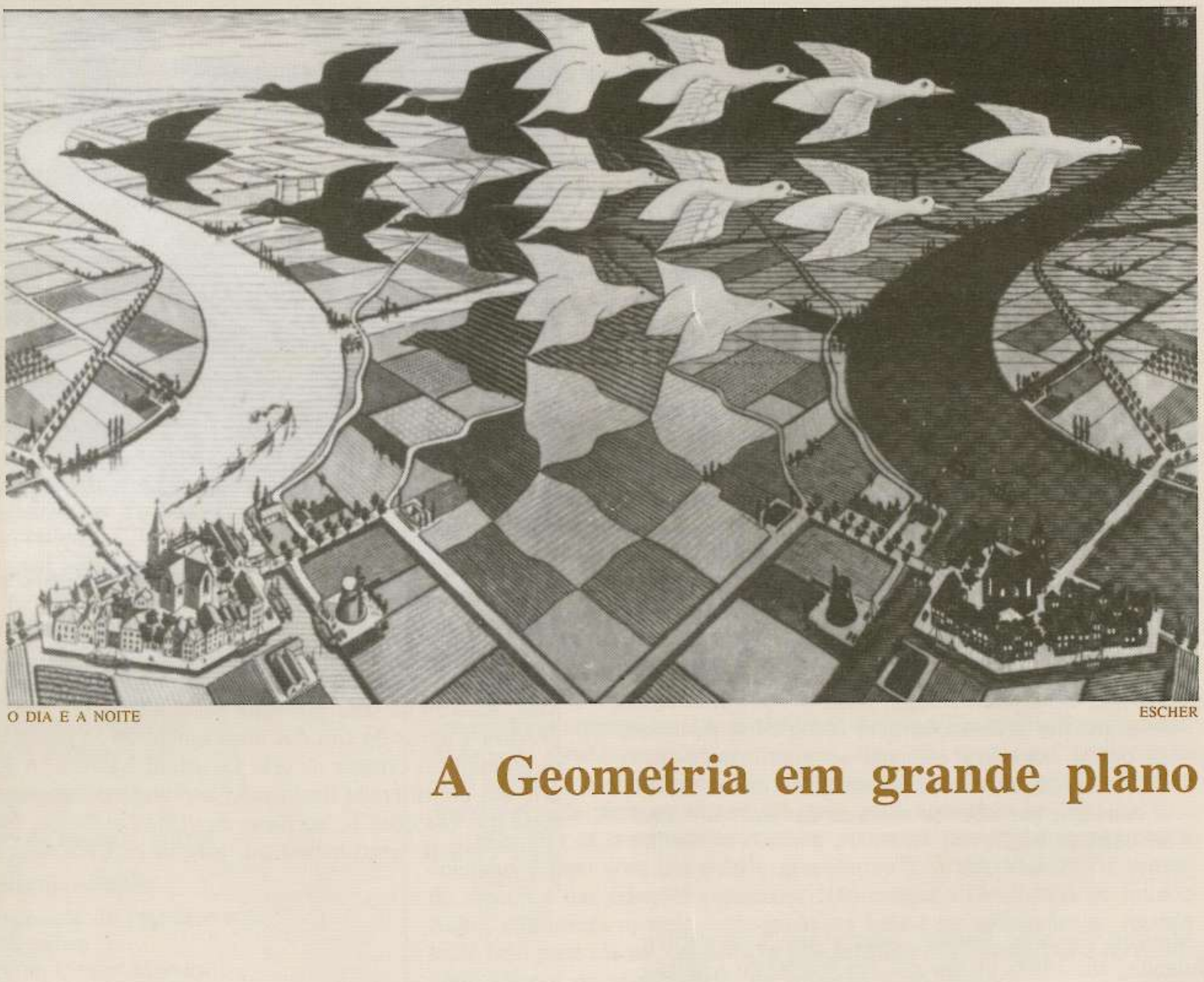
Educação e Matemática

N.º 6 2.º trimestre de 1988



O DIA E A NOITE ESCHER

A Geometria em grande plano

200$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

A propósito de uma capa

As gravuras e desenhos de Escher são, desde há alguns anos, complemento indispensável dos livros e publicações sobre Geometria. Mas não só. Num dos mais apaixonantes livros publicados nos últimos dez anos, Escher entra mesmo no título, entre dois companheiros famosos — referimo-nos a **Gódel, Escher, Bach: an eternal golden braid**, de Douglas R. Hofstadter.

Educação e Matemática escolheu também uma gravura de Escher para a capa deste número, especialmente dedicado à Geometria.

A gravura escolhida foi Dia e Noite, de 1938, uma das mais apreciadas da enorme colecção de gravuras em madeira deste artista. Escher retoma aqui alguns temas que lhe são caros:

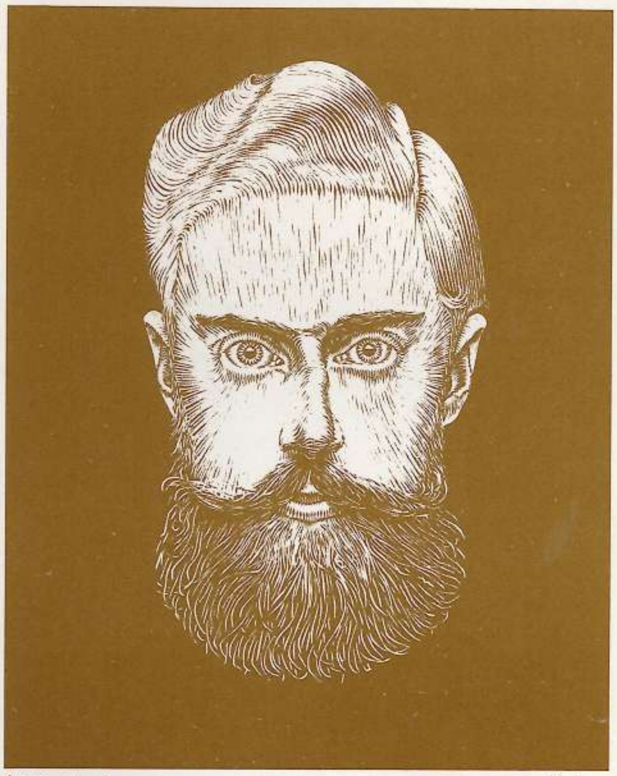
- **a pavimentação do plano**, representada aqui na zona central da gravura pelas aves brancas e pretas; note-se que Escher, como era seu hábito, apenas sugere essa possibilidade de pavimentação, não a tomando como tema principal da gravura. O geómetra canadiano Coxeter, na sua **Introduction to Geometry**, estuda os grupos de simetria de algumas gravuras de Escher.

- **as metamorfoses:** na realidade, se repararmos bem na gravura, o tema principal — o grupo das aves — tem origem em duas figuras, uma branca e uma negra, com a forma aproximada de losangos, na parte inferior da figura; quando levantamos o nosso olhar da «terra para o céu», essas figuras transformam-se progressivamente nas aves pretas e brancas; qualquer coisa de parecido, mas não igual, se passa com as zonas do campo perto das figuras referidas.

- **a forma e o fundo:** Escher contesta mais uma vez, nesta gravura, a distinção entre fundo e forma; note-se que o fundo (os campos) se transformam formas (as aves) e, na parte superior da gravura, não se consegue perceber se algumas das aves são uma ou outra coisa...

Maurits Cornelis Escher nasceu em Leeuwarden, Holanda, em 1898. O seu pai era engenheiro hidráulico. A sua passagem pela escola foi um pesadelo, excepto nas poucas horas dedicadas em cada semana às artes, no caso a gravura em linóleo. Chumbou dois anos, e saiu da escola sem qualquer diploma e mesmo a sua prova final em desenho — um pássaro numa gaiola... — não agradou aos examinadores.

Entrou para o curso de arquitectura por vontade do seu pai, mas passado pouco tempo, mudou para as artes decorativas, por influência do seu professor de Artes Gráficas Samuel de Mesquita um descendente de portugueses.



Auto-retrato Escher

Tendo viajado e vivido em Itália parte da sua vida e, depois, na Suíça e na Bélgica, Escher regressou à Holanda em 1961, onde veio a morrer em 1972.

A sua vida de artista não foi fácil. Dedicou-se principalmente ao desenho e à gravura, sobretudo em madeira. Mas, embora as suas gravuras passassem a ter imensa procura a partir do fim dos anos cinquenta, a sua aceitação entre os críticos de arte foi difícil e tardia. A sua arte era considerada demasiado cerebral, pouco resultante das emoções e, no meio da crítica artística, subsistiu durante largo tempo um preconceito em relação a Escher.

Bibliografia:

Ernst, Bruno (1976). *The magic mirrow of M.C. Escher.* New York: Ballantine Books.

Eduardo Veloso

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 6, 2.º trimestre de 1988

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
Eduardo Veloso
Henrique M. Guimarães
José Manuel Duarte
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:
A. Franco de Oliveira, Alzira Rebelo, Ana Vieira, António Bernardes, Cristina Loureiro, Daniela Giorgi, Eduardo Veloso, Fernanda Milheiro, Fernando Nunes, Henrique M. Guimarães, José João Henriques, José Manuel Duarte, José Manuel Matos, Leonor Moreira, Paulo Abrantes

Entidade proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 1500 exemplares

Fotocomposição, montagem e fotolito:
Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:
Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

A discutida Geometria

Polya sugere que, ao tentar resolver um problema, coloquemos a nós próprios perguntas sobre o problema em questão, como forma de nos ajudar a organizar o pensamento e aprofundar a compreensão do problema. E uma das perguntas que Polya nos sugere que formulemos é **«Fazer um desenho, será que ajuda?»**. E **Einstein** (referindo-se à Geometria não-euclideana) dizia: «Atribuo grande importância a esta interpretação da Geometria, já que, se não tivesse dela tomado conhecimento, nunca teria sido capaz de desenvolver a teoria da relatividade».

E contudo, no oceano das ondas de reforma das últimas décadas do ensino da Matemática a nível internacional e, mais do que isso, no ensino realmente existente, a Geometria como que «mete água», para não dizer que está prestes a «ir ao fundo». Quem é que nunca ouviu colegas professores dizerem contrariados, num desabafo cada vez mais forte à medida que se avança nos níveis de ensino: *«Tem que se dar a Geometria, mas para que serve isto aos alunos?»*. E, coerentemente com este pensamento, são frequentes os casos em que professores cumprem de modo formal e apressado os conteúdos de índole geométrica que os programas impõem, para logo poderem ir abordar as *«matérias importantes»*, as que têm forte continuação nos anos subsequentes, na Universidade... Isto quando não é a Geometria, por regra, a «feliz eleita» como *«aquela matéria que não há tempo para dar»*...

Eu também não gosto lá muito de Geometria. Mas ando-me a curar... Recordo desagradavelmente, quando estudante, nos anos 60, aquelas demonstrações retorcidas em que, ao fim de quinze «passagens», nós demonstrávamos (emocionados!) que eram paralelas duas rectas que «já se estava mesmo a ver» que eram paralelas, mas que nós, apertando o silício, fazíamos à partida de conta que não sabíamos que eram e que até poderiam não o ser... O livro gordo de capa encarnada do antigo 5.º ano ainda hoje me faz azia...

Não será que esta abordagem da Geometria (naquela idade...) marcou muito as concepções dos professores de que a Geometria é um assunto «rigoroso, virado para demonstrações», que não propicia a criatividade nem o prazer e que, como tal, não pode deixar de se revelar difícil e desinteressante para os alunos (já que, para nós, nem se fala!...)?

Onde fica aí o sentido estético, o potencial recreativo (quem nunca «perdeu» tempo com um puzzle geométrico?), a importância do estudo do espaço e das relações espaciais? Não emana a Geometria do mundo físico, não utiliza modelos, não pode ser bela e ter aplicações no mundo real? Não pode ela ser estimuladora da precisão das afirmações e do raciocínio lógico, da criatividade, da intuição e do prazer?

Não é isso que revela o gosto das crianças pequenas por actividades geométricas informais, em que manipulam materiais concretos? Não indica a investigação a importância da experiência geométrica na prevenção e no combate a dificuldades gerais de aprendizagem, em particular da leitura? Não revelam estudos a existência de uma correlação entre uma baixa capacidade espacial e nervosismo e ansiedade face à Matemática?

Não pomos nós muitas vezes, ao invés, a ênfase na aquisição pelos alunos de complicada terminologia e de definições formais, precocemente? Não tratamos, muitos de nós, a Geometria das transformações (isometrias, homotetias, etc.) de uma forma estática (papel, lápis, compasso...), matando o potencial interesse dinâmico do assunto?

Este número de «Educação e Matemática» dedica largo espaço à Geometria: quais são os **conteúdos, métodos e actividades** geométricas a incluir no necessário novo currículo de Matemática. Uma discussão a prosseguir entre nós, professores de Matemática, de modo a influir em decisões, que se pretendem acertadas. Sobre o assunto, aqui ficaram algumas questões do

José Manuel Duarte

A palavra aos leitores

O grupo de professores de Matemática da Esc. Sec. do Seixal tomou posição sobre a respectiva reforma curricular

1. No ensino desta disciplina, é importante o reforço de medidas que levem a melhorar os resultados a nível da capacidade de cálculo e que operacionalizem os conceitos básicos.

Por operacionalização devem entender-se as aplicações ao quotidiano, às profissões e às outras disciplinas, bem como o recurso a algumas tradições matemáticas muito fecundas e que foram abandonadas, como é o caso da geometria clássica ou euclideana.

Deste modo, o «cálculo» e a «operacionalização» não se podem entender como «mecanização»; sem a prática de utilização da matemática a situações concretas a passagem para fases mais profundas da matematização é grandemente bloqueada.

2. É importante criar oportunidades, diversificadas, para a experimentação e pesquisa matemáticas, isto é, para o trabalho de desorganização dos conhecimentos adquiridos e para a sua consequente reorganização, tendo como meta o desenvolvimento de várias capacidades, entre elas a abstracção e a formalização; estas são, portanto, metas e não meios, como actualmente.

As oportunidades diversificadas devem ser maleáveis e não tipificadas, sendo feito apelo à criatividade dos professores para a sua concretização (currículos previstos ou não previstos; extracurrículos de extensão ou cultural, etc.).

3. Os objectivos terminais do 3.º ciclo devem ser definidos de modo a que seja exequível a sua consecução pela esmagadora maioria dos alunos, o que significará que, metodologicamente e ao nível dos conteúdos, a matemática tem de ser útil e agradável, tem de ser desejada e nunca selectiva.

4. O secundário deve ter uma matemática diversificada, de acordo com as áreas escolhidas pelos alunos e de acordo com as opções locais feitas pelos alunos e pelos professores; as opiniões tomadas pelos outros membros da comunidade educativa não serão decisivas; e deverá haver organizações, científicas e/ou pedagógicas, que validem (ou não) os programas escolhidos localmente; igualmente importante será conhecer em cada escola as condições de entrada definidas por cada estabelecimento de ensino superior.

5. As condições de trabalho dos alunos e professores não devem ser massificantes e terão de incluir outros recursos (materiais e espaciais) que até agora não foram considerados pelo Ministério da Educação.

Publicações APM

Para um reforço do ensino da Geometria

A. J. Franco de Oliveira, Dep. Matemática, F.C.L.

1. Alguma experiência lectiva recente no campo da Geometria e uma já longa experiência noutros campos, ligados nomeadamente à lógica e fundamentos, bem como uma sensibilização crescente a questões de filosofia, história e didáctica das matemáticas são o ponto de partida das reflexões e propostas contidas nesta exposição, singularmente convergentes com muitas tendências e perspectivas emergentes dos textos e discussões presentes neste Seminário.

2. Olhando para o meu passado de aluno liceal nos anos 60, não posso deixar de constatar a importância que teve para a minha formação matemática a aprendizagem da Geometria Elementar (manual de Palma Fernandes) no antigo 2.º ciclo (7.º a 9.º anos de escolaridade), como uma das partes relativamente autónomas do currículo escolar e de constatar também, relativamente às gerações «matemática moderna» e, mais recentemente, nos meus próprios filhos, uma falha importante na sua formação matemática — na sua concepção (implícita embora) do que é a matemática e, fundamentalmente, da sua atitude para com a mesma, como elemento de cultura e como instrumento de aplicação na vida e nas outras ciências.

3. Não pretendo pregar um retorno aos currícula e práticas pedagógicas do passado, mas somente frisar que há algo nesse passado que se perdeu e que urge reencontrar, acarinhar e estimular de novo. Caracterizar exactamente esse algo, em moldes compatíveis com os actuais objectivos e estratégias do ensino, aprendizagem e avaliação da matemática (como têm sido expostos e defendidos neste Seminário) é tarefa mais difícil. Mas direi, genérica e tentativamente, que tenho particularmente em vista os seguintes aspectos:

(i) o império do bom senso e do realismo que significa ter em conta a acessibilidade das matérias nas diferentes fases etárias dos alunos, bem como da sua extensão e da capacidade efectiva de leccionação por parte dos professores, sem pressas nem pressões de qualquer natureza (como as que adviriam da não familiaridade com novos currícula) — é sempre preferível dar menos matéria, com mais qualidade, que muita e mal;

(ii) uma perspectiva unificadora da matemática, que elimine a actual dispersão das matérias (particularmente grave no que concerne à Geometria), que tenha mais em conta as metodologias próprias da matemática em torno de determinados conteúdos fundamentais (ver adiante) e menos uma visão da matemática como sistema organizado de conhecimentos, segundo um esquema lógico impecável, copiado dos grandes tratados sistemáticos (vulgo Bourbaki);

(iii) uma concepção humanizada da matemática, como actividade intelectual criadora, objecto de experimentação e fonte de prazer, entrecortada por referências históricas e de motivação genética das ideias e técnicas.

4. Ora, a Geometria foi, no passado, e continuará sendo no presente e futuro um ramo privilegiado da matemática escolar, especialmente vocacionado para pôr em prática tais concepções e objectivos. Mas geometrias há muitas! Para fixar ideias, estamos pensando exactamente na Geometria Euclideana, apresentada segundo os moldes concebidos nos anos 30 por Birkhoff, isto é, baseada nos chamados *Postulados Métricos* (da *Régua e Transferidor*). Uma tal abordagem da Geometria é perfeitamente viável e particularmente adaptável à estratégia do «problem solving», como o mostram inúmeros textos correntemente em uso (e.g. nos E.U.A.). Como a própria designação indica, ela é baseada em postulados métricos, quer dizer, em que o conceito de **medição** ocupa um papel central — medição de segmentos e de ângulos — pressupondo, por isso, um conhecimento elementar dos números reais. Algumas vantagens do método métrico sobre o clássico método sintético (de Euclides — «sem números»):

(i) na vida real, ou em níveis básicos, a contagem e a medição são práticas comuns; a intuição geométrica pode contribuir, por sua vez, para melhor entender certos aspectos da álgebra e da aritmética;

(ii) a geometria métrica prepara melhor para estudos mais avançados, como a Geometria Analítica e o próprio Cálculo Infinitesimal;

(iii) o ponto de vista métrico permite evitar ou contornar certas dificuldades da abordagem sintética (nomeadamente, de certas questões que têm a ver com a noção «estar entre» e com a «continuidade»).

5. Não deixando de ter em conta que a proposta que aqui é feita tem em mente sobretudo os últimos três ou quatro anos do ensino pré-universitário, assinalamos algumas características do método postulacional em Geometria elementar:

(i) trata-se de um sistema dedutivo *concreto* (por oposição a abstracto, como o é uma boa parte da álgebra — grupos, grupóides, espaços vectoriais, etc. — mas não devia ser tanto), isto é, à clássica ou heterónoma maneira, como modelo matemático do mundo ou realidade física circundante, estudado dedutivamente;

(ii) integra de maneira natural a aritmética e a álgebra, e permite até motivar certas noções da Análise, como a de limite (para demonstrar, por exemplo, a existência de π, como razão constante entre o perímetro e o diâmetro das circunferências);

(iii) permite desenvolver a intuição espacial, a par do raciocínio justificativo (lógica em acção), bem como as capacidades de interpretação da realidade e aplicação prática dos resultados teóricos;

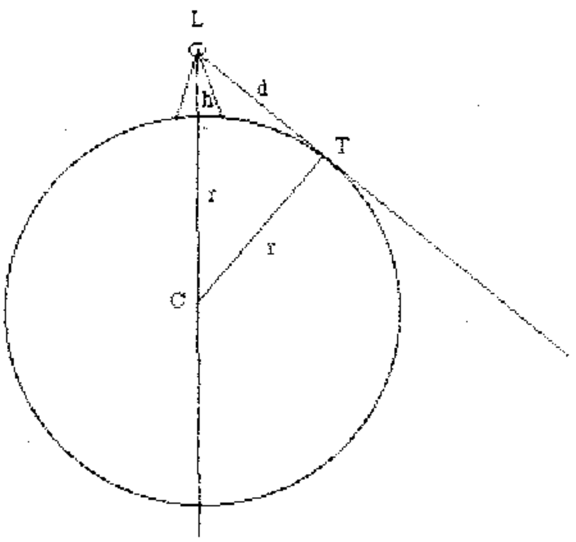
(iv) permitindo a utilização de instrumentos diversos (régua e compasso, transferidor e as próprias figuras geométricas), não deixa por isso de exigir cuidado, clareza e rigor na linguagem;

(v) não é incompatível com a técnica do «problem solving», muito pelo contrário, e é facilmente integrável com as modernas tecnologias (programas computacionais).

6. Exemplo

Trata-se de determinar a distância da lanterna de um farol ao horizonte (ou da cabina do Capitão de um navio ao horizonte), no mar, sendo h (metros) a altura do farol, e sabendo que o raio da Terra é aproximadamente 6500 km. Pretende-se somente um valor aproximado daquela distância.

Sem dificuldade se vê que o problema se pode reduzir à determinação da distância d da lanterna do farol (ponto L na figura 1) ao ponto T de tangência com uma circunferência representando um meridiano terrestre.



O problema resolve-se usando um dos dois resultados seguintes:

1) teorema de Pitágoras:

$$(r + h)^2 = d^2 + r^2$$

2) potência de um ponto relativamente a uma circunferência:

$$h\,(h + 2r) = d^2$$

Em qualquer dos casos obtemos:

$$d^2 = 2rh + h^2$$

donde, atendendo a que h metros = h/1000 km, r = 6500 km,

$$d = \sqrt{13h + (h/1000)^2}\ .$$

mas $(h/1000)^2$ é muito pequeno em comparação com 13h, donde o valor aproximado para $d =_{\text{apr}} \sqrt{13h}$ km .
Fim do exemplo.

7. Em face de tudo o que foi dito, advogamos para a Geometria um papel **estruturante** nos curricula de matemática escolar; quer dizer, em que os assuntos de Geometria, em cada ano escolar, é que determinam a inserção das restantes matérias (álgebra, aritmética, análise) e não ao contrário, como se fora um Apêndice que se pode dar mais ou menos apressadamente, conforme o tempo disponível.

Eis alguns dos assuntos que constituem um programa de Geometria, para dois ou três anos de escolaridade:

1. Exemplos de problemas relativamente simples, uns solúveis, directamente, pelo senso comum, outros exigindo um pouco de raciocínio estruturado (ou algum conhecimento teórico).
2. Revisão da álgebra dos números reais e propriedades da ordem; postulados da distância e da colocação da régua; segmentos, semirectas, determinação de uma recta por dois pontos, etc.
3. Planos, postulados de separação, semiplanos.
4. Ângulos e triângulos, congruências e respectivos postulados; desigualdades geométricas (ângulo externo), etc.
5. Perpendicularidade de rectas e de planos no espaço; paralelismo.
6. Polígonos, regiões poligonais e suas áreas.
7. Semelhança, proporcionalidade.
8. Sistemas de coordenadas no plano e no espaço; círculos e esferas.
9. Construções geométricas diversas (com régua e compasso).
10. Áreas do círculo e de sectores circulares.
11. Elementos de trigonometria plana.
12. Simetria, transformações geométricas, vectores.
13. Sólidos e seus volumes (Princípio de Cavalieri).

É óbvio que, por exemplo no 10.º ano de escolaridade, se for este o primeiro ano em que se implementa um currículo como o descrito, a novidade de alguns dos assuntos acima está somente no facto de eles serem tratados de um ponto de vista postulacional ou dedutivo, de preferência ao meramente descritivo, já pressuposto.

8. Finalizando, é importante frisar que é indispensável para o sucesso de um tal programa (como de qualquer outro, aliás, o que se tem esquecido com frequência) pôr à disposição dos professores com a

(cont. pág. 36)

Um exemplo de Didáctica da Geometria[1]

José Manuel Matos, Universidade da Geórgia

Este artigo pode parecer que vai um pouco contra a corrente. Afinal de contas uma das preocupações actuais dos educadores matemáticos do nosso país é o conteúdo das reformas curriculares que os poderes públicos se preparam para lançar. Aparentemente, um artigo abordando métodos de ensinar geometria parece não responder a este problema imediato. Mas recordemos que não só de uma reforma de conteúdos necessita o nosso ensino da matemática. Necessita também (e fundamentalmente) de uma alteração dos métodos. Neste artigo apresentamos a nossa perspectiva sobre a Teoria de Van Hiele focando a nossa atenção sobre a metodologia que Dina Van Hiele-Geldof usou na sala de aula.

Um pouco de história

Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele desenvolveram a sua teoria na Holanda quando, em meados dos anos 50 escreveram as suas teses de doutoramento sob a direcção de Hans Freudenthal. Pierre preocupava-se com a relação entre a aprendizagem da geometria e o fenómeno de *insight*, enquanto que Dina desenvolvia uma abordagem didáctica da geometria e a experimentava na sala de aula com alunos de 12-13 anos.

É interessante observar o contexto histórico da altura. Materiais que hoje são comuns tinham acabado de aparecer. Cuisenaire, por exemplo, tinha acabado de publicar um livro em que expunha o método para utilizar as suas barras (1952) e Gattegno, num artigo escrito em 1954, referia-se pela primeira vez ao geoplano. A Associação de Professores de Matemática inglesa estava ainda num processo de formação que envolvia muitos professores no desenvolvimento de processos de utilização de materiais nas aulas de matemática. A reunião de Royaumont, que desempenhou um papel decisivo no lançamento da Matemática Moderna em diversos países europeus, incluindo o nosso, realizar-se-ia apenas em 1959. Na Holanda, em particular, eram bastante populares discussões sobre o ensino da geometria e os Van Hiele estavam profundamente envolvidos (Hoffer, 1983).

Os Van Hiele produzem pois o seu trabalho num ambiente em que estavam a ser desenvolvidos novos materiais, novos métodos, novos objectivos, novos conteúdos para o ensino da Matemática, mas em que os traços essenciais da reforma curricular não estavam definidos. As suas investigações reflectem esta dualidade. Por um lado, foram efectuadas com um currículo baseado na geometria euclideana que está hoje ultrapassado na maior parte dos países do mundo. Por outro, propõem um modernismo na abordagem pedagógica. Os alunos trabalhavam com figuras de cartão, com geoplanos e com réguas e compassos, desenhavam, dobravam, discutiam, comparavam e observavam[2].

Foi preciso esperar mais de dez anos para que a teoria fosse aplicada por outros. Fizeram-no os soviéticos sob a direcção de Pyshkalo num currículo experimental desenvolvido em finais dos anos 60. No ocidente só em 1973 é que o modelo é parcialmente divulgado por Hans Freudenthal e mais tarde, em 1976, chega aos EUA com uma conferência proferida por Isaak Wirszup (Hoffer, 1983). No entanto, só em 1984 é que se tornaram acessíveis traduções para inglês de alguns dos seus trabalhos mais importantes (Fuys, Geddes, & Tischler, 1984) e, em 1986, Pierre Van Hiele publicou um livro *Structure and Insight* que clarificou alguns aspectos da teoria.

A teoria é hoje um poderoso auxiliar para quem se interessa pelo ensino e aprendizagem da geometria e tem servido de base a educadores de diversos países para investigações sobre as concepções geométricas de alunos e professores e para diversos projectos de desenvolvimento curricular, alguns deles em curso.

A teoria

Os Van Hiele propõem que a aprendizagem da geometria se desenvolve numa sequência de cinco níveis que podem ser resumidos no quadro seguinte:

Os níveis de Aprendizagem de Geometria
Nível 1 (Visualização) — As figuras são entendidas de acordo com a sua aparência.
Nível 2 (Análise) — As figuras são o conjunto das suas propriedades.
Nível 3 (Ordenação) — As propriedades são ordenadas logicamente.
Nível 4 (Dedução) — A Geometria é entendida como um sistema axiomático.
Nível 5 (Rigor) — Os sistemas axiomáticos são estudados.

De acordo com Pierre Van Hiele (1986) um triângulo isósceles, por exemplo, é entendido diferentemente nos diversos níveis. No Nível 1, o aluno adquire imagens mentais de triângulos isósceles e é capaz de reconhecê-los entre outros triângulos. No Nível 2, a forma visual perde importância e um triângulo isósceles é reconhecido pelas suas propriedades. O aluno sabe que, por exemplo, um triângulo isósceles tem dois lados e dois ângulos iguais, a altura bissecta o lado comum aos ângulos iguais, tem um eixo de simetria. Neste nível os desenhos mal feitos já não constituem um problema. No

Nível 3, o objecto de estudo é a natureza das relações entre os teoremas. O aluno compreende que o facto de um triângulo isósceles ter dois lados iguais implica que ele tem dois ângulos iguais. Mas o estabelecimento destas relações é local, pois só no Nível 4 o aluno é capaz de relacionar as propriedades de um triângulo isósceles com os axiomas da geometria euclideana. No Nível 5, o aluno discute se uma determinada definição de triângulo isósceles é apropriada numa determinada geometria. Os Van Hiele consideravam que apenas os três primeiros níveis têm relevância para a geometria ensinada nas escolas, e os últimos níveis aplicar-se-ão ao trabalho dos matemáticos.

No exemplo anterior observamos que alguns elementos são mentalmente construídos, isto é, são novos conceitos que os alunos formam como resultado do processo de ensino. Outros elementos são mentalmente manipulados, isto é, são os objectos mentais de cuja manipulação resultam os primeiros. Durante o Nível 1, o aluno constrói uma imagem da figura. No final do nível seguinte, após ter manipulado essa imagem ele vai construir as propriedades da figura. No Nível 3, ele vai reflectir sobre as propriedades acabando por ordená-las, usando a lógica. Esta última formará a base de um sistema axiomático, no Nível 4. No último nível, o estudante reflectirá sobre os sistemas axiomáticos e compreenderá a lógica formal.

Esta relação entre os objectos construídos e os manipulados pode ser sistematizada no seguinte quadro:

	Objectos Manipulados	Objectos Construídos
Nível 1		Figuras
Nível 2	Figuras	Propriedades
Nível 3	Propriedades	Ordenação de propriedades
Nível 4	Ordenação de propriedades	Sistema axiomático
Nível 5	Sistema axiomático	Lógica

Esta relação entre objectos manipulados e construídos produz diversas implicações. Por um lado, o que era intrínseco num nível passa a ser extrínseco no nível seguinte. Por outro, cada nível possui os seus próprios símbolos linguísticos, a sua própria linguagem, o que torna difícil a comunicação entre pessoas funcionando em níveis diferentes. De facto, se o professor está a discutir propriedades procurando mostrar a sua relação lógica (Nível 3), mas a linguagem dos alunos ainda permite apenas a manipulação de figuras (Nível 2), a comunicação é impossível. No entender de Van Hiele, este problema explica a queixa frequente nas aulas de geometria de que os alunos não compreendem de que o professor está a falar.

Apesar desta separação entre a linguagem de cada nível, a aprendizagem é possível desde que o professor escolha uma abordagem pedagógica adaptada ao nível dos alunos[3]. A teoria de Van Hiele contém alternativas pedagógicas que ainda hoje nos podem sugerir algumas ideias. Observemos a proposta didáctica de Dina Van Hiele-Geldof para promover a transição dos seus alunos do Nível 1 para o Nível 3.

Pavimentações com figuras geométricas

Dina Van Hiele-Geldöf inicia o estudo da geometria com a observação de cubos. Os alunos, depois de contarem e observarem as suas faces, vértices e arestas, são postos perante o problema de construir um cubo. O mesmo tipo de trabalho é efectuado com outros poliedros regulares, por exemplo o octaedro e o tetraedro.

É especialmente interessante observar a unidade didáctica «Pavimentações». Dina começa por pedir aos alunos que procurem uma forma de pavimentar um passeio com quadrados. Depois de os alunos terem produzido uma pavimentação, Dina conduz a discussão sobre o que vêem os alunos nessa pavimentação. É possível observar rectas, grupos de rectas a igual distância, grupos de rectas paralelas, outros grupos de rectas paralelas, ângulos rectos, quadrados, quadrados maiores (Figura 1).

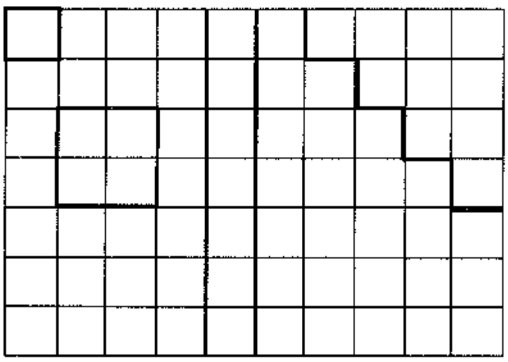


Figura 1. Uma pavimentação com quadrados.

Dina pretende que os alunos observem a pavimentação (o campo de percepção) segundo mais de uma perspectiva. Pretende depois que os alunos sejam capazes de reestruturar o seu campo de percepção de forma a «verem» outro tipo de organização, de estruturação[4]. Note-se que estamos a falar de percepção, já que este nível é essencialmente perceptivo (visual). O facto de um corte do cubo em diagonal produzir um rectângulo e não um quadrado, é obtido não através de um raciocínio dedutivo, mas efectuando uma observação e uma medição.

Esta preocupação com a construção inicial de uma estrutura geométrica e com a sua percepção global, depois com a sua progressiva diferenciação e, finalmente, com a sua reestruturação numa nova estrutura, é característica da psicologia Gestalt. Para os gestaltistas não existe um objecto isolado de um contexto ou de um *campo* segundo a terminologia de alguns autores. A nossa percepção é feita de totalidades, de estruturas mantidas por campos de forças. A aprendizagem é essencialmente uma diferenciação progressiva ou uma reestruturação deste campo, que conduz a novas e mais complexas estruturas (Wertheimer, 1945). Uma visão gestaltista permeia precisamente a abordagem pedagógica proposta pelos Van Hiele e, em particular, esta unidade didáctica[5].

Haverá outro processo de pavimentar o plano de forma que os quadrados estejam colocados noutra posição?

Claro, veja-se por exemplo a Figura 2. Para possibilitar que os alunos consciencializem as forças do campo, Dina discute o que aconteceu aos grupos de rectas paralelas. Discute-se depois qual dos dois tipos de pavimentação dos passeios é mais seguro para quem anda de bicicleta (lembrem-se que isto se passa na Holanda). O segundo tipo é mais seguro já que no primeiro há duas direcções em que há rectas paralelas e a estas podem corresponder desníveis perigosos para o ciclista.

Figura 2. Outra pavimentação com quadrados.

Procuremos agora uma pavimentação com estrelas hexagonais. A Figura 3 sugere um processo de construir uma dessas estrelas. Divide-se a circunferência em seis partes iguais (utilizando a propriedade de que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência circunscrita, ou por tentativas), constroem-se os raios e, com compasso ou com régua e esquadro termina-se a figura.

Figura 3. Construção de uma estrela hexagonal.

A mesma construção pode ser obtida utilizando papel ponteado isométrico ou então com um programa de Logo. A construção de uma nova estrela pode ser agora iniciada em cada um dos vértices da estrela inicial. O produto final está apresentado na Figura 4.

O que vêem os alunos nesta pavimentação? Porque não tenta o leitor fazer algumas conjecturas sobre o que vê antes de ler algumas das respostas possíveis? Há quem veja as estrelas que serviram para fazer a pavimentação, outros vêem losangos, hexágonos, e ainda outros hexágonos diferentes. Mas há também linhas em ziguezague e, mais interessante ainda, não há rectas paralelas.

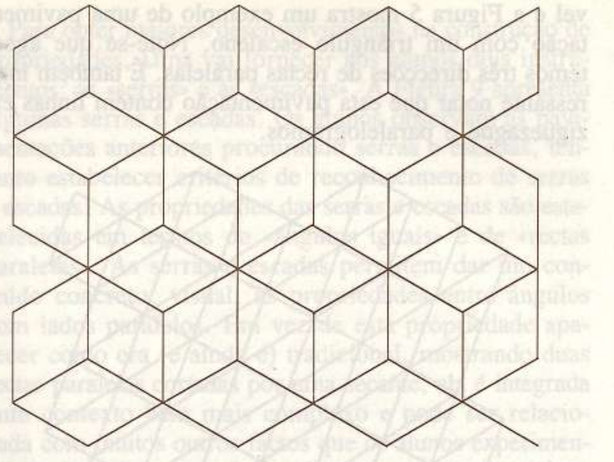


Figura 4. Uma pavimentaçao com estrelas hexagonais.

Tal como no caso dos quadrados, Dina está a procurar que os alunos explicitem o que vêem e que o discutam uns com os outros. Ela pretende que os alunos reestruturem o campo de percepção diversificadamente, vendo agora um conjunto de hexágonos, logo uma pavimentação com losangos, depois uma estrutura envolvendo linhas em ziguezague. Os alunos estão a relacionar umas estruturas com outras, visualizando umas dentro das outras e diferenciando pormenores distintos dos que inicialmente percepcionavam. Os gestaltistas diriam que ela procura que os alunos testem as forças que constituem o campo perceptivo e que o mantêm coerente, coeso. Sob um ponto de vista didáctico, ela está a construir uma base para uma intuição geométrica. É não só ver uma figura em vários contextos mas também observar o mesmo contexto de diferentes perspectivas.

Esta proposta, tal como a anterior que envolveu diversos poliedros, pressupõe que os alunos estão no Nível 1 e procura facilitar a passagem para o Nível 2. Os alunos discutem, manipulam figuras geométricas (ou sólidos, como vimos atrás) e o objecto das suas manipulações e interacções são as figuras como elas visualmente aparecem. Mas, ao colocar as figuras em diversos contextos, Dina está a preparar a construção das propriedades das figuras, tema que pertence já ao Nível 2. Para isso ela vai explorar pavimentações com diversas figuras, entre as quais pentágonos (consegue o leitor encontrar um pentágono que pavimente o plano?), hexágonos e octógonos. Vejamos este aspecto mais em pormenor no caso de uma pavimentação com triângulos.

As propriedades das figuras

Se acrescentarmos à pavimentação anterior (Figura 4) a diagonal menor dos losangos, obtemos uma pavimentação com triângulos equiláteros. Será possível obter uma pavimentação com qualquer triângulo? É sempre possível e a Figura 5 mostra um exemplo de uma pavimentação com um triângulo escaleno. Note-se que agora temos três direcções de rectas paralelas. É também interessante notar que esta pavimentação contém linhas em ziguezague e paralelogramos.

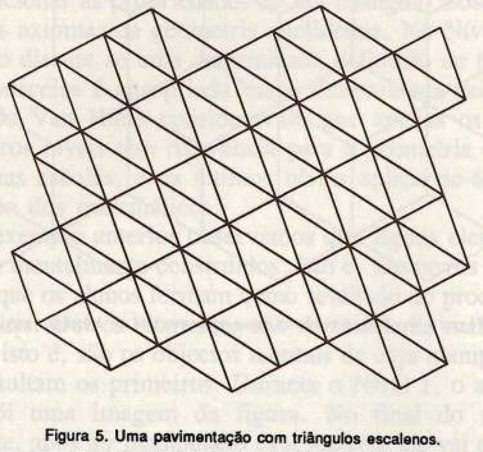


Figura 5. Uma pavimentação com triângulos escalenos.

Pintemos de cores diferentes os ângulos do triângulo e observemos os vértices. Em cada vértice os três ângulos do triângulo estão representados duas vezes. Mas se com um segmento de recta dividirmos estes ângulos em dois semi-planos, cada um contém os três ângulos do triângulo (Figura 6). Que podemos dizer sobre os ângulos de um triângulo?

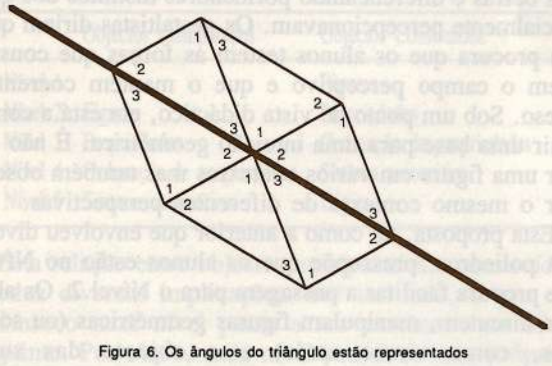


Figura 6. Os ângulos do triângulo estão representados duas vezes em cada vértice da pavimentação.

Façamos uma pausa. Nesta altura os alunos manipularam triângulos e Dina está a procurar que eles construam uma propriedade dos triângulos. A pavimentação além da sua parte visual tem agora uma outra estrutura relacionada com a soma dos ângulos daquele triângulo, que tem que ver com a forma como as componentes das figuras e as próprias figuras estão organizadas. Tratou-se de uma reestruturação do campo de percepção. Os alunos estão a iniciar o seu Nível 2 e o foco da linguagem está agora nas propriedades das figuras.

Com as próximas actividades, Dina vai procurar que os alunos investiguem a soma dos ângulos internos noutros quadriláteros. Os alunos já viram que é possível pavimentar com quadrados e não é difícil imaginar uma pavimentação com rectângulos. Vimos que, no exemplo anterior, podíamos imaginar paralelogramos e, no caso da pavimentação com estrelas hexagonais, alguém observou losangos. Será possível pavimentar com qualquer quadrilátero? Convidamos o leitor a experimentar pavimentar com um quadrilátero qualquer. É sempre possível e obteremos uma pavimentação semelhante à da Figura 7. Colorindo os ângulos tal como procedemos com os triângulos, concluiremos que a soma dos ângulos é 360°. Nos casos anteriores a soma também era de 360°. Mas será possível pavimentar no caso de um quadrilátero côncavo? O segredo reside em que, em cada vértice, se devem encontrar os quatro ângulos do quadrilátero. Desta pesquisa sobre pavimentações com quadriláteros os alunos concluem que: 1) existe um processo de pavimentar utilizando qualquer quadrilátero e 2) a soma dos ângulos de um quadrilátero é 360°.

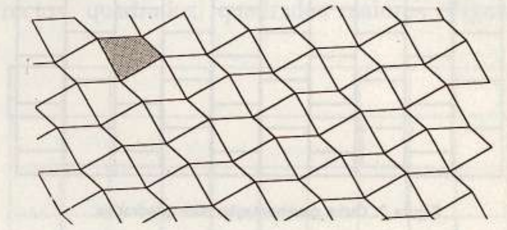


Figura 7. Pavimentaçao com quadrilàteros.

A pergunta inevitável que alguns leitores estarão já a formular é «Será *sempre* assim?» e, de facto, em muitas aulas de matemática, é essa a dúvida metódica que os professores colocam aos alunos. Se a preocupação com a generalização dos resultados está na raíz do pensamento matemático, é no entanto importante reflectirmos nas diferenças entre o que um professor e um aluno estão dispostos a aceitar como prova de que um resultado é generalizável. Não é claro que o significado da palavra «provar» seja o mesmo para um professor ou para um aluno que inicie o Nível 2. Ambos estão dispostos a aceitar uma argumentação que lhe pareça plausível baseada no contexto e na experiência anterior. Mas o aluno ainda não compreende o papel desempenhado por axiomas, definições e teoremas. Para ele, a proposição sobre a soma dos ângulos de um quadrilátero é, essencialmente, uma inferência plausível efectuada a partir dos casos estudados e não uma dedução matemática cujas origens possam ser recuadas até aos axiomas. O primeiro, pelo contrário, está a pensar em termos de uma demonstração de acordo com os níveis de rigor lógico aceites pelos matemáticos. Como vamos ver a seguir só no Nível 3 é que a primeira tentativa de organização das propriedades começa a ser efectuada.

As relações entre as propriedades das figuras

Já atrás, na pavimentação com triângulos, tínhamos encontrado paralelogramos. Vamos pavimentar com paralelogramos e investigar o que podemos «ver». Será que poderemos converter uma pavimentação de paralelogramos numa outra com triângulos? Podemos, se desenharmos uma das diagonais do paralelogramo. Mas se todos os paralelogramos podem ser decompostos em dois triângulos e se a soma dos ângulos de cada triângulo é de 180°, então a soma dos ângulos de um paralelogramo é de 360°. Atrás este resultado foi obtido colorindo os ângulos, mas agora ele pode ser obtido como uma consequência de duas proposições.

Na discussão desta pavimentação o objecto da percepção deixou de ser um paralelogramo específico e passou a ser um paralelogramo genérico e a linguagem deixou de estar focada nos elementos do paralelogramo, para estar focada nas relações entre os componentes dos paralelogramos. Posto de outra forma, em vez de, por exemplo, se discutir se o paralelogramo tem quatro lados, discute-se o facto de ele ter os lados iguais dois a dois está relacionado com o facto de os seus ângulos serem iguais dois a dois. Os alunos já não estão a discutir as figuras geométricas, mas antes a construir relações entre elas ou entre os seus componentes.

Retomemos o argumento «um paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos e, como sabemos que a soma dos ângulos de um triângulo é de 180°, a soma dos ângulos de um paralelogramo é 360°». A discussão prossegue agora tentando verificar se um argumento semelhante pode ser aplicado a outros quadriláteros. O argumento é aplicável no caso de quadrados e rectângulos, assim como no caso de qualquer quadrilátero convexo. O caso do quadrilátero côncavo é um pouco mais complicado, mas pode ser demonstrado que também se aplica. Repare o leitor que utilizámos agora pela primeira vez a palavra «demonstrado». Para um aluno no Nível 1 ou 2, a discussão sobre as relações lógicas das propriedades das figuras é ininteligível. Somente neste Nível 3 aparecem os primeiros esboços de demonstrações entendidas na forma de argumentação plausível que abordámos atrás.

Observemos que um pentágono (convexo) pode ser decomposto em três triângulos e um hexágono (convexo) em quatro. Que podemos concluir sobre a soma dos ângulos destes polígonos? É interessante observar que, contrariamente aos triângulos, é impossível pavimentar com alguns pentágonos e hexágonos. Os alunos de Dina discutiram estas questões laboriosamente. Para clarificar (explicitar) as relações, Dina construía o que chamava de árvore genealógica das propriedades (Figura 8).

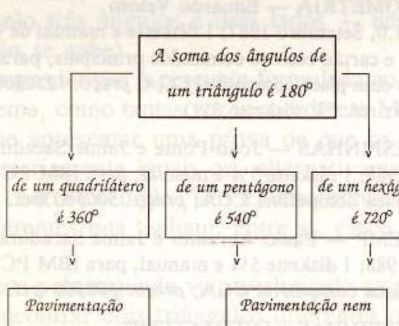


Figura 8. Uma árvore genealógica de Dina Van Hiele-Geldof.

Para obter maiores desenvolvimentos na construção de propriedades, Dina vai fornecer aos alunos dois instrumentos: as «serras» e as «escadas». A Figura 9 apresenta algumas serras e escadas. Os alunos observam as pavimentações anteriores procurando serras e escadas, tentanto estabelecer critérios de reconhecimento de serras e escadas. As propriedades das serras e escadas são estabelecidas em termos de «ângulos iguais» e de «rectas paralelas». As serras e escadas permitem dar um conteúdo concreto, visual, às propriedades entre ângulos com lados paralelos. Em vez de esta propriedade aparecer como era (e ainda é) tradicional, mostrando duas rectas paralelas cortadas por uma secante, ela é integrada num contexto bem mais complexo e pode ser relacionada com muitos outros factos que os alunos experimentaram. Esta relação deixa assim de ser uma proposição formal e passa a ter, para os alunos, um significado geométrico.

Com o recurso constante às árvores genealógicas, as serras e escadas vão depois servir de base para o desenvolvimento de muitas propriedades das figuras.

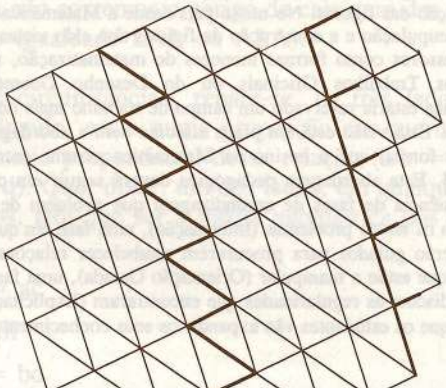


Figura 9. Uma serra à esquerda e uma escada à direita.

Para terminar

Hoje, no estrangeiro, questiona-se qual o conteúdo de um currículo de geometria. Em contraste com a aritmética, não existe um currículo comumente aceite mas parece essencial que a geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial crucial para o mundo moderno. Para tal, é fundamental uma metodologia que parta da visão do aluno e que lhe proporcione os meios e o ambiente para que ele próprio desenvolva os seus conhecimentos. Há grandes linhas de concordância sobre o que deve ser a geometria nas escolas que passam por um reforço da intuição espacial, por um forte recurso à utilização dos computadores, por exemplo com o Logo, e por uma manipulação das figuras elementares com a consequente investigação de algumas das suas propriedades. Propõe-se ainda a inclusão de tópicos como uma ligação da geometria com as matrizes, ou teoria de grafos.

Neste artigo procurou-se descrever um modelo de aprendizagem assente numa visão que valoriza a aprendizagem da geometria como um fenómeno gradual, global e construtivo. Gradual, porque pressupõe que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos gradualmente. Global, porque uma figura ou uma propriedade não são abstracções isoladas mas, antes estabelecem relações umas com as outras e pressupõem níveis mais simples ou mais complexos que lhes dão outros significados. Construtivo, porque pressupõe que não existe transmissão de conhecimentos mas antes que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos. Apesar de o conteúdo curricular (a geometria euclideana) já não fazer parte do currículo, pensamos que a metodologia seguida por Dina Van Hiele-Geldof pode produzir excelentes sugestões (*insights*) adaptáveis aos conteúdos e às salas de aula de hoje.

Notas

Nota 1. Este artigo é adaptado de uma intervenção efectuada em 8/4/88 no 66.º Encontro Anual do Nacional Council of Teachers of Mathematics em Chicago.

Nota 2. É interessante notar que os Van Hiele atribuíam uma importância muito grande às construções geométricas, como uma forma de manipulação das figuras. No nosso país desde a Matemática Moderna que a manipulação e a construção de figuras têm sido vistas por muitos professores como formas menores de matematização, mais próprias dos Trabalhos Oficinais ou do Desenho Geométrico. À Matemática estaria reservado um campo de trabalho mais nobre, mais abstracto. Esta visão está em plena sintonia com a abordagem extremamente formal que o ensino da Matemática assume entre nós.

Nota 3. Esta abordagem pedagógica deverá seguir em cada nível uma sequência de fases de aprendizagem que evoluem de um contacto com os novos problemas (Informação), uma fase em que os estudantes serão guiados para procurarem estabelecer relações entre os objectos que estão a manipular (Orientação Guiada), uma fase em que a classe discute as regularidades que encontraram (Explicitação), uma fase em que os estudantes vão expandir os seus conhecimentos de uma forma aberta (Orientação Livre) e uma fase final em que se retira uma conclusão do que foi aprendido (Integração).

Nota 4. Na altura da introdução da Matemática Moderna, o nosso programa de geometria procurava estruturar o espaço. Esta estruturação era entendida como a capacidade de abstrair pontos, rectas, planos ou classes de equivalência de vectores. A estruturação entendida pelos Van Hiele está muito mais ligada à percepção e é, essencialmente, a estrutura que o sujeito mentalmente põe no desenho geométrico e não uma estrutura matemática pré-existente que os alunos apenas têm de assimilar. No primeiro caso, havia uma estrutura verdadeira, objectiva, matemática, com origem nas investigações dos matemáticos da escola bourbakista. No segundo, há diversas estruturas concorrentes, todas elas disputando o lugar de verdadeira estrutura geométrica e todas elas tendo as suas raízes na percepção visual dos alunos.

Nota 5. Os Van Hiele distanciam-se da psicologia e, consequentemente, da Teoria de Gestalt, afirmando que os estudos psicológicos costumam ser efectuados em adultos, negando pois a existência de um desenvolvimento mental (Van Hiele-Geldof, 1984, p. 63, p. 177). No caso particular de Piaget, Pierre Van Hiele critica-lhe a visão demasiadamente biológica sendo, portanto, inevitável que minimize a influência que o professor pode ter no desenvolvimento (1986).

Referências

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics an an educational task.* Dordrecht, Holanda; Reidel.

Fuys D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds.). (1984). *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele.* Brooklyn, Nova Iorque: School of Education, Brooklyn College.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. Em R. Lesh (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). Nova Iorque: Academic Press.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Nova Iorque: Academic Press.

Van Hiele-Geldof, D. (1957/1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Em D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.) *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele* (pp. 1-206). Brooklyn, Nova Iorque: School of Education, Brooklyn College.

Wertheimer, M. (1945). *Produtive thinking.* Nova Iorque: Harper & Brothers.

Triângulos dourados

Henrique M. Guimarães e Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências de Lisboa

Dois triângulos que tenham entre si cinco elementos iguais — três lados e dois ângulos, ou três ângulos e dois lados — serão necessariamente iguais?*

Esta questão constitui um excelente exemplo de um problema. Não há dificuldade com os assuntos matemáticos envolvidos: lida-se com coisas simples e bem conhecidas, nomeadamente com a igualdade de triângulos. No entanto, como veremos, não se trata de uma questão trivial, e, muito menos, de um exercício de mera aplicação de qualquer propriedade, conceito ou teorema, acabados de estudar.

Explorando o problema

Discutamos a questão. São bem conhecidos os casos de igualdade de triângulos que constituem condições suficientes para que dois triângulos sejam iguais e que mnemonicamente se representam: LLL, LAL e ALA. Em qualquer deles intervêm três elementos — três lados, dois lados e um ângulo, e dois ângulos e um lado. No entanto, nos dois últimos casos tem que verificar-se uma condicionante que, de alguma forma, relaciona os três elementos em jogo: no primeiro desses casos (LAL) os dois lados são os que «formam» o ângulo referido; no segundo (ALA) os dois ângulos são adjacentes ao lado que é dado.

No nosso problema há cinco elementos iguais (todos menos um, repare-se) e, à primeira vista, é-se talvez tentado a acreditar que os triângulos acabarão por ser necessariamente iguais. Mas vejamos, podemos considerar duas hipóteses quanto a esses cinco elementos iguais:

a) ou são três lados e dois ângulos — neste caso é evidente que os triângulos têm que ser iguais (caso de igualdade LLL);

b) ou são três ângulos e dois lados — neste caso... (ainda não se sabe).

Para respondermos à pergunta formulada no enunciado do problema, como tantas vezes sucede em Matemática, temos que apresentar uma prova de que os triângulos são necessariamente iguais ou, alternativamente, construir um contra-exemplo, isto é, determinar dois triângulos diferentes que tenham, entre si, cinco elementos iguais.

Optámos pela segunda via, explorando as possibilidades de encontrar dois triângulos diferentes obedecendo às condições do nosso problema. Como vimos, a única esperança está no caso em que os cinco elementos iguais entre os dois triângulos são os três ângulos e dois dos lados. Ora, com os três angulos respectivamente iguais, os dois triângulos serão semelhantes. Isto obriga-nos, para que os triângulos não sejam iguais, a desencontrar os lados que sabemos serem iguais, na correspondência respectiva. Isto é, designando as medidas dos lados por letras, terá que haver, entre elas uma correspondência do tipo:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & c & d \end{matrix} \quad \text{em que } a/b = b/c = c/d$$

(assim não corremos o perigo de cair num dos outros casos de igualdade LAL ou ALA).

Nestas circunstâncias, repare-se, os três lados, em cada triângulo, estão numa proporção em que um dos lados é meio proporcional dessa relação ($a/b = b/c$ e $b/c = c/d$). Quer dizer: um dos lados, em qualquer dos triângulos, tem que ser a média geométrica dos outros dois:

$$b^2 = ac$$

e também

$$c^2 = bd$$

Basta agora encontrarmos medidas para os lados dos triângulos que satisfaçam estas relações. Depressa descobriremos que há umas que não servem por não verificarem a desigualdade triangular (o maior lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois) por exemplo: $a = 12$, $b = 6$ e $c = 3$. Mas há outras que servem, por exemplo: $a = 9$, $b = 6$ e $c = 4$. Como $d = c^2/b$ teríamos ainda neste caso particular $d = 8/3$.

E pronto! Dois triângulos cujas medidas dos lados sejam 9, 6, 4 e 6, 4, 8/3 constituem o contra-exemplo procurado. Na verdade:

Têm, entre si, os três ângulos iguais pois são triângulos semelhantes uma vez que têm os lados correspondentes proporcionais;

Têm, entre si, dois lados iguais (os de medidas 6 e 4);

E, no entanto, os triângulos não são iguais.

Concretizando

Mas será que é mesmo possível desenhar dois triângulos como os anteriores? Há qualquer coisa que nos deixa pouco satisfeitos com este final para o problema.

* Neste artigo, usa-se «iguais» no sentido de «congruentes» ou «geometricamente iguais»

Talvez ajude vermos com os nossos próprios olhos. Comecemos por desenhar um triângulo de lados 9, 6 e 4 e prolonguemos os dois lados maiores como se mostra na figura seguinte:

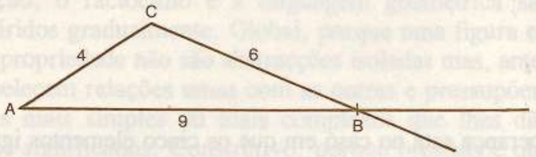


Fig. 1

Sobre o prolongamento de [CB] e [AB] marquemos dois segmentos de medidas 4 e 6, respectivamente. Deste modo obteremos o segundo triângulo:

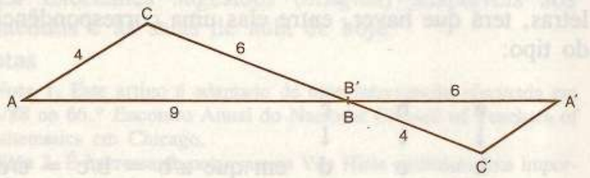


Fig. 2

Estes dois triângulos são semelhantes (e até homotéticos) visto que os ângulos de vértices em $B \equiv B'$ são verticalmente opostos e os lados que os formam são proporcionais $(9/6 = 6/4)$. Nestas circunstâncias os ângulos homólogos são iguais: $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ e $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Como, por construção, $\overline{AB} = \overline{B'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ os dois triângulos têm, entre si, cinco elementos iguais e não são iguais. O nosso contra-exemplo está, pois, agora desenhado.

Uma rotação do triângulo [A'B'C'] em torno de $B' \equiv B$ permitirá mesmo *ver* dois triângulos com cinco elementos iguais e que estão *um dentro do outro:*

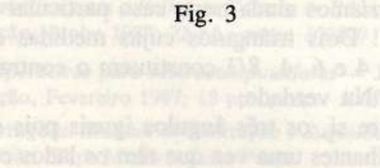


Fig. 3

Generalizando

Encontrado um (contra-)exemplo, há evidentemente uma infinidade deles. Alguns resultam de sucessivas ampliações (ou reduções) a partir daquele que se encontrou. Outros correspondem a diferentes *famílias* de triângulos semelhantes. O passo seguinte poderá ser uma tentativa de generalização.

Sabemos, por conseguinte, que dois triângulos com cinco elementos iguais são, pelo *menos*, semelhantes. Suponhamos que a sua razão de semelhança é **k**. Terá então que se verificar:

$$\begin{array}{lcl} \triangle_1 & & \triangle_2 \\ a & \longrightarrow & ka \\ ka & \longrightarrow & k^2\,a \\ k^2\,a & \longrightarrow & k^3\,a \qquad \text{com } k > 0 \text{ e } k \neq 1 \end{array}$$

Ou seja, a um lado do triângulo 1, de medida **a**, corresponderá um lado **ka** no triângulo 2. Este valor, **ka** terá que ser a medida de um dos outros lados do triângulo 1 a que corresponderá, no triângulo 2, um lado de medida $\mathbf{k^2a}$. Por sua vez, $\mathbf{k^2a}$ terá que ser a medida do último lado do primeiro triângulo a que corresponderá um lado de medida $\mathbf{k^3a}$ no segundo triângulo. Tudo isto para garantir dois lados iguais entre os dois triângulos.

Como é forçoso verificar-se a desigualdade triangular, terá que ser para o triângulo 1, por exemplo:

(i) $k^2a < ka + a$ (considerando $k > 1$)

ou

(ii) $a < ka + k^2a$ (considerando $k < 1$)

A resolução destas condições considerando ainda que **k** é um número positivo, conduz-nos a:

(i) $1 < k < (1 + \sqrt{5})/2$

(ii) $(-1 + \sqrt{5})/2 < k < 1$

Podemos pois concluir que dois triângulos com cinco elementos iguais serão diferentes se as medidas dos lados de um deles forem **a**, **ka** e $\mathbf{k^2a}$ e as do outro **ka**, $\mathbf{k^2a}$ e $\mathbf{k^3a}$, com **k** pertencendo a:

$$](-1 + \sqrt{5})/2,\ 1[\,\cup\,]\,1,\ (1 + \sqrt{5})/2[$$

Um número especial

Até aqui, desempenharam um papel importante dois números: $(1 + \sqrt{5})/2$ e $(-1 + \sqrt{5})/2$. Estes Estes números têm particularidades curiosas. Pegando numa calculadora verificaremos que

$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180339...$ e,

$(-1 + \sqrt{5})/2 = 0.6180339...$

Efectivamente, a diferença entre esses dois números é um:

$$(1 + \sqrt{5})/2 - (-1 + \sqrt{5})/2 = 1$$

Além disso, o seu produto é também a unidade:

$$(1 + \sqrt{5})/2 . (-1 + \sqrt{5})/2 = 1$$

isto é, tanto o produto dos referidos números como a sua diferença são iguais a um. Por outras palavras: o inverso do número $(1 + \sqrt{5})/2$ difere dele em uma unidade! Esta particularidade, muito provavelmente, e o facto de em muitas e diversas situações da Matemática e da Natureza, este número — ou o seu inverso — aparecer com alguma frequência, às vezes inesperadamente, tornou-o famoso. É, inclusivamente, conhecido por **Número de ouro.**

Consideremos um segmento de recta [AC] (fig. 4.).

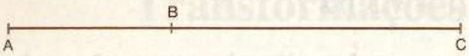


fig. 4

Se B for um ponto entre A e C de tal modo que:

$$\text{(i)}\quad \overline{AB}/\overline{BC} = \overline{BC}/\overline{AC}$$

(ou seja, de forma que a razão entre a *menor das partes* e a *maior* delas seja a mesma que a razão entre esta e o *todo*) diz-se, nestas circunstâncias, que os três pontos A, B e C constituem uma *secção de ouro*. Este «modo de dividir» um segmento, esta *secção* é também chamada de *divina proporção* (Warusfel, 1961).

Na verdade a *secção de ouro* está relacionada com o número de ouro que atrás referimos. Se fizermos, por simplicidade, a medida de $\overline{AB} = 1$ e designarmos a de $\overline{BC}$ por x a proporção (i) ficará:

$$1/x = x/(x+1) \qquad (\text{pois, } \overline{AC} = x + 1)$$

ou

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

O valor de x que nos interessa é, pois, uma das raízes desta equação do segundo grau, que é:

$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$$

ou seja, precisamente, o número de ouro (a outra raiz, que não consideramos por ser negativa, $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, é, com sinal contrário, o inverso daquele número).

A *secção de ouro* obtida deste modo tem sido, desde os Gregos, «muitas vezes citada como a mais harmoniosa» (o.c., p. 99).

Igualmente considerado como o rectângulo mais *harmonioso* ou *equilibrado*, é todo o rectângulo em que as dimensões dos seus lados são tais que: o menor lado está para o maior, assim como este está para a soma dos dois (ou seja para o semiperímetro do rectângulo). Que relação haverá entre as dimensões deste rectângulo?

Façamos, por simplicidade, o menor lado de medida 1 e designemos por x a medida do outro lado (fig. 5).

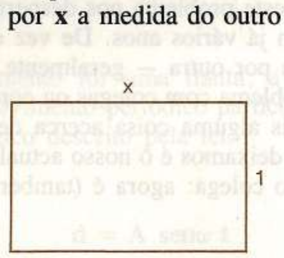


Fig. 5

Ter-se-á, assim:

$$1/x = x/(x+1)$$

ou

$$x^2 - x - 1 = 0$$

equação do segundo grau já nossa conhecida cuja solução útil (a positiva) é precisamente $(1 + \sqrt{5})/2$, ou seja, o número de ouro. Um rectângulo cujos lados estão nesta proporção é também conhecido por *rectângulo de ouro.*

Se *retirarmos* a este rectângulo um quadrado de lado 1 obteremos um novo rectângulo de dimensões 1 e $(1 + \sqrt{5})/2 - 1$ que é ainda um *rectângulo de ouro* (fig. 6). De facto:

$$(1 + \sqrt{5})/2 - 1 = (-1 + \sqrt{5})/2$$

Assim as dimensões deste rectângulo estão na razão

$$1/(-1 + \sqrt{5})/2$$

de onde se obtém, por racionalização, $(1 + \sqrt{5})/2$ o número de ouro.

Se, repetindo a operação, *retirarmos* a este segundo rectângulo um quadrado (agora de lado $(-1 + \sqrt{5})/2$) obteremos um terceiro rectângulo de ouro. E assim sucessivamente... (fig. 6)

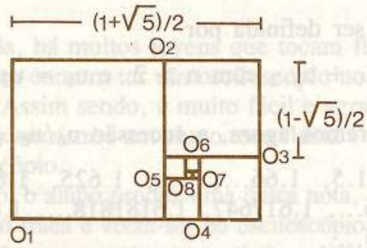


Fig. 6

Os pontos O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8... estão situados numa curva: a espiral logarítmica (fig. 7). Esta curva aparece frequentemente, na natureza, em conchas de certos animais (fig. 8), nas sementes de algumas flores e em determinados cortes do mármore (Northrop, s.d.).

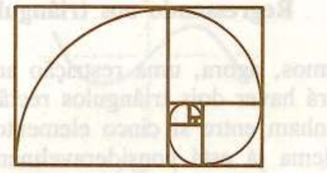


Fig. 7

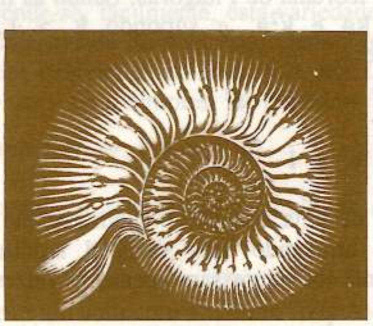


Fig. 8

Escolha, agora, dois números ao acaso, por exemplo, 3 e 4. À sua soma, 7, adicione o maior deles; obtém 11. A 11 adicione 7, e assim sucessivamente. O quociente entre os números sucessivos assim obtidos tende para o número de ouro:

3 + 4 = 7	7/ 4 = 1.75
4 + 7 = 11	11/ 7 = 1.5714285
7 + 11 = 18	18/ 11 = 1.6363636
11 + 18 = 29	29/ 18 = 1.6111111
18 + 29 = 47	47/ 29 = 1.6206896
29 + 47 = 76	76/ 47 = 1.6170212
47 + 76 = 123	123/ 76 = 1.61842
76 + 123 = 199	199/123 = 1.6178861
123 + 199 = 322	322/199 = 1.6180904
199 + 322 = 521	521/322 = 1.6180124
322 + 521 = 843	843/521 = 1.6180422

Algo de semelhante ocorre com a chamada sucessão dos números de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

que pode ser definida por

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ com } n > 2 \text{ e } u_1 = u_2 = 1$$

Consideremos agora, a sucessão u_n/u_{n-1}

1, 2, 1.5, 1.66..., 1.6, 1.625, 1.6153846..., 1.6190476..., 1.617647, 1.6181818..., 1.6179775..., 1.6180555...

Vemos que os termos de ordem ímpar *tendem* para o número de ouro por valores inferiores, enquanto que os de ordem par o fazem por valores sempre superiores. Esta sequência de números *aproxima-se* pois cada vez mais do número de ouro.

Regressando aos triângulos

Imaginemos, agora, uma restrição ao problema inicial: poderá haver dois triângulos rectângulos diferentes que tenham entre si cinco elementos iguais?

O problema já está consideravelmente desbravado. Trata-se, apenas, de impor uma nova condição, a verificação do teorema de Pitágoras. Sendo as medidas dos lados **a, ka** e **k²a,** e supondo **k** > 1, terá que verificar-se:

$$k^4 a^2 = k^2a^2 + a^2$$

ou

$$k^4 = k^2 + 1$$

Trata-se de uma equação biquadrada que se resolve facilmente utilizando uma variável auxiliar $b = k^2$. Então, como nos interessam apenas as raízes positivas, teremos:

$$b = (1 + \sqrt{5})/2$$

e, portanto,

$$k = \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}$$

valor com o qual o triângulo em questão será rectângulo. Fazendo, por simplicidade, a = 1 as medidas dos lados desse triângulo serão:

$$1, \quad \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2} \quad \text{e} \quad (1 + \sqrt{5})/2$$

No caso de ser **k**< 1 a equação biquadrada seria:

$$1 = k^2 + k^4$$

$$b = (-1 + \sqrt{5})/2$$

$$k = \sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$$

e as correspondentes medidas dos lados, também com **a = 1,** do triângulo rectângulo, viriam:

$$1, \quad \sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2} \quad \text{e} \quad (-1 + \sqrt{5})/2$$

Todavia, estas medidas, reduzem-se às anteriores dividindo-as precisamente por $(-1 + \sqrt{5})/2$ que, como já se viu, é o inverso do número de ouro.

Conclui-se assim que, para triângulos rectângulos a solução é única, isto é, há uma única *família* de triângulos rectângulos que preenche as condições do nosso problema: a menos de um produto por uma constante as medidas dos lados terão pois que ser **1, k** e **k²** em que a hipotenusa, **k²**, é o número de ouro (fig. 9).

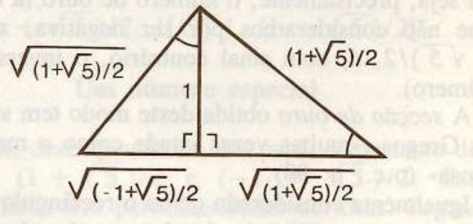


Fig. 9

E assim sucessivamente...

Desde que este problema nos despertou interesse até hoje passaram já vários anos. De vez em quando, por uma razão ou por outra — geralmente a partir da discussão do problema com colegas ou com alunos — descobrimos mais alguma coisa acerca dele.

O que aqui deixamos é o nosso actual *ponto da situação*. Estimado colega: agora é (também) a sua vez de continuar...

Referências:

Northorp (s.d.). Curiosidades da Matemática. Lisboa: Pelicano

Warusfel (1961). *Les nombres et leurs mystères*. Bourges: Seuil.

Transformações Afins, Sinusóides, Acústica

Daniela Gori Giorgi, Liceo Scientifico de Roma

O assunto que aqui se apresenta, largamente experimentado com alunos de 16-17 anos, faz parte dum trabalho conduzido com Emma Castelnuovo e Claudio Gori Giorgi com o fim de organizar um ensino integrado de Matemática e Física para alunos de 14-18 anos.

Trata-se, simplesmente, de um exemplo que, todavia, pode levar a reflectir sobre práticas de ensino muito difundidas. Acontece, frequentemente, que o ensino da acústica se apoie nas funções trigonométricas como uma ferramenta que permite descrever os fenómenos, mas é também muito comum que o professor de matemática introduza as mesmas funções de uma forma abstracta, com um pesado fardo de fórmulas... E os alunos cometem sempre os mesmos erros — confundem **2 sen x** com **sen 2x**, escrevem **2 sen (x/2) = sen x** — e ficam a ver a Física como qualquer coisa muito distante da sua vida.

Ora é justamente a integração da Matemática com a Física e, também, com a realidade que permite ultrapassar estas dificuldades. Vejamos, então, como proceder a partir de um interesse sempre muito vivo dos alunos: a música.

O *ponto de vista euleriano* é, na minha opinião, o mais expressivo para introduzir a acústica ligada à música: fixemos a nossa atenção sobre uma pequena porção de ar situada num ponto 0, próximo de um instrumento que produz música. Logo que o ponto 0 é atingido pelo som, a parcela de ar começa a percorrer a trajectória MN com um movimento periódico (fig. 1).

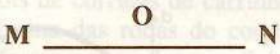


Fig. 1

Se o instrumento for uma flauta, a parcela de ar adquire um movimento periódico particular — o movimento harmónico descrito pela lei.

$$\mathbf{d = A\ sen\omega\ t}$$

onde:

d = distância variável da parcela de ar ao ponto **O**
A = elongação máxima **OM = ON**
$\omega = 2\pi$**f** = pulsação, proporcional à frequência **f**
t = tempo variável

Chegámos, assim, à função sinusoidal, de que se pode traçar o gráfico num caso matematicamente simples: A = 1, $\omega = 1$ (Fig. 2).

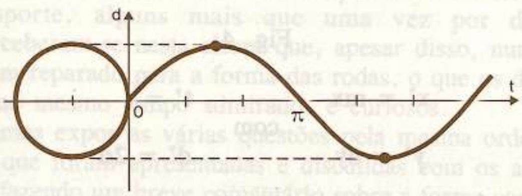


Fig. 2

Entre nós, há muitos jovens que tocam flauta e também é muito comum ter um osciloscópio no laboratório de Física. Assim sendo, é muito fácil e agradável organizar *lições musicais*: um aluno toca flauta e *vê-se o som* no osciloscópio.

No início, o aluno produz uma única nota, muito forte, forte, muito fraca e vêem-se, no osciloscópio, outras tantas sinusóides, com o mesmo período e diferentes amplitudes (fig. 3).

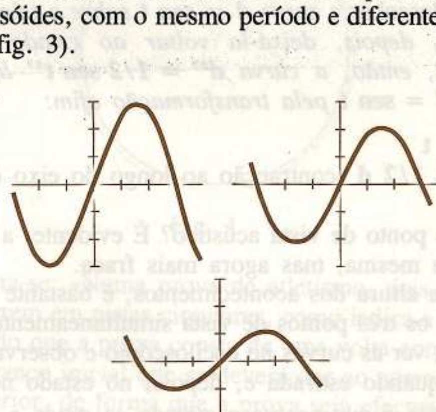


Fig. 3

Compreende-se, facilmente, esta variedade de curvas, porque a intensidade do som está ligada à amplitude A da oscilação descrita pela lei **d = A sen t.**

Ou, no caso mais simples, de partida:

d = sen t (A = 1 e ω = 1)

e, por exemplo, se se duplicar a amplitude A, teremos:

d' = 2 sen t'

que descreve um som com a mesma frequência — trata-se da mesma nota — mas mais forte.

É extremamente interessante desenhar as duas curvas correspondentes e compará-las (Fig. 4). Desta forma, os alunos descobrem facilmente as relações entre os dois gráficos:

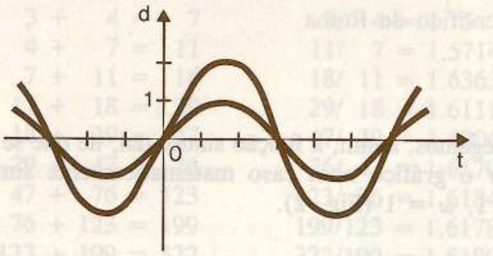


Fig. 4

$x' = mx$ $\quad$ com $\quad$ $t' = t$

$y' = ny$ $\quad\quad\quad\quad$ $d' = 2d$

Pode-se passar de uma curva à outra por uma transformação afim particular: dilatação ao longo do eixo **d**.

Os alunos lembraram-se, imediatamente, da *tela elástica* com que tinham trabalhado nos anos precedentes para estudar as transformações afins. Um deles exclamou: *Se desenharmos* **d = sen t** *sobre uma tela elástica e se estirarmos esta segundo o eixo* **d** *até as ordenadas duplicarem, vemos a curva* **d' = 2 sen t'**. *Mas* acrescentou um outro — podemos fazer o contrário: desenhar a curva ***d = sen t*** *sobre a tela já estirada e, depois, deixá-la voltar ao estado inicial; ver-se-á, então, a curva* **d'' = 1/2 sen t''** *ligada à curva* **d = sen t** *pela transformação afim:*

$t'' = t$

$d'' = 1/2\ d$ (contracção ao longo do eixo **d**)

E, do ponto de vista acústico? É evidente: a nota é, ainda, a mesma, mas agora mais fraca.

A esta altura dos acontecimentos, é bastante expressivo ter os três pontos de vista simultaneamente: ouvir os sons, ver as curvas no osciloscópio e observar a tela elática quando estirada e, depois, no estado normal.

E o que é que acontece quando se muda a nota?

Ainda aqui é a experiência que nos guia: tocando notas diferentes, mas mantendo mais ou menos a mesma intensidade do som, vêem-se no osciloscópio outras tantas curvas que têm a mesma amplitude mas com períodos diferentes (fig. 5).

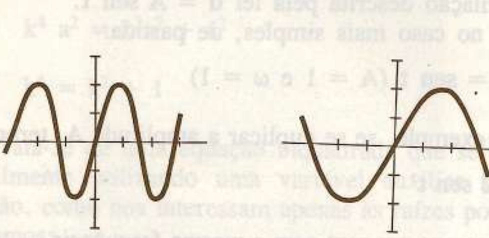


Fig. 5

Este caso explica-se também facilmente: emitir uma nota determinada corresponde a fixar a frequência **f** e, portanto, a pulsação $\omega = 2\pi f$. Se, por exemplo, passarmos de uma nota à mesma nota da oitava precedente (nota mais grave), divide-se por dois a frequência **f**.

Se se parte do caso

$$d = \text{sen}\ t \quad (A = 1 \text{ e } \omega = 2\pi f = 1) \qquad (*)$$

e se divide por dois a frequência **f**, tem-se:

$$d' = \text{sen}\ (t'/2)$$

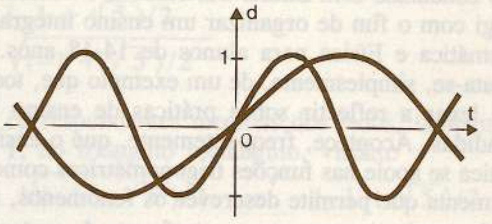


Fig. 6

ligada a (*) pelas relações:

$d' = d$

$t'/2 = t$ ou $t' = 2t$

Portanto, passa-se da primeira à segunda curva ainda por uma transformação afim: uma dilatação ao longo do eixo dos tempos, bem visualizada com a tela elástica.

A partir deste ponto, os alunos procedem, sozinhos, à análise dos casos mais complexos, mas, também, mais comuns.

Passa-se de uma nota à mesma nota da oitava precedente, mas mais forte, dividindo por dois a frequência e duplicando a intensidade: é a passagem da lei (*) à lei **d' = 2 sent (t'/2)** (Fig. 7).

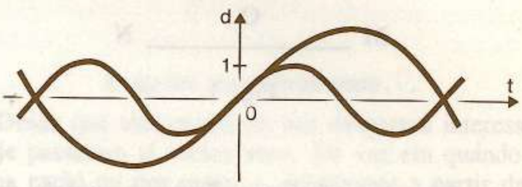


Fig. 7

Trata-se, agora, da passagem da primeira à segunda curva por uma dilatação ao longo dos **dois eixos**, com os mesmos coeficientes: é uma semelhança.

Da mesma forma, quando se passa de uma nota à mesma nota da oitava seguinte e emitida de modo mais fraco, trata-se de passar do som descrito por (*) ao descrito pela lei **d'' = 1/2 sen 2t''**.

E é, ainda, uma semelhança que permite passar de uma curva à outra.

(cont. pág. 24)

Das corridas de atletismo às rodas do comboio, passando pelos carrinhos eléctricos — uma forma diferente de «falar» da circunferência

Ana Vieira, Escola Secundária de Miraflores

A Geometria é um dos capítulos da matemática mais interessantes de ensinar, pois permite dar aulas mais vivas, não só pela diversidade de situações que se podem criar proporcionando resoluções diversificadas para o mesmo problema, como também, pelo menos a nível da Geometria elementar, por ser um tema que facilmente se liga à realidade.

A fórmula do perímetro da circunferência faz parte do programa do Ciclo Preparatório, mas normalmente o tempo é curto para dar o programa todo e este, assim como outros assuntos por vezes bem interessantes, são dados muito rapidamente, às vezes como um «despejar» de fórmulas, descansando no pensamento de que «eles já tinham obrigação de saber...»

Não pretendemos expor aqui uma forma diferente de dar o perímetro da circunferência mas sim, uma vez dado, seja em que ano de escolaridade for, mostrar com alguns exemplos simples como tem inúmeras e tão diferentes aplicações na vida real. É um trabalho elaborado a partir de um artigo da revista Mathematics Teacher e que foi adaptado e experimentado numa turma do 9.º ano de escolaridade (1986/87) e noutra do 7.º ano (1987/88).

Os alunos foram confrontados com uma série de problemas, agrupados em três grandes grupos e seriados de forma a, por um lado, aumentar gradualmente o grau de dificuldade e por outro, que as conclusões que se fossem tirando servissem para apoiar a resolução dos problemas seguintes. Fala-se em primeiro lugar de provas de atletismo, depois de corridas de carrinhos eléctricos e finalmente da forma das rodas do comboio.

Os problemas foram agrupados em fichas de trabalho, num total de oito fichas, que eram distribuídas e discutidas semanalmente.

Antes da distribuição da primeira ficha de trabalho, foi pedido aos alunos que fizessem um esboço das rodas de um comboio, observadas de frente, uma de cada lado de um eixo, respeitando o mais possível todos os pormenores da sua forma real. Os alunos ficaram admirados com este pedido, mas nada lhes foi dito quanto ao objectivo do mesmo, referindo-se apenas que se pretendia ver quem tinha melhor capacidade de observação.

Durante muitas semanas, eles foram trazendo os desenhos mais variados; contavam as suas peripécias sobre o *esforço* que tinham feito para observarem as rodas e discutiam entre si, frequentemente, sobre aquilo que tinham desenhado. Nunca lhes foi dito qual a forma real das rodas, mas enquanto não conseguiram acertar, dizia-se sempre que ainda faltava um pormenor.

Uma das escolas em que este trabalho foi realizado é em Oeiras e a outra em Algés, zonas servidas por comboio. Muitos alunos utilizavam diariamente este meio de transporte, alguns mais que uma vez por dia. Aperceberam-se nesta altura que, apesar disso, nunca tinham reparado para a forma das rodas, o que os deixou ao mesmo tempo admirados e curiosos.

Vamos expor as várias questões pela mesma ordem com que foram apresentadas e discutidas com os alunos, fazendo um breve comentário sobre a forma como reagiram em algumas situações.

Corridas de atletismo

Fig. 1

Pergunta-se: «Numa prova de atletismo, dois corredores correm em pistas circulares, como indica a figura 1. Sabendo que a prova consta de uma volta completa, qual o avanço inicial que se deverá dar ao corredor da pista exterior, de forma que a prova seja efectuada em igualdade de circunstâncias (isto é, percorram a mesma distância)?»

Resolução: $2\pi 41 - 2\pi 40 = 2\pi\ (41\text{-}40) = 2\pi$.

Esta forma esquematizada de equacionar e resolver o problema não foi a forma utilizada pelos alunos. Eles calcularam separadamente o perímetro de cada pista, determinando em seguida a diferença. No entanto, todos chegaram ao resultado certo.

Em seguida, considera-se o mesmo problema mas fazendo variar os raios das pistas interior e exterior para 85 m/86 m; 1000 m/1001m e 11 m/13 m.

Depois deste conjunto de questões, pede-se aos alunos que tirem uma conclusão. Pretende-se que eles verifiquem que o avanço a dar ao corredor da pista exterior só depende da diferença entre os raios das duas pistas. Esta conclusão levantou sempre alguma polémica, pois intuitivamente parecia que o avanço tinha de ser tanto maior quanto maior fosse o raio dos círculos.

Colocam-se agora questões análogas, mas com pistas quadrangulares.

Fig. 2

Inicialmente supõe-se que a pista interior tem dois metros de lado e a distância entre as pistas é de um metro. Calculando o perímetro de cada pista e determinando a diferença, facilmente os alunos concluíram que o avanço a dar, neste caso, ao corredor da pista exterior para que a prova seja efectuada em igualdade de circunstâncias, tem de ser de 8 metros. Fazendo variar as dimensões, alguns alunos começaram a relacionar este avanço, mais uma vez, com a diferença entre as pistas. Para os mais renitentes, a discussão do problema com o apoio da figura 3 foi determinante. Concluíram então que o corredor da pista exterior só tem de facto desvantagem nos cantos, sendo essa desvantagem, em cada canto, o dobro da distância entre as pistas.

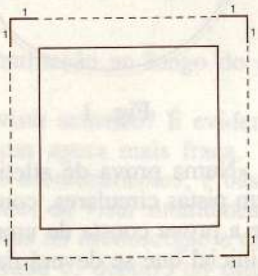


Fig. 3

Passa-se então para uma situação em que a figura se assemelha à forma real das pistas de atletismo.

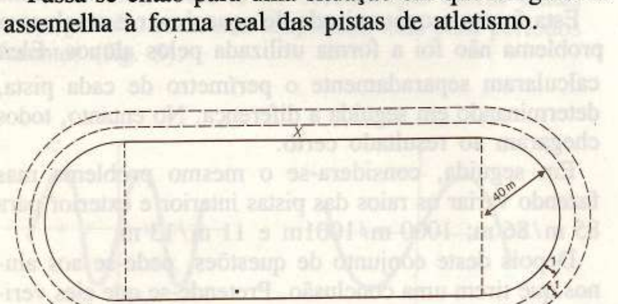


Fig. 4

Cada pista está simbolizada apenas por um traço (traço contínuo na pista interior e tracejado nas pistas intermédia e exterior);

As condições da figura são:

— a distância entre cada uma das pistas é de um metro;
— o raio de cada uma das semicircunferências da pista interior é 40 m;
— o perímetro da pista interior é 400 m.

O primeiro problema consiste em calcular o comprimento de cada troço rectilíneo das pistas. Os alunos calculam o perímetro das curvas da pista interior; em seguida, subtraem esse valor a 400 e dividem por dois. O comprimento de cada troço rectilíneo é aproximadamente 92 m, sendo o mesmo para todas as pistas.

Novamente se colocam um conjunto de questões sobre o avanço a dar ao corredor de cada uma das pistas em relação à outra, quer seja numa corrida de uma volta completa ou de mais de uma volta.

Com base nas conclusões tiradas na resolução dos problemas anteriores, sabe-se que nos troços rectilíneos os corredores das pistas exteriores não têm qualquer desvantagem, vindo esta a acontecer apenas nas curvas, o que neste caso quer dizer apenas nas duas semicircunferências de cada pista.

Conclusão: o avanço a dar ao corredor de cada pista em relação a uma pista interior deverá ser: 2π x diferença dos raios x número de voltas (o número de voltas apenas tem importância se se considerar que os corredores se mantêm sempre na mesma pista).

Este problema foi sempre discutido com grande entusiasmo, pois os alunos perceberam melhor porque é que, em certas provas de atletismo disputadas em estádio, a linha de partida não é a mesma para todos os corredores. Perceberam, também, porque é que nas provas de 60, 100 e 110 metros já não há esse problema (não se chegando a efectuar a curva, não há qualquer desvantagem para nenhum corredor).

Corridas de carrinhos eléctricos

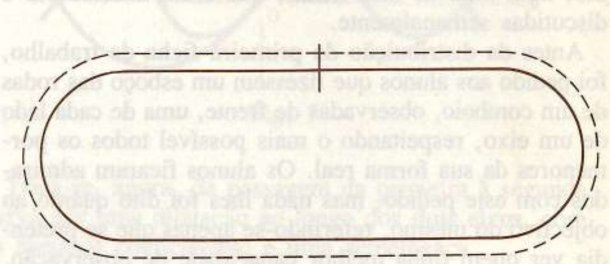


Fig. 5

A figura anterior representa uma pista de carrinhos eléctricos com duas faixas, simbolizadas cada uma por uma linha (faixa interior — linha a cheio, faixa exterior — linha a tracejado).

Supondo que as faixas distam entre si 4 cm, pergunta-se qual dos dois carros ganhará a corrida que consta de uma volta completa, supondo que partem ao mesmo tempo com velocidades iguais e constantes?

Para responder a esta questão, a informação de que as pistas distam entre si 4 cm é desnecessária. Os alunos responderam de imediato que ganhava o carro da pista a cheio, dando a entender que a pergunta até se tornava ridícula, depois de tudo o que já tinham discutido até aqui. A figura seguinte representa uma pista montada de outra forma e a pergunta que se coloca é a mesma.

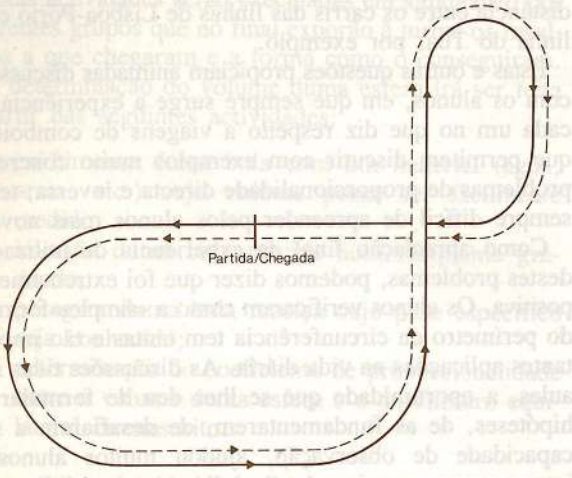


Fig. 6

Já sabemos que nos troços rectilíneos não há desvantagem. Sabemos também que, nas curvas, a desvantagem não depende do raio da curva mas apenas da distância entre as faixas.

Como nesta pista a distância entre as faixas é sempre constante ao longo de todo o percurso, vamos então analisar o que se passa em cada curva. O trabalho fica facilitado se numerarmos as curvas, como se indica na figura.

A curva I é uma semicircunferência em que o carro da faixa interior (a tracejado) consegue um avanço, avanço esse que vai perder na curva III, pois é também uma semicircunferência que ele passa agora a descrever pelo lado exterior (embora os raios das curvas variem, isso não vai influenciar, como já sabemos). Na curva II, o carro da faixa tracejada consegue novamente um avanço, desta vez de um quarto de circunferência, mas torna a perdê-lo mais tarde, quando percorre a curva IV pelo lado exterior.

Uma vez que sabemos a distância entre as pistas (4 cm), podemos até calcular a vantagem de cada carro em cada curva:

Depois de percorrida a curva:	Vantagem do carro da pista a tracejado:
I	4π cm
II	6π cm
III	2π cm
IV	0

Como reagiram os alunos a este problema? A primeira reacção foi esquecerem-se das conclusões que tinham tirado anteriormente e «deixarem-se vencer» pela intuição. Assim, a maior parte dos alunos concluiu que era o carro da pista a tracejado que ganhava, pois conseguia um avanço maior nas curvas que descrevia pelo interior, uma vez que essas curvas tinham um perímetro superior àquelas que ele efectuava pelo lado exterior. A numeração das diferentes curvas, como fizemos anteriormente, ajudou a discussão do problema e, a partir daqui, os alunos assimilaram definitivamente as conclusões tiradas.

A forma das rodas do comboio

As rodas (de um e outro lado) de um comboio estão rigidamente ligadas a um único e resistente eixo. O número de rotações que uma roda efectua é pois exactamente o mesmo que a outra roda também efectua.

Quando o comboio descreve uma curva semi-circular como a da figura 8, a roda exterior descreve um trajecto mais longo que a roda interior. Como se explica então que ao fazer a curva o comboio não descarrile, demorando as duas rodas exactamente o mesmo tempo a percorrer trajectos de comprimentos diferentes?

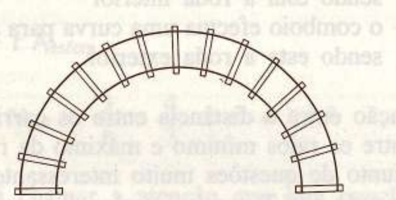


Fig. 7

Quando este problema foi discutido com os alunos, já tinham decorrido alguns meses de trabalho e, depois de muita insistência já todos tinham conseguido desenhar as rodas do comboio quase correctamente. Numa das escolas, um aluno conseguiu mesmo arranjar um desenho real das rodas, trazido por um familiar que trabalhava na Sorefame.

A figura 9 apresenta um esboço das rodas.

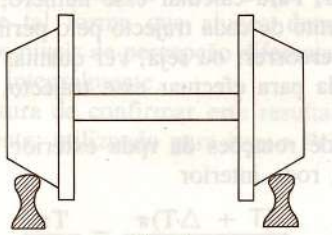


Fig. 8

Curiosamente, alguns alunos conseguiram por eles próprios e sem muita dificuldade, justificar esta forma das rodas. Alguns fizeram mesmo esquemas, no quadro, das várias posições em que a roda pode tocar o carril, consoante as curvas dadas pelo comboio.

Qual é então a ligação entre a forma das rodas do comboio e o modo como efectua as curvas? Para que as duas rodas, efectuando o mesmo número de rotações, consigam descrever, no mesmo tempo, trajectos de diferentes comprimentos, é necessário que não tenham as mesmas dimensões. A forma como são construídas possibilita que, em situações diferentes, a mesma roda tenha um raio diferente (o que se vai traduzir por uma alteração do seu perímetro).

A figura seguinte esquematiza três possíveis posições de contacto da roda com o carril.

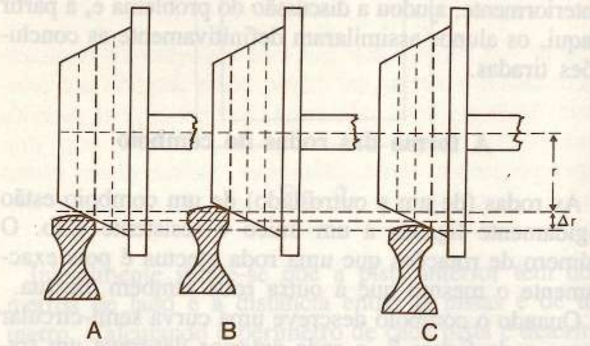


Fig. 9

(A) — o comboio desloca-se em linha recta

(B) — o comboio efectua uma curva para a direita, sendo esta a roda interior

(C) — o comboio efectua uma curva para a esquerda, sendo esta a roda exterior

A relação entre a distância entre os carris e a diferença entre os raios mínimo e máximo da roda suscita um conjunto de questões muito interessantes.

Designando por **T** o raio interior da curva semi-circular que o comboio pode descrever (fig. 9) e por $\triangle$**T** a distância entre os carris; designando ainda por **r** a medida mais pequena do raio da roda e por **r** + $\triangle$**r** a medida maior, pergunta-se: «Qual a relação matemática entre **T,** $\triangle$**T, r** e $\triangle$**r** ?».

Uma das possíveis resoluções:
distância percorrida pela roda exterior: $(T + \triangle T)\pi$
distância percorrida pela roda interior: $T\pi$

Sabemos que o número de rotações das duas rodas tem de ser igual. Para calcular esse número, basta dividir o comprimento de cada trajecto pelo perímetro da roda que o vai percorrer, ou seja, ver quantas vezes tem de rodar a roda para efectuar esse trajecto.

Assim:

Número de rotações da roda exterior = número de rotações da roda interior

$$\frac{(T + \triangle T)\pi}{2\pi\ (r + \triangle r)} = \frac{T\pi}{2\pi r}$$

resolvendo em ordem a T:

$$T = \frac{r \triangle T}{\triangle r}$$

Com base nesta relação e se soubermos as medidas de **r** e $\triangle$**r,** podemos facilmente calcular qual o menor raio da curva circular que o comboio pode descrever.

Podemos ainda discutir variadas questões, tais como:

— Quais seriam as modificações a fazer nas dimensões das rodas dos comboios se se aumentasse a distância entre os carris, pretendendo-se ainda que o comboio descreva curvas muito acentuadas?

— Porque será que os comboios que circulam em linhas sem curvas muito acentuadas apresentam uma menor inclinação nas rodas (ou seja, menor $\triangle$r)? Porque será que os carris desses mesmos comboios têm entre si uma distância muito superior à distância dos carris das linhas com curvas muito acentuadas? É notória a diferença entre a forma das rodas dos comboios e a distância entre os carris das linhas de Lisboa-Porto e da linha do Tua, por exemplo.

Estas e outras questões propiciam animadas discussões com os alunos, em que sempre surge a experiência de cada um no que diz respeito a viagens de comboio e que permitem discutir com exemplos muito concretos problemas de proporcionalidade directa e inversa, tema sempre difícil de apreender pelos alunos mais novos.

Como apreciação final da experiência de utilização destes problemas, podemos dizer que foi extremamente positiva. Os alunos verificaram como a «simples»fórmula do perímetro da circunferência tem tantas e tão importantes aplicações na vida diária. As discussões tidas nas aulas, a oportunidade que se lhes deu de formularem hipóteses, de as fundamentarem, de desafiarem a sua capacidade de observação, ajudou muitos alunos a interessarem-se mais pela disciplina, a adquirirem uma maior autoconfiança, a olharem «de outra forma» para aquilo que os rodeia, a terem mais confiança na utilidade da Matemática. Em suma, estes alunos melhoraram significativamente a sua pré-disposição para a aprendizagem.

No final das aulas, foi pedido a todos os alunos que escrevessem, numa folha branca não identificada, a sua opinião e crítica sobre o decorrer das aulas de Matemática desse ano lectivo. Curiosamente, alguns alunos referiram esta aplicação. A forma como o fizeram mostra que os aspectos positivos por nós apontados não lhes passaram despercebidos. Citamos em seguida dois extractos da opinião de dois alunos, que disso são exemplo:

«(...) percebi a matéria e fiquei ciente de que a posso utilizar no futuro, num curso que eu hei-de tirar ou numa aplicação na vida actual. Gostei das aulas e da matéria...»

« Penso que as aulas de Matemática foram criativas. O facto de se ter introduzido as fichas sobre as pistas de atletismo e os problemas da semana, quebrou a monotonia das aulas e fez-me interessar mais pela Matemática...»

Os colegas que quiserem adquirir as fichas de trabalho utilizadas nestas aulas, poderão pedi-las pelo correio...

Bibliografia:

Krause, F.E.(1982). Some applications of the Circunference formula. *Mathematics Teacher*, Vol 25, n.º 5

A Bola — volume e área duma esfera

José João Marques da Silva Henriques, Assistente de investigação do LNETI

A proposta a seguir apresentada tem como objectivo o estudo do volume e da área de uma esfera, através de actividades manipulativas e a partir dum tema bem conhecido de todos — A BOLA.

Estas actividades serão executadas em simultâneo por diferentes grupos que no final exporão à turma os resultados a que chegaram e a forma como o conseguiram.

A determinação do volume duma esfera irá ser feita a partir das seguintes actividades:

a) enchimento duma bola com um material (água, areia, etc.) cujo volume possa ser facilmente medido;

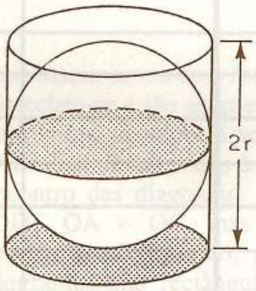
b) imersão duma bola maciça num recipiente graduado;

c) pesagem duma bola maciça cujo peso específico seja conhecido;

d) determinação do coeficiente de proporcionalidade entre o volume duma esfera e o do cilindro equilateral circunscrito.

Esta última actividade servirá para que os alunos «descubram» a fórmula que lhes permite determinar o volume de qualquer esfera, dado o raio.

Para isso irão trabalhar com uma esfera e com um cilindro cujo raio seja igual ao da esfera e cuja altura seja o dobro desse raio.



Ao colocarem a esfera dentro do cilindro cheio de água, cujo volume foi previamente medido, irão concluir que o volume de água deslocado é 2/3 do volume total inicial e portanto

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}\, V_{cilindro}$$

$$= \frac{2}{3}\,(\pi r^2 .\ 2r) = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

Para deduzir aquela fórmula iremos exactamente considerar a esfera dividida num grande número de pequenas «pirâmides». Para isso iremos imaginar que a superfície da esfera está dividida num grande número de pequenos polígonos. Salientar que efectivamente eles não são polígonos uma vez que não existem segmentos de recta numa superfície esférica, mas que quanto mais pequenos eles forem, tão mais próximos de polígonos eles estarão. Todas estas pirâmides irão ter o vértice comum que é o centro da esfera e altura igual ao raio da esfera. O volume de cada uma das pirâmides será $1/3\ A_b.r$. O volume da esfera será o somatório dos volumes das pirâmides.

$$V_{esfera} = \frac{1}{3}\,A_1.r + \frac{1}{3}\,A_2.r + \frac{1}{3}\,A_3.r + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\,r\,(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots)$$

A área da esfera será

$$A_{esfera} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

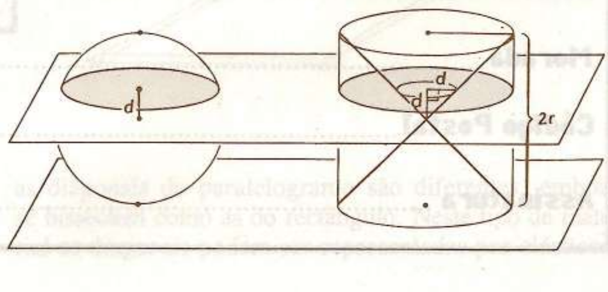
$$V_{esfera} = \frac{1}{3}\,r.A_{esfera}$$

$$A_{esfera} = \frac{3}{r}\,V_{esf} = \frac{3}{r}\,.\,\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = 4\pi r^2$$

Dever-se-á chamar a atenção que esta conclusão é obtida a partir dum raciocínio com base na intuição. Realçar, no entanto, que é possível através do cálculo deduzir aquela mesma fórmula sem ter que recorrer às aproximações aqui feitas.

Estas actividades, que proporcionarão um ambiente de aprendizagem em que os alunos irão explorar fisicamente objectos que os envolvem, terão que ter em atenção os diferentes estádios de desenvolvimento (etário, cognitivo, etc.), devendo-se portanto prever a hipótese de reformulação de algumas delas de modo a que possam ser apresentadas de tal forma que alunos duma mesma turma, apesar de níveis de percepção diferentes, as possam aproveitar integralmente.

Será então altura de confirmar este resultado obtido experimentalmente, utilizando para isso o Princípio de Cavalieri.

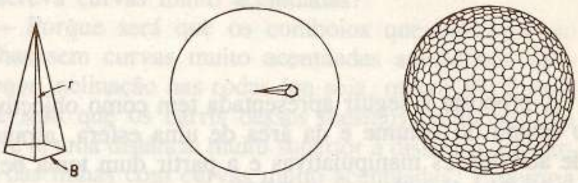


A actividade que se segue tem como objectivo intuir a fórmula que permite determinar a área duma superfície esférica.

Começar por observar várias bolas e ver como são constituídas as suas superfícies:

—bola de futebol — justaposição de pentágonos e hexágonos
—bola de basquetebol ou de praia — justaposição de fusos
—bola de voleibol — justaposição de quadriláteros

Uma proposta de actividade manual (a ser executada fora da aula de matemática e anteriormente à actividade que a seguir se propõe) seria a tentativa de construção de uma «esfera» a partir de pirâmides unidas pelo vértice.



Publicações e Programas de Computador
Envio pelo Correio

- as publicações e programas disponíveis são os que vêm anunciados **neste número da revista**, sob os títulos

  — *Publicações APM*
  — *Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Núcleo da FCUL.*

- fotocopie e **preencha** uma ficha (ver abaixo; utilize mais do que uma ficha se for necessário; note que o envio de software tem porte fixo).
- no caso de Software, não deixe de indicar, além do título, **a referência** (51, 52, etc.) respectiva e **a marca e modelo do computador** em que vai utilizar os programas.
- envie a ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome da **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

  Paulo Abrantes
  Faculdade de Ciências
  Av. 24 de Julho, 134 - 4.º
  1300 Lisboa

- escreva a indicação «pedido de publicações» no sobrescrito.

Títulos (publicações ou software)	nº de ex	custo unitário	custo publicações	custo software
		subtotais →		
Pedido feito na data	portes do correio	public. 15 %	+	
Nome	portes do correio	software fixo 120$00		+
Morada		totais parciais	(1)	(2)
Código Postal		valor total (1 + 2)	→	
Assinatura		Para uso da APM	Pedido rec. em / /	
		Ass.	Respondido em / /	

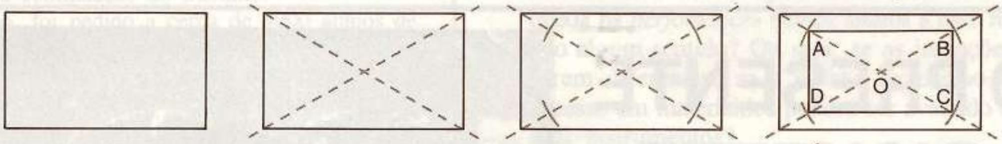
O desenho de figuras geométricas parece, como o próprio nome indica, ser um tema específico do Desenho, mas só se quisermos enganarmo-nos a nós próprios o devemos considerar como exclusivo da disciplina de Desenho. Bem sabemos que estão sempre presentes relações matemáticas no traçado de figuras geométricas. Basta lembrarmo-nos das construções de uma circunferência, dados o centro e o raio, ou da mediatriz de um segmento para vermos até que ponto os conceitos e relações matemáticas estão presentes.

Então porque será o desenho geométrico tantas vezes esquecido pelo professor de Matemática?

É verdade que muitas das relações geométricas presentes são bastante simples e por isso o próprio professor de Desenho pode indicá-las aos alunos. Assim, se de facto o objectivo do desenho de figuras geométricas é o da construção pura e simples, bem pode o professor de Matemática deixar que os seus alunos construam belas figuras e composições geométricas nas suas aulas de Desenho. Mas esta cómoda situação esconde um aspecto interessante: porque não utilizar o desenho de figuras geométricas para estudar as relações geométricas presentes?

Quantas não são as situações do desenho geométrico fundamentadas em relações geométricas? Qualquer um pode mecanizar a construção de um hexágono regular, mas todos sabemos que o fundamento dessa construção é puramente matemático. Esta é apenas uma das muitas situações que facilmente podemos encontrar no desenho de figuras geométricas.

Desenhar uma esquadria rectangular numa folha de papel.



Esta construção baseia-se em dois factos: as diagonais do rectângulo bissectam-se e são geometricamente iguais.

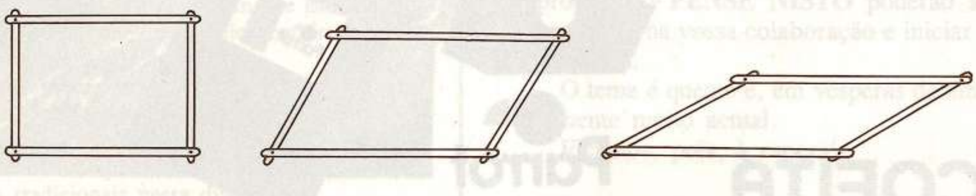
Pode-se discutir o que acontecerá se os quatros pontos A, B,C e D não estiverem todos à mesma distância do ponto de encontro das diagonais.

Se $\overline{OB} = \overline{OD}$; $\overline{OA} = \overline{OC}$ mas $\overline{OB} \neq \overline{OA}$, o quadrilátero será um paralelogramo, porque as diagonais do paralelogramo, não rectângulo, bissectam-se, mas não são geometricamente iguais.

Se os quatro segmentos obtidos, a partir do ponto O, forem todos geometricamente diferentes, o quadrilátero obtido não será paralelogramo.

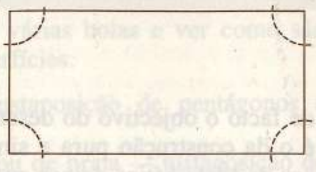
E se $\overline{OA} = \overline{OB}$; $\overline{OC} = \overline{OD}$ mas $\overline{OB} \neq \overline{OC}$?

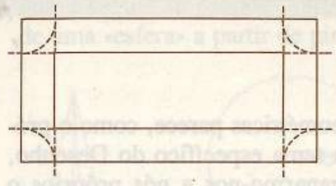
Algumas destas propriedades dos quadriláteros podem ser também exploradas utilizando quadriláteros móveis construídas com tiras de cartão e tachas.



Pode-se passar do rectângulo ao paralelogramo fazendo variar a relação entre as diagonais. No caso limite uma diagonal anula-se, pode assim mostrar-se que as diagonais do paralelogramo são diferentes, embora se bissectem como as do rectângulo. Neste tipo de material as diagonais podem ser representadas por elásticos.

Desenhar outro rectângulo, dentro da esquadria e a igual distância dela.





A nova questão deste problema é que, para manter a distância entre os dois rectângulos, as suas diagonais não podem coincidir. Assim, não pode ser aproveitada a ideia que permitiu a construção da esquadria rectangular. Podem-se pôr questões interessantes acerca da semelhança de rectângulos a partir destas construções.

Transformações afins... *(continuação)*

Penso tratar-se de lições muito participadas pelos alunos: a trigonometria ganha vida, passa-se, sem muito esforço, para as fórmulas tradicionais e muitos dos erros habitualmente cometidos desaparecem.

Este pequeno exemplo mostra as vantagens de um ensino integrado da Matemática: facilita-se a aprendizem dos conceitos, ganha-se tempo, dá-se a todos os alunos a oportunidade de ser «bom»... forma-se a personalidade global em lugar de compartimentar o seu cérebro.

PENSE NISTO

Em Novembro de 1987, é publicada no **Sunday Times** e assinada por Bruce Kemble, correspondente da área de Educação, uma pequena *notícia:*

Maths standards slump (*)

Um relatório recente, revelando uma nítida queda na perfomance dos alunos em Matemática, responsabiliza a abolição das *grammar schools* e o ensino da Matemática Moderna pelo referido declínio.

O estudo realizado pelo *National Foundation for Educational Research*, comparando o aproveitamento *(achievement)* de alunos do 3.º grau (13-14 anos) em 1964 com o de alunos do mesmo grau em 1981, assustou e deprimiu os educadores.

Eles esperavam que os alunos em 1981 obtivessem resultados marcadamente melhores do que os que foram testados 17 anos antes. Isto em virtude da mudança nos métodos de ensino e do aumento das verbas. Em vez disso, o estudo mostrou uma queda de 8% na média das pontuações das crianças.

Embora o relatório original estivesse completo em Março de 1983, o *Department of Education and Science* ficou tão preocupado com as conclusões que foi pedida a continuação do trabalho.

No estudo, foi pedido a cerca de 4000 alunos de 13-14 anos de idade, em 400 escolas inglesas e galesas, que resolvessem 37 problemas matemáticos. Em 29 dessas questões, os alunos de 1981 fizeram pior que os seus colegas de 1964. Apenas numa única questão, as crianças de 1981 conseguiram um maior número de respostas correctas.

Dezassete anos atrás, 75% das crianças testadas conseguiram calcular (22 × 18) — (47 + 59), dando a resposta 290. Em 1981 apenas 65% conseguiram fazê-lo correctamente. Uma simples soma como 2/5 + 3/8 (*resposta:* 31/40) derrotou 58% dos alunos em 1981 o que aconteceu apenas com 37% em 1964.

Actualmente, peritos em educação estão a pôr em questão a eficiência da instrução (schooling) compreensiva e o ensino da Matemática Moderna.

As aulas tradicionais de Matemática centram-se, simplesmente, no ensino do cálculo às crianças. A abordagem moderna, todavia, procura fazer com que os alunos compreendam como se chega às respostas pretendidas. Os matemáticos pensavam que isto iria ajudar as crianças; em vez disso, pelo contrário, parece que confundiu muitas delas.

Em 1964 existiam 1189 *grammar schools* e era ensinada pouca Matemática Moderna nas escolas secundárias. Por alturas de 1981 existiam apenas 200 *grammar schools* e apenas um terço dos alunos recebiam aulas tradicionais nessa disciplina.

As críticas à Matemática Moderna não são de hoje. Além disso, é ser-se, pelo menos, simplista, lançar-lhe todas as *culpas* pelo *insucesso* em Matemática. Por outro lado, são diversas as perspectivas alternativas para o ensino da Matemática e não apenas a que se percebe pelas palavras de B. Kemble: por detrás dos números de um relatório e acenando com as críticas de peritos em Educação ao *ensino da Matemática Moderna* e à *instrução compreensiva*, defende-se o regresso às aulas *que se centram simplesmente no ensino do cálculo às crianças.*

Não conheço o relatório mencionado mas, sem querer adiantar muito mais, o que apetece mesmo perguntar a propósito do que se pressente ao ler a dita notícia, é:

1. Aos alunos, submetidos ao estudo referido, foi pedido que respondessem a 34 *problemas* matemáticos. Serão estes *problemas* do tipo dos que foram escolhidos pelo autor da notícia para explicitar a *desgraça*? Ter sucesso em matemática é, então, *acertar as contas?*

2. Imaginemos que deixamos de ensinar fracções. Imaginemos também que, passados 10 anos, alguém realiza um estudo sobre sucesso em matemática utilizando questões onde intervêm fracções. Por certo muitos alunos falharão nessas questões e notar-se-á «uma nítida queda na *perfomance*» desses alunos a esse respeito. Terá isto algum sentido? Ou seja, se as intenções educativas forem diferentes, se a ênfase no ensino for outra, o sucesso em matemática poderá ser avaliado com os mesmos instrumentos?

3. Muito provavelmente, naturalmente até, os alunos referidos no estudo pioraram a sua *perfomance* no cálculo com números inteiros e com fracções. Não terão, no entanto, esses alunos melhorado em nada? Não terão aprendido *outras coisas* em Matemática, hoje talvez mais importantes?

....

Outras perguntas se poderiam fazer...

Pensem nisto e depois... escrevam. Escrevam sobre o que aqui se disse, sobre as questões que se levantaram, sobre outras questões a este respeito.

Escrevam um parágrafo, meia página, duas folhas e façam-nos chegar o resultado das vossas reflexões. O(s) próximo(s) **PENSE NISTO** poderão ser constituídos com base na vossa colaboração e iniciar assim um ciclo diferente.

O tema é quente e, em vésperas de uma reforma, certamente muito actual.

Ficamos, pois, à espera!

(*)Este título é de difícil tradução. Poder-se-á escrever, talvez não muito bem: «O afundar dos padrões em Matemática». Uma fotocópia do recorte com esta notícia chegou-me através dos alunos de Metodologia da Matemática.

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

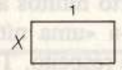
ABRIL

				1	2
4	5	6	7	8	9

FÉRIAS DA PÁSCOA

11

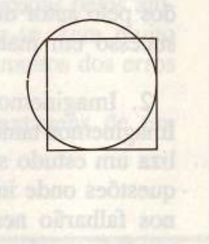
Calcule x de modo que seja possível dividir, com uma recta vertical, o rectângulo dado num quadrado e num rectângulo semelhante ao primeiro.



12

1852. *Carl Louis von Lindermann*, demonstrou que, utilizando a geometria Euclidiana, é impossível construir um círculo e um quadrado com a mesma área.

13



14

Um pedaço de papel com forma quadrada é dobrado ao meio. Se a figura resultante tiver 12 cm de perímetro, qual é a área do quadrado original?

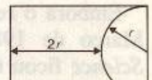
15

1707 *Leonhard Euler*, provou que nos poliedros convexos:

$$F + V = A + 2$$

16

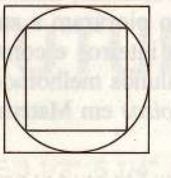
Qual é a área da zona sombreada do rectângulo? (A parte não sombreada é um semicírculo).



18

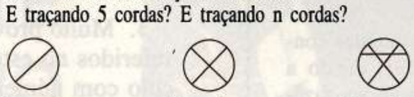
Qual é a razão entre a área do quadrado circunscrito e a área do quadrado inscrito, no mesmo círculo?

19



20 **21**

Qual é o número máximo de zonas que se podem obter num círculo traçando 4 cordas? E traçando 5 cordas? E traçando n cordas?

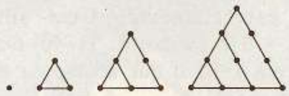


1 corda 2 zonas — 2 cordas 4 zonas — 3 cordas 7 zonas

22 **23**

Os números triangulares são 1, 3, 6, 10, 15... Escreva uma fórmula que lhe permita calcular o n-ésimo n.º triangular.

Faça o mesmo estudo para os números quadrados e pentagonais.

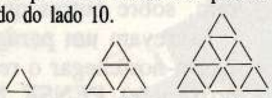


25

FERIADO

26 **27**

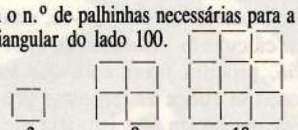
Descubra o n.º de palhinhas necessárias para a construção quadrado do lado 10.



4 palhinhas — 12 palhinhas — 24 palhinhas

28 **29**

Descubra o n.º de palhinhas necessárias para a construção triangular do lado 100.



3 palhinhas — 9 palhinhas — 18 palhinhas

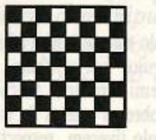
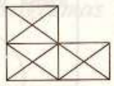
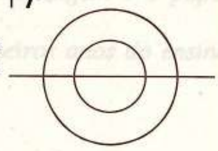
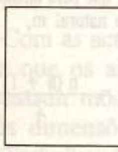
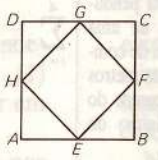
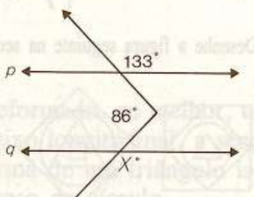
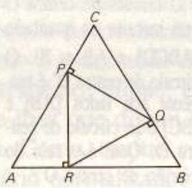
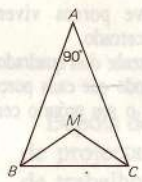
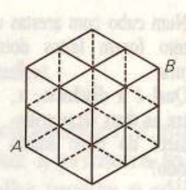
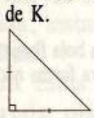
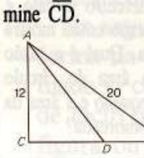
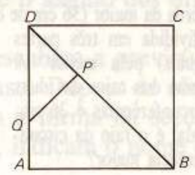
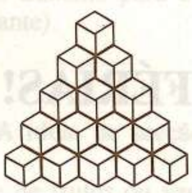
30

Descubra 2 configurações, uma triangular e outra quadrada, que necessitem do mesmo número de palhinhas.

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

MAIO

2 Quantos quadrados existem num tabuleiro de xadrez?	**3** 	**4** Quantos triângulos existem na figura? 	**5**	**6** Desenhe esta figura sem levantar a caneta ou atravessar uma linha.	**7** 
9 Divida este quadrado em quatro figuras geometricamente iguais de 5 maneiras diferentes. 	**10** Um arame com 8 cm de comprimento deve ser cortado em três bocados para serem usados como lados de um triângulo. Se as medidas dos comprimentos dos três bocados forem números inteiros, qual é o comprimento do menor lado?	**11** A área do quadrado [ABCD] é 100 cm^2. E e F são os pontos médios dos lados [AB] e [BC] respectivamente. Qual é a área do quadrado [EFGH]? 	**12**	**13** Na figura, p//q e as amplitudes dos ângulos estão indicadas em graus. Determine x. 	**14**
16 Cada um dos lados do triângulo equilátero [PQR] é perpendicular a um lado do triângulo [ABC]. Se $\overline{PQ}$ = 6 cm, qual é a área do triângulo [ABC]? 	**17**	**18** A amplitude de um dos ângulos de um triângulo é 40°. Qual é a amplitude do ângulo formado pelas bissectrizes dos outros dois ângulos?	**19** 	**20** Quantos trajectos diferentes de 6 segmentos, existem para ir de A para B?	**21** 
23 Se a medida do perímetro de um triângulo rectângulo isósceles é 2 K determine a sua área em função de K. 	**24** O quadrado da figura tem 8 cm de lado. Determine a área da zona sombreada.	**25** 	**26** No triângulo [ABC], se $\overline{AD} = \overline{DB} + 8$, determine $\overline{CD}$. 	**27** No quadrado [ABCD], $\overline{BP} = \overline{AB}$. Se a medida da área do quadrado é 4 e [QP] é perpendicular a [DB], determine a área do triângulo [DPQ].	**28** 
30 Esta torre foi construída com 35 cubos em 5 degraus. Quantos cubos são necessários para construir uma torre semelhante com 10 degraus?	**31** 				

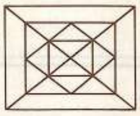
DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

JUNHO

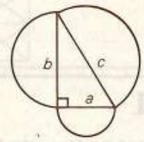
1

Quantos triângulos existem na figura?



2 **3**

Qual é a área do semi-círculo traçado sobre a hipotenusa do triângulo rectângulo, se as áreas dos semi-círculos traçados sobre os catetos do triângulo tiverem, respectivamente, 100 e 64 unidades de área?



4

Construa, em papel, uma figura com a forma de um triângulo equilátero.

Dobre a figura de modo que os vértices se encontrem no centro.

Que figura se obtém?

6 **7**

Desenhe a figura seguinte na sequência:

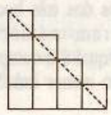
8

Um quadro com 3 m de comprimento está pendurado no centro de uma parede com 19 m de comprimento. Quantos metros dista o fim da parede do canto mais próximo do quadro?

9 **10**

Explique como é que a figura ilustra que:

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = \frac{4\,(4+1)}{2}$$



11

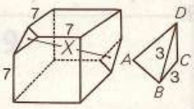
Usar uma figura para mostrar que para qualquer número natural m,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

13 **14**

Num cubo com arestas de 10 unidades de comprimento foram feitos dois cortes como mostra a figura.

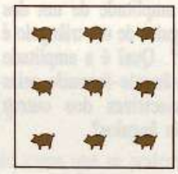
Qual é a distância, x, entre as duas faces triangulares do novo sólido obtido?



15 **16**

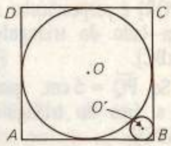
Nove porcos vivem num cercado.

Desenhe dois quadrados de modo que cada porco tenha o seu próprio cercado.



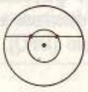
17 **18**

O círculo de centro O está inscrito no quadrado [ABCD] e $\overline{AB}$ = 10. O círculo de centro O' é tangente aos lados [AB] e [BC] e ao círculo de centro O. Qual é o raio do círculo de centro O'?



20 **21**

Duas circunferências concêntricas são tais que uma corda da maior (36 cm de comprimento) é trissectada (dividida em três partes iguais) pela menor. A soma dos raios das duas circunferências é 36 cm. Qual é o raio da circunferência maior?



22 **23**

Dois círculos com raios de 2 e 3 cm são tangentes externamente.

Um terceiro círculo é circunscrito como mostra a figura. Qual é a razão entre a área do círculo mais pequeno e a área da zona sombreada?

24 **25**

Uma bola flutuava num lado quando o lago gelou. A bola foi retirada (sem partir o gelo), deixando um buraco com 24 cm de diâmetro e 8 cm de profundidade.

Qual era o raio da bola?

Nota: parte-se do princípio que a bola flutuava com o seu centro acima da água. Doutra forma não poderia ser retirada sem partir o gelo.

27

Qual o perímetro de um polígono regular, cujo lado mede 8 cm, e em que cada ângulo externo mede menos 10º que 1/6 do ângulo interno?

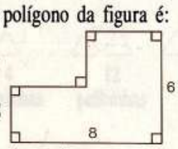
28 **29**

O perímetro do polígono da figura é:

A) 14 B) 20

C) 28 D) 48

E) Não é possível determinar a partir da informação dada.



BOAS FÉRIAS!

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

Para este número seleccionámos

O artigo escolhido para este número da revista saiu no Arithmetic Teacher de Março do corrente ano.
O seu autor, William Carrol, é, actualmente, professor de Matemática da Escola Secundária Roosevelt de Chicago, mas foi, durante muito tempo, professor da escola elementar e, mesmo, do nível pré-escolar. Foi, provavelmente, a experiência anterior que o sensibilizou para a importância da manipulação na aprendizagem e o papel atribuído, neste trabalho, à manipulação como forma de validar previsões anteriores.
Pensamos que as actividades propostas se adequam perfeitamente aos nossos alunos dos primeiros anos do ensino secundário, embora este tópico só apareça nos programas do 9.º ano de escolaridade.

Seccionando Sólidos de Plasticina

William M. Carrol

Com as actividades que a seguir se propõem pretende-se que os alunos atinjam os seguintes objectivos: (1) construir modelos de sólidos geométricos; (2) pensar em três dimensões; (3) desenvolver vocabulário.

Trabalhando individualmente, os alunos começam por construir, com plasticina, modelos de sólidos geométricos. De seguida, tentam visualizar o que acontece quando um sólido é seccionado, a partir de uma posição particular e segundo determinado ângulo. O tipo de sólido e a forma como é seccionado determinam a figura plana resultante — trapézio, elipse, etc. E, mais importante ainda, pede-se-lhes que digam o nome ou descrevam a secção obtida. Como, muitas vezes, os alunos não dispõem do vocabulário normalizado, precisam de o descobrir ou desenvolver um vocabulário próprio, se bem que adequado.

Complementarmente aos três objectivos enunciados, os alunos ganham experiência na formulação de hipóteses e na validação das mesmas — os alunos prevêem a forma da figura a obter por secção do sólido e, de seguida, testam as suas previsões seccionando, de facto, o sólido.

Para estas actividades são necessários os seguintes materiais: plasticina, uma ferramenta para seccionar os sólidos (um arame preso, pelas extremidades, a dois cabos) e folhas de trabalho para os alunos (dá-se um exemplo mais adiante).

A ideia de secção

Imaginar o corte de frutos ou vegetais prepara estas actividades e permite introduzir a ideia de secção. A maior parte dos alunos consegue visualizar a forma das secções obtidas ao cortar uma cenoura (uma cenoura perfeita, logo imaginária). Se o corte se faz perpendicularmente ao eixo longitudinal da cenoura, a secção tem a forma de um círculo; se se tratar, ainda, de um corte transversal, mas agora oblíquo relativamente ao mesmo eixo, a secção é um círculo deformado, ou melhor, uma elipse. Se o corte contém o eixo longitudinal, a secção tem, aproximadamente, a forma de um triângulo isósceles em que a base é um arco de círculo.

No caso de uma laranja, a secção terá sempre a forma de um círculo, embora de tamanho variável consoante o local em que o corte é feito.

Prevendo os resultados

Depois do corte imaginado de frutos ausentes, é altura de projectar um acetato que reproduz a primeira folha de trabalho. A figura no topo da folha mostra o sólido que os estudantes têm de construir; as linhas a tracejado representam as arestas não visíveis. A primeira coluna da folha de trabalho mostra várias vezes o sólido com setas que indicam a direcção e o ângulo dos diferentes cortes.

Na segunda coluna, os alunos desenham a previsível forma da secção obtida em cada caso. Depois de efectuado o corte, os alunos desenham a forma da secção de facto obtida e, na última coluna, indicam o nome da figura ou descrevem-na.

Seccionando os sólidos

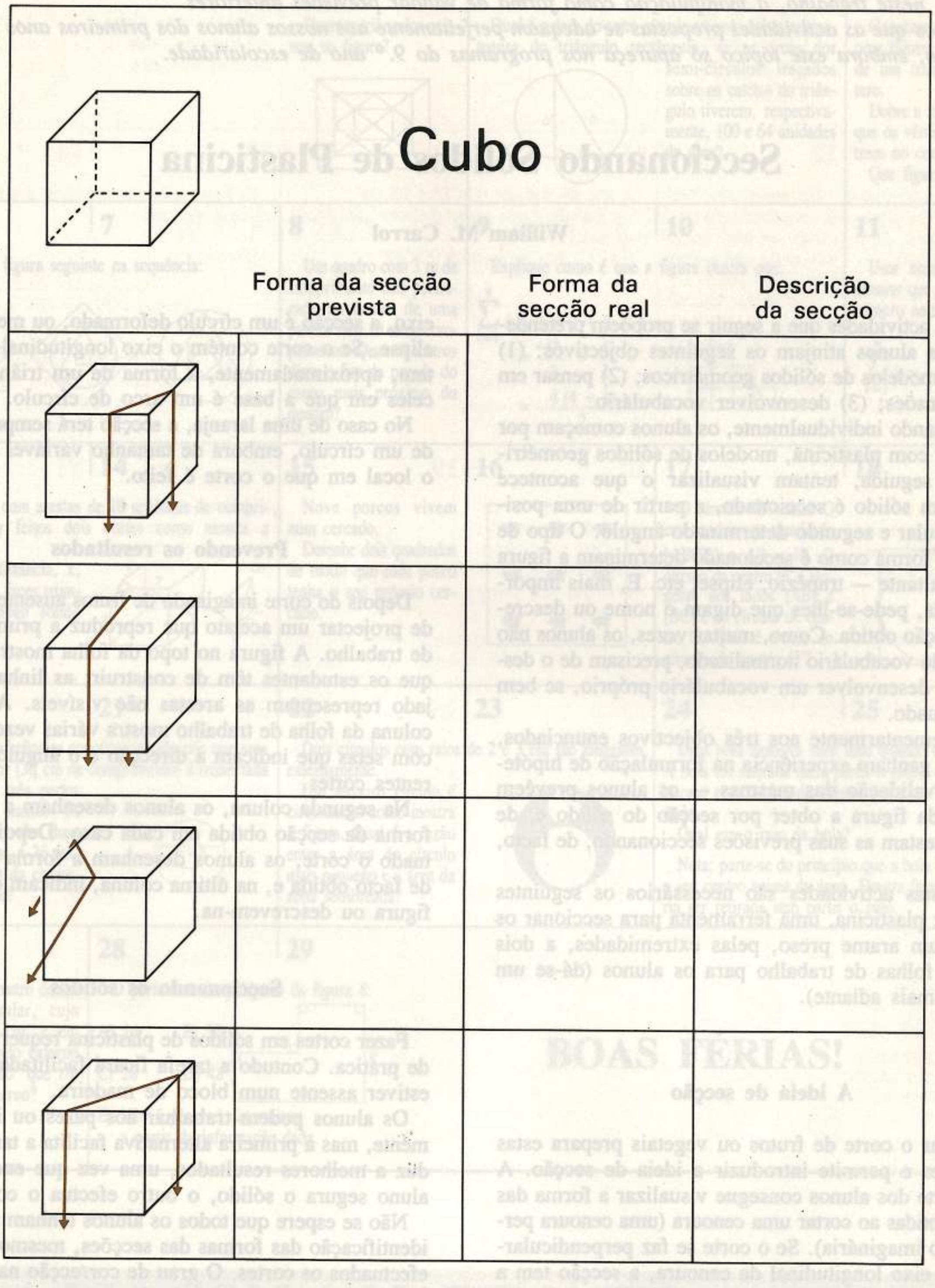
Fazer cortes em sólidos de plasticina requer um pouco de prática. Contudo a tarefa ficará facilitada se aquele estiver assente num bloco de madeira.

Os alunos podem trabalhar aos pares ou individualmente, mas a primeira alternativa facilita a tarefa e conduz a melhores resultados, uma vez que enquanto um aluno segura o sólido, o outro efectua o corte.

Não se espere que todos os alunos tenham sucesso na identificação das formas das secções, mesmo depois de efectuados os cortes. O grau de correcção na visualização das formas, na execução do corte e na identificação ou descrição das figuras depende das capacidades e do interesse dos alunos. No entanto, espera-se que, com a realização destas actividades, todos os alunos se desenvolvam no sentido da consecução dos objectivos enunciados.

Tradução e adaptação de
Leonor Moreira

Nota da tradutora: Por falta de espaço, junta-se, apenas, uma folha de trabalho. Com base nesta, outras poderão ser elaboradas envolvendo modelos de sólidos como o cilindro, o cone, pirâmides, prismas e, mesmo, o toro.



Extraído de *Arithmetic Teacher*
Reprodução autorizada pelo NCTM

Pode o Logo ser um hidragogo para o pedagogo?

```
to investiga :la1 :ang1 :la2 :ang2
repeat 2[fd :la1 rt :ang1 fd :la2 rt :ang 2]
end
```

A par de algumas potencialidades já reconhecidas, o Logo pode também ser usado como instrumento para suporte de actividades de investigação a nível do Ensino Básico.

Com base no procedimento acima definido, podem ser estudados os paralelogramos, analisando os valores das variáveis, quando queremos representar os diversos tipos de paralelogramos.

A primeira dificuldade a ultrapassar será a da construção de um polígono, só possível quando a soma de :ang1 com :ang2 for 180 º, o que corresponde a uma rotação total de 360 º (soma dos ângulos externos e soma dos ângulos internos de um paralelogramo). Da análise da orientação da tartaruga, pode concluir-se que os lados opostos são paralelos. O desenho de rectângulos (:ang1 = :ang2 = 90 º), de losangos (:la1 = :la2) e de quadrados (conjunção das condições anteriores) conduzem ao conceito de cada um destes tipos de polígonos.

Para que a investigação não acabe repito: «Pode o Logo...?»

Fernando Nunes
E.P. Brandoa

Ainda os Fractais!...

Para obter, em Logo, o membro mais simples da família dos flocos de neve podemos utilizar o seguinte procedimento

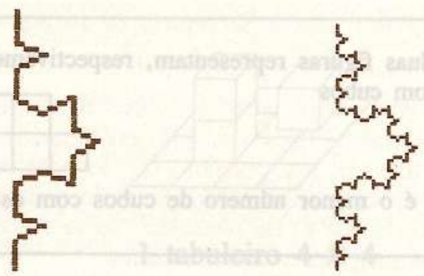
```
to flo :d
fd :d/3 rt 60
fd :d/3 lt 120
fd :d/3 rt 60
fd :d/3
end
```

Este procedimento, aliado à ideia de recursividade, é utilizado, de seguida, nos procedimentos que permitem construir os membros de ordem superior da mesma família

```
to flo2 :d
flo :d/3 rt 60
flo :d/3 lt 120
flo :d/3 rt 60
flo :d/3
end
```

```
to flo3 :d
flo2 :d/3 rt 60
flo2 :d/6 lt 120
flo2: d/6 rt 60
flo2: d/3
end
```

com os resultados seguintes:

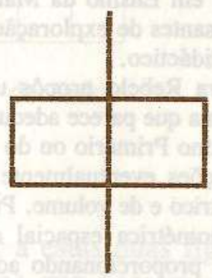


A família completa pode-se, ainda, obter com um único procedimento recursivo, mais compacto, onde a variável **k** define a ordem do membro. Para **k** **=0**, o procedimento desenha, apenas, um segmento de recta, aliás, o ponto de partida de qualquer família de fractais.

```
to flocos :k :d
if :k = 0 [fd :d stop]
flocos :k-1 :d/3 rt 60
flocos :k-1 :d/3 lt 120
flocos :k-1 :d/3 rt 60
flocos :k-1 :d/3
end
```

O módulo que dá origem à curva de Peano pode ser construído com o procedimento **PEA:**

```
to pea :d
fd :d/3 rt 90
fd :d/3 lt 90
fd :d/3 lt 90
fd :d/3 lt 90
fd :d/3 rt 90
fd :d/3 rt 90
fd :d/3 rt 90
fd :d/3 lt 90
fd :d/3
end
```



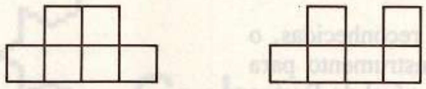
Para desenhar os vários membros da família da curva de Peano, podemos, analogamente, construir um procedimento compacto, **PEANO**, onde **k** define, mais uma vez, a ordem dos diferentes membros desta família.

(cont. pág. 36)

Materiais para a aula de Matemática

O ponto de partida para a sugestão apresentada neste número foi o problema seguinte:

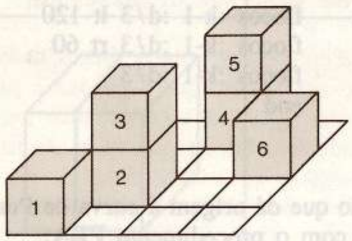
As duas figuras representam, respectivamente, a «vista da frente» e a «vista de lado» de uma construção feita com cubos



Qual é o menor número de cubos com os quais a construção podia ter sido feita?

Este problema apela claramente à intuição geométrica espacial e tem o aliciante de poder ser proposto a alunos de qualquer idade, visto que a sua resolução não requer praticamente conhecimentos anteriores. Por outro lado, podem ser apresentadas várias *soluções*, consoante as condições adicionais que se estabeleçam e pode-se discutir qual será a *melhor solução* sob determinadas condições.

Uma resposta indicando 6 cubos pode ser ilustrada da forma seguinte:



Duas estudantes de Lisboa, do último ano da licenciatura em Ensino da Matemática, propuseram formas interessantes de exploração deste problema do ponto de vista didáctico.

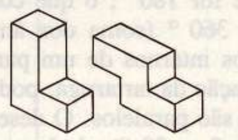
Alzira Rebelo propôs uma exploração didáctica do problema que parece adequada para alunos da última fase do Ensino Primário ou do Ensino Preparatório. As únicas noções eventualmente envolvidas são as de sólido geométrico e de volume. Pretende-se desenvolver a intuição geométrica espacial e a ideia de volume de um sólido, proporcionando ao mesmo tempo uma sequência orientada de actividades de resolução de problemas.

Os materiais e a ficha de trabalho que sugerimos na página ao lado constituem uma adaptação da referida proposta.

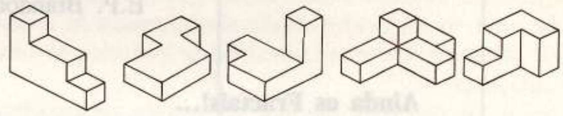
A propósito do mesmo problema, Fernanda Milheiro sugere uma outra sequência de actividades, envolvendo:

(a) construções com cubos e desenhos representativos dessas construções; construções de acordo com «planos» previamente fornecidos (incluindo o problema original);

(b) problemas de construções de «puzzles» de duas



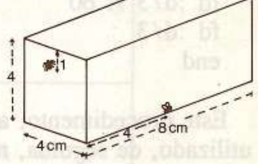
peças e discussão de questões como: quantos modelos diferentes é possível criar? que relação haverá entre as áreas e os volumes (descobrir sólidos com o mesmo volume e áreas diferentes)?

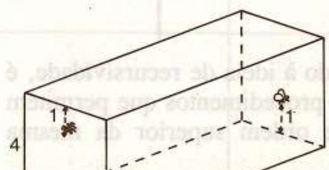


(c) problemas de minimização de distâncias, resolúveis por planificação de sólidos.

Exemplo: a aranha quer apanhar a mosca seguindo o caminho mais curto.

Versão 1

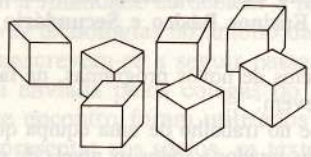




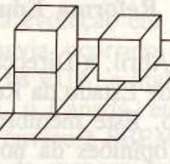
Versão 2

Enquanto as actividades referidas em (a) e (b) são recomendadas para o Ensino Preparatório, os problemas apresentados em (c) são sugeridos para o 8.º ano de escolaridade.

Construções com cubos...



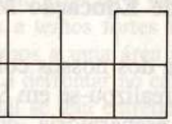
32 cubos 1 × 1 × 1



1 tabuleiro 4 × 4

1. Considerando, como unidade de volume, o volume de um cubo, constrói um modelo de um sólido geométrico com volume 12. Desenha uma «vista de frente» e uma «vista de lado» da tua construção.
2. Constrói dois modelos de sólidos geométricos diferentes que tenham o mesmo volume. Desenha uma «vista de frente» e uma «vista de lado» de cada uma dessas construções.
3. As figuras seguintes representam a «vista de frente» e a «vista de lado» de uma construção com cubos

«vista de frente»



«vista de lado»

Constrói um modelo de um sólido geométrico que possa corresponder a estas duas figuras ao mesmo tempo. Que volume tem esse sólido? Há outros sólidos que possam ser representados pelas mesmas figuras? Qual será o menor volume possível?

4. Faz uma construção que tenha a mesma «vista de frente» e a mesma «vista de lado», utilizando o menor número possível de cubos.
(Nota que agora não se pretende o modelo de um sólido geométrico mas sim uma construção livre em que podem entrar vários sólidos).

Entrevista com o Secretário de Estado da Reforma Educativa

No dia 20 de Abril, a Direcção da APM foi recebida pelo Secretário de Estado da Reforma Educativa, Prof. Carrilho Ribeiro. Este membro do Governo procurou assim ouvir as opiniões da nossa Associação sobre a reforma curricular e, em particular, sobre a elaboração dos novos programas de Matemática.

A delegação da APM teve oportunidade de relatar o trabalho que a Associação tem vindo a desenvolver no âmbito da renovação do ensino, destacando o Seminário de Vila Nova de Milfontes e o Profmat-88 como momentos privilegiados de um intenso debate a que tem dedicado a maior atenção. Deu também a conhecer os documentos produzidos que são, por agora, materiais de estudo entre os sócios da APM e, em geral, entre os professores de Matemática.

Sobre a metodologia para a elaboração, experimentação e aprovação de novos programas para a nossa disciplina, a Direcção da APM entregou ao Secretário de Estado um documento que traduz algumas preocupações face às informações disponíveis acerca do que vai seguir-se. Este documento, que constitui um conjunto de posições de princípio, transcreve-se ao lado na íntegra.

I Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática

Por iniciativa dos nossos colegas da associação andaluza «Thales», realizou-se em Sevilha, no dia 3 de Maio, uma reunião preparatória do 1.º Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática que deverá ter lugar naquela cidade espanhola, no fim do Verão de 1990. A reunião contou com a presença de elementos da Andaluzia, Brasil e Portugal. Vão agora ser formados os diversos comités necessários à organização desta importante iniciativa.

O projecto em marcha aponta para a realização regular de Congressos para os quais serão convidados os professores de Matemática de Portugal, Espanha e de todos os países da América Latina, a realizar de quatro em quatro anos, alternadamente na Europa e na América. Assume-se que existem fortes laços históricos e culturais e muitos problemas comuns que justificam uma aproximação entre os países desta área (os Congressos terão, como línguas oficiais, o português e o castelhano).

Nos próximos números, «Educação e Matemática» voltará a referir-se a esta iniciativa.

A Renovação dos Programas de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário

1. Os projectos de novos programas, na fase da sua elaboração, devem:

(a) basear-se no trabalho de uma equipa que integre elementos ligados a todos os níveis de ensino, do Primário ao Superior, de forma a assegurar-se a coerência das suas orientações globais e uma adequada articulação vertical;

(b) beneficiar da consulta, feita em tempo oportuno, a individualidades ou organizações representativas de diversos sectores ligados ao ensino, à investigação e à utilização da Matemática;

(c) beneficiar ainda de contactos com equipas responsáveis pela elaboração de programas de outras áreas disciplinares de forma a assegurar-se, nos vários níveis de ensino, uma adequada articulação horizontal.

2. Os projectos de novos programas, depois de elaborados, devem ser objecto de discussão pública, nomeadamente entre os professores de Matemática. Deste processo deverá resultar uma segunda versão pública dos projectos.

3. Os projectos de novos programas devem ser inicialmente implementados em turmas experimentais, de uma forma devidamente programada e avaliada. Deste processo deverá resultar a redacção dos programas, pelo que deverá decorrer pelo menos um ano lectivo entre o final do processo de experimentação e a adopção oficial dos novos programas.

A Direcção da APM, que vem defendendo a absoluta necessidade de uma profunda renovação do ensino da Matemática, e em particular dos programas que vigoram, há cerca de 15 anos, adverte no entanto para o perigo que pode constituir a pressa em generalizar a todo o país novos programas sejam quais forem os motivos invocados. Um trabalho sério e profundo exige tempo, para que haja uma discussão alargada, para que os resultados dos processos experimentais sejam devidamente considerados — não só na redacção dos programas mas também na elaboração de manuais escolares e outros materiais de apoio — e para que os professores assumam a sua própria formação no quadro do seu envolvimento directo em todo o processo. Abdicar de algumas destas etapas não significaria economizar tempo. Pelo contrário, significaria desperdiçar uma oportunidade rara de transformar o ensino da Matemática de uma forma compatível com a importância que a formação matemática tem para a vida dos cidadãos e para a sociedade.

Lisboa, 18 de Abril de 1988

A Direcção da
Associação de Professores de Matemática

APM-Porto: Discutindo a Reforma

O núcleo do Porto da APM realizou no dia 14 de Maio um encontro, na Escola Secundária de Padrão da Légua «com a finalidade de debater a reforma curricular e as novas tecnologias no âmbito da Reforma Educativa». Transcrevem-se a seguir passagens da notícia que nos foi enviada pelos colegas do Porto:

«Para este encontro foram utilizados como trabalho de base a apresentar aos sócios, os textos provenientes do Seminário realizado em V.N. Milfontes. (...) A implementação da reforma constituiu a preocupação dominante para a maioria dos professores participantes neste encontro. Questionou-se o projecto de gestão das escolas, o tipo de autonomia, a regionalização, como aspectos determinantes da alteração do sistema de ensino, que na opinião generalizada dos professores estão pouco claros e definidos. Concluiu-se que uma alteração curricular profunda do Ensino da Matemática só se deve realizar tendo em vista o tipo de Escola em que se vai inserir.

Assim como os novos programas, os novos manuais devem ser experimentados em fases piloto que contemplem diferentes regiões e diferentes modelos, em escolas com uma nova estrutura de gestão e de autonomia. Só depois de uma avaliação desta fase piloto é que será possível realizar uma reforma global que contemple todas as áreas da Escola.» (...)

Depois de referirem aspectos sociais e de condições das escolas que não podem desligar-se do sucesso ou insucesso de qualquer reforma educativa, os nossos colegas concluem questionando a preparação e motivação dos professores para a mudança:

«Qual o eco que poderá ter uma reforma em professores para quem leccionar Matemática é um emprego mal remunerado e não um trabalho?

A difusão das novidades e experiências chega à província? Que avaliação? Quais os critérios? Avaliação para quem? Professores e alunos?»

Criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática

No passado dia 27 de Janeiro, durante o 2.º Encontro nacional de Educação Matemática, que se realizou em Maringa, no Estado de Paraná, foi formalmente constituída a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). A criação da SBEM, que contou com 1200 sócios fundadores de todos os Estados do Brasil e de todos os níveis de ensino, representa um importante passo em frente no processo de renovação do Ensino da Matemática no Brasil.

A nova associação, a SBEM, corresponde à nossa APM. No Brasil, existem ainda a Sociedade Brasileira de Matemática e a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (que, de resto, estiveram representadas no Encontro atrás referido). A criação da SBEM é um novo facto revelador da existência, em diversos países, de movimentos geradores de associações de professores voltadas para os problemas do ensino, aprendizagem e investigação educacional em Matemática — veja-se a evolução em Espanha e... em Portugal. O mesmo havia ocorrido aliás, há muito tempo, em países como os EUA, a Inglaterra, a França, a Alemanha, a Bélgica, o Canadá, etc.

A Direcção da APM enviou à SBEM (conjuntamente com algumas propostas de cooperação) a saudação que a seguir se transcreve.

Queridos colegas:

Ao tomarmos conhecimento da criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), não podemos deixar de vos saudar e de vos oferecer toda a nossa solidariedade e colaboração.

A Associação de Professores de Matemática (APM) foi criada em Setembro de 1986 e conta hoje com cerca de um milhar de sócios de todos os distritos do país e representando todos os níveis de ensino. A APM nasceu da necessidade de responder de forma colectiva e organizada aos novos e complexos problemas que o ensino e aprendizagem da Matemática colocam no nosso país e, quer o apoio que tem merecido da parte dos professores de Matemática, quer a crescente influência que vem exercendo na área da Educação Matemática mostram, hoje, a justeza da decisão tomada há menos de dois anos.

Temos procurado acompanhar o movimento de renovação na área da Educação Matemática que se tem desenvolvido no Brasil. Embora a APM tenha hoje relações com associações congéneres de diversos países, seguimos com um interesse muito especial o vosso trabalho. Falamos a mesma língua e temos fortes laços históricos e culturais. Pertencemos a uma área internacional que tem desafios comuns a defrontar no campo da Educação Matemática, no qual se têm entretanto registado avanços notáveis nos últimos anos. O movimento recente, não só no Brasil e em Portugal, mas também em Espanha e em diversos países da América Latina, são indícios reveladores desse facto — como o é igualmente o próprio projecto de criação dos Congressos Ibero-Americanos de Educação Matemática.

Estamos certos que a criação da SBEM constitui um passo extremamente importante no processo de renovação do Ensino da Matemática no Brasil, susceptível ao mesmo tempo de contribuir para o reforço desse movimento mais geral. Por todas as razões apontadas, em nome dos professores e investigadores portugueses ligados à área da Educação Matemática, a Direcção da APM envia-vos os mais calorosos votos de sucesso.

Lisboa, 18 de Abril de 1988

A Direcção da
Associação de Professores de Matemática

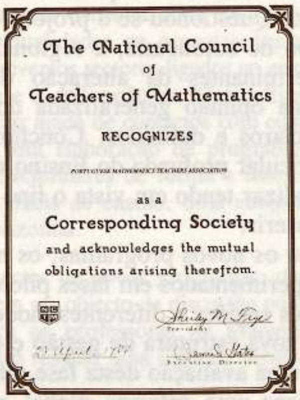
Reunião internacional de Associações em Budapeste

A APM, através de diversos contactos realizados por alguns seus dirigentes desde o Verão passado, esteve na origem da ideia de se realizar uma reunião internacional de representantes de Associações de Professores de Matemática em Budapeste, durante o próximo ICME-6. Por isso, o Comité Internacional deste Congresso (o mais importante na área da Educação Matemática) convidou o actual vice-presidente da APM para organizar, em colaboração com o presidente da Associação da Alemanha Federal, aquela reunião.

Acordo com o NCTM dos Estados Unidos

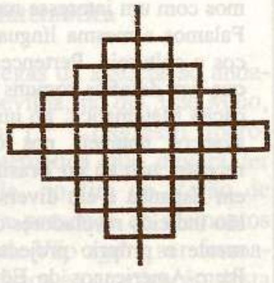
O National Council of Teachers of Mathematics — NCTM — é a Associação de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América e constitui desde há muito tempo uma referência essencial para muitos daqueles que se preocupam com a renovação do ensino da matemática a todos os níveis. As suas posições e as suas revistas, nomeadamente o «Mathematics Teacher», são lidas em todo o mundo, havendo também em Portugal naturalmente diversas escolas e professores que as recebem periodicamente.

A APM, depois de uma série de diligências efectuadas pela Direcção, tornou-se agora uma «associação correspondente» do NCTM. Trata-se de um acordo que implica: (1) a troca oficial entre as respectivas revistas profissionais; (2) cada uma das associações informa os seus membros sobre os principais Encontros, publicações e revistas da outra associação; (3) cada uma das associações convida, para os seus Encontros, membros da outra associação que estejam no país onde esses Encontros se realizam.



LOGO.MAT *(continuação)*

```
to peano :k :d
if :k = 0 [fd :d stop]
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3
end
```



Partindo de outros módulos e recorrendo, também, a procedimentos recursivos, podem-se obter novos padrões igualmente interessantes.

Leonor Moreira

Bibliografia

Klotz, F. (1987). Turtle Graphics and Mathematical Induction. *Mathematics Teacher*, vol. 80, n.º 8.

Para um reforço... *(continuação)*

devida antecedência **textos de apoio** contendo comentários à matéria, desenvolvimentos pontuais, resoluções **completas** de problemas, sugestões para testes de avaliação, e tudo o mais que informe, clarifique e lhe dê confiança na sua assaz delicada, importante e mal retribuída função. Sebastião e Silva compreendeu bem a necessidade de um tal tipo de apoio, ao elaborar os (esquecidos) *Guias* para o seu *Compêndio de Matemática*. Os textos de apoio cuja elaboração cuidadosa recomendamos são mais completos, porém, que aqueles *Guias*, no que respeita a questões práticas do dia a dia lectivo. Para exemplificação típico do que acabamos de propor veja-se

Moise & Downs — *Geometry, Teacher's Edition*, Addison-Wesley, 1982.

Nota: Este texto corresponde à intervenção do professor Franco de Oliveira no Seminário organizado pela APM sobre «Renovação do currículo de Matemática».

N.R. — Por absoluta falta de espaço não publicamos «A Dança das Circunferências» de A. Paula Natal. Pelo facto pedimos desculpa.
O referido artigo será oportunamente publicado.

ÍNDICE