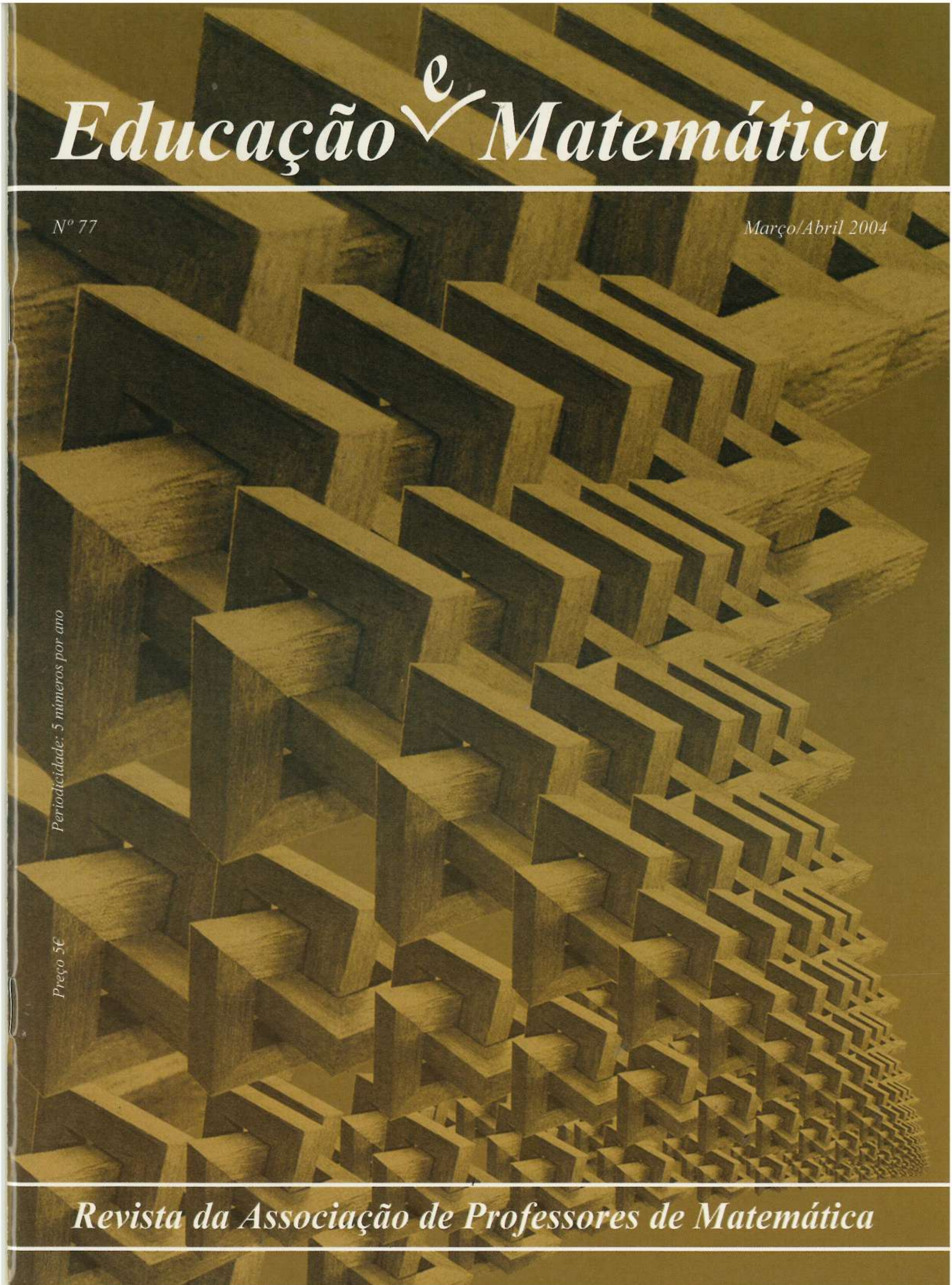
Educação e Matemática

Nº 77

Março/Abril 2004



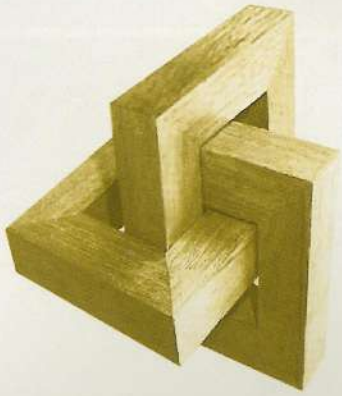
Periodicidade: 5 números por ano

Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

Tendo como ponto de partida a representação artística de um nó (ver figura) e usando um procedimento algorítmico que recorre a transformações espaciais, obteve-se a composição gráfica da capa deste número. Trata-se de mais uma alusão ao conceito de infinito, num estilo que foi extensa e magistralmente explorado por M. C. Esher.



Neste número também colaboraram

Ana Boavida, Claúdia Pagaimo, Cristina Loureiro, Darlinda Moreira, Delfim Torres, Elvira Ferreira, Fernando Nunes, Hugo Menino, J. Orlando Freitas, Joana Cunha, João Pedro da Ponte, José Brites Ferreira, José Paulo Viana, Luís Reis, Manuel Alberto Ferreira, Maria Cristina P. Matos, Sofia Varela.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Abril de 2004.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

nº 77
Março/
Abril
de 2004

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Paula Canavarro
Subdirectora
Adelina Precatado
Redacção
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

N.º de Registo ICS: 124051
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Resultados globais das provas aferidas. E depois ... o que se segue?

Darlinda Moreira

Os resultados globais das provas aferidas fazem-me pensar, de imediato, na percentagem significativa de jovens que, apesar de irem à escola, estão afastados dos saberes e das competências básicas para aceder de forma crítica à informação da sociedade global da actualidade. Ao projectar estes dados no futuro, antevejo como gigantesca a tarefa de combater a iliteracia em Portugal, fazendo com que todos tenham sucesso na sua escolaridade básica, sobretudo se tivermos em conta que esta tende a ser alargada para doze anos.

Bem conhecemos os diferentes contextos humanos que subjazem a estes números e que nos mostram as muitas famílias que desejam e se esforçam para que os seus filhos frequentem a escola com sucesso, embora na prática tenham dificuldades, ou não saibam mesmo, como ajudá-los no percurso escolar, porque a sua experiência com a escolaridade foi ela própria reduzida, ou está esquecida. Estas realidades mostram-nos também que se a Matemática continua a ser mencionada pela sua dificuldade, a sua utilidade é, igualmente, reconhecida, apesar do repertório matemático para falar com os filhos ser praticamente inexistente, sobretudo a partir do 4º ano de escolaridade. Assim, constatamos que o sucesso escolar não pode contar com a ajuda das famílias, nomeadamente, por não encontrarem nas *vidas do lar* o que estudam na escola.

Em consequência, não é na corrida aos exames nacionais que se resolve o problema da iliteracia nacional. Antes, a alteração desta situação exige uma política educativa que aposte na criação de elos entre a instituição escolar e o local social, por um lado, e, por outro, em encontrar novas formas de mostrar as vantagens da literacia na sociedade actual, e muito especialmente, da literacia matemática. A dificuldade dos jovens em se entusiasmarem com a escolaridade e com a Matemática, em especial, é um problema que não se prende apenas com o facto de saberem ou não os conteúdos escolares, mas também com a possibilidade de os relacionarem com condições e experiências concretas, para que possam definir os seus objectivos de vida de forma a optimizar a sua participação social e facilitar a abertura do imaginário a outros elementos que estruturam a vida do século XXI.

Os resultados das provas aferidas interessam a todos. Por isso, a sua divulgação para a opinião pública, sem os dados terem sido devolvidos às escolas e comunidades — como aconteceu nestes dois últimos anos — é um acto que marginaliza os agentes educativos locais da procura de soluções para os seus próprios problemas. A escola tem de se transformar numa instituição cujos saberes sejam entendidos, por toda a população, como aliados na procura de alternativas credíveis de vida. Para isso, não só as práticas escolares têm de ser renovadas com dinâmicas bem informadas pelas concepções e tendências contemporâneas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, mas também é necessário uma intervenção sistemática da instituição escolar na procura de novos parceiros sociais para ajudar nesta tarefa. O desenvolvimento de acções de aprendizagem ao longo da vida e a construção de formas de familiarizar os grupos sociais com a escola, como por exemplo, alargando as actividades e as discussões escolares à comunidade são alguns dos exemplos daquilo que se pode e deve fazer.

Darlinda Moreira
Universidade Aberta

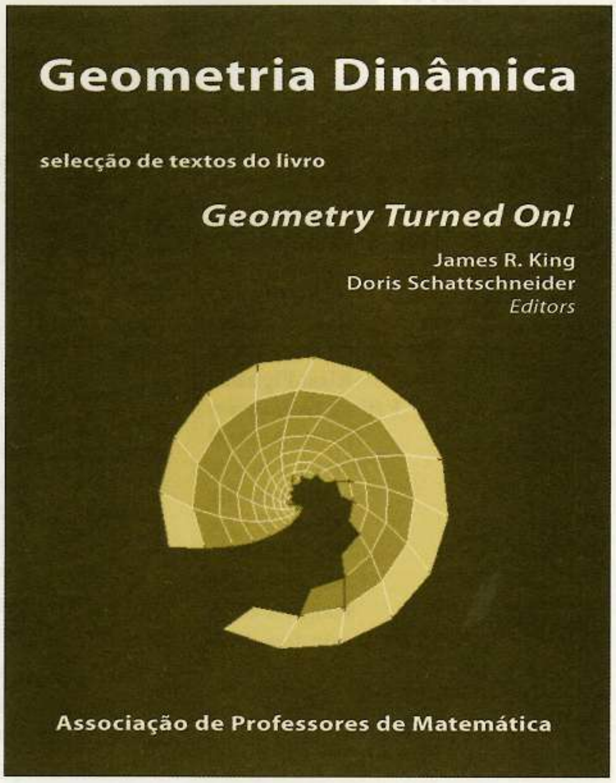
APM
Publicações

Geometria Dinâmica

Selecção de textos do livro *Geometry Turned On!*

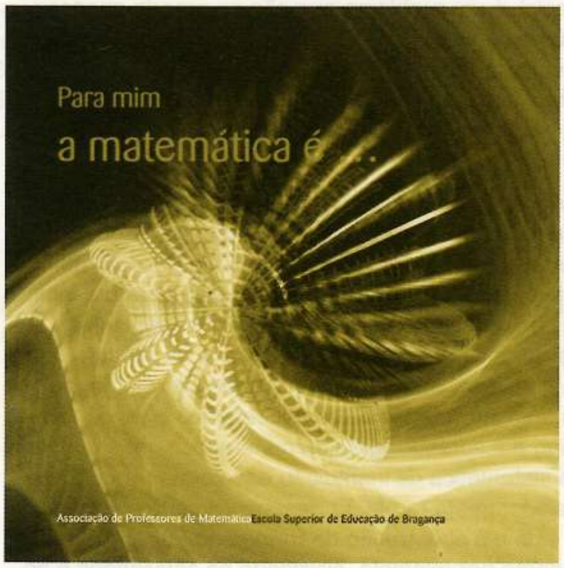
149 pp. APM, 2003

Sócio: €8,00
PVP: €16,00



Este livro contém a tradução de 13 textos incluídos no livro *Geometry Turned On*, publicado em 1997 pela Mathematical Association of America (MAA). A maior parte dos textos da edição americana são extensões de comunicações apresentadas num encontro anual do MAA, no âmbito de uma sessão especial dedicada à geometria dinâmica.

A publicação desta colectânea em português é uma iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM e tem por objectivo tornar mais acessível aos professores de Matemática em Portugal um excelente conjunto de relatos e análises sobre a utilização do software de geometria dinâmica nos ensinos básico, secundário e superior.



Para mim a Matemática é …

144 pp. APM e ESE Bragança, 2003

Sócio: €6,00
PVP: €12,00

Esta edição apresenta uma colectânea de textos sobre a matemática na escola recolhidos ao longo dos anos de 2000 e 2001. Os autores dos textos são pessoas do distrito de Bragança, incluindo alunos, educadores e professores, das mais diversas idades, percursos escolares, tipos de escolas e áreas disciplinares (línguas, ciências sociais, ciências da natureza, educação física, educação musical e plástica), que se exprimem em prosa, poesia, ilustração e fotografia.

A edição deste livro é um contributo para que se tenha uma melhor visão social da matemática e resulta da parceria entre a APM (através do seu Núcleo Regional de Bragança) e da Escola Superior de Educação de Bragança.

Continuidades e descontinuidades na primeira reforma educativa do século XXI

José Brites Ferreira

A educação, por boas e más razões, continua na agenda política. A proposta e os projectos de lei presentes na Assembleia da República que visam substituir ou alterar a actual lei de bases do sistema educativo são disso um exemplo. São múltiplas as questões e reflexões que documentos desta natureza suscitam. Aqui, centro a minha atenção na proposta do Governo, não sem referir que, de um modo geral, os documentos em causa apresentam uma postura bastante conservadora, ignorando desafios que se colocam aos sistemas educativos ou limitando-se a referi-los nos textos introdutórios sem depois lhes darem seguimento ao nível dos respectivos articulados.

No caso da proposta do Governo, a longa exposição de motivos nem sempre encontra ou extrai consequências no articulado proposto, o qual é bem mais extenso do que o actualmente em vigor. Não obstante o menor número de artigos possa sugerir que estamos perante um texto menos extenso e menos regulamentador do que o actualmente em vigor, a extensão dos mesmos é maior, o que poderá indiciar o desejo de regulamentar mais a educação e o sistema educativo em sede de lei de bases, retirando-lhe, assim, dimensão e significado políticos e dando-lhe uma dimensão mais técnica ou tecnocrática, de natureza mais regulamentadora do que orientadora.

A razão de ser de uma proposta desta natureza nem sempre assenta em fundamentação que a justifique. Como refere o próprio Conselho Nacional de Educação, "o Governo pretende justificar, ainda, a sua proposta pela necessidade de introduzir inovações no sistema educativo, fazendo uma referência explícita à sociedade de conhecimento e aos desafios que coloca aos indivíduos e às instituições: competências de acesso e utilização de informação; capacidade de adaptação em face da flexibilidade e mudança social; capacidade autónoma de juízo, sentido criador e capacidade de organização; competências e aptidões cada vez mais amplas e profundas; assimilação autónoma, consciente e orientada de conhecimentos, e desenvolvimento pessoal para o exercício de uma liberdade autónoma, consciente, responsável e criativa ...".

Mas muitos males e insucessos apontados na exposição de motivos não se devem a constrangimentos legais em vigor. Este quadro não tem impedido os Governos, entre eles o actual, de proceder à suspensão ou produção de legislação sobre diversas matérias, nomeadamente curriculares, que esta proposta parece pretender enquadrar. Aliás, o recente caso do ensino secundário é um bom exemplo disso, nomeadamente as opções altamente questionáveis suscitadas pelo Governo relativamente não só ao ensino secundário em geral como aos cursos tecnológicos, com particular ênfase no caso das áreas de Mecânica e de Química. Por isso fica a dúvida: a apresentação desta proposta será para legitimar medidas já tomadas, será para responder a desafios que hoje interpelam a educação e o sistema educativo, ou será apenas mais um ritual para marcar a agenda política, enunciando a primeira reforma do século XXI ou, num imaginário milenarista, a primeira reforma do novo milénio?

A filosofia geral que enforma a proposta não foge ao discurso das grandes reformas, quais rituais míticos que parecem anunciar o início de uma nova era. Aliás o chamar à colação outras grandes reformas, que ainda por cima o não foram ou só o foram parcialmente (1923, 1973, 1986), só contribui para acentuar o ritual e a retórica que acompanham estes actos enunciadores, que às vezes escondem mais do que mostram. Registe-se, porém, que as reformas de 1923 e 1973 não se concretizaram por razões bem diferentes. Entre elas estão décadas que foram um período demasiado negro para a educação, de que ainda pagamos graves consequências.

Na exposição de motivos da proposta do Governo diz-se: "com a aprovação da presente proposta de lei será, pois, verdadeiramente, a segunda vez que na história da nossa República se leva a cabo uma reforma estrutural do sistema educativo". Depreende-se que a primeira teria sido com a lei de bases de 1986, o que está muito longe de ser verdade. Bastará, por exemplo, ter em conta o que foi feito em matéria de formação inicial de professores e na reorganização dos grupos de docência, isto é, praticamente nada. Por outro lado, a autonomia das escolas, depois de enunciada em 1989, ficou congelada, sendo retomada em 1991 mas só implementada a partir de 1998, isto é mais de 10 anos depois da lei de bases de 1986. E mesmo no caso da reforma curricular, a peça de maior visibilidade no *marketing* reformador, bastará ter presente as lógicas diferentes e contraditórias que atravessaram os ensinos básico e secundário e o atraso no desenvolvimento da educação pré-escolar. Como já tive oportunidade de escrever (Ferreira, 2001), a organização desenhada na própria lei de bases de 1986 foi uma daquelas medidas que acabou por facilitar mais a continuidade do que a mudança. A estrutura geral de ensino, então desenhada, em nada mexeu com a anterior, limitando-se a algumas mudanças de nome, e foi acompanhada por outras continuidades em segmentos organizacionais com forte impacto curricular, como foi o caso da organização pedagógica e escolar, a formação de professores (especialmente a inicial), a gestão de recursos docentes. Mas vejamos qual é a reforma estrutural que ora se propõe.

No que se refere à educação pré-escolar, e depois de um desenvolvimento significativo no final do século xx, ela parece regredir. Ela é afastada do ensino básico e da educação escolar, tanto em termos conceptuais (passa de educação pré-escolar a educação infantil), como em termos espaciais (veja-se o que se propõe em termos de rede e da tipologia de edifícios).

A estrutura geral dos ensinos básico e secundário, não obstante o discurso da proposta, traz pouco ou nada de novo. Na realidade ela continua a ser a mesma, não obstante as mudanças de nome. Neste aspecto, a matriz continua a ser a produzida pelo Estado Novo, bem antes da reforma de 1973. A própria lei de bases de 1986 também não tocou nesta matriz estruturante do sistema, não obstante o alargamento da escolaridade obrigatória e a enunciação de um ensino básico de 9 anos, que ficou por construir (Ferreira, 2001).

À semelhança da lei de bases de 1986, a proposta actual não só não toca na estrutura herdada como antes a reforça, embora com algumas alterações nas designações. Ao ler-se a proposta verifica-se que o ensino básico volta a ser de 6 anos (dois ciclos de 4 e 2 anos), passando o ensino secundário a ser de 6 anos (dois ciclos de 3 anos). Tendo em conta o texto da proposta, os níveis e ciclos bem poderiam ter as seguintes designações: ensino primário (4 anos); ensino preparatório do ensino secundário (2 anos); curso(s) geral(ais) do ensino secundário (3 anos); curso(s) complementar(es) do ensino secundário (3 anos).

Com a estrutura geral desenhada, bem como com o que na proposta se diz relativamente aos currículos a desenhar e aos recursos docentes, não parece que a sequencialidade enunciada entre ciclos e níveis possa vir a concretizar-se. À semelhança do que aconteceu com a lei de 1986, não se toca em múltiplos aspectos estruturais do sistema educativo o que, desde logo, contribui para reforçar a função conservadora do mesmo e não a função inovadora frequentemente enunciada na exposição de motivos, mas não concretizada no articulado da proposta. Como afirmava há alguns anos, no Porto, Garcia Garrido, "uma característica marcante das reformas educacionais é a sua propensão para deixar absolutamente intactas as estruturas existentes, ou para as modificar o menos possível" (1996). E esta proposta, neste aspecto, não foge à regra.

Desiderato louvável é a universalização dos ensinos básico e secundário, que só peca por tardia. Mas não se vê como possa vir a ser implementada uma escolaridade obrigatória de 12 anos quando não se foi capaz de implementar uma escolaridade de 9 anos. Também é louvável a implementação de percursos diferenciados de formação de nível secundário. Importa, porém, que estes percursos diferenciados de formação sejam isso mesmo e não formas de selecção e discriminação negativas escolares e sociais, ou formas encapotadas de apresentar como sucesso aquilo que o não é. Não basta dizer que a estrutura de ensino não superior se inspira nos países A, B ou C. Mais importante será inquirir e conhecer as razões do sucesso que o mesmo tem nesses países, contrariamente ao que tem acontecido em Portugal. Sem dúvida que o ensino secundário (mas também o básico) deve ser uma aposta estratégica que, a ser ganha nas suas múltiplas dimensões, muito pode contribuir para um salto qualitativo da formação da população activa e do próprio ensino superior. Mas esta aposta estratégica requer determinação, meios, discernimento, sabedoria, ingredientes nem sempre fáceis de conseguir, pelo menos se considerarmos o que (não) foi feito ou o como foi feito na reforma de 1986 e que políticas recentes parecem não desmentir.

No que se refere ao ensino superior, que cresceu de forma extremamente desordenada após a lei de 1986, regista-se, entre outros aspectos, a dificuldade em distinguir ensino universitário de ensino politécnico. Distinguir apenas pelo nome da instituição que o ministra é um modo de nada dizer sobre um e outro — mas a agenda do ensino superior é portadora de outros conflitos e interesses (parte deles desapareceriam — outros poderiam surgir - se os institutos politécnicos passassem a denominar-se universidades politécnicas, ou a ter denominações análogas).

Outro ponto a que é dada ênfase na proposta é respeitante à administração educativa. Enfatiza-se a autonomia das escolas na definição do seu projecto educativo, bem como o primado dos critérios pedagógicos e científicos na gestão das escolas. Mas curiosamente o discurso da proposta centra-se principalmente na direcção executiva, numa linguagem que indicia um certo gerencialismo e uma menor referência à democraticidade e participação presentes na lei de bases em vigor, o que não deixa de ser bastante preocupante, numa altura em que tanto se fala de cidadania, de multiculturalidade, de aprender a estar com os outros e de aprender a pensar e a ser.

A formação de professores é também matéria merecedora de particular atenção no documento. Mas esta é uma matéria em que tem havido demasiadas paragens e recuos. Bastará pensar nos avanços, paragens e recuos (incluindo normativos legais) relativamente à formação inicial de professores e aos grupos de docência, desde a lei de bases de 1986 até à data. Praticamente, tudo ficou na mesma e grande parte do insucesso e das dificuldades da reforma curricular dos ensino básico e secundário também passou por aqui. Qualquer reforma curricular, que não tenha em conta os professores e a sua formação, está votada ao fracasso. Nesta proposta não se vê que esteja garantida a necessária e adequada articulação entre estes importantes segmentos do sistema educativo. Na proposta, a formação inicial de professores parece ser equacionada mais na definição de territórios para as universidade e politécnicos, do que das necessidades reais de formação que o trabalho curricular e pedagógico implica, desde a educação pré-escolar ao ensino secundário. A propósito, o primeiro ciclo de estudos (após a Declaração de Bolonha) será a resposta adequada em termos de formação científica e profissional? E no ensino superior é caso para questionar: existindo o mesmo curso em universidades e politécnicos (e há muitos casos destes) qual será a razão de se exigir como habilitação científica o grau de doutor para o leccionar na universidade e o de mestre para o leccionar nos politécnicos?

Visando a proposta em causa todo o sistema, ela não pode referir-se de forma pormenorizada a todas as suas dimensões, nem é esse o objectivo de uma lei de bases. Mas esta proposta de lei apresenta demasiadas ambiguidades, inconsistências e sinais contraditórios. Trata-se de uma proposta que, ao nível da estrutura geral que desenha para a educação pré-escolar e os ensino básico e secundário, apresenta mais continuidades ou regressões do que mudanças inovadoras e estratégicas voltadas para o futuro. Trata-se de uma matriz que continua a ter na base um ensino primário obrigatório, que não se teve a coragem de alargar há muito tempo, e que para uma parte significativa da actual população portuguesa foi ainda de 3 ou 4 anos (3 para os indivíduos de sexo feminino e 4 para os de sexo masculino). Trata-se de um matriz que tem permanecido praticamente imutável nos seus aspectos essenciais. E para a manutenção desta matriz têm convergido e contribuído outros segmentos importantes do sistema educativo. Por sua vez, o ensino superior é, em parte, ditado por uma agenda que se decide no espaço europeu, do qual não podemos nem devemos alheamos. Mas seria bom que este não alheamento se verificasse também, de forma sustentada e estratégica, nos casos da educação pré-escolar e dos ensinos e/ou formações de nível básico e secundário. Parente pobre na proposta é, sem dúvida, a formação ao longo da vida, que acaba por não ter a visibilidade desejável na proposta de lei, o mesmo acontecendo com as tecnologias de informação e comunicação, dada a sua relevância na sociedade do conhecimento.

A terminar há ainda a referir que a proposta em causa não pode ser descontextualizada de recentes discursos centrados na despesa e nos recursos e meios afectos à educação, bem como de recentes políticas educativas, que se traduziram em documentos legais sectoriais, e que indiciam (uns e outros), relativamente à lei de bases de 1986, uma crescente desresponsabilização e demissão do Estado em matéria de educação, numa lógica de crescente gerencialismo em matéria educativa.

Referências Bibliográficas

Garcia Garrido, José Luís (1996) — Principais desafios lançados aos sistemas educativos no alvorecer do século XXI: uma perspectiva internacional. In Garcia Garrido, J. L. E Outros – *A Educação do futuro: o futuro da educação*. Porto: Asa, p. 12–36.

Ferreira, José Brites (2001) — *Continuidades e descontinuidade no ensino básico*. Leiria: Magno Edições.

Conselho Nacional de Educação (2004) — Parecer nº 2/2004: a proposta e os projectos de lei de bases de educação/do sistema educativo. *Diário da República* (II série), n.º 14, 18 de Fevereiro.

Assembleia da República (2003) — Lei de Bases de Educação e projectos de alterações. *Diário da Assembleia da República*, Separata n.º 55/IX, de 10 de Dezembro.

José Brites Ferreira
Escola Superior de Educação de Leiria

Avaliar e examinar não são sinónimos!

No início de Março passado, o ministro da Educação apresentou à comunicação social os resultados das provas de aferição realizadas em 2003. Esses resultados foram considerados maus, mas o que acabou por ser noticiado com maior impacto foi o anúncio, feito exactamente nessa ocasião, da eventual realização de exames no final dos 6º e 4º anos de escolaridade, a juntar ao que já está determinado para o 9º ano, embora sem o adiantar de certezas nem a explicação pormenorizada da sua organização e consequências. Este episódio é paradigmático do que temos vivido recentemente no domínio da educação e ilustra também exemplarmente as tradicionais concepções sobre o carácter dos *exames finais*, considerados capazes de resolver, por si só, problemas gerais do sistema educativo e um instrumento inevitavelmente rigoroso.

A avaliação educativa é um domínio complexo, sujeito a opiniões diferentes e que são apresentadas e defendidas muitas vezes com paixão. Enquanto uns garantem que a única avaliação dos alunos digna desse nome, nos ensinos básico e secundário, existe apenas no final do 12º ano de escolaridade, com a sua panóplia de exames nacionais, outros chamam a atenção para a necessidade de se ver a avaliação como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem que deve estar presente em permanência. Enquanto uns crêem na eficácia de um dado instrumento usado isoladamente, outros apelam para a diversificação de formas de avaliação. Enquanto uns acham que a avaliação pode resolver os problemas de aprendizagem dos alunos, e mesmo do sistema educativo em geral, outros chamam a atenção para a sua relatividade e propõem uma utilização concertada com a actuação noutros aspectos.

É claro que existem pressupostos aos diversos discursos que nem sempre são enunciados e que nos podem esclarecer sobre a forma como vemos a avaliação. Em primeiro lugar, qual é o grande objectivo da avaliação? Será a sua função de classificar e de seleccionar a população que é avaliada, normalmente os alunos, ou será que a avaliação deve ser vista em permanência como um meio de nos ajudar a melhorar o nosso desempenho, enquanto professores, identificando os inevitáveis erros cometidos e abrindo-nos a possibilidade de os corrigirmos? Em segundo lugar, era bom que se esclarecesse qual a nossa opinião sobre o que deve ser avaliado, tendo em conta o objectivo da avaliação. Será que a avaliação do desempenho dos alunos chega para podermos emitir também juízos de valor sobre as escolas ou os professores? E uma prova escrita de duração limitada, como são as actuais provas de aferição e os exames, chega para avaliar a totalidade do espectro de competências que os programas do ensino secundário ou os programas e o currículo nacional do ensino básico propõem?

Independentemente do modo como respondemos às perguntas anteriores, ou seja a nossa opinião, existem alguns aspectos reveladores das opções de quem anuncia semelhantes medidas e que vale a pena reflectir. Não me parece que nos devamos alhear dessa reflexão por mais de uma razão. Além de estarmos a empobrecer a ajuda que podemos dar aos responsáveis directos das decisões a tomar a nível nacional estamos também a demitir-nos da nossa função de professores, à qual a avaliação é inerente, seja ela a dos alunos, a do sistema ou a que tem por objecto o nosso próprio desempenho enquanto professores.

A substituição anunciada das provas de aferição por exames é uma não substituição: acaba-se com uma prova que avalia o sistema e instaura-se uma outra que avalia os alunos. Apesar de ambas serem provas escritas de duração limitada, o seu objectivo é diferente e, portanto, não se substituem. O exame aos alunos é algo mais tradicional e que o nosso sistema praticou durante anos, e pratica actualmente no 12º ano. A *novidade* de ser instaurado noutros anos também não tem nada de novo. O mais marcante é que estes exames são anunciados desligados de outras formas de avaliação e do próprio processo de ensino. Os professores, e o público em geral, desconhecem se o exame vai impedir a progressão dos alunos para o ciclo seguinte, se é condição de obtenção de diploma do ciclo que frequentaram, quais os pesos que os exames têm na nota final, em que partes do(s) programa(s) incidem etc.. Estes aspectos, relativos aos exames do 9º ano, anunciados em 2002 e que se vão realizar já em 2005, ainda não foram devidamente esclarecidos. Mais uma informação que só tem a alternativa de vir fora de prazo ou de simplesmente não existir!

Não há notícia que os exames, em finais de ciclo, tenham sido a panaceia de qualquer sistema educativo porque estão desligados do processo de aprendizagem e não permitem que a avaliação cumpra o seu objectivo de ajudar a corrigir os erros e, tal como o sistema é utilizado em Portugal, inviabiliza a consideração de competências, pelo menos tão importantes como aquelas que são avaliadas por uma prova escrita. Todos os aspectos ligados à oralidade e ao cálculo mental ficam de fora, para já não falar do trabalho cooperativo, da pesquisa de informação e de outras competências fundamentais para a construção de uma cidadania esclarecida e actuante. Será que o desenvolvimento das várias competências gerais incluídas no currículo nacional do ensino básico é cabalmente avaliado por uma prova escrita de duração limitada? É natural que sejam as competências que podem ser avaliadas por exames que se assumam como as mais importantes, relegando para segundo plano outras competências. Será este um risco que devemos correr?

Fernando Nunes
Presidente da Direcção da Associação de Professores de Matemática

Provas de aferição no 1º ciclo: Que contributos para a aprendizagem da Matemática?

Em Maio de 2000, realizaram-se pela primeira vez em Portugal, as provas de aferição de Matemática, a nível nacional, no 4º ano de escolaridade, que tinham como objectivo "fornecer à comunidade informação sobre aspectos mais e menos conseguidos das aprendizagens dos alunos, com o propósito de contribuir para uma melhoria dessa aprendizagem" (*Provas de aferição do ensino básico 4.º ano* — 2000, DEB). Neste primeiro ano, as opiniões dos professores foram algo contraditórias, uns revoltados porque "este tipo de problemas não vinham nos manuais escolares e os alunos não os tinham resolvido nas suas aulas", outros, satisfeitos por verem provas onde uma outra visão da Matemática aparecia.

Foi grande a curiosidade e interesse para, durante o ano lectivo de 2000/2001, terem acesso à formação onde este tipo de Matemática era trabalhado e valorizado e em prepararem aulas onde a resolução de problemas não rotineiros tivesse destaque na aprendizagem da Matemática. Sentia-se, nas escolas, mais abertura para trabalhar a Matemática de uma forma mais dinâmica, em que o aluno participava mais, as suas estratégias eram mais valorizadas e onde havia apelo à comunicação matemática ...

Na verdade, o terem aparecido nas provas aferidas temas como a organização e recolha de dados e ter havido grande incidência na resolução de problemas e itens relativos a competências de raciocínio, comunicação, conhecimento de conceitos e procedimentos, gerou algumas preocupações nos professores, mas motivou para um novo olhar sobre o currículo e as práticas. Foi um ano em que muito se falou de Matemática e as escolas ganharam outras dinâmicas.

Em Dezembro de 2000, os relatórios das provas chegam às escolas com a recomendação: "Após a análise e interpretação dos resultados obtidos pela escola e depois de concluída a reflexão sobre as causas e implicações destes resultados a nível de escola e de turma, em Conselho Pedagógico devem ser encontradas opções curriculares adequadas a cada situação que contemplem estratégias e metodologias a introduzir nos projectos curriculares de escola e de turma" (p.41). A eficácia destas recomendações foi reduzida porque o ano lectivo já estava quase a meio!

Mas, no segundo ano de implementação das provas, houve um debate mais profundo, mais interesse em reflectir os resultados, comparando as competências dos alunos da escola com os resultados nacionais. No entanto, talvez por ainda não existir uma grande cultura de reflexão sobre a prática, os avanços dados no sentido de se pensarem estratégias e metodologias que colmatassem as falhas encontradas ainda foram reduzidos. O facto de não ter havido obrigatoriedade de retorno como, por exemplo, o envio de um relatório para um órgão competente, não contrariou essa falta de hábito e levou a uma política do deixa andar.

A partir do ano de 2002, contra o que tinha sido estabelecido inicialmente, as provas de aferição começam a realizar-se por amostragem, mas os resultados não foram divulgados. Estes factos levam a algum desencanto.

Recentemente, o Ministro da Educação divulgou, através da comunicação social, uma análise comparativa dos resultados das provas de aferição de 2001 a 2003. Apesar dos dados apresentados serem manifestamente insuficientes para analisar o que os alunos aprenderam ou não, consigo ler com alguma evidência que os níveis de desempenho no 1.º ciclo, após terem melhorado em 2002, têm vindo a piorar. A percentagem de zeros, em todas as competências, aumentou. O nível máximo diminuiu, embora o nível intermédio tenha melhorado. Como considero que a prova de 2003 não apresenta alterações significativas em relação às anteriores, então a que se devem os resultados?

Um facto é incontornável, podia ter-se feito melhor com maior responsabilidade de todos. Deste processo, saliento como positivo o facto de muitos professores terem ficado com uma outra visão da matemática, mais receptivos à leitura do programa e a uma nova leitura do manual e mais interessados em mudar as suas práticas apresentando novas tarefas aos alunos.

No entanto, a reflexão por parte dos professores sobre os resultados das provas podia ser mais aprofundada, passando pela a elaboração, pelas escolas, de relatórios apontando objectivos precisos e estratégias adequadas tendo em vista a melhoria das aprendizagens, nos quais podiam ser apoiadas por estruturas intermédias, próximas dos professores.

Há alternativas?

Em primeiro lugar, era bom que o Ministério da Educação reconhecesse que, num processo ainda não consolidado de avaliação, ao fazer as provas por amostragem gerou uma tendência para um desligamento do processo, pelo que teria de devolver às escolas relatórios completos com exemplos de respostas e com questões que permitissem a reflexão sobre as aprendizagens que os alunos fizeram. Ao não fazer nada, desperdiçou tempo e dinheiro. Em segundo lugar, era bom que os Conselhos Pedagógicos assumissem verdadeiramente a sua função pedagógica, discutindo as questões de ensino-aprendizagem, contribuindo para um maior empenhamento e reflexão dos professores. Em terceiro lugar, era importante que o Ministério considerasse este processo útil e propiciador de vantagens para o ensino, mas há alguma evidência de que já partiu para outra.

Em questões de educação é importante o factor tempo para que as investigações feitas possam produzir resultados. Assim, continuo a defender que as provas de aferição se devem manter e voltar à ideia inicial, ou seja, fazerem-se durante três anos a todos os alunos, interromperem-se, e, passados três ou quatro anos, depois de se terem tomado medidas efectivas, voltarem-se a fazer a todos os alunos.

Elvira Ferreira, EB1 Professor Francisco Veríssimo, Marinha Grande

CASIO® CALCULADORAS PARA O ENSINO

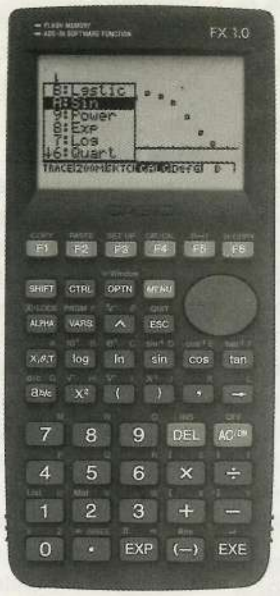
A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado, perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas, através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional Casio.

GRÁFICAS

CFX 9850 Gb Plus

- Visor a cores
- 32 Kb Ram + 28 Kb Rom
- Estatística Avançada
- Cálculo Financeiro
- Matrizes
- Complexos
- Raízes Reais e Complexos
- Derivados
- Cónicas
- 10 Modelos de Regressão
- Biblioteca Incorporada
- Ligação a PC, Analisador de Dados, e Vídeo/TV
- Modelo com Painel para Retroprojector

FX 1.0 Plus



- Memória Flash 768K + 144K Ram (cerca de 1 Megabyte)
- Excelente Visor Monocromático
- Funções Gráficas de Alto Nível
- Rápido Acesso aos Menus e Diversas Opções
- Gráficos Dinâmicos e Duplas – Cónicas – Complexos
- Estatística – Equações até 30 Incógnitas
- Matrizes – Integração – Cálculo Diferencial
- Operações Lógicas – Programação Tipo Basic
- Actualização pela Internet com Programas e Aplicações
- Linguagem de Trabalho e Aplicação da Linguagem Portuguesa (download da Internet)

e ainda: FX 7450 G, FX 9750, Álgebra FX 2.0

ACESSÓRIOS P/ GRÁFICAS

CABO SB 87

Ligação a PC das gráficas CASIO com software FA123

TV/VÍDEO - Vi 9850 G

Ligação a TV e Vídeo projector da CASIO CFX 9850 Gb Plus

KITS PARA RETROPROJECTOR

Conjunto Máquina + Data Display + cartão emulador

ANALISADOR DE DADOS

Recolha de Dados vários com sondas incluídas e ligação das gráficas CASIO; Analisador EA-100, Sensor de Movimento EA-2, Sensores da Vernier

CIENTÍFICAS

FX 82
FX 570
FX 350

Científicas de alto nível, Simples, Económicas, Poderosas
- Visor com 2 linhas

ELEMENTARES

HS 8 ER
HL 820 ER
SL 450

- Robustas
- Económicas
- Modelos ER com cálculo de EUROS

P.E.C. Programa Educacional CASIO

Apoio Técnico e Pedagógico - Programa de Empréstimos - Cursos de Formação

O PEC - Programa Educacional CASIO, numa das suas várias vertentes, desenvolve **cursos de formação** (gratuitos), tendo como objectivo familiarizar a classe docente com a tecnologia das calculadoras gráficas e a sua aplicação aos novos programas de matemática.

O programa de cursos de formação desenvolvido pela CASIO, conta com o apoio de uma Equipa de Professores de Matemática a nível nacional, que não só realizarão os cursos como **também responderão a qualquer solicitação técnica e/ou pedagógica**.

CONTACTOS

APOIO PEDAGÓGICO POR TELEFONE: 213 122 868

E-MAIL: ana.margarida@beltraoc.pt

CASIO Japão: ACTIVIDADES DOWNLOADS
www.casio.co.jp/edu_e/

BELTRÃO COELHO
Lisboa, Porto, Barreiro, Braga, Aveiro, Coimbra, Santarém, Setúbal, Faro, Funchal e Sintra
www.beltraoc.pt

Actualidades

Exames nacionais nos 9º e 6º anos

No ano lectivo de 2004/2005, realizar-se-ão pela primeira vez exames nacionais do 9.° ano de escolaridade, nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, estando ainda por definir os moldes de realização destas provas, nomeadamente no que respeita ao peso na nota final do aluno. Está igualmente definido que, no presente ano lectivo, todos os alunos deste nível de escolaridade efectuarão provas de aferição, anónimas e sem interferência na sua avaliação.

De acordo com o jornal Público do passado dia 4 de Março, o ministro da educação David Justino pretende com a realização destas provas, no próximo mês de Maio, "testar a logística, os conteúdos e dar indicações preciosas para a definição definitiva do regulamento dos exames do 9.° ano de escolaridade" que se encontram "ainda num processo de concepção". Tendo em conta o início do ano lectivo no dia 1 de Setembro próximo, e atendendo a que os alunos nessa data já deverão ter conhecimento de todos os aspectos que caracterizam o processo de avaliação a que irão ser submetidos, parece-nos muito reduzido o período dedicado ao estudo dos vários aspectos associados à implementação das provas de aferição, à subsequente concepção do novo regime de avaliação dos alunos, sua discussão pública e aprovação.

Para além da realização de exames nacionais no 9.° ano de escolaridade, o ministro da educação anunciou, durante a apresentação dos resultados das provas de aferição de 2003, a intenção de vir a criar provas nacionais de Matemática e Língua Portuguesa, no 6.° ano de escolaridade. Muito embora não seja feita mais nenhuma alusão relativamente a estas provas, há algumas questões que nos surgem de imediato.

Que tipo de exames teremos? Provas com enfoque na memorização e na mecanização de procedimentos ou provas que, à semelhança do que tem acontecido nas provas de aferição, valorizam de forma equilibrada os vários temas matemáticos, o conhecimento de conceitos e procedimentos, o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas?

Que importância terão estes exames na avaliação do aluno e até que ponto corremos o risco de passar para segundo plano os aspectos que não poderão ser avaliados numa prova deste tipo? Esta questão faz-nos pensar na influência que os exames poderão exercer sobre a prática dos professores.

Tendo como base a experiência vivida durante o período de existência das provas globais, que implicações poderá a realização de exames ter no funcionamento das escolas, em particular no término antecipado das aulas?

Ministro da Educação quer criar exames nacionais no 6º ano

TESTES NO 9º JÁ NO PRÓXIMO ANO LECTIVO

Não foram calculadas médias nacionais para as provas de aferição de 2003

ISABEL LEIRIA

O mi[...] anunciou ontem a intenção de vir a criar provas nacionais no 6º ano, à semelhança do que já foi decidido para o 9º. "Se a proposta de Lei de Bases da Educação for aprovada, é natural que na passagem do novo ensino básico [do 1º ao 6º ano de escolaridade] para o secundário haja também exames nacionais", afirmou David Justino, durante a apresentação dos resultados das provas de aferição de 2003.

Em relação aos exames nacionais do 9º ano, que serão realizados já em 2004/2005 a Matemática e Língua Portuguesa, está por definir qual será o seu peso na nota final das respectivas disciplinas. É que se a lógica que presidiu à criação destes testes no 12º ano (1995/1996) será a mesma, os critérios poderão ser outros.

"Estamos ainda num processo de concepção", afirmou David Justino, que reforçou a ideia: "Mesmo que não alterássemos a organização do ensino, tem tod[...] fazer exames na[...] de um ciclo par[...] pelo que é sempr[...] criá-los no 6º ano"[...]

A avançarem a[...] do ministro, na me[...] póteses, as provas [...] passarão [...]

que os testes foram [...] por uma amostra [...] —, todos os estud[...] vão fazer estas p[...] são anónimas e n[...] para a nota.

O seu objectivo [...] "testar a logística [...] dos e dar indicaçõ[...] para a definição d[...] regulamento dos e[...] ano", explicou Da[...] A partir de 2005, d[...] as provas aferidas [...] de ensino (bem c[...] bais) e o mesmo [...] para o 6º ano se fo[...] exames nacionais [...]

Médias nacionais "não são credíveis"

Os resultados das provas de aferição dos últimos três anos "não são significativamente diferentes e os problemas de fundo detectados são praticamente os mesmos". O diagnóstico foi feito por David Justino que, juntamente com vários elementos do Departamento de Educação Básica, fez ontem a apresentação de [...] maiores.

"A falta de articulação entre ciclos é um problema que está identificado desde o final da década de 80 e que só se pode resolver com uma reforma estrutural. Eu espero que a nova Lei de Bases da Educação venha resolver alguns", defendeu David Justino. ■

O ministro da Educação anunciou ontem a intenção de vir a criar provas nacionais no 6º ano, à semelhança do que já foi decidido para o 9º. "Se a proposta de Lei de Bases da Educação for aprovada, é natural que na passagem do novo ensino básico [do 1º ao 6º ano de escolaridade] para o secundário haja também exames nacionais", afirmou David Justino,

In Público, 4 de Março de 2004.

Quais serão os objectivos que se pretendem alcançar com a realização de exames em diferentes momentos no percurso escolar dos alunos? Pretende-se apenas transmitir uma imagem de credibilidade do sistema ou existe de algum modo a ilusão que os exames poderão contribuir para o desenvolvimento de competências nos alunos e reduzir o insucesso escolar?

Ao longo da vida, é natural depararmo-nos com situações em que somos sujeitos a provas, por exemplo, quando pretendemos obter a carta de condução ou quando nos candidatamos a um emprego. Nesta perspectiva, poderá eventualmente a realização de exames, com um peso pouco significativo na avaliação do aluno, constituir um aspecto positivo, ao permitir-lhe alguma familiarização com situações em que é alvo de uma avaliação mais formal. Contudo, ao ponderar alterações no sistema de avaliação, devemos ter em conta que as várias modalidades de avaliação devem ser implementadas de forma equilibrada, dando maior preponderância à avaliação formativa.

Alice Carvalho
EB. 1 Orlando Gonçalves
Helena Rocha
Universidade Nova de Lisboa

Investigando objectos cilíndricos

O relatório escrito na avaliação de tarefas de investigação

Hugo Menino, Cláudia Pagaimo, Joana Cunha e Sofia Varela

As actuais orientações curriculares em Matemática (DEB, 2000) salientam a importância de que os alunos sejam envolvidos em experiências de aprendizagem diversificadas e matematicamente ricas. O apelo explícito à utilização de materiais manipuláveis e ao recurso às novas tecnologias reforça a importância do desenvolvimento de práticas lectivas centradas no aluno. Ao nível das tarefas o documento salienta a importância da realização de actividades de investigação, onde os alunos se envolvam na discussão e análise de questões matemáticas interessantes, procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas, discutindo e comunicando descobertas. A realização de tarefas de carácter investigativo ou exploratório desenvolve nos alunos aspectos fundamentais da competência matemática, como o raciocínio, a comunicação e a argumentação. Uma vez que são normalmente desenvolvidas em grupo, este tipo de tarefas permite o envolvimento dos alunos em discussões interessantes e um trabalho colaborativo de exploração das questões que surgem durante a actividade. A gestão de conflitos e a divisão de tarefas, no contexto de trabalho de grupo, são outras aprendizagens que podem ser favorecidas.

Uma questão fundamental que se coloca, neste contexto, é saber que avaliação pode ser feita deste tipo de tarefas. Tal como Leal (1992) acreditamos que, por um lado, é fundamental pensar em práticas de avaliação coerentes com as restantes componentes do currículo. Por outro lado, uma maior diversidade de experiências de aprendizagem vai implicar necessariamente a utilização de formas de avaliação mais diversificadas. O relatório *Matemática 2001* da APM recomenda, quando se refere à avaliação: "tendo em atenção que os objectivos curriculares incluem competências nos domínios dos conhecimentos, capacidades, atitudes e valores, os professores devem encontrar formas diversificadas de recolha de dados para a avaliação dos alunos, recorrendo, para além dos testes, a relatórios e outros trabalhos e a desempenhos orais; e procurar formas práticas e eficazes de registo desses dados de forma a viabilizar uma avaliação formativa mais sistemática e a sua integração na avaliação sumativa" (APM, 1998, p. 82).

Além da questão da diversidade é importante discutir a intencionalidade do professor quando propõe uma tarefa de avaliação. Um entendimento da avaliação como regulação (Perrenoud, 1999) encerra a ideia de que avaliar é sobretudo contribuir directamente para a progressão e/ou redireccionamento da aprendizagem. A avaliação deve proporcionar ao professor e ao aluno informação sobre o modo como o ensino e a aprendiza-

gem se estão a desenvolver, possibilitando a regulação da acção pedagógica e das aprendizagens. Saliente-se que neste processo o aluno tem um papel central, já que a excelência da regulação passa necessariamente pelo desenvolvimento de capacidades metacognitivas no aluno. Neste âmbito, estamos a falar de auto-regulação, como um processo interno ao aluno, que se apercebe dos erros cometidos procurando superá-los, e olha de forma crítica o modo como aprende, durante a realização das diferentes actividades matemáticas. O estímulo ao funcionamento dos mecanismos de auto-regulação deverá passar pela abordagem positiva do erro; pelo questionamento; pela explicitação e negociação de critérios de avaliação; e, pelo recurso a instrumentos alternativos de avaliação (Santos, 2002). Exploraremos, de seguida, o uso do relatório escrito como instrumento alternativo de avaliação, com base numa tarefa proposta aos alunos.

A tarefa que propomos na secção: *Materiais para a aula de Matemática*, foi elaborada para um grupo de alunos do 6º ano de escolaridade. Procurámos construir uma actividade de investigação simples envolvendo a utilização de materiais manipuláveis. O desenvolvimento das diferentes actividades do guião implica os alunos na manipulação concreta de objectos matemáticos, fundamental nos primeiros anos. Na terceira actividade os alunos manipulam objectos do plano, usando a aplicação GSP, numa actividade simples que permite a elaboração de raciocínios indutivos.

Pretende-se que os alunos apresentem um relatório das actividades realizadas. A redacção do relatório escrito estimula o aluno a pensar sobre o modo como desenvolveu determinada actividade matemática, favorecendo uma atitude reflexiva acerca dos processos usados na investigação. Além deste aspecto, permite a inclusão de elementos reflexivos relacionados com as componentes afectivas do trabalho desenvolvido, nomeadamente o modo como o grupo funcionou, as dificuldades sentidas e a percepção das aprendizagens realizadas. Esta actividade de investigação, da qual resulta um produto escrito, na forma de relatório, faculta dados ao professor, que permitem fazer uma avaliação muito rica e pormenorizada do desempenho dos alunos. Esta avaliação permite obter dados relativos às atitudes demonstradas durante a actividade, aos esquemas de raciocínio utilizados e procedimentos adoptados, à comunicação de ideias, à compreensão dos conteúdos e à apresentação dos resultados. Mas, sobretudo, estimula o aluno a pensar sobre as suas aprendizagens de modo consciente. Neste aspecto reside o potencial auto-regulador do instrumento.

Para a elaboração do relatório o aluno necessita de indicações explícitas acerca do tipo de desempenho esperado. Para isso, na nossa perspectiva, devem ser negociados com os alunos os critérios de desempenho da tarefa. Esta negociação deve constituir-se uma oportunidade de interacção, onde o professor clarifica o pretendido e onde os alunos têm oportunidade de colocar as suas questões. Além dos aspectos relativos à estrutura, que podem ser apresentados num guião, é fundamental que os alunos compreendam e se apropriem dos critérios que serão usados na avaliação dos relatórios. Estes critérios devem ser adequados aos objectivos da tarefa e podem variar em função dos conteúdos e processos envolvidos. Em termos gerais estes critérios podem incidir em aspectos como: a apresentação; a organização e clareza de ideias; descrição e justificação dos procedimentos utilizados; domínio dos conceitos envolvidos; elementos reflexivos incluídos. Pensamos que é muito útil para os alunos que o professor faça comentários escritos ao trabalho realizado pelos alunos, em função dos critérios estabelecidos, de tal forma que o aluno se aperceba dos aspectos que pode vir a melhorar. Um outro nível de trabalho com este instrumento pode ser organizado precisamente em função desses comentários se o aluno for convidado a reformular e melhorar o seu trabalho.

Para nós não faz sentido falar de avaliação sem falar de aprendizagem. Aliás poderíamos mesmo perguntar qual o sentido de avaliar se isso não servir para que os alunos aprendam. Quando aplicámos esta tarefa, na sala de aula, foi possível ver o envolvimento dos alunos em momentos de aprendizagem significativa, em que aprender matemática significou fazer matemática, à medida das suas idades. O desenvolvimento de competências transversais foi também muito marcado. Este tipo de metodologias, centradas no aluno, permite que este aprenda Matemática, sentindo-a e explorando-a. As componentes avaliativas estiveram imersas nas experiências de aprendizagem do aluno, facultando dados fundamentais a professor e alunos acerca do processo vivido e acerca dos desempenhos conseguidos.

Referências

Associação de Professores de Matemática. (1998). *Matemática 2001 — Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática & Instituto de Inovação Educacional.

Departamento da Educação Básica. (2000). *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências Essenciais.* Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Leal, M. L. (1992). *Avaliação da Aprendizagem num Contexto de Inovação Curricular.* Tese de Mestrado: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação. Da Excelência à Regulação das Aprendizagens. Entre duas Lógicas.* Porto Alegra: Edições ARTMED.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação Regulada: Porquê, o Quê e Como?. In: P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) Avaliação das Aprendizagens, das Concepções às Práticas. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento da Educação Básica, p. 75-84.

Hugo Menino, ESE de Leiria

Cláudia Pagaimo, Joana Cunha e Sofia Varela, EB 2,3 José Saraiva, Leiria

Materiais para a aula de Matemática

Investigando objectos cilíndricos

A aprendizagem da Matemática não se deve limitar apenas à aquisição de conhecimentos e utilização de procedimentos. Desta forma, as actividades que permitem investigar e explorar conceitos matemáticos levam os alunos a adquirir competências matemáticas relacionadas com o raciocínio e a comunicação; e ao desenvolvimento de atitudes positivas em relação à Matemática.

A tarefa *Investigando objectos cilíndricos* é uma proposta para ser explorada no 6º ano de escolaridade, que tem como objectivos:

- Medir e registar as dimensões de cilindros;
- Esboçar a planificação do cilindro;
- Estimar, em casos simples, o perímetro do círculo;
- Resolver problemas utilizando diferentes estratégias;
- Representar ideias matemáticas, usando esquemas e desenhos;
- Saber ouvir a opinião dos colegas;
- Comunicar, discutir e defender ideias próprias;
- Formular juízos elementares sobre situações concretas;
- Formular argumentos válidos para justificar as suas opiniões;
- Avaliar o desempenho individual e dos outros elementos do grupo no desenvolvimento da tarefa;
- Estruturar um relatório.

O desenvolvimento das diferentes actividades do guião implica os alunos na manipulação concreta de objectos matemáticos, fundamental nos primeiros anos. Na terceira actividade os alunos manipulam objectos do plano, usando a aplicação GSP, numa actividade simples que permite a elaboração de raciocínios indutivos.

Pretende-se que os alunos apresentem um relatório das actividades realizadas. Esta actividade de investigação, da qual resulta um produto escrito, na forma de relatório, faculta dados ao professor, que permitirão fazer uma avaliação muito rica e pormenorizada do desempenho dos alunos. Esta avaliação permitirá obter dados relativos às atitudes demonstradas durante a actividade, aos esquemas de raciocínio utilizados e procedimentos adoptados, à comunicação de ideias, à compreensão dos conteúdos e à apresentação dos resultados.

Quando aplicámos esta tarefa, na sala de aula, foi possível ver o envolvimento dos alunos em momentos de aprendizagem significativa, em que aprender matemática significou fazer matemática, à medida das suas idades. O desenvolvimento de competências transversais foi também muito marcado. Este tipo de metodologias, centradas no aluno, permite que este aprenda Matemática, sentindo-a e explorando-a.

Cláudia Pagaimo, Joana Cunha e Sofia Varela
EB 2,3 José Saraiva, Leiria
Hugo Menino, ESE de Leiria

Escola...

Ano/Turma.......................... Data.................... Aluno(a)..........................

Investigando objectos cilíndricos

Com este trabalho de investigação pretende-se que façam um estudo mais aprofundado do cilindro. Para apresentar e estruturar as vossas investigações devem ter em conta os seguintes aspectos:

1. Devem explicar os passos que efectuarem e as conclusões obtidas;

2. O relatório deve estar estruturado da seguinte forma:
   - *Capa principal* — com o nome da escola, o tema do trabalho, o nome dos elementos do grupo, do professor e a data (dia, mês e ano);
   - *Desenvolvimento* — contém a investigação que os elementos do grupo desenvolveram, com os respectivos passos efectuados (recorrendo a palavras, esquemas, ...);
   - *Conclusão* — contém uma pequena síntese e uma reflexão do trabalho desenvolvido (o que mais gostaram, quais foram as maiores dificuldades, o que mais gostaram de aprender)

Material: latas ou embalagens cilíndricas; cordel ou linha, régua, tesoura, folhas A_3, calculadora.

Actividade 1

- Escolham um dos objectos cilíndricos que vos é fornecido e registem o seu número na folha de rascunho.
- Com o material que vos é fornecido, apresentem um esboço da planificação do objecto, numa folha em branco.
- Como se pode ter a certeza que a planificação apresentada corresponde à realidade? Justifiquem a vossa resposta tendo em conta a estratégia que utilizaram.

Actividade 2

- Preenche a tabela com o que vos é pedido.

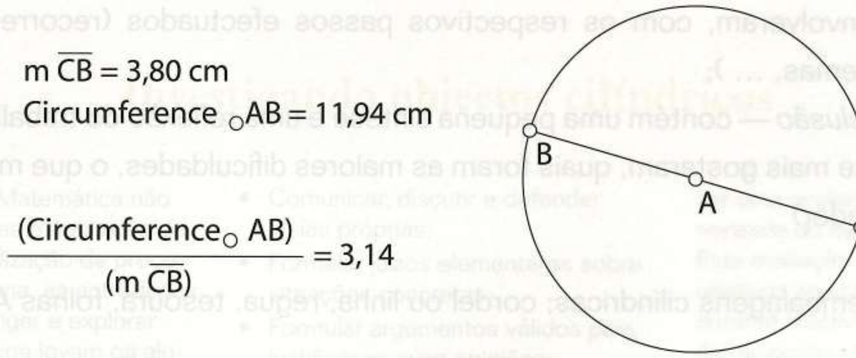
Objectos (nº)	Perímetro da base (P)	Diâmetro da base (D)	P : D

Nota: podem recorrer à máquina calculadora.

- Expliquem a estratégia que utilizaram para preencher a tabela.
- Que conclusões podem tirar? Justifiquem as vossas respostas.

Actividade 3

- No programa *Geometer's Sketchpad* abram o ficheiro circ.gsp. Obterão na janela de trabalho uma imagem semelhante a esta:



- Aumentem o diâmetro da circunferência, arrastando o ponto B. O que verificam em relação ao quociente entre o perímetro e o diâmetro?
- O quociente entre o perímetro e o diâmetro é um valor que se designa por Pi (π). Pesquisem um pouco na internet e no vosso manual e escrevam, por palavras vossas, o que é o pi e um pouco da sua história.

  Sugestões de sites:

  www.hamt.hpg.ig.com.br/historia/pi.htm

  www.apm.pt/apm/curiosidades/curio3.htm

  www.arlindo-correia.com/040901.html
- Elaborem o relatório tendo em conta os critérios que vos foram pedidos (capa, desenvolvimento, conclusão).

As cartas mal distribuídas

O Augusto pegou num baralho de 52 cartas. Entregou um montinho delas à Berta, outro à Cristina, mais um ao Domingos, ficou com algumas para ele e deixou as restantes em cima da mesa.

– Não temos todos o mesmo número de cartas – reclamou a Berta.

– Não faz mal – retorquiu o Domingos. – Se o Augusto dividir igualmente metade das suas cartas entre a Berta e a Cristina, depois a Berta fizer o mesmo com a Cristina e o Augusto e, finalmente, também a Cristina dividir igualmente metade das suas cartas entre o Augusto e a Berta, todos ficaremos com o mesmo número de cartas.

Quantas cartas tinha cada um inicialmente e quantas estavam em cima da mesa?

(Respostas até 15 de Julho)

Enormes potências

O problema proposto no número 75 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

> *O número 7 elevado a 7 elevado a 7 elevado a 7 é enorme. Quais são os seus dois últimos algarismos?*
>
> *E quais são os dois últimos algarismos de 6 elevado a 6 elevado a 6 elevado a 6?*
>
> *Que aconteceria se usássemos outros quatro números iguais, de 2 a 9?*

Por onde andam os entusiastas da resolução de problemas? É que para este, só recebemos três respostas: da Ana Neves, do Alberto Canelas (Queluz) e do António Lucas (Castelo Mendo). Em compensação, todas levam o problema até ao fim, incluindo as extensões, e a do Alberto é um verdadeiro tratado sobre este tipo de problemas, generalizando-o em várias direcções.

A primeira tentação é calcular o número….

7 elevado a 7 é 823543.

7 elevado a 823543 é já um número muitíssimo grande, com mais de 695 mil algarismos. Seria preciso um caderno bem grande só para o escrever. Calculá-lo, só com a ajuda de um bom computador.

Finalmente, 7 elevado a este último número é de tal modo grande que, actualmente, nem com os melhores computadores se conseguiria. O resultado é um número inimaginável, com mais algarismos do que o número de átomos do universo conhecido. Mesmo que conseguíssemos escrever um algarismo em cada átomo, não haveria átomos suficientes para o fazer.

Então, como fizeram os nossos dois leitores, vamos tentar descobrir regularidades nas terminações das potências de 7.

7 elevado a 1 termina em 07

7 elevado a 2 termina em 49

7 elevado a 3 termina em 43

7 elevado a 4 termina em 01

7 elevado a 5 termina em 07

7 elevado a 6 termina em 49

Não é preciso continuar. As terminações repetem-se de 4 em 4.

Imaginemos, por exemplo, que queríamos saber a terminação de 7 elevado a 2002. Como 2002 é um múltiplo de 4 mais **2**, a terminação vai ser a mesma de 7 elevado a **2**, ou seja, 49.

Voltemos ao nosso problema.

Seja **A** = "7 elevado a 7", que já sabemos que termina em 43.

Mas, terminando em 43, **A** é um múltiplo de 4 mais **3**, logo:

B = "7 elevado a A" vai ter a mesma terminação que 7 elevado a **3**, ou seja 43.

Finalmente, o número procurado é "7 elevado a B". Como **B** é também um múltiplo de 4 mais **3**, a sua terminação é igual à de 7 elevado a 3, ou seja, 43.

Para as potências de 6, o processo a seguir é o mesmo. Rapidamente descobrimos que as terminações se repetem com período 5.

Expoente	5n	5n+1	5n+2	5n+3	5n+4
Terminação	76	56	36	16	96

Logo, 6^6 termina em 56 (aliás, podíamos mesmo cálculá-lo: é 46656).

Como este número é um múltiplo de 5 mais 1:

6^{6^6} também termina em 56 e é portanto um múltiplo de 5 mais 1. Logo:

$6^{6^{6^6}}$ termina em 56.

Faltam agora os restantes casos, as terminações dos números do tipo $N^{N^{N^N}}$ com N de 2 a 9.

Mas o Alberto Canelas não ficou por aqui. Resolveu investigar todos os valores de **N** até 100 … Eis o que obteve, sendo **P** o período e **T** a terminação. (Tabela 1)

E ainda foi mais longe. Investigou também os três últimos algarismos destas potências para N até 10. (Tabela 2)

N	P	T	N	P	T	N	P	T	N	P	T	N	P	T
1	1	[1]	21	5	21	41	5	41	61	5	61	81	5	81
2	20	36	22	20	96	42	20	56	62	20	16	82	4	76
3	20	87	23	20	47	43	4	07	63	20	67	83	20	27
4	10	96	24	2	76	44	10	56	64	10	36	84	10	16
5	1	25	25	1	25	45	1	25	65	1	25	85	1	25
6	5	56	26	1	76	46	5	96	66	5	16	86	5	36
7	4	43	27	20	83	47	20	23	67	20	63	87	20	03
8	20	56	28	20	96	48	20	36	68	4	76	88	20	16
9	10	89	29	10	69	49	2	49	69	10	29	89	10	09
10	1	00	30	1	00	50	1	00	70	1	00	90	1	00
11	10	11	31	10	31	51	2	51	71	10	71	91	10	91
12	20	16	32	4	76	52	20	36	72	20	96	92	20	56
13	20	53	33	20	13	53	20	73	73	20	33	93	4	93
14	10	36	34	10	16	54	10	96	74	2	76	94	10	56
15	2	75	35	2	75	55	2	75	75	2	75	95	2	75
16	5	16	36	5	36	56	5	56	76	1	76	96	5	96
17	20	77	37	20	17	57	4	57	77	20	97	97	20	37
18	4	76	38	20	16	58	20	56	78	20	96	98	20	36
19	10	79	39	10	59	59	10	39	79	10	19	99	2	99
20	1	00	40	1	00	60	1	00	80	1	00	100	1	00

Tabela 1.

N	P	T	N	P	T
1	1	[1]	6	25	656
2	100	536	7	20	343
3	100	987	8	100	856
4	50	096	9	50	289
5	2	125	10	1	000

Tabela 2.

Investigar a nossa prática profissional: O percurso de um grupo de trabalho colaborativo

João Pedro da Ponte e Ana Boavida

Que interesse tem para os professores a investigação? Só os especialistas a podem realizar ou poderá constituir uma faceta do trabalho usual de todo o professor? Que significados pode ter a expressão *professor investigador?* Estas e outras questões foram o ponto de partida do trabalho de um grupo de estudos cuja experiência se relata neste artigo.

Em Portugal, como em muitos outros países, são cada vez mais os professores que se interessam pela investigação educacional. Sentindo a sua prática como problemática, reconhecendo as limitações de soluções fáceis mas enganadoras, e ultrapassando velhos preconceitos em relação à actividade de investigação, revelam interesse no que se tem feito neste campo e envolvem-se, eles próprios, em projectos de pesquisa e em programas de pós-graduação.

Desde a sua criação que o Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da APM definiu como uma das suas preocupações principais a de promover a articulação entre o ensino da Matemática e a investigação em educação matemática. Em finais de 1998, considerou que seria importante identificar novas perspectivas de trabalho visando incrementar a relação entre os professores e a investigação e decidiu levar a cabo várias iniciativas para recolher ideias e sugestões nesse sentido, junto de professores com experiência na investigação e junto de todos os sócios da APM. Na sequência da informação obtida, o GTI concluiu que seria interessante criar no seu seio um grupo de estudos, que, após algumas discussões, se viria a fixar em Abril de 2000, em torno do tema *O professor como investigador*, expressão introduzida pelo educador inglês Lawrence Stenhouse (1984).

Neste artigo apresentar-se-ão algumas facetas da experiência vivida por este grupo com especial incidência sobre o percurso que conduziu à elaboração do livro *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (GTI, 2002), o principal produto do trabalho realizado. Incluir-se-á, ainda, uma reflexão sobre esta experiência com o objectivo de destacar as suas potencialidades formativas e os factores que, na perspectiva dos membros do grupo, contribuíram para o sucesso do trabalho.

Do grupo de estudos ...

O trabalho do grupo de estudos *O professor como investigador* é, desde o seu início, orientado por um duplo objectivo: por um lado, recolher e divulgar informação sobre esta temática e, por outro lado, promover a (auto)formação dos membros do grupo. É de acordo com estes objectivos que se definem as várias actividades a realizar: análise e discussão de textos, identificação de bibliografia, exploração de *sites* e preparação e edição de uma colectânea sobre o tema. Até Junho de 2001 mantêm-se todas estas actividades excepto a última. Esta, na sequência do trabalho que ia sendo realizado, começa a assumir novos contornos e evolui, como adiante se relata, num sentido que, dificilmente, poderia ser antecipado, enquanto proposta adequada, no início do funcionamento do grupo de estudos.

Durante este período, as reuniões realizam-se normalmente com intervalos de cerca de um mês e meio e a filiação no grupo é relativamente fluida. Ao lado de membros com elevada assiduidade outros há que faltam com frequência, e alguns a certa altura deixam mesmo de participar. De vez em quando, novos participantes vão ingressando no grupo. O foco das discussões do grupo de estudos nesta fase é: Que tipos de questões podem os professores estar interessados em investigar? Que investigação pode um professor fazer? Que critérios podem ser usados para tornar credível tal investigação? Empreender uma tal actividade é compatível com as restantes responsabilidades de um professor? Que formação é necessária para a conduzir? A pouco e pouco, a ênfase vai-se deslocando do actor (o professor que investiga) para o objecto a investigar (problemas relacionados com a sua própria prática). Deste modo começa a falar-se, cada vez menos, no *professor como investigador* e cada vez mais na *investigação sobre a própria prática*.

Quando, na primeira reunião do grupos de estudos, se incluiu, entre as actividades a realizar, a edição de uma colectânea sobre o tema, previa-se que esta fosse constituída, fundamentalmente, por textos, alguns dos quais em tradução, escolhidos entre aqueles que o grupo iria analisar e discutir. No entanto, na última reunião do ano de 2000, realizada em Dezembro — ocasião em que se discute, mais uma vez, a possível estrutura desta colectânea — começa a tomar forma a ideia dela integrar não só a tradução de alguns textos seleccionados mas também artigos originais elaborados quer por membros do grupo quer por outros professores e investigadores portugueses que tivessem desenvolvido trabalho que se pudesse enquadrar no tema.

Nesta fase, a ideia da selecção e tradução de textos não é, desde logo, abandonada. No entanto, os membros do grupo, ao considerarem o desafio de se envolverem na produção de textos originais sobre um tema que tinham vindo a estudar, assumem a possibilidade de se lançarem numa aventura muito mais exigente do que a mera selecção e tradução de textos, por muito critério e cuidado que se coloque neste trabalho. A aceitação desta possibilidade, muito provavelmente, não será alheia ao aprofundamento de conhecimentos sobre o tema em análise e à capacidade de reflexão acrescida proporcionada pela leitura dos textos, feita individualmente, e pelas discussões no seio do grupo que proporcionaram sempre um animado confronto de pontos de vista.

... Ao grupo de trabalho

Na reunião de Outubro de 2001 dá-se um novo passo na identificação do conteúdo da publicação que o grupo almejava. Abandona-se, definitivamente, a ideia de produzir uma colectânea com textos já existentes e decide-se produzir um livro constituído, fundamentalmente, por artigos originais. Esta mudança em relação ao possível conteúdo da colectânea foi marcante na vida do grupo, levando ao estabelecimento de uma dinâmica de trabalho inteiramente nova.

Define-se, nas suas linhas gerais, o conteúdo, estrutura e método de elaboração do livro. Estabelece-se que será subordinado ao tema *investigação sobre a própria prática* e define-se que os artigos a incluir poderão ser de natureza mais teórica, incidindo em aspectos gerais do tema, ou referir-se a experiências realizadas ou em curso em Portugal. Prevê-se que todos os membros do grupo estejam envolvidos no processo de elaboração do livro, quer produzindo artigos quer colaborando no aperfeiçoamento dos artigos produzidos pelos colegas. Estabelece-se a dimensão desejável e a estrutura dos textos contendo relatos de experiências e combina-se que cada participante indicará um título e um resumo, relativos à sua contribuição, que enviará a todos os membros do grupo antes da reunião seguinte de modo a que possam ser aí analisados. Começa, assim, a tomar forma o processo de trabalho que viria a ser adoptado ao longo da vida do grupo daí em diante. E, deste modo, o grupo de estudos transforma-se num grupo de trabalho que, embora sem perder de vista o objectivo da (auto)formação dos seus membros, passa a ter como eixo organizador da sua actividade a publicação do livro numa data acordada entre todos.

A partir de Novembro de 2001 inicia-se a produção dos textos, trabalho que assume um ritmo extremamente intenso durante o primeiro semestre de 2002. Vários professores de Matemática e formadores de professores são convidados a participar neste processo uma vez que se sabe que tinham realizado, recentemente, investigações relacionadas com a sua própria prática profissional.

Num primeiro momento, os resumos de cada contribuição são discutidos pelo grupo. Desta análise resultam algumas sugestões para a elaboração da primeira versão de cada artigo. É acordado um calendário de trabalho que permite que estas versões provisórias sejam analisadas individualmente por cada um dos participantes e, posteriormente, discutidas no grupo. O objectivo destas discussões é apresentar sugestões que possibilitem a elaboração de novas versões mais aperfeiçoadas. Estas são novamente enviadas a todos, analisadas e discutidas, e o ciclo repete-se até o artigo assumir a forma definitiva.

Este processo, por um lado, é algo moroso e trabalhoso para todos e, por vezes, um tanto frustrante, na medida em que nem sempre é fácil integrar tudo o que é sugerido ou chegar a um consenso sobre o que é importante fazer em relação a cada texto. No entanto, por outro lado, proporciona momentos de discussão muito enriquecedores. Com efeito, à medida que se vai desenvolvendo o trabalho do grupo nesta segunda fase da sua actividade, novas interrogações, mais directamente relacionadas com o tema da investigação sobre a própria prática, vão surgindo e o foco das discussões desloca-se para questões como: Que vantagens e dificuldades pode ter um professor em investigar sobre a sua própria prática profissional? Que relação há entre investigar e reflectir? Qual o possível papel da colaboração? O que nos dizem as experiências em que temos estado envolvidos sobre o alcance deste tipo de trabalho?

O título definitivo do livro, só viria a ser fixado já perto do final do processo, em Maio de 2002.

A publicação *Reflectir e investigar*

Nos seus aspectos gerais, foi este processo que presidiu à elaboração do livro, cujo objectivo é dar a conhecer aos profissionais da educação matemática a problemática da investigação sobre a prática, ilustrando-a com casos concretos de trabalhos de investigação realizados em Portugal. A relevância desta publicação decorre do reconhecimento, cada vez maior, pelos profissionais da educação — onde se incluem não só professores dos diversos níveis de ensino, incluindo o superior, como também formadores, psicólogos escolares e técnicos da administração — do valor da investigação sobre a própria prática, como um meio de promover o desenvolvimento profissional e organizacional e como contributo para a produção de conhecimento relevante sobre a área em questão. Na verdade, os próprios profissionais são os que, muitas vezes, melhor conhecem os problemas que se lhes colocam no dia a dia e quem melhor pode avaliar as potencialidades e os constrangimentos das estratégias adoptadas para lidar com eles.

Três dos artigos do livro são ensaios de natureza teórica. Neles discute-se o alcance da investigação sobre a prática, confrontando o significado desta perspectiva com o significado de reflexão e de outras formas de investigação como a académica e a investigação-acção. Analisam-se, também, possíveis critérios de qualidade deste tipo de investigação bem como a possibilidade de ele vir a constituir um novo paradigma de investigação, ao lado dos paradigmas clássicos — positivista, interpretativo e crítico. Dá-se, ainda, atenção ao papel da colaboração e da reflexão na actividade do professor que procura investigar sobre a sua prática. Dois destes três artigos foram redigidos por equipas de dois elementos.

A seguir a estes artigos, surgem, na publicação, dez relatos de experiências. Estes apresentam uma descrição concisa, mas tanto quanto possível rigorosa, da respectiva questão orientadora e da metodologia de investigação adoptada, indicam os resultados ou evidências obtidas e discutem as suas implicações para a prática profissional do respectivo autor. As experiências dizem respeito a trabalho realizado em aulas do 2° e 3° ciclos do ensino básico e do ensino secundário e em programas de formação inicial e contínua de professores. No seu conjunto, estes artigos revelam que realizar investigação sobre a própria prática é uma actividade que pode despertar grande interesse nos respectivos actores e que é susceptível de proporcionar significativas implicações para a sua prática profissional.

O livro contém, ainda, dois textos produzidos em 2001 e uma bibliografia temática organizada em quatro categorias, que se consideraram ser instrumentos úteis para documentar a situação portuguesa do trabalho existente neste campo e para apoiar quem, no futuro, se pretenda iniciar no tema. Inclui, além disso, no final, uma pequena nota biográfica sobre os autores para que se possa perceber quem são e conhecer, um pouco, o seu percurso profissional onde se enraíza o interesse que sentiram por este tipo de trabalho.

As perspectivas teóricas fundamentais elaboradas neste trabalho e alguns exemplos dos relatos de experiências foram apresentados por diversos membros do grupo em encontros nacionais e internacionais e em cursos e seminários em diversas instituições, tendo sido recebidas, de um modo geral, com muito interesse.

A reflexão sobre a experiência

No final da sua actividade, o grupo decidiu efectuar uma reflexão sobre o percurso por ele realizado. Essa reflexão — elaborada por escrito a partir de um questionário previamente enviado a todos os membros do grupo — evidencia que o processo seguido se revelou fortemente formativo para todos os participantes. Por um lado, são unânimes em reconhecer que efectuaram novas aprendizagens referentes ao tema do grupo e a outros temas que com ele se relacionam de perto (investigação sobre a própria prática, reflexão, investigação-acção, etc.) e que desenvolveram as suas competências e o seu interesse em trabalhar neste campo. Em particular, vários são os que indicam ter mobilizado, directamente, conhecimentos e ideias discutidas pelo grupo para a sua prática docente e de investigação conduzida noutros contextos profissionais. Por outro lado, são também vários os participantes que referem ter este trabalho constituído uma experiência profissional gratificante e enriquecedora, em termos do seu próprio desenvolvimento profissional, contribuindo para se sentirem mais seguros de si mesmos como profissionais e para o desenvolvimento de diversas capacidades, em especial ao nível da comunicação oral e escrita.

Na perspectiva dos membros do grupo, houve dois factores essenciais que concorreram, de modo decisivo, quer para as potencialidades formativas que reconhecem existir no trabalho realizado quer para o sentimento de satisfação que experienciam: (i) o ambiente de colaboração e as relações interpessoais estabelecidas no grupo e (ii) as metodologias de trabalho adoptadas pelo grupo, em particular, a ênfase no processo de escrita e de discussão dos textos escritos pelos seus elementos. A importância do primeiro factor é bem evidente nos seguintes testemunhos individuais:

> O grupo foi formado por pessoas (que o incorporaram de livre vontade) com experiências profissionais diversas e provavelmente expectativas bastante diferentes em relação ao trabalho que se iria desenvolver, o que poderia ter constituído uma dificuldade para o seu bom funcionamento. Contudo essa diversidade foi liderada de forma a potencializar os contributos de cada um, tendo contribuído para criar um ambiente de trabalho agradável onde se desenvolveram e fortaleceram relações inter-pessoais. (Irene)

> [Entre os factores que contribuíram para que a experiência de participação no grupo fosse positiva está] a qualidade das relações inter-pessoais que fomos conseguindo estabelecer que, do

meu ponto de vista, facilitaram que me disponibilizasse, interiormente, a ouvir críticas sobre as minhas ideias e trabalho e encarasse esta experiência como fonte de crescimento pessoal e profissional sem recear que ela se viesse a revelar dolorosa. (Ana)

Por outro lado, o papel das metodologias adoptadas pelo grupo transparece, claramente, nas seguintes reflexões:

> Na base destas aprendizagens [aprofundamento de conhecimentos relacionados com o tema do grupo] estiveram tanto a leitura de textos seleccionados, feita individualmente, como a discussão desses textos — com a associada possibilidade de confronto de pontos de vista — existente nas sessões de trabalho conjunto. (Ana)

> Esta aprendizagem derivou directamente da metodologia adoptada pelo grupo: escrever, escrever, escrever, e da insistência na preferência de isso ser feito de forma a poder ser efectivamente lido. (Manuela)

Os caminhos percorridos pelo grupo não foram isentos de obstáculos para os seus membros. De facto, nas suas reflexões, muitos são os que indicam dificuldades que sentiram ao longo do processo de trabalho. Algumas, prendem-se com a gestão do tempo: não foi fácil compatibilizar o tempo requerido pelas várias tarefas definidas pelo grupo (que para além da participação nas reuniões envolvia bastantes horas de trabalho individual, lendo e redigindo textos) com outros compromissos pessoais e profissionais. Outras, têm a ver com um sentimento de apreensão pela dificuldade da tarefa, para a qual se sentiam pouco preparados receando não a conseguir levar até ao fim. No entanto, findo o processo, vencidas as dificuldades e perante o produto final (individual e colectivo) e o balanço pessoal do percurso feito, é unânime o sentimento de satisfação com o trabalho realizado e as aprendizagens efectuadas.

A concluir

No grupo, cujo trabalho se relata neste artigo, colaboraram professores do 1°, 2° e 3° ciclos do ensino básico e do ensino secundário, formadores de professores de universidades e escolas superiores de educação, uma orientadora de estágio, um docente de Matemática do ensino superior e uma professora do 1° ciclo requisitada no Ministério da Educação. O funcionamento do grupo e os resultados da sua actividade mostram bem as potencialidades decorrentes de um trabalho conjunto envolvendo profissionais com formações, interesses, experiências e conhecimentos diversificados.

É um facto que este grupo não é um grupo qualquer. Tratava-se de professores e formadores que estavam, à partida, interessados na investigação. Muitos deles — mas não todos — realizavam ou tinham realizado, recentemente, estudos de mestrado ou doutoramento que serviram de base ao seu contributo para o grupo. No entanto, as investigações sobre a própria prática podem ter uma origem muito diferente, tendo por base professores integrados em equipas de projecto, muitas vezes de natureza multidisciplinar.

Estamos em crer que trabalhos deste tipo tenderão a intensificar-se à medida que os profissionais da educação (sejam eles professores ou actores com outros papéis no sistema educativo), assumam, cada vez mais, como sua a tarefa de lidar com os problemas que afectam a sua prática, no quadro de uma cultura profissional marcada pelo dinamismo e pelo sentido crítico, e também pelo sentido de responsabilidade perante os seus alunos e a sociedade.

Referências

GTI (Ed.). (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional.* Lisboa: APM.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum.* Madrid: Morata.

João Pedro da Ponte
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Ana Boavida
Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Setúbal

XV Seminário de Investigação em Educação Matemática

XV SIEM Seminário de Investigação em Educação Matemática

O XV Seminário de Investigação em Educação Matemática, organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação da APM, vai realizar-se nos dias 27 e 28 de Setembro de 2004 na Covilhã, nas instalações da Universidade da Beira Interior.

Este seminário pretende constituir um espaço de divulgação e debate das principais linhas de investigação nacional e internacional em Educação Matemática.

Para mais informações contacte através do endereço xvsiem2004@ipb.pt ou consulte a página do XV SIEM em http://www.ipb.pt/xvsiem2004.

Encontros

Seminário: O insucesso em Matemática: Contributos da investigação

Este seminário, que se realiza nos dias 23 e 24 de Abril de 2004 na Escola Superior de Educação de Lisboa, tem por objectivo analisar os contributos da investigação em educação matemática sobre o ensino da matemática em Portugal e confrontá-los com pontos de vista de outras comunidades científicas – matemáticos, cientistas e investigadores das ciências da educação.

Para mais informações consultar o site: http://www.educ.fc.ul.pt/cie/sem-mat.htm

XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM)

O Encontro realiza-se em Beja nos próximos dias 2,3 e 4 Maio com o tema História da Educação Matemática.

Para mais informações consultar o site: http://www.eseb.ipbeja.pt/eiem

Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM)

Este Encontro realiza-se de 5 a 8 de Maio, no Instituto Superior de Engenharia do Porto.

Para mais informações consultar o site: http://www.enspm.isep.ipp.pt

1.º Encontro de Matemática Elementar (EME 2004)

Este Encontro realiza-se de 3 a 6 de Junho, no Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho.

Para mais informações consultar o site: eme2004@iec.uminho.pt

I C M E
1 0
2 0 0 4

ICME 10
10.º Congresso Internacional em Educação Matemática

Este Congresso realiza-se de 4 a 11 de Julho de 2004, em Copenhaga, Dinamarca.

Para mais informações consultar o site: http://www.icme-10.dk/

PME 28

The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)

Esta conferência internacional realiza-se em Bergen, Noruega, no período de 14 a 18 de Julho de 2004.

Para mais informações consultar o site: http://www.pme28.org

ProfMat2004

O Encontro Nacional de Professores de Matemática, ProfMat2004, irá realizar-se nos dias 29 e 30 de Setembro e 1 de Outubro, na Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Localização do sítio do Encontro: http://www.apm.pt/profmat2004.
Endereço electrónico do Encontro: profmat2004@apm.pt.

VI Simpósio Internacional de Informática Educativa

Este Simpósio terá lugar em Cáceres, Espanha, durante os dias 16, 17 e 18 de Novembro de 2004.
Para mais informações consultar o site: (http://siie04.unex.es)

CERME4
4.º Congresso da Sociedade Europeia de Investigação em Educação Matemática (ERME)

A conferência terá lugar em Platja d'Aro, Espanha, de 17 a 21 de Fevereiro de 2005.

Para mais informações consultar o site: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/second.html

V Colóquio de Ciências da Educação — Formar Professores, para que Escola?

A conferência terá lugar na Universidade Lusófona, nos dias 29 e 30 de Abril de 2004.

Para mais informações consultar o site: http.//www.ulusofona.pt/coloquio/Index.htm

III Congresso Internacional de Educação — *O Mundo da Criança*

6, 7 e 8 de Maio de 2004
Aula Magna da UTAD — Vila Real

Terá lugar em Vila Real, na UTAD — Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. No site http://www.utad.pt/pt/eventos/cog_o_mundo_crianca//index.html é possível encontrar as informações relativas ao evento.

Em defesa da utilização da calculadora algoritmos com sentido numérico

Cristina Loureiro

Actualmente quando se fala da utilização ou não da calculadora reduz-se praticamente a discussão à oposição entre cálculo algorítmico e cálculo com o recurso à calculadora. A meu ver esta dicotomia é falaciosa, não esclarece as dimensões da problemática subjacente e não oferece pistas para podermos avançar. O cálculo tem, tanto na escola como na vida de todos os dias várias dimensões que importa conhecer melhor e relacionar, para compreender realmente o que está em causa e perspectivar formas de actuação didácticas.

No dia a dia, os comuns mortais, mesmo aqueles que se consideram exímios no cálculo, recorrem tanto ao cálculo mental como à calculadora. Em situações muito particulares recorrerão a um algoritmo. Penso em mim. Num restaurante, para saber quanto cabe a cada um num total de 75 euros para 9 pessoas, eu penso 72 dá 8 euros, porque 8 x 9 = 72, mais meio euro para cada um, dá mais 4,5, o que faz um total de 76,5 euros. Fica assim, 1,5 de gorjeta e cada um paga 8,5 euros. E recorro sempre a produtos, somas e diferenças, seja qual fôr o valor em questão. E se pensar bem são poucas as outras situações em que tenho necessidade de obter valores de operações. O mais frequente é haver uma máquina que me dá valores exactos, e o que eu tenho de fazer, e faço muitas vezes, é avaliar a ordem de grandeza do resultado recorrendo à estimativa e ao cálculo mental com números mais favoráveis. Esporadicamente vivo situações de espanto, como por exemplo na padaria, por fazer mais depressa mentalmente as contas do que a senhora da velha guarda que recorre à calculadora. No saldos obtenho logo um valor aproximado antes do vendedor, velho ou novo, me dizer, com ares aliciantes, qual é o preço por que me vai ficar. E nunca, nunca, uso algoritmos como recurso para cálculo mental. E sei do que estou a falar. E ando sempre com uma calculadora no bolso porque apesar da minha perícia em cálculo pode surgir sempre um problema interessante para explorar em que os cálculos de papel e lápis só vão perturbar.

Na escola as coisas já não são tão simples. Embora a expressão mais vulgar seja *as contas*, devemos distinguir cálculo mental, cálculo com algoritmos e cálculo com o recurso à calculadora. E importa também considerar o que se passa com os professores e com os alunos. Vou situar-me no 1° ciclo e em Portugal.

Os professores, de uma maneira geral recusam usar a calculadora, é uma espécie de ponto de honra, *"Calculadora, eu? Não obrigada!"*. Nem sabem o que estão a perder. Quanto ao cálculo mental são dominantes as tentativas de o realizar fazendo os algoritmos de cabeça, sem recorrer ao papel e lápis. Muitas vezes desconhecendo ou então desvalorizando os processos e estratégias pessoais de cálculo mental, relacionados com os números em questão. Quando os números se complicam e os decimais intervêm, há algum mal estar, aparecem alguns erros, e permanece a recusa à calculadora. Não é nada apetecível calcular mentalmente o total a receber de 176 alunos em que cada um paga 2,35 euros. Então surge, para eles, a necessidade de recorrer ao cálculo de papel e lápis com recurso a um algoritmo.

Quanto aos alunos, em meu entender, a situação complica-se. Cálculo mental não existe. Entendendo o cálculo mental como o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo que levem uma pessoa a gostar de calcular mentalmente, dominando a aptidão para calcular, aproveitando as características dos números e o que já sabe sobre eles, e recusando pegar numa calculadora para saber quanto é 12 x 13, ou 156 + 34, ou 76 : 4. Cálculo com a calculadora não há, porque se receia que os alunos não aprendam a calcular. E assim, todos os problemas desafiantes e interessantes, capazes de estimular os alunos para o gosto por resolver problemas, por pensar, por conhecer e dominar os números não podem estar presentes. Sem recorrer a uma calculadora, ninguém se atreve a pedir a um aluno que calcule quantos dias já viveu, ninguém os desafia para saber quanto pesam os alunos da turma todos juntos, ou quanto rende um jogo no novo estádio do Benfica se cada espectador pagar 15 euros pelo bilhete. A lista de problemas e questões desafiantes que podemos apresentar a miúdos do 1° ciclo é interminável, e eles estão ávidos de desafios destes. Disto não tenho qualquer dúvida porque tenho passado muito do meu tempo em salas do 1° ciclo. Mas pobres destas crianças, não lhes são propostas situações significativas e estimulantes porque os seus professores receiam que eles não aprendam a tabuada, nem a usar os algoritmos.

Em meu entender os algoritmos dominam da maneira errada a matemática no 1° ciclo. Há anos que defendo a utilização da calculadora na aprendizagem da matemática pelas potencialidades de resolução de problemas e de investigação que ela traz. Referindo sempre que a sua utilização deve ser associada ao desenvolvimento de capacidades de estimativa e de cálculo mental. E valorizando também o desenvolvimento do raciocínio algorítmico por ser intrínseco à natureza do raciocínio humano e à natureza da matemática.

A via que escolhi para lançar novas ideias nesta discussão passa por desmontar os algoritmos e é isso que me proponho fazer.

Este texto é dedicado a todos os meus alunos que se debatem com as dúvidas de quem se sente pressionado a ensinar o que mal sabe usar e não compreende como funciona e que experimenta, simultaneamente, a atracção de querer ensinar pelo desafio, pelo desenvolvimento, pelo gosto de aprender e de saber, pela criatividade, pelo esforço e também pelo prazer. É dedicado também a todas as crianças portuguesas que esperam avidamente nas escolas do 1° ciclo que os seus professores os ensinem a usar a matemática para pensar melhor e assim serem cidadãos mais felizes e realizados.

Algoritmos

Um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar. (Usiskin, 1998, p. 7). Exemplos de algoritmos podem ser encontrados através da história, desde os tempos mais remotos dos antigos babilónicos. Considera-se que a palavra algoritmo deriva do nome do matemático árabe do século nono al-Khowârizmi. Os algoritmos mais conhecidos e divulgados são os algoritmos para as quatro operações, mas há muitos, muitos outros algoritmos e o desenvolvimento tecnológico está intimamente ligado ao estudo e construção de algoritmos.

Há anos que estudo algoritmos, sozinha ou com os meus alunos, que os procuro saber usar, dominar e compreender do ponto de vista dos seus fundamentos matemáticos e das suas perspectivas didácticas. Vou analisar algoritmos das quatro operações aritméticas básicas para depois retomar o papel que eles poderão ter na escola. Nesta discussão chamarei algoritmo dominante para uma determinada operação ao algoritmo cuja utilização é mais comum em Portugal. Os outros serão algoritmos alternativos e, sempre que possível, serão designados por uma característica significativa dos seus procedimentos.

Os fundamentos matemáticos dos algoritmos dominantes das operações aritméticas são as características do próprio sistema de numeração decimal e as propriedades das operações. E é interessante perceber como estes aspectos estão presentes num algoritmo para compreender as dificuldades que os alunos poderão ter na sua utilização e compreensão.

O reflexo do sistema de numeração decimal num algoritmo evidencia-se na decomposição dos números que nele intervêm, na obrigação de trabalhar ordem a ordem e na recomposição ou reagrupamento das unidades de uma determinada ordem quando o seu número é, ou precisamos que passe a ser, igual ou superior a 10. Esta acção matemática do reagrupamento é informalmente reconhecida como o transporte. Aliás é comum ouvirmos os professores distinguir algoritmo com transporte de algoritmo sem transporte. O algoritmo é o mesmo, os números em causa é que podem exigir, ou não, a necessidade de reagrupamento. As propriedades das operações permitem justificar muitos dos procedimentos que constituem um algoritmo, como veremos.

Um outro aspecto que também estará presente na discussão que vou apresentar é o sentido da operação em jogo no algoritmo. Sendo hoje reconhecido e estudado que para uma operação aritmética pode haver mais do que um sentido (Ponte e Serrazina, 2000) é natural que discutamos qual é o sentido que está ou não presente na realização de um determinado algoritmo e, por isso, quais são as situações e problemas que poderão facilitar o trabalho com esse algoritmo.

Outra ideia que nunca será demais reforçar, é que na utilização de qualquer algoritmo há sempre uma componente de cálculo mental. Imaginar que alguém poderá desenvolver o seu poder de cálculo com algoritmos sem desenvolver, previamente e depois em paralelo, as suas capacidades de cálculo mental é comparável a pensar que um atleta se prepara para o pentatlo sem praticar as várias modalidades que o compõem.

Algoritmos para a adição

Para discutir os algoritmos vamos partir de situações descontextualizadas e, por isso, o sentido mais adequado a dar à adição é o de combinar. Porém, nesta discussão, designarei uma das acções realizadas por juntar visto este termo me parecer bastante significativo para o que é realmente feito. O algoritmo dominante para a adição é simples mas envolve na sua utilização uma conjugação permanente de juntar e reagrupar que interessa discutir.

	reagrupar	reagrupar	
		1	1 1
867	86 7	8 6 7	8 6 7
+ 453	+ 45 3	+ 4 5 3	+ 4 5 3
	10	12 $\cancel{1}$0	13 $\cancel{1}$2 $\cancel{1}$0
	juntar	juntar	juntar

A soma é 1320. Notamos que as unidades de cada ordem foram juntas e imediatamente reagrupadas. As duas acções matemáticas fundamentais, juntar e reagrupar, foram realizadas alternadamente. Esta sequência de procedimentos exige que se trabalhe da direita para a esquerda. Esta orientação de todo o trabalho, garante que, quando se juntam as unidades da ordem maior, neste exemplo, as centenas, tem-se o resultado final escrito correctamente no sistema de numeração decimal.

Observemos agora a interpretação de um algoritmo de somas parciais. São três as acções matemáticas que vão ser executadas: decompor, juntar e reagrupar.

867 (800+60+7)	867	867	867
+ 453 (400+50+3)	+ 453	+ 453	+ 453
decompor	1200	1200	1200
		110	110
	juntar	juntar	10
			juntar

Neste momento acabei de juntar as unidades de cada ordem e tenho o resultado final, porém este não obedece às regras de escrita do sistema de numeração decimal. Tenho 12 centenas, 11 dezenas e 10 unidades. O que ainda tenho a fazer é reagrupar as unidades de cada ordem. O reagrupamento tem de ser agora feito com a orientação da direita para a esquerda. Explicitando o meu raciocínio mental de reagrupamento ao lado terei uma apresentação única deste algoritmo com o seguinte aspecto:

867	
+ 453	
1200	(1 + 12 centenas, isto é 13 centenas)
110	(1 + 11 dezenas, 12 dezenas, ou seja 1 centena e 2 dezenas)
10	(10 unidades, que é uma dezena)
1320	

Nesta explicitação do algoritmo percebe-se que trabalhei também ordem a ordem, tendo consciência em cada soma parcial da ordem de grandeza que estava em causa. Na primeira soma parcial juntei 8 centenas com 4 centenas, obtendo 12 centenas, e assim sucessivamente. Trabalhei da esquerda para a direita o que é mais coerente com a nossa forma de escrita e mais coerente com o próprio sentido da operação. É reconhecida uma tendência intuitiva para juntar começando do maior para o menor.

A única, e não é pequena, diferença entre este algoritmo da adição e o algoritmo dominante é que aqui primeiro decomponho, depois junto tudo, ordem a ordem do maior para o menor e depois reagrupo. Esta característica permite-me trabalhar da esquerda para a direita porque o reagrupamento apenas no final faz o controle adequado do resultado obtido. A utilização de material adequado para compreender estes dois algoritmos, o *Mab*, ilustra muitíssimo bem a conjugação das duas acções matemáticas presentes, juntar e reagrupar.

O aspecto mais significativo que importa evidenciar neste algoritmo é que o sentido numérico, que inclui o sentido dos números e o sentido da operação, não se perde na mecanização, como aconteceu com o algoritmo dominante.

Algoritmos para a subtracção

Começo por registar que em Portugal quase toda a gente aprendeu, e aprende ainda, um algoritmo da subtracção que recorre a uma propriedade pouco intuitiva da subtracção, a propriedade da invariância do resto. Incapazes de explicar este facto inexplicável às crianças, os professores arranjam menmónicas mais ou menos tolas para as crianças decorarem os procedimentos do algoritmo. Registado com mais informação do que é habitual, a apresentação deste algoritmo seria:

+10	+100	
435	4 3 15	4 13 15
	+100	
− 286	− 2 **9** 6	− **3** **9** 6
	4 9	1 4 9
+10		

Este algoritmo é designado por algoritmo de compensação. A sua interpretação, à luz das propriedades da subtracção, é a de que realizamos a diferença 545 – 396 em vez de 435 – 286, porque adicionámos o mesmo número, 10 + 100, ou seja 110, ao subtractivo e ao aditivo. Sabemos que podemos fazer isto pela propriedade da invariância do resto que nos garante que se mantém a diferença quando adicionamos o mesmo número aos dois termos de uma subtracção.

O algoritmo para a subtracção que vou considerar como dominante é o mais análogo ao dominante para a adição e é habitualmente designado por algoritmo de decomposição. Às diferenças vou atribuir o sentido de separar.

reagrupar — reagrupar

435 / – 286

2 / 4 ~~3~~ 15 / – 2 8 6 / 9

3 12 / ~~4~~ ~~3~~ 15 / – 2 8 6 / 1 4 9

separar — separar e voltar a separar

Neste algoritmo, de forma análoga ao da adição, recorre-se alternadamente às duas acções matemáticas, separar e reagrupar. A diferença é que o reagrupamento precede a separação na medida em que preciso, para cada ordem, de ter um número de unidades igual ao superior ao número que quero separar para poder fazer esta acção. Se de 5 não posso separar 6, preciso de ir buscar uma unidade à ordem seguinte, reagrupando, para ficar com 15 unidades e então poder separar 6 e ver que ficam 9, o número que é escrito no resto, na ordem correspondente. Este tipo de raciocínio prolonga-se por todas as ordens, da direita para a esquerda, até chegar à ordem de maior valor. Esta sequência de procedimentos garante, como vimos para a adição, o resultado final escrito no sistema de numeração decimal.

Observemos agora a interpretação de um algoritmo de diferenças parciais.

435 — 435

– 286 — – 286

200 (de 4 centenas separo 2 e ficam 2 centenas)

– 50 (faltam 5 dezenas porque preciso de tirar 8 e só tenho 3)

– 1 (falta 1 unidade porque preciso de tirar 6 e só tenho 5)

Neste momento acabei de separar as unidades de cada ordem e tenho o resultado final, porém este não obedece às regras de escrita do sistema de numeração decimal. Passo então à acção de reagrupar e posso ter um registo final do seguinte tipo.

435
– 286
200
– 50 — 150
– 1 — 149
149

Este algoritmo de diferenças parciais não estragou os números de partida, porque não precisou de fazer reagrupamentos das unidades de cada uma das suas ordens. Os números ficaram intactos. O sentido da subtracção, neste caso mudar juntando, sobrepôs-se e dominou o raciocínio, em paralelo com o sentido numérico do valor real de cada ordem. À semelhança do que foi discutido para o algoritmo das somas parciais, não é um algoritmo de pura mecanização porque a sua compreensão é acessível, passível de ser manipulada e muito significativa.

Há um outro algoritmo alternativo para a subtracção muito interessante. Em inglês é designado por *adding up* que podemos traduzir por *adição de baixo para cima*. Este algoritmo está ligado ao sentido de *tornar igual* da subtracção.

286	4
290	10
300	100
400	+ 35
435	**149**

Este algoritmo fundamenta-se na adição como operação inversa da subtracção. O que fizemos foi obter o número que somado com 286 dá 435. Esta adição foi feita com significado e grande sentido numérico. Este algoritmo é a formalização do procedimento antigo para obter trocos.

O que eu gosto particularmente nestes algoritmos de somas e diferenças parciais, bem como neste último, é o grande sentido do número que está presente.

Algoritmos para a multiplicação

Passemos então à multiplicação. As coisas vão começar a ficar mais herméticas.

483	483
x 24	x 204
1932	1932
966□	966□□

Na utilização deste algoritmo está totalmente ausente o sentido da multiplicação. Trabalha-se com os dois factores decompostos, calculam-se produtos sem qualquer significado e vai-se reagrupando as unidades de cada ordem obtida. Estas três acções, de natureza totalmente diferente, devem ser realizadas em cadeia e alternadamente, de modo análogo ao que vimos nos algoritmos dominantes anteriores. Não há qualquer apelo ao sentido numérico, nem controle ou avaliação dos vários cálculos intermédios que são realizados. A parcialidade dos registos dos resultados intermédios é uma dificuldade acrescida. O domínio de cálculo mental tem de ser grande, apesar de ser só o domínio da tabuada, porque eu calculo 4 x 3, mas não registo 12, registo apenas 2 e reagrupo as unidades numa dezena que devo depois adicionar a 4 x 8 sem perceber que passei a trabalhar com dezenas. E assim por diante. Ao esgotar os produtos referentes às unidades do factor activo, o multiplicador, fica completa uma linha. E passa-se para a linha debaixo, deixando a ordem das unidades vaga porque se vai passar a trabalhar com dezenas. Mas quem sabe este porquê? Se o factor activo fosse 204 teríamos deixado duas ordens vagas porque passaríamos a trabalhar com centenas. Depois destes registos de produtos, a adição destes produtos intermédios segue a orientação do algoritmo dominante da adição, com os devidos cuidados de considerar as posições vagas das ordens como correspondentes a zero unidades nessa ordem.

Analisemos um algoritmo alternativo de produtos parciais.

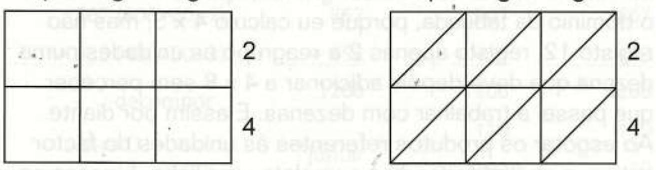
	483	(400 + 80 + 3)
x	24	(20 + 4)
	8000	(2 dezenas vezes 4 centenas são 8 milhares)
	1600	(2 dezenas vezes 8 dezenas são 16 centenas)
	60	(2 dezenas vezes 3 unidades são 6 dezenas)
	1600	(4 vezes 4 centenas são 16 centenas)
	320	(4 vezes 8 dezenas são 32 dezenas)
	12	(4 vezes 3 unidades são 12 unidades)

A soma destas parcelas todas não oferece grandes questões. Ela pode ser abordada como adição com reagrupamentos. A escrita do resultado final, 11592, pode surgir numa linha final de uma vez só, ou, por partes se o reagrupamento fôr feito ordem a ordem.

Este algoritmo também parte da decomposição dos factores em causa. Porém, cada produto parcial obtido tem um forte sentido numérico que está ligado aos produtos por potências de 10. Há mais compreensão e sentido numérico do que mecanização. É verdade que o sentido da multiplicação também está oculto, mas o valor do cálculo mental com potências de dez é uma mais valia. Do ponto de vista de registos é muito claro e não recorre à cadeia cálculo-reagrupamento-cálculo-reagrupamento, ... tão exigente no algoritmo dominante. Facilita o controle de cálculo e permite a compreensão da influência das ordens na multiplicação.

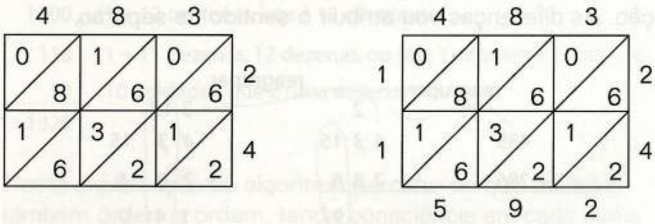
Há um outro algoritmo para a multiplicação, conhecido entre nós por *algoritmo de gelosia*, que combina defeitos e virtudes dos dois algoritmos que discutimos. A sua utilização é hermética, não se percebe logo porque funciona, no entanto permite o registo de produtos parciais sem necessidade de fazer reagrupamentos mas também sem sentido numérico. A forma de registo dos produtos parciais facilita a obtenção do resultado final como soma dos produtos parciais obtidos. Vejamos a sua utilização.

Constrói-se uma rede rectangular, neste caso de 3 por 2, porque um dos números tem 3 algarismos e o outro tem 2.



Construída esta rede rectangular, em cada célula será registado o produto dos números da linha e da coluna correspondentes. Como esse produto poderá ter mais do que um algarismo, mas nunca mais do que dois algarismos, divide-se cada célula em duas partes.

Regista-se agora em cada célula o produto correspondente, sem qualquer preocupação de ordem de preenchimento. No caso do produto ser inferior a dez, pode colocar-se um zero na parte superior da célula. Também não há cálculos escondidos nem reagrupamentos.



Adicionam-se agora os números que estão em diagonal, da direita para a esquerda, e fazendo os reagrupamentos quando necessário.

Este algoritmo tem a virtude de ser muito simples de usar, mesmo sem ser compreendido, e de os alunos gostarem de o usar quase como um jogo.

Algoritmos para a divisão

Temos vindo a analisar algoritmos passo a passo, tentando mostrar como, à medida que a operação é mais elaborada, os algoritmos se complexificam, a sua compreensão fica mais difícil e fica mais obscurecido o sentido da operação. Para a divisão vou seguir uma orientação diferente. Até aqui todos os cálculos foram feitos no vazio, os números trabalhados foram apresentados despidos de qualquer significado. Para discutir algoritmos da divisão parece-me mais interessante partir de situações muito simples mas que permitem atribuir significado aos números, às operações e aos resultados obtidos.

Perante um problema do tipo *"quero fazer equipas de 3 meninos com os alunos da turma, são 25 meninos, quantas equipas posso fazer?"*, uma criança do 1° ano será capaz de registar sem grande dificuldade uma coluna de números, depois contará quantos 3 escreveu e dirá que são 8 equipas e que sobra um menino.

Outra criança poderá pensar de forma mais eficaz, fazendo logo mais do que uma equipa de cada vez e registando o número de equipas que está a fazer.

Qualquer criança que faça um registo deste tipo revela um raciocínio mental organizado e uma capacidade de comunicação escrita do que está a pensar muito rica. Está a percorrer pelos seus passos, e por isso com segurança, um bom caminho. Este é o percurso do algoritmo da divisão por subtracções sucessivas, também conhecido entre nós por algoritmo americano e felizmente já ensinado e aceite

25 *meninos*
③
22
③
19
③
16
③
13
③
10
③
7
③
4
③
1

equipas de 3

25 *meninos*	
12	4 *equipas*
13	
12	4 *equipas*
1	8 *equipas*

por alguns professores. Neste algoritmo, cuja compreensão está ligada ao sentido de medida da divisão (quantas vezes o divisor cabe no dividendo), o utilizador trabalha com o dividendo e o divisor sem os decompôr e recorre a múltiplos conhecidos do divisor. Assim, a utilização deste algoritmo é pessoal e está ligada ao domínio que cada um tem dos múltiplos e dos produtos por potências de 10. Com números maiores este domínio torna-se mais evidente como poderemos observar numa outra situação.

Os 1721 alunos do 1° ciclo da Vila Azul vão fazer uma excursão de autocarro. Cada autocarro leva 75 meninos. Quantos autocarros são precisos?

75	1 7 2 1	
	− 7 5 0	10
	9 7 1	
	− 7 5 0	10
	2 2 1	
	− 1 5 0	2
	7 1	22

Desafio-vos a usar este algoritmo para cálculos com números decimais. Mas com números com significado, não em situações do tipo *"vou dividir 2356,68 por 50,79"* sem que estes números sejam mais do que símbolos. Por exemplo, com 374,5 kg de amêndoas quantos pacotes de 0,375 posso fazer? E já estamos a ceder nos números, quem chega ao preciosismo de fazer pacotes de 375 gramas de amêndoas?

Analisemos agora o algoritmo dominante. A explicação do tipo de acções em jogo complica-se agora e é muito difícil apresentá-la sem qualquer apoio oral. Convido o leitor a experimentar e a notar que se mantém a alternância entre a decomposição do dividendo e a sua divisão pelo divisor. Chamo atenção para o facto de que se trabalha todo o algoritmo com o dividendo e o divisor decompostos e se obtém também um quociente decomposto, tudo isto sem qualquer sentido numérico dos números em jogo. O próprio sentido da divisão, que está presente no algoritmo alternativo apresentado, está aqui praticamente ausente, aparecendo só ao de leve na obtenção de cada um dos algarismos do quociente.

1721	75		1721	75		1721	75
	2		−150	2		−150	22
			221			221	
						−150	
						71	

Cada algarismo do quociente foi obtido sem qualquer sentido numérico. Nem sequer houve uma ideia inicial da ordem de grandeza do quociente. O que poderia ter sido obtido facilmente se tivesse sido feito uma análise prévia da relação entre o dividendo e o divisor, 10 seria pouco para o divisor, porque 10 x 75 = 750, 100 seria demais porque 100 x 75 = 7500. Assim se poderia ter imediatamente concluído que o quociente seria um número entre 10 e 100, isto é, um número da ordem das dezenas, ou dito de uma maneira mais informal, um número de dois algarismos. Este tipo de análise nunca é feito, mas ele é uma garantia de segurança, nomeadamente em situações mais críticas, quando é preciso registar que há zero unidades de uma determinada ordem no quociente, como por exemplo em 20200 : 200.

20200	200		20200	200		20200	200
	1		−200	10		−200	101
			20			200	
						−200	
						0	

20 não chega para fazer um grupo de 200

A maior parte das pessoas enganar-se-á se quiser obter este quociente recorrendo ao algoritmo sem fazer ideia da ordem de grandeza do quociente. Por isso, seja qual fôr o algoritmo que se utilize, uma estratégia de segurança é obter previamente a ordem de grandeza do quociente fazendo produtos por potências de 10 do divisor. Neste caso ter-se-ia concluído rapidamente que o quociente seria da ordem das centenas e estaria muito próximo de 100, visto que 100 x 200 = 20 000. Esta estratégia de avaliação prévia da ordem de grandeza do quociente pode traduzir-se na marcação de casas na posição do quociente ao iniciar o algoritmo.

20200 | 200
__ __ __

Estranhamente os cálculos com potências de 10 estão explicitamente referidos nos programas do 1° ciclo, mas

este tipo de análise de resultados não é feito e não é desenvolvida a capacidade de cálculo mental com estes valores.

Eficácia dos algoritmos e cálculo com sucesso

Quero notar que todos os algoritmos alternativos que apresentei são generalizáveis e utilizáveis com números decimais. Como a prática da sua utilização está associada ao domínio do funcionamento do sistema de numeração decimal e ao sentido do número, eles tornam-se de facto eficazes e seguros quando trabalhamos com números decimais.

E se aliarmos a esta segurança o gosto por trabalhar com os números e a confiança que advêm de fazer coisas com sentido, acho que podemos acreditar que crianças que aprendam a trabalhar com os números de uma forma aberta desenvolverão todas, ou pelo menos muitas das capacidades numéricas que desejamos.

Nos dias de hoje é difícil defender a eficácia de um algoritmo mais potente em detrimento de um algoritmo menos eficaz, mas mais compreensível.

Para ajudar esta discussão, destaco algumas ideias importantes ligadas à utilização de algoritmos alternativos.

"Apesar de ser vantajoso para todos os alunos saber pelo menos um algoritmo para cada uma das operações, os algoritmos standard ensinados na escola não são na maior parte das vezes os mais apropriados ou mais compreensíveis. Embora sejam eficazes, o significado dos algoritmos standard é muitas vezes obscuro para os alunos que os aprendem sem compreender" (Carroll e Porter, p. 107).

Estes autores apontam ainda que também os professores poderão vir a gostar mais de algoritmos alternativos na medida em que são mais compreensíveis e a sua utilização pode ser um factor de sucesso para os seus alunos. Como Carroll e Porter, poderemos reconhecer facilmente que estes algoritmos estão mais próximos de procedimentos inventados pelos alunos quando se lhes dá a oportunidade de construirem o seu raciocínio sobre as operações com números inteiros e decimais.

Kamii e Dominick (1998), que muito têm trabalhado sobre a aprendizagem do cálculo segundo uma perspectiva construtivista, apresentam evidências que as levam a afirmar convictamente que não só os algoritmos dominantes não são úteis à aprendizagem da aritmética, como escondem o desenvolvimento do raciocínio numérico dos alunos. E apontam duas razões para dizer porque consideram os algoritmos prejudiciais: estes encorajam os alunos a desistir dos seus próprios raciocínios e impedem as crianças de desenvolver o sentido do número.

Penso que a exploração matemática dos algoritmos que apresentei ajuda a compreender o valor destas afirmações. Todas estas ideias podem contribuir para reequacionar a discussão sobre a utilização da calculadora colocando um enfoque muito grande no ensino do cálculo. Problemática esta que precisa de mais atenção e discussão do que lhe temos dado. Em Portugal, a investigação realizada, os manuais utilizados, dados de formação de professores e as provas de aferição permite-nos concluir que há uma dominância do cálculo com algoritmos sobre todos os outros tipos de cálculo. E sabemos também que o ensino precoce dos algoritmos dominantes enjeita muitas potencialidades de valorização e de construção de processos pessoais de cálculo.

É urgente alterar o modo como o cálculo está a ser ensinado passando a valorizar os processos de cálculo algorítmico que se aproximam dos processos utilizados com sentido pelas crianças na resolução de problemas e dando destaque ao ensino e prática de cálculo mental.

Em defesa da calculadora, em defesa dos alunos

Não tenho dúvidas que um ensino cego dos algoritmos só pode conduzir a uma utilização cega da calculadora visto que a prática dos algoritmos dominantes obscurece a compreensão do sentido das operações. Por outro lado, os algoritmos alternativos apresentados podem ajudar a reforçar o sentido de cada uma das operações e dão maior relevo à prática do cálculo mental compreensivo.

Se aliarmos a esta perspectiva os resultados da investigação que não reconhecem à utilização da calculadora quaisquer efeitos perniciosos no domínio do cálculo, e que, muito pelo contrário reforçam a ideia de que essa utilização ajuda a desenvolver capacidades e atitudes de resolução de problemas e de realização de investigações matemáticas, podemos concluir que o foco na nossa actuação deve ser sobre a utilização criativa da calculadora em paralelo com a aprendizagem significativa do cálculo.

Uma criança que, depois de alguns anos de escola, pega num calculadora para calcular 9:3 revela sanidade mental, mas revela também que para ela os números e as operações são símbolos que nada significam. E digo que revela sanidade mental porque se me pedem para fazer um cálculo que não tem qualquer significado para mim e eu tenho à minha disposição uma máquina que o faz, a única atitude é usar a máquina para o fazer. Para mim o que é grave é perceber nesta atitude a total falta de conhecimento e interesse pelos números. Falta essa que é reveladora de uma grande pobreza do seu universo numérico e de um entendimento puramente mecânico do cálculo.

Quando vejo uma criança no 1° ano de escolaridade, ao fim de dois meses de escola, escrever contente a descoberta que fez

$2+2=4+4=8+8=16+16=32+32=64$

acredito que quando os professores conhecem os segredos dos números e trabalham para o seu desenvolvimento podem fazer o que quiserem das crianças, levando-as a gostarem de calcular com e sem calculadora, e o que é mais importante, a saber decidir quando devem ou não utilizá-la.

Referências bibliográficas

Carroll, William M. e Porter, Denise (1998). "Alternative Algorithms for Whole-Number Operations". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 106–114. NCTM, Reston, Virgínia.

Groves, Susie e Stacey, Kaye. (1998). "Calculators in Primary Mathematics-Exploring Number before Teaching Algorithms". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 120–129. NCTM, Reston, Virgínia.

Kamii, Constance e Dominick, Ann (1998). "The Harmful effects of algorithms in grades 1-4". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 130–140. NCTM, Reston, Virgínia.

Ponte, João Pedro e Serrazina, Maria de Lurdes. 2000. *Didáctica da Matemática do 1° Ciclo*. Universidade Aberta, Lisboa.

Ponte, João Pedro. 2003. Proibir a calculadora: Uma medida eficaz? *Educação e Matemática*, n° 75, pp. 43–44. APM, Lisboa.

Usiskinj, Zalman (1998). "Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7-20. NCTM, Reston, Virgínia.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Branca Silveira

A calculadora no 1º e 2º ciclos

Depois das últimas declarações do Ministro relativamente ao uso das calculadoras nos primeiros anos de escolaridade têm sido várias as reacções a este assunto.

Quase como uma resposta a estas declarações, o Núcleo do Porto, em parceria com o Centro de Formação da Maia, resolveu realizar uma sessão de trabalho sobre as calculadoras no 1º e 2º Ciclos.

Nessa sessão, depois de uma comunicação inicial (Luís Reis) onde foi feita uma apresentação sobre o que consta dos programas oficiais de vários países da Europa acerca da utilização das calculadoras nestes níveis de ensino, seguiu-se uma divulgação de casos práticos realizados em ambiente de aula (António Sá e Graça Zenhas — 2º Ciclo, Manuel Linhares —1º Ciclo) e finalmente um debate onde, além dos colegas já indicados, participou ainda Maria Augusta Neves.

Assisti, com muito agrado, a esta tarde de trabalho e gostaria de salientar alguns aspectos do decorrer da sessão.

As apresentações dos casos práticos, mostraram mais uma vez que com questões simples mas bem escolhidas se podem obter os resultados mais surpreendentes.

Gostei especialmente de ouvir as reacções dos alunos e de ver a imaginação com que responderam aos desafios que lhes foram propostos por estes colegas.

Da análise que fiz, posteriormente, das respostas dadas a um questionário de avaliação da sessão verifiquei que todos os colegas presentes consideraram aquelas apresentações como uma boa sugestão para aplicarem nas suas aulas, mas fiquei com a sensação de que uma grande parte dos presentes, ou não utiliza a máquina de calcular ou não o faz do modo mais conveniente.

Uma das apresentações teve um carácter muito prático, foi pedido aos assistentes que resolvessem ali as propostas que tinham sido trabalhadas pelos alunos.

A adesão dos participantes a este desafio foi muito grande e todos se empenharam na sua resolução com grande entusiasmo. Isto remete-me para os modelos de formação. Como habitualmente notou-se que os professores querem exemplos práticos que possam utilizar de imediato e têm necessidade de os experimentar. Aderem muito melhor a uma formação em que se privilegia a reflexão a partir de actividades práticas, com base na experimentação das mesmas, do que uma exposição dos aspectos mais teóricos que suportam e fundamentam essas mesmas práticas mas que exclua um envolvimento activo.

A título de exemplo escolhi uma actividade de cada um dos intervenientes.

O António baseou o seu trabalho no livro *Números e algoritmos* Sallan, J.M.G; Rocher, J.S, Madrid (2002), adaptou algumas actividades que realizou com os alunos, e que envolveram vários aspectos, entre eles: a formulação e testagem de conjecturas, relações e efeitos das operações, a criação de algoritmos, a resolução de problemas e a estimação no cálculo.

Em cada um dos seguintes casos, procura encontrar os algarismos que desapareceram de modo a obteres afirmações verdadeiras:

93 x 8_ = 8__1

83_ x _6 = 46816

4_ _6 : 8_ = 48

21 x 4_ x _7 = 15351

7 x (_2 – 2_) = 112

...

Os alunos da Graça utilizaram a calculadora apenas em quatro momentos do ano lectivo. Foram essas as actividades que a Graça nos apresentou e os temas abordados foram: pesquisa de padrões e regularidades e jogos numéricos envolvendo estimativa e estratégia.

O motivo que me levou a escolher a proposta que se segue não foi tanto a questão em si mas, sem dúvida, a grande criatividade que os alunos mostraram na sua resolução.

1. *Usando a calculadora, transforma em dízima: 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7*

   a) Notas alguma coisa especial nos seis primeiros dígitos da dízima correspondente à divisão de um número por sete?

   b) És capaz de estabelecer uma regra que permita prever o resultado de qualquer divisão por sete?

2. *Uma calculadora foi usada para investigar o período das dízimas que se obtêm quando o divisor é 17, mas a sua capacidade não foi suficiente para mostrar o ciclo completo de dígitos que se repetem. Os diferentes cálculos conduziram às seguintes dízimas: 1/17 = 0,0588325; 2/17 = 0,1176471; 3/17 =0, 1764705; 4/17 =0,2352941; 5/17 = 0,2941176; 6/17 = 0,3529411; 7/17 = 0,4117647*

Sabendo que, neste caso, o período tem dezasseis dígitos, indica os vinte primeiros dígitos das dízimas correspondentes às fracções indicadas anteriormente.

O Manuel propôs aos presentes a descoberta de caminhos diferentes para a partir de um número se chegar a outro recorrendo à calculadora.

A partir do 6 chegar ao 100

1. *Sem utilizar a adição*
2. *Apenas com três adições*
3. *Utilizando a multiplicação e a subtracção*
4. *Carregando no menor número de teclas*
5. *Utilizando a multiplicação e a divisão*
6. *Só com divisão*
7. *...*

Não faço qualquer comentário ao debate final pois motivos profissionais só me permitiram assistir a uma pequena parte.

De um modo geral todos os presentes consideraram esta sessão como uma boa tarde de trabalho.

Navegando pela Internet

Se quiser ver como desenhar figuras geométricas no quadro, tendo como único material auxiliar ... um livro, ou como estudar propriedades dos triângulos, dos quadriláteros ou mesmo das pirâmides usando um pedaço de fio, consulte o *site* http://www.cyffredin.co.uk

Waldo's interactive Maths

Encontra em http://www.waldomaths.com/ *applets java* envolvendo temas muito variados, onde não faltam as funções, o cálculo, as sequências, os métodos numéricos, etc ...

A Association of Teachers of Mathematics (ATM) incluiu estes applets num CD distribuído aos sócios com o número de Outono de 2003 da revista MicroMath.

Continuando com os nossos colegas ingleses ... no *site* da ATM na secção Recursos tem acesso a alguns *flash-films* em http://www.atm.org.uk/resources/flashfilms.html e já agora veja uma pequena história feita com o Tangram.

Ao visitar o *site* http://www.pifactory.co.uk/ encontrei na página de entrada o número 6174 em destaque. Achei estranho pois até agora nunca este número tinha tido qualquer significado, para mim é claro!

Pois ... a 6174 dá-se o nome de *constante de Kaprekar*

Na página começam por apresentar uns dados muito breves sobre este matemático, dizendo que Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar nasceu a 17 de Janeiro de 1905 em Dahanu, na India. Desde criança tinha como hobby efectuar cálculos. Passava horas a resolver problemas e puzzles matemáticos. Trabalhou como matemático e em 1946 descobriu a constante de Kaprekar, o número 6174. Morreu em 1988.

Comecei a procurar informações sobre esta constante, que resulta de uma sequência feita a partir de um número com 4 algarismos e surgiram numerosos sites com referências a ela.

Encontrei depois este resultado como fazendo parte da *rotina de kaprekar* em:

http://mathworld.wolfram.com/KaprekarRoutine.html

Esta rotina é um algoritmo para números com 4 algarismos que pode ser generalizada para números com k algarismos. Consiste em: partir de um número n; escrever os algarismos de n por ordem decrescente (n') e também por ordem crescente (n''); fazer $n'-n''$ e repetir o processo com o número obtido.

O algoritmo termina em 0, ou numa constante ou entra em ciclo.

Partindo de um número com quatro algarismos, se forem todos diferentes chega-se sempre a 6174 num máximo de oito iterações.

Apenas em alguns casos de números com algarismos repetidos se chega a zero e não a 6174!

Demonstração por Computador e os Limites da Computabilidade[1]

J. Orlando Freitas

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, dois matemáticos da University of Illionois, resolveram o problema das quatro-cores apresentando uma demonstração que contém partes demonstradas pelo computador. Este problema é original de 1852, quando Francis Guthrie, um estudante da University College London, observou que apenas quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa desenhado em papel, em que países vizinhos com fronteira (diferente de um ponto) têm cores diferentes. A pergunta de Guthrie, *Será que esta conjectura pode ser provada matematicamente?*, ficou no ar por mais de um século, apesar de várias tentativas para lhe responder.

Outra grande demonstração feita por computador é sobre a conjectura de Keppler, que foi apresentada em Agosto de 1998. Keppler, em 1611, descreveu este tipo de empilhamento (Figuras. 1 e 2) e afirmou:

Este empilhamento é o mais compacto possível, de tal modo que em nenhum outro arranjo pode um maior número de esferas ser metido no mesmo recipiente.

No congresso Internacional de 1900, Hilbert incluiu esta conjectura no n.º 18 da sua famosa lista de problemas. Para resolver este problema com 400 anos, Thomas Hales, da Universidade de Michigan em 1998, necessitou de três gigabytes de disco. Quando esta demonstração foi divulgada houve vários comentários—ver o artigo de Eduardo Veloso na Educação e Matemática nº 49—e apresento a seguir um do célebre geómetra John Conway:

Existe um grande interesse em verificar esta demonstração ... uma reunião vai ser convocada, de várias semanas, exactamente para isso, quando a demonstração tiver sido verificada, estou convencido que vai ser aceite.

O uso de computadores neste tipo de demonstração provocou muitas controvérsias entre os matemáticos e levantou algumas questões: Como podemos saber que o programa, ou a máquina, não se enganou? Esta prova é na sua essência diferente da tradicional prova de papel-e-lápis? Podemos questionar se uma demonstração é uma prova matemática se ninguém a conseguir verificar, com excepção da máquina?

A demonstração típica em matemática deduz-se a partir de verdades aceites ou demonstradas anteriormente. A maioria está escrita em algumas linhas ou páginas. Outras, poucas, são muito longas. Por exemplo, a demonstração de Walter Feit e John Thompson de que todo o grupo de ordem ímpar é solúvel, ocupa 251 páginas, enquanto a prova completa da famosa conjectura de Ramanuján ocupa à volta de 2000 páginas. Tradicionalmente, a exposição de provas em matemática deve estar bem explícita, para que

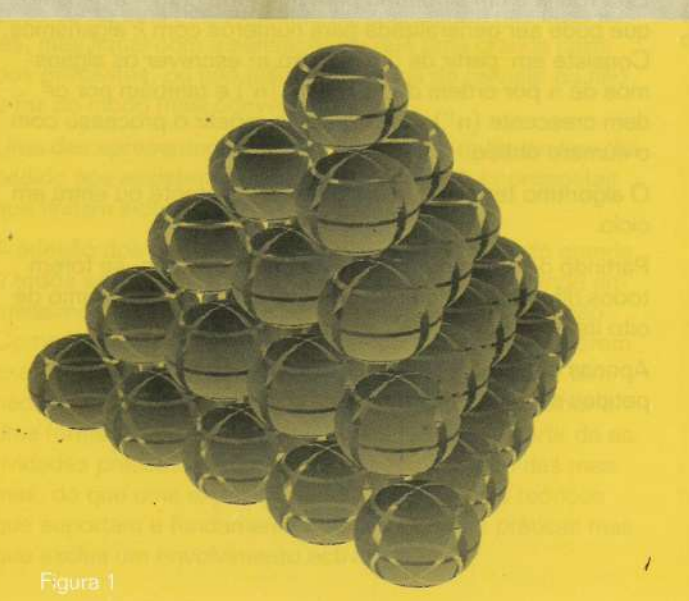


Figura 1

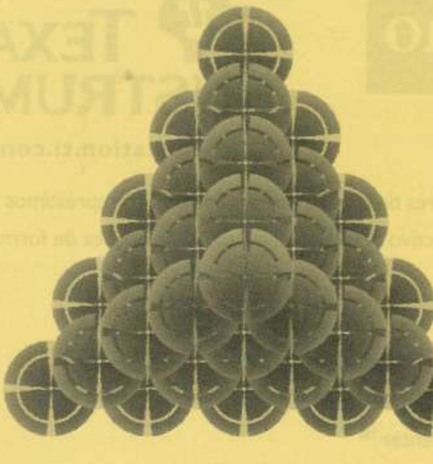


Figura 2

qualquer matemático paciente e competente possa ser capaz de verificar que todos os passos estão correctos.

Onde entram os computadores? Estes ajudam-nos em muitos caminhos: calcular, resolver, explorar e simular; esboçar curvas e superfícies. Por demonstração feita por computador, muitas vezes, entende-se as que não se podem verificar com papel-e-lápis pelo caminho tradicional. E se o computador comete erros? Existem vários tipos de erros: dados mal introduzidos, erros de programação, bugs não detectados no compilador e erros de *hardware*. Como sabemos que não existem erros de *software* ou de hardware numa demonstração? A resposta é curta: não sabemos.

Como verificar a (in)validade duma demonstração por computador? Uma maneira de testar, mas não demonstrar, é usar diferentes programas, ou diferentes máquinas; isto foi feito no teorema das quatro-cores por Frank Allaire da University of Manitoba, no Canadá. Outra maneira é o *teste do tempo*. É simples mas fundamental de que com uma falsa premissa podemos chegar a contradições. Se o teorema das quatro-cores é falso mas, acreditando que é verdadeiro, o usamos para provar outros teoremas, um destes pode contradizer alguns factos bem estabelecidos. Se tal contradição nunca surgir, fortificará a crença no resultado do computador.

O uso do computador nas demonstrações introduz um novo elemento de incerteza para os matemáticos. Isto é o preço que temos de pagar pela utilização de tão maravilhosa ferramenta de trabalho. Como dizia Lam, *Assim como os físicos aprenderam a viver com incertezas, também nós matemáticos deveremos aprender a viver com demonstrações incertas.*

Uma grande preocupação numa demonstração é a questão do comprimento desta. Pode acontecer que a demonstração mais curta não possa ser verificada no período de vida de um ser humano na sua totalidade, por ser muito longa; não conhecemos ainda nenhum importante ou interessante teorema nestas condições. Por outro lado, pode acontecer que para essas demonstrações muito longas haja uma demonstração curta do tipo *aqui está uma demonstração*. Mas a possibilidade é que algumas destas proposições (como o teorema das quatro-cores) não tenham uma demonstração do tipo tradicional. Appel e Haken defendem a seguinte ideia: *A nossa demonstração do teorema das quatro-cores sugere que deve haver limites no que pode ser demonstrado na Matemática apenas com o método tradicional de papel-e-lápis*. Se rejeitarmos as demonstrações por computador, sujeitamo-nos a rejeitar algumas verdades que só podem ser demonstradas por meios não tradicionais.

É interessante ver que este tipo de demonstrações - envolvendo intensamente computadores - ainda é olhado de lado por muitos matemáticos, como John Conway—e até mesmo rejeitado por alguns—não por desconfiarem da sua validade, mas certamente por estarem a compreender que um certo estilo de fazer matemática está lentamente a ser substituído por outro.

Segundo alguns críticos, há o aspecto tempo implícito na noção de prova: uma prova só é entendida como sendo uma demonstração se apenas se usar os meios aceites até à época. Se, por exemplo, é introduzido um novo axioma numa teoria e se este se tornar largamente aceite, então o conceito de demonstração tornar-se-á mais extenso no sentido de podermos passar a decidir mais questões. O uso de computadores pode, daqui a uns tempos, tornar-se num destes meios aceites. Há quem já pense que, numa futura geração, nada será aceite em matemática a não ser que seja *demonstrado* por computador(?).

Nota

1 Inserido no meu Relatório de uma aula teórico-prática no âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, pela UMa em 1999, orientado pelo Prof. J. Sousa Ramos do IST e com o apoio do POPRAM III e Citma.

Bibliografia

W. Haken. An attempt to understand the four colour problem. *Journal of graph theory, (1), 193*, 1977.

C.W.H. Lam. The search for finite projective plane of order 10. *Canadian journal of mathematics*. 61. 1117, 1989

J. Orlando Freitas. A demonstração por computador. *Jornal de Matemathica Elementar*, 107, 1991

J. Orlando Freitas. Uma demonstração por computador. *Proceedings* do Congresso da Soc. Portuguesa de Matemática em 1995

J. Orlando Freitas. Dificuldade na visualização de objectos matemáticos. *Revista do Professor de Matemática nº 29*, Sociedade Brasileira de Matemática, pgs. 9–12, 1995

J. Orlando Freitas. Aplicações de Fibonacci: Trabalho de Síntese no Âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade da Madeira, 1999

R. Penrose. *Mente Virtual*. Gradiva, 1997

J. Sousa Ramos. Os objectivos do ensino da matemática em 2001: ensinar ou aprender? *Educação e Matemática*, (50): 21-24, Nov. APM: 1998

Ian Stewart. *Os problemas da Matemática*. Gradiva, 1996

Eduardo Veloso. Secção de Tecnologias na Educação Matemática. Educação e Matemática, (49). APM: 1998

J. Orlando Freitas
Universidade da Madeira

Programa de Empréstimo

TEXAS INSTRUMENTS

education.ti.com/portugal

A Texas Instruments disponibiliza empréstimos de calculadoras e acessórios aos professores de matemática e ciências. Os empréstimos terão uma duração máxima de duas semanas, estão sujeitos à disponibilidade do material e tem como objectivo principal a realização de acções de formação e workshops.

Os seguintes **produtos** estão **disponíveis**:

- TI-83 Plus
- TI-89
- TI-92 Plus
- Voyage 200™
- Calculator-Based Laboratory™ (CBL™) System
- CBL 2™
- Calculator-Based Ranger™ (CBR™) System
- Cabri Geometry II™
- TI Presenter™

Poderá pedir sensores para a sua acção com o CBL. Pode pedir posters, transparências e literatura para distribuir aos participantes durante a sua acção.

Lista de Sensores	Ref #	Lista de Sensores	Ref #
Acelerómetro até 25g	ACC-DIN	Sensor de pressão de 0 a 2.1 atm	GPS-BTA
Acelerómetro de 3 eixos	3D-BTA	Detector de batimentos cardíacos	HRM-DIN
Barómetro	BAR-DIN	Microfone	MCA-CBL
Colorímetro	COL-DIN	Sensor de PH	PH-DIN
Conductividade	CON-DIN	Sensor de humidade relativa	RH-DIN
2 amperímetros e 2 voltímetros	CV-DIN	Monitor de radiações	SRM-DG
Temperatura	DCT-DIN	Termopar tipo K-temperaturas de -200 a 1400°C	TCA-DIN
Sensor de força de duplo alcançe	DFS-DIN	Sensor de luminosidade TI	CBL/CA/C
Sensor de electrocardiograma	EKG-DIN	Sensor de voltagem TI	CBL/CA/G
Monitor de batimentos cardíacos para exercício	EHR-DIN	Sensor de campo magnético	MG-DIN
Sensor de fluxo da água	FLO-CBL	Detector de movimento por ultrasons	MD-CBL

USUFRUIR DOS NOSSOS EMPRÉSTIMOS É GRÁTIS E FÁCIL!

As calculadoras e o ViewScreen™ (caso seja pedido), serão entregues pela nossa transportadora em mala própria, um dia ou dois antes do começo da sua acção. No fim, apenas terá de arrumar as calculadoras na mala, colar a etiqueta fornecida e telefonar para o serviço de entregas para fazer o levantamento.

Não se esqueça de nos contactar pelo menos com um MÊS DE ANTECEDÊNCIA.

CARTA: CSC (Centro de Suporte ao Cliente) C/o Sitel Belgium Woluwelaan 158–1831 Diegem — Bélgica

TELEFONE: 800 832 627 (número gratuito) | **FAX:** 21 424 51 30 | **E-MAIL:** ti-loan@ti.com | **INTERNET:** http://education.ti.com/portugal/apoio/pemprestimo/

Se quiser fazer o pedido por fax ou carta, por favor preencha o formulário seguinte:

Nome: ______________________ Escola e cursos ensinados: ______________________

Data do inicio da formação: ______________________ Data do fim da formação: ______________________

Telefone (escola): ______________________ Telefone (casa): ______________________

Morada: ______________________ Fax: ______________________

E-mail: ______________________

Produtos Necessários	Quantidade	C/ Viewscreen (Sim ou Não)

Números Felizes e Sucessões Associadas: Digressões com o Maple

Delfim F. M. Torres

Dando jus à matemática experimental, mostramos como o Maple pode ser usado na investigação matemática de algumas questões actualmente sem resposta na Teoria dos Números. A tese defendida é que os alunos de um curso de Matemática podem facilmente usar o computador como um lugar onde se excita e exercita a imaginação.

Introdução

Albert Einstein é conhecido por ter dito que *a imaginação é mais importante que o conhecimento*. Se assim é, porquê esperar pelo mestrado ou doutoramento para começar a enfrentar problemas em aberto? Não é a criatividade prerrogativa dos mais novos? Em [6] mostrei como com muito pouco conhecimento é possível debruçarmo-nos sobre algumas questões actualmente sem resposta na Teoria de Computação. Aqui, e a propósito do ano 2003 ter sido escolhido pela APM como o ano da *Matemática e Tecnologia*, vou procurar mostrar como o computador e um ambiente moderno de computação algébrica, como seja o **Maple**, podem ser excelentes auxiliares na abordagem a *quebra-cabeças* que a matemática dos números actualmente nos coloca. A nossa tese é a de que para compreender e lidar confortavelmente com conceitos e métodos matemáticos, é necessário fazer matemática. Tradicionalmente, isso implicava o uso de cabeça, papel e lápis. Nos dias de hoje junta-se mais um ingrediente: o computador e respectivo software. O software de apoio à Matemática pode ser classificado em duas grandes famílias: os de carácter específico (e.g. Cabri-géomètre, Cinderella, Geometer's Sketchpad, etc) e os de carácter universal (e.g. Maple, Mathematica, Maxima, Axiom, etc). Os Sistemas Universais são ferramentas muito poderosas, extremamente úteis para matemáticos, cientistas e professores. A minha escolha do sistema **Maple** prende-se com o facto de ser este o programa informático actualmente usado na cadeira de *Computadores no Ensino da Matemática*, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Os meus alunos são prova viva de que basta um semestre de *tecnologias na educação matemática*, para nos podermos aventurar por *mares ainda não navegados*. O leitor que queira aprender sobre o **Maple** poderá começar por consultar os sites de *Computadores no Ensino da Matemática*, disponíveis a partir da minha *home page*:

http://www.mat.ua.pt/delfim.

Os que não tiverem acesso ao sistema comercial **Maple**, mas quiserem fazer as suas próprias experiências e descobertas, podem recorrer a um dos muitos sistemas de computação algébrica disponibilizados em regime livre. Aconselho o **Maxima**. Versões do **Maxima**, para Linux e Windows, com manuais de utilização, podem ser encontrados em http://maxima.sourceforge.net.

Números felizes

Um número é *feliz* se somando os quadrados dos seus algarismos e iterando o processo for possível chegar ao número 1. Por exemplo: $7^2 = 49$, $4^2 + 9^2 = 97$, $9^2 + 7^2 = 130$, $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$, $1^2 + 0^2 = 1$, pelo que 7 é um número feliz.

De modo mais formal. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural com representação decimal $n = d_k \ldots d_0$, $0 \leq d_i \leq 9$ $(i = 0, \ldots, k)$, e denotemos por $\sigma(n)$ a soma dos quadrados dos dígitos decimais de n:

$$\sigma(n) = \sum_{i=0}^{k} (d_i)^2.$$

Dizemos que n é um *número feliz* se existir um $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\underbrace{(\sigma \circ \cdots \circ \sigma)}_{r \text{ vezes}}(n) = 1.$$

Para o exemplo acima, vemos que 7 é um número feliz após 5 iterações ($r = 5$):

$$\sigma(7) = 49,\ \sigma(49) = 97,\ \sigma(97) = 130,$$
$$\sigma(130) = 10,\ \sigma(10) = 1 .$$

Um exemplo de um número que não é feliz é o 2:

$$\sigma(2) = 4,\ \sigma(4) = 16,\ \sigma(16) = 37,$$
$$\sigma(37) = 58,\ \sigma(58) = 89,$$
$$\sigma(89) = 145,\ \sigma(145) = 42,$$
$$\sigma(42) = 20,\ \sigma(20) = 4 \ldots$$

É possível mostrar (*vide* [5]) que $n \in \mathbb{N}$ não é feliz se, e somente se,

$$(\sigma \circ \cdots \circ \sigma)(n) = 4$$

para um certo número de iterações.

Vamos definir em **Maple** a função característica Booleana dos números felizes. Começamos por definir a função `digitos` que nos devolve a sequência de dígitos de um dado número n. Para isso recorremos às funções **Maple** `iquo` e `irem` que nos dão, respectivamente, o quociente e o resto da divisão inteira.

```
> digitos := n -> seq(iquo(irem(n, 10^i),
  10^(i-1)), i=1..length(n)):
> digitos(12345);
```

$$5, 4, 3, 2, 1$$

A função σ é agora facilmente construída

```
> sigma := n -> add(i^2, i=digitos(n)):
> sigma(24);
```

$$20$$

O processo de composição da função σ é obtido usando o operador @ do **Maple**:

```
> s := (n,r) -> seq((sigma@@i)(n),i=1..r):
> s(7,5);
```

$$49, 97, 130, 10, 1$$

```
> s(2,9);
```

$$4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4$$

Para automatizarmos o processo de decisão se um número é feliz ou não, recorremos a alguma programação. O seguinte procedimento deve ser claro.

```
> feliz := proc(n)
>   local L, v:
>   L := {}:
>   v := sigma(n):
>     while (not (member(v,L) or
      v=1)) do
>       L := L union {v}:
>       v := sigma(v):
>     end do:
>     if (v = 1) then true else
      false end if:
> end proc:
```

Podemos agora questionar o sistema **Maple** acerca da felicidade de um determinado número.

```
> feliz(7);
```

$$true$$

```
> feliz(2);
```

$$false$$

A lista de todos os números felizes até 100 é dada por

```
> select(feliz,[$1..100]);
```

$$[1, 7, 10, 13, 19, 23, 28,$$
$$31, 32, 44, 49, 68, 70, 79,$$
$$82, 86, 91, 94, 97, 100]$$

Concluímos então que existem 20 números felizes de entre os primeiros 100 naturais

```
> nops(select(feliz,[$1..100]));
```

$$20$$

Existem 143 números felizes não superiores a 1000; 1442 não superiores a 10000; e 3038 não superiores a 20000:

```
> nops(select(feliz,[$1..1000]));
```

$$143$$

```
> nops(select(feliz,[$1..10000]));
```

$$1442$$

```
> nops(select(feliz,[$1..20000]));
```

$$3038$$

Estas últimas experiências com o **Maple** permitem-nos formular a seguinte conjectura.

Conjectura 1. *Cerca de um sétimo de todos os números são felizes.*

Uma questão interessante é estudar números felizes consecutivos. De entre os primeiros 1442 números felizes podemos encontrar 238 pares de números felizes consecutivos (o mais pequeno é o (31, 32)):

```
> felizDezMil := select(feliz,[$1..10000]):
> nops(select(i->member(i,felizDezMil) and
  member(i+1,felizDezMil),felizDezMil));
```

$$238$$

onze ternos de números felizes consecutivos, o mais pequeno dos quais é o (1880, 1881, 1882);

```
> select(i-> member(i,felizDezMil) and
  member(i+1,felizDezMil) and
  member(i+2,felizDezMil),felizDezMil);
```

$$[1880, 4780, 4870, 7480, 7839, 7840, 8180, 8470, 8739,$$
$$8740, 8810]$$

dois quaternos de números felizes consecutivos, o mais pequeno dos quais é o (7839, 7840, 7841, 7842);

```
> select(i-> member(i,felizDezMil) and
  member(i+1,felizDezMil) and
  member(i+2,felizDezMil) and
  member(i+3,felizDezMil),felizDezMil);
```

$$[7839, 8739]$$

e nenhuma sequência de cinco números felizes consecutivos.

```
> select(i-> member(i,felizDezMil) and
  member(i+1,felizDezMil) and
  member(i+2,felizDezMil) and
  member(i+3,felizDezMil) and
  member(i+4,felizDezMil),felizDezMil);
```

$$[\ ]$$

Sabe-se que a primeira sequência de cinco números felizes consecutivos começa com o 44488.

```
> feliz(44488) and feliz(44489) and feliz(44490)
  and feliz(44491) and feliz(44492);
```

$$\textit{true}$$

É também conhecida uma sequência de 7 números felizes consecutivos, que começa com o número $7899999999999959999999996$ (*vide* [7]).

Uma outra linha de investigação interessante (*vide* [2]) surge quando analisamos o número de iterações necessárias até chegarmos a 1. Ao número de iterações chamamos *altura*. A altura de 7 é, como vimos, 5. O número 356 também é feliz, mas precisa de 6 iterações (tem altura 6). É muito fácil alterar o nosso procedimento `feliz` para obtermos a altura de um número feliz.

```
> altura := proc(n)
>   local L, v, a:
>   L := {}:
>   v := n:
>   a := 0:
>   while (not (member(v,L) or
    v=1)) do
>       L := L union {v}:
>       v := sigma(v):
>       a := a + 1:
>   end do:
>   if (v = 1) then a else false
    end if:
> end proc:
```

Agora já podemos comprovar o que afirmámos acima:

```
> altura(7);
```

$$5$$

```
> altura(356);
```

$$6$$

As alturas dos primeiros 20 números felizes são facilmente obtidas:

```
> seq(altura(i),i=select(feliz,[$1..100]));
```

$$0, 5, 1, 2, 4, 3, 3, 2, 3, 4, 4, 2, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 3, 1$$

Esta experiência põe em evidência um facto curioso: os números felizes precisam de relativamente poucas iterações para alcançar a unidade. De facto, se calcularmos a altura de todos os números felizes até $3789 \times 10^{973} - 2$, verificamos que a altura máxima é de 7. O seguinte procedimento permite-nos mostrar que 78999 é o primeiro número feliz com altura 7.

```
> primeiro := proc(alt)
>   local i;
>   for i while altura(i) <> alt
    do od:
>   return(i);
> end proc:
```

```
> primeiro(7);
```

$$78999$$

Os primeiros números felizes com altura 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são, respectivamente:

```
> seq(primeiro(i),i=0..7);
```

$$1, 10, 13, 23, 19, 7, 356, 78999$$

O primeiro número com altura 8 é o $3789 \times 10^{973} - 1$ (*vide* [2]). Este número tem 977 dígitos:

```
> length(3789 * 10^973 - 1);
```

$$977$$

O conceito de número feliz é facilmente generalizável se considerarmos a soma dos dígitos elevados ao cubo ou a potências superiores. Alterando a definição da função `sigma`, do modo óbvio, convidamos o leitor a repetir as nossas experiências e descobertas para os números felizes cúbicos, ...

Sucessões de Smarandache

Dada uma sucessão de inteiros $\{u_n\}$, a correspondente sucessão de Smarandache $\{s_n\}$ é definida por concatenação de inteiros como se segue:

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 u_2,$$
$$\ldots,\ s_n = u_1 \cdots u_n,\ \ldots$$

Estamos interessados na sucessão de Smarandache associada aos números felizes. Os primeiros elementos desta sucessão são:

$$1, 17, 1710, 171013, 17101319, 1710131923,$$
$$171013192328, 17101319232831, \ldots$$

Começamos por implementar a concatenação de inteiros em Maple.

```
> conc := (a,b) -> a*10^length(b)+b:
> conc(12,345);
```

$$12345$$

Formando a lista dos números felizes até um certo n, e usando a função conc acima definida, a correspondente sucessão de Smarandache é facilmente obtida.

```
> sh := proc(n)
> local L, R, i:
> L := select(feliz,[$1..n]):
> R := array(1..nops(L),L):
> for i from 2 by 1 while i <= nops(L) do
> R[i]:=conc(R[i-1],L[i]):
> end do:
> return(R):
> end proc:
```

Como

```
> select(feliz,[$1..31]);
```

$$[1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31]$$

os primeiros 8 valores da sucessão de Smarandache são então

```
> print(sh(31));
```

$$[1, 17, 1710, 171013, 17101319, 1710131923, 171013192328, 17101319232831]$$

Existem muitas questões em aberto associadas à sucessão de Smarandache dos números felizes (*vide* [4]). Umas dizem respeito à existência de números primos na sucessão; outras à existência de números felizes. Façamos agora alguma investigação a este respeito. Usando o Maple é fácil concluir que de entre os primeiros 143 termos da sucessão de Smarandache dos números felizes, apenas 3 são primos.

```
> primos := select(isprime,sh(1000)):
> nops([seq(primos[i],i=1..143)]);
```

$$3$$

Se fizermos `print(primos)` vemos que os três primos são $s_2 = 17$, $s_5 = 17101319$ e s_{43} (s_{43} é um primo com 108 dígitos decimais).

```
> primos[2], primos[5];
```

$$17, 17101319$$

```
> length(primos[43]);
```

$$108$$

Apenas são conhecidos estes números primos na sucessão de Smarandache dos números felizes. Permanece por esclarecer se eles serão ou não em número finito (*vide* [3]).

Existem 31 números felizes de entre os primeiros 143 termos da sucessão de Smarandache dos números felizes:

```
> shFelizes := select(feliz,sh(1000)):
> nops([seq(shFelizes[i],i=1..143)]);
```

$$31$$

Recorrendo ao comando `print(shFelizes)` vemos que esses números são o s_1, s_{11}, s_{14}, s_{30}, s_{31}, s_{35}, s_{48}, s_{52}, s_{58}, s_{52}, s_{67}, s_{69}, s_{71}, s_{76}, s_{77}, s_{78}, s_{82}, s_{83}, s_{85}, s_{98}, s_{104}, s_{108}, s_{110}, s_{114}, s_{115}, s_{117}, s_{118}, s_{119}, s_{122}, s_{139} e s_{140}. A título de curiosidade, s_{140} tem 399 dígitos:

```
> length(shFelizes[140]);
```

$$399$$

Muito existe por esclarecer relativamente à existência de números felizes consecutivos na sucessão de Smarandache dos números felizes. Olhando para os resultados anteriores vemos que o par mais pequeno de números felizes consecutivos é o (s_{30}, s_{31}); enquanto o terno mais pequeno é o (s_{76}, s_{77}, s_{78}). Quantos termos consecutivos são possíveis? É capaz de encontrar exemplos, digamos, de seis números felizes consecutivos? Estas e outras questões estão em aberto (*vide* [3]). Ferramentas como o Maple são boas auxiliares neste tipo de investigações (*vide* [1]). Fico à espera de algumas respostas da sua parte.

Referências

[1] P. D. F. Gouveia and D. F. M. Torres, Smarandache Sequences: Explorations and Discoveries with a Computer Algebra System, Smarandache Notions Journal, Vol. 14, 2004, pp. 5–22 (see online version at http://www.mat.ua.pt/delfim/delfim/artigos/arxivSmarandache/0312014.pdf).

[2] H. G. Grundman and E. A. Teeple, *Heights of Happy Numbers and Cubic Happy Numbers*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 41, Nº 4, Agosto de 2003, pp. 301–306.

[3] S. S. Gupta, *Smarandache sequence of happy numbers*, Smarandache Notions Journal, Vol. 13, no. 1–3, 2002 (see online version at http://www.shyamsundergupta.com/shappy.htm).

[4] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Second edition, Springer, New York, 1994.

[5] R. Honsberger, Ingenuity in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1970.

[6] D. F. M. Torres, *O Computador Matemático de Post*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Nº 46, Abril de 2002, pp. 81–94.

[7] D. W. Wilson, Sequence A055629 (Jun 05 2000) in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/~njas/sequences

Delfim F. M. Torres
Universidade de Aveiro

Uma ida ao casino

José Paulo Viana

Todos, ou quase todos, gostamos de jogar. Jogar das mais diversas formas e nos mais diversos contextos. Às vezes por necessidade (e entramos no jogo das colocações de professores para mudar de escola ou para conseguir emprego ...), muitas vezes por prazer. E se o jogo traz prazer, então ainda melhor se o analisarmos do ponto de vista matemático. É o que vamos fazer, misturando algumas histórias.

As duas malas

Quando andava a estudar, no início da década de 60 do século passado, li no jornal uma notícia que nunca mais esqueci. Alguém telefonou para um casino de Las Vegas a perguntar se havia limite de aposta na roleta e a resposta foi que não, podia apostar-se a quantia que se quisesse. Passado algum tempo, um homem entrou no casino com duas enormes malas. Dirigiu-se a uma mesa da roleta e abriu uma mala. Estava cheia de notas. Pediu para que as contassem e jogou tudo no vermelho. A roleta girou, saiu um número vermelho e ele ganhou. Abriu então a segunda mala, que estava vazia, e disse: "Podem enchê-la". E saiu do casino com as duas malas.

Sempre me intrigou o que teria acontecido na vida daquele homem para o levar a fazer o que fez. É evidente que não se tratava de um jogador compulsivo, senão teria continuado a jogar. Por outro lado, tinha bastante dinheiro mas, para jogar daquela forma, não lhe chegava. Haveria qualquer problema grave cuja resolução passava por ter o dobro do dinheiro. E seria tão grave que ter uma mala cheia de dinheiro era o mesmo que não ter nada. Por isso jogou tudo. Pelo menos foi essa a explicação que achei mais aceitável.

A roleta

A roleta é o mais mítico dos jogos de casino. É sobre ele que há mais páginas escritas em livros, é sobre ele que há mais cenas de filmes. Dentro de um cilindro existe uma roda dividida em 37 sectores iguais, numerados de 0 a 36. Há 18 números vermelhos e 18 negros, além do 0 que é verde (figura 2, página seguinte). A roda é posta a girar num sentido e uma pequena bola é lançada em sentido inverso na parede lateral do cilindro. Depois de saltar várias vezes ao bater nas divisões da roda, a bola imobiliza-se num dos sectores. Quem tiver apostado no número desse sector ganha.

As apostas são feitas previamente com fichas coloridas que o jogador coloca numa mesa especial, como a que se vê na figura 1.

Há vários tipos de aposta que permitem apostar num só número ou em vários ao mesmo tempo.

Na figura estão cinco fichas em diferentes situações.

Figura 1. Mesa

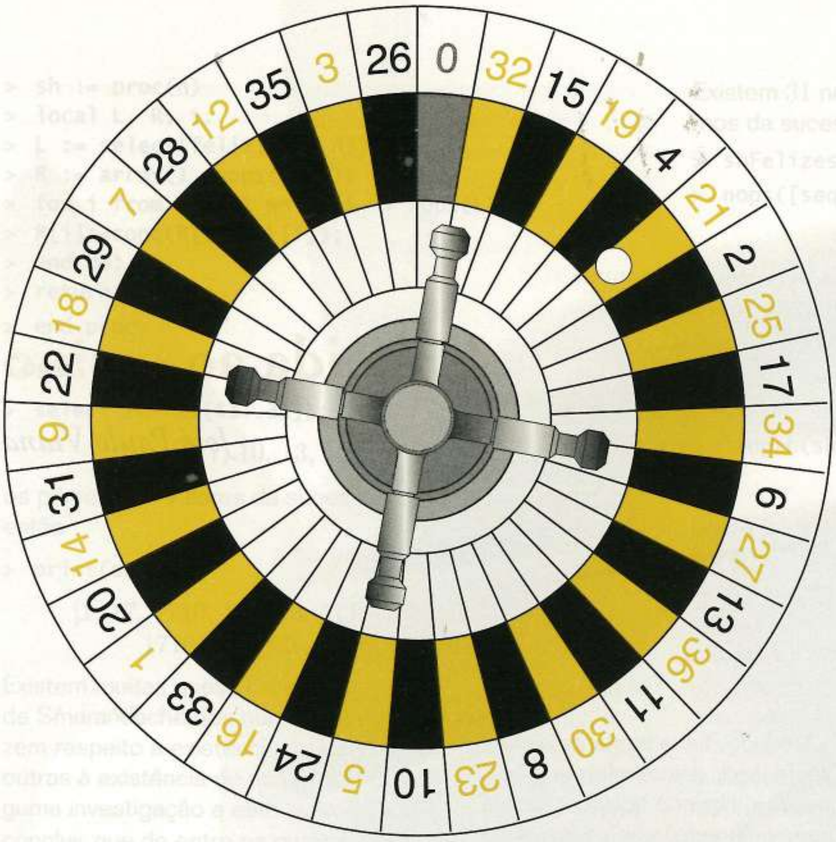


Figura 2. Roleta: ■ vermelho ■ negro ■ verde

Ficha A: aposta no número 8.

Ficha B: aposta nos números 17 e 20.

Ficha C: aposta nos seis números 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Ficha D: aposta em quatro números.

Ficha E: aposta nos dezoito números pares.

Um jogador pode fazer mais do que uma aposta.

Os jogadores que tiverem apostado no número saído ganham e o que recebem é inversamente proporcional à quantidade de números em que apostaram. Por exemplo, numa aposta do tipo A, recebe-se 36 vezes o valor da aposta, numa de tipo B 18 vezes, de tipo C 6 vezes, etc. Quem apostar no par ou ímpar, no vermelho ou negro, no maior ou menor, recebe o dobro do que apostou, ou seja, tem um lucro igual ao valor da aposta.

Se sair o número 0, todas as apostas são perdidas, excepto para quem apostou no 0.

Analisemos o jogo do ponto de vista matemático.

Comecemos pela aposta num só número (ficha A). Imaginemos que apostamos 1€ no número 8.

A probabilidade de ganhar é 1/37 e se ganharmos o lucro é de 35€ (recebemos 36 mas pagámos 1).

A probabilidade de perder é 36/37 e o *lucro* é de –1 (perdemos o euro apostado).

Para calcularmos o nosso lucro médio L, ou aquilo a que podemos chamar a esperança matemática deste jogo, temos de fazer o somatório dos produtos de cada *lucro* pela respectiva probabilidade:

$$L = 35 \times \frac{1}{37} + (-1) \times \frac{36}{37} \approx$$

$$\approx -0,027 \text{ ou } -2,7\%$$

Quer isto dizer que, em média, por cada euro apostado, perdemos 2,7 cêntimos. Ou, do ponto de vista do casino, eles ganham em média 2,7% do valor total das apostas deste tipo.

E o que aconteceria se apostássemos €1 nos números pares (ficha E)?

Como na roleta o 0 não é par nem ímpar, a probabilidade de ganhar é 18/37 e o lucro correspondente é de €1 (recebemos 2 mas pagámos 1).

A probabilidade de perder é 19/37 e o *lucro* é de –1 (perdemos euro apostado).

O lucro médio é então:

$$L = 1 \times \frac{18}{37} + (-1) \times \frac{19}{37} =$$

$$= -\frac{1}{37} \approx -0,027 \text{ ou } -2,7\%$$

Também aqui perdemos em média 2,7% do que apostamos.

O mesmo se passa para qualquer outro tipo de aposta na roleta. Temos sempre um prejuízo médio de 2,7%.

Claro que isto não quer dizer que, se formos uma noite ao casino e fizermos algumas jogadas, vamos ter obrigatoriamente prejuízo. Podemos ter sorte e ganhar. Podemos ter azar e perder mais que 2,7% daquilo que apostámos. O mesmo se passa com os outros jogadores.

Mas vejamos isto do ponto de vista do casino. Tem várias mesas de roleta a funcionar muitas horas por dia, cada uma delas sempre com vários jogadores, quase todos a apostarem muitas vezes. Ao fim da noite foram feitas milhares de apostas. Agora a sorte já tem muito pouco a dizer: entra em acção a lei dos grandes números e portanto os lucros do casino vão, quase seguramente, estar muito perto dos 2,7% do total das apostas feitas. E os lucros vão ser grandes! Uma pequena vantagem a favor da casa transforma-se, ao fim de muitos jogos, numa grande vantagem...

A martingala de D'Alembert

Apesar de este jogo ser desfavorável para o jogador, têm surgido ao longo dos tempos vários sistemas de apostas que, acreditam alguns, podem dar lucros garantidos. São as chamadas *martingalas*.

A mais famosa é a Martingala de D'Alembert e é extremamente simples:

Fazemos apostas nas que pagam a dobrar: a cor (vermelho ou negro), o par ou ímpar, o menor ou maior.

Começamos por uma certa quantia, por exemplo, 1€ no vermelho.

Se sair vermelho, ganhamos e temos um lucro de 1€.

Se perdermos, vamos duplicando a aposta até sair vermelho. Quando isto acontecer, temos um lucro de €1.

Vejamos um exemplo: sai negro 4 vezes seguidas e depois sai vermelho. Fomos apostando sucessivamente 1, 2, 4, 8 e 16 euros e o nosso saldo é:

$-1-2-4-8+16 = 1$

O método parece infalível e seguro. Não há dúvida que ganhamos sempre. Pouco, é verdade, mas sempre. Que mais se pode pedir?

Bem, há um perigo, e não é pequeno. Se tivermos azar e sair bola negra várias vezes seguidas, como os montantes das apostas crescem exponencialmente, podemos ter de apostar uma quantia que ultrapasse as nossas posses. Se sair bola negra 10 vezes seguidas, teremos de apostar 1024€ ... E se perdermos? Ai! Tudo para ganhar 1€?

Mas podem argumentar: sair 10 vezes seguidas uma cor é um caso muito pouco provável.

É verdade, mas já viram?, o prejuízo é enorme. E isso acontece de vez em quando...

Por exemplo, para o casino de Monte Carlo, o mais famoso de todos os casinos do mundo, os recordes são:

29 vermelhas seguidas na mesa 2, no início do século XX,

38 vermelhas seguidas também na mesa 2, em 1941.

Realmente, havendo vários jogadores a usar esta martingala, o casino pode ter prejuízo com eles durante vários dias. Mas, um certo dia, surge uma série grande e há vários jogadores que não aguentam. Nesse dia, o lucro do casino é muito grande e compensa os pequenos prejuízos dos outros dias.

Mesmo assim, alguns casinos jogam ainda mais pelo seguro:

— numas mesas não há limite de aposta mas a aposta mínima é razoavelmente alta e não é preciso uma série muito longa para que as apostas duplicadas atinjam valores muito altos;

— noutras mesas há limite de aposta, isto é, não se pode apostar mais do que certa quantia, e novamente não é preciso uma série muito longa para que se atinja o limite máximo permitido.

Quando, um destes dias, fiz uma incursão pela Internet à procura de martingalas, encontrei a de D'Alembert muito bem explicada numa página, incluindo até um exemplo com umas vinte jogadas *reais* com apostas no vermelho e que davam lucro. E a seguir perguntavam: e se estivesse a jogar no negro? E lá vinham as contas para os mesmos números saídos e também se tinha lucro. A página terminava dizendo: "agora que já sabe como ganhar seguramente, porque não experimenta? Aconselhamos-lhe o casino *XXX* que merece toda a confiança. E em vez de começar com uma aposta de 1€, comece com apostas de 10 ou 20€ para ganhar mais."

Achei isto um pouco estranho. Investiguei melhor e descobri duas coisas muito curiosas: esta página pertencia ao *site* do tal casino e nesse casino *on-line* a aposta máxima é de 150€ ...

A martingala de Bouchet

Outro esquema de aposta simples e com lucros "garantidos" tem o nome de Bouchet. Consiste no seguinte:

— Começamos por apostar 1€ (no par/ímpar, no vermelho/negro ou no menor/maior).

— Se perdermos a jogada, aumentamos 1€ na aposta seguinte.

— Se ganharmos a jogada, diminuímos 1€ na aposta seguinte.

— Paramos quando o valor a apostar for 0.

Quer isto dizer que terminamos quando o número de vezes que ganhámos exceder em um o número de vezes que perdemos.

Vejamos um exemplo. Representemos por G ganhar uma jogada e por P perder. Se a série de resultados for P-P-P-G-G-P-G-G-G, podemos representar num gráfico a evolução do jogo.

Nos vértices do gráfico estão os valores das apostas, com o sinal + ou – conforme se tenha ganho ou não e na linha horizontal está o saldo em cada momento.

Com esta martingala, o lucro é sempre o valor do pico mais alto (4 neste caso) mais o número de picos extra (1 neste caso).

Neste método o valor das apostas cresce mais devagar mas, é claro, tem um perigo bastante grande: não se voltar tão cedo ao 0. Ora qualquer estatístico sabe que há uma probabilidade razoável de haver um longo período de desvio em relação à média e nesse caso os prejuízos podem tornar-se muito grandes.

Como ganhar ao jogo

Há já uns anos encontrei um livro de Jérome Jean-Charles que se chama precisamente *Como ganhar ao jogo*. Claro que o comprei logo ...

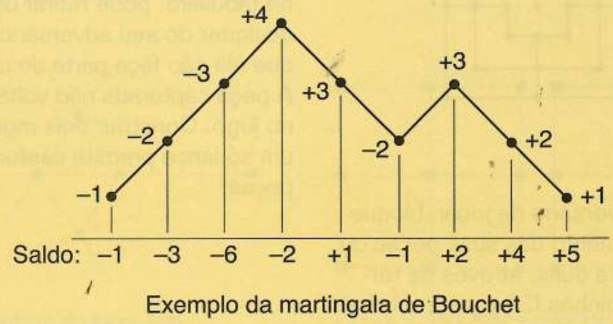
Nele se analisam uma série de jogos de todo o tipo. A respeito da roleta, estão lá uma série de comentários que não resisto a transcrever (em tradução livre):

— Se não for obrigatório jogar, a melhor estratégia é: Não Jogar.

— Se quiser experimentar, jogue uma só vez e não volte, qualquer que seja o resultado. Neste caso, começar com um capital bem definido, escolher um objectivo fixo e ser totalmente intransigente.

Analisa então alguns exemplos de situações e objectivos, chegando aos seguintes resultados:

— Se começar com 10€ e quiser ganhar 1€, seguindo a melhor estratégia, tenho 89,94% de probabi-



Exemplo da martingala de Bouchet

lidade de o conseguir e 10,06% de perder os 10€.

— Se começar com 7€ e quiser ganhar 1€, seguindo a melhor estratégia, tenho 86,45% de probabilidade de o conseguir e 13,55% de perder os 7€.

A estratégia a seguir para alcançar um certo objectivo é muito importante. Por exemplo, para a situação de termos 1000€ e querermos ganhar 1000€:

— se jogarmos os 1000€ de uma só vez (no ímpar ou numa cor), temos 48,6% de hipóteses de o conseguir e 51,4% de tudo perder,

— se jogarmos 10€ de cada vez, a probabilidade de alcançar o objectivo é praticamente nula, ou seja, ficaremos sem nada (embora demore algum tempo ...).

Existem curiosas histórias ligadas à roleta.

No início do século XX, um navio de guerra da Rússia dos czáres ancorou ao largo de Monte Carlo e o comandante foi jogar ao casino. No final da noite tinha perdido tudo: o dinheiro dele e também todos os fundos monetários do navio. Foi ao barco e regressou pouco depois. Chamou o gerente do casino e anunciou-lhe que, quando os marinheiros souberam que não poderiam receber os seus salários nem havia mantimentos e combustível suficientes para voltar à Rússia, tinham decidido que disparariam os canhões em direcção ao casino caso este não devolvesse o dinheiro ao comandante.

E realmente os canhões já estavam apontados na direcção do casino. O gerente percebeu que o comandante estava desesperado e já nada tinha a perder — esperavam-no o fim da carreira e a prisão — enquanto que o casino tinha muito a perder. Assim, devolveu ao comandante os fundos necessários para que o navio pudesse partir.

Outra história passou-se no casino de Baden-Baden, cidade alemã famosa pelas suas termas. Um grupo de jogadores recolheu, durante vários dias, os números que foram saindo numa das mesas de roleta. Analisaram aquela enorme quantidade de resultados e verificaram que havia uma zona da roda onde a bola parava com uma frequência ligeiramente superior à esperada. Com efeito, o cilindro onde rodava tinha uma ligeira excentricidade fisicamente indetectável mas suficiente para que a probabilidade de saída de um certo grupo de números fosse ligeiramente maior. Esses jogadores começaram então a apostar sistematicamente nesses números, ganhando em poucos dias uma pequena fortuna. A gerência do casino apercebeu-se do que se passava e substituiu a roleta. Aliás, como é impossível garantir uma roleta fisicamente perfeita, a partir dessa altura todos os casinos passaram a trocar as roletas entre as várias mesas e a substituí-las regularmente.

Em conclusão: é possível não perder ou até ganhar à roleta. Mas, para não perder, temos de ter um navio de guerra sob nosso comando e para ganhar temos de descobrir uma roleta imperfeita sem que o casino se aperceba ...

Há, no entanto, uma maneira absolutamente segura de ganhar à roleta: é ser-se o dono do casino.

Referência Bibliográfica

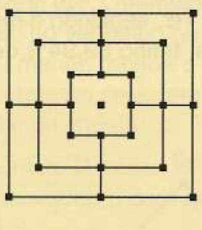
Jean-Charles, J. (1984). Comment Gagner aux Jeux. Paris: M. A. Editions.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Vergílio Ferreira (Lisboa)

Jogo do Moinho

Material

É um jogo para dois jogadores, cada um com 9 peças, disputado num tabuleiro formado por 3 quadrados *concêntricos*, ligados entre si através dos pontos médios dos lados, originando 24 pontos dispostos em 16 linhas de três.



Objectivo

Impedir o adversário de jogar, bloqueando o movimento das suas peças ou reduzindo-as a duas, através da formação de moinhos (3 peças em linha).

Abertura

Inicialmente, o tabuleiro está vazio. Começa o jogador com as peças de uma dada cor (habitualmente começam as peças brancas, se existirem). Alternadamente, cada jogador coloca uma das suas peças num ponto vazio do tabuleiro, até esgotar as 9 peças. Se um jogador construir um moinho, isto é, se alinhar 3 peças segundo as linhas horizontais e verticais marcadas no tabuleiro, pode retirar uma peça qualquer do seu adversário, desde que ela não faça parte de um moinho. A peça capturada não volta a entrar no jogo. Construir dois moinhos com um só lance permite capturar duas peças.

Meio

Depois de colocadas todas as peças no tabuleiro, cada jogador, à vez, move uma das suas peças, ao longo de uma linha, para uma casa vazia adjacente. Sempre que fizer um moinho, o jogador captura uma peça do adversário. É permitido desfazer um moinho numa jogada e refazê-lo na jogada seguinte (retirando nova peça).

Fim

Se um jogador ficar apenas com 3 peças, elas podem saltar para qualquer ponto vazio do tabuleiro. O adversário deve movimentar as suas peças da forma usual, a não ser que ambos os jogadores possuam 3 peças. Perde o jogador que não tenha a possibilidade de mover as suas peças ou que ficar reduzido a duas.

Moinho, um jogo de alinhamento

Luís Reis

Os jogos de alinhamento formam uma família verdadeiramente universal e com um passado tão longo que os coloca entre os jogos mais antigos do mundo. São jogos de posição, tal como os solitários, os jogos de bloqueio, o xadrez e as damas.

Jogo do Galo e afins

Da variedade 3 em linha, a versão mais popular entre nós é o Jogo do Galo. Uma vantagem do jogo é o facto de poder ser jogado com pouco equipamento: precisa de papel e lápis ou da areia de uma praia. O tabuleiro consiste de quatro segmentos. (Figura 1)

Cada jogador, alternadamente, coloca uma marca numa das casas do tabuleiro — é habitual usarem-se X e O — com o objectivo de fazer uma linha (horizontal, vertical ou diagonal) com as suas marcas.

O jogo foi informatizado desde 1860, por Babbage (1791–1871) — apenas teoricamente, porque ele não conseguiu construir a máquina.

Uma variante (isomorfa) moderna do Jogo do Galo é o Jam, jogo inventado em 1967 por John Michon, cientista holandês (Utrecht, 1935–). A figura 2 representa 8 cidades ligadas por 9 estradas. (Figura 2)

Dois jogadores jogam alternadamente e seleccionam uma estrada na sua vez. Ganha o primeiro jogador que tomar todas as estradas que atravessam uma cidade[1].

O Jogo do Galo (qual será a origem deste nome?) não é muito estimulante: termina num empate, a não ser que um dos jogadores cometa um erro. Existem versões semelhantes mas que requerem estratégias mais avançadas. Nos tabuleiros da figura 3 há nove pontos (ou buracos) nas intersecções das linhas.

Cada jogador possui 3 peças que vai colocando, alternadamente, num dos pontos livres do tabuleiro. Depois de todas as 6 peças estarem colocadas, os jogadores, à vez, movimentam uma das suas peças para um ponto livre adjacente, na vertical ou horizontal — ou diagonal no segundo tabuleiro — sem saltar por cima de nenhuma peça. Ganha o jogador que alinhar todas as suas peças ou que impedir o adversário de jogar.

Pode constituir uma surpresa para os alunos saberem que estas versões têm sido apreciadas por povos de todo o mundo desde há muito séculos. O segundo tabuleiro parece ser o mais comum, o nome do jogo muda consoante o país e introduzem-se algumas variações às regras básicas descritas acima. Por exemplo, no Ghana, o jogo Achi usa 4 peças para cada jogador; em França, o jogo tem o nome de Marelle e o ponto central não pode ser usado na primeira jogada de cada jogador (sem esta regra o primeiro jogador tem vantagem se colocar a primeira peça no centro); na Índia, o jogo Tant Fant inicia-se com as peças de cada jogador posicionadas nos pontos horizontais de cima e de baixo, respectivamente; no sul da China o jogo ainda é jogado com o nome de *luk tsut k'i* (xadrez de seis homens) e parece que já era conhecido no tempo de Confúcio, c. 500 a.C. O jogo também é muito popular nas Filipinas, sob o nome de Tapatan.

Segundo Bell e Cornelius, encontraram-se exemplos deste tipo de tabuleiros no Egipto, gravados nas pedras do templo de Kurna (c. 1400 a.C.) e no templo de Kom Ombo (cuja construção se iniciou no reinado de Ptolomeu IV, c. 220 a.C.). Na Europa estes jogos eram populares no século XIV. Aparecem tabuleiros gravados em diversas catedrais, como é o caso dos claustros de Westminster Abbey, em Londres (em Inglaterra o jogo tem o nome de Three Men's Morris). Existem registos antigos de tribunais eclesiásticos castigarem homens por escavarem os buracos para o jogo em locais impróprios.

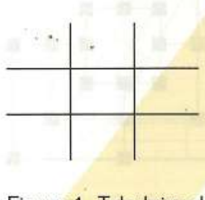


Figura 1. Tabuleiro do Jogo do Galo.

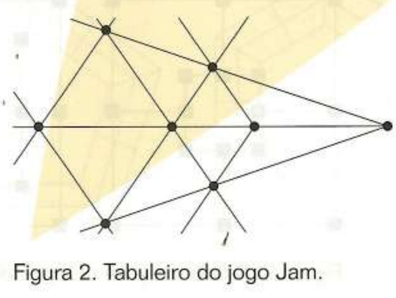


Figura 2. Tabuleiro do jogo Jam.

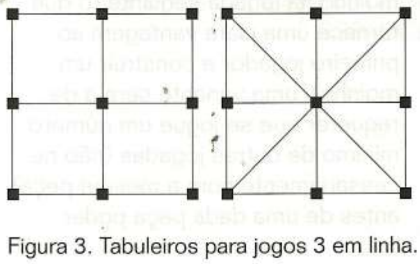


Figura 3. Tabuleiros para jogos 3 em linha.

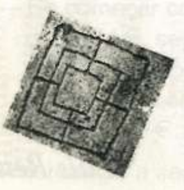


Figura 4. Tabuleiro do Jogo do Moinho. Basílica Julia.

Figura 5. Pormenores do Libro de los Juegos[6].

Uma variante interessante destes jogos é a inversão: cada jogador tenta forçar o adversário a colocar 3 em linha.

O Jogo do Moinho

O jogo do Moinho é uma extensão dos jogos referidos no ponto anterior (ver descrição na página 42).

Há provas arqueológicas de que o Jogo do Moinho também é jogado desde a antiguidade egípcia (templo de Kurna, mais uma vez), grega (Acrópole de Atenas); romana (Basílica Julia)[2] (figura 4) e ainda no Sri Lanka (Ceilão)[3]. Na Europa, são numerosos os locais onde se encontraram vestígios do jogo: num barco funerário viking[4], em abadias, catedrais, castelos, igrejas e aldeias medievais (Inglaterra, França, Alemanha). Shakespeare referiu-se ao jogo em *Sonho de uma noite de verão* (1595)[5]. A introdução deste jogo na Europa poderá ter sido feita pelos árabes do norte de África ou pelos mercadores fenícios, que chegaram a numerosos portos. (Figuras 5 e 6)

Algumas notas acerca das regras do jogo:

1. Na maioria dos casos é absolutamente proibido capturar uma peça que forme um moinho, mas pode-se acrescentar a excepção *a não ser que não haja mais peças disponíveis*.
2. Embora a maioria das regras permita que se desfaça e refaça um moinho na jogada seguinte (o que fornece uma clara vantagem ao primeiro jogador a construir um moinho), uma variante será a de requerer que se jogue um número mínimo de outras jogadas (não necessariamente com a mesma peça) antes de uma dada peça poder voltar ao mesmo moinho. Pode ser uma, duas ou três jogadas. Não se aplica tal restrição se o moinho se formar numa linha diferente ou se forem usadas peças diferentes.

Algumas regras impõem mesmo que não se possa repetir moinhos.

Variações ao tema

Apesar do Jogo do Moinho com 9 peças ser o mais popular, a figura 7 ilustra os tabuleiros para 5, 7 e 11 peças, respectivamente.

A partir do terceiro tabuleiro da figura 7, Marcia Ascher propõe novos tabuleiros, de acordo com a tradição da população da Mongólia (figura 8). Cada configuração é um encaixe de 3 polígonos regulares concêntricos de n lados ($n = 3, 4, 5, 6$).

Estes tabuleiros podem estimular algumas questões para investigar com os alunos.

Quantos pontos de intersecção há em cada tabuleiro?

Os pontos de intersecção existem no centro de cada lado e em cada vértice. No caso dos pentágonos, por exemplo, uma vez que cada um tem 5 lados e 5 vértices e o tabuleiro tem 3 pentágonos obtemos $3 \times (5 + 5) = 30$ pontos de intersecção. O mesmo raciocínio se aplica às outras configurações: cada figura é repetida três vezes, tem o mesmo número de lados e de vértices. Assim, para $n = 3, 4, 5, 6$ temos 18, 24, 30 e 36 pontos de intersecção. No nível adequado, os alunos poderiam até descobrir uma fórmula para o caso geral de polígonos de n lados: $3x(n + n) = 6n$ pontos de intersecção.

E se os jogos fossem do tipo 4 em linha e a configuração fosse de 4 polígonos encaixados? Quantos pontos de intersecção haveria?

Quantas peças por jogador?

Tomemos o terceiro tabuleiro da figura 8: se cada jogador usasse 14 peças em vez de 11, que problemas surgiriam? O que acontece se cada jogador tiver 12 peças? Faz sentido que um jogador tenha 12 peças e outro tenha 11?

Para que cada jogador disponha do maior número possível de peças no início — e igual número que o adversário — então o número total de peças do jogo deve ser igual ao número de pontos de intersecção do tabuleiro menos 2, recebendo cada jogador metade desse total. Assim, para a configuração quadrada, cada jogador deve receber $(24 - 2) / 2 = 11$ peças, que é precisamente o número que os mongóis usam. Para as outras configurações, se usarmos 8, 14 e 17 peças para $n = 3, 5$ e 6, respectivamente, então continuamos de acordo com

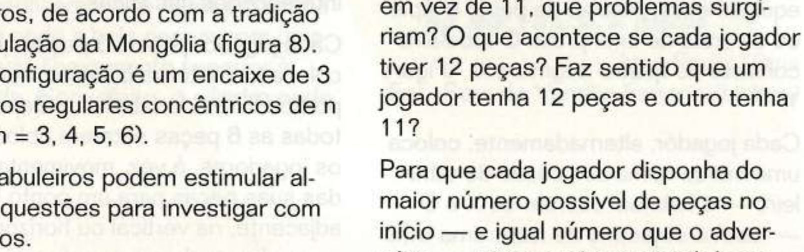


Figura 7. Tabuleiros para o Jogo do Moinho com 5, 7 e 11 peças.

os mongóis. Mais uma vez os alunos podem tentar descobrir a relação geral, $(6n - 2) / 2 = 3n - 1$.

Quantas maneiras de alinhar 3 peças?

Temos de contar o número total de lados dos 3 polígonos encaixados (3n), somar o número de linhas que unem os vértices (n) e somar o número de linhas que unem os pontos médios (n): o total é de 5n, para cada configuração.

Naturalmente, estas e mais questões podem ser colocadas aos alunos (envolvendo nomeadamente números e a geometria dos polígonos), adequando-as aos seus conhecimentos. Mas o melhor, claro, é mesmo jogar para responder à questão: *Qual é o jogo da família que mais aprecias? Porquê?*

Tal como existem diversas famílias de tabuleiros de jogos de estratégia envolvendo configurações geométricas e ideias matemáticas, talvez os alunos se sintam encorajados pelo exemplo dos pastores da Mongólia para criarem e desenvolverem, eles próprios, novos jogos.

Jogos-mnk

Há mais jogos com a ideia de ser o primeiro a obter *k-em-linha* além dos que foram mencionados: Dara, Pente, Go-Moku, etc.

O termo *jogos-mnk* designa a família de jogos de tabuleiro de informação perfeita em que dois jogadores colocam alternadamente peças num tabuleiro rectangular com o objectivo de alinhar um determinado número de peças da sua cor, na ortogonal ou diagonal: o tabuleiro tem dimensão mxn e pretende-se alinhar k peças. Assim, o Jogo do Galo é um jogo-3,3,3 e o Go-Moku tradicional é um jogo-19,19,5.

Prova-se que nenhum jogo-mnk é vantajoso para o segundo jogador, podendo ser vantajoso para o primeiro (mesmo que não se conheça a estratégia vencedora) ou um empate (se não houver erros ...).

Alguns resultados[7]:

- se o jogo-mnk é vantajoso para o primeiro jogador, então também o é o jogo-m'n'k, com $m' \geq m$ e $n' \geq n$.
- se $k \geq 8$, o segundo jogador pode forçar um empate, mesmo num tabuleiro infinito (por maioria de razão, num finito); quer isto dizer que jogado de modo perfeito um jogo se prolonga indefinidamente e que num tabuleiro finito termina num empate.
- não se sabe se o segundo jogador consegue forçar um empate quando k = 6 ou 7.
- k = 3 é vantajoso para o primeiro jogador, excepto se m = n = 3.
- jogos-m,4,4 são vantajosos para o primeiro jogador se $m \geq 30$ e empates se $m \leq 8$.
- o jogo-5,5,4 é um empate e o jogo-6,5,4 é vantajoso para o primeiro jogador.
- o jogo-6,6,5 é um empate.

Quanto ao Jogo do Moinho de 9 peças está provado que é um jogo de empate (Gasser).

Notas

1 Jogar online: http://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/Jam.shtml

2 Mandada edificar em Roma por Júlio César, em 54 a.C., e terminada no tempo do imperador Augusto, poucos anos antes de arder, no ano 9. Principalmente um tribunal, era também um local de encontro público e um centro comercial.

3 No reino de Mahadithika Maha-Naga (anos 9–21).

4 O barco foi descoberto em 1880, na Noruega e datado de 850; provavelmente o túmulo do rei Olav Gierstada — http://cma.soton.ac.uk/HistShip/shlect75.htm

5 "The nine men's morris is fill'd up with mud" (Titânia, 2° Acto, 1ª Cena) que poderia ser traduzido por "O jogo do moinho está cheio de lama", podendo significar a alusão ao tabuleiro do jogo marcado no largo da aldeia.

6 Também designado Libro de ajedrez, dados y tablas, foi comissionado pelo rei de Leão e Castela Afonso X, o Sábio, entre 1251 e 1283. Tem 98 páginas e 150 ilustrações. Trata-se de um dos mais importantes documentos para o conhecimento da história dos jogos de tabuleiro, muitos dos quais importados dos reinos árabes. O único original conhecido encontra-se na biblioteca do Mosteiro de São Lourenço do Escorial, perto de Madrid.

7 http://en.wikipedia.org/wiki/Mnk-games

Figura 6. Anónimo. Jeu de marelle et Ceuillettes des fruits. C. 1500. Museu do Louvre. Paris.

Referências / Bibliografia

Aroutcheff, P. "Les Marelles". Jeux et Stratégie nº 15. 1982.

Ascher, M. "Learning with Games of Strategy from Mongolia". Teaching Children Mathematics vol.8, n.2. 2001.

Bell, R., M. Cornelius. "Board Games round the World". Cambridge University Press. 1988.

Gasser, R. "Solving Nine Men's Morris". http://www.msri.org/publications/books/Book29/files/gasser.pdf

http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=1183

http://www.ac-amiens.fr/chaalis/nouvelle5.htm

http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/rowgames/index.html

http://www.gamerz.net/pbmserv/nmm.html

http://www.psychologie.leidenuniv.nl/cog/index.php3?c=27

http://www.tromboni.demon.co.uk/merrills/merrills.html

Luís Reis
Centro de Competência Nónio
ESB–UCP

Figura 8. Variações do tabuleiro do Jogo do Moinho para 11 peças.

Teoria de Jogos: Jogos de Dois Jogadores de Soma Zero

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

Como foi referido no número anterior, a incursão da teoria de jogos continua com a análise de jogos de dois jogadores de soma zero. Na vida real, a maior parte das vezes os jogos não são deste tipo. Os jogadores, geralmente, preferem aliar-se e dividir resultados do que jogar individualmente com vista a receberem um prémio melhor. Um jogo de soma zero não cria nada de valor. Os jogadores atacam-se mutuamente.

No artigo anterior vimos que qualquer jogo com dois jogadores pode ser representado por uma matriz de *payoffs*. Futuramente representaremos qualquer jogo de dois jogadores de soma zero como um jogo matricial, isto é, através de uma matriz M do tipo $m \times n$ identificando os dois jogadores como jogador linha e jogador coluna. As m estratégias do jogador linha serão identificadas através das linhas da matriz M e as n estratégias do jogador coluna representar-se-ão nas colunas da matriz M. Dada a definição de jogo de dois jogadores de soma zero, é óbvio que escolhendo o jogador linha a estratégia i e o jogador coluna a estratégia j, sendo m_{ij} o *payoff* do primeiro jogador então o *payoff* do segundo jogador é exactamente $-\ m_{ij}$.

Foi von Neumann quem apresentou um dos maiores resultados para este tipo de jogos. Ele demonstrou rigorosamente que existe sempre um curso racional de acção em jogos de dois jogadores, desde que os seus interesses sejam completamente opostos. De forma única e inequívoca von Neumann respondeu à questão "como posso maximizar os meus *payoffs* em jogos de soma zero com dois jogadores?".

		SUNEC	
		1 u. m.	2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0;0	5000; -5000
	2 u. m.	-5000;5000	0;0

Figura 1

		SUNEC			
		1 u. m.	2 u. m.		
SUMUS	1 u. m.	0	5000	min: 0	maximin: 0
	2 u. m.	-5000	0	min: -5000	

Figura 2

1. Equilíbrio em jogos de dois jogadores de soma zero

Intuitivamente, a ideia de solução para qualquer jogo leva-nos a pensar em equilíbrio, entendendo-se este como um *n-uplo* de estratégias onde cada jogador joga o seu melhor face aos outros jogadores.

No contexto de jogos de soma zero, a ideia de equilíbrio pode ser traduzida através de um par de estratégias do seguinte modo:

Seja (p, q) um par de estratégias em equilíbrio, então $m_{iq} \leq m_{pq}, \forall i$ e $m_{pj} \geq m_{pq}, \forall j$.

Saliente-se que a segunda desigualdade é contrária da primeira uma vez que o *payoff* do jogador coluna é o simétrico do *payoff* do jogador linha. Estas desigualdades motivam a seguinte definição.

Definição: Seja M uma matriz real. Um elemento m_{pq} de M é um ponto sela se é simultaneamente um mínimo da sua linha e um máximo da sua coluna.

Assim, se M é um jogo matricial, então m_{pq} é um ponto sela se e só se (p, q) é um par de estratégias de equilíbrio. Logo, se um jogo de soma zero tem um equilíbrio, tem uma solução. No entanto, um jogo de soma zero com dois jogadores pode ter múltiplos equilíbrios. Porém, todo o equilíbrio de um jogo de soma zero com dois jogadores tem o mesmo valor e, portanto, podemos identificar os *payoffs* da solução com qualquer um desses equilíbrios.

2. Um Duopólio no mercado dos sumos engarrafados

Tomemos um exemplo de duopólio, baseado em R. A. McCain, de duas empresas que vendem sumos engarrafados. Para facilitar o estudo designemos por SUMUS e SUNEC essas empresas. Cada companhia tem um custo fixo de 5.000 u. m., independentemente da quantidade de garrafas vendidas. As duas companhias competem pelo mesmo mercado e têm de escolher entre vender cada garrafa por um preço de 1 u. m. ou por um preço de 2 u. m..

Os pressupostos do problema são:

- por um preço de 2 u. m. por garrafa, 5.000 garrafas podem ser vendidas com um retorno de 10.000 u. m.;
- por um preço de 1 u. m. por garrafa, 10.000 garrafas podem ser vendidas com um retorno de 10.000 u. m.;
- se ambas as companhias colocarem as garrafas no mercado pelo mesmo preço, dividem igualmente as vendas;
- se uma empresa colocar o preço mais alto que a outra, a companhia com o preço mais baixo vende toda a quantidade enquanto que a empresa que coloca o preço mais alto não vende nada;
- os *payoffs* são os lucros, depois de deduzidos os custos fixos.

A figura 1 representa a matriz de *payoffs* do jogo.

Para analisar o resultado do jogo do ponto de vista da companhia SUMUS, utilizam-se os conceitos de *maximin* e *minimax*, que resultam num ponto de equilíbrio. *Max* são os maiores valores das colunas e *min* são os menores valores das linhas.

Suponhamos em primeiro lugar que embora cada empresa seja capaz de fazer uma previsão razoável da matriz de *payoffs*, ela ignora a estratégia que o seu concorrente irá adoptar. Ignorando os planos da empresa SUNEC, a empresa SUMUS poderá proceder da seguinte forma: determinar, em primeiro lugar, o menor *payoff* que pode receber em cada uma das suas estratégias (mínimo de cada linha da matriz de *payoffs*). Em segundo lugar escolher a estratégia que possui o mais alto mínimo (escolha da linha da matriz de *payoffs*). Assim, empresa SUMUS pode assegurar-se de que, qualquer que seja a decisão do seu concorrente, ele não obterá o pior resultado possível ao evitar os resultados menos favoráveis (linhas de mínimos mais baixos). Da mesma forma a empresa também nunca atingirá o melhor resultado possível pois, propositadamente, ignorou os melhores resultados.

A figura 2 explicita a aplicação deste procedimento à tabela representada na figura 1, para a empresa SUMUS.

Examinando o resultado do jogo do ponto de vista da empresa SUNEC, adoptando os mesmos critérios, esta empresa irá, também, procurar o seu maximin.

A empresa SUNEC irá procurar o máximo do conjunto de mínimos nas colunas na sua matriz de *payoffs* (figura 3).

Entretanto, dado o conceito de jogo de soma zero, a escolha do máximo dos mínimos das colunas matriz de *payoffs* da empresa SUNEC deve gerar a mesma estratégia que dá o mínimo dos máximos nas colunas da matriz de *payoffs* da empresa SUMUS. Analisando a figura 4, concluímos que se a empresa SUNEC

		SUNEC	
		1 u. m.	2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0	-5000
	2 u. m.	5000	0
		min: 0	min: -5000
		maximin: 0	

Figura 3

		SUNEC	
		1 u. m.	2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0	5000
	2 u. m.	-5000	0
		max: 0	max: 5000
		minimax: 0	

Figura 4

tentar achar o minimax (mínimo do conjunto de máximos) na matriz de *payoffs* da empresa SUMUS, ela irá seleccionar a mesma estratégia quando tenta encontrar o *maximin* da respectiva matriz de *payoffs*. Matematicamente temos que o equilíbrio do jogo se verifica exactamente num ponto sela da matriz da *payoffs* e portanto o *maximin* é exactamente o *minimax*.

Generalizando este resultado obtém-se o chamado

Teorema Minimax: Qualquer jogo de soma nula com dois jogadores tem uma solução onde o *payoff maximin* é igual ao *payoff minimax*.

Assim, para duas pessoas, um jogo de soma zero é racional para cada um dos jogadores que escolher a estratégia que maximiza o mínimo *payoff*, e o par de estratégias e *payoffs* tal que cada jogador maximiza o respectivo mínimo é a solução do jogo.

Mediante o exposto o leitor já pode verificar que a solução do jogo proposto: III e B são as estratégias adequadas e o seu *payoff* será de 2 euros.

3. Qual a melhor maneira do jogador se proteger contra o insucesso?

Vimos que um equilíbrio é uma condição necessária para que uma combinação de estratégias seja a solução de um jogo. Se uma combinação de estratégias não é um equilíbrio, então pelo menos um dos jogadores tem incentivos para alterar o seu jogo. No próximo artigo veremos que a melhor maneira dos jogadores se protegerem contra o insucesso é utilizarem estratégias mistas. Se os jogadores se munirem apenas de estratégias puras correm o risco dos seus opositores descobrirem qual a estratégia que vão usar e, consequentemente, as perdas nesse caso são maiores.

Bibliografia

[1] Berck, Peter; Sydsaeter, Knut; *"Manual de Matemática para Economistas"*, McGraw-Hill de Portugal, 1993.

[2] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *"The Logic of Strategy"*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[3] Davis, Morton D.; *"Introducción a la Teoría de Juegos"*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *"Game Theory"*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *"Game Theory for Applied Economist"*; Princeton University Press, 1992.

[6] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *"Theory Of Games and Economic Behaviour"*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[7] Osborne, Martin J.; *"An Introduction to Game Theory"*; Oxford University Press, 2000.

[8] Kara, Tarik, *"Lecture Notes on Game theory"*, //www.gametheory.net ,2002.

[9] Yildiz, Muhamet, *"Game Theory Lecture Notes"*, //www.gametheory.net ,2002.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

Quota 2004

No ano de 2004 o valor da quota é de €43,70 para professores, €31,00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,70 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ____________________ Sócio nº: __________

Morada: ____________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ Email: __________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: __________

Nº do B.I. __________ Arquivo: __________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de ensino: __________

Categoria profissional: __________

Escola: ____________________

Morada: ____________________

Telefone: __________ Email: __________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA **MasterCard** ☐ MasterCard

Validade __________ o valor de __________ correspondente a ____________________ Data ___/___/___

Assinatura ____________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a)	€10,30
☐ Sócio(a) residente no estrangeiro	€12,80

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: geral@apm.pt

Índice