ajuda no tal processo de ajustamento de rumos. Agora nem isso. O Ministro apresentou um resumo dos dados dos dois últimos anos, disse que as escolas iriam receber os resultados e até hoje ainda nada chegou às escolas.

Ouvi vários professores de várias escolas falarem da falta de empenhamento dos alunos para responderem às questões, mas não estava à espera que fosse o Ministro da Educação a afirmar que *"Uma das conclusões mais evidentes da experiência de quatro anos das provas de aferição é a da sua progressiva desvalorização aos olhos dos alunos e de muitos professores"*. Também não estava à espera que o Ministro viesse agora dizer que um "número crescente de não respostas ou de comentários escritos feitos ao abrigo do anonimato é sintomático"

É claro que esta não é uma situação da qual nos devamos orgulhar, mas do que é que estávamos à espera?

De qualquer forma a maior surpresa foi quando, depois destas revelações, o Ministro tenha mantido as provas de aferição por amostragem para os 4º e 6º anos e tenha realizado a sua aplicação ao universo dos alunos do 9º ano! Pensará o Ministro que os alunos do 9º ano, que não são os mesmos que para o ano estarão a fazer o exame, iriam este ano ter uma atitude diferente? Então o que é que se poderá concluir dos resultados deste ano que possam justificar esta medida e este despender inútil de verbas?

Uma surpresa ainda maior é que utilize o argumento da desvalorização, que agora estou na dúvida que seja real, para defender a passagem das provas a exames com uma ponderação a decidir.

Há nisto tudo uma enorme confusão. Claro que temos que encontrar uma forma credível de avaliar o sistema. Uma das formas pode passar mesmo pela aplicação universal de provas, com o formato actual ou outro, que entrem na avaliação dos alunos de acordo com os critérios estabelecidos em cada escola.

O Ministério da Educação, à semelhança de muitos outros países, está a elaborar um conjunto de orientações visando a definição dos níveis de conhecimentos e competências que cada aluno deverá atingir ano a ano e disciplina a disciplina.

(David Justino, Ministro da Educação)

Rosário Ribeiro — Não nos podemos esquecer que *a escolaridade para todos* trouxe para dentro da escola enormes problemas que antes não existiam. Esta é uma verdade e que, por vezes, muitos querem ignorar.

Porém, se o que queremos de facto é que todos tenham acesso ao ensino e todos tenham as mesmas oportunidades, temos que pensar quais são as modificações necessárias para que isso aconteça.

E para isso acontecer mesmo, muita coisa terá de mudar.

Não devemos tentar assemelhar-nos a outros países só na definição dos níveis de conhecimentos e competências que cada aluno deverá atingir ano a ano e disciplina a disciplina. Isso não chega para melhorar e pode até nem ser imprescindível.

Talvez seja mais importante começarmos por saber, nesses outros países, como estão as escolas equipadas, quais são as condições de trabalho aí existentes, como são os horários dos alunos, como é a formação dos professores, qual o número de alunos de cada turma, que apoio é dado aos alunos com dificuldades, etc.

Penso que, se queremos aproximarmo-nos dos outros países, vamos então buscar a cada um deles o que de melhor houver e não nos limitemos apenas a trazer os exames, ou as provas de aferição num contexto isolado, como se de uma solução se tratasse.

A Reorganização Curricular do Ensino Básico permite que cada aluno realize o seu próprio percurso, sendo o final do ciclo o momento adequado para fazer o balanço das competências e dos conhecimentos adquiridos, de modo a transitar, ou não, ao ciclo seguinte.

No caso concreto do 1° ciclo, muitos são os alunos que entram na escola sem maturidade suficiente e que, por essa razão, só no início do 2° ano de escolaridade estão capazes de iniciar as aprendizagens escolares. E é um facto que muitos destes alunos recuperam rapidamente este atraso e conseguem, no modelo de avaliação em vigor, completar o ciclo em quatro anos.

O facto de passarem a existir níveis, definidos ano a ano é disciplina a disciplina, irá, com certeza, impedir esta possibilidade de cada aluno realizar o seu próprio percurso, dentro de cada ciclo.

Mais uma vez me parece que esta medida não só não se coaduna com a Reorganização Curricular do Ensino Básico, como, provavelmente, vem anunciar um novo modelo de avaliação. Será?

Isabel Paula — Portugal é um país pequeno e mesmo assim as assimetrias regionais são gritantes, não só Interior – Litoral, mas também dentro do mesmo distrito. Na última Presidência Aberta, o Dr. Jorge Sampaio e o Sr. Ministro da Educação visitaram uma escola na Amadora onde na população escolar coexistiam alunos que tinham como língua materna 15 origens diferentes! Isto não dará que pensar? É só aplaudir a integração, os projectos dos professores que tanto se esforçam (numa colagem de discurso presidencial não coerente com as decisões ministeriais) e depois normalizar por anos de escolaridade e não por ciclos, onde haveria mais tempo, condição essencial à aprendizagem?

Para além destas diferenças de raças e credos, existem também outras, como o número de alunos por turma e o tipo de alunos. Por exemplo, na minha escola tenho 28, alguns portadores de deficiências comprovadas, regime duplo, escola superlotada. Existindo condições sócio-económicas das famílias, tem sido possível organizar várias visitas de estudo — Forte de Peniche, Centro Cultural de Belém, por exemplo. Estas visitas contribuem para um currículo mais aberto em todas as disciplinas, incluindo Matemática. Será que turmas com muitos alunos abrangidos pelo SASE, aos quais foram nestes últimos dois anos cortados esses apoios, têm as mesmas condições?

Ser exigente, é querer melhorar a qualidade e não desenvolver a cultura do *concurso e do imediato* do *treinei, logo despejei, então sei*. Raramente faço, na mesma turma, que é heterogénea, testes sobre o mesmo tema, iguais para todos os alunos, fazendo-os sentir que um teste de período limitado tem o mesmo valor que outro registo de informação (oral e escrito). Pretender que basta ter um resultado final positivo para passar o ano, isso sim é desvalorizar o esforço continuado, a persistência durante um ciclo de estudos e não o imediato, a meia bola e força de um acaso, que até pode correr bem, então deixa ver *se da próxima também será assim, escuso de estudar sempre*, pensarão os alunos. Será a visão de totoloto que interessa? Ou a construção do saber pelos alunos?

Como professora sinto-me muito desiludida e cansada com tanta mudança. Ainda há pouco (2001) nos começámos a inteirar da linguagem e fundamentos das competências, saíram indicações curriculares, estamos nas escolas a trabalhar os projectos curriculares de turma.

Sinceramente pôr objectivos e avaliá-los em cada ano de escolaridade é fazer dos diplomas oficiais uma reforma *a retalho*, pretender agitar, dizer que se está a fazer muita coisa, pensar com os pés! Talvez por ser ano de EURO 2004 ...

Mas a Educação não pode sofrer as *chicotadas psicológicas* como no futebol senão será o caos (e neste ... enfim)!

Tal como os alunos, precisamos de tempo, o que não é compatível com cenários eleitoralistas.

Paula Teixeira — Um dos aspectos muito positivos da reorganização curricular do ensino básico é a formulação de competências por ciclo. Pretendeu-se desta forma evidenciar a importância de certas fases do percurso do aluno, marcando momentos privilegiados para um balanço das aprendizagens realizadas. É evidente que não era obrigatório que esse balanço fosse feito no final de cada ciclo, mas era de esperar que esses momentos fossem coincidentes.

Tal como é dito nos documentos da reorganização *"(...) o movimento de inovação pressupõe uma transformação gradual do tipo de orientações curriculares formuladas a nível nacional: de programas por disciplina e por ano de escolaridade, baseados em tópicos a ensinar e indicações metodológicas correspondentes, para competências a desenvolver e tipos de experiências educativas a proporcionar por área disciplinar e por ciclo e considerando o ensino básico como um todo."* Recuar neste principio fundamental é negar a reorganização iniciada e que ainda não está generalizada a todo o 3° ciclo.

Há muita coisa a melhorar a nível desta reorganização do ensino básico, mas não passa por definir competências ano a ano.

Nota

1 Página da Porto Editora
http://www.educare.pt

Actualidades

O problema do abandono escolar

Durante cinco dias, entre 4 e 8 de Maio, Jorge Sampaio viajou pelo país, numa presidência aberta dedicada à educação, tendo sido o abandono escolar o tema que dominou a agenda do segundo dia desta semana.

E porquê o abandono escolar?

De facto, ter quase 45% dos jovens (entre os 18 e os 24 anos) a sair da escola sem completar o 12º ano é muito preocupante, é mesmo uma "tragédia nacional, tal como referiu Sampaio. A nossa situação deixa--nos muito abaixo da média europeia. Assim sendo e tendo presente que a formação dos nossos alunos é fundamental para um país civilizado como o nosso, como podemos combater o problema do abandono escolar?

Para Sampaio é muito importante formar quadros médios e técnicos através de cursos profissionalizantes, mas como conseguir isso se, segundo um estudo realizado por Joaquim Azevedo, "Que estratégia para o ensino tecnológico e profissional em Portugal", apenas 43% das pessoas que concorrem aos cursos profissionais conseguem entrar?

Outro dos aspectos considerados importantes por Jorge Sampaio está relacionado com os apoios escolares aos alunos. Mas como proporcionar apoios de maior qualidade e eficiência do que aqueles que normalmente acontecem nas nossas escolas? Apoios inseridos à posteriori nos horários dos alunos e leccionados por professores diferentes dos professores das turmas, serão a melhor opção?

Mas também os jovens com que Sampaio falou apontaram algumas ideias no sentido de combater o abandono escolar. Por exemplo, sugeriram a existência de mais psicólogos nas escolas que ajudem os alunos nas suas escolhas vocacionais. Este pode ser um aspecto importante a ter em conta pois uma melhor orientação poderá conduzir à escolha de um percurso mais adaptado, afastando, de certo modo, a questão do abandono. Mas como conseguir isto se o número de psicólogos que trabalham nas escolas na orientação profissional é mínimo (500 psicólogos para mais de 12000 estabelecimentos de ensino)?

32 SOCIEDADE

SEMANA DA EDUCAÇÃO

O PAÍS NÃO PODE "RENDER-SE À TRAGÉDIA NACIONAL" DO ABANDONO ESCOLAR

No segundo dia da Presidência Aberta dedicada à educação, Jorge Sampaio quis ouvir e mostrar as medidas que podem a combater as saídas precoces e desqualificadas da escola. Em Idanha-a-Nova ouviu o testemunho de jovens que um dia dei de estudar, mas que encontraram no ensino profissional um novo alento. Em Castelo Branco visitou uma escola que crio nova hora só para dar atenção aos problemas dos alunos. *Por Isabel Leiria (texto) e Miguel Madeira (foto)*

Mafalda ainda conseguiu chegar ao 12º ano, mas as várias disciplinas em atraso fizeram-na desanimar e sair da escola que frequentava. Andreia chumbou no 10º ano. Admite que não estudava o "suficiente". Juliana acumulava negativas a Matemática desde o 9º. O problema de Rui foram as "noitadas".

A dada altura da sua vida, todos eles acabaram por desistir dos cursos que seguiam. Mas, mais do que histórias de abandono, o que estes jovens têm em comum é o facto de terem decidido refazer os seus percursos e regressado à escola. Com melhores notas, com muito mais empenho e sobretudo mais acompanhados, dizem, estudam agora na Escola Profissional da Raia de Idanha-a-Nova (EPRIN).

Ontem, foi o seu testemunho que Jorge Sampaio quis que todos ouvissem. No se[...] dia da Presidê[...] dicada [...] Estado fez questão de deixar bem claro que não era mais possível o país "render-se a esta tragédia nacional", que é ter quase 45 por cento dos jovens (entre os 18 e os 24 anos) a sair da escola sem completar o 12º ano.

"É o nosso pior problema. Não podemos ter tanta gente sem a instrução que é indispensável para um país civilizado. É este o recado que quero dar: ou o país dá uma volta a sério e assume que a formação das pessoas é uma coisa central ou ficaremos muito à margem e mais periféricos do que somos", insistiu o Presidente da República numa das suas intervenções. Todas elas dedicadas ao tema do abandono escolar e tendo sempre presente que os níveis de qualificação já atingidos pelos novos Estados-mem-

dicada à educação, o chefe de Estado fez questão de deixar bem claro que não era mais possível o país "render-se a esta tragédia nacional", que é ter quase 45 por cento dos jovens (entre os 18 e os 24 anos) a sair da escola sem completar o 12º ano.

Sampaio quis fazer ouvir os que voltaram à escola e estão agora melhor preparados para a vida

não (ver caixa) —
também de sua j
ministro da Educa
acompanha o Presi
longo da semana, t
tas e os jovens falara
modelo de avaliação
— por módulos suces
que "é mais fácil".
Foi assim que Artu
actualmente aluno d
Multimedia, melhor
deravelmente as su
a Matemática. Mas
por exemplo, nunca t
psicólogo na sua ant
(secundária de Idanh
que o ajudasse a perc
queria seguir.
De acordo com os
Ministério da Educa
mero de psicólogos q
acompanhamento e o
profissional nas esc
chega aos 500, para
de mais de 12 mil e
mentos de ensino.
Para Rui, 22 anos,
está também em gara
apoio aos alunos" e u
disponibilidade e pro
entre professores e es
A ideia é partilhada
Sampaio, que, nestes
tem reforçado a im
dos apoios escolares
tores "decisivos para
qualidade do ensino"
É o caso do "estud
nhado", uma das áre
pelo anterior Gov
âmbito da reorg
curricular do ensin
A actual equipa mi
foi entretanto criti
ter reduzido de dois
o número de profess
asseguram esta área
A experiência n
Secundária Amato
em Castelo Branco
foi criada uma terc
na chamada "dir
turma", foi outra das
acompanhadas por

In Público, 6 de Maio de 2004.

De facto, há algumas ideias para combater o abandono escolar, mas é preciso tomar medidas para que essas ideias funcionem. No entanto, é difícil evoluir positivamente nesta e noutras questões quando as reformas legislativas se anulam umas às outras!!!

Helena Fonseca
Maria José Bóia

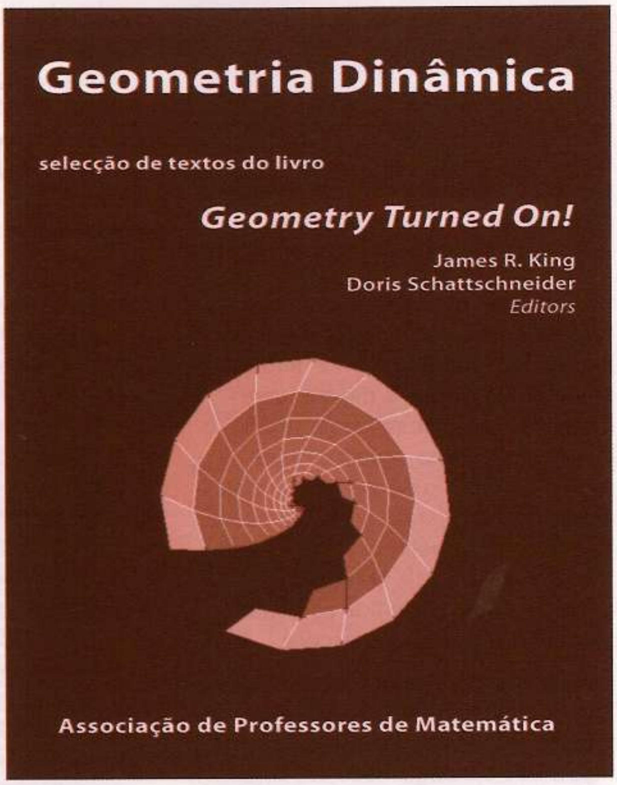
APM
Publicações

Geometria Dinâmica

Selecção de textos
do livro *Geometry Turned On!*

149 pp. APM, 2003

Sócio: €8,00
PVP: €16,00



Este livro contém a tradução de 13 textos incluídos no livro *Geometry Turned On*, publicado em 1997 pela Mathematical Association of America (MAA). A maior parte dos textos da edição americana são extensões de comunicações apresentadas num encontro anual do MAA, no âmbito de uma sessão especial dedicada à geometria dinâmica.

A publicação desta colectânea em português é uma iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM e tem por objectivo tornar mais acessível aos professores de Matemática em Portugal um excelente conjunto de relatos e análises sobre a utilização do software de geometria dinâmica nos ensinos básico, secundário e superior.

Para mim a Matemática é …

144 pp. APM e ESE Bragança, 2003

Sócio: €6,00
PVP: €12,00

Esta edição apresenta uma colectânea de textos sobre a matemática na escola recolhidos ao longo dos anos de 2000 e 2001. Os autores dos textos são pessoas do distrito de Bragança, incluindo alunos, educadores e professores, das mais diversas idades, percursos escolares, tipos de escolas e áreas disciplinares (línguas, ciências sociais, ciências da natureza, educação física, educação musical e plástica), que se exprimem em prosa, poesia, ilustração e fotografia.

A edição deste livro é um contributo para que se tenha uma melhor visão social da matemática e resulta da parceria entre a APM (através do seu Núcleo Regional de Bragança) e da Escola Superior de Educação de Bragança.

O (re)encontro inicial

Arsélio Martins

A ideia de introduzir um módulo inicial para *afagar* a esquina da mudança aparece-nos como uma necessidade trivial, os assuntos tratados no início do 10º ano não podem mobilizar senão o que se sabe, permitindo ao estudante fazer a ponte entre o que aprendeu e o que vai aprender e ao professor começar por respeitar o aprendido e remediar.

Do reconhecimento da dificuldade, …

Em todas as transições há sérios problemas de adaptação dos estudantes. Assim acontece com a transição do ensino secundário para o ensino superior, como acontece com a transição do 1º para o 2º ciclo, do 2º para o 3º, e, deste último para o ensino secundário. Acrescentam-se às dificuldades normais das radicais mudanças de idade física e mental, as dificuldades que resultam das exigências de novos comportamentos sociais e escolares e da capacidade de mobilizar adequadamente os conhecimentos e as técnicas adquiridas a novos contextos e necessidades. O estudante jovem pode não reconhecer os conceitos, que adquiriu antes nos novos contextos de ensino e aprendizagem, nos discursos dos professores ou nos manuais. Como se o que aprendeu num ciclo não tivesse qualquer utilidade e tivesse de rejeitar o que antes soube. Esta situação é criada e alimentada por discursos e práticas escolares de professores e pais, como se fosse preciso sinalizar de forma dramática cada nova etapa de crescimento.

A ideia de introduzir um módulo inicial para *afagar* a esquina da mudança aparece-nos como uma necessidade trivial tanto para professores como para estudantes. De facto, os assuntos tratados no início do 10º ano não podem mobilizar senão o que se sabe, permitindo ao estudante fazer a ponte entre o que aprendeu e o que vai aprender e ao professor começar por respeitar o aprendido e remediar, localizando sempre no passado, as falhas em aprendizagens necessárias e úteis para prosseguir os estudos. Tais falhas não podem ser atribuídas por completo aos estudantes, antes têm origem em deficiências do sistema escolar, no que respeita ao cumprimento de programas específicos e, em geral, à falha nos métodos de estudo e motivação, para além da falta de intervenção no nível social e familiar.

… às tentativas de solução …

Para fazer face a estas dificuldades, o programa ajustado de Matemática propôs, em 1997, para o início do 10º ano a resolução de problemas de Geometria que mobilizassem o adquirido. Em vez das revisões dos assuntos matemáticos magistralmente feitas pelos professores, propunha-se aos estudantes que lembrassem e mobilizassem tudo o que sabiam para resolver novos e velhos problemas (com significado, motivadores).

… e propostas actuais.

O actual programa de Matemática A, em vigor desde 2003, considera um módulo inicial nos seguintes termos:

O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o

Ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar todas as conexões com outros temas tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática.

Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas. Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra deixando para outra altura os problemas que se integrem no tema Funções ou Probabilidades e Estatística. Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

Os exemplos de problemas propostos são:

- Unindo os pontos médios de um quadrilátero encontramos sempre um paralelogramo?
- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
- Estudo da possível semelhança entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
- Como resolveu o matemático Pedro Nunes equações do primeiro e do segundo graus? Podemos identificar, nos seus escritos, o uso da fórmula resolvente ou pelo menos de alguns casos particulares? Que casos Pedro Nunes não considerou ou considerou impossíveis?
- Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?

acrescentando que "alguns destes problemas poderão ser substituídos, com vantagem, por actividades ou problemas ligados ao mundo real, propostos e planificados por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas".

E os manuais escolares actuais apresentam estes e outros problemas (para resolver, em parte ou completamente resolvidos) em diversas versões e variantes.

Olhar para fracções e dízimas

Uma volta dada aos manuais permite constatar que essas propostas foram entendidas de forma diversa pelos diversos autores. No que respeita ao último assunto proposto para estudo, o problema dos números racionais e das dízimas, destacam-se duas preocupações — uma delas referida à divisão em si mesma e outra relacionada com a calculadora e as suas limitações[1].

Num dos manuais consultados, faz-se apelo a um diálogo entre jovens a quem se propõe o estudo do assunto[2]. Aliás este manual apresenta, para vários assuntos, essa técnica de expor sequencialmente os raciocínios atribuindo-os a personagens — Sócrates e o escravo, por exemplo — faz lembrar os diálogos que Galileo propõe para argumentar a favor ou contra as ideias em debate ou os mais recentes produzidos por Malba Tahan[3] a propósito do método heurístico. De outra forma, também Sebastião e Silva defende o método para o estudo de alguns assuntos. Malba Tahan tem a descrição de aulas de diálogo conduzido pelo professor, precisamente sobre as fracções próprias e impróprias, começando por comparar duas fracções 3/8 e 4/9, utilizando os seus complementos 5/8 e 5/9, o que introduz uma variante de raciocínio às *técnicas* de comparação de fracções que podem (ou não) ter-se constituído em rotinas que substituem o pensamento e devem ser readquiridas na sua potência com significado para os jovens. Aliás, Malba Tahan conduz o debate para conjecturar resultados interessantes como sejam: somando o mesmo número natural aos dois termos de uma fracção própria, obtém-se um número maior, e, o contrário acontece se fizermos o mesmo a qualquer fracção imprópria[4].

Não sabemos se o estudo dos assuntos por métodos de diálogo forjado entre estudantes preocupados com o mesmo assunto resulta em geral. Mas pensamos que é uma forma tentadora e deve ser experimentada.

Para além das preocupações e métodos que pudemos descobrir nos manuais, estamos em crer que este é ainda um assunto que merece algum tratamento histórico, particularmente ao nível da evolução das notações, à semelhança do que alguns manuais experimentam com a resolução de equações, recorrendo a Pedro Nunes. De facto, a escrita actual dos números decimais (a parte inteira, separada por uma vírgula, da parte decimal) é relativamente recente e vale a pena sempre valorizar o percurso ao nível das notações. O desenvolvimento das notações e a escrita matemática consagrada (e introduzida na língua em geral) dá uma ideia bem clara sobre a importância que deve ser dada a tal desenvolvimento no futuro e que os estudantes devem praticar para compreender a linguagem simbólica, como mais um instrumento decisivo para o pensamento científico.

A respeito da regra de numeração escrita no sistema decimal, tal como a conhecemos hoje, deve ser feita referência à escrita posicional de Stevin (1585) ainda sem vírgulas, a J. Napier (Neper) que, em 1617, como resultado da divisão de 81094 por 432, escreve 1993, $2^{0}7^{00}3^{000}$, enquanto Giraud, em 1629, separa a parte inteira da decimal por uma barra vertical, assim: Dividindo 3218 por 10, obtém-se

$$321\frac{8}{10}$$

que se representa por 321|8. Waliis, em 1657, escreve como separador a vírgula. E interessa dar a conhecer a importância do sistema métrico decimal na maior parte dos países que é o que fixa ou generaliza a escrita tal como a conhecemos e já perto do fim do século XVIII.

Já a propósito do traço de fracção e da forma como escrevemos os números fraccionários, pode referir-se Leonardo de Pisa (Fibonacci), sendo que as denominações de numerador e denominador são posteriores a 1400 e a distinção entre fracções próprias e impróprias é também já do século XVIII. Convém colocar os estudantes perante a escrita antiga para descrever uma qualquer situação[5].

Sobre a culpa forjada da calculadora...

O que é verdade é que, apesar de haver grandes insistências no ensino básico sobre o cálculo de múltiplos e submúltiplos, de múltiplos e divisores comuns que acompanham uma artilharia de regras para as operações com fracções, deparamos com um grande número de jovens que esqueceram e desprezam todas as técnicas aprendidas e as substituem por utilizações incorrectas da calculadora, com total falta de sentido crítico sobre os resultados obtidos para os mais simples problemas. Em algumas escolas com ensino básico, no terceiro ciclo, têm sido induzidas (por alguns manuais) introduções de conceitos, ligados a números, responsáveis pelo desprezo e abandono das operações com fracções. Concluir que um determinado resultado é uma dízima infinita periódica (ou não) a partir da observação do visor de calculadora é um erro com consequências devastadoras. As limitações da calculadora representariam para estes trabalhos escolares e para muitos outros uma fonte de ensinamentos. Só, que em vez de utilizar a matemática da calculadora, pode estar a ser feita uma simplificação grosseira e errada que resulta tanto contra a tecnologia como contra a matemática em geral.

A propósito do uso da calculadora, no actual programa de Matemática, escreve-se:

> Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a *copiar* o que vêem.
>
> É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre chamando a atenção dos estudantes para a confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos.

... e as propostas para limpar a culpa

A proposta de trabalhar com fracções e dízimas logo no módulo inicial serve, antes de tudo, para apressar a aquisição da calculadora gráfica, para que ela seja habitual no dia a dia escolar, desde o início do 10º ano.

Durante este ano lectivo, reparei que os estudantes do 10º ano, a trabalhar comigo, utilizam a máquina com facilidade, mas sem escolher os contextos em que ela serve e sem a evitar quando ela não é boa escolha. Particularmente mal usada foi quando deixaram de trabalhar com os números irracionais e as propriedades das operações.

Tive, por isso, necessidade de chamar várias vezes a atenção, para as limitações da calculadora (também e principalmente) no cálculo e procurando separar o uso nas resoluções de problemas em que aceitamos e controlamos erros nas aproximações, das resoluções em que procuramos as soluções exactas ou não há razão para não as obtermos.

Tornou-se evidente a necessidade de os levar a estudar as limitações da calculadora e apresentei-lhes propostas de trabalho e discussão sobre as fracções e as dízimas:

A que fracções correspondem dízimas finitas?

A calculadora dá todas as dízimas finitas?

Que fracções conduzem a dízimas infinitas?

Como se comportam os períodos para os diversos denominadores?

Posso tirar conclusões sobre os períodos, só com recurso à calculadora?

À medida que eles iam avançando palpites e conjecturas, eu fui fornecendo novos exemplos de denominadores ou de fracções e alguns deles identificaram regularidades nos períodos em que nunca tinha reparado. Juntemos, para exemplo, um olhar (do Valter, no caso). (Ver figura da página seguinte.)

Começaram como é óbvio pelos denominadores potências de 2 e potências de 3. Avançaram palpites sobre os denominadores potências de 10, claro!, mas demoraram a tirar conclusões sobre os denominadores potências de 5.

Uma dízima finita que a calculadora não forneceu completamente foi logo vista com o inverso de uma potência de 2, que serviu também para ver com quantas casas decimais a calculadora trabalha.

No campo das dízimas infinitas periódicas, parece-me que o denominador 7 é um ponto de partida muito interessante para a motivar, com a beleza das regularidades, os mais renitentes. Espantoso é que não tenham conseguido justificar com rapidez porque é que o período de 8/7 é o mesmo de 1/7. Para desequilibrar algumas conjecturas serve o denominador 13. Para deitar por terra, as ilusões de obter sempre os períodos com segurança, usando a calculadora, usei uma fracção de denominador 31, que tinha um período de 15 ou 16 algarismos.

Também procurámos ver como falha e acerta a calculadora na transformação de dízimas em fracções, para o que facilmente aparecem exemplos surpreendentes. Finalmente, verificámos as capacidades da calculadora para as operações com fracções. E, ao contrário do que eu esperava, dois alunos pareceram-me viciados em *divisões à mão*. Quem havia de dizer?

Notas

1 Por exemplo, veja-se: Bernardes, Loureiro, et. al. Matemática 10 Programa A. Contraponto. Porto: 2003.

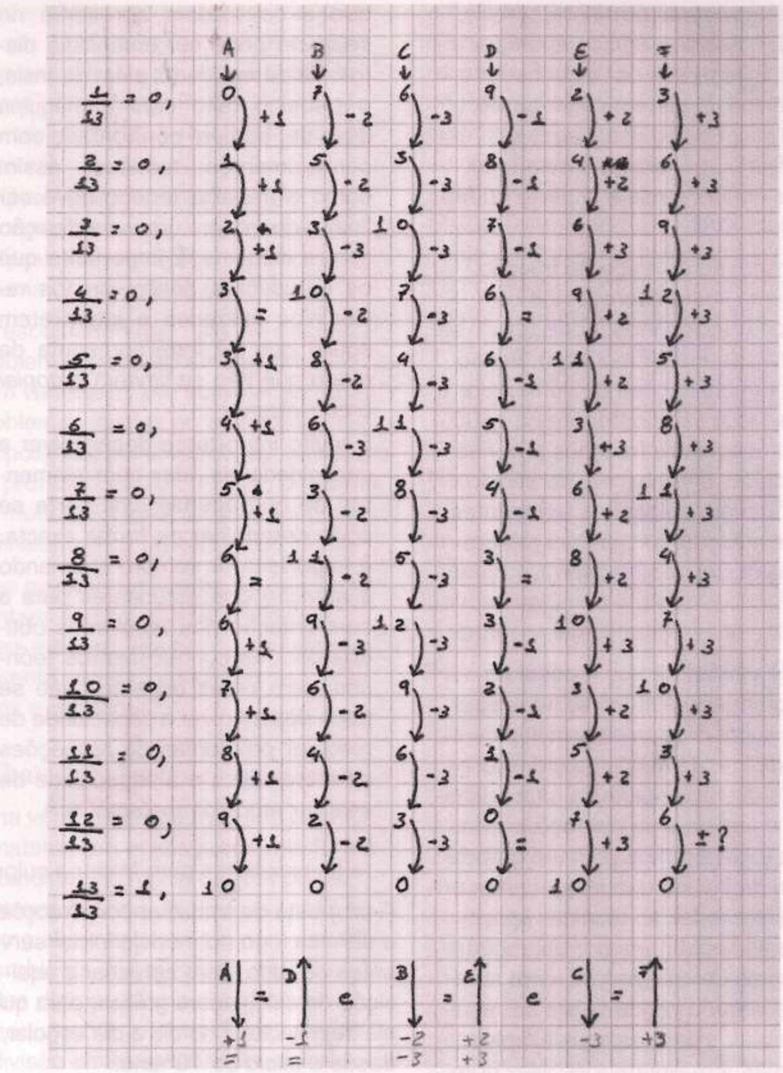
2 É o caso de Jorge, Alves, et. al. Infinito 10 A. Areal. Porto: 2003.

3 Vale a pena apresentar aos estudantes esta personagem, Ali Iezid Izz-Edim ibn Salim Hank Malba Tahan, criada pelo matemático e professor Júlio César de Melo e Souza, bem como alguns dos seus livros que devem estar nas bibliotecas escolares.

4 Malba Tahan. Didáctica da Matemática 1° vol. Ed. Saraiva. S. Paulo: 1961.

5 Enciclopedia delle Matematiche Elementari e complementi con estensione alle principali teorie analitiche, geometriche e fisiche loro applicazioni e notizie storico-bibliografiche a cura di L. Berzolári, G. Vivanti e T. D. Gigli, Vol 1 Parte 1; Editore Ulrico Hoepli, Milano: 1950. Estrada, Sá, et al. História da Matemática. Universidade Aberta. Lisboa: 2002.

Arsélio Martins
Esc. Sec. de José Estevão



Materiais para a aula de Matemática

Investigar fracções, dízimas e os limites da calculadora

A propósito desta actividade aconselhamos a leitura do artigo *O (re)encontro inicial*, de Arsélio Martins, publicado nesta revista.

Trata-se de uma actividade de investigação, é por isso apresentada aos alunos de forma aberta, de modo que sejam eles a organizar, a avançarem palpites e conjecturas, a argumentarem, a comunicarem ... cabe ao professor, ao seu estilo, ir levantando as questões que considere necessárias e/ou pertinentes para que a investigação avance ou para abalar algumas conjecturas. As sugestões indicadas na ficha pretendem facilitar o início do trabalho mas poderão ou não ser dadas aos alunos à partida.

Trata-se de uma tarefa que vai de encontro ao que se propõe para o módulo inicial da Matemática A. Segundo o Arsélio Martins, ela serviu também para apressar a aquisição da calculadora gráfica e levar os alunos a estudar as suas limitações.

A redacção

Escola..

Ano/Turma............................ Data...................... Aluno(a).........................

Investigar fracções, dízimas e os limites da calculadora

Organiza uma investigação que te permita dar resposta às seguintes questões:

1. A que fracções correspondem dízimas finitas?
   A calculadora dá todas as dízimas finitas?

2. Que fracções conduzem a dízimas infinitas?
   Como se comportam os períodos para os diversos denominadores?
   Posso tirar conclusões sobre os períodos, só com recurso à calculadora?

Sugestão:

1. Faz um registo cuidado das tuas experiências e das tuas conjecturas.
2. Começa a investigação de forma organizada estudando por exemplo fracções cujos denominadores são potências de 2, de 3, de 5 ..., ou iniciando o estudo com fracções de numerador 1 e variando o denominador, ...
3. Não esqueças o teste aos limites da tua calculadora, registando os casos em que ela falhou.

Ser professora ... no básico

Pediram-me *a realização da descrição de uma aula do básico* ...

E eu, pensei que, iria preencher um inquérito com cruzinhas ...

Mas não, é algo descritivo ...

Primeiro Pensamento: "Que chato ...", "Que seca ...". Esta última aprendi com os meus alunos, pois a expressão "*Que seca*", traduz muita coisa. Oh! Traduz aborrecimento, angústia, exaustão, falta de atenção, enfim ... Lá iremos.

Segundo pensamento: "Que giro ...", "Que fixe ...", "Bué da louco ...". Estas últimas também aprendi com os meus alunos! Estas expressões também traduzem muito: alegria, interesse, motivação, enfim ... Também lá iremos.

Realmente as cruzinhas são especiais: cómodas, rápidas, sintéticas, tiram-se muitas conclusões, não dão muito trabalho, mas ... E o importante é o *mas*, não revelam tudo o que vai na alma de um professor.

Sim, sou professora ...

Dez letras para muitas profissões!

Eu tenho muitas profissões! Sou aquela que ensina, aquela que acolhe, aquela que se preocupa, aquela que ri e faz rir, aquela que chora e faz chorar, aquela que luta, aquela que incute disciplina, aquela que motiva, aquela que se importa, aquela que...

(...) Hoje é dia 25 de Junho. As aulas já terminaram ... Dei (será *dei* a palavra certa?) tantas aulas ao longo deste ano ...

E se eu, sem me perder nos meus pensamentos, simplesmente falasse dos meus alunos?

Existem alunos empenhados, trabalhadores, interessados, motivados e até excitados com a matemática e um todo que se concebe com ela ...

Sim, com certeza, eu sei que existem alunos desses, pois fui professora de uma turma dessas e no último dia fiquei de pé, junto à minha secretária, a vê-los sair e a pensar: *"Já estou com saudades"*. As lágrimas ao canto do olho também saíram ... (...)

Contudo, também existem alunos com pouco interesse pela escola e as suas actividades, desmotivados, desconcentrados, aborrecidos, angustiados, exaustos, sem rumo, solitários, indisciplinados, ...

Sim, com certeza que eu também sei que existem alunos assim, pois fui professora de quatro turmas dessas. (...)

Falemos desses alunos:

Foi um ano inteiro de luta ...

Sim, como é que eu irei *dar* a aula de amanhã? Que mais posso *inventar*? Que mais posso *fazer*? Tentei motivá-los de tantas formas e feitios ...

Tanta coisa para ensinar, tanta coisa para aprender e tão pouca vontade de o saber ...

Cerca de meia dúzia dos alunos desta turma faltavam sistematicamente e quando apareciam nada percebiam do que se passava na aula ...

Cerca de outra meia dúzia, não levava livro, caderno, caneta, máquina de calcular, ...

Outra meia dúzia ainda achava mais interessante *desconcentrar os colegas*, do que aquelas letras ou aquelas contas esquisitas ...

Quando eu levava um texto, uma actividade gráfica, e porque não uma aula ao ar livre, ouvia: *"Isto é que é matemática?"*.

Então vejamos:

Proporcionalidade directa:

Pensei: que tal Gulliver e os liliputianos

Sim, podemos determinar as dimensões dos objectos no mundo real e no mundo dos liliputianos, segundo uma certa razão!

Ora, o filme passou há relativamente pouco tempo, os livros existem há muito ... Talvez seja interessante!

Reacção dos alunos: quem é esse Gulliver? Nós nunca vimos o filme! Eu vi uma vez, mas *misturar* isso com matemática ...

E, então eu, que sou professora de matemática, descobri mais uma profissão: contadora de histórias! Depois só tive que relacionar tudo com a matemática. A história até foi *bué da louca*, mas depois a parte de ligar à matemática foi *seca*. Contudo, consegui que até aqueles que estavam entretidos a escrever bilhetinhos ou fazer desenhos, levantassem a cabeça, ouvissem a história e percebessem o que era pretendido.

Torna-se difícil todos os dias procurar assuntos que motivem alunos destes. São alunos com 15, 16, 17 e 18 anos, ainda a frequentar o 7° e o 8° ano! Sinto que tenho de estar a par de todos os seus possíveis interesses: programação de televisão, que nem sempre é do meu agrado, futebol (já aprendi nomes de alguns jogadores, árbitros e treinadores, regras de jogo, posições no campeonato, etc.); sei de todos os seus interesses namoradeiros, estou a par da última moda e até de algumas das *boys* e *girls bands* da actualidade! ...

Transmitir matéria, interligar conteúdos e relacioná-los com os temas de interesse dos meus alunos, é tarefa árdua e missão praticamente impossível. Todos os dias surge uma etapa nova, todos os dias se vive uma nova aventura ... Algumas vezes, limito-me a cumprir objectivos, outras tento ir ao encontro dos seus interesses usando-os para a transmissão dos conteúdos.

Como são indisciplinados, inicio sempre a aula, escrevendo o sumário no quadro. Isto evita que cometam erros de ortografia e obriga a que se acalmem. Circulo pela sala a fim de verificar que trazem todos o material necessário e não existem discussões por causa dos *empréstimos*. Consoante o tipo de alunos, o motivo dos conflitos, a razão da indisciplina, sou obrigada a desenvolver todos os dias, a todas as horas, novas e, às vezes, até peculiares estratégias.

Será só a indisciplina, a causa de todos os meus devaneios?

Nem pensar! O pior é quando consigo que estejam todos com atenção e noto que existe uma aluna que está com um ar mais apático do que é costume! Por exemplo, chamemos-lhe Maria. A Maria é uma aluna que realiza os trabalhos de casa, mas ultimamente anda estranha. Não responde às questões que são colocadas em aula, está abatida e ... *"O que é que se passa consigo, Maria?"*

Resposta dos colegas: *"'Stora', a Maria está a fazer dieta porque acha que é gorda. Ela deixou de comer e depois sente-se mal"*.

Chamo a funcionária, dou 2 euros à aluna, peço que a levem para que coma. (...)

Logo que é possível, tenho uma conversa particular com a Maria.

Mas isto não é tudo! Os alunos que se encontram dentro da escolaridade obrigatória seleccionam, sim seleccionam as disciplinas. Por exemplo, o João tem 13 anos. Os pais do João, os vizinhos do João, os amigos do João e até os ídolos do João (aquela miúda gira que tinha um papel no *Médico de família*) nunca gostaram de matemática. Pois é, todos lhe dizem que é difícil, que não serve para o dia a dia, que ele não vai precisar daquelas letras, contas, fórmulas ... Esquisitas ... Até aquela jornalista conceituada da televisão fez um programa sobre isso! *"Oh 'Stora' não se canse, não vale a pena!"*, e por mais que eu diga que vale a pena e que insista, o João não se interessa e acrescenta: *"olhe eu posso passar com três negas, por isso já escolhi que uma delas é a sua!"*. (...)

Mas ainda existe pior ... Certos alunos não dizem nada e simplesmente não vão às aulas das disciplinas seleccionadas, pois nem reprovam por faltas ... São até capazes de o fazer ao longo de todo um ciclo ... O que fazer a estes alunos num final de ciclo? Como é possível ensinar tudo o que está para trás?

Somos professores! *"A esperança é sempre a última a morrer ..." "Água mole em pedra dura tanto bate até que fura ..."* De vez em quando, também somos milagreiros e conseguimos modificar a forma de estar e pensar de alguns e se eles até conseguem resultados positivos, os pais acham que *"O meu filho é muito inteligente. Até conseguiu positiva a Matemática! ..."*.

Sobra o alento de uma professora que não sabe o que é desistir, que todos os anos recomeça tudo, com novos alunos e com novas expectativas ...

Se conseguir ouvir, nem que seja uma única vez ao longo de um ano inteiro *"Que fixe"*, *"Bué da louco"* em vez de *"Que seca"*, nem tudo estará perdido e valerá sempre a pena porque a alma de um professor não é pequena!

Helena Paula Pires
Escola Secundária Fernando Namora

Maior que 10 anos: 21 de Outubro de 1993–26 de Março de 2004, tudo na mesma?

Há dez anos, no 1° trimestre de 1994, a Direcção da APM publicava o editorial *A Reforma não acabou!*. No texto pode ler-se: "A situação é grave. As orientações que vão sendo enviadas aos professores, associadas ao processo de avaliação, no caso do ensino secundário, poderão vir a dar razão aos que alertaram para o facto de as novas metodologias propostas nestes programas não estarem associadas a novas ideias sobre o ensino da Matemática e poderem portanto ser abandonadas na primeira oportunidade" (APM, 1994, p. 1).

Nesta altura vivia-se o primeiro ano da reforma de 1993 e ao nível da avaliação entrava em vigor o Despacho Normativo 338/93 de 21 de Outubro de 1993. Este despacho prometia várias novidades: (1) A avaliação dos alunos é um elemento integrante da prática educativa que permite a recolha sistemática de informações e a formulação de juízos para a tomada de decisões adequadas às necessidades dos alunos e do sistema educativo; (2) A avaliação dos alunos do ensino secundário tem por objecto verificar o grau de cumprimento dos objectivos globalmente fixados para o ensino secundário, bem como para os cursos e disciplinas que integram este nível de ensino; (3) No ensino secundário distinguem-se as modalidades de avaliação seguintes: a) Avaliação formativa; b) Avaliação sumativa; c) Avaliação aferida. As modalidades de avaliação referidas no número anterior devem harmonizar-se de modo a contribuir para a qualidade do sistema educativo e, designadamente, para o sucesso educativo dos alunos.(...) A avaliação sumativa processa-se através das seguintes formas: a) Avaliação sumativa interna; b) Avaliação sumativa externa.(...) A avaliação interna destina-se a informar o aluno e o seu encarregado de educação do estado de cumprimento dos objectivos curriculares e a fundamentar a tomada de decisões sobre o percurso escolar do aluno. A avaliação interna é da responsabilidade conjunta dos professores que integram o conselho de turma, devendo o seu resultado ser comunicado ao aluno e ao encarregado de educação pelo director de turma. (...) A avaliação externa é da responsabilidade do Ministério da Educação e tem por objectivo contribuir para a homogeneidade nacional das classificações do ensino secundário, permitindo a conclusão deste nível de ensino e a determinação da respectiva classificação (Diário da República n° 247, 1993, p. 5935).

Se o ponto (1) não criou adversários, pois era a lógica da avaliação formativa que tanto serve o aluno como o professor, os pontos (2) e (3) não foram consensuais.

A implementação de uma modalidade de avaliação formativa trazia vantagens para alunos e professores, no caso do aluno uma ajuda para aprender e para se desenvolver (Perrenoud, 1999), e, no caso do professor é uma intervenção sobre a própria construção dos conhecimentos (Allal, 1988). Para ambos existe o feedback sobre o desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem, numa lógica de construção de uma maior autonomia e participação do aluno na sua aprendizagem.

Em (2) e (3), a avaliação do sistema educativo através das avaliações das aprendizagens dos alunos colocava os professores perante o dilema de saber: o que é afinal cumprir o programa? É preparar os alunos para um exame nacional. Ou para prova global. É leccionar todos os conhecimentos. Ou será desenvolver as capacidades de resolver problemas, de comunicar, de cooperar, de trabalhar em grupo, de conjecturar, de pesquisar. E como é que estas poderão ser avaliadas através de um exame?

Passaram 10 anos! 10 anos em que o programa do ensino secundário foi reajustado: "o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que cerca de metade seja feita usando outros instrumentos de avaliação que não testes clássicos. Os teste escritos em si mesmos poderão ter aspectos muito positivos se a sua utilização for ponderada com outros elementos de avaliação. Só assim se poderão testar outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular recomendamos fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstração, composição/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas, etc) que reforce a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou da participação na área-escola). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar este tipo de avaliação" (Ministério da Educação, 1997, p. 13).

10 anos em que existiu o Relatório Matemática 2001: "tendo em atenção que os objectivos curriculares incluem competências nos domínios dos conhecimentos, capacidades, atitudes e valores, os professores devem procurar encontrar formas diversificadas de recolha de dados para avaliação dos alunos, recorrendo, para além dos testes, a relatórios e outros trabalhos e a desempenhos orais dos alunos e procurar formas práticas e eficazes de registo desses dados de forma a viabilizar uma avaliação formativa mais sistemática e a sua integração na avaliação sumativa" (APM; 1998, p. 42).

10 anos em que muito se disse e muito se investigou: "um primeiro sintoma é o de [os alunos] estes desvalorizarem tudo aquilo que não se identifica com as características de um saber testável numa prova. Por exemplo, são bem possíveis o desinteresse, e porventura a recusa, no desenvolvimento de trabalhos realizados em grupo, de tarefas que exigem o seu desenvolvimento ao longo do tempo e uma maior autonomia e responsabilidade por parte dos alunos. Estas provas de avaliação externa correm o risco de assumir um papel de tal destaque que surgem aos olhos dos alunos (e mesmo talvez dos professores) como a verdadeira razão para aprender Matemática" (Leal, 1997, p. 5).

E 10 anos depois, o Decreto-Lei 74/2004 de 26 de Março: (1) A avaliação consiste no processo regulador das aprendizagens, orientador do percurso escolar e certificador das diversas aquisições realizadas pelos alunos; (2) A avaliação tem por objecto a aferição de conhecimentos, competências e capacidades dos alunos e a verificação do grau de cumprimento dos objectivos globalmente fixados para o nível secundário de educação, bem como para os cursos e disciplinas nele integrados; (3) A avaliação das aprendizagens compreende as modalidades de avaliação formativa e avaliação sumativa. A avaliação formativa é contínua e sistemática e tem função diagnostica, permitindo ao professor, ao aluno, ao encarregado de educação e a outras pessoas ou entidades legalmente autorizadas obter informação sobre o desenvolvimento das aprendizagens, com vista ao ajustamento de processos e estratégias. A avaliação sumativa consiste na formulação de um juízo globalizante, tem como objectivos a classificação e a certificação e inclui: a) A avaliação sumativa interna, da responsabilidade dos professores e dos órgãos de gestão pedagógica da escola; b) A avaliação sumativa externa, da responsabilidade dos serviços centrais do Ministério da Educação, concretizada na realização de exames finais nacionais. (Diário da República nº 73, 2004, p. 1934)

10 anos depois? Como será em 2014?

Referências Bibliográficas

A Direcção da APM (1994). A Reforma não acabou! *Educação e Matemática nº 29*, pp.1-3.

Allal, L. (1988) Pour une formation transdiciplinaire à l'évaluation formative, *Éducateur*, nº 3, pp. 22-26.

Associação de professores de matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática.* Lisboa: APM e IIE.

Leal, L. (1997) Exames: uma via a prosseguir? *Educação e Matemática nº 43*, pp. 5- 11.

Ministério da Educação (1993). Despacho Normativo nº 338/93. *Diário da República nº 247*, pp. 5935-5937.

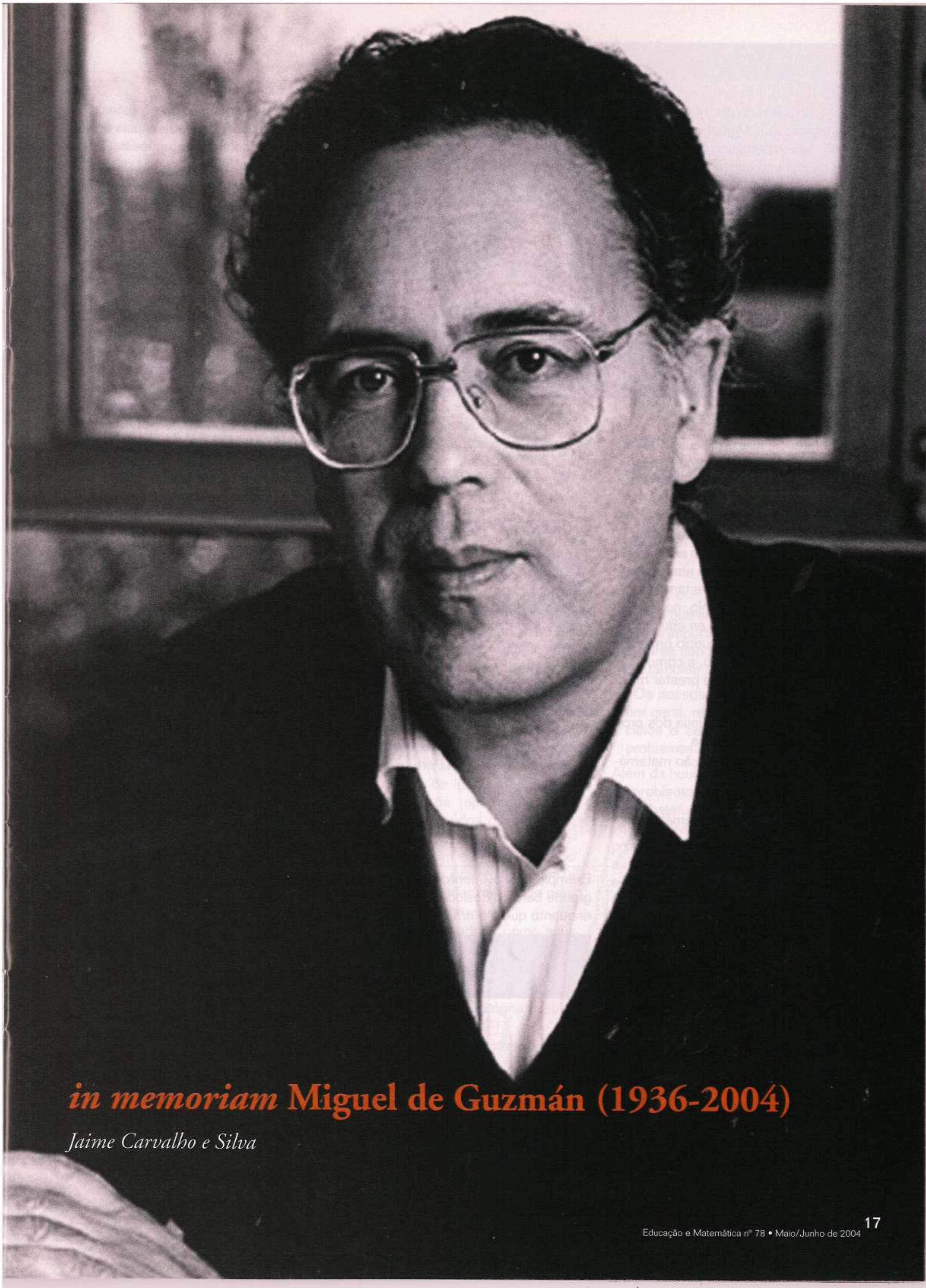
Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10. 11º e 12º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2004). Decreto –Lei nº 74/2004. *Diário da República nº 73*, pp. 1931- 1942.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação. Da Excelência à Regulação das Aprendizagens. Entre Duas Lógicas.* Porto Alegre: Artmed Editora.

Paulo Jorge Ribeiro Dias
Escola Secundária da Moita

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar compatível a inclusão de todas as contribuições no espaço disponível da revista.



in memoriam Miguel de Guzmán (1936-2004)

Jaime Carvalho e Silva

Faleceu no passado dia 14 de Abril de 2004 o professor Miguel de Guzmán Ozámiz, um matemático distinto, um académico muito activo, um educador que deixou marcas em todos os seus alunos (como se pode ver até pelos vários fóruns da internet que se lhe referem[1]), um divulgador entusiasta da Matemática. Penso que Miguel de Guzmán foi um dos poucos matemáticos contemporâneos com uma intervenção abrangente e consequente nas questões da educação matemática. A latitude da sua intervenção é impressionante: produziu reflexões teóricas, deu múltiplos exemplos, escreveu lições exemplares e meteu ombros a inúmeras iniciativas.

Na conferência que proferiu em 1996 no ICME[2] de Sevilha lançou um desafio de peso à comunidade matemática, mostrando detalhada e convincentemente como pode e deve ser a sua intervenção para promover *uma visão global da matemática na cultura humana* pondo em prática um *espírito de colaboração* com as restantes comunidades. Por exemplo, no texto *Tendencias innovadoras en educación matemática* apresenta quatro projectos a que, na sua opinião, a comunidade matemática deveria prestar mais atenção:

a) formação inicial e contínua dos professores de matemática
b) investigação em educação matemática
c) educação matemática
d) talento precoce em matemática.

A personalidade de Miguel de Guzmán fascinava quem com ele contactava e devo reconhecer publicamente a enorme influência que a sua palavra e a sua obra tiveram na minha actuação, nomeadamente a nível da elaboração e acompanhamento dos programas de Matemática do Ensino Secundário. Com efeito, nos programas portugueses do Ensino Secundário de 1995, são claramente visíveis as influências do pensamento de Miguel de Guzmán. Por exemplo, no que diz respeito ao lugar aconselhável da tecnologia no currículo, um dos princípios gerais enunciados no programa é:

> "Na expressão feliz de Miguel de Guzmán, os alunos devem ser preparados para *um diálogo inteligente com as ferramentas que já existem*[3]."

A organização da heurística de Guzmán é também aí citada a par da de Polya como orientação indispensável para a resolução de problemas. Nos anexos do programa de 1995 são citadas 28 propostas ou exemplos dos 8 livros de Miguel de Guzmán citados na bibliografia (a maioria das quais relativas aos manuais escolares de que foi co-autor).

Dois dos exemplos, aqui reproduzidos, são transcritos nesses anexos, visto serem exemplos habitualmente pouco trabalhados em Portugal. (Ver Figuras 1 e 2.)

Felizmente, exemplos como estes dois começam já a ser habituais nos manuais escolares portugueses.

Miguel de Guzmán nasceu em Cartagena, Espanha, em 1936, numa família de marinheiros; por causa desses anos conturbados, mal chegou a conhecer o pai pois este foi fuzilado juntamente com mais outros 157 oficiais da Armada, quando tinha apenas seis meses. Num ambiente virado para a Engenharia (seu pai estudou rádio em Paris e fundou a Escola de Radiotelegrafistas da Armada e ambos os irmãos estudaram engenharia), começou por estudar engenharia industrial em Bilbau. Depois ingressou na Companhia de Jesus onde estudou Humanidades e Filosofia em Espanha durante três anos e na Alemanha durante mais dois anos até 1961. Tendo resolvido deixar os estudos religiosos e dedicar-se à Matemática, estudou em Madrid até 1965 e foi depois para Chicago onde se doutorou em 1968 sob a orientação de Alberto Calderon e Antoni Zygmund. Foi professor nas universidades de Chicago, St. Louis, Princeton (EUA), Suécia e Brasil e era catedrático de Análise Matemática da Universidade Complutense de Madrid e membro da Academia de Ciências Exactas, Físicas e Naturais de Madrid desde 1982. Foi presidente do ICMI — Comissão Internacional de Instrução Matemática de 1991 a 1998. O ICMI, fundada em 1908 e cujo primeiro presidente foi Felix Klein, é uma comissão oficial da

Exemplo 4: *Áreas de círculos sem π.* O triângulo [ABC] é rectângulo em A. Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo. Pode então concluir que nem sempre aparece π para calcular áreas de figuras em que intervêm círculos.

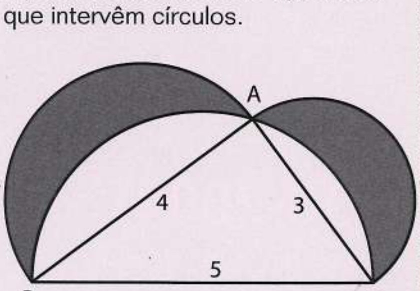
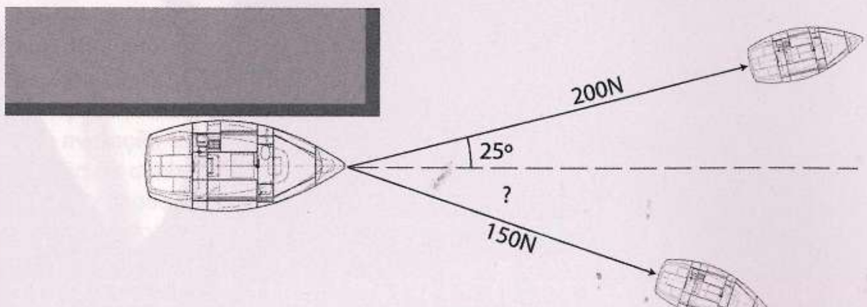


Figura 1.

Exemplo 3: *Movimento de um barco.* Duas pequenas lanchas ajudam um grande barco a deslocar-se. Uma delas puxa-o com uma força de 200N enquanto que a outra o puxa com uma força de 150N.



A primeira toma uma direcção que faz 25° como se assinala na figura. Que direcção deve tomar a outra para que o barco saia paralelamente do cais?

Figura 2.

IMU — União Matemática Internacional e é responsável pela organização dos ICME–Congresso Internacional de Educação Matemática, grandes congessos internacionais que decorrem de 4 em 4 anos.

Miguel de Guzmán foi um investigador consagrado na área de Análise Clássica e Análise Harmónica, e dos livros de que foi autor destaco *Differentiation of integrals in R^n*, publicado em 1975 como o volume 481 da prestigiada série *Lecture Notes in Mathematics*, da editora *Springer-Verlag Berlin-New York*, 1975, e *Real variable methods in Fourier analysis* publicado em 1981 como o volume 75 da não menos prestigiada colecção[4] *Notas de Matemática* da editora *North-Holland*. Em 1997 a revista científica *The Journal of Fourier Analysis and Applications* dedicou-lhe um número especial comemorativo, contendo as comunicações apresentadas no congresso *5th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations* organizado em sua honra.

A actividade de divulgação é testemunhada pela edição de vários livros (traduzidos em inglês, chinês, finlandês, francês e português), e inúmeras conferências; fez, por exemplo, uma conferência para alunos sobre jogos e matemática da primeira vez que esteve em Portugal, em 1989. Esteve várias outras vezes em Portugal, a última das quais no encontro nacional da SPM em Fevereiro de 2002 onde orientou um interessantíssimo mini-curso sobre *Ensino da Matemática*. Dois dos seus livros de divulgação científica estão editados em Portugal, *Aventuras Matemáticas* e *Contos com contas*, tendo o primeiro sido um dos livros mais vendidos em Portugal quando foi lançado.

A sua página da Internet, começada a construir mal o seu departamento disponibilizou um servidor, contém inúmeros textos de interesse e será mantida pela Universidade Complutense de Madrid como homenagem ao seu autor. Pode ser consultada em

http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman

Miguel de Guzmán dava muita importância à descoberta e apoio a alunos especialmente talentosos em

Matemática, tendo criado o *Proyecto Talento Matemático* apoiado pela Real Academia das Ciências de Madrid; foi ainda o animador da *Escuela de Pensamiento Matemático* de Torrelodones (perto de Madrid) dirigida a crianças de 12 e 13 anos; segundo o presidente da Câmara de Torrelodones esta escola passará a ter o seu nome.

As áreas de intervenção de Miguel de Guzmán são tantas que será impossível referi-las todas, mesmo que nos limitemos às mais importantes.

Miguel de Guzmán foi um defensor acérrimo da importância da resolução de problemas no ensino, a que também chama heurística. Afirma

"O ensino pela resolução de problemas coloca a ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e toma os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve em absoluto deixar a um lado, como campo de operações privilegiado para a tarefa de aprender formas de pensamento eficazes.

Trata-se de considerar como mais importante:

- que o aluno manipule os objectos matemáticos;
- que active a sua própria capacidade mental;
- que exercite a sua criatividade;
- que reflicta sobre o seu próprio processo de pensamento a fim de o melhorar conscientemente;
- que, a ser possível, faça transferências destas actividades para outros aspectos do seu trabalho mental;
- que adquira confiança em si próprio;
- que se divirta com a sua própria actividade mental;
- que se prepare assim para outros problemas da ciência e, possivelmente, da sua vida quotidiana;
- que se prepare para os novos reptos da tecnologia e da ciência."

A crítica que Miguel de Guzmán faz à pouca importância que os manuais escolares dão à resolução de problemas, também se aplica a Portugal:

"Os nossos livros de texto estão, em geral, repletos de meros exercícios e carentes de verdadeiros problemas."

Além da heurística para a resolução de problemas que apresenta no seu livro *Aventuras matemáticas* e desenvolve no livro *Para pensar mejor*, propôs também uma heurística para a abordagem de jogos matemáticos; esta é uma proposta deveras interessante e que merece ser estudada com atenção. Em muitos aspectos a abordagem dos jogos pouco se distingue da actividade matemática propriamente dita, não havendo razões para os jogos serem tão pouco utilizados no ensino da Matemática. Miguel de Guzmán escreveu mesmo que

"A matemática é, em grande parte, jogo, e o jogo pode, em muitas ocasiões, analisar-se mediante instrumentos matemáticos" pelo que "é um facto frequente que muitas pessoas que se declaram incapazes toda a vida para a matemática, desfrutam intensamente puzzles e jogos cuja estrutura pouco difere da da matemática. (...) pode-se pensar que muitas dessas pessoas, adequadamente motivadas, talvez através desses mesmos elementos lúdicos que estão livres da pressão psicológica e da seriedade temível da matemática oficial, se mostrariam, ante a ciência em geral e a própria matemática em particular, tão inteligentes como acontece com o êxito da sua actividade noutros campos diferentes."

Levando mais uma vez as suas ideias à prática, Miguel de Guzmán leccionou, entre Outubro de 2002 e Fevereiro de 2003 um curso para professores, na Faculdade de Matemática da Universidade Complutense de Madrid, sobre o papel dos jogos na Matemática.

Miguel de Guzmán entendia que a resolução de problemas era um elemento importante do incentivo do gosto pela descoberta, e considerava esta como parte indispensável da luta contra o desinteresse pela matemática:

"o gosto pela descoberta em matemática é possível e fortemente motivador para superar outros aspectos rotineiros necessários da sua aprendizagem, pelos quais é obviamente necessário passar."

Outro dos temas que Miguel de Guzmán desenvolveu frequentemente foi o do impacto da computação no ensino da matemática:

"O aparecimento de ferramentas tão poderosas como a calculadora e o computador actuais está a começar a influenciar fortemente as nossas intenções para orientar a nossa educação matemática primária e secundária adequadamente, de forma que se aproveitem ao máximo tais instrumentos. (...) A ênfase terá de ser colocada, também por esta razão, na compreensão dos processos matemáticos muito mais do que na execução de certas rotinas que na nossa situação actual ocupam ainda grande parte da energia dos nossos alunos, com o conseguinte sentimento de esterilidade do tempo que lhe dedicam."[5]

Miguel de Guzmán escreveu inúmeros textos, não havendo neste artigo espaço para fazer um apanhado significativo de todos eles. Contudo, a melhor homenagem que lhe pode ser feita é recomendar a leitura do que escreveu: nada substitui a leitura dos textos originais para conhecer o pensamento de um grande pensador.

Começo por recomendar a leitura dos dois livros que estão editados em Portugal:

- *Aventuras Matemáticas* (com tradução e um prefácio de João Filipe Queiró), Ed. Gradiva.
- *Contos com contas* (com tradução e um prefácio do autor deste artigo), Ed. Gradiva.

Está em andamento a tradução dos livros *Para pensar mejor*, *Los matematicos no son gente seria* e *El Rincon de la pizarra* (que se espera não demorem muitos mais anos, mas a culpa do actual atraso é toda do autor deste artigo).

[imagem7e8]

Mas há outros textos de Miguel de Guzmán editados em Portugal, em revistas ou actas de encontros:

- *Entrevista com o Prof. Miguel de Guzmán, conduzida por Arsélio Martins*, Boletim da SPM, n° 14, 1989, p. 55–60.
- *Juegos Matematicos en la Enseñanza*, Boletim da SPM, n° 18, 1990, p. 3–8, n° 19, 1991, p. 5–25.
- *La enseñanza por resolucion de problemas alrededor de los contenidos del curriculo*, ProfMat, APM, Viseu, 1992, p. 25–28.
- *Tendencias innovadoras en educación matemática*, Boletim da SPM, n° 25, 1993, p. 9–34.
- *Solidariedade na educação matemática*, Boletim da SPM, n° 25, 1993, p. 57–70.
- *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura*, Boletim da SPM, n° 32, 1995, p. 15–35.
- *Papel da Tecnologia no Ensino da Matemática*, Ti-Mat, n° 2, 1996, p. 2–3.

Qualquer deles me parece ser totalmente actual[6], e não posso deixar de recomendar a sua leitura.

Termino com uma citação que Miguel de Guzmán faz do seu orientador de doutoramento, Alberto Calderon, num trabalho que lhe dedica e que me parece ter influenciado fortemente o trabalho de Miguel de Guzmán e é uma excelente recomendação para o trabalho de todos nós:

"Señoras y Señores, todos somos capaces de inventar y de descubrir en mayor o menor medida, y este aspecto activo y creador de nuestra mente debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, yo diría, él nos brinda el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina. Nuestra mente es naturalmente activa y no soporta la pasividad o inacción sin correr grave peligro de atrofia."

Notas

1 Por exemplo: http://www.matematicas.net/paraiso/weblog.php?pmw=detail&id=133

2 ICME — Congresso Internacional de Educação Matemática.

3 *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*, Boletim da SPM, n° 25, 1993, p. 14.

4 Esta colecção foi fundada pelos matemáticos portugueses António Monteiro e Ruy Luís Gomes.

5 *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*, Boletim da SPM, n° 25, 1993, p. 14.

6 No CD de apoio ao curso que Miguel de Guzmán deu no encontro da SPM em 2002, aparece um esboço de uma nova versão de *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*, com o título *Tendencias Actuales de la Educación Matemática* que o autor qualifica de uma *una refundición y actualización* daquele texto. Não tenho conhecimento de este texto ter sido escrito.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Para este número seleccionámos dois textos de Miguel Guzmán. O primeiro texto data do ano 2000, tendo constituído a base da intervenção do autor numa mesa redonda realizada em Espanha, no âmbito das comemorações do Ano Mundial da Matemática. Aqui Miguel Guzmán apresenta a sua visão da Matemática e a importância que atribui à Educação Matemática. A rã saltadora é o segundo texto que seleccionámos. Trata-se de um dos capítulos do seu livro Contos com contas, *um bom exemplo da atenção que dedicou à divulgação da Matemática.*

O sentido da educação matemática e a orientação actual do nosso sistema educativo

Miguel de Guzmán

Dos três objectivos da celebração do Ano Mundial da Matemática, expressos na Declaração do Rio de Janeiro, dois deles referem-se muito explicitamente à educação.

O segundo afirma que uma vez que a matemática é uma chave fundamental para a compreensão do mundo e o desenvolvimento integral do ser humano, torna-se essencial que a cultura matemática, bem como o acesso à informação científica, em particular a matemática, sejam bens suficientemente repartidos por todos os países. Uma educação e informação bem desenhadas nos diferentes níveis, são meios necessários para o conseguir.

O terceiro objectivo refere-se à educação matemática da sociedade no seu conjunto. Trata-se no fundo, de que a sociedade tenha uma visão cabal daquilo que a matemática representou e representa no desenvolvimento integral da humanidade. A presença da matemática na sociedade actualmente, costuma ser muito mais ténue do que deveria e por outro lado costuma aparecer distorcida através de falsos estereótipos relativos ao seu carácter, para muitos abstruso e inútil.

Esta visão contrasta fortemente com o que a matemática foi em muitas das etapas mais gloriosas da sua longa história. A matemática, tal como a entendemos e praticamos hoje em dia, nasceu na comunidade científico-religiosa dos pitagóricos, no século VI a.c. e foi concebida como uma via, um método através do qual o homem pudesse aproximar-se da profundidade do universo, o que os pitagóricos designavam como *"raízes e fontes da natureza"*. Naquele tempo, a actividade matemática estava muito longe de ser a mera técnica rotineira para dominar alguns aspectos da nossa envolvente física, na qual em grande parte a convertemos hoje. O que Pitágoras e os pitagóricos começaram a compreender na sua contemplação matemática, tornando-se de tal muito conscientes, foi das harmonias presentes na própria estrutura deste universo em que vivemos. E era nessa contemplação que baseavam a sua própria vida ética e religiosa.

Se o universo todo está construído de forma tão harmoniosa conforme nos apercebemos através do conhecimento matemático, para eles era evidente que a nossa própria vida humana deveria procurar acomodar-se a essa harmonia, em primeiro lugar comtemplando-a e depois respeitando-a e favorecendo-a, tanto nos seus aspectos físicos mais externos como também nos mais especificamente humanos, através do respeito especial em relação aos seres vivos e muito particularmente através das relações mútuas com os outros seres, tanto humanos como divinos. A prática matemática foi de certo modo, entre os pitagóricos, um guia de contemplação e de comportamento. Uma boa lição de humanismo ecológico que infelizmente desaproveitámos, convertendo em grande parte a educação matemática, numa rotina de certo modo vazia, as aulas dos nossos jovens, precisamente quando seria mais necessário fazer uso da capacidade formativa e integradora da prática matemática.

No entanto, é claro que a matemática também foi e deve continuar a ser uma ciência em busca da verdade, uma ferramenta que vem em auxílio de todas as outras ciências e actividades do homem, uma actividade criadora de uma beleza *apenas acessível aos olhos da alma*, como dizia Platão. E para que nos tornemos eficientes nestes aspectos da matemática, é evidentemente necessário adquirir um domínio básico inicial das suas ferramentas mais essenciais.

Esta visão ampla da actividade matemática, devia transformar a educação matemática, de rival em perpétua competição com a educação humanística — como é entendida por muitos — no aliado educativo valioso que foi na prática dos mais destacados pensadores da nossa civilização. Estas facetas profundamente humanas da matemática são as que deveriam fazer dela um dos grandes eixos do nosso sistema educativo, se fossemos capazes de preparar os nossos professores dos diversos níveis para tal tarefa e de orientar convenientemente os nossos programas educativos.

Porque, por outro lado, a própria natureza da actividade matemática, é capaz de estimular alguns dos aspectos éticos importantes que uma educação moderna deveria contemplar como objectivos, conforme procurarei evidenciar sucintamente, em seguida.

A raíz do caracter envolvente da matemática inclusivamente sobre os aspectos éticos do seu comportamento, reside na sua própria natureza. A matemática é uma exploração de certas estruturas omnipresentes e mais ou menos complexas que aparecem na nossa realidade e que admitem essa aproximação racional, manipulável mediante símbolos, que confere às nossas mãos um certo domínio da realidade a que se referem e a que chamamos matematização. A matemática aproxima-se da multiplicidade das coisas e cria a aritmética, aproxima-se das formas e origina a geometria, explora o próprio símbolo surgido na mente e faz nascer a álgebra, analisa as alterações e transformações e faz surgir a análise matemática, ...

Nesta actividade, a obrigação da mente humana consiste em interpretar racionalmente, o melhor que pode, umas realidades, uns factos, que se apresentam como dados, como prévios. Isto constitui uma das experiências profundas que todos os matemáticos vivem nas suas tarefas comuns: compreender que estão a seguir marcas que de certa forma estão a guiá-los no seu trabalho. Esta submissão à verdade e à realidade, que está normalmente tão enraízada no cientista, constitui sem dúvida uma das características mais importantes que deveríamos apreciar e estimular em todos nós. E esta busca da verdade, como é o caso, constitui um dos traços típicos do cientista, e muito particularmente do matemático, para quem costuma ser bem mais claro do que para os outros cientistas, quando uma situação é uma hipótese de trabalho e quando passou a ser uma verdade incontroversa. A agradável aceitação desta verdade, seja quem for que a tenha encontrado e quer contradiga ou não as expectativas prévias, é outra das características de generosidade que se dão no trabalho matemático. O prazer da contemplação da verdade e da partilha com outros da beleza que costuma resultar da sua contemplação, é o prémio que o matemático recebe dessa atitude aberta e generosa.

O sentimento de profunda humildade perante a imensidão de verdades ainda por descobrir, é outra das atitudes éticas importantes que a matemática pode estimular. Newton exprimiu-o em belas palavras: *"Não sei o que a posteridade pensará de mim, mas parece-me que fui um menino a brincar à beira-mar, divertindo-se a encontrar de vez em quando um godo mais liso ou uma concha mais bonita que de costume, enquanto que o grande oceano da verdade permanece por descobrir perante mim"*.

A actividade matemática faz-nos sentir, mais do que em qualquer outra ciência, próximos de todos os que trabalham com entusiasmo nas nossas próprias tarefas, tanto os da actualidade como os nossos mais afastados antecessores. Os teoremas que foram demonstrados pelos babilónios ou pelos antigos gregos, continuam a ser tão válidos hoje como então. O trabalho matemático é tarefa comum e participada. O próprio Newton dizia: *"Se alguma coisa consegui, foi porque me apoiei em ombros de gigantes"*.

Portanto, do ponto de vista da matemática poderemos aprender a compreender muito claramente esta responsabilidade comum de fazer progredir a nossa cultura.

A matemática baseia-se na sua própria essência, no consenso. Os seus próprios inícios chamam-se postulados e as definições dos novos objectos que se vão introduzindo também são convenções. É sobre eles que assenta a totalidade do edifício que vamos construindo. A aceitação do consenso é uma outra das atitudes importantes na nossa sociedade que a matemática é capaz de fomentar.

A matemática é consenso, é submissão à realidade, mas é também e de uma forma muito importante, liberdade criativa. Como Georg Cantor, o criador da teoria de conjuntos afirmava solenemente no início do século 20, *"a essência da matemática é a liberdade"*. É que, do mesmo modo que o artista que pretende exprimir aos outros uma vivência, uma visão muito especial que tem, também o matemático dispõe de muitos procedimentos possíveis para o fazer. A matemática é sem dúvida descoberta, mas também criação livre, aventura.

Tudo isto representa um grande repto para um sistema educativo que pretende ser actual e eficiente. Na minha opinião, que considero partilhada por uma grande parte da comunidade matemática espanhola, existem muitos elementos na actual estrutura do nosso sistema educativo, que impedem que os nossos jovens recebam na sua educação matemática, os grandes benefícios que esta lhes pode proporcionar. Enunciarei em seguida alguns que provavelmente se tornarão mais explícitos no decorrer desta mesa redonda.

1. A formação em conteúdos matemáticos e em métodos de didáctica propriamente matemática que actualmente recebem os professores do ensino primário, por diversos motivos, é insuficiente para o posterior exercício das suas funções, inclusivamente para desenvolver os relativamente pobres objectivos actuais, quanto mais para os que assinalei antes.
2. A formação de professores do ensino secundário e também a dos professores do ensino superior, fundamentalmente centrada nos conteúdos e saberes propriamente matemáticos, omite muitos dos aspectos que têm que ver com essa visão integral da matemática da qual eles próprios deviam estar imbuídos e descuida os conhecimentos e atitudes necessárias para que sejam capazes de estimular uma correcta aprendizagem nos seus alunos.

3. O tempo dedicado pelos nossos estudantes nos primeiros níveis, primário e secundário, ao estudo da matemática, é, em minha opinião, muito insuficiente. Estamos a esquecer-nos de que os dois eixos em torno dos quais deve girar a formação actual dos nossos mais jovens são a língua e a matemática, como sucede nos países cientificamente mais avançados à nossa volta. A matemática, como disciplina claramente acumulativa, precisa de tempo suficiente para a aquisição das ferramentas básicas. Sem um domínio satisfatório delas, é impossível conseguir apreciar o seu papel na nossa cultura actual. É muito desejável, para aproveitar o papel integrador da matemática, ir além das meras considerações técnicas e rotineiras, mas é claro que, sem um mínimo de conhecimentos básicos nunca o conseguiremos. Além de que os elementos meramente rotineiros, com o tempo, convertem-se em bagagem útil em si mesmos.
4. A extensão da educação obrigatória até aos 16 anos, constitui claramente um progresso exigido pela sociedade e pela envolvente em que a nossa sociedade está imersa. Mas é claro que para realizar esta mudança de forma satisfatória não é suficiente aumentar e redistribuir o número de centros e de professores, mas antes efectuar uma reforma muito mais radical da organização do sistema secundário e dos próprios programas, com especial atenção à enorme heterogeneidade de alunos, com interesses muito diferentes, os quais, nem professores nem programas estão preparados para ter em atenção.

Em todos os aspectos assinalados, a comparação das estruturas educativas do nosso país com as vigentes em outros países vizinhos, manifesta claramente as carências com que nos debatemos. Estamos assim a pôr em perigo, não só a eficácia do nosso sistema educativo na direcção correcta, ou seja, em direcção à formação integral apropriada dos nossos jovens, mas também o desenvolvimento das capacidades do nosso potencial industrial e tecnológico.

Tradução
Susana Diego

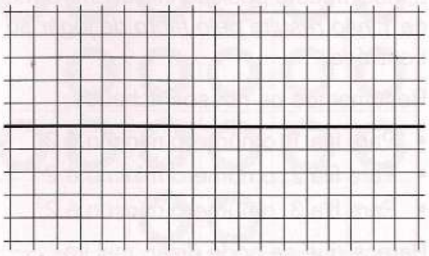
Nota

Este texto encontra-se disponível em espanhol em http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

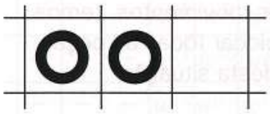
A rã saltadora

Miguel de Guzmán

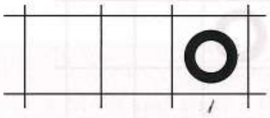
Talvez conheças o jogo da *rã saltadora*. Se não conheces, tanto melhor. Para o jogar podes traçar num papel bem grande uma rede de quadrículas grandes onde caibam uma moeda de 1€ ou de 2€. Na rede traça uma linha horizontal grossa a cinco quadrículas da linha horizontal superior. Algo do tipo:



O jogo consiste no seguinte. Colocas ao princípio um número de moedas, o que quiseres, distribuídas como te parecer melhor, cada uma numa quadrícula abaixo do traço grosso. Uma vez colocadas, vais começar a mover e retirar moedas do tabuleiro. Podem-se mover só horizontalmente (para a direita e para a esquerda) e verticalmente (para cima) saltando por cima de outra contígua sempre que a quadrícula para que se salta está vazia, comendo (retirando) a moeda sobre que se saltou. Por exemplo, desta situação



pode-se passar a

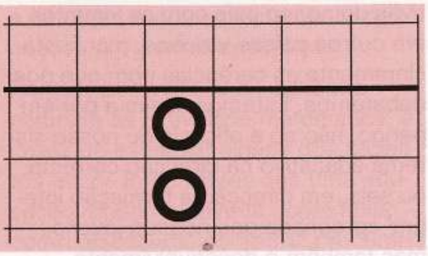


ou desta

a esta

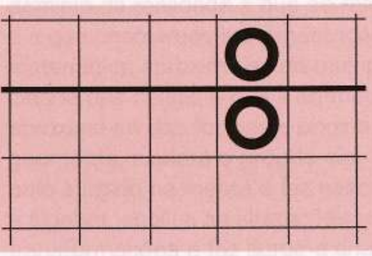
Trata-se de colocar ao princípio as moedas debaixo do traço de modo a conseguir colocar uma moeda com os movimentos permitidos o mais alto possível acima do traço grosso. Quando tiveres praticado um pouco, podes tratar de o fazer com o mínimo número de moedas.

Por exemplo, para chegar à primeira fila por cima do traço grosso é claro que só com uma moeda não o consegues (não te permite nenhum movimento) mas com duas colocadas assim

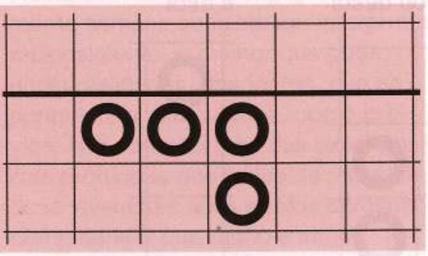


já o podes fazer. O número mínimo de moedas suficiente para colocar uma na primeira fila de cima é 2. Começa a trabalhar. Como chegar à fila 2? Qual será o número mínimo? E à fila 3,4 etc.? Não quero tirar-te o gosto de o fazeres sozinho. Fecha a revista e só depois de teres jogado um bocado vem ter comigo outra vez.

Depressa terás descoberto que para pôr uma moeda na fila 2 tens que chegar a esta situação.

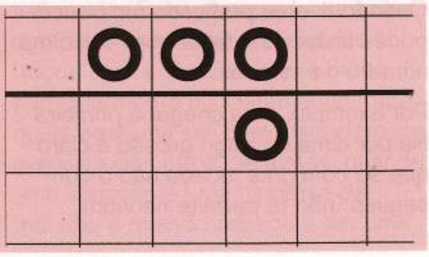


Para chegar a ela é-te suficiente colocar quatro moedas nesta situação.



É fácil ver que com três não podes chegar à segunda fila. *Para chegar à fila 2 o número mínimo suficiente é 4.*

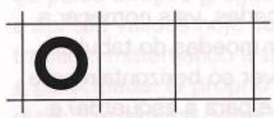
E para a fila 3? O ideal seria colocar inicialmente as moedas de modo que possamos chegar à posição



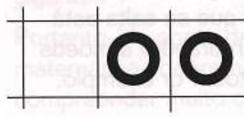
ou à sua simétrica, pois assim já sabemos que podemos subir duas filas mais. Como podemos fazê-lo? Como as coisas se vão complicando mais, o melhor é tratar de inventar um modo sistemático de proceder. *Este pode ser um bem razoável: jogar para trás.* Isto é, a nossa rã vai-se mover para a segunda quadrícula em baixo ou para a segunda quadrícula à direita ou à esquerda, pondo uma moeda na quadrícula imediata da mesma direcção, supondo sempre que esta esteja livre. Quer dizer, desta situação

pode-se passar a esta

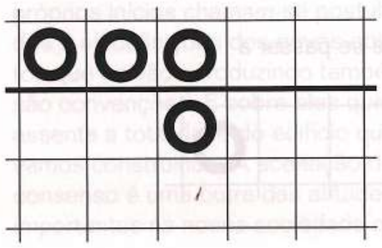
e desta



a esta

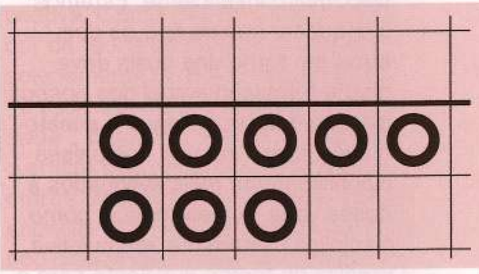


Mediante estes movimentos, temos de tratar de colocar todas as peças que resultam desta situação



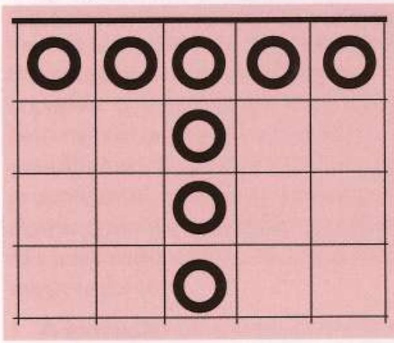
debaixo da linha grossa.

Se te exercitares um pouco com este sistema, verás que chegas em seguida a esta situação

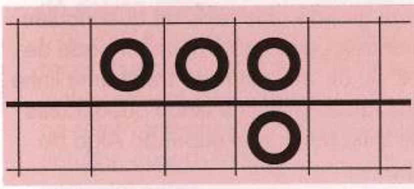


desde que, jogando a direito, passas a terceira fila. São oito moedas. Podes demonstrar que não se consegue fazer com menos?

É curioso observar que à terceira fila se pode chegar também a partir da situação seguinte, também de oito moedas,



sem necessidade de passar pela situação intermédia correspondente ao salto até à segunda fila de cima



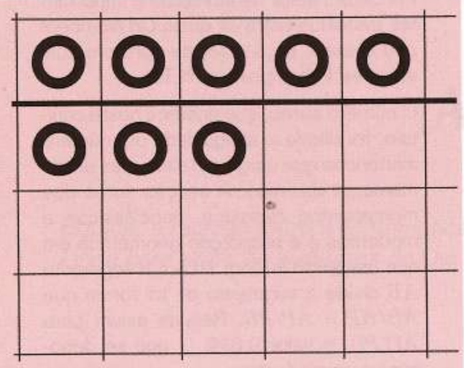
e, assim, esta posição inicial em forma de T *não resulta pelo facto de jogar ao contrário.*

Resumamos os nossos achados:

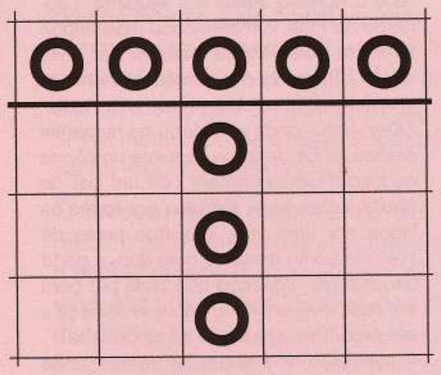
- Para fila 1, o número mínimo é 2.
- Para fila 2, o número mínimo é 2^2.
- Para fila 3, o número mínimo é 2^3.

Parece que se pode dizer: mal irá se para a fila 4 não for 2^4 o número mínimo, não é assim?

Pois, por mal que pareça, assim sucede. Para chegar à fila 4 será suficiente (não necessário, em princípio, como vimos que sucedia com a fila 3) partir de uma situação inicial da qual possamos chegar a uma das posições



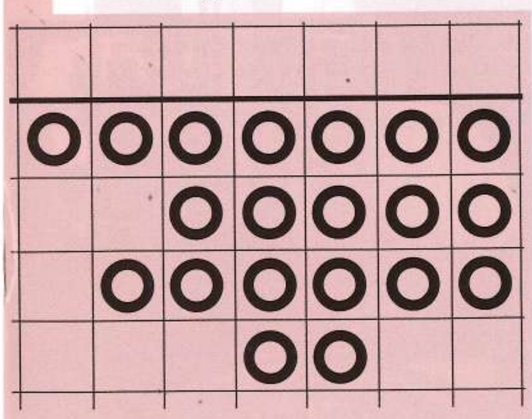
A



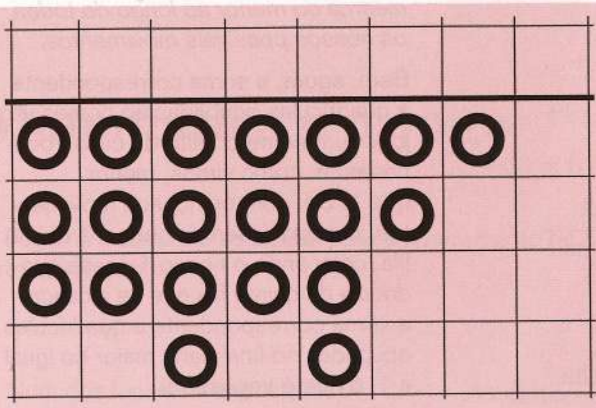
B

ou, naturalmente, à simétrica da primeira.

Jogando ao contrário e com certo cuidado para não introduzir fichas supérfluas, verás que a situação *A* e a situação *B* te podem levar à situação inicial seguinte



Mas a situação *A* pode-te levar também, jogando ao contrário, a esta,



que é distinta da anterior, mas ambas têm 20 moedas. Poder-se-á chegar com menos? Porque não tentas? E para a fila 5? Adiante. Verás que com menos de 20 moedas não consegues chegar à fila 4. Para a fila 4 o número mínimo é 20, o que ensina que não nos devemos fiar demasiado em induções prematuras.

E para a fila 5? Já não pisamos terreno firme para fazer uma conjectura.

Pois bem, mesmo que possa parecer surpreendente, à fila não se pode chegar com nenhum número de fichas, coloquem-se elas onde se quiser.

A demonstração seguinte deve-se a John Conway de Cambridge[1]. Tomamos o número positivo w tal que $w^2 + w = 1$. Misterioso, não é? Pois resulta que, para maior desconcerto, w é o número áureo[2] $\varphi > 0$ tal que

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

Ponhamos em cada quadrícula do nosso tabuleiro, indefinidamente prolongado para abaixo e para a direita e a esquerda, uma potência de w tal como te indico na figura seguinte.

–	–	–	w^4	w^3	w^2	w	1	w	w^2	w^3	w^4	–	–	–	
–	–	–	w^5	w^4	w^3	w^2	w^1	w^2	w^3	w^4	w^5	–	–	–	
–	–	–	w^6	w^5	w^4	w^3	w^2	w^3	w^4	w^5	w^6	–	–	–	
–	–	–	w^7	w^6	w^5	w^4	w^3	w^4	w^5	w^6	w^7	–	–	–	
–	–	–	w^8	w^7	w^6	w^5	w^4	w^5	w^6	w^7	w^8	–	–	–	
–	–	–	w^9	w^8	w^7	w^6	w^5	w^6	w^7	w^8	w^9	–	–	–	
–	–	–	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^6	w^7	w^8	w^9	w^{10}	–	–	–	
–	–	–	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	–	–	–	
–	–	–	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	–	–	–	
–	–	–	w^{13}	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	w^{13}	–	–	–	

Observa agora os dois factos seguintes:

a) A soma de todos os números que figuram abaixo do eixo é

$$S = (w^5 + w^6 + w^7 + \ldots) + $$
$$+2(w^6 + w^7 + \ldots) +$$
$$+2(w^7 + w^8 + w^9 + \ldots) + \ldots =$$
$$= \frac{w^5}{1-w} + 2\frac{w^6}{1-w} +$$
$$+2\frac{w^7}{1-w} + \ldots$$

e como $1 - w = w^2$, resulta

$$S = w^3 + 2w^4 + 2w^5 + \ldots =$$
$$= (w^3 + w^4 + w^5 + \ldots) +$$
$$+(w^4 + w^5 + w^6 + \ldots) =$$
$$= \frac{w^3}{1-w} + 2\frac{w^4}{1-w} = w + w^2 = 1$$
$$S = 1$$

Assim, *a soma dos números correspondentes a um número finito de quadrículas é estritamente menor do que 1.*

b) Interpretemos agora os nossos movimentos permitidos com as moedas em relação a estes números do modo seguinte. Somemos os números correspondentes a estas quadrículas do tabuleiro ocupadas por moedas antes e depois do movimento. Por exemplo,

w^8	w^7	w^6

ANTES

w^8	w^7	w^6

DEPOIS

$w^8 + w^7 \quad = \quad w^6$

Outro caso

w^{10}	w^9	w^8

ANTES

w^{10}	w^9	w^8

DEPOIS

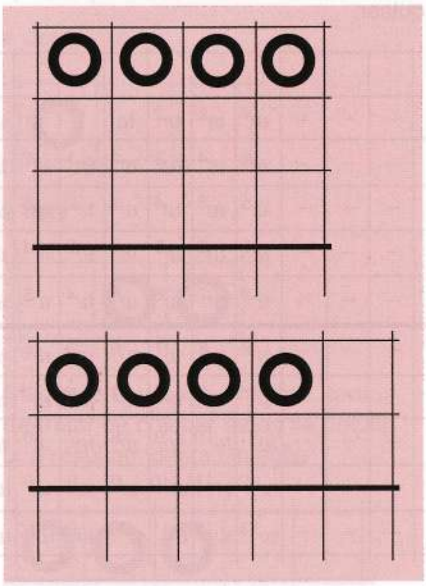
$w^9 + w^8 = w^7 \quad > \quad w^{10}$

Este facto, como facilmente perceberás, é geral, quer dizer, *a soma correspondente a quadrículas ocupadas é a mesma ou menor ao longo de todos os nossos possíveis movimentos.*

Bem, agora, a soma correspondente a quadrículas ocupadas ao começar o jogo (um número finito de casas ocupadas) é, como vimos, menor que 1. Se, com os nossos movimentos, conseguíssemos chegar à quinta fila, colocando o nosso 1 nessa quadrícula da quinta fila que se alcança, a soma correspondente a quadrículas ocupadas no final seria maior ou igual a 1, o que é impossível.

A ideia de Conway é muito engenhosa. Porque não tratas de a explorar para aclarar algumas das perguntas que ficaram por colocar? Um pouco de álgebra ajudar-te-á.

1) Demonstra que, efectivamente, o número mínimo de moedas para chegar à fila 3 é 8 e para a fila 4 é 20. Este último não é fácil;
2) Investiga se as únicas posições iniciais para chegar à fila 3 e 4 são as assinaladas e suas simétricas.
3) Põe a ti próprio outros problemas semelhantes, como, por exemplo, se se pode, e como, chegar às situações



E pedir-te-ia que me escrevesses se tens alguma ideia inspiradora sobre toda esta embrulhada. Obrigado.

Notas

1 John H. Conway, reputado matemático, actualmente na Universidade de Princeton, autor de inúmeros e importantes trabalhos entre os quais *On Numbers and Games*, e co-autor da obra em dois volumes *Winning ways* (N.T.).

2 O número áureo, que aparece neste capítulo, foi desde a antiguidade um número misterioso que surge em situações extremamente diversas. A secção áurea dos monumentos clássicos, neoclássicos e modernos é a proporção geométrica em que um ponto interior P de um segmento AB divide o segmento de tal forma que $AB/AP = AP/PB$. Resulta assim para AP/PB o valor 0,618 ... que se denomina número áureo.

Uma das situações curiosas em que aparece o número áureo é a seguinte: Leonardo de Pisa, o matemático mais importante da Idade Média (nasceu por volta de 1170), também chamado Fibonacci, propôs na sua obra mais importante, *Liber Abaci*, onde introduziu os numerais árabes no Ocidente, o seguinte problema curioso: "Certo homem pôs um par de coelhos num lugar rodeado por todos os lados por uma vala. Quantos pares de coelhos serão gerados num ano, a partir daquele par, supondo que cada par gera em cada mês um novo par, que começa a ser produtivo a partir do segundo mês?". A sucessão do número de pares que há em cada um dos meses sucessivos, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., em que cada termo é a soma dos dois anteriores, denomina-se *sucessão de Fibonacci*. Pois bem, a razão entre cada termo da sucessão de Fibonacci e o seguinte aproxima-se cada vez mais do número áureo (o limite desta razão é precisamente o número áureo).

Nota

Este texto está publicado no livro *Contos com contas* pp. 99–111 da colecção *O prazer da Matemática* da editora Gradiva, a quem agradecemos a autorização para reproduzir.

"Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente."

Leibniz

A Matemática e o Jogo

Explicar a relação entre a Matemática e o Jogo foi a temática escolhida pelo Departamento de Matemática da ESTG de Leiria para atrair os visitantes do Dia Aberto *deste ano.*

Nos dias 17 e 18 de Março, a ESTG de Leiria organizou mais uma edição do *Dia Aberto*. Esta iniciativa, que tem como principal objectivo abrir as portas da escola à comunidade e dar a conhecer o que de melhor se faz nesta instituição de ensino superior, vai na sua nona edição.

O sucesso deste evento pode ser medido pelo número de visitantes que a escola recebe todos os anos, tendo este ano atingido os 2500 alunos do distrito de Leiria e concelhos limítrofes, assim como um grande número de empresários da região.

Num dos locais da exposição, os docentes do Departamento de Matemática convidavam os visitantes a entrarem no fascinante mundo da *Matemática e o Jogo* e a descobrirem as estratégias matemáticas a seguir nos vários jogos, brincadeiras e charadas.

Roleta e Probabilidades

O percurso era iniciado em torno de uma roleta, onde os *jogadores* tinham a oportunidade de simular uma jogada numa roleta verdadeira e tirar algumas conclusões acerca deste jogo através do estudo das probabilidades. Como era de esperar, todos concluíram que o casino nunca fica a perder!.... (Figura 1)

As Oito Rainhas

As 8 rainhas também estiveram presentes! Não estavam vestidas a rigor, mas pediram a ajuda dos visitantes para as colocarem num tabuleiro de xadrez de forma a não se atacarem mutuamente. Existem 92 soluções, mas elas só pretendiam 1 solução ... (Figura 2)

O Solitário

Para jogar o solitário, nada melhor do que estar só. Para atingir o objectivo deste jogo, cujo estudo é baseado no Grupo de Klein, basta seguir uma sequência de *movimentos chave* que permite ficar com uma única peça na posição central! (Figura 3)

Figura 1.

Figura 2.

Figura 3.

Figura 4

Figura 5

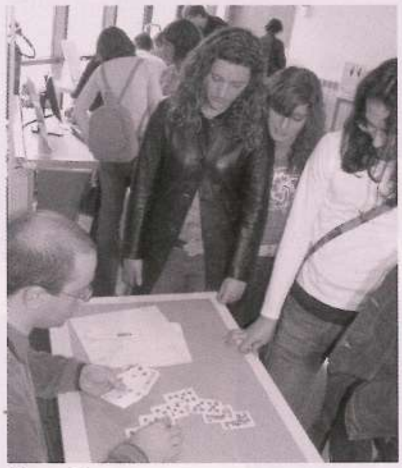


Figura 6

Magia ou Teoria de Números?

Foi num ambiente de ilusão e magia que um mago, mais a sua bola de cristal, ensinou um pouquinho de Teoria de Números, mostrando como é fácil *adivinhar o pensamento*, se soubermos o que é uma congruência! … (Figura 4)

O Cubo Mágico

O cubo mágico, que atingiu o auge da sua popularidade no início dos anos 80, fez as delícias daqueles que, apesar de muitas tentativas, nunca antes o tinham resolvido!

Ainda hoje, matemáticos procuram elaborar um algoritmo para reconstruir o cubo com o menor número de movimentos possível! Nessa busca, apoiam-se no facto de que o conjunto de movimentos das faces do cubo, munido da operação movimento, é um grupo. (Figura 5)

Cartas Sábias

Num clima de *cartada*, puderam observar e perceber alguns truques de cartas que tinham como base matemática contagem, matrizes e sistemas de numeração. (Figura 6)

Para além dos jogos supracitados, era ainda possível (re)descobrir outros jogos: as Damas Pulantes, o Jogo do Galo, as Torres de Hanoi, a Plantação de Árvores, o Jogo do Einstein, …, bem como algumas curiosidades acerca dos jogos presentes.

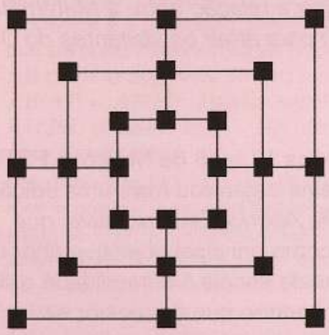
Com esta iniciativa, os docentes de matemática da ESTG de Leiria procuraram, de uma forma apelativa, mas bem real, demonstrar o quanto a Matemática está presente nas nossas vidas, desde as situações mais sérias até às mais lúdicas, como é o jogo.

Departamento de Matemática
da Escola Superior de Tecnologia e
Gestão de Leiria

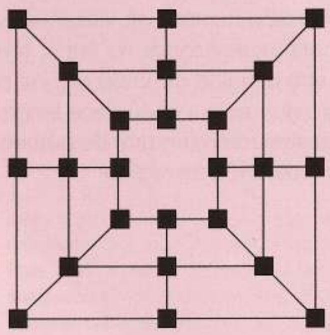
Errata

Moinho, um jogo de alinhamento

No artigo *Moinho, um jogo de alinhamento*, de Luís Reis, publicado na revista nº 77, na pág. 44, na figura 7 o último tabuleiro corresponde, por lapso, ao jogo do Moinho para 9 peças. Em vez do tabuleiro



deveria estar o seguinte:



A Redacção

O Jogo dos Retratos

Ana Isabel Carvalho, Maria de La Salete Ferreira e Rosa Marques

O presente artigo surgiu da vontade de partilhar a nossa experiência, relativamente à exploração de materiais no domínio da matemática, no pré-escolar.

Teve como ponto de partida a oficina de formação *Tarefas Matemáticas Para Os Primeiros Anos de Escolaridade*, organizada pela APM, em Viseu.

Estiveram implicadas educadoras de 3 Jardins de Infância do Concelho de Tondela: Tondela nº1, Molelos e Nandufe.

Estes 3 Jardins de Infância são constituídos por grupos de crianças dos 3 aos 5 anos de idade.

Tendo em conta as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, que nos dizem que é da relação e manipulação de objectos que a criança começa a desenvolver princípios lógicos, os jogos permitem desenvolver as noções matemáticas, tais como: comparar, nomear tamanhos e formas, designar formas geométricas, formar conjuntos por propriedades, classificar, seriar, ordenar, fazer correspondências, contar, medir e até resolver problemas ...

Quando a criança chega ao Jardim de Infância traz já uma grande *bagagem*, que lhe vai permitir fazer a aquisição de novos conhecimentos. Deve-se partir do que ela já sabe, para que gradualmente faça o caminho de transição do concreto para o abstracto.

Identificar, classificar e seriar são as primeiras actividades lógico-matemáticas que a criança pode efectuar. Estas experiências proporcionam à criança oportunidades de utilizar e compreender as relações entre o que a cerca, quais as diferenças, semelhanças ...

A linguagem é um aspecto muito importante para a aprendizagem da matemática. Enquanto falam sobre as suas ideias, reflectem sobre o seu pensamento, clarificam e fortalecem a sua própria compreensão.

As crianças começam a comunicar matemática, falando muito cedo. Querem *mais* leite, um brinquedo *diferente* e *3* barcos.

Quando uma criança diz: — *"Tenho estes anos."* — levantando 3 dedos, está a tentar fazer a relação entre a palavra *3* e o número que representa a sua idade, através de um conjunto de objectos concretos que são os seus dedos.

A diversidade de materiais (cubos, puzzles, dominós, blocos lógicos, geoplano, material Cuisinaire, calculadores multibásicos ...), constitui um estímulo para desenvolver as mesmas noções, através de diferentes meios e processos.

Um desses materiais é O JOGO DOS RETRATOS.

Este jogo tem como *finalidades/ objectivos:*

- identificar, nomear e aplicar correctamente as diferentes partes do rosto
- compreender a noção de todo e partes
- formar conjuntos e sub-conjuntos
- identificar uma codificação
- utilizar um código e raciocinar logicamente
- compreender e utilizar a negação de uma instrução
- imaginar e criar

Os *conteúdos* são:

- o todo (cabeça) e as partes (cabelo, olhos, bigodes e boca)
- formação de conjuntos e sub-conjuntos
- leitura e descodificação de símbolos
- introdução de uma simbologia de negação, que neste jogo é um traço por cima dos símbolos

O jogo é constituído por 16 fichas de retratos de cartão (10,5x7,5cm).

Da parte de trás destas fichas existem 4 bandas de pistas para definir os cabelos, os olhos, o nariz e a boca. São estas as pistas: cabelo, louro, encaracolado. Olhos redondos, azuis, óculos. Bigode, louro, grande. Boca fechada, alegre.

A negação é um traço por cima do desenho. Tem também 64 bandas de cartão (15x4,5cm), 16 para cada uma das 4 partes do rosto: cabelos, olhos, bigodes e boca.

Atributos do cabelo: louro ou preto, encaracolado ou liso ou careca.

Atributos dos olhos: redondos ou amendoados, castanhos ou azuis, com ou sem óculos.

Atributos dos bigodes: louro ou preto, grosso ou fino ou sem bigode.

Atributos da boca: fechada ou aberta, feliz ou triste.

Eis uma de muitas formas de explorar o jogo, com um grupo de crianças de 5 anos.

1ª etapa — Manipulação livre do jogo.

2ª etapa — Exploração do vocabulário específico:

- cabelo liso, encaracolado, careca
- cabelo loiro, preto
- olhos redondos, amendoados,
- olhos castanhos, azuis, com óculos
- bigode grosso, fino, sem bigode
- bigode preto, loiro
- boca fechada, aberta
- boca feliz, triste

3ª etapa — Formar conjuntos e subconjuntos das diferentes partes que constituem o rosto: conjunto dos cabelos, conjunto dos olhos ... Subconjuntos: cabelos encaracolados, lisos ...

4ª etapa — Montar os rostos livremente explicitando as características.

5ª etapa — Montar rostos observando as figuras nas fichas.

6ª etapa — Montar a figura de um rosto, atendendo às características pedidas pela educadora que lê os códigos. Exemplos: cabelos loiros e lisos, olhos azuis e redondos, bigode loiro e grosso e boca aberta e feliz.

7ª etapa — Posteriormente e depois de descodificados os símbolos das fichas originais, as crianças podem jogar com os colegas, lendo os símbolos, usando expressões negativas. Exemplo: cabelos não loiros ...

Vejamos como correu.

Os 3 Jardins de Infância são constituídos por grupos de 16 a 25 crianças, com idades compreendidas entre os 3 e os 5 anos de idade.

O jogo foi explorado por vários grupos de 5 crianças de 5 anos, durante uma semana, que nos pareceu ser o tempo necessário para que eles interiorizassem e dominassem os diferentes conceitos.

Na fase da exploração livre do jogo (1ª etapa), as crianças aperceberam-se da existência de diferentes hipóteses para a construção de um rosto:

— "Olha pró meu, parece um palhaço."
— "O D. pôs o nariz ao contrário."
— "Olha, a tua cabeça está de cabeça para baixo!"
— "Olha, posso fazer uma rapariga."

Na 2ª etapa foi possível apercebermo-nos do domínio que as crianças tinham do vocabulário específico. Somente a expressão *olhos amendoados* não era conhecida, recorrendo as crianças à expressão *olhos chineses*.

Na formação de conjuntos e subconjuntos (3ª etapa) utilizaram-se 4 arcos que se colocaram no chão, formando os 4 conjuntos possíveis (cabelo, olhos, bigodes, boca). Dentro destes os diferentes subconjuntos separados com fio de lã. Por exemplo: num arco colocaram-se todas as bandas dos cabelos e formou-se o conjunto dos cabelos. Dentro deste formaram-se 5 sub-conjuntos: dos sem cabelo, dos cabelos encaracolados e pretos, dos encaracolados e louros, dos lisos e pretos e dos lisos e louros.

Observando a imagem de cada ficha (5ª etapa), foi possível desenvolver um trabalho de pares, em que um lia a imagem e o outro montava o rosto com as diferentes bandas, seguindo as instruções dadas pelo colega.

Os mais curiosos logo questionaram os desenhos do lado de trás das fichas.

A educadora começou por ler esses códigos (6ª etapa) e questionou a existência do traço por cima de alguns desenhos/códigos. Obteve pronta resposta: — "É para dizer que NÃO É."

À medida que iam lendo os códigos, as crianças procuravam as peças correspondentes e montavam os rostos.

Estas, ao visualizarem os símbolos e atentas às palavras da educadora, assimilaram à sua maneira a utilização dos códigos.

Quando passaram à etapa seguinte (7ª), de serem elas a ditar os códigos aos colegas, foram dando as seguintes indicações:

— "São redondos, mas não são; olhos azuis, mas não; cabelo amarelo, mas não é; boca fechada, mas não é, e não está alegre porque tem um risco". Logo uma colega ajudou:

— "Feliz, mas com um risco em cima, então está triste."

À medida que se foi fazendo o jogo, as descodificações passaram a ser mais facilmente entendidas e transmitidas, havendo crianças que passaram das indicações na negativa (não louro) para as afirmativas (preto).

Quando se sentiram mais seguros começaram a pedir fichas com *muitos riscos*, pois essas é que davam luta.

Breves apontamentos:

Consideramos que este jogo poderá/deverá fazer parte dos materiais dos Jardins de Infância, uma vez que é um jogo que se pode manipular/explorar ao longo de todo o ano, podendo ser alargado quer ao grupo de crianças de 4 anos, quer às de 3 anos, adequando os objectivos às suas fases de desenvolvimento.

Parece-nos também que pelo facto de se incentivar o trabalho de pares, o que acontece por exemplo na 7ª etapa, o jogo deverá ser explorado por grupos com número par de elementos, não ultrapassando as 6 crianças.

Um excelente desafio.

E venham eles.

Ana Isabel Simões de Carvalho
Jardim de infância de Nandufe

Maria de La Salete Silva Ferreira
Jardim de Infância de Molelos

Rosa Maria Fernandes Marques
Jardim de Infância de Tondela nº 1

Exposição Pedras Que Jogam

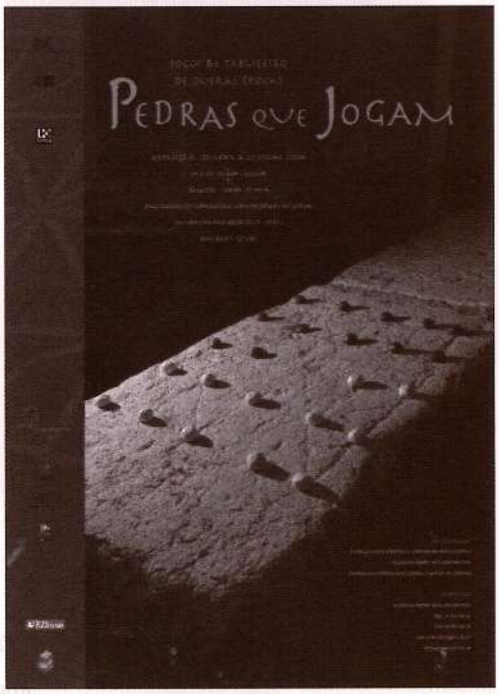
Jogos de Tabuleiro de Outras Épocas

A Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa / Departamento de Matemática e a Câmara Municipal de Lisboa / Museu da Cidade organizaram a *Exposição Pedras Que Jogam — Jogos de Tabuleiro de Outras Épocas*, decorrente de 29 de Abril a 23 de Junho de 2004 nas suas instalações.

Esta iniciativa apenas foi possível através do levantamento e registo dos muitos tabuleiros de jogo, que se encontram em diversas instituições, públicas e privadas, ou dispersos por vários locais do nosso país, alguns dos quais apresentados nesta exposição.

Ela pretende, por um lado, dar a conhecer um património, quiçá pouco conhecido, fazendo com que tais tabuleiros, existentes nas regiões mais variadas, se transformem num pólo dinamizador da sensibilização cultural, histórica e patrimonial das populações locais. Por outro lado, ela pretende mostrar uma ligação, talvez esta mais inesperada, com a Matemática: o jogo tem naturalmente uma grande afinidade com o próprio exercício da Matemática.

Com estes objectivos, a exposição foi organizada de forma a que parte dela possa funcionar após 23 de Junho de 2004, como exposição itinerante, encontrando-se à disposição de todas as instituições que a solicitem. A exposição itinerante Pedras Que Jogam – jogos de tabuleiro de outras épocas é composta por 25 placards fotográficos (a serem montados no local) bem como cinco réplicas de tabuleiros de jogo (com as respectivas regras e peças de jogo). Os pedidos de cedência podem ser feitos directamente ao Departamento de Matemática. Para qualquer esclarecimento contactar: Dr.ª Adelaide Carreira — Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Telefone: 217500042; Fax: 217500072.



Teoria de Jogos: Generalização dos Jogos de Dois Jogadores de Soma Zero

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

No último artigo descrevemos uma série de jogos, nos quais em última análise cada jogador estava, até certo ponto, nas mãos dos outros jogadores. Naqueles jogos existia um ponto de equilíbrio e, portanto cada jogador, se actuasse correctamente, poderia obter o valor do jogo, que era o máximo ao qual poderia aspirar razoavelmente. Os jogos a analisar neste artigo não têm pontos de equilíbrio, e se pretendemos ganhar, a forma de actuar terá que ser vantajosa relativamente à do nosso opositor.

1. O jogo do par ou ímpar

Dois jogadores jogam o jogo do par ou ímpar. Este jogo consiste no seguinte:

Um jogador 1 guarda na mão um determinado número de moedas e pergunta ao jogador 2 se o número de moedas que tem na mão é par ou ímpar. Se o jogador 2 acerta recebe 1€ do jogador 1, caso contrário paga ele 1€ ao jogador 1. A figura 1 representa a matriz de payoffs do jogo.

Observando a figura 1, tomando em conta o *Teorema do Minimax*, concluímos que este jogo não tem equilíbrio. Dissemos, quando analisámos os jogos de soma nula, que um equilíbrio é uma condição necessária para que uma combinação de estratégias seja a solução de um jogo e, que se uma combinação de estratégias não é um equilíbrio, então pelo menos um dos jogadores tem incentivos para alterar o seu jogo. Neste jogo podemos observar que nenhuma das combinações das estratégias é um ponto de equilíbrio. O jogo das moedas não pode ser resolvido utilizando o *Teorema do Minimax*.

Como resolver então este jogo? Para isso vamos colocar-nos no papel dos jogadores e analisar a informação que temos sobre o jogo.

Suponhamos que é a vez do jogador 1 jogar. Este só tem duas alternativas: escolher um número par ou um número ímpar. De certo modo esta é a verdade, pois em última análise terá que optar por uma destas duas possibilidades. Mas de outro ponto de vista isto não é verdade. Existem muitos caminhos para chegar à *eleição* final, e ainda que possa parecer que o importante é qual a decisão, a verdade é que a forma de decidir é absolutamente fundamental. Na verdade, o jogador 1 pode sempre escolher uma estratégia pura: *Pares* ou *Ímpares*, mas também pode utilizar um *sorteio* e deixar que um dado ou uma roleta decida por ele. Por outras palavras, pode atirar um dado e se sair seis escolher a estratégia *Pares*, e se sair outro número optar pela estratégia *Ímpares*. A diferença é actuar de forma determinística — *estratégias puras* — ou actuar de forma aleatória — *estratégias mistas*.

Deste ponto de vista, o jogador 1 passa a ter, não duas, mas um número infinito de possíveis estratégias. Pode escolher *Pares* com uma probabilidade p, e *Ímpares* com uma probabilidade $1-p$, com p um número compreendido entre 0 e 1. Isto é, p representa o número percentual de vezes em que optaria pela estratégia *Pares* numa partida em que tivesse de jogar um número infinito de vezes. Note-se, no entanto, que as estratégias puras não deixam de ser um caso particular das estratégias mistas. De facto, uma estratégia mista na qual $p = 1$ e $1 - p = 0$ é uma estratégia pura.

Voltando ao jogo, suponhamos que o jogador 1 decidiu jogar *Pares* metade das vezes. Para tal lança uma moeda ao ar e opta por *Pares* de cada vez

		Jogador 2: *Pares*	Jogador 2: *Ímpares*
Jogador 1	*Pares*	-1; 1	1; -1
	Ímpares	1; -1	-1; 1

Figura 1.

que saia *cara*. Suponhamos também que o jogador 2 adivinha que $p=0{,}5$, ou que tenha sido mesmo o jogador 1 a dizer-lho. Não há mais nada que o jogador 2 possa averiguar sobre a forma de jogar do jogador 1, entre outras razões porque o jogador 1 tão pouco sabe mais sobre o seu processo de tomada de decisões. E, a menos que o jogador 2 possua poderes de adivinhação não poderá prever o resultado do lançamento da moeda. Se o jogador 1 elege esta estratégia mista, o resultado será independente do que faz o outro jogador, e assim, em média, cada um ganhará a metade das vezes. A solução deste jogo requer que cada jogador lance uma moeda ao ar com uma probabilidade de $0{,}5$ de sair *cara* como iremos ver seguidamente.

2. Cálculo de estratégias mistas

Se um ou ambos os jogadores adoptam estratégias mistas os *payoffs* de cada jogador dependem das estratégias puras que existem para poderem ser escolhidas. A quantia que está em jogo para cada jogador quando são utilizadas estratégias mistas recebe o nome de *payoff esperado* e é uma média dos pagamentos das estratégias escolhidas ao longo do jogo. Desta forma o cálculo da solução de um jogo no caso de se utilizarem estratégias mistas, em vez de se utilizarem estratégias puras, é um pouco mais complicado. É suposto encontrar sempre soluções para qualquer jogo de soma zero, mas na prática pode ser complicado.

Para avançarmos na procura da solução do jogo é importante introduzirmos um novo conceito: *Uma estratégia A domina outra B se os payoffs que recebe o jogador com a estratégia A são sempre como mínimo iguais aos que conseguiria com a estratégia B e pelo menos numa alternativa o payoff que recebe com a estratégia A é maior do que o que recebe com a estratégia B. A estratégia A diz-se estratégia dominante e a estratégia B diz-se estratégia dominada.*

Ora, se numa estratégia se recebe sempre um *payoff* menor que noutra, então deverá utilizar-se a estratégia que recebe um *payoff* maior e excluir a estratégia que recebe o *payoff* menor. Assim, neste tipo de jogos, a primeira coisa a fazer é identificar as estratégias dominadas e excluí-las. No nosso jogo podemos verificar que não existe nenhuma estratégia dominante e portanto também não existem estratégias dominadas.

Uma vez eliminadas todas as estratégias dominadas, é possível encontrar com bastante frequência uma estratégia mista que constitua a solução do jogo seguindo a regra: *Escolher uma estratégia mista que proporcione o mesmo payoff médio, independentemente do que faz o opositor*, isto é, escolhe-se uma estratégia mista que proporcione *a média dos payoffs das estratégias escolhidas ao longo do jogo*.

Suponhamos então que o jogador 1 escolhe *Pares* com uma probabilidade p e escolhe *Ímpares* com a probabilidade $1-p$. De forma semelhante, o jogador 2 escolhe *Pares* com a probabilidade q e escolhe *Ímpares* com a probabilidade $1-q$. Consideremos agora os *payoffs* do jogador 1.

Se o jogador 2 jogar *Pares* o *payoff* médio que o jogador 1 consegue é:

$$(-1)\times p+1\times(1-p)=-2\times p+1$$

Se o jogador 2 jogar *Ímpares* o *payoff* médio que o jogador 1 consegue é:

$$1\times p+(-1)\times(1-p)=2\times p-1$$

Para que ambos os *payoffs* médios sejam iguais, tem de se verificar

$$-2\times p+1=2\times p-1\Leftrightarrow p=0,5$$

Invertendo os papéis dos jogadores no raciocínio anterior, concluímos também que o jogador 2 joga *Pares* com a mesma probabilidade com que joga *Ímpares*, isto é, $q=0{,}5$.

Neste processo, cada jogador joga *Pares* com probabilidade $0{,}5$ e *Ímpares* com probabilidade $0{,}5$ e, cada jogador pode esperar nem ganhar nem perder em termos de euros. Este equilíbrio em estratégias mistas mostra que quando se lança a moeda ao ar existe a intenção de utilizar probabilidades de 50% de *Pares* e *Ímpares*, o que faz com que nem se ganhe nem se perca.

Uma vez que as equações só têm uma solução, podemos assegurar que o equilíbrio encontrado é o único em estratégias mistas.

Note que neste jogo, uma vez que o jogador recorre ao *sorteio*, não só pode não perder (quando escolhe $p=0{,}5$), independentemente da forma como joga o seu adversário, como tão pouco pode ganhar, por pior que jogue o seu opositor.

Resumindo, o jogador 1 iniciou o jogo estando à mercê do seu adversário e transformou-o noutro no qual o opositor não exerce nenhum controle sobre o respectivo resultado. Atendendo a que o jogador 2 pode fazer exactamente o mesmo, pode garantir a mesma probabilidade de ganhar. Desta forma, cada um dos jogadores tem na sua mão a possibilidade de limitar os ganhos do seu adversário e portanto também as suas perdas.

3. Qual a vantagem das estratégias mistas?

Existem situações em que o equilíbrio de um jogo contempla que os jogadores utilizem estratégias não completamente determinísticas — *estratégias mistas*. Quando um jogador utiliza estratégias mistas actua aleatoriamente. A vantagem da utilização de estratégias mistas é incluir a incerteza no opositor, isto é, um jogador quando joga com estratégias mistas deixa de ser previsível. Embora o objectivo de uma estratégia mista seja manter o adversário no escuro pela imprevisibilidade, ela não implica, de forma alguma, um padrão totalmente aleatório de jogadas. Perante uma situação em que os jogadores utilizem estratégias mistas, cada um deles pode escolher aleatoriamente, em cada jogada, uma estratégia. Desta forma o opositor não sabe prever qual a estratégia adoptada pelo jogador. O problema de cada jogador será então ajustar estas probabilidades de maneira óptima. Matematicamente uma estratégia mista é uma distribuição de probabilidades sobre estratégias puras e é através deste conceito que se consegue resolver um jogo matricial que não possui equilíbrios, pois caso existam, eles são a solução do jogo.

4. Qual das caixas fortes assaltar?

Para finalizar lançamos mais um desafio ao leitor. A solução será apresentada no próximo número da revista.

Os fundos de uma empresa estão guardados em duas caixas fortes que se encontram localizadas a uma grande distância uma da outra. Numa das caixas fortes estão guardados 90.000€, enquanto que na outra só estão depositados 10.000€. Um assaltante estabeleceu um plano que consiste em abrir uma das caixa, enquanto que ao mesmo tempo um seu cúmplice faz soar o alarme do outro. Desta forma, ambos os alarmes dos cofres soam em simultâneo. O vigilante só tem tempo para se dirigir a uma das caixas fortes; se opta por ir ver o que se passa na caixa forte que não está a ser assaltada, a empresa perde o montante guardado na outra. Por outro lado, se se dirige para a caixa forte que está a ser assaltada, os ladrões conseguem fugir mas não levam nada. Qual pensa o leitor que seria a caixa que um assaltante sofisticado escolheria? Com que probabilidade? Que deveria fazer o vigilante, e quanto seria *payoff* esperado para o assaltante?

Bibliografia

[1] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[2] Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] Dresher, Melvin, *Games of strategy: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*, Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

[6] Luce, Ducan R.; Raiffa, Howard, *Games and Decisions*, New York, John Wiley and Soons, 1957.

[7] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*, John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[8] Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2000.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu

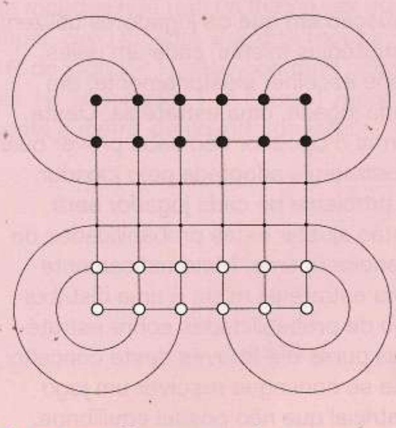
Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

Surakarta

O Surakarta é um jogo de estratégia abstracta, para todas as idades, fácil de aprender e de duração média.

Material. Joga-se entre 2 jogadores, num tabuleiro com uma configuração original, formado por uma grelha de 6x6 pontos ligados ortogonalmente, a que se acrescentam 8 *rotundas* (cada uma corresponde a três quartos de círculo) centradas nos vértices da grelha. São necessárias 24 peças, 12 de cada cor.

É um bom jogo para jogar na praia, desenhando o tabuleiro na areia e usando pedras e conchas.



Objectivo. Capturar todas as peças do adversário.

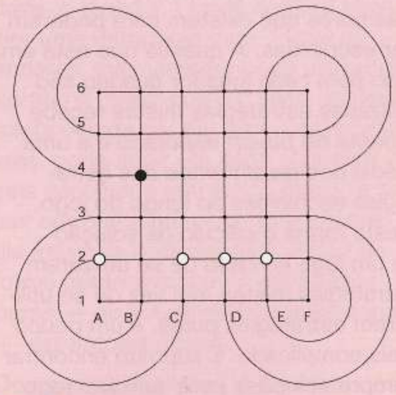
Abertura. Cada jogador coloca as suas peças nas duas fileiras de pontos mais próximas de si.

Desenvolvimento. Os jogadores jogam alternadamente, fazendo movimentos ou capturas.

- Movimentos: uma peça pode mover-se para uma casa adjacente livre, na vertical, horizontal ou diagonal (para a frente ou para trás).
- Capturas: para efectuar uma captura, deve existir um caminho livre — ou seja, não é permitido saltar sobre peças — entre a peça do jogador e a do adversário através de uma das *rotundas*; a peça atacante só pode percorrer casas na horizontal ou na vertical, podendo viajar sobre tantas *rotundas* e casas livres quanto as necessárias para alcançar a peça do adversário. As capturas não são obrigatórias.

Exemplo. A peça preta pode capturar a peça branca:

- A2, deslocando-se para baixo;
- C2, deslocando-se para a esquerda;
- D2, deslocando-se para a direita;
- E2, deslocando-se para cima (passa por duas rotundas).



Final. Vence o jogador que primeiro capturar todas as peças do adversário ou, não havendo mais jogadas possíveis, possuir maior vantagem numérica. Pode registar-se um empate, por exemplo, quando cada jogador possuir uma peça em grupo de anéis distintos.

Se forem jogados vários jogos (em número par, para ambos os jogadores terem a saída um mesmo número de vezes), pode estabelecer-se a seguinte pontuação: no fim de cada jogo, o vencedor pontua o número de peças que ficam no tabuleiro. Ganha quem arrecadar o maior total.

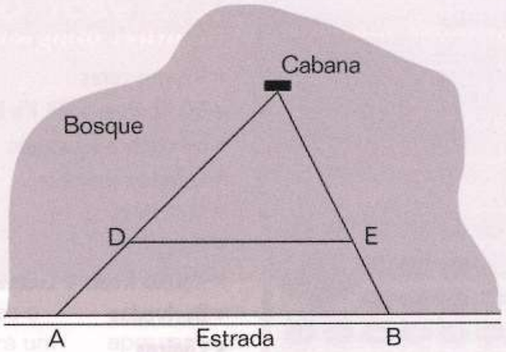
Nota. Surakarta é o nome de uma cidade indonésia, na ilha de Java, banhada pelo rio Solo, nome pelo qual a cidade é hoje vulgarmente conhecida.

José Paulo Viana

O problema deste número

Caminho pelo bosque

Perto de Viana do Castelo há um belo e simpático bosque limitado por uma estrada em linha recta. De dois pontos (A e B) da estrada saem uns caminhos bem a direito que vão dar a uma cabana. Certo dia, a Teresa partiu a pé do ponto A em direcção à cabana mas, a certa altura, desistiu de ir até ao fim. Por isso, meteu a corta-mato, paralelamente à estrada, até encontrar o outro caminho (em E) e regressou à estrada por este caminho.



Curiosamente, a distância que percorreu a corta-mato foi exactamente igual ao total do que andou nos dois caminhos. Como descobrir geometricamente o ponto D em que a Teresa abandonou o primeiro caminho?

Nota: pretende-se um método que possa ser aplicado a qualquer triângulo ABC.

(Respostas até 30 de Setembro)

Os nomes e os números

O problema proposto no número 76 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Estava outro dia com uns amigos quando resolvemos transformar as letras dos nossos nomes próprios em números, de acordo com um dos mais antigos códigos que se conhecem:

$A=1$, $B=2$, $C=3$, ... , $X=22$, $Z=23$

e depois cada um de nós multiplicou os números do seu nome.

No meu caso, JOSÉ deu

$$10 \times 14 \times 18 \times 5 = 12600.$$

Uma das minhas amigas obteve 24 453.

O resultado de um dos meus amigos foi 497 420.

Como é que eles se chamam?

Tivemos 13 respostas: Carla Mendes, Eduardo Dinis & Susana Ribeiro (Viseu), Helena Cunha (Viseu), Helena Rocha (Lisboa), João Almeida e Sá (Parede), João Maria de Oliveira (Cartaxo), Luís Mota (Lisboa), Paula Gomes (Almada), Paula Gomes (Braga), Paulo Dias (Moita), Paulo Lopes (Covilhã), Pedrosa Santos (Queluz) e do sócio nº 180.

Dá jeito começar por fazer, como a Helena Cunha, uma lista das letras e respectivo valor numérico:

$A=1$	$F=6$	$L=11$	$Q=16$	$V=21$
$B=2$	$G=7$	$M=12$	$R=17$	$X=22$
$C=3$	$H=8$	$N=13$	$S=18$	$Z=23$
$D=4$	$I=9$	$O=14$	$T=19$	
$E=5$	$J=10$	$P=15$	$U=20$	

A seguir, tal como quase todos fizeram, vamos decompor 24453, o número da minha amiga, em factores primos:

$$24453 = 3 \times 3 \times 11 \times 13 \times 19$$

Esta decomposição corresponde às letras C, C, L, N e T, às quais se pode juntar a letra A tantas vezes quantas se queira, porque A vale 1, o elemento neutro da multiplicação. As tentativas de encontrar um nome com estas letras foram infrutíferas. Mas, as duas letras C, que valem 3×3, podem ser substituídas por um I, que vale 9. Temos então:

I, L, N, T e os A's que se quiser.

Agora, todos conseguiram encontrar NATÁLIA.

Como diz a Helena Rocha, *"o nome masculino parece mais complicado, uma vez que com os factores primos que*

(continua na página 39)

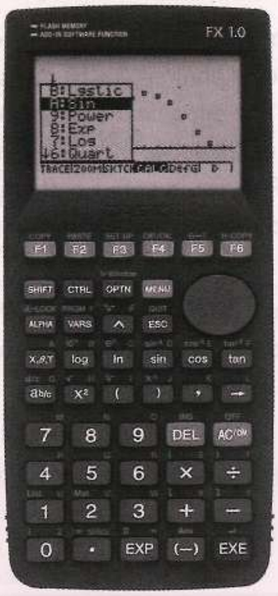
CASIO® CALCULADORAS PARA O ENSINO

A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado, perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas, através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional Casio.

GRÁFICAS

CFX 9850 Gb Plus

- Visor a cores
- 32 Kb Ram + 28 Kb Rom
- Estatística Avançada
- Cálculo Financeiro
- Matrizes
- Complexos
- Raízes Reais e Complexos
- Derivados
- Cónicas
- 10 Modelos de Regressão
- Biblioteca Incorporada
- Ligação a PC, Analisador de Dados, e Vídeo/TV
- Modelo com Painel para Retroprojector



FX 1.0 Plus

- Memória Flash 768K + 144K Ram (cerca de 1 Megabyte)
- Excelente Visor Monocromático
- Funções Gráficas de Alto Nível
- Rápido Acesso aos Menus e Diversas Opções
- Gráficos Dinâmicos e Duplas – Cónicas – Complexos
- Estatística – Equações até 30 Incógnitas
- Matrizes – Integração – Cálculo Diferencial
- Operações Lógicas – Programação Tipo Basic
- Actualização pela Internet com Programas e Aplicações
- Linguagem de Trabalho e Aplicação da Linguagem Portuguesa (download da Internet)

e ainda: FX 7450 G, FX 9750, Álgebra FX 2.0

ACESSÓRIOS P/ GRÁFICAS

CABO SB 87

Ligação a PC das gráficas CASIO com software FA123

TV/VÍDEO - Vi 9850 G

Ligação a TV e Vídeo projector da CASIO CFX 9850 Gb Plus

KITS PARA RETROPROJECTOR

Conjunto Máquina + Data Display + cartão emulador

ANALISADOR DE DADOS

Recolha de Dados vários com sondas incluídas e ligação das gráficas CASIO; Analisador EA-100, Sensor de Movimento EA-2, Sensores da Vernier

CIENTÍFICAS

FX 82

FX 570

FX 350

Científicas de alto nível, Simples, Económicas, Poderosas

- **Visor com 2 linhas**

ELEMENTARES

HS 8 ER

HL 820 ER

SL 450

- **Robustas**
- **Económicas**
- **Modelos ER com cálculo de EUROS**

P.E.C. Programa Educacional CASIO

Apoio Técnico e Pedagógico - Programa de Empréstimos - Cursos de Formação

O PEC - Programa Educacional CASIO, numa das suas várias vertentes, desenvolve **cursos de formação** (gratuitos), tendo como objectivo familiarizar a classe docente com a tecnologia das calculadoras gráficas e a sua aplicação aos novos programas de matemática.

O programa de cursos de formação desenvolvido pela CASIO, conta com o apoio de uma Equipa de Professores de Matemática a nível nacional, que não só realizarão os cursos como **também responderão a qualquer solicitação técnica e/ou pedagógica**.

CONTACTOS

APOIO PEDAGÓGICO POR TELEFONE: 213 122 868

E-MAIL: ana.margarida@beltraoc.pt

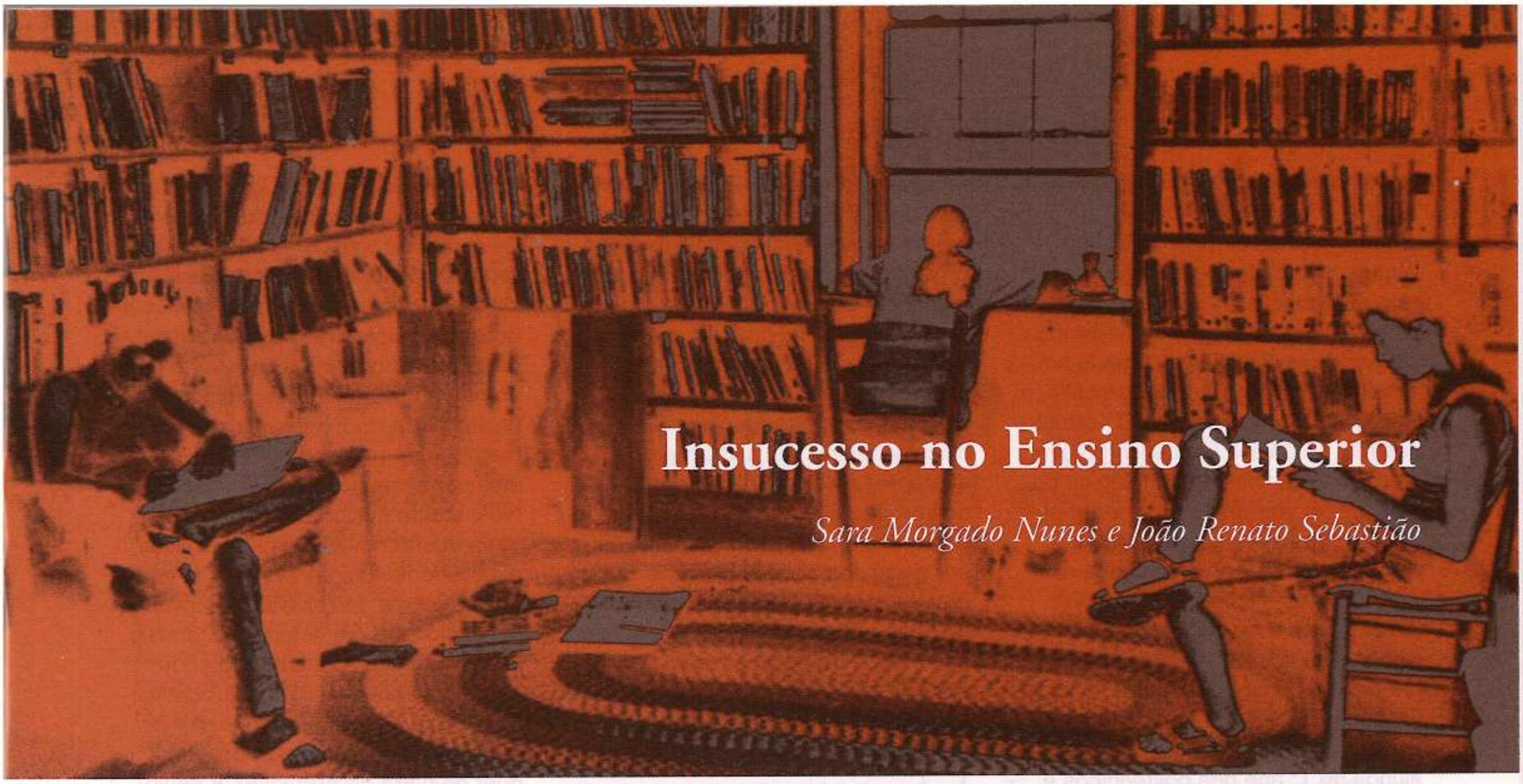
CASIO Japão: ACTIVIDADES DOWNLOADS

www.casio.co.jp/edu_e/

BELTRÃO COELHO

Lisboa, Porto, Barreiro, Braga, Aveiro, Coimbra, Santarém, Setúbal, Faro, Funchal e Sintra

www.beltraoc.pt



Insucesso no Ensino Superior

Sara Morgado Nunes e João Renato Sebastião

(...) a dicotomia sucesso/insucesso constitui um problema multifacetado, traduzindo a confluência de uma panóplia de factores como os métodos de trabalho e raciocínio dos estudantes, a qualidade pedagógica dos professores, as exigências de cada instituição, o passado escolar de cada aluno mas também o afastamento do jovem aluno do meio familiar e todo um conjunto de desafios que estão subjacentes à transição para o Ensino Superior.

Se até há bem pouco tempo atrás a questão do insucesso escolar era um problema que se debatia, quase exclusivamente, ao nível do Ensino Básico e Secundário, hoje, o fraco desempenho de grande parte dos alunos nomeadamente em disciplinas do âmbito da Matemática estende-se também ao Ensino Superior, constituindo um obstáculo com o qual professores e alunos se deparam em grande parte dos politécnicos e universidades portuguesas. Em geral, os professores atribuem este drama aos alunos que, "além de chegarem ao Ensino Superior mal preparados, não estudam nem possuem hábitos de trabalho" e os alunos culpam os professores que "são muito exigentes e não sabem ensinar".

Até recentemente assistia-se a uma total ausência de responsabilidade das instituições de Ensino Superior relativamente ao desempenho académico dos seus estudantes. A Universidade acomodava um grupo restrito de candidatos, procedendo para tal a uma filtragem através dos exames de admissão e, mais tarde, através dos números *clausus*. Este grupo restrito iria integrar uma elite social com garantia quase absoluta de um emprego adequado à formação recebida, o que de certa forma, provocava um alheamento em relação aos estudantes (Santos, 2000). Todos sabemos que esta é hoje uma posição insustentável pois, se a entrada parece agora assegurada a todos, grande parte dos nossos alunos apresenta um fraco desempenho que se vai evidenciando através do descalabro de repetências nos primeiros anos a que se assiste em muitas instituições de Ensino Superior e por isso tem-se assistido a uma preocupação crescente, por parte de muitas instituições, em favorecer o sucesso académico dos seus estudantes.

A questão do fraco desempenho e da repetência no Ensino Superior surge associada à democratização que tem vindo a marcar, nas duas últimas décadas, o acesso a este nível de ensino em Portugal, sendo a actual geração de estudantes a primeira que, em muitas famílias, tem oportunidade de o frequentar. Como primeira consequência desta massificação, encontramos hoje, na mesma escola, no mesmo curso e na mesma sala de aula, alunos com níveis de conhecimentos, capacidades, atitudes, expectativas e projectos vocacionais claramente diferentes, ficando assim comprometida a acção pedagógica do professor que se depara com estes grupos diferenciados de alunos, sem saber, muitas vezes, a qual deles se dirige. E assim, apesar de ser mais evidente em disciplinas do âmbito da Matemática, o fraco desempenho dos alunos do 1° ano em especial, também se vai estendendo a outras áreas e é actualmente generalizável à maioria das instituições de ensino superior portuguesas.

As consequências desta realidade são necessariamente alarmantes pois é hoje indiscutível a relevância da Matemática na formação dos nossos alunos. Além disso, sendo a Matemática um alicerce de primordial importância na construção do saber e no desenvolvimento do conhecimento, a fraca preparação dos jovens portugueses não só origina um deficit notável na cultura científica e tecnológica do país, como poderá vir a comprometer o futuro profissional destes jovens. Neste contexto, torna-se cada vez mais visível a inquietação que este assunto tem suscitado não apenas por parte dos seus intervenientes directos mas também do próprio Sistema Educativo. Em particular, as causas do fraco desempenho dos alunos do 1° ano nos politécnicos e universidades portuguesas têm sido objecto de investigação e matéria de um número crescente de artigos.

Dos trabalhos desenvolvidos nesta área (Tavares et al (1998), Tavares et al (2000), Almeida et al (2002), Batista & Almeida (2002) e Salgueira & Almeida (2002), entre outros), ressalta a ideia de que a dicotomia sucesso/insucesso constitui um problema multifacetado, traduzindo a confluência de uma panóplia de factores como os métodos de trabalho e raciocínio dos estudantes, a qualidade pedagógica dos professores, as exigências de cada instituição, o passado escolar de cada aluno mas também o afastamento do jovem aluno do meio familiar e todo um conjunto de desafios que estão subjacentes à transição para o Ensino Superior. Por sua vez, na transição do Ensino Secundário para o Ensino Superior, os alunos são confrontados com novos desafios, com um novo modelo de aulas (mais expositivas necessariamente), com um ritmo de trabalho diferente, com novas tarefas escolares e de avaliação, o que implica da sua parte uma maior mobilização das suas capacidades cognitivas, o desenvolvimento de novas formas de organização do tempo, de mais autonomia no estudo e das suas capacidades de adaptação. Além disso, esta nova fase corresponde a um período de vida pautado por tarefas desenvolvimentais ao nível da autonomia, da construção de identidade, do desenvolvimento das relações interpessoais e do sentido da vida. Sendo tais desafios não só naturais como necessários, importa organizar apoios institucionais como gabinetes pedagógicos, sobretudo para os jovens menos preparados para as mudanças ou mais fragilizados em termos psicossociais, uma vez que poderão daí emergir dificuldades no seu ajustamento às diferentes facetas da vida académica, conduzindo a elevados níveis de desadaptação, insucesso e insatisfação por parte dos alunos. Seria ainda de grande vantagem, que as instituições de Ensino Superior implementassem cursos que permitissem aos alunos o desenvolvimento e aperfeiçoamento de práticas de estudo, métodos de trabalho e técnicas de pesquisa.

Às diversas alterações e novas exigências associadas à transição para o Ensino Superior, juntam-se outros factores que podem vir a condicionar o desempenho académico dos estudantes. Por exemplo, Almeida (1998, 2002) refere que a política dos números *clausus* em Portugal tem questionado as condições de adaptação, de aprendizagem e de desenvolvimento psicossocial de cerca de 25% dos alunos do Ensino Superior que não frequentam o curso correspondente à sua primeira escolha vocacional.

A todos estes factores que constituem sem dúvida fortes condicionantes do sucesso dos nossos estudantes na maior parte das disciplinas, há que juntar, no caso da Matemática, a fraca motivação e a ausência de aprendizagens essenciais que os alunos trazem, em geral, do Ensino Secundário. Aliás, Santos & Almeida (2000) consideram que o desempenho académico anterior ao Ensino Superior constitui uma das variáveis pessoais mais predictoras do sucesso académico em alunos do 1° ano. Note-se, porém, que estamos longe de admitir que a ausência de aprendizagens essenciais explica a totalidade deste fenómeno, pois essa seria, certamente, uma atitude demasiado comodista, que apenas nos iludiria nada resolvendo.

No decurso da nossa experiência enquanto docentes do Ensino Superior, a questão do fraco desempenho dos nossos alunos nas disciplinas da área da Matemática, também tem sido alvo de reflexão e análise, tema de conversa com os alunos e ponto de diálogo entre colegas, evidenciando-se sempre a ideia de que uma das principais causas deste revés parece relacionar-se com o facto de, grande parte dos alunos, não possuir hábitos de estudo bem enraizados e métodos de trabalho que realmente lhes permitam progredir com sucesso. No caso de qualquer disciplina pertencente ao domínio da Matemática, este fenómeno é agravado uma vez que a maioria dos alunos desenvolve habitualmente um estudo muito mais virado para a mecanização do que para uma aprendizagem significativa, a qual requer, acima de tudo, tempo e empenho quer da parte do aluno, quer da parte do professor. É óbvio que se cinco horas de estudo são, eventualmente, suficientes para conseguir a aprovação numa cadeira de natureza mais teórica e de conteúdo mais descritivo, no âmbito da Matemática isso é simplesmente impossível! Por isso, o hábito de estudar na véspera dos momentos de avaliação, característico de grande parte dos estudantes, é perfeitamente incompatível com a natureza de disciplinas como a Matemática, que assentam num método essencialmente dedutivo e possuem como objecto de estudo entidades abstractas. Além disso, a própria cultura de ensino instalada, que se baseia em exames, motiva este modelo de estudo descontínuo que se caracteriza pelo facilitismo durante os períodos lectivos, seguido de esforços anormais nos dias que antecedem os exames e as entregas de trabalhos. Para além de se tratar de um tipo de estudo com uma eficácia muito reduzida, a aprendizagem daí resultante está longe de ser uma aprendizagem significativa, não promovendo a aquisição de competências essenciais aos profissionais que pretendemos formar. Por isso, talvez fosse importante retirar a tónica dos períodos de exames, promovendo diversas actividades que levem a um trabalho contínuo ao longo de cada semestre.

Em suma, parece-nos que, se juntarmos às dificuldades que emergem da adaptação dos estudantes às novas exigências do Ensino Superior, a fraca preparação que muitos trazem do Ensino Secundário e o método de trabalho pouco autónomo de grande parte dos alunos que recebemos, conseguimos, em parte, explicar as elevadas taxas de insucesso registadas nos primeiros anos, mais visíveis nas disciplinas da área da Matemática.

Desta breve análise importa destacar três aspectos que merecem reflexão:

- A preparação que os alunos trazem do Ensino Secundário constitui um factor determinante do seu desempenho académico e portanto cabe também ao professor do Ensino Superior adoptar estratégias que lhe permitam aferir competências e nivelar conhecimentos essenciais à implementação do currículo;
- É urgente a implementação de meios que permitam aos alunos o desenvolvimento de métodos de estudo autónomos e eficazes, assentes em técnicas de pesquisa, o que pode ser reforçado através de seminários e pequenos cursos sobre técnicas de estudo e investigação;
- O facto de os alunos estarem a atravessar uma fase de transição necessariamente marcada por mudanças, desafios e conflitos não pode ser ignorada, devendo cada instituição dispor dos meios de acção social necessários para apoiar os jovens mais fragilizados.

Ignorar esta heterogeneidade que caracteriza a massa de alunos que recebemos nas nossas instituições ou simplesmente cruzar os braços e lamentar as elevadas taxas de insucesso e o facto de, ano após ano, nos depararmos com alunos mal preparados sem nada fazer, só retardará a solução que todos procuramos.

Referências

Almeida, L.S. (1998). Questionário de vivências académicas para jovens universitários: Estudos de construção e validação. *Revista Galego-Portuguesa de Psicologia e Educación, 3*(1), pp.113–130.

Almeida, L.S. (2002). Formatar o ensino a pensar na aprendizagem. *Contextos e Dinâmicas da Vida Académica.* Braga: Universidade do Minho.

Almeida, L.S.; Vasconcelos, R.M.; Machado, C.; Soares, A.P. & Morais, N. (2002). Perfil escolar sócio-demográfico dos candidatos ao ensino superior: o caso dos estudantes da Universidade do Minho. *Contextos e Dinâmicas da Vida Académica.* Braga: Universidade do Minho.

Batista, R.G. & Almeida, L.S. (2002). Desafios da transição e vivências académicas: Análise segundo a opção de curso e mobilidade. *Contextos e Dinâmicas da Vida Académica.* Braga: Universidade do Minho. Conselho Académico.

Salgueira, A.P. & Almeida, L.S. (2002). Vivências Académicas e Rendimento Escolar em Estudantes do Ensino Superior: Estudo Longitudinal na Universidade do Minho. *Contextos e Dinâmicas da Vida Académica.* Braga: Universidade do Minho.

Santos, S.M. (2000). A Responsabilidade da Universidade no Acesso ao Ensino Superior. *Transição para o Ensino Superior.* Braga: Universidade do Minho. Conselho Académico.

Santos, L. & Almeida, L.S. (2000). Vivências e Rendimento Académicos: Estudo com alunos universitários do 1° ano. *Transição para o Ensino Superior.* Braga: Universidade do Minho. Conselho Académico.

Tavares, J., Santiago, R. & Lencastre, L. (1998). *Insucesso no 1°ano do Ensino Superior: Um Estudo no Âmbito dos Cursos de Licenciatura em Ciências e Engenharia na Universidade de Aveiro.* Aveiro: Universidade de Aveiro.

Tavares, J., Santiago, R., Taveira, M.C., Lencastre, L. & Gonçalves, F. (2000). Factores de Sucesso/Insucesso no 1°ano dos Cursos de Licenciatura em Ciências e Engenharia do Ensino Superior. *Transição para o Ensino Superior.* Braga: Universidade do Minho. Conselho Académico

Sara Morgado Nunes
João Renato Sebastião
Escola Superior de Gestão do Instituto Politécnico de Castelo Branco

O problema deste número

(continuação da página 35)

aparecem na decomposição de 497420 *é possível efectuar vários produtos"* com números inteiros até 23. A decomposição do número em factores primos é:

$$497420 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$$

A Helena Cunha e o Paulo Dias fizeram cuidadosamente a lista completa das possibilidades mas o Paulo Lopes abreviou, dando *"primazia a produtos que conduzam a vogais"*, enquanto que o Luís Mota foi mais longe na simplificação, considerando que *"há toda a probabilidade de um nome masculino ter um O, quase de certeza no fim"*. E com isto pouparam algum trabalho ...

A lista completa das possibilidades é:

$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$	B, E, G, L, R, T
$4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$	D, E, G, L, R, T
$2 \times 7 \times 10 \times 11 \times 17 \times 19$	B, G, J, L, R, T
$7 \times 11 \times 17 \times 19 \times 20$	G, L, R, T, U
$2 \times 5 \times 11 \times 14 \times 17 \times 19$	B, E, L, O, R, T
$10 \times 11 \times 14 \times 17 \times 19$	J, L, O, R, T
$2 \times 5 \times 7 \times 17 \times 19 \times 22$	B, E, G, R, T, X
$7 \times 10 \times 17 \times 19 \times 22$	G, J, R, T, X
$5 \times 14 \times 17 \times 19 \times 22$	E, O, R, T, X

Claro, podemos sempre acrescentar os A's que quisermos.

Agora, como diz o Pedrosa Santos, é preciso uma certa intuição. E com ela, todos chegaram ao nome do meu amigo: ALBERTO. Bem, todos não. O João Almeida e Sá conseguiu um outro nome de que ninguém se tinha lembrado: BELTRÃO...

Há sempre surpresas!

Afinal quem vai fazer a formação *informática* dos professores?

Segundo a notícia saída na comunicação social o Ministério da Educação assinou um protocolo com a empresa Intel para promover a formação de professores na área da informática.

Dizia ainda a mesma notícia que iriam ser aplicadas duas iniciativas das várias desenvolvidas pela Intel na área da educação.

Uma delas consiste na adopção do programa de formação *Teach to the future* que já foi implementado noutros países e no qual se prevê que num período de dois anos seja feita a formação a 300 formadores que, por sua vez, serão responsáveis por formar 5000 professores em 2005 e 13000 em 2006.

Procurei informações sobre este programa de formação de professores e fui ver o que se passava nos outros países.

Encontrei vários sites onde se lê que este projecto se destina a *ajudar o professor a melhorar a capacidade de aprendizagem dos alunos através da integração da tecnologia no dia-a-dia das aulas*.

Diz-se ainda que nesse programa os professores aprendem com outros colegas como integrar a tecnologia nos seus planos de aula e que aprendem a melhor maneira de criar ferramentas de avaliação de acordo com os objectivos educacionais. O programa envolve o uso da Internet, o desenho de páginas web e projectos dos alunos.

Encontrei num dos sites dedicados a este *Teach to the future* um currículo de formação. Um dos programas que vi no Institute of Computer Technology, prevê uma formação de 40 horas, dividida em 10 módulos cujos conteúdos incluem, entre outros, a iniciação mais básica, leis de copyright, avaliação de recursos na Internet, criação de apresentações multimédia, de publicações e materiais de suporte dos alunos, páginas de alunos, materiais para os professores e portfolios. Fala-se numa primeira fase de tradução do que existe e numa fase posterior de construção de novos conteúdos.

A Intel é vista como consultora da formação e esta será da responsabilidade dos Centros de Formação.

A outra vertente do protocolo é a criação de um portal de formação *on-line* semelhante ao que existe na Irlanda, com as adaptações necessárias ao currículo nacional.

Fui até ao site deste programa para ter uma ideia do que continha na área da Matemática.

Trata-se de um site para alunos e professores, que inclui vários temas, dentro da Álgebra, da Trigonometria e da Geometria e que não é mais do que uma espécie de tutorial. Em cada tema há uma introdução muito *minimalista* dizendo o que o aluno vai ser capaz de fazer no final; a lição propriamente dita; um sumário e um glossário.

Os assuntos são muito pouco trabalhados, quase que se limitam à apresentação de conceitos básicos. A apresentação gráfica é simples e em alguns casos tem uma certa graça. Há também uma zona de notas para o estudante e outra de preparação para exames.

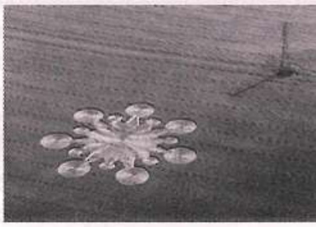
Não é minha intenção fazer qualquer juízo de valor sobre este protocolo pois apenas sei (na altura em que estou a escrever) o que veio a público nas notícias da comunicação social, mas não pude deixar de o achar, no mínimo, estranho.

Estranho, porque não estou a ver muito bem (defeito meu, com certeza) a autonomia dos Centros de Formação e o papel dos Centros de Competência, que foram criados no âmbito de um programa dedicado à utilização da tecnologia nas escolas. Parece que mais uma vez se continua a desperdiçar recursos.

Pode consultar o site do portal irlandês Skool em www.skool.ie.

Navegando pela Internet

Já que falámos de *coisas estranhas*, começamos a viagem de hoje por um *site* dedicado a *Círculos estranhos*.



Crop Circles

Já ouviu com certeza falar nos *crop circles*. São figuras muito perfeitas à base de círculos e anéis que aparecem nos campos e que despertaram desde sempre a curiosidade e a imaginação quanto ao modo como são feitos.

O site http://www.lovely.clara.net/homepg.html é dedicado a este assunto e vale a pena ver o capítulo *Geometria euclidiana dos Crop circles*.

Em tempo da *Matemática e Jogo*, encontramos mais um *site*, já não muito recente, que contém uma série de *applets java* onde pode jogar alguns jogos de estratégia, alguns bem conhecidos (mastermind, solitário, etc, ...) em *Java on the brain*.

JAVA ON THE BRAIN
Karl Hörnell's Applet Center

http://www.javaonthebrain.com/brain.html

Modelos em papel de Poliedros

Paper Models of Polyhedra

http://www.korthalsaltes.com

Se procura informações e modelos para construir poliedros, então visite este site que contém mais de oitenta modelos e planificações.

Desde os mais usuais, platónicos e arquimedeanos, poliedros compostos, até prismas e antiprismas, caleidociclos, etc. encontra um pouco de tudo. Além disso tem *links* para um grande número de páginas muito interessantes também sobre poliedros.

JASON

Jason Project, em http://www.jason.org

O projecto Jason da Jason Foundation for Education (Needham, Massachusetts) é um projecto multidisciplinar cujo objectivo é criar nos alunos o gosto pelo estudo das ciências, matemática e tecnologia através da exploração e da descoberta.

Se entrar na opção *Mathmagica*, encontra *applets* para estudo de números e operações, álgebra e geometria.

Discovery Channel School

Discovery School em http://school.discovery.com/schrockguide/eval.html

Neste *site* estão publicados artigos e grelhas de avaliação, elaboradas por Kathy Schrock destinados a ajudar os alunos a avaliar os *sites* que encontram na Internet.

Becta | British Educational Communications and Technology Agency

What the Research Says

http://www.becta.org.uk/research/research.cfm?section=1&id=546

Nesta página estão vários artigos sobre a investigação que tem vindo a ser feita sobre a utilização das TIC nas escolas.

E acabamos, mais uma vez, com uma volta pelos museus virtuais onde vale sempre a pena ir.

INSTITUTE AND MUSEUM OF THE HISTORY OF SCIENCE

http://brunelleschi.imss.fi.it/genscheda.asp?appl=SIM&xsl=catalogo&indice=54&lingua=ENG&chiave=403016

Veja a colecção de instrumentos matemáticos que se encontra neste Instituto e Museu da História da Ciência, em Florença.

Continue agora pelo *Museum of the History of Science* em Oxford

http://www.mhs.ox.ac.uk/measurer/text/contents.htm

e visite as exposições virtuais.

A primeira, a que fazemos referência *The Measurers* parte de uma pintura flamenga do século XVI e está organizada em três grandes secções:

Os Mathematicians, que foca a matemática prática da Renascença na Europa e as contribuições dos flamengos; *The Measurers*, com base na pintura com o mesmo nome, trata da utilização da Matemática no dia a dia e *The Collectors* que contém os instrumentos matemáticos mais relevantes, que se conhecem do século XVI.

Outra exposição virtual é *The Geometry of War*, 1500–1750, que foca sobretudo a aplicação das ciências matemáticas em contexto de guerra.

Programa de Empréstimo

TEXAS INSTRUMENTS

education.ti.com/portugal

A Texas Instruments disponibiliza empréstimos de calculadoras e acessórios aos professores de matemática e ciências. Os empréstimos terão uma duração máxima de duas semanas, estão sujeitos à disponibilidade do material e tem como objectivo principal a realização de acções de formação e workshops.

Os seguintes **produtos** estão **disponíveis**:

- TI-83 Plus
- TI-89
- TI-92 Plus
- Voyage 200™
- Calculator-Based Laboratory™ (CBL™) System
- CBL 2™
- Calculator-Based Ranger™ (CBR™) System
- Cabri Geometry II™
- TI Presenter™

Poderá pedir sensores para a sua acção com o CBL. Pode pedir posters, transparências e literatura para distribuir aos participantes durante a sua acção.

Lista de Sensores	Ref #	Lista de Sensores	Ref #
Acelerómetro até 25g	ACC-DIN	Sensor de pressão de 0 a 2.1 atm	GPS-BTA
Acelerómetro de 3 eixos	3D-BTA	Detector de batimentos cardíacos	HRM-DIN
Barómetro	BAR-DIN	Microfone	MCA-CBL
Colorímetro	COL-DIN	Sensor de PH	PH-DIN
Conductividade	CON-DIN	Sensor de humidade relativa	RH-DIN
2 amperímetros e 2 voltímetros	CV-DIN	Monitor de radiações	SRM-DG
Temperatura	DCT-DIN	Termopar tipo K-temperaturas de -200 a 1400°C	TCA-DIN
Sensor de força de duplo alcançe	DFS-DIN	Sensor de luminosidade TI	CBL/CA/C
Sensor de electrocardiograma	EKG-DIN	Sensor de voltagem TI	CBL/CA/G
Monitor de batimentos cardíacos para exercício	EHR-DIN	Sensor de campo magnético	MG-DIN
Sensor de fluxo da água	FLO-CBL	Detector de movimento por ultrasons	MD-CBL

USUFRUIR DOS NOSSOS EMPRÉSTIMOS É GRÁTIS E FÁCIL!

As calculadoras e o ViewScreen™ (caso seja pedido), serão entregues pela nossa transportadora em mala própria, um dia ou dois antes do começo da sua acção. No fim, apenas terá de arrumar as calculadoras na mala, colar a etiqueta fornecida e telefonar para o serviço de entregas para fazer o levantamento.

Não se esqueça de nos contactar pelo menos com um MÊS DE ANTECEDÊNCIA.

CARTA: CSC (Centro de Suporte ao Cliente) C/o Sitel Belgium Woluwelaan 158–1831 Diegem — Bélgica

TELEFONE: 800 832 627 (número gratuito) | **FAX:** 21 424 51 30 | **E-MAIL:** ti-loan@ti.com | **INTERNET:** http://education.ti.com/portugal/apoio/pemprestimo/

Se quiser fazer o pedido por fax ou carta, por favor preencha o formulário seguinte:

Nome: ____________________ Escola e cursos ensinados: ____________________

Data do inicio da formação: ____________________ Data do fim da formação: ____________________

Telefone (escola): ____________________ Telefone (casa): ____________________

Morada: ____________________ Fax: ____________________

E-mail: ____________________

Produtos Necessários	Quantidade	C/ Viewscreen (Sim ou Não)

Investigações na Sala de Aula do 1º Ciclo

António Guerreiro, Maria das Dores Fernandes, Sónia Costa, Clotilde Assunção e Soraia Ramos

Este artigo descreve a implementação de uma actividade matemática de carácter investigativo em turmas do 1° Ciclo do Ensino Básico, no passado ano lectivo, enquadrada numa lógica de trabalho de grupo realizado no contexto da disciplina *Actividades Investigativas em Educação Matemática* do Curso de Complementos de Formação Científica e Pedagógica para Professores do 1° Ciclo, da Escola Superior de Educação da Universidade do Algarve, e salienta alguns aspectos das actividades desenvolvidas pelos alunos dos primeiros anos de escolaridade e das reflexões efectuadas pelas professoras do 1° Ciclo envolvidas nestas actividades.

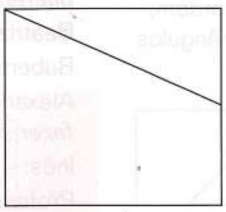
A actividade *Cortes, cortes e mais cortes*

Para a realização de um trabalho de grupo, no âmbito da referida disciplina, foi escolhida a actividade, da área da geometria, *Cortes, cortes e mais cortes* devido ao seu carácter investigativo e à facilidade de aplicação a diferentes níveis de ensino, dado que o trabalho iria decorrer com alunos de duas turmas do 1° ano, uma turma do 2° ano e uma turma do 3° ano de escolaridade.

Foi distribuído aos alunos, a trabalharem dois a dois, quadrados de papel colorido, todos do mesmo tamanho, e folhas de papel branco, para colarem os quadrados depois de transformados em diferentes figuras geométricas. Na apresentação da situação investigativa, foi salientado que os alunos teriam de recortar cada um dos quadrados, com um único corte, e obterem figuras geométricas diferentes, até se esgotarem todas as hipóteses.

CORTES, CORTES E MAIS CORTES

Material: quadrados de papel colorido, folhas de papel branco, tesoura e cola



Este quadrado foi cortado em duas figuras por um corte: obteve-se um quadrilátero e um triângulo.

Investiga que figuras se obtêm cortando um quadrado com um corte.

E fazendo dois cortes?

O Conceito de Corte e a Impossibilidade da Formação de Quadrados

Para facilitar o corte nos quadrados, nas turmas do 1° ano de escolaridade, foi sugerido aos alunos a utilização de régua para desenharem as linhas de corte e só posteriormente a utilização da tesoura. Esta estratégia foi valorizada pelos alunos mais novos:

> Joana: – *Gostei de fazer porque usámos a régua e ficou tudo mais direitinho!*

Apesar das explicações prévias e da utilização da régua, a exploração da actividade proposta, gerou algum tipo de interrogações aos alunos do 1° ano de escolaridade, nomeadamente o que se entendia por *um corte*:

Patrícia: – *Posso cortar assim?* (a fazer ondas)

Pedro: – *Só podemos cortar ao meio?*

Daniela: – *Podemos cruzar?*

Suzel: – *Podem-se fazer círculos?*

Para além das questões relacionadas com o conceito de corte, os alunos do primeiro ano fizeram, através do corte do quadrado, algumas pequenas descobertas, nomeadamente a descoberta da impossibilidade de, com um único corte, transformar um quadrado em quadrados:

Miguel: – *Podem-se fazer quadrados?*

Professora: – *Quantos cortes podem fazer no quadrado?*

Pedro: – *Só podemos fazer um corte.*

Professora: – *Então, quando me perguntam se podem fazer quadrados, o que é que acham? Tentem fazê-los, por favor, e vejam o que acontece.*

Catarina: – *Não professora, só podemos fazer rectângulos. Para fazer quadrados, temos de fazer outro corte.*

Os alunos da turma do 2° ano também se questionaram sobre as estratégias a utilizar para recortarem os quadrados e sobre a impossibilidade de obter um novo quadrado através de um único corte:

Michael: – *Professora, se cortarmos assim ficam dois rectângulos ...*

Nuno: – *Se nós fizermos só um corte, como é que vamos fazer figuras diferentes?*

Professora: – *E se cortarem doutras maneira, noutros locais?*

Filipa: – *Fiz dois triângulos!*

Yuri: – *Eu quero fazer também um quadrado, mas não estou conseguindo ... , pois quando corto, ficam sempre dois rectângulos.*

Caroline: – *Olhe, professora, fizemos aqui um pentágono e um triângulo.*

Yuri: – *Eu gostava de fazer um hexágono! Será que posso?*

A mesma descoberta aconteceu na turma do 3° ano:

Rui – *Posso cortar aqui em baixo, bem fininho, para dar um quadrado e um rectângulo?*

Professora: – *Achas que assim formas um quadrado?*

Rui: – *Hum ... não, fico com dois rectângulos à mesma.*

O Desenvolvimento daActividade, Questões e Conclusões

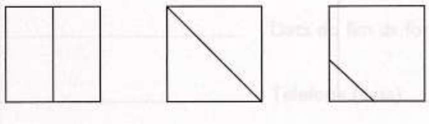
A actividade proposta com um corte foi desenvolvida junto das quatro turmas e com dois cortes junto das turmas do segundo e terceiro anos. Em ambos os casos a grande maioria dos alunos manifestaram entusiasmo na tarefa, apesar de considerarem mais fácil a descoberta de diferentes figuras com dois cortes devido à maior quantidade de hipóteses:

Júnior: – *Eu gostei de recortar e colar os quadrados porque fiz coisas diferentes!*

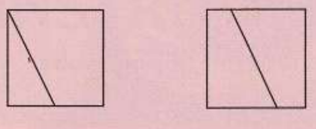
Mickael e Daniela: – *Tivemos que pensar muito para fazer as figuras todas diferentes, mas com dois cortes tínhamos mais hipóteses.*

Nuno e Carina: – *Estragámos muitos papéis, foi um pouco difícil, porque não conseguimos ver bem todas as figuras que já tínhamos feito iguais, mas foi divertido.*

Nas quatro turmas, todos os alunos encontraram pelo menos três das cinco hipóteses de figuras diferentes com um único corte. Apesar de existir pequenas *nuances*, parece ser possível definir um padrão de construção das diferentes figuras. As três hipóteses que surgiram normalmente em primeiro lugar foram, por esta ordem, os dois rectângulos, os dois triângulos e o triângulo e o pentágono.



E só alguns alunos encontraram as outras duas hipóteses, um triângulo e um trapézio e dois trapézios.



Parece existir nestas descobertas uma predominância das figuras mais usuais (rectângulo e triângulo) e dos cortes associados aos eixos de simetria do quadrado.

As turmas do segundo e terceiro anos avançaram para a situação de dois cortes duma forma entusiástica e com um elevado espírito investigativo. Como os alunos manifestaram dificuldade em, após terem feito o primeiro corte, voltarem a unir o quadrado para efectuarem o segundo corte, foi sugerida a utilização da régua para desenharem os cortes a lápis antes de os recortarem. Contudo, a utilização desta estratégia desencadeou, nalguns alunos, dificuldades acrescidas na contagem dos lados comuns, antes do recorte, das figuras geométricas resultantes.

A actividade dos cortes do quadrado, desta vez com dois cortes, tal como na situação de um corte, evoluiu do recorte das primeiras hipóteses para o levantamento de alguns questões e interrogações:

Filipa: – *Que figuras é que vocês já fizeram? Olha que giro, eu descobri dois triângulos e um hexágono! Também já fizeram?*

Mickael: – *Às vezes ficam três figuras e noutras aparecem quatro ...*

Os alunos do 2° e 3° anos manifestaram grande entusiasmo e motivação nesta actividade, especialmente na concretização de o maior número possível de figuras diferentes:

Aliu: – *Consegui fazer dezasseis diferentes!*

Beatriz: – *E nós temos dez!*

Ruben: – *E nós catorze!*

Alexandre: – *Nós só conseguimos fazer seis.*

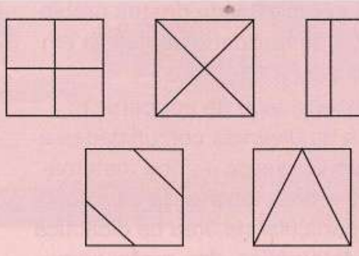
Inês: – *E nós só temos oito.*

Professora: – *Não há problema nenhum, cada um fez aquilo que conseguiu, e agora vamos ensinar uns aos outros como fizemos.*

Ruben: – *Ainda há mais de dezasseis formas diferentes? Quantas há?*

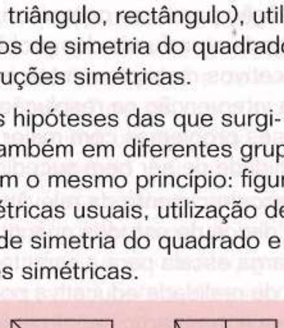
Professora: – *A professora também não sabe quantas há ao certo. Pensei que hoje iríamos descobrir algumas, para a próxima vez, tentamos mais algumas todos juntos.*

A generalidade dos alunos, a trabalharem em grupos de dois, encontraram as seguintes cinco hipóteses: quatro quadrados, quatro triângulos, três rectângulos, dois triângulos e um hexágono e três triângulos.

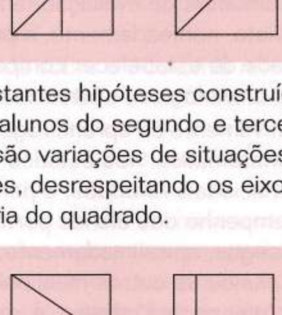


Parece existir novamente uma regularidade na construção destas hipóteses: figuras geométricas usuais (quadrado, triângulo, rectângulo), utilização de eixos de simetria do quadrado e construções simétricas.

Outras hipóteses das que surgiram, também em diferentes grupos, mantêm o mesmo princípio: figuras geométricas usuais, utilização de eixos de simetria do quadrado e construções simétricas.



As restantes hipóteses construídas pelos alunos do segundo e terceiro anos são variações de situações anteriores, desrespeitando os eixos de simetria do quadrado.



Após a apresentação das diferentes hipóteses, onde alguns alunos mais críticos tiveram oportunidade de questionar os colegas e exigir deles uma explicação fiel das suas descobertas, os alunos do terceiro ano revelaram interesse em enunciar as conclusões acerca do trabalho desenvolvido, tendo concluído que:

"Se fizermos um corte num quadrado, conseguimos descobrir cinco hipóteses de figuras diferentes";

"Se fizermos dois cortes num quadrado, conseguimos encontrar dezasseis ou mais hipóteses de figuras diferentes".

Os alunos do terceiro ano realçaram as suas descobertas, deixando em aberto a possível existência de mais hipóteses para o caso dos dois cortes e manifestaram vontade em continuar esta investigação, reformulando a segunda conclusão sempre que necessário.

A construção das diferentes hipóteses, quer no caso de um corte quer no caso dos dois cortes, parece seguir o padrão da utilização dos eixos de simetria do quadrado, evoluindo para outras composições simétricas e posteriormente para variações a propósito das situações anteriores através da deslocação dos cortes referentes aos eixos de simetria.

Motivação, Aprendizagem e Conhecimento Profissional

Na execução desta actividade de carácter investigativo verificou-se que os alunos aderiram ao trabalho proposto, independentemente do seu nível de aprendizagem, e empenharam-se na execução da actividade e na discussão da validade das suas soluções e das soluções propostas pelos outros alunos.

Alguns dos alunos que apresentam maiores dificuldades em Matemática e que estão menos motivados para participar na realização das tarefas mais rotineiras e tradicionais apresentaram maior entusiasmo, do que é tradicional, nesta actividade e sentiram-se compensados, uma vez que o seu desempenho lhes foi gratificante e valorizado.

O contexto colaborativo, com vista à realização de um único trabalho de grupo, parece ter favorecido o aprofundamento dos nossos conhecimentos acerca das actividades de investigação em Matemática, da sua importância para o desenvolvimento das competências matemáticas dos alunos e do reforço do conhecimento prático do professor, entendido como as aprendizagens que uma prática proporciona no desenvolvimento da actividade profissional.

António Guerreiro
ESE da Universidade do Algarve

Maria das Dores Fernandes
Sónia Costa
EB 1º Ciclo Coca Maravilhas
Portimão

Clotilde Assunção
EB 1º Ciclo Chão das Donas
Portimão

Soraia Ramos
EB 1º Ciclo Major David Neto
Portimão

Insucesso em Matemática e investigação: contributos de um seminário

Henrique Manuel Guimarães e Luís Reis

Em finais de Abril passado, dias 23 e 24, realizou-se em Lisboa um seminário — *O insucesso em Matemática: contributos da investigação* — organizado por três centros de investigação[1] que o promoveram com o objectivo de, como se dizia no anúncio de divulgação, "analisar os contributos da investigação em educação matemática sobre o ensino da Matemática em Portugal e confrontá-los com pontos de vistas de outras comunidades científicas".

O seminário decorreu na Escola Superior de Educação de Lisboa e contou com a presença de cerca de uma centena de participantes, na sua maioria professores dos ensinos básico e secundário. Os trabalhos foram organizados em torno de quatro temas — aprendizagens em Matemática, currículo, formação inicial e práticas dos professores de Matemática — tendo sido cada um deles objecto de uma conferência e respectivo comentário, a que se seguia um período de discussão com os participantes.

O primeiro dia foi dedicado aos dois primeiros temas, começando de manhã com a conferência de José Manuel Matos (FCTUNL) — *Caracterização das aprendizagens dos alunos portugueses* — comentada por Glória Ramalho (ME-Gave) e Luís Magalhães (IST), tendo o tema do currículo sido abordado, na parte da tarde, com a conferência de Idália Sá-Chaves (UA), com os comentários de João Pedro da Ponte (FCUL) e Arsélio Martins (ES José Estevão). Os dois temas restantes foram tratados no segundo dia, um com base na conferência de Jaime Carvalho e Silva (UC) — *Formação dos futuros professores de Matemática: poderia ser melhor?* — que teve como comentadores Leonor Santos (UL) e Pinto Paixão (FCUL), o outro com a conferência *Práticas profissionais dos professores de Matemática* de João Pedro da Ponte (FCUL) e Lurdes Serrazina (ESEL), comentada por Victor Teodoro (FCTUNL).

As intervenções nucleares em cada tema e os comentários subsequentes — que em alguns casos, mais do que um comentário, foram uma espécie de segunda conferência sobre o tema — propiciaram, ao longo das várias sessões, uma discussão muito participada, sempre com inúmeras e diversas intervenções dos professores presentes. Os debates foram em geral prolongados, vivos e intensos, para o que não terá sido certamente alheia, a estrutura com que o seminário foi concebido e, em particular, o facto de sempre se ter sentido que *havia tempo* e disponibilidade para intervenções dos diversos tipos.

Em jeito de balanço, há, em primeiro lugar que referir a eleição do tema do insucesso como objecto dos trabalhos, para sublinhar a relevância da escolha. Se o tema do insucesso escolar era um tema muito *em voga* há uns (bastantes) anos na comunidade educativa, nos dias de hoje tem sobretudo emergido nas páginas dos jornais, com a motivação dos (maus) resultados em Matemática dos nossos alunos nas provas de aferição e exames nacionais ou nos estudos internacionais como o TIMSS e o PISA. Deixamos, a seguir, algumas notas com ideias e questões que assumiram alguma proeminência no conjunto das intervenções e na discussão durante o seminário.

- A necessidade de considerar uma diversidade de perspectivas teóricas e metodológicas no estudo dos problemas educativos, justificada pela complexidade destes problemas e da realidade educativa em geral.
- A necessidade de cooperação entre as diversas comunidades e níveis de ensino — dos matemáticos e das ciências da educação, em particular na área da didáctica da Matemática, dos professores e dos investigadores, do ensino superior e não superior, do ensino básico e do ensino secundário — condição para uma compreensão alargada e profunda dos problemas educativos mais prementes e para uma intervenção na resolução desses problemas com maior probabilidade de ser bem sucedida.
- O reconhecimento da relevância dos dados de estudos quantitativos de larga escala para a caracterização da realidade educativa portuguesa e, em particular, do esforço que tem vindo a ser realizado pelo Gabinete de Avaliação Educacional no desenvolvimento de testes de avaliação. A este respeito, foi apontada a necessidade do aperfeiçoamento e consolidação destes instrumentos de avaliação tendo em vista, nomeadamente, a possibilidade de estabelecer comparações cronológicas e internacionais.
- Relativamente às aprendizagens em Matemática, nos estudos internacionais referidos, o perfil de desempenho dos alunos portugueses segue, aproximadamente, o dos alunos de outros mais países mas 'uns pontos' abaixo: é importante este desnivelamento? O que o explica?
- Nos alunos portugueses verifica-se uma tendência para uma elevada percentagem de respostas completamente incorrectas e uma baixa percentagem de respostas

incompletas. O que poderá estar na origem desta situação?

- Relativamente à problemática do currículo, foi patente, na discussão, a dicotomia entre as dimensões do currículo "instituído" e do currículo "instituinte" ou, de outro modo, entre o currículo proposto e currículo praticado. Foi considerado existir "uma relativa congruência" entre a legislação actual relativa ao currículo e as orientações curriculares mais gerais, consideração que parece não poder aplicar-se à relação entre as práticas mais generalizadas entre os professores e estas orientações. O que "contamina" as práticas dos professores? Os textos oficiais e os programas? Os livros de textos e os exames? A cultura escolar e profissional dominante?
- Ainda sobre a dicotomia referida, foi sublinhada a necessidade de estudos extensivos sobre a realidade nas nossas escolas, a par de estudos compreensivos, vocacionados para um conhecimento mais aprofundado sobre penetrabilidade e persistência, nas práticas de aula, de orientações curriculares "instituídas" — ao nível dos objectivos, metodologias e avaliação — visando identificar factores que dificultam ou favorecem a sua adopção nessas práticas e o seu contributo na promoção da qualidade de ensino.
- Quanto ao sistema de formação inicial de professores, os relatórios de avaliação dos cursos de formação revelaram a existência de diversas fragilidades, a nível da concepção, estrutura, funcionamento e regulação. Em particular, foi apontada a necessidade de clarificar a questão da bivalência da formação para o 1.° e 2.° ciclos do ensino básico.
- Existe actualmente material em abundância que necessita de (mais) investigação e reflexão, como é o caso dos relatórios de avaliação dos cursos de formação de professores e dos resultados dos alunos nas provas de aferição e exames nacionais.
- Algo que no panorama nacional urge afinar é o sistema de divulgação da informação, tornando do domínio público os dados existentes e os relatórios produzidos.
- Não parece claro, no nosso país, a existência de consequências, nomeadamente a elaboração de uma agenda de acção, face a toda a informação de avaliação recolhida nas diferentes vertentes do sistema educativo.

Os três centros de investigação em educação promotores do seminário valorizam, com a escolha do tema do insucesso em Matemática, um problema que, não sendo de hoje, encontra-se certamente entre os mais sérios no ensino na nossa disciplina, apontando, desde logo, áreas como o currículo, a formação de professores e as práticas dos professores a merecerem estudo como domínios relevantes na sua relação com o referido insucesso. A realização deste seminário e a discussão que aí decorreu chamam a atenção para a necessidade de uma convergência de esforços visando a identificação de factores que poderão estar na sua origem e de estratégias de intervenção no sentido da sua superação. A iniciativa dos três centros, para além disto, como exemplo de uma possibilidade de cooperação entre instituições vocacionadas para a realização de projectos de investigação educacional, aponta uma via, a nosso ver potencialmente rica, para a expressão e discussão de perspectivas e resultados dessa investigação, que merece ser aprofundada e desenvolvida.

Nota

1 Centro de Investigação em Educação (FCUL), Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento (FCTUNL), Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais (ESEL).

Henrique Manuel Guimarães
Fac. Ciências Univ. Lisboa

Luís Reis
Centro de Competência Nónio
ESB–UCP

Encontros

ProfMat2004

O Encontro Nacional de Professores de Matemática, ProfMat2004, irá realizar-se nos dias 29 e 30 de Setembro e 1 de Outubro, na Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Localização do sítio do Encontro: http://www.apm.pt/profmat2004. Endereço electrónico do Encontro: profmat2004@apm.pt.

XV SIEM Seminário de Investigação em Educação Matemática

XV Seminário de Investigação em Educação Matemática

O XV Seminário de Investigação em Educação Matemática, organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação da APM, vai realizar-se nos dias 27 e 28 de Setembro de 2004 na Covilhã, nas instalações da Universidade da Beira Interior. Este seminário pretende constituir um espaço de divulgação e debate das principais linhas de investigação nacional e internacional em Educação Matemática.

Para mais informações contacte através do endereço xvsiem2004@ipb.pt ou consulte a página do XV SIEM em http://www.ipb.pt/xvsiem2004.

ICME 10 2004

ICME 10
10.º Congresso Internacional em Educação Matemática

Este Congresso realiza-se de 4 a 11 de Julho de 2004, em Copenhaga, Dinamarca.

Para mais informações consultar o site: http://www.icme-10.dk/

Universidade da Beira Interior, Covilhã.

PME 28

The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)

Esta conferência internacional realiza-se em Bergen, Noruega, no período de 14 a 18 de Julho de 2004.

Para mais informações consultar o site: http://www.pme28.org

VI Simpósio Internacional de Informática Educativa

Este Simpósio terá lugar em Cáceres, Espanha, durante os dias 16, 17 e 18 de Novembro de 2004.
Para mais informações consultar o site: (http://siie04.unex.es)

CERME4
4.º Congresso da Sociedade Europeia de Investigação em Educação Matemática (ERME)

A conferência terá lugar em Platja d'Aro, Espanha, de 17 a 21 de Fevereiro de 2005. Para mais informações consultar o site: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/second.html

ICTMA 12

A 12ª conferência internacional sobre modelação matemática e aplicações decorrerá em Londres, de 10 a 14 de Julho de 2005. Para mais informações consulte a página da internet: http://www.city.ac.uk/conted/research/ictma12/

ICTMT7
International Conference on Technology in Mathematics Teaching

A sétima conferência internacional dedicada à tecnologia no ensino da Matemática realiza-se em Bristol, Reino Unido, de 26 a 29 de Julho de 2005. Mais informações poderão se obtidas em breve a partir do site: http://www.ictmt7.org/

Quota 2004

No ano de 2004 o valor da quota é de €43,70 para professores, €31,00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,70 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ______________________________ Sócio nº: __________

Morada: ______________________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ Email: __________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: __________

Nº do B.I. __________ Arquivo: __________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de ensino: __________

Categoria profissional: __________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: __________ Email: __________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA **MasterCard** ☐ MasterCard

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________ __________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a) €10,30

☐ Sócio(a) residente no estrangeiro €12,80

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: geral@apm.pt

Índice