Educação e Matemática

Nº 76

Janeiro/Fevereiro 2004

Periodicidade: 5 números por ano

Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Alterações na Redacção

Joana Brocardo acaba de cumprir o seu mandato de directora da Revista *Educação e Matemática*. Agradecemos à Joana todo o empenhamento que colocou, durantes estes últimos dois anos, na coordenação dos trabalhos da redacção.

A nova directora da *Educação e Matemática* é Ana Paula Canavarro.

Sobre a capa

A capa deste número consiste numa composição gráfica envolvendo o tabuleiro e peças de Xadrez, numa alusão ao ano temático que se inicia, intitulado *Matemática e Jogo*.

Neste número também colaboraram

Ana Fraga, Ana Teresa Oliveira, António César de Sá, Helena Rodrigues, Isabel Paula, Joaquim Félix, Jorge Nuno Silva, Luis Carlos Cachafeiro, Luís Miguel Ferreira, Luís Reis, Manuel Martins Ferreira, Margarida Abreu, Maria Cristina Matos, Maria da Graça Zenhas, Maria Teresa Santos, Nuno Lavado, Vanda Rosa.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Fevereiro de 2004.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

nº 76
Janeiro/ Fevereiro de 2004

Apesar de tudo! ...

Joaquim Félix

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Paula Canavarro

Subdirectora
Adelina Precatado

Redacção
Alice Carvalho
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A,
1500–236 Lisboa

Tiragem
5000 exemplares

Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

N.º de Registo ICS: 112807
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Correm tempos difíceis, complicados, de incerteza.

Pelas nossas escolas perpassa um ambiente de grande desmotivação, de encolher de ombros, de não se saber afinal o que aí vem. Orientações contraditórias, propostas de Lei de Bases que não são discutidas...

No entanto, muito recentemente, no Básico, as Escolas haviam sido convocadas à tarefa de organização de práticas de gestão e de desenvolvimento curricular com vista à concretização de aprendizagens mais significativas, num quadro de aquisição e desenvolvimento de competências previstas no Currículo Nacional. Emergia o apelo constante à participação, à auto-formação e à auto-avaliação, ao investimento profissional dos professores e organizacional das Escolas. Temas e conceitos como projecto curricular de escola, projecto curricular de turma, avaliação de competências, competências transversais, áreas curriculares não disciplinares, eram objecto de discussão e de reflexão.

No Secundário discutiam-se planos curriculares, opinava-se sobre novos programas e novas disciplinas, outros espaços, outros tempos e outras práticas, projectava-se o oferta educativa de cada escola.

Tomava-se partido. Concordava-se, discordava-se, raramente se era indiferente.

Os departamentos centrais do Ministério responsáveis por estas áreas, o DEB e o DES, constituíam-se, eles próprios, como impulsionadores deste clima. Promovendo encontros, organizando seminários de formação, editando materiais, solicitando estudos, pareceres, opiniões. Com avanços e com recuos, é certo. Tomando medidas com que se concordava e outras que geravam desacordo. Naturalmente.

Mas percebia-se um sentido e sentia-se um rumo ... De repente parece ter-se esvaído o sentido e esfumado o rumo ... Contudo, e como alguns colegas gostam de dizer, "apesar de tudo, há aulas todos os dias"! Felizmente ... .

E felizmente que soubemos, já lá vão quase vinte anos, criar uma âncora, um porto de abrigo se quisermos — a *nossa* APM. Talvez por isso sejamos mais de 4000 (!...).

Envolvidos e envolvendo. Participando, uns mais, outros menos. Uns com outros, outros sozinhos. E continuamos, persistentemente, activos e *querentes*. *Querentes*, porque queremos coisas. Queremos tudo, muitas vezes, Quebrar rotinas, quase sempre ...

E aí estamos: nos grupos de trabalho, no ano temático, em comissões, animando fóruns, na investigação, nos núcleos ou nos Encontros. E na Escola — sempre. Aí, onde tudo se concretiza, ou não.

Somos muitos, felizmente. Diferentes. Com diferentes opiniões e diferentes pontos de vista. Ainda bem! Mas temos também muito em comum: todos gostamos da Matemática; todos gostamos de ser Professores; todos queremos viver uma profissão que se deseja apaixonante – ser Professor de Matemática. E aí estamos. Em busca do tudo ou de pequenos nadas. Na Escola ou fora dela. Onde todos os dias Somos! ...

Apesar de tudo! ...

Joaquim Félix
Direcção da APM

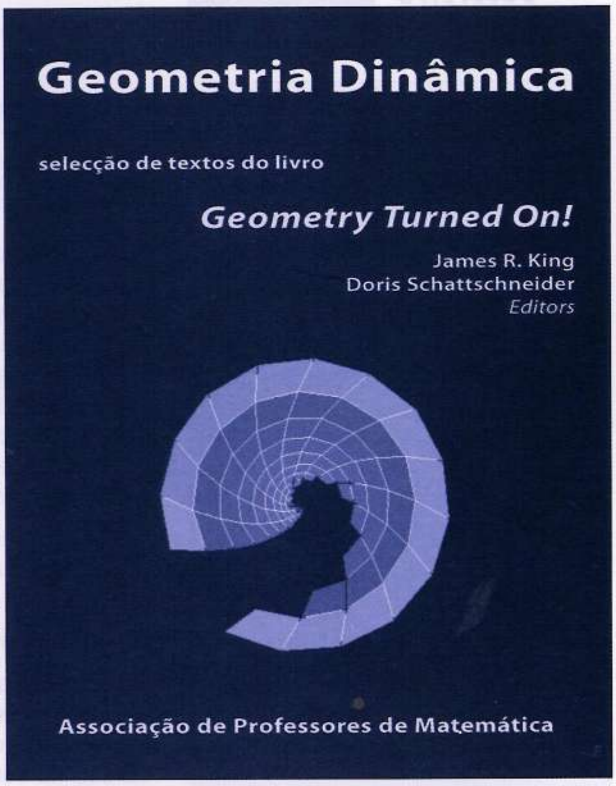
APM
Publicações

Geometria Dinâmica

Selecção de textos do livro *Geometry Turned On!*

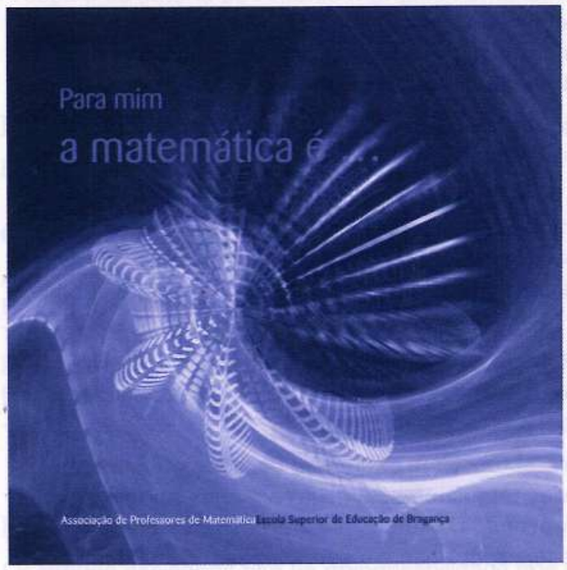
149 pp. APM, 2003

Sócio: €8,00
PVP: €16,00



Este livro contém a tradução de 13 textos incluídos no livro *Geometry Turned On*, publicado em 1997 pela Mathematical Association of America (MAA). A maior parte dos textos da edição americana são extensões de comunicações apresentadas num encontro anual do MAA, no âmbito de uma sessão especial dedicada à geometria dinâmica.

A publicação desta colectânea em português é uma iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM e tem por objectivo tornar mais acessível aos professores de Matemática em Portugal um excelente conjunto de relatos e análises sobre a utilização do software de geometria dinâmica nos ensinos básico, secundário e superior.



Para mim a Matemática é ...

144 pp. APM e ESE Bragança, 2003

Sócio: €6,00
PVP: €12,00

Esta edição apresenta uma colectânea de textos sobre a matemática na escola recolhidos ao longo dos anos de 2000 e 2001. Os autores dos textos são pessoas do distrito de Bragança, incluindo alunos, educadores e professores, das mais diversas idades, percursos escolares, tipos de escolas e áreas disciplinares (línguas, ciências sociais, ciências da natureza, educação física, educação musical e plástica), que se exprimem em prosa, poesia, ilustração e fotografia.

A edição deste livro é um contributo para que se tenha uma melhor visão social da matemática e resulta da parceria entre a APM (através do seu Núcleo Regional de Bragança) e da Escola Superior de Educação de Bragança.

Matemática e Jogo na *Educação e Matemática*

Matemática e Jogo foi o tema escolhido pela APM para 2004 e, mais uma vez, a revista EM se associa a esta iniciativa.

Este tem sido um tema ao qual a revista tem dado algum destaque. Recordamos que a revista nº 1, publicada em Janeiro de 1987 incluía um artigo dedicado a Jogos matemáticos — O Jogo das Cores — da autoria de Maria João Costa da Escola Preparatória da Trafaria. A secção *Vamos Jogar* como a conhecemos ainda hoje, foi criada na revista nº 11, no 3º trimestre de 1989. Os autores — José Paulo Viana, Paula Teixeira e Rita Vieira anunciam-na referindo nomeadamente que:

"O jogo é uma actividade que agrada e entusiasma quase toda a gente. Há uma ligação muito grande entre o jogo e a Matemática [...] Sendo assim parece-nos importante que se jogue inclusive nas aulas. Uma aula onde se joga é uma aula animada, divertida e participada. Mas não se pode ficar por aqui. É fundamental pôr os alunos a discutir a forma como jogaram e a descobrir as melhores estratégias do jogo. É nesta fase que o jogo é mais rico do ponto de vista educativo [...]"

De então para cá a secção continuou a ser publicada embora de forma não permanente.

Durante este ano a secção *Vamos Jogar* será substituída por outra, permanente, e que pretende dar ainda maior destaque ao Jogo e à sua relação com a Matemática bem como às iniciativas que forem desenvolvidas em torno do tema.

Assim, a redacção da revista terá como colaboradores especiais os colegas Luís Reis (núcleo do Porto) e Margarida Abreu (núcleo de Viseu) para garantirem a expressão do tema Jogo e Matemática na EM.

Pretendemos que as colaborações sejam variadas, encorajamos por isso, todos os leitores a escreverem sobre as suas experiências de sala de aula com jogos, a enviarem os seus pontos de vista, a divulgarem as iniciativas realizadas nas suas escolas, a ..., de modo a informar do que se vai passando, a motivar novas experiências, a contribuir para o debate e a reflexão.

A redacção

Matemática e Jogo

Como as outras ciências, a Matemática é uma espécie de jogo cujo adversário é o universo. Os melhores matemáticos e os melhores professores de matemática são obviamente aqueles que, para além de compreenderem as regras do jogo, também sabem desfrutar o prazer do jogo.

Martin Gardner, *Rodas, vida e outra diversões matemáticas*

Figura 1. Brueghel, Pieter (o velho). Jogos infantis. 1560. Kunsthistorisches Museum, Viena.

Matemática e ... entra no seu quarto ano de vida, desta feita substituindo as reticências pelo Jogo e com a coordenação dos Núcleos Regionais do Porto e Viseu.

Que relações?

O jogo é uma actividade inseparável da condição humana. Apresenta um apelo universal e haverá poucas pessoas que não tenham sido, em certa altura da sua vida, estimuladas por um jogo.

A história dos jogos tem milhares de anos e cobre praticamente o mundo inteiro, fornecendo olhares fascinantes sobre a cultura em determinadas épocas e lugares.

No sentido mais amplo, "por jogos matemáticos designam-se puzzles, problemas e actividades que vão da simples charada à questão matemática ainda em aberto. A História da Matemática mostra que foram alguns jogos que conduziram à criação de alguns ramos da matemática" (Jorge Nuno Silva).

Guzmán refere que a estrutura dos jogos e da matemática é surpreendentemente análoga, na medida em que *criam uma nova ordem, uma nova vida*, através da aceitação de certos objectos e de regras que os definem e da consistente fidelidade a este conjunto de regras. Por outro lado, se olharmos para as maneiras como conhecemos, nos familiarizamos e atingimos um certo grau de mestria nos jogos e na matemática, não podemos deixar de ver uma forte semelhança, que não nos deve surpreender se tivermos em conta as características comuns dos jogos e da matemática, tanto em natureza como em estrutura.

As tentativas de popularizar a matemática têm sido feitas de variadas maneiras: exemplificando as suas aplicações, contando a sua história e as biografias dos matemáticos mais famosos, explorando as relações com outros campos da actividade humana (arte, música, arquitectura, etc.), mas "provavelmente mais nenhum método consegue transmitir melhor qual é o espírito certo de fazer matemática do que um jogo bem escolhido" (Guzmán). É um excelente argumento para sustentar a relevância pedagógica do jogo e preconizar o seu carácter didáctico.

Muitos matemáticos dedicam grande interesse à teoria de jogos combinatórios, a disciplina que tenta analisar os jogos de *informação perfeita*, como o Jogo do Galo, Nim, Hex, Mancala, Go ou Xadrez, etc.. Mas, a partir da obra de von Neumann, os *jogos* têm sido uma metáfora científica para uma classe muito mais alargada de interacções humanas, em que os resultados dependem das estratégias interactivas de duas ou mais pessoas que têm objectivos opostos ou, na melhor das hipóteses, objectivos mistos. São os jogos de *informação imperfeita* (caso do jogo do póquer e do dilema do prisioneiro). Neste sentido, a teoria de jogos transforma-se numa abordagem interdisciplinar do estudo do comportamento humano, em que a matemática é uma das ciências envolvidas, além da economia e outras ciências sociais e comportamentais.

São todas estas relações, diversificadas e profundas, entre a matemática e os jogos que tentaremos abordar nesta secção da revista nos números de 2004.

O ano temático

A intervenção neste ano temático contempla 3 áreas:

- criação de recursos (agenda 2003/ 2004, novos jogos para os centros de recursos da APM, pasta de materiais para venda; publicação temática);
- formação e informação (sessões de trabalho, revista Educação e Matemática, sítio www.apm.pt/mj);
- divulgação e popularização (exposição *Jogos do Mundo*, a inaugurar no Profmat 2004, campeonato de jogos para alunos).

Quanto às escolas, aos professores e aos alunos esperamos que a adesão ao tema seja grande: joguem, dentro ou fora da sala de aula, realizem torneios! Ficamos à espera de ouvir contar as vossas experiências e iniciativas.

Campeonato nacional de jogos matemáticos

Trata-se de uma competição dirigida aos estudantes dos ensinos básico e secundário, envolvendo um total de 6 jogos e disputada numa final nacional em 4 categorias:

- 1ª categoria (1° ciclo): Jogos Poliédricos, Pontos e Quadrados, Ouri
- 2ª categoria (2° ciclo): Jogos Poliédricos, Ouri, Peões
- 3ª categoria (3° ciclo): Amazonas, Ouri, Peões
- 4ª categoria (secundário): Amazonas, Hex, Peões

Todos os jogos são disputados entre dois jogadores (ver suplemento do APM*informação* n° 70).

Cada escola pode inscrever somente um aluno por jogo e por categoria. As escolas interessadas deverão inscrever-se até 31 de Maio de 2004. Em Outubro serão solicitados os nomes dos alunos participantes.

A final nacional decorrerá no Pavilhão do Conhecimento, no Parque das Nações, em Lisboa, nos dias 25 (1ª e 4ª categorias) e 26 (2ª e 3ª categorias) de Novembro de 2004. Seguir-se-á o método suíço na indicação dos adversários em cada jogo. Oportunamente será regulamentada a forma de classificar os concorrentes e os prémios a distribuir.

A comissão organizadora é constituída por: João Almiro, Luís Reis e Margarida Graça (APM); Ana Fraga e M. Teresa Santos (Centro de Competência Entre Mar e Serra); Jorge Nuno Silva (CMAF); António Gomes da Costa (Pavilhão do Conhecimento Ciência Viva), Paulo Antunes (SPM); João Pedro Neto; Jorge Luz; Jorge Rezende.

Para mais informações, consultar http://ludicum.org ou escrever para info@ludicum.org
mj@apm.pt

Referências

Jorge Nuno Silva. http://wwmat.ptmat.fc.ul.pt/~jnsilva/Obidos/conversa_p.pdf

Miguel de Guzmán. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/roleofgames/roleofgames.html

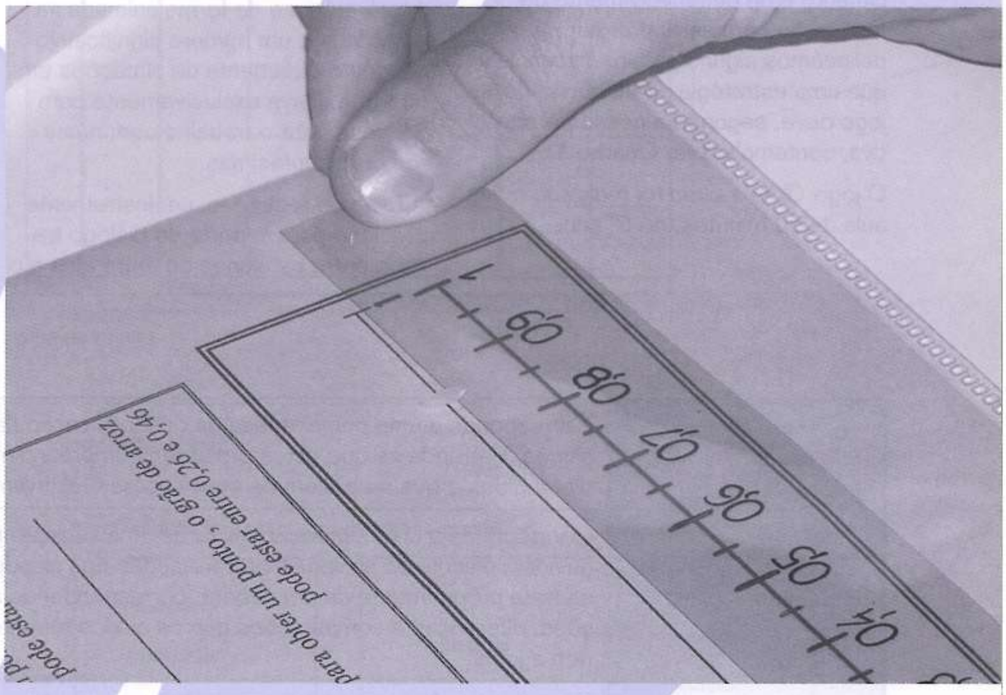
Núcleos do Porto e Viseu

Um jogo na aula de matemática

António César de Sá
Maria da Graça Zenhas

Com a exploração do jogo *Grão a Grão*, pretende-se que os alunos compreendam o significado da representação da parte decimal de um número compreendido entre 0 e 1, desenvolvendo o sentido de número. Este jogo aborda diversos conteúdos do programa de Matemática para o 5º ano: estimativa de comprimentos, comparação e ordenação de números, valores aproximados e representação de números na recta numérica.

O jogo consiste na identificação de um ponto da recta numérica que corresponde a um número compreendido entre 0 e 1. Para isso, os alunos têm de subdividir mentalmente um segmento de recta em 10 partes iguais, cujo comprimento é uma décima do comprimento desse segmento, ou imaginar cada uma destas partes subdivididas noutras dez partes iguais, cujo comprimento é uma centésima do comprimento desse mesmo segmento. Associado a esta estimativa, os alunos têm também que mobilizar os seus conhecimentos sobre comparação e ordenação de números racionais representados sob a forma de numeral decimal. O desenvolvimento da actividade matemática implícita neste jogo permite trabalhar alguns aspectos relacionados com a compreensão dos denominados números decimais, em que, frequentemente, surgem muitas dúvidas e incompreensões, uma vez que os alunos tendem a transferir para estes números as aprendizagens efectuadas com os números inteiros.



Pérez (1997) enumera alguns erros mais frequentes relacionados com o uso desta representação aos seguintes níveis:

1. da leitura e da escrita (ex: associar trinta e sete milésimas a 37000);
2. da utilização do zero (ex: interpretar 0,036 como 36 ou distinguir 1,27 de 1,270);
3. da ordenação de números (ex: ordenar os números considerando a parte decimal como um número inteiro, tal como acontece no seguinte exemplo: 4,05<4,5<4,15).

Neste jogo o aluno visualiza a representação do número no segmento de recta, depois de dividir este em partes iguais e de ordenar os números. Esta operação ajuda o aluno a compreender que, por exemplo, entre 0,1 e 0,2 poderá haver uma série de números, tais como 0,11 ou 0,16, e que 0,2 > 0,15. De facto, enquanto na comparação de números inteiros o número de algarismos dita se um número é maior do que outro, na comparação de dois números entre 0 e 1, sob a forma de numeral decimal, essa regra pode não ser válida, por exemplo: 0,2 > 0,15.

É fundamental proporcionar aos alunos actividades em que estes confrontem os conhecimentos que já têm sobre os números naturais com os conhecimentos que vão adquirindo sobre os numerais decimais. É nestes confrontos que eles vão construindo novos saberes, ampliando os seus conhecimentos sobre o conceito de número.

O jogo é uma experiência de aprendizagem que, pelo seu carácter motivador, deveria estar mais presente na aula de Matemática. Ao longo dos anos temos vindo a reflectir sobre a nossa experiência nesta área, de forma a aferirmos estratégias de utilização do jogo que se traduzam numa actividade de construção de conhecimento e de desenvolvimento de motivação para aprendizagem. Assim, delineámos alguns passos essenciais que uma estratégia da utilização do jogo deve, segundo a nossa perspectiva, contemplar (ver Quadro 1).

O jogo *Grão a Grão* foi realizado numa aula de 90 minutos, do 5º ano.

O tabuleiro, o grão de arroz, a régua de acetato e a ficha de registo foram distribuídas aos alunos e deu-se algum tempo para que observassem os materiais e tomassem contacto com eles. Depois deu-se início à leitura das regras. Um aluno lia uma alínea e, de seguida, abria-se um espaço de diálogo colectivo, em que ela era interpretada, se simulava a situação proposta e se fazia o registo respectivo na folha de registo do jogo. As dúvidas que iam surgindo eram esclarecidas neste contexto de diálogo.

Quando as regras estavam bem interiorizadas e o objectivo do jogo claro, deu-se início ao jogo.

Os alunos, em trabalho de pares, envolveram-se de forma animada na actividade e um número significativo passou rapidamente de situações em que trabalhava exclusivamente com décimas para o trabalho com números com centésimas.

A folha de registo foi um instrumento precioso para suporte do diálogo travado entre os alunos ou entre eles e o professor.

As dúvidas, explicações e comentários eram fundamentados com base nos registos. Este tipo de trabalho conjuga a visualização da situação matemática com a respectiva verbalização, potenciando a aprendizagem.

No dia seguinte, na aula de Estudo Acompanhado, os alunos fizeram um comentário ao jogo. Foi distribuída uma folha própria para o efeito. Observaram-se as palavras contidas nos três quadros dessa folha e, em diálogo, a turma comentou as características de cada um deles: o primeiro quadro identificava o tema que o jogo abordava, o segundo quadro tinha uma série de acções que tinham sido feitas no decurso do jogo e, no terceiro quadro, estavam palavras relacionadas com a situação de jogo. Depois, para cada palavra os alunos diziam como é que achavam que ela se tinha relacionado com o jogo.

Em seguida foi dado um tempo para que escrevessem o comentário pedido na ficha.

Reflexão inicial	Corresponde a uma primeira fase da descodificação das tarefas que são apresentadas aos alunos. Pretende-se que estes procurem compreender as regras e as funções dos materiais distribuídos e que mobilizem os seus saberes relativamente aos conceitos em jogo.
Simulação	Corresponde a uma simulação inicial de uma situação possível do jogo. Permite esclarecer dúvidas, discutindo as várias interpretações dos alunos sobre as regras e os materiais. Não se trata propriamente de um debate, correspondendo antes a uma verificação de factos, relações, diferenças e comparações que os alunos têm necessidade de discutir antes de começarem a jogar.
Situações de jogo	Corresponde à actividade de jogar propriamente dita, na qual a comunicação matemática escrita e oral deve assumir um aspecto fundamental, assim como o trabalho colaborativo. Para a organização destas situações de jogo, o professor elabora uma folha de registos apropriada, que fornece aos alunos. Esta folha permite também ao professor avaliar a dinâmica de trabalho, incompreensões ao nível das regras ou de conteúdos matemáticos e colocar questões, aprofundando a comunicação na sala de aula.
Debate	Corresponde a uma fase posterior à actividade de jogar, e tem como objectivo que os alunos reflictam sobre as situações vividas durante o jogo: discussão de dificuldades, avaliação de procedimentos e resultados, reflexão sobre os conceitos matemáticos e sobre a pertinência das tarefas realizadas, avaliação do jogo como motivação para a aprendizagem, etc.
Reflexão escrita	Corresponde a uma reflexão individual sobre as actividades realizadas e as situações vivenciadas durante e após o jogo, em que é privilegiada a comunicação escrita. Esta reflexão é, geralmente, proposta sob a forma de um comentário escrito. Este pode incidir sobre os conceitos e os procedimentos matemáticos, assim como sobre aspectos que envolvam as tarefas propostas e a sua concretização.

Quadro 1.

Este trabalho reveste-se de alguma dificuldade pois os alunos não estão habituados a escrever textos na aula de Matemática. Contudo a sua importância não deve ser subestimada, na medida em que, para além de se aprender a escrever escrevendo, esta tarefa é uma boa maneira de se promover um momento de reflexão sobre a actividade desenvolvida. É fundamental que os alunos percebam que estão a escrever sobre o desenvolvimento de uma aula de Matemática, devendo estruturar o seu texto com base nos conteúdos trabalhados, nas actividades realizadas e na avaliação que dela fazem.

Em seguida transcrevemos alguns dos comentários dos alunos. Neste registo apenas corrigimos erros ortográficos.

"Na aula de hoje jogámos o jogo grão a grão e foi muito divertido. Era difícil errar. O objectivo do jogo era para pegar num grão de arroz e tentar pôr o grão onde se acha que fica o número pedido pelo adversário.

A seguir pegávamos na recta numérica, para verificar se estava correcta a estimativa.

Se, por exemplo, o adversário pedisse 0,6 décimas, o valor aproximado tinha que ser 0,5 ou 0,7.

Tínhamos que ter atenção a fazer as contas, a compreender as regras do jogo, porque se não, havia problemas no jogo.

As primeiras jogadas pedíamos números só com décimas, mas depois, podíamos dificultar um pouco mais pedindo números com centésimas.

Adorei o jogo grão a grão."

Ruben

"Na minha opinião o jogo é divertido. Primeiro a professora esteve a ensinar como o jogar. Em segundo começámos a fazer o jogo. Em terceiro tínhamos que estimar onde pôr o grão de arroz onde eu achava que era. Em quarto eu só trabalhávamos com décimas. E em quinto eu e a minha adversária estávamos empatadas. E em sexto tocou o sino e eu e os meninos tivemos que sair."

Cátia

Jogo: grão a grão — Folha de registo das jogadas

Aluno: ______ Turma: ______ Data: __ / __ / __

Equipa: ______

Jogadas	Número decimal pedido	Número com mais uma décima	cálculo	Número com menos uma décima	cálculo	Valor marcado com o grão na régua	Pontuação
1ª							
2ª							
3ª							
4ª							
5ª							
Pontuação:	Vencedor:						
1ª							
2ª							
3ª							
4ª							
5ª							
Pontuação:	Vencedor:						

Folha de registo.

Jogo: grão a grão — Folha de comentário

Aluno: ______ Turma: ______ Data: __ / __ / __

Observa com atenção as palavras destes três quadros:

décimas	estimar	jogo
centésimas	comparar	regras
números	ordenar	contas
parte decimal	errar	adversário
parte inteira	aprender	atenção
valor aproximado	verificar	divertido
menor	concluir	problemas
maior	compreender	

Faz um comentário escrito sobre a aula de hoje utilizando pelo menos três palavras de cada quadro:

Na aula de hoje jogámos o jogo *Grão a Grão*... ______

______

Folha de comentário.

"Começámos a aula de Matemática e a professora anunciou o jogo. Lemos as regras, e para compreendermos melhor, a professora simulou o jogo jogando-o com a Ana Filipa. Nós nesta altura tirámos as dúvidas.

No jogo procedíamos da seguinte forma:

O adversário pedia-nos para estimar um determinado número, e nós colocávamos um grão de arroz numa recta numérica não graduada onde nós achávamos que deveria ser. De seguida comparávamos a recta numérica graduada com o grão de arroz e verificávamos quantas décimas estavam a mais ou a menos.

Entretanto tínhamos uma ficha onde escrevíamos o número pedido, o número obtido, calculávamos uma décima com contas de subtrair e somar para sabermos qual o número de pontos obtidos. Para mim esta ficha ajudou a facilitar o jogo.

Jogar jogos matemáticos é um bom método de lembrar e aprender matemática."

Helena

"... Começámos a pedir um ao outro números com centésimas. Nessa altura começámos a ter de ficar com mais atenção e a estimativa tinha que ser mais precisa.

No fim do jogo empatámos, mas se perdesse não me importava porque o importante é competir ..."

Carlos

"... As coisas correram sem problemas e ninguém se zangou. Para verificarmos se o nosso palpite a "olhómetro" estava certo usava a régua do jogo. Errar não significa tudo, porque o importante é participar... "

Ana

"... Concluí que este jogo foi para relembrar e aprender as décimas e as centésimas ..."

Mariana

Bibliografia

Reys et al, (1992). Developing number sense. Curriculum and evaluation Standards for school mathematics, addenda séries, grades 5 -8. National Council of Teachers of Mathematics. Reston.

Pérez, Julia Centeno. (1988). Numeros decimals? Por que? Para que? Editorial Sintesis. Madrid.

António César de Sá
Escola Básica 2,3 da Senhora da Hora, Matosinhos

Maria da Graça Zenhas
Escola E.B 2,3 de Gueifães, Maia

Ouri, um Jogo Mancala

Ana Fraga
M.ª Teresa Santos

A Origem dos Jogos Mancala — Breve História

Os jogos do tipo Mancala pertencem à classe dos jogos de tabuleiro mas que, que segundo Murray (1952) são uma classe à parte pois não representam uma forma de actividade do homem primitivo, como a caça, a guerra, a corrida e o alinhamento. No entanto, pelo facto de os mais antigos tabuleiros aparecerem nas proximidades de estaleiros de construção é de admitir que tenham sido originariamente uma espécie de ábacos rudimentares, utilizados para o cálculo dos salários a pagar aos trabalhadores. Esta hipótese enquadra-se perfeitamente no conceito definido por J. Huizinga (1971), de todos os jogos dos adultos terem como característica principal "uma luta por alguma coisa ou a representação de alguma coisa".

À semelhança do significado da palavra Mancala que deriva do árabe *mangala, mingala* ou *magala*, do verbo *naqala* e que significa mover, deslocar, transportar de um lado para o outro, o jogo baseia-se, na sua essência, neste princípio de transferência.

Os jogos são praticados sobre superfícies preparadas no chão ou em tabuleiros de madeira, cerâmica, bronze ou mesmo em ouro de acordo com a sua finalidade e mesmo do país. Os tabuleiros são constituídos por duas, três ou quatro filas de buracos (cujo número pode variar de três a cinquenta) daí haverem três tipos diferentes de jogos, os Mancala II, III ou IV, sendo que o tipo mais conhecido e difundido é o Mancala II. Belíssimos tabuleiros, perfeitas obras de arte, podem ser apreciados no *British Museum* em Londres[1] (figura 1, 2 e 3).

As peças usadas são normalmente sementes verdes acinzentadas do arbusto *caesalpina bonduc*[2] e *caesalpina major* (conhecida em Cabo Verde por Ourinzeira ou Sivão de Oril) ou outros materiais que podem ser seixos, conchas, bolas de marfim, feijões, avelãs, grão de café entre outras, normalmente em perfeita harmonia com a natureza, o valor do tabuleiro e as condições locais.

O jogo, disputado por dois parceiros ou dois grupos de adversários, consiste na distribuição das sementes de um buraco, uma a uma, pelas casas que se seguem, no sentido anti-horário, com o fim de capturar, as sementes do adversário, segundo determinadas regras.

Figura 1.

Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

Estes jogos, aparentemente simples, requerem reflexão, cálculo e muita prática sendo necessário saber escolher, com *certeza*, de entre as várias hipóteses que se oferecem em cada jogada, bem como prever os ataques do adversário. Por conseguinte, estes são considerados como jogos de perícia ou eruditos.

Os jogos Mancala são conhecidos por uma grande variedade de nomes (por exemplo Ouri, Ouril, Ori, Urim, Awari, Warri, Agi, Awèlé, entre outros) e de regras, especialmente no que se refere aos praticados em África e na América.

Relativamente à origem deste jogo está comprovado a existência de tabuleiros Mancala, em pedra e de duas filas, no Egipto, na época do Novo Império (1580–1085 a.C.). Os tabuleiros que aparecem a seguir são do mesmo tipo, mas de uma época mais recente, dois em Ceilão, dos primeiros séculos da nossa era, e outro na Arábia, anterior a Maomé.

No antigo Egipto podem observar-se tabuleiros de pedra esculpidos nas lajes de cobertura do templo de Kurna (323–30 a.C.), à entrada do templo de Carnaque, e no topo das paredes deste templo e do de Lúxor (1557–1304 a.C.), para a construção dos quais contribuíram Tutemés III (1490–1457 a.C.), Tutemés IV e Amenófis III (1410–1362 a.C.).

Em Ceilão, há duas ocorrências de épocas bem definidas: uma está situada em Pallebaedda, à entrada da gruta Wihara (século II d.C.) e a outra encontra-se aberta na superfície inclinada de um penhasco, chamado Gaimaediyagala, situado próximo da represa Siyamdalangamuwa, que foi construída entre os séculos II e IV d.C..

A estátua-retrato do rei Shamba Bolongongo, dos Bakubas, que teria reinado entre 1600 e 1620 d.C., representando-o sentado e tendo à sua frente um tabuleiro de Mancala, é possivelmente a mais antiga escultura de madeira da África Negra que se conhece. Esta pode ser apreciada no *British Museum* em Londres (figura 4).

A difusão deste jogo partiu de uma origem primitiva situada no Egipto ou na Arábia, para a Ásia de oeste para leste, atingindo as Filipinas, e em África de nordeste para oeste e para o sul.

Posteriormente foi levado para o continente americano pelos 20 milhões de escravos negros, cujo tráfego se iniciou no século XVI.

A importância destes jogos como fenómeno cultural, só foi reconhecida no final do século XIX com as contribuições de E. B. Taylor e A. C. Haddon, na Inglaterra, e Stewart Culin[3] (1858–1929), na América.

E na Europa, terão os Portugueses sido pioneiros nas referências escritas? A esse respeito diz Elísio Silva, "É de admitir que nos nossos arquivos históricos relativos ao Ultramar haja referências ao Mancala, que, uma vez identificadas, nos possam conceder o primeiro lugar nas referências escritas por europeus.".

No passado, os jogos Mancala tiveram prerrogativas de carácter mitológico, sagrado, hierárquico e divinatório, que condicionavam a sua prática.

Após a gradual liberalização da prática destes jogos assistiu-se a um período de transição, em que uma paixão desregrada escravizava homens e mulheres, que a eles tudo sacrificavam, obrigações, culturas, bens, familiares e até a própria pessoa.

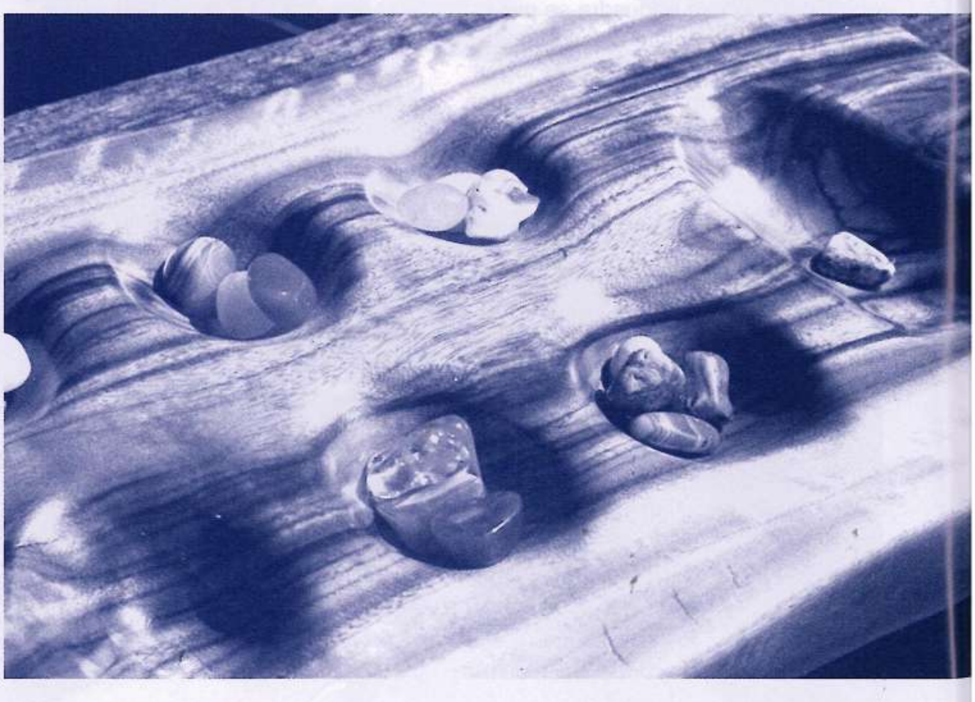
Presentemente homens, mulheres e crianças jogam mais como passatempo do que com fins lucrativos, fazendo brilhar a sua perícia e habilidade, em democrática liberdade.

Actualmente ocorrem vários campeonatos anuais em Inglaterra, França, Espanha e Canadá[4].

O Ouri

Os jogos Mancala prestam-se facilmente a análises interessantes e pode-se empreender uma infinidade de investigações, em diferentes níveis de sofisticação matemática. Estes, constituem um verdadeiro *mundo*, no qual encontramos organizações, sociedades, campeonatos, inúmeros nomes, regras e tabuleiros dos mais diversificados materiais e países.

Pelo que, escolher nome e regras foi um verdadeiro dilema. No entanto e

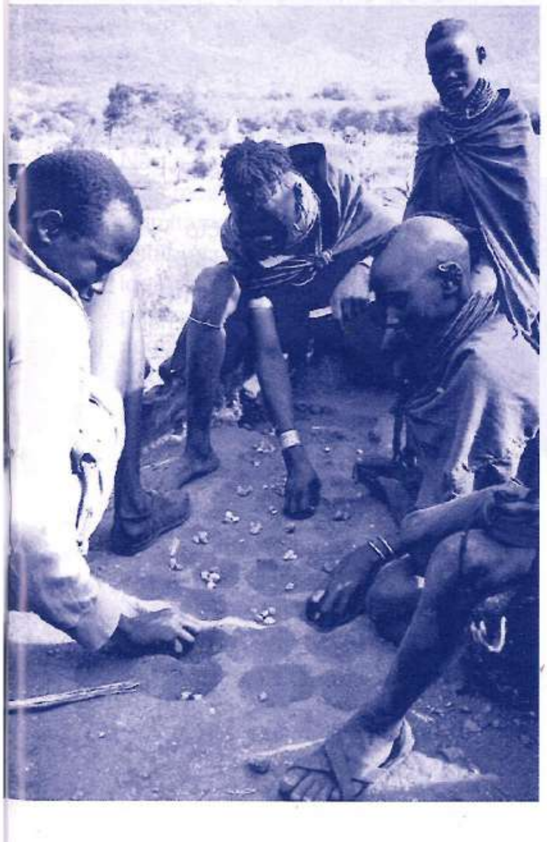


após grande ponderação adoptámos a designação OURI e as regras oriundas de Cabo Verde pelo facto destas reunirem consenso. Efectivamente, em Cabo Verde, o jogo é usualmente denominado por Ouri, Ouril, Oril, Ori, Uril, Oro ou Urim e as sementes da ourinzeira por ouris.

Relativamente ao equipamento necessário este é simples e de fácil improvisação[5]: o tabuleiro pode ser feito a partir de caixas de ovos, tigelas ou pequenas formas de cozinha e tanto as sementes como os seixos ou os berlindes são boas peças. Pode-se também jogar *ao vivo*: os alunos são as peças e os buracos são círculos traçados no recreio da escola.

Projecto *O Ouri e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático*

Tudo começou por um desafio: "Procurar dar um pequeno contributo com um projecto de investigação-acção virado para o estímulo do pensamento matemático ao nível do quotidiano e em contextos lúdicos, recorrendo a um jogo milenar de diversas culturas"[6].



Reconhecemos que o Ouri se adequava ao desafio proposto já que este desperta o interesse e mobiliza a actividade do aluno na Matemática. Além disso, alia raciocínio, estratégia e reflexão, com desafio e competição de uma forma lúdica, desenvolvendo a capacidade de formalização de estratégias, de memorização e o desenvolvimento pessoal e social.

Ao realizarmos este projecto tivemos como linha orientadora a integração e a troca de saberes da cultura africana. Pensamos ser uma mais valia para a matemática, pois a combinação com outros saberes na compreensão de situações da realidade constitui um património e um modo único de pensar.

Assim, promovemos num pequeno grupo de escolas (do 1.º ao 3.º Ciclos e Secundárias) e em diferentes contextos (biblioteca, sala de aula, clubes, etc.), *ateliers* do Ouri com alunos e professores por forma a testar os materiais (tabuleiros, peças, regras) e as atitudes dos alunos e professores face ao jogo. Com agrado observámos o entusiasmo, a emoção e a motivação dos alunos e dos docentes perante o jogo.

Posteriormente, apresentámos o Projecto publicamente, a 5 de Maio de 2003 no Instituto Politécnico de Leiria, onde participaram cerca de 150 docentes das 100 escolas que tinham aderido ao projecto numa fase anterior.

Na sequência deste Projecto e com o sentido de partilha surgiu o site http://ouri.ccems.pt, que pretende compilar parte do nosso trabalho.

Esperamos com o nosso *pequeno* projecto contribuir e fomentar o gosto pela Matemática nos alunos.

Será que o nosso *povo*, em tempos tão aventureiro, se embrenhará neste jogo?

Esperamos que sim! Bom Jogo!

Notas

1 Imagens que podem ser visualizadas em http://members.aol.com/hyadessoft/mancala/museum/index.html

2 http://aquat1.ifas.ufl.edu/caebon.html e http://www.seabean.com/guide/caesalpinia_bonduc/

3 http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/Archive/Culin/Mancla1894/index.html

4 http://www.manqala.org e http://www.oware.org/index.asp

5 http://www.sinasohn.com/crafts/mancala.htm

6 Projecto *O Ouri e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático* em http://ouri.ccems.pt

Bibliografia

Bell, Robbie; Cornelius, Michael. 1991. *Board games round the world*. Cambridge University Press.

Culin, Stewart. 1894. *Report of the national Museum*.

Graça, Albertino.1998. *Jogo de Oril — Regras, Estratégias e Teorias*. Edição da ONDS — Cabo Verde.

Haddon, A. C. 1896. *Study of Man*. Londres.

Huizing, Johan. 1971. *Homo Ludens — O Jogo como Elemento de Cultura*. São Paulo, Universidade de S. Paulo.

Murray, H. J. R. 1952. *A History of board games other than chess*. Oxford.

Silva, Elísio. 1994. *O "Ouri" — Um Jogo Caboverdiano e a sua Prática em Portugal*, APM.

Silva, Elísio. 1995. *Jogos de Quadrícula do Tipo Mancala com Especial Incidência nos Praticados em Angola*. Ministério do Planeamento e da Administração do Território — Secretaria de Estado da Ciência e Tecnologia — Instituto de Investigação Científica Tropical.

Sites de referência

1. http://ouri.ccems.pt
2. http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/countcap/pages/index.html#mancala
3. http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/Archive/Culin/Mancla1894/index.html
4. http://www.tradgames.org.uk/games/Mancala.htm
5. http://members.aol.com/hyadessoft/mancala/index.html
6. http://www.myriad-online.com/awalink.htm#Events
7. http://www.sinasohn.com/crafts/mancala.htm

Ana Fraga e M.ª Teresa Santos
Centro de Competência
Entre Mar e Serra

HEX

Jorge Nuno Silva

Generalidades

O jogo Hex foi inventado (pelo menos) duas vezes. Uma, pelo matemático e poeta dinamarquês Piet Hein em 1942, a outra pelo matemático americano John Nash em 1948, mas foi Martin Gardner quem o popularizou nas colunas do *Scientific American*. Trata-se de um jogo de conexão que se desenrola num tabuleiro como o ilustrado na Figura 1.

Há dois jogadores, um joga com peças cinzentas (●), o outro com as azuis (●). Cada jogada consiste em colocar num hexágono livre uma peça da sua cor. Ganha quem conseguir unir duas margens paralelas com a sua cor. Na Figura 1 o jogador que conduz as azuis deve tentar unir as margens que correspondem aos pontos cardeais NE e SO.

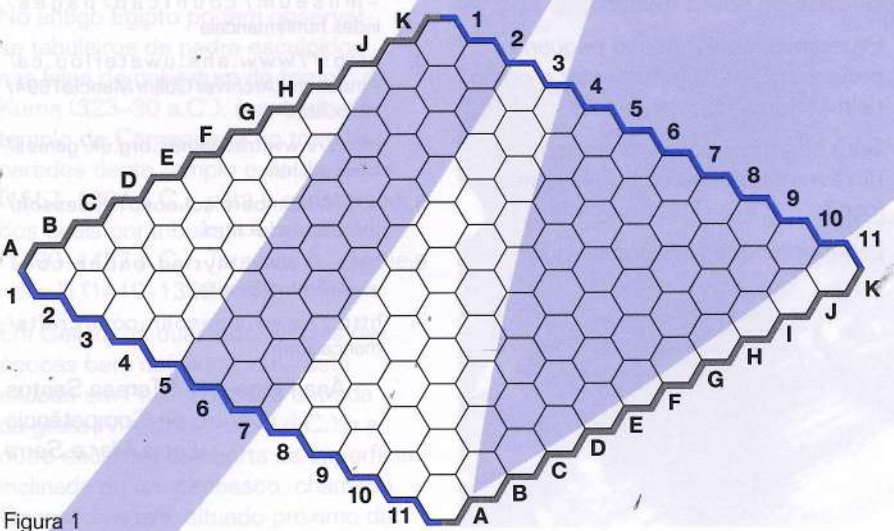


Figura 1

Pode jogar-se com outras dimensões do terreno de jogo, mas tabuleiros pequenos conduzem a jogos muito previsíveis, e demasiado grandes a jogos muito demorados. A dimensão ilustrada, 11 por 11, reúne hoje o consenso dos praticantes.

Para jogar por email pode utilizar-se somente os caracteres ASCII do teclado, obtendo imagens como a da Figura 2 (para um tabuleiro 5x5)

```
A  B  C  D  E
1 ♦  ♦  ♦  ♦  ♦
   2 ♦  ♦  H  ♦  ♦
      3 ♦  ♦  H  V  ♦
         4 ♦  V  ♦  ♦  ♦
            5 ♦  ♦  ♦  ♦  ♦
```

Figura 2

A notação H–V deve-se ao facto de, para utilizar um tabuleiro deste género, teve de se proceder a uma rotação, cada jogador está agora naturalmente associado a uma direcção (Horizontal, Vertical).

Para dar uma ideia da complexidade deste jogo, vejamos o número de posições que podem ocorrer de facto num jogo que se desenvolve em tabuleiros pequenos. Num 2x2 temos 17, num 3x3 temos 2 844 e, num 4x4, há mais de 4 800 000 posições possíveis. Num tabuleiro 11x11 não se sabe quantas posições legítimas há, mas o seu número é impressionante. É este facto que justifica que os computadores não sejam muito bons jogadores de Hex.

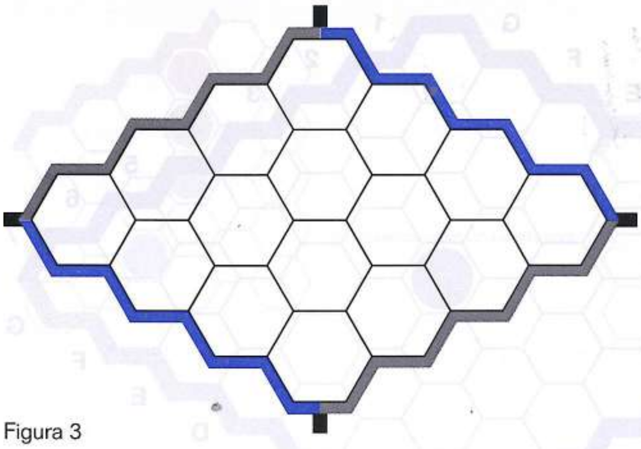


Figura 3

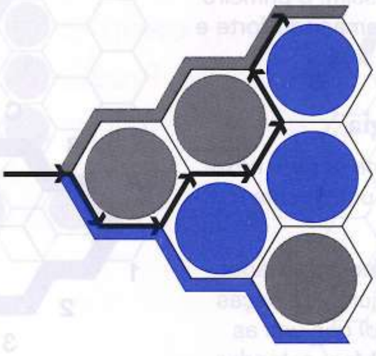


Figura 4

Há vários locais na www onde se pode jogar Hex (por exemplo, http://www.mazeworks.com/hex7/index.htm) e onde obter programas grátis para descarregar (aconselhamos Hexy, em http://home.earthlink.net/~vanshel).

Alguma teoria

Nenhum jogo de Hex pode terminar empatado. Este resultado pode ver-se intuitivamente, se interpretarmos uma cor como sendo água, e a outra um muro de pedra. Se imaginarmos todas as casas do tabuleiro ocupadas, então das duas uma: ou flui água, ou há um dique que separa duas massas de água. Claro que também há uma demonstração matemática deste resultado, da autoria de David Gale. Não a faremos aqui em pormenor, mas mostraremos em que se baseia. Admitamos que todos os hexágonos estão ocupados. Por conveniência identificamos cada margem com a respectiva cor e acrescentamos quatro segmentos nos cantos, como ilustrado na Figura 3.

Escolha-se um vértice exterior de um dos cantos com ângulo agudo. Trace-se uma linha para um vértice adjacente segundo as regras (ver Figura 4):

- Cada linha deve separar hexágonos ocupados por cores diferentes.
- Não se pode percorrer a mesma linha, nos dois sentidos, em movimentos consecutivos.

Gale provou que esta linha quebrada não pode terminar dentro do tabuleiro, nem pode visitar duas vezes o mesmo vértice. Portanto, terá de terminar num vértice exterior. Isso prova que uma das cores ligou as duas margens correspondentes.

No caso exemplificado na Figura 5 as cinzentas ganharam.

Outro resultado importante da teoria deste jogo, e que se deve a John Nash, é o facto de qualquer jogo de Hex poder, teoricamente, ser sempre ganho pelo primeiro jogador, se este conhecer a estratégia apropriada. Contudo, para dimensões não triviais (11x11 é um dos casos, claro) ninguém conhece essa estratégia. O argumento de Nash prova a existência de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, mas nada nos ajuda a encontrá-la. Trata-se de uma demonstração por absurdo.

Já vimos que nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, logo ou o primeiro ou o segundo jogador tem uma estratégia vencedora.

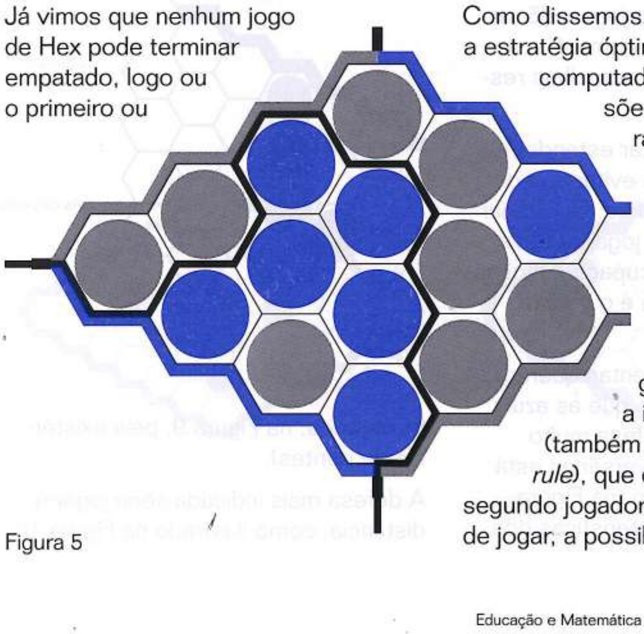


Figura 5

Suponhamos que era o segundo jogador que, jogando perfeitamente, tem a vitória assegurada. Então o primeiro começa por jogar aleatoriamente, e encara-se como sendo o segundo jogador, roubando-lhe a estratégia vencedora que se supôs existir. Sempre que tiver de jogar onde, por acaso, já o tinha feito, torna a jogar à sorte ... Assim, tem a vitória garantida, partindo do princípio que há estratégia vencedora para o segundo. Resumindo: se admitirmos que o segundo jogador vai ganhar então ... o primeiro ganha! Absurdo. Como alguém tem de dispor de uma estratégia vencedora, terá de ser o primeiro.

Este argumento é agora clássico e aplica-se a muitos jogos, tendo ficado conhecido por *argumento do roubo de estratégia*.

Como dissemos, ninguém conhece a estratégia óptima, nem mesmo os computadores, se as dimensões do tabuleiro forem razoáveis. Contudo, se a primeira jogada for muito forte, por exemplo nas casas centrais da diagonal menor, o primeiro jogador fica na posse de grande vantagem. Daí a instituição da *pie rule* (também conhecida por *swap rule*), que consiste em dar ao segundo jogador, na sua primeira vez de jogar, a possibilidade de trocar de cores, aproveitando o primeiro lance do seu adversário. Assim, o primeiro jogador não jogará demasiado forte e a luta fica equilibrada.

Táctica e Estratégia

Duas peças da mesma cor em hexágonos que partilhem uma aresta dizem-se *adjacentes*.

Claro que, para ganhar, um jogador necessita de um conjunto de peças adjacentes (um *grupo*) que una as suas duas margens. Mas, estender os seus grupos com movimentos adjacentes, nem sempre é a melhor ideia. Vejamos quais as distâncias, contabilizadas em termos de movimentos adjacentes, a uma casa determinada.

Na Figura 6, à distância de um lance de d4 estão as casas c4, c5, d3, d5, e3, e4, são as casas adjacentes a d4. As casas adjacentes a estas, que ainda não tenham sido listadas, só precisam de mais uma jogada para serem atingidas. Assim, à distância de duas jogadas de d4 estão b4, b5, b6, c3, c6, d2, d6, e2, e5, f2, f3, f4. E assim sucessivamente.

Repare-se que, para ir de d4 a qualquer casa que diste desta casa duas unidades há sempre dois caminhos, portanto d4 pode sempre ligar-se, por adjacência, a qualquer casa a duas unidades de distância. A este tipo de ligação chama-se *ponte*. As pontes são das jogadas mais fortes do Hex. A Figura 7 mostra uma ponte entre d4 e e5.

Aqui as peças d4 e e5 não podem ser separadas. Se as azuis jogam d5, as vermelhas respondem com e4, e se as azuis jogam e4, as vermelhas respondem com d5.

Devemos sempre tentar estender a nossa *conectividade* e evitar que o adversário estenda a dele. Contrariar as intenções do outro jogador deve ser sempre uma preocupação, muitas vezes uma boa defesa é o melhor ataque.

Admitindo que as cinzentas querem estender-se para sul, o que as azuis querem evitar, uma defesa muito próxima das peças adversárias está condenada ao fracasso (na Figura 8, por causa das características dos

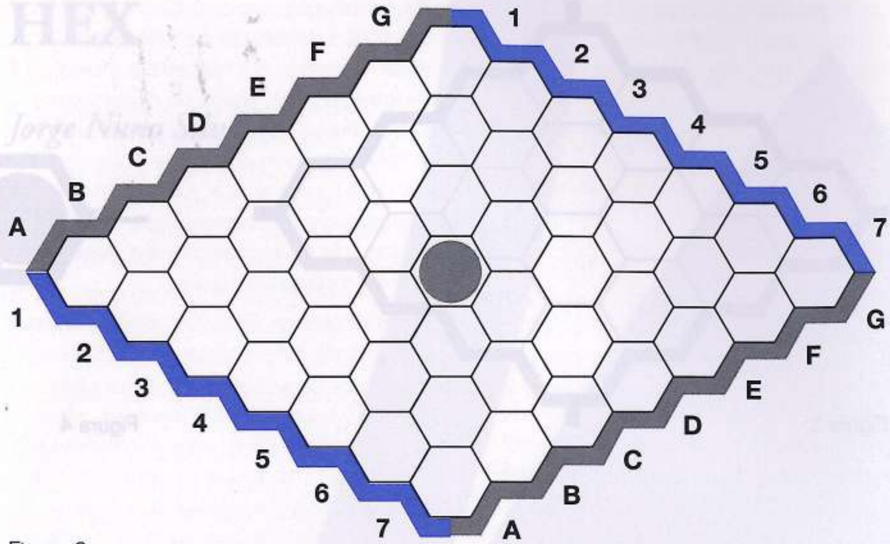


Figura 6

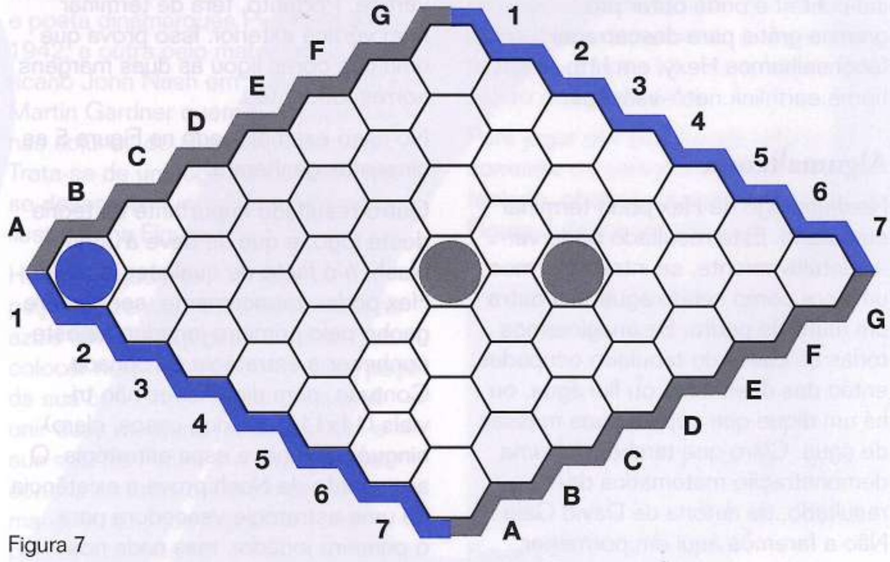


Figura 7

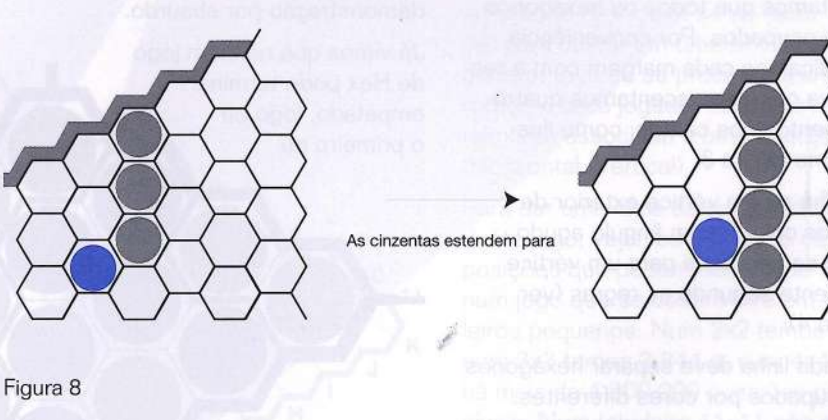
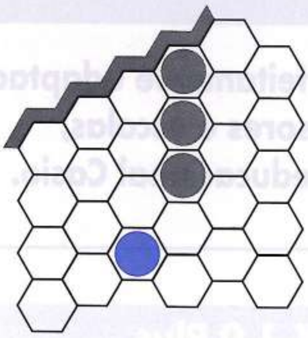


Figura 8

hexágonos; na Figura 9, pela existência de pontes).

A defesa mais indicada seria jogar à distância, como ilustrado na Figura 10.

Para considerações tácticas e estratégicas mais aprofundadas deve consultar-se a bibliografia no final, nomeadamente o livro de Cameron Browne.



As cinzentas usam uma ponte para

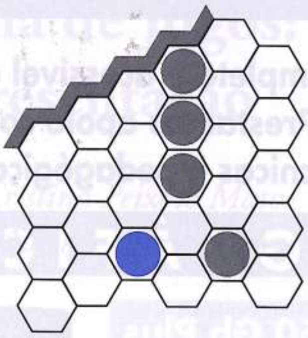


Figura 9

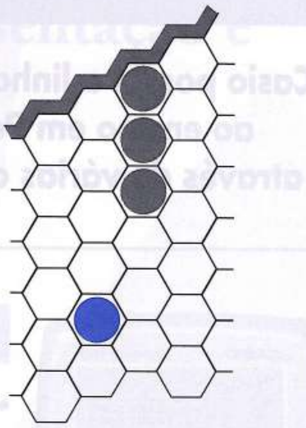


Figura 10

Puzzles

Apresentamos alguns problemas, para que os leitores possam praticar imediatamente.

1. As azuis jogam e ganham (Piet Hein). (Puzzle 1)
2. As azuis jogam e ganham (Piet Hein). (Puzzle 2)
3. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton). (Puzzle 3)
4. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton). (Puzzle 4)
5. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton).(Puzzle 5)

Referências

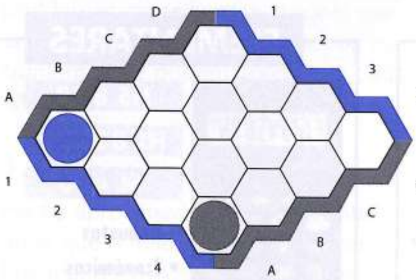
Browne, Cameron (2000), *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A. K. Peters.

Gale, David (1979), *The game of Hex and the Brouwer fixed point theorem*. American Mathematical Monthly 86(10):818–827.

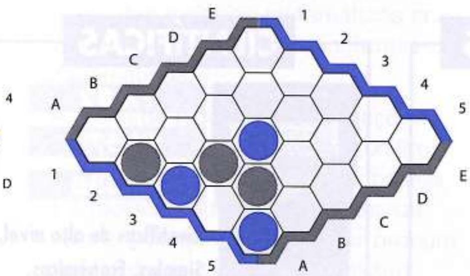
Gardner, M. (1959), *"The Game of Hex,"* Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin, Hammondsworth, 70–77.

Parlett, D. (1999), *The Oxford History of Board Games*, Oxford University Press, Oxford.

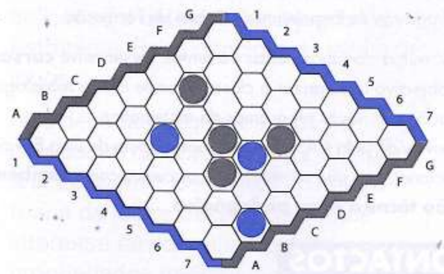
Jorge Nuno Silva
Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais
Universidade de Lisboa



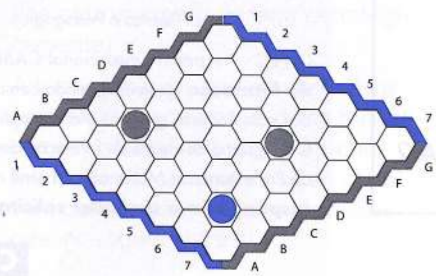
Puzzle 1



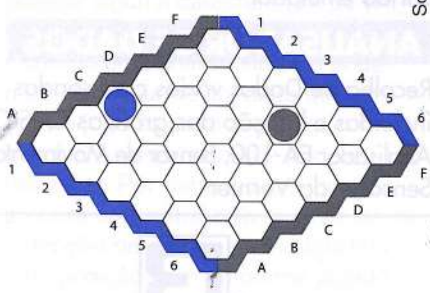
Puzzle 2



Puzzle 3



Puzzle 4



Puzzle 5

Soluções: 1. b3; 2. c2; 3. d6; 4. e3; 5. d4.

Teoria de Jogos: Apresentação e Representação

Maria Cristina Peixoto Matos
Manuel Alberto Martins Ferreira

Este artigo é o primeiro de uma sequência que tem por objectivo familiarizar os leitores com a teoria de jogos, uma disciplina muito interessante e actual. A nossa abordagem, através de uma linguagem simples e minimizando a simbologia matemática, pretende realçar as diversas aplicações da teoria, pelo facto de pensarmos que as aplicações ajudam a entender a teoria e ilustram o processo de construção dos modelos. Para além de que as diferentes aplicações permitem comprovar que problemas semelhantes surgem em áreas distintas e que os mesmos instrumentos se podem aplicar em cada situação.

1. O que é teoria de jogos?

Foi há aproximadamente quarenta anos que o matemático John von Neumann e o economista Oskar Morgenstern, ao tentarem resolver determinados problemas económicos, *repararam* que os problemas típicos do comportamento económico coincidiam com os princípios matemáticos aplicados a determinados jogos de estratégia. Foi o princípio da teoria de jogos.

Nas décadas seguintes, após a publicação da obra *Theory of Games and Economic Behaviour* (1944), a teoria de jogos despertou grande interesse devido quer às suas novas propriedades matemáticas, quer às suas diversas aplicações a problemas sociais, económicos e políticos, etc.

Continuamente em desenvolvimento, esta disciplina afecta várias ciências em amplos aspectos. A razão pela qual as aplicações são imensas e se ocupam de problemas altamente significativos deve-se ao facto da estrutura matemática da teoria tornar mais fácil definir os conceitos com rigor, verificar a consistência das ideias e explorar as implicações dos resultados. Consequentemente, conceitos e resultados são precisos, interpostos com motivações e interpretações dos próprios conceitos. Além disso o uso dos modelos matemáticos cria independência dos meros interesses matemáticos.

A teoria de jogos analisa situações competitivas que envolvem conflitos de interesse. A sua premissa básica é a racionalidade das decisões, ou seja, supõe que cada jogador procura constantemente maximizar algum benefício, que pode ser de qualquer ordem, isto é, procura objectivos exógenos bem definidos (é racional) e tem em conta o seu conhecimento ou expectativas sobre o comportamento dos outros jogadores (age estrategicamente).

A teoria de jogos usa a matemática para expressar as suas ideias formalmente contribuindo para o entendimento dos fenómenos que se observam quando são tomadas decisões que interagem entre si.

2. O que é um jogo?

Quando perguntamos a alguém o que é um jogo geralmente respondem-nos que é qualquer passatempo ou diversão. Se pedirmos que nos dêem exemplos de jogos, a resposta é, com muita frequência: xadrez, damas, monopólio, póquer, futebol, andebol, basquetebol, vídeo jogos, etc. Se analisarmos as respostas com o mínimo de atenção verificamos que a maior parte das pessoas define um jogo de forma pouco rigorosa, no entanto, os exemplos de jogos que sugerem não deixam dúvidas sobre o que é, de facto, um jogo. Também das respostas dadas podemos constatar, que dos vários exemplos de jogos sugeridos estes podem ser classificados em categorias diferentes: jogos de mesa, jogos de cartas, jogos desportivos, jogos electrónicos; jogos com vários jogadores e jogos com apenas um jogador.

Pelo facto de estarmos perante situações tão diferenciadas que recebem o mesmo nome, jogo, elas devem possuir alguma característica ou um conjunto de características comuns. Fazendo uma análise simples podemos identificar de imediato que em todo o jogo existem regras que indicam ao jogador o que pode ou não fazer. Por outro lado, o jogador procura uma estratégia que resulte na obtenção de determinado objectivo em oposição com os outros jogadores que também tentam optimizar o seu ponto de vista. O resultado final depende do conjunto das estratégias adoptadas por todos os participantes, fenómeno que se denomina por interdependência estratégica. Então, "um jogo é qualquer situação governada por regras com um resultado bem definido caracterizado por uma interdependência estratégica".

Atendendo à sua generalidade, podemos encontrar jogos em abundância na vida real: política internacional (como obter vantagens numa negociação de paz), economia (como aumentar a nossa participação em relação aos nossos concorrentes), vida familiar (como manobrar os pais para que eles comprem uma moto para o filho), uma batalha, campanhas eleitorais, uma partida de xadrez, uma partida de futebol são disto exemplo.

3. Representações dos jogos

Os elementos essenciais de um jogo são:

- Jogadores — intervenientes do jogo
- Estratégias — conjunto de decisões que os jogadores tomam
- Resultados (*payoffs*) — ganhos ou perdas de cada jogador

Como a estratégia de cada jogador afecta o resultado final do jogo, cada jogador deve interessar-se por saber o que os demais jogadores podem fazer e deve estar consciente de que estes ponderarão sobre quais as suas decisões.

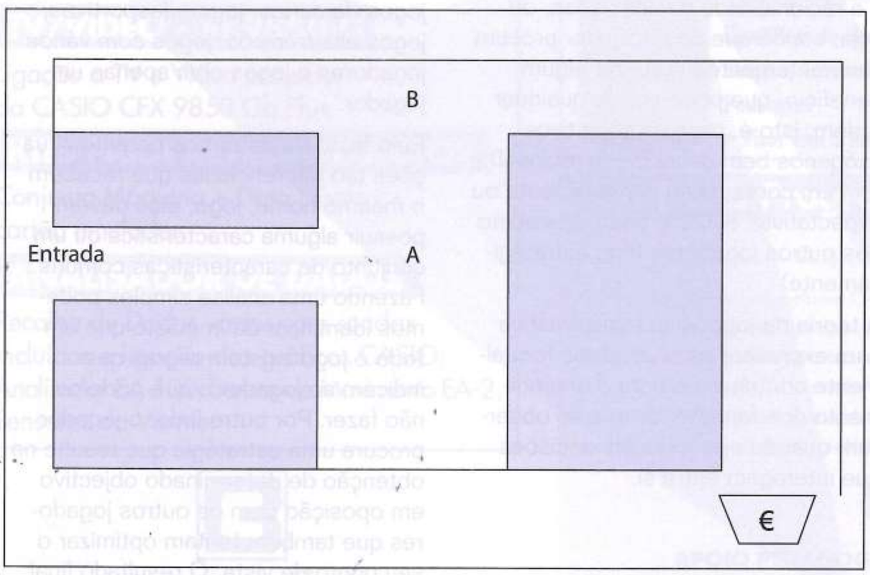


Figura 1. Labirinto do pote de ouro

Os termos estratégia, jogador e *payoff* têm aqui aproximadamente o mesmo sentido que em linguagem comum. No entanto, um jogador não tem que ser necessariamente uma única pessoa. Se todos os membros de um grupo têm a mesma opinião em relação ao modo de actuar no jogo, o grupo inteiro pode ser considerado um único jogador, um jogador pode ser uma empresa, uma cidade, um país ou uma equipa de futebol.

Em teoria de jogos, uma estratégia significa um plano de acção completo, que descreve quais serão as reacções de um jogador perante qualquer circunstância possível. Em linguagem comum, a palavra estratégia parece indicar uma atitude inteligente, neste caso tal não acontece. Existem estratégias deficientes bem como estratégias muito adequadas. Por outro lado temos de colocar a hipótese de um jogador alterar a sua estratégia ao longo do jogo. Como exemplo desta situação basta pensarmos nos jogadores de xadrez ao reconsiderarem a sua posição após jogada do seu oponente ou mesmo a revisão anual dos aumentos salariais entre sindicatos e governo. Todavia podemos considerar que todas estas decisões estão englobadas constituindo uma única estratégia.

Agora que já sabemos quais os elementos que devem ser tomados em conta quando estudamos um jogo levanta-se uma questão: como formalizar o jogo de forma a encontrarmos a(s) sua(s) solução(ões)? A teoria de jogos apresenta vários modelos matemáticos para o efeito. O mote do seguinte exemplo é apresentar três representações: forma normal ou forma estratégica, forma extensiva e forma codificada.

Consideremos o jogo da Figura 1 denominado Labirinto do pote de ouro.

Dois jogadores, jogador 1 e jogador 2, têm de encontrar, dentro das saídas do labirinto, aquela que contém o pote com certa quantia de dinheiro Q. O objectivo do jogo é que os dois jogadores tomem decisões de forma a encontrarem a saída correcta e dividir equitativamente o dinheiro. Caso não encontrem esta saída não ganham nada. O jogador 1 joga em primeiro lugar e pode ir para a direita ou para a esquerda. Se decidir ir para a direita, o jogo acaba com um resultado 0 para cada jogador. Esta situação será representada por $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Se escolher ir para a esquerda, chega a vez do jogador 2 tomar a sua decisão. Da mesma forma este jogador pode escolher ir para a direita ou para a esquerda. Se escolher esquerda, o jogo acaba com um resultado $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

Optando o jogador 2 pela direita, o jogo também termina. Neste caso encontraram o pote de dinheiro, e o resultado do jogo será representado por

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right).$$

Os dois jogadores, obviamente, pretendem chegar à saída que tem o pote pois, tal como na vida real, quanto mais dinheiro melhor.

A análise feita teve como base uma descrição simplista do jogo. A teoria de jogos tem uma forma precisa de descrever o jogo, a representação na forma extensiva. (Figura 2)

O desenvolvimento de um jogo consiste nas decisões que os vários jogadores tomam. Assim comecemos a descrição deste jogo com o primeiro ponto de decisão. Um círculo significa que algum jogador tem que tomar uma decisão nesse ponto. O número do jogador ao qual corresponde decidir, neste caso o jogador 1, aparece no interior do círculo. Deste ponto de decisão saem dois segmentos de recta. Estes segmentos representam as opções do jogador 1 nesse ponto de decisão: esquerda ou direita. O segmento designado Direita conduz a uma parede, fazendo com que o jogo acabe. O final do jogo representa-se por um ponto terminal. Cada ponto terminal tem associado um resultado. Como encontrar uma parede supõe cada jogador ganhar *0 euros*, o resultado $(0,0)$ é o que se associa a esse ponto terminal. Se o jogador 1 decidir ir para a esquerda, chega a outro ponto de decisão. Quem tem de tomar a decisão neste ponto é o jogador 2. Igualmente, neste ponto de decisão o jogador 2 tem duas possibilidades, esquerda ou direita. Estas opções (também chamadas jogadas) representam-se novamente por meio de segmentos de recta que saem do ponto de decisão, denominadas Esquerda e Direita. Se o jogador 2 vai para a esquerda, encontra uma parede (um ponto terminal) e o resultado será $(0,0)$. Se vai para a direita, sairá do labirinto (ponto terminal) e conseguirá o pote de ouro. O resultado será

$$\left(\frac{Q}{2},\frac{Q}{2}\right).$$

A forma extensiva contém toda a informação sobre o labirinto do pote de ouro que é necessária para o resolver. Em termos matemáticos, a forma extensiva é um diagrama de árvore, chamado assim porque se vê à direita desde o ponto de partida. Existem termos especiais para os elementos da forma extensiva. Os pontos destacados da árvore chamam-se nós. Todo o jogo começa com um nó inicial. No nosso jogo este é o nó onde o jogador 1 decide. Um nó com um círculo à sua volta e um número de um jogador no seu interior chama-se conjunto de informação. Este indica a que jogador compete jogar e o que o jogador sabe nesse momento. Os segmentos de recta que saem de cada nó designam-se por ramos, seguindo a metáfora da árvore, equivalendo cada um a uma estratégia que o jogador tem à sua disposição. Os resultados correspondentes a cada nó terminal recebem o nome de *payoffs*.

Vimos que a forma extensiva do labirinto do pote de ouro consiste em nós, ramos, nós terminais e *payoffs*. A teoria de jogos tem outra forma para descrever este jogo. Esta descrição, que se baseia apenas em estratégias, denomina-se forma normal ou forma estratégica. A forma normal codifica toda a informação da forma extensiva numa matriz.

Para construirmos a forma normal do Labirinto do pote de ouro, listamos as estratégias de cada jogador. Neste jogo o jogador 1 tem duas estratégias possíveis. Estas estratégias são Esquerda e Direita. De forma semelhante o jogador 2 também tem duas estratégias: Esquerda e Direita. Atendendo ao número de estratégias que cada jogador dispõe a matriz que se irá obter será do tipo 2×2 (isto é, uma matriz com duas linhas e duas colunas). Consideremos que as linhas correspondem às estratégias do jogador 1 e as colunas correspondem às estratégias do jogador 2. Os *payoffs* correspondentes aos nós terminais da forma extensiva do jogo vão constituir os elementos da matriz da forma normal. Por exemplo, o par de estratégias: o jogador 1 vai para a esquerda e o jogador 2 vai para a direita corresponde ao vector de *payoffs*

$$\left(\frac{Q}{2},\frac{Q}{2}\right).$$

De forma análoga se constróem os outros elementos da matriz. Assim, observamos na Figura 3 a matriz de pagamentos que representa o jogo Labirinto do pote de ouro na forma normal.

A última forma de representação que apresentaremos designa-se por forma codificada. A forma codificada de um jogo assenta no pressuposto de uma leitura linear do jogo e consiste numa tabela que contém toda a informação do jogo. Para se construir a forma codificada de um jogo começamos por codificar as estratégias de cada jogador. Como já vimos anteriormente cada jogador tem 2 estratégias: ir para a esquerda — E; ir para a direita — D.

Começamos por construir a tabela, segundo a ordem da esquerda para a direita, preenchendo a primeira coluna com o número da jogada. A coluna imediatamente à direita contém um par ordenado que indica qual o jogador que está a jogar e qual a estratégia adoptada. Logo à direita desta coluna colocamos a informação correspondente ao jogador que joga em segundo lugar, um par ordenado com o número do jogador e a sua estratégia escolhida. Sendo as jogadas sequenciais, para além de mudar de coluna, muda-se de linha. Caso as jogadas sejam simultâneas faz-se apenas mudança de coluna. De forma análoga se preenchem as seguintes colunas até se esgotarem as jogadas. A última coluna indica os *payoffs* resultantes das jogadas efectuadas sendo aqueles colocados na linha correspondente ao jogador que conduziu à jogada final. A ordem dos jogadores é arbitrária quando as jogadas são simultâneas. Os campos não preenchidos repetem a informação da linha anterior.

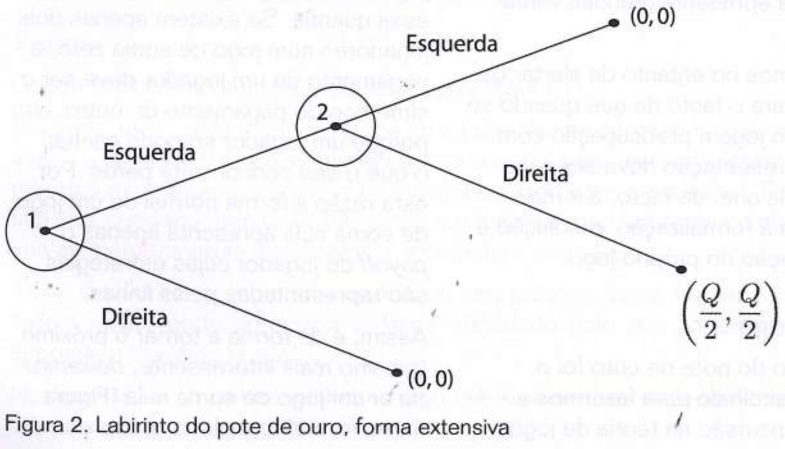


Figura 2. Labirinto do pote de ouro, forma extensiva

		Jogador 2	
		Esquerda	Direita
Jogador 1	Esquerda	(0, 0)	$\left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right)$
	Direita	(0, 0)	(0, 0)

Figura 3. Labirinto do pote de ouro, forma normal

1	(1,"D")	(0, 0)
	(1,"E")	
2	(2,"E")	(0, 0)
	(2,"D")	$\left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right)$

Figura 4. Labirinto do pote de ouro, forma codificada

Voltemos ao labirinto do pote de ouro agora representado na forma codificada. Uma vez que quando o jogador 1 escolhe ir para a direita o jogo termina, não havendo qualquer intervenção do jogador 2, na coluna correspondente a este jogador não se coloca qualquer informação. Caso o jogador 1 opte pela esquerda, é a vez do jogador 2 tomar uma decisão. Neste ponto, não havendo simultaneidade de jogadas, mudamos de linha e em função das escolhas do jogador 2, preenchemos a coluna dos *payoffs*. (Figura 4)

Neumann e Morgenstern foram os criadores da distinção entre representação de um jogo na forma extensiva e representação na forma normal. No entanto alguns puristas afirmam que só se devem estudar jogos na forma extensiva. Os autores da distinção das representações defendem que o estudo dos jogos na forma normal facilita a sua compreensão.

Todas as formas de representação de jogos abordadas anteriormente têm vantagens. A forma normal simplifica o jogo matematicamente e codifica toda a informação da forma extensiva numa matriz. Além disso a forma normal é mais adequada a situações em que se pretende estabelecer propriedades comuns a todos os jogos. Por outro lado é mais fácil fazer a descrição verbal de um jogo quando este está representado na forma extensiva ou na forma codificada. Estas formas também são de mais fácil utilização quando se pretende estudar parte de um jogo ou jogos mais pequenos. De facto, se estamos perante um jogo muito complicado, uma das maneiras de o analisar é considerar subjogos e, neste caso, é melhor ter a representação extensiva ou codificada do jogo. Nestas condições é mais fácil determinar quais os ramos/colunas que se devem escolher do que partir de uma matriz.

Ocorre por vezes que jogos com formas extensivas ou formas codificadas diferentes tenham a mesma forma normal. Isto é devido ao facto da forma normal suprimir alguma informação disponível na forma extensiva. Cada forma extensiva ou forma codificada tem uma única forma de representação em forma normal. No entanto, para cada jogo na forma normal existem habitualmente vários jogos em forma extensiva ou forma codificada que poderiam corresponder a essa forma normal. Podemos concluir que a forma normal se centra nas consequências das diferentes estratégias, pois suprime parte de minuciosidade da forma extensiva.

Por outro lado, quando se analisam jogos com mais de 3 jogadores, quer a forma extensiva quer a forma normal podem ser de difícil manuseamento, contrariamente ao que acontece com a forma codificada. Contudo, considerando que a importância de uma representação se prende com facilidade de interpretação, facilidade de solucionar o jogo, informação fidedigna do jogo, a representação de um jogo na forma codificada apresenta grandes vantagens.

Gostaríamos no entanto de alertar os leitores para o facto de que quando se estuda um jogo a preocupação com a sua representação deve ser escolher aquela que, de facto, é a mais adequada à formalização, resolução e interpretação do próprio jogo.

4. Um jogo

O labirinto do pote de ouro foi o veículo escolhido para fazermos a primeira incursão na teoria de jogos. Tratando-se de um jogo muito simples, depreendemos que qualquer um de nós consegue facilmente encontrar a sua solução, isto é, antever o que cada jogador deve fazer de modo que todos os jogadores obtenham o maior benefício possível. Obviamente isso nem sempre é possível, como iremos ver. Os jogos serão cada vez mais complicados e cada vez menos fiáveis. Veremos que jogos de dois jogadores com interesses totalmente opostos apresentam soluções aceites universalmente. Se contudo existem mais de dois jogadores, o que ocorre na maioria das vezes, ou se os jogadores apresentam objectivos comuns, pode ser que não existam soluções, ou que existam demasiadas. Normalmente, nestes casos decidimos pelas soluções mais estáveis, pelas mais verosímeis ou mais equivalentes. No entanto, ainda que estas soluções possam ser as mais plausíveis, geralmente não têm por que impor-se às outras.

O passo seguinte será analisar jogos de dois jogadores de soma nula. A interpretação destes jogos é que os interesses dos jogadores são totalmente opostos, um jogador não ganha uma quantia a menos que os outros jogadores, conjuntamente, percam essa quantia. Se existem apenas dois jogadores num jogo de soma zero, o pagamento de um jogador deve ser o simétrico do pagamento do outro; isto porque um jogador só pode ganhar o que o seu concorrente perde. Por esta razão a forma normal de um jogo de soma nula apresenta apenas o *payoff* do jogador cujas estratégias são representadas pelas linhas.

Assim, e de forma a tornar o próximo trabalho mais interessante, *deixamos no ar* um jogo de soma nula (Figura 5), na forma normal, no qual pretendemos que os leitores concentrem a sua atenção por uns momentos e tentem precisar qual será o resultado que se obteria segundo a decisão que tomará em cada caso.

O leitor escolherá uma linha (A, B ou C) e o seu opositor escolhe uma coluna (I, II ou III), de modo que nenhum dos dois conheça qual é a escolha do seu oponente no momento em que tem de tomar uma decisão. O número que figura na intersecção da linha que escolheu e da coluna que escolheu o seu opositor, será a quantidade de euros que lhe terá de pagar o seu oponente. Assim, se tiver escolhido a linha A, e o seu opositor a coluna III, receberá um euro, mas se este tivesse escolhido a coluna II, teria de ser o leitor a pagar-lhe dois euros, uma vez que o número é negativo. Deverá supor que o seu opositor conhece perfeitamente as regras do jogo, e que é tão inteligente como o próprio leitor. Recorde que ao tomar a sua decisão deve ter em conta o que pode pensar o seu oponente.

		OPONENTE		
		I	II	III
LEITOR	A	5	– 2	1
	B	6	4	2
	C	0	7	– 1

Figura 5. Jogo

Bibliografia

Berck, Peter; Sydsaeter, Knut; *Manual de Matemática para Economistas*, McGraw-Hill de Portugal, 1993.

Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

Matos, M. C. Peixoto and Ferreira, M.A.M.; *Games in Code Form*. Presented at the Fifth Spanish Meeting on Game Theory. Sevilla. 1–3 July. 2002.

Matos, M. C. Peixoto e Ferreira, M.A.M.; *Jogos na Forma Codificada*. Temas em Métodos Quantitativos 3. Editores: Elizabeth Reis e Maria Manuela Hill. ISCTE. Edições Sílabo. Lisboa. 2003.

Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*; Oxford University Press, 2000.

Kara, Tarik, *Lecture Notes on Game theory*, //www.gametheory.net ,2002.

Yildiz, Muhamet, *Game Theory Lecture Notes*, //www.gametheory.net ,2002.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu
Escola Superior
de Tecnologia de Viseu
Dep. de Matemática

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências
do Trabalho e da Empresa
Dep. de Métodos Quantitativos

HEX na EM

Neste número da Revista *Educação e Matemática* é publicado em anexo um tabuleiro para o jogo do HEX. Assim, apresentamos de seguida as regras do mesmo.

Material

- Um tabuleiro como o da figura 1.
- 100 peças (50 de cada cor).

Objectivo

Criar um caminho que una as duas margens da sua cor.

Regras

O jogo inicia-se no seguinte tabuleiro vazio (figura 1).

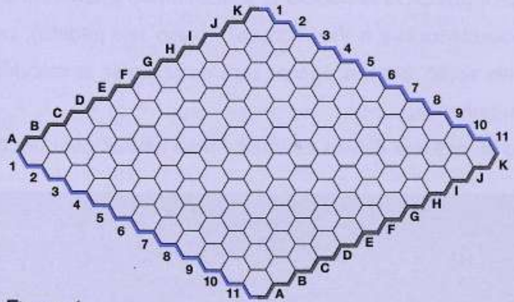


Figura 1.

Em cada turno, cada jogador coloca uma peça da sua cor num hexágono vazio. O jogador das cinzentas (●) ganha a partida se criar um caminho que una as margens cinzentas (no diagrama, noroeste e sudeste). Por sua vez, o jogador das azuis (●) ganha a partida se criar um caminho que una as margens azuis (no diagrama, nordeste e sudoeste).

Troca de Cores: o segundo jogador, no seu primeiro lance (se vir vantagem nisso) pode aproveitar o lance efectuado pelo seu adversário, impondo a troca de cores.

Na figura 2, as cinzentas ganham o jogo (se for a sua vez de jogar) colocando uma peça na casa G2.

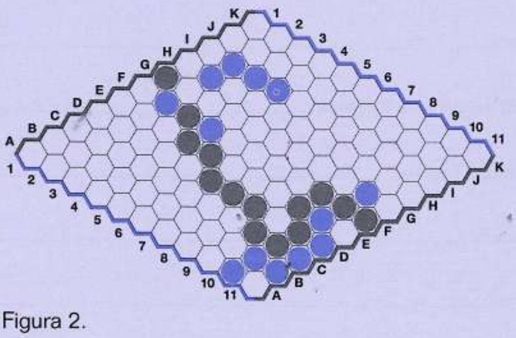


Figura 2.

Programa de Empréstimo

TEXAS INSTRUMENTS
education.ti.com/portugal

A Texas Instruments disponibiliza empréstimos de calculadoras e acessórios aos professores de matemática e ciências. Os empréstimos terão uma duração máxima de duas semanas, estão sujeitos à disponibilidade do material e tem como objectivo principal a realização de acções de formação e workshops.

Os seguintes **produtos** estão **disponíveis**:

- TI-83 Plus
- TI-89
- TI-92 Plus
- Voyage 200™
- Calculator-Based Laboratory™ (CBL™) System
- CBL 2™
- Calculator-Based Ranger™ (CBR™) System
- Cabri Geometry II™
- TI Presenter™

Poderá pedir sensores para a sua acção com o CBL. Pode pedir posters, transparências e literatura para distribuir aos participantes durante a sua acção.

Lista de Sensores	Ref #	Lista de Sensores	Ref #
Acelerómetro até 25g	ACC-DIN	Sensor de pressão de 0 a 2.1 atm	GPS-BTA
Acelerómetro de 3 eixos	3D-BTA	Detector de batimentos cardíacos	HRM-DIN
Barómetro	BAR-DIN	Microfone	MCA-CBL
Colorímetro	COL-DIN	Sensor de PH	PH-DIN
Conductividade	CON-DIN	Sensor de humidade relativa	RH-DIN
2 amperímetros e 2 voltímetros	CV-DIN	Monitor de radiações	SRM-DG
Temperatura	DCT-DIN	Termopar tipo K-temperaturas de -200 a 1400°C	TCA-DIN
Sensor de força de duplo alcançe	DFS-DIN	Sensor de luminosidade TI	CBL/CA/C
Sensor de electrocardiograma	EKG-DIN	Sensor de voltagem TI	CBL/CA/G
Monitor de batimentos cardíacos para exercício	EHR-DIN	Sensor de campo magnético	MG-DIN
Sensor de fluxo da água	FLO-CBL	Detector de movimento por ultrasons	MD-CBL

USUFRUIR DOS NOSSOS EMPRÉSTIMOS É GRÁTIS E FÁCIL!

As calculadoras e o ViewScreen™ (caso seja pedido), serão entregues pela nossa transportadora em mala própria, um dia ou dois antes do começo da sua acção. No fim, apenas terá de arrumar as calculadoras na mala, colar a etiqueta fornecida e telefonar para o serviço de entregas para fazer o levantamento.

Não se esqueça de nos contactar pelo menos com um MÊS DE ANTECEDÊNCIA.

CARTA: CSC (Centro de Suporte ao Cliente) C/o Sitel Belgium Woluwelaan 158–1831 Diegem — Bélgica

TELEFONE: 800 832 627 (número gratuito) | **FAX:** 21 424 51 30 | **E-MAIL:** ti-loan@ti.com | **INTERNET:** http://education.ti.com/portugal/apoio/pemprestimo/

Se quiser fazer o pedido por fax ou carta, por favor preencha o formulário seguinte:

Nome: ______________________ Escola e cursos ensinados: ______________________

Data do inicio da formação: ______________________ Data do fim da formação: ______________________

Telefone (escola): ______________________ Telefone (casa): ______________________

Morada: ______________________ Fax: ______________________

E-mail: ______________________

Produtos Necessários	Quantidade	C/ Viewscreen (Sim ou Não)

Um teatro no Estudo Acompanhado?

Helena Rodrigues
Isabel Paula

Quando em Setembro de 2002 se iniciou a generalização da reorganização curricular na nossa escola, as dúvidas referentes às novas áreas eram muitas.

Em particular no Estudo Acompanhado, sabíamos o que não queríamos—uma área fechada, isolada dos outros saberes, para fazer TPCs ou fichas de resposta fechada—, mas não aquilo que queríamos.

Fomos fazendo a caracterização dos alunos da turma, relativamente a alguns aspectos, embora já fossem nossos do anterior 5º ano de escolaridade. Consultámos alguns manuais, mas sem os seguir de forma rígida. Foi a partir da reunião intercalar para o estabelecimento do Projecto Curricular de Turma, que foi definido que a nossa prioridade, nesta área, seria a realização de tarefas que desenvolvessem as competências transversais, tratamento de informação e sociabilidade.

Durante o 2º período, foi proposto aos alunos um texto, que contava uma estória adaptada da obra *O Diabo dos Números*, acerca dos números racionais, para identificação das ideias principais e estrutura analítica de um texto.

Os alunos foram lendo personificadamente o texto, discutiu-se, analisou-se e no final, o comentário na ficha de auto-avaliação foi *"Gostei muito"*, *"Podíamos fazer um teatro"*...

A professora Helena disse-lhes que o teatro fazia parte do programa do 6º ano, que se poderia pensar nisso lá mais para o fim do ano e sobretudo *"se se portassem bem"*...

O tempo foi passando e os alunos começaram a perguntar pelo teatro, até porque tinham ido assistir à apresentação da peça *Ulisses*, no teatro D. Maria II.

A professora Helena sugeriu que fossem adaptadas duas estórias da obra, porque de outro modo não existiam personagens para os 28 alunos da turma. Essa tarefa coube à professora Isabel, que escolheu a que referia as regularidades com números inteiros e potências e os números racionais.

Procedemos então, já no 3º Período, à preparação da peça.

Os alunos leram individualmente as adaptações e estavam responsabilizados por criar mais personagens, adequados às estórias.

A distribuição dos papéis foi sendo registada pela professora Helena no quadro, existindo em cada uma delas um Roberto, um Diabo e um diabinho, à maneira dos textos vicentinos, que era o ajudante do Diabo. As alunas que frequentavam uma escola de dança construíram uma coreografia, os outros alunos deviam criar mais personagens.

Surgiu assim o Zero, como personagem elaborada por um aluno:

> *Diabinho—Falta o zero.*
>
> *Diabo—Tiraste-me as palavras da boca!*
>
> *Zero—Aleluia! Lembraram-se de mim! Claro que aqui o "JE" não podia ficar esquecido!*
>
> *Diabinho—Já repararam que em todos aqueles mosquitos e traças não há um único zero?*
>
> *Roberto—Mas porquê?*
>
> *Zero—Porque eu fui o último número que os homens inventaram e sou o mais refinado de todos! Percebes? O melhor!*
>
> ......

E na regularidade das potências de 5

Diabo—Faço o cinco pular!

Roberto—Que giro, acaba sempre em cinco!

Zero—E se for com dez ainda é mais fácil! ... Sou belo! Os cinco dos velhos romanos ficavam sempre cinco porque os romanos não sabiam pular ... Só não podes dividir por mim. Como sou importante e diferente!

Os contributos dos alunos foram corrigidos na forma gramatical e ortográfica pela professora Helena e passámos à dramatização da peça.

Todos os alunos deram sugestões "eu posso trazer lençóis brancos para o coro", "eu vou buscar canas para as lanças dos diabos e diabinhos", "eu trago o gravador e encarrego-me da música", etc.

Aproximava-se o final do ano e o entusiasmo era grande.

Começámos os ensaios, era necessário memorizarem os textos, estarem atentos às deixas, elaborar cartazes para as regularidades.

O espectáculo, apresentado aos Encarregados de Educação no final do ano, constituiu um momento de alegria para os alunos, professoras e para todos os que assistiram.

Mas que ligação existiu afinal com as disciplinas?

Relativamente à Língua Portuguesa

Os alunos tinham que transformar os textos narrativos em dramáticos.

Ter atenção às formas verbais, ortografia e sintaxe.

Construir personagens, diálogos e argumentos.

Relativamente à Matemática

Os alunos na sala de aula estavam a estudar as potências de números racionais.

Numa tabela tinham que calcular, recorrendo à calculadora, e explicar o que viam:

$4^2 =$	$0{,}4^2 =$
$4^3 =$	$0{,}4^3 =$
$4^4 =$	$0{,}4^4 =$
$4^5 =$	$0{,}4^5 =$

Alguns alunos referiram que a parte decimal era idêntica à inteira, outros que o algarismo final era sempre 4 e 6. Ficaram inicialmente pelo observar.

Foram então desafiados a escolher outros pares de números e explicar o que estava a suceder.

Uns escolheram 2 e 0,2, outros 5 e 0,5, etc. Mas nada surgia de novo, até que o João disse:

— *Já vi, o número de casas decimais é o mesmo do expoente da potência. Diabolicamente falando, isto vem dos pulos. Como estamos sempre a multiplicar pelo mesmo número, vai-se somando o número de casas decimais.*

Os restantes colegas perceberam lindamente a regularidade e o raciocínio do colega.

A peça de teatro constituiu um contexto favorável ao desenvolvimento da observação e a outra forma de *ver* o carácter abstracto das regularidades numéricas.

Conclusão

O trabalho que desenvolvemos esteve sempre em ligação com as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, e não o estabelecimento de uma outra disciplina, com um programa próprio, assente na *fichomania* e desligada dos alunos.

Partimos da noção de transversalidade, assente em competências definidas no Conselho de Turma e trabalhámo-las num contexto próprio, em que os alunos desempenharam o papel de construtores, sendo elementos importantes na comunidade.

Vários alunos interessaram-se pela obra e requisitaram-na na Biblioteca da escola, para a lerem toda, outros aproveitaram a Feira do Livro, em Lisboa, para a adquirirem, numa clara evidência de interesse pela leitura e pelo aprofundamento de assuntos matemáticos, isto é, desenvolvendo como competências modos personalizados de estudo e trabalho e curiosidade e gosto pelo saber.

O significado de texto dramático e de regularidades foi aprendido de uma forma significativa, ligando-se aspectos cognitivos e afectivos.

E finalmente, também a nós professoras deu muito *gozo* ir na onda deste trabalho, construindo-o com os alunos, sendo elementos dinamizadores e integradores desta aprendizagem. Nunca houve indisciplina ou atitudes incorrectas pelo facto de estarmos mais próximas deles.

Bibliografia

Abrantes e al. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. DEB.

Enzensberger, H. M. (1998). *O Diabo dos Números*. Asa.

Helena Rodrigues
Isabel Paula
Escola Conde de Oeiras 2° e 3° ciclos

Matemática escolar e conhecimento do meio

Construindo matemática a partir do corpo humano

Luis Carlos Cachafeiro

Neste artigo analisam-se as propriedades dos contextos da vida real que se podem utilizar com uma turma. Podemos ver que o corpo humano fornece contextos especialmente interessantes pelo conhecimento que os alunos têm desse assunto. Isto é considerado um atractivo pois permite-lhes aprender matemática juntamente com um melhor conhecimento de si mesmos. Analisaremos também dois exemplos de contextos deste tipo que utilizamos para o desenvolvimento da trigonometria e das funções.

Nós estudámos algumas das possibilidades do uso do corpo humano como fonte de contextos para a matemática e comprovámos que garante que praticamente a totalidade dos alunos conheça a temática e estimula a sua curiosidade.

A matemática e a vida real

É evidente que as mudanças sociais reflectem-se também na escola e põem em questão conteúdos e metodologias que estão estáveis desde há anos. Um dos objectivos da matemática escolar é o de adquirir conhecimentos, geralmente sob a forma de procedimentos de cálculo, para a vida diária, necessários no trabalho, no comércio, etc. Para a grande maioria das pessoas, estas necessidades não passavam de matemática muito elementar, pouco mais do que aritmética e só em casos pontuais (na engenharía, marinha, etc.) precisava-se de uma matemática superior. Para sectores da população qualificados, os estudos de matemática fornecem uma formação teórica juntamente com uma preparação matemática aplicada. Exemplos destas aplicações vêem-se no tradicional cálculo logarítmico ou comercial.

Mas a suposta utilidade da matemática não é constatada por muitas pessoas que a consideram muito abstracta e não os tem ajudado a uma melhor preparação para o trabalho [Cockroft 85]. Estudos recentes mostram que há uma utilização diária de ferramentas matemáticas em muitas profissões, mas frequentemente os utilizadores não chegam a reconhecer que usam ferramentas matemáticas [Nunes et al. 93, Masingila et al. 96], no entanto, para uma boa utilização dessas ferramentas é necessária uma formação matemática prévia. O conhecimento matemático formal sustenta-se em experiências da vida real e a matemática informal tem por base o conhecimento matemático já adquirido. Mas a relação entre estas duas formas de conhecimento não é, na maior parte dos casos, óptima. Na introdução do euro pôde ver-se a necessidade do cálculo mental, apesar da abundância de calculadoras, listas com preços nas duas moedas, etc. O forte aumento do Índice de Preços no Consumidor nesses meses deve-se, em boa medida, ao problema do cálculo de equivalências.

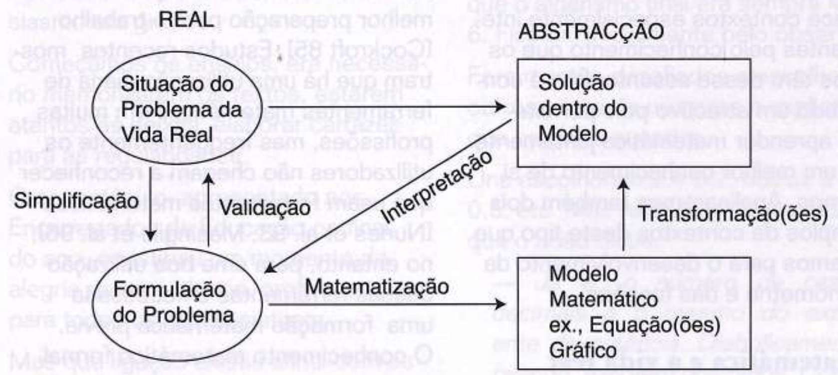
Actualmente, com a explosão da informação numérica, os cidadãos precisam de uma certa formação matemática para interpretar os dados numéricos que se utilizam no trabalho, comércio e consumo e também para interpretar ideias e informação de jornais, propaganda, etc. Para uma formação de qualidade, no ensino da matemática precisa-se de materiais ligados à vida real dos alunos, tanto os de hoje como os de um futuro mais ou menos imediato. Caso contrário, a maioria da população disporá de poucas oportunidades de adquirir um verdadeiro conhecimento do meio.

Contextos. Modelos e matematização.

Para uma integração do conhecimento teórico e aplicado, terão maior importância do que as mudanças nos conteúdos matemáticos as experiências escolares de aproveitamento do conhecimento informal em vez do matemático formal.

A forma mais habitual de usar os contextos reais na aula tem como uma etapa fundamental a simbolização e a matematização. Nas figuras 1 [NCTM 89] e 2 [Dapueto, Parenti 99] apresentam-se dois aspectos complementares da relação entre um problema da vida real e o modelo matemático utilizado na solução deste. Passemos, de seguida, a considerar as principais fases deste processo:

- Partir de um problema real e assumido (pelo menos em teoria) pelo aluno. Nalguns casos o seu enunciado pode ser simples mas noutros será muito complexo. O contexto talvez esteja explicitamente próximo da matemática mas noutros casos esta está oculta, como na maior parte dos problemas de desafio matemático.
- No problema dado identificam-se alguns aspectos e elementos que possivelmente sejam necessários para a sua resolução. Esses aspectos e elementos têm, geralmente, uma ligação a elementos matemáticos.
- Com esses elementos o aluno estabelece uma ligação com o mundo matemático, através de simbolismos próprios desta ciência, construindo um modelo praticamente equivalente (pelo menos do ponto de vista matemático) à situação inicial. Pode ser que a equivalência não seja teórica mas sim que proporcione uma aproximação suficiente (como no caso da substituição de funções discretas por contínuas ou reciprocamente). A matematização supõe o estabelecimento de uma relação entre os aspectos e elementos da situação dada e os equivalentes matemáticos juntamente com as ligações entre eles.
- Um dos elementos da situação relacionados com a parte matemática é aquele ou aqueles que no enunciado aparecem como questões. Procura-se com o modelo matemático obter, a partir dos dados existentes, a informação correspondente a essas questões. Em caso de descoberta, resolve-se o problema.
- É possível que o modelo matemático construído não seja consistente ou não se relacione bem com a descrição inicial ou que o que se obtém não tem sentido no contexto. Nesses casos, a solução obtida não é aceitável e deverá retomar-se o problema numa das etapas anteriores até chegar a uma solução correcta.



NCTM's [1998, p. 138] modelo do processo de modelação

Figura 1.

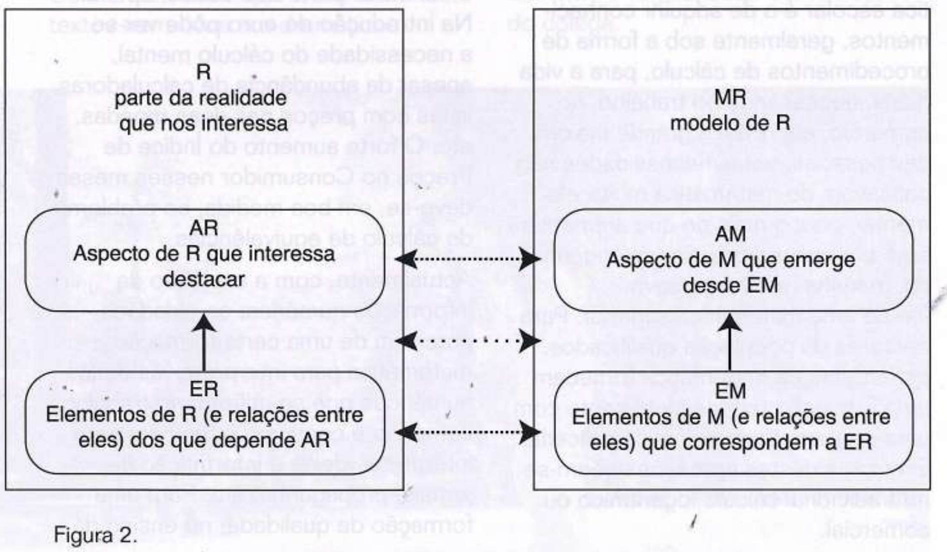


Figura 2.

Alguns aspectos relacionados com os contextos realistas

O esquema anterior é muito geral e na prática há diferenças entre contextos que diferem em aspectos relevantes como o formato de apresentação da informação, o tipo de questões a resolver, a matemática empregue ou construída, etc. Muitas vezes o problema reduz-se a exercícios muito simples de uso de uma operação ou procedimento e a matematização é, aparentemente, simples. Noutros casos o processo tem como finalidade a construção de conceitos matemáticos a partir de experiências reais (como é o caso da derivada como generalização da velocidade). Não é o mesmo um problema em que o aluno não tem praticamente informação e outro sobre o qual conhece bem o contexto e é capaz de empregar uma poderosa heurística para argumentar, rejeitar casos pouco ou nada justificáveis, etc. Também há grande diferença entre situações iniciais que apresentam elementos que não se utilizam no problema e outras em que a correspondência entre dados iniciais e objectos matemáticos usados na resolução é quase directa.

Parte da informação necessária para a resolução de um problema não será dada explicitamente. Deste modo, há alunos que terão problemas por conhecerem mal o contexto do problema, mas esta não é a única dificuldade. Em geral, quando num contexto se aplicam de modo coerente uma matemática simples e outra superior, no primeiro caso requere-se menos informação adicional que no segundo. Assim, os alunos com mais conhecimentos matemáticos, chegam mais longe e deste modo obtêm maior prazer (êxito) que o grupo dos de nível mais baixo. Por esta razão, estes não vêem, ao contrário dos outros, que a matemática produza informação nova que ajude ao desenvolvimento do seu quotidiano. Quanto mais oculta estiver essa informação maior estímulo provoca (mais poder parece ter quem o resolve) [Walkerdine 88].

Uma questão importante na análise dos contextos vem dada pelas características do formato empregue. F. Fernandez [Fernández 97] observou que alguns formatos estimulam o uso de determinados procedimentos que depois não ajudam na resolução. Os melhores alunos são capazes de concentrar-se mais nas características da solução que se pedem que no formato em que o problema vem apresentado. A selecção de um bom problema precisa que o formato do contexto tenha uma relação acessível com o objecto matemático incluído no modelo a considerar.

Há contextos que interessam de diferentes maneiras a uns alunos e a outros, o que depende de factores como o seu meio e também de factores pessoais como questões afectivas, motivações, efeito surpresa no aluno, etc. As razões que induzem a surpresa na aula de matemática estão relacionadas com as conexões entre matemática formal e realidade quotidiana [Nunokawa 01]. Um efeito surpresa, pode repercutir-se numa maior memorização pelo que quando os alunos são verdadeiramente surpreendidos pelo professor consegue-se uma descoberta inesquecível.

Analisando o processo de construção do conhecimento matemático vêem-se algumas propriedades que devem ter os contextos:

- Ser próximos do aluno e assumidos tanto pela temática como pela questão a resolver. Esta deve constituir uma verdadeira questão, não conhecida, cuja solução chegue a produzir curiosidade ou surpresa.
- Que a situação de partida se possa dirigir directamente à utilização ou criação de uma matemática real desde o ponto de vista tanto da situação inicial como da matéria.
- Que, pela temática, formato de apresentação e conteúdos, sirva para todo o grupo de alunos e não seja de interesse apenas para alguns.

Já sabemos que nem toda a realidade é partilhada por todas as pessoas. Mesmo numa turma, encontramos diferenças entre grupos de interesses tanto ao nível da própria matemática (fornecedora de muitos dos exemplos e situações usadas) como noutras matérias e, mais ainda, na temática não académica. Há algum tema que possa ser de interesse para quase todos os alunos e que não seja complexo de mais para o trabalho com ele na turma?

Contextos de interesse

Observamos que as temáticas geralmente usadas como a física, o comércio, a matemática são especialmente adequadas para gerar ou usar as principais noções matemáticas, mas nalguns casos há dificuldades para aproveitar esses contextos, porque há alunos para os quais eles não lhes interessam, ou porque desconhecem alguma ferramenta necessária para chegar ao final. Nós estudámos algumas das possibilidades do uso do corpo humano como fonte de contextos para a matemática e comprovámos que garante que praticamente a totalidade dos alunos conheça a temática e estimula a sua curiosidade. Além disso, permite trabalhar com vários conteúdos matemáticos (quase a totalidade dos que se desenvolvem desde o 9º ano de escolaridade) e a utilização de caminhos e heurísticas diferentes.

Na segunda metade do século XX apareceram alguns exemplos de uso de materiais no ensino da matemática que utilizam alguma característica do corpo humano [Berté, Castelnuovo]. Mas a necessidade de procurar novos contextos motivadores para os alunos, o reconhecimento de que se deve aproveitar na turma as aplicações matemáticas como se tem estudado desde a Educação Matemática Realista [RME] e também a proliferação de dados numéricos sobre o corpo possibilitou que agora desenvolvamos novos trabalhos em que alguma característica do corpo humano é utilizada na aula de matemática [Pequito 01, Young 02]. No livro *Las matemáticas del cuerpo humano* [Cachafeiro 2000], fizemos uma recolha de exemplos conhecidos e muitos outros praticamente desconhecidos ou novos de como se pode usar contextos relacionados com o corpo humano no ensino da matemática. Em seguida mostramos dois exemplos de actividades relacionadas com alguma característica do corpo: as medidas das mãos e a capacidade do sistema visual para apreciar distâncias.

Exemplos de contextos

Medida de ângulos e distâncias.

Entre as medidas directas, distâncias e ângulos, estes podem parecer que, ao contrário das primeiras, se encontram com pouca frequência na vida dos alunos (se exceptuarmos o ângulo de 90º). Observa-se que, excepto em problemas de Geometria, Desenho e na Física, não há muitas situações em que apareçam ângulos que não sejam de 90º, pelo que parece que os ângulos são de pouca utilidade fora dessas matérias.

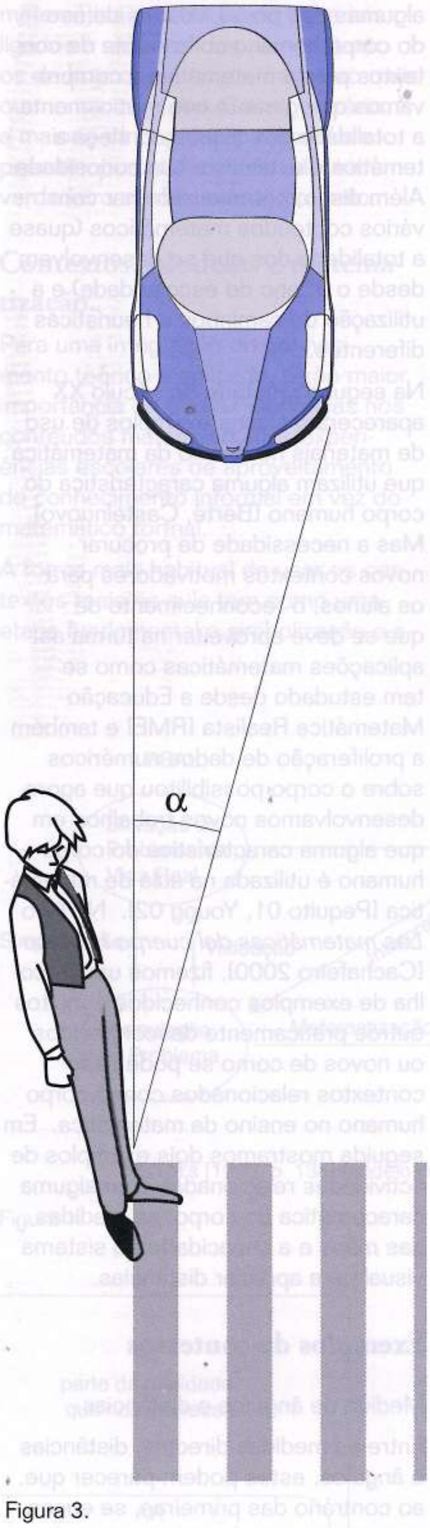


Figura 3.

O uso mais frequente de ângulos é quando são utilizados para conhecer distâncias, sendo este o objectivo inicial da trigonometria. Os primeiros problemas de aplicação da trigonometria são o de conhecida uma distância e um ângulo num triângulo rectângulo obter o valor de outro lado desse triângulo. Mas um enunciado desse tipo parece estar já muito longe da realidade dos alunos. Quando é que precisam de conhecer distâncias? perguntam. Mas a resposta resulta realmente surpreendente: fazêmo-lo com muita frequência.

Na turma perguntamos:

- Vocês conhecem algum sistema que possamos utilizar para conhecer a distância a que se encontra uma pessoa ou um automóvel?

Resposta de um aluno:

- Se o vemos com um tamanho pequeno sabemos que se encontra longe.

Efectivamente, uma das formas que empregamos para determinar uma distância a um objecto é a observação do tamanho aparente e contrastá-lo com a medida do objecto. O tamanho aparente é o resultado da medida do ângulo que abarca o objecto numa direcção dada. Quando se vê ao longe um automóvel, o tamanho aparente é geralmente o critério mais importante para saber a distância. Como relacionar de modo matemático a distância e o ângulo? Começamos com uma representação à escala no papel, utilizando diversas medidas (para um objecto de 1m e considerando distâncias de 5, 10, 20 m), obtêm o valor do ângulo e representam numa tabela. A relação não é proporcional (nem directa nem inversamente) e dará origem ao conceito de tangente trigonométrica.

Depois dessa exploração incluímos a definição de tangente e problemas relacionados com a medida de ângulos e cálculo de distâncias. Para que o sistema visual use um mecanismo desse tipo é preciso que no cérebro existam sistemas de reconhecimento de padrões, de inclinação e ângulos, etc. Os estudos sobre o cérebro confirmam a existência, efectivamente, de colunas de orientação sensíveis a distintos ângulos [Frisby 87].

Outro mecanismo fidedigno de medida de distâncias a partir da medida de ângulos é a disparidade retiniana que utiliza a paralaxe ou diferente visão de um objecto de duas posições diferentes.

Na figura 3 observa-se que α é o ângulo de visão do automóvel pelo peão e na figura 4 (página seguinte) que a diferença dos ângulos β_1 e β_2 mostra a paralagem da face da pessoa.

Com uma simples experiência comprova-se o uso dos dois olhos para o cálculo preciso da distância a um objecto. Depois observa-se o modo em como a diferença de ângulos permite obter a distância. A seguir realizam-se exercícios de obtenção de medidas usando este mecanismo. Por fim passamos a obter a precisão do sistema, obtendo a diferença mínima de ângulos capazes de ser detectados pelo sistema visual.

Deste modo o que fazemos é usar uma variante do próprio mecanismo que temos no cérebro de maneira que o trabalho serve-lhes para compreender como somos. Neste caso, os contextos são matematicamente equivalentes aos clássicos de trigonometria, com a diferença que resultam especialmente surpreendentes pelo que supõe novos recursos e conhecimentos.

Funções da mão. Como somos nós mesmos.

As funções permitem trabalhar com relações entre variáveis sujeitas a certos padrões que se mantêm constantes. Assim, conhecendo o padrão e algum dos valores de uma das variáveis pode determinar-se a outra. Mas precisamos que os contextos utilizados tenham interesse e não sejam óbvios. Se é muito simples, não é de interesse e sobretudo, não traz informação nova. Se é muito complexo, alguns alunos têm problemas para chegar a uma compreensão suficiente e a entender as relações estabelecidas entre as variáveis.

Começamos com uma pergunta sobre a forma das mãos de duas raparigas. Qual tem a mão mais magra? O objectivo é o de estender as medidas lineares para obter também uma medida

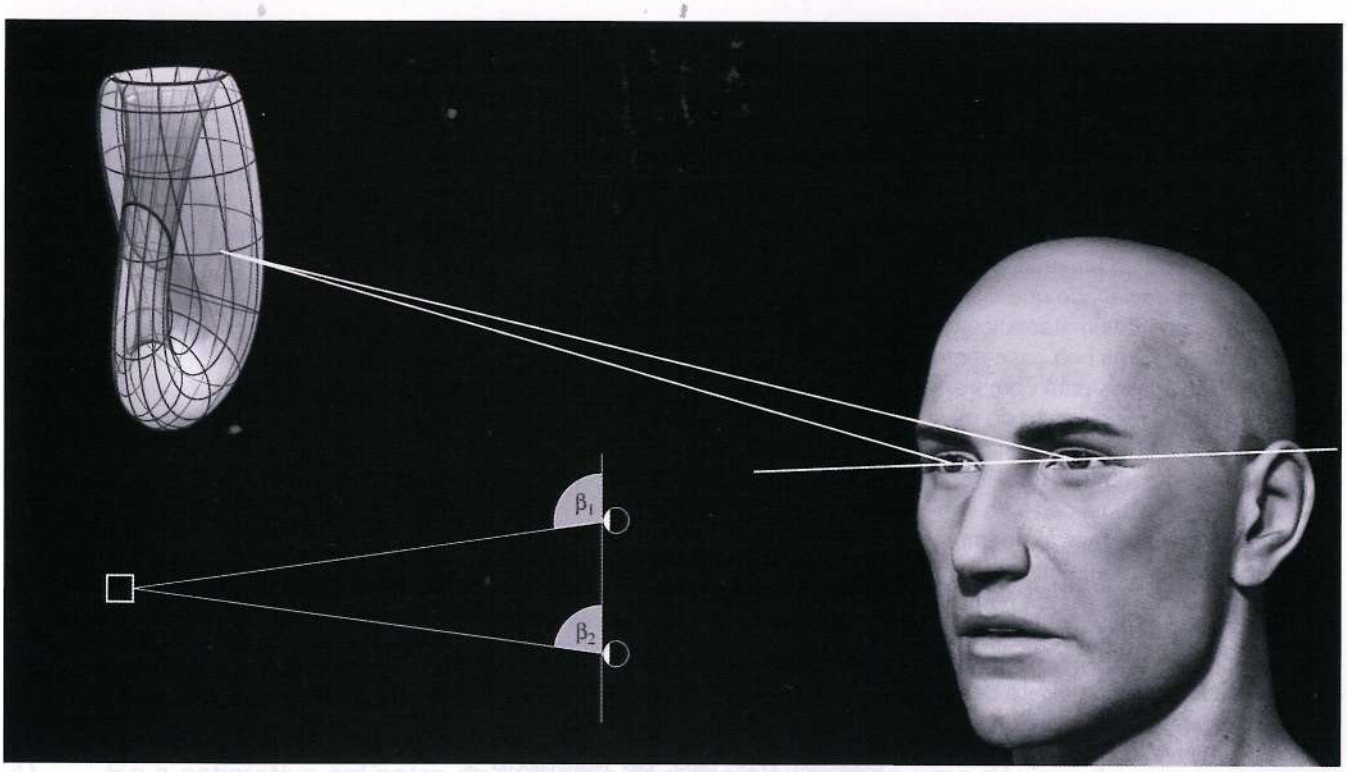


Figura 4.

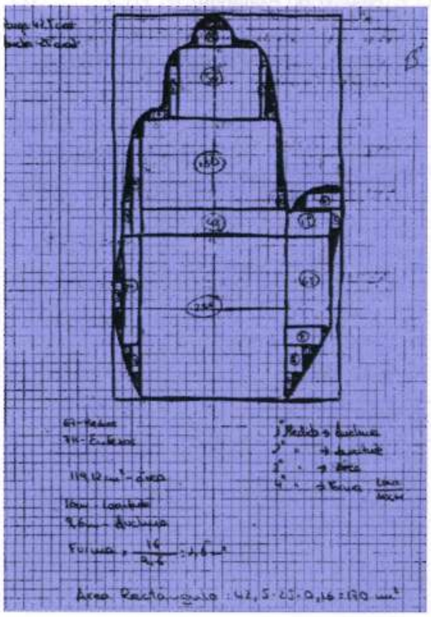


Figura 5.

para a forma. Depois de uma interessante discussão chegam à conclusão de que o quociente comprimento/largura expressará de modo aceitável qual das duas mãos é mais magra: a de maior quociente.

Este quociente serve também para determinar a função $y = k_1 \cdot x$ que, conhecido o valor da largura, podemos obter o comprimento. As pessoas com a mesma forma da mão têm a mesma função para a mão. Isto serve também para idades diferentes de uma mesma pessoa.

Outra função expressa a área da mão a partir da largura desta. Para isso precisa-se de uma série de operações como a obtenção da área (usando fórmulas para a divisão e a recontagem), eliminação de variáveis intermédias, etc. Utiliza-se um novo quociente $k_2 =$ área/(largura·comprimento) que expressa a parte que a mão cobre do rectângulo de medidas a largura e o comprimento da mão (ver figura 5).

A área permite-nos obter uma nova função, neste caso de terceiro grau que exprime o volume a partir exclusivamente da largura da mão mediante o uso não só de um novo quociente k_3 (meia altura /largura) tomando a forma da mão por um tronco de pirâmide. A função volume da mão pode expressar-se assim:

$$V = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot x^3$$

com a variável x para a largura,
$k_1 =$ comprimento/largura,
$k_2 =$ área/(largura·comprimento) e
$k_3 =$ meia altura/largura.

Pode ver-se em [Cachafeiro 01] um estudo mais detalhado desta actividade. A actualidade do uso didáctico das medidas do corpo, vem expresso nas palavras de Nisa Figueiredo no número 63 da *Educação e Matemática* em que, recolhendo algumas observações tiradas da conferencia anual Projecto Panama do Instituto Freudenthal de 1,2 e 3 de Nov. de 2000, escreve:

> "As actividades de medida à volta do nosso próprio corpo constituem um bom começo de aprendizagem das Grandezas e Medidas, uma vez que contribuem para uma maior ligação emocional com a aprendizagem."

Pensamos que uma extensão natural dessas medidas é esta utilização da própria mão que fazemos para tirar proveito do conhecido (a mão) para abordar o desconhecido (a matemática das funções) e um novo critério de comparação: o quociente como a base de uma nova forma de medir.

Conclusões

As mudanças nas necessidades sociais afectam o ensino da matemática. Precisa-se de um ensino de qualidade numa sociedade que dispõe de muitas ferramentas matemáticas mas na qual, sem uma boa base matemática, há dificuldades para compreender, reflectir e tirar proveito do meio que nos rodeia e viver na consciência de cidadãos competentes. Para isso não só deve mudar uma parte do conteúdo da matemática mas também, em grande medida, a sua metodologia, de modo que os alunos participem na matéria de matemática, em experiências de uso do conhecimento e de conteúdo próximo deles e destas tirar conclusões relacionadas com o meio em que vivem.

Mas há alguns problemas no uso de actividades de fora da matemática no ensino desta. Um deles é o de como chegar a todos os alunos, pois alguns têm dificuldades, por exemplo por falta de experiências básicas nalguns casos, na compreensão das situações na física, economia, etc. Nós observamos que o corpo humano fornece verdadeiros problemas matemáticos, que implicam autêntica matemática (muita dela correspondente aos últimos anos de ensino geral).

Nos dois exemplos apresentados mostramos algumas das características destes contextos, próximos dos alunos, com um significado real para todos que estimula a sua curiosidade e que introduzem matemática real no currículo desses cursos.

Bibliografía.

Berte, A. 1985, 'Qu'y a-t-il de fondamental, pour nos eleves d'Afrique, d'Europe ... ou d'ailleurs?' *Proceedings of the 37 th Cieaem Meetings*, Leiden.

Cachafeiro, L. 2000, *Las matemáticas del cuerpo humano*, Proyecto Sur, Granada.

Cachafeiro, L. 2001, Modelos de funcións. Medidas da man e funcións que xeneran. *Boletín das Ciencias. Enciga* nº 47, 21–29.

Castelnuovo, E. 1985, *La matematica. I numeri*, La Nuova Italia. Firenze.

Cockcroft W.H. 1985, *Las Matemáticas si cuentan*, MEC, Madrid.

Dapueto, C. and Parenti, L. 1999, 'Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knoledge', *Educational Studies in Mathematics*, 39: 1–21.

Fernandez, F. 1997, *'Evaluación de competencias en Álgebra elemental a través de problemas verbales.'* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Figueiredo, N. 2001, A propósito de um encontro. *Educação e Matemática.* Nº 63: 39.

Frisby, John P. 1987, *Del ojo a la visión*, Alianza Editorial, Madrid.

Masingila, J., Davidenko, S. and Prus-Wisniowska, E. 1996, 'Mathematics learning and practice in and out of school: a framework for connecting these experiences' *Educational Studies in Mathematics*, 31: 175–200.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 1989, *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM 1989.

Nunes, T. T., Schliemann, A.D. and Carraher, D.W. 1993, *Street Mathematics and School Mathematics Cambridge University Press*, Cambridge.

Nunokawa, K. 2001, 'Surprises in Mathematics Lessons' *For the Learning of Mathematics*, 21, 3: 43–51.

Pequito, J.A. 2001, A área de Pele Infectada. *Informat. Ministério de Educação.* Nº 8: 4–5.

Walkerdine, V. 1988, *"The Mastery of Reason, Cognitive Development and the Production of Racionality"*, London and New York, Rotledge.

Young, V. 2002, A Matter of "Survival". *Mathematics Teacher.* Vol 95. No 2: 100–103.

Luis Carlos Cachafeiro
IES Pontepedrinha
Santiago de Compostela, Galiza

Materiais para a aula de Matemática

Grão a Grão

O jogo Grão a Grão foi adaptado de Reys et al (1992:26) e tinha o nome de *Estimating Decimals between 0 and 1*. As regras do jogo foram respeitadas, mas foram elaborados outros materiais de apoio a esta actividade, como as fichas de registo e de comentário. O tabuleiro do jogo também foi construído sendo o seu design da responsabilidade de António Menino.

António César de Sá
Maria da Graça Zenhas

A propósito deste material, ler o artigo *Um jogo na aula de Matemática*, publicado nesta revista.

Escola...

Ano/Turma........................... Data..................... Aluno(a).........................

Grão a Grão

Material: 1 tabuleiro, 1 grão de arroz, 1 régua, 1 folha de registo.

Nº de jogadores: 2

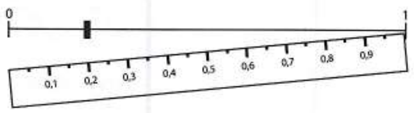
Objectivo: Obter o maior número de pontos.

Regras

1) Alternadamente, cada jogador pede ao outro para localizar um determinado número decimal entre 0 e 1.
2) O primeiro jogador estima a localização do número pedido, ao longo do segmento de recta, e coloca o grão de arroz como marca da sua estimativa.
3) Para verificar a exactidão da estimativa, o outro jogador usa a régua graduada.
4) Se a estimativa cai entre os números com mais ou menos uma décima do que o número pedido, o jogador que fez a estimativa ganha um ponto.
5) Em seguida os papéis dos jogadores trocam-se.

Ganha: O jogador que tiver mais pontos ao fim de 10 jogadas.

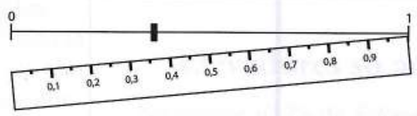
1º exemplo: Localiza 0,4



Para obter um ponto, o grão de arroz pode estar entre 0,3 e 0,5

Pontuação: 0

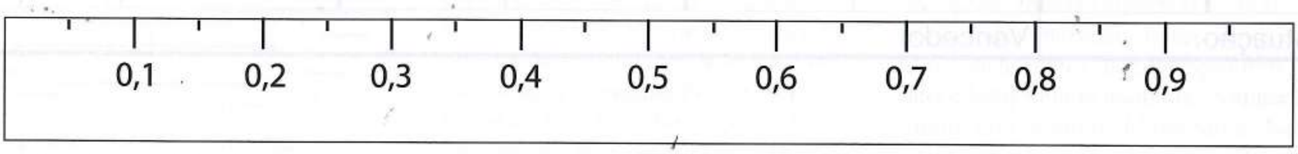
2º exemplo: Localiza 0,36



Para obter um ponto, o grão de arroz pode estar entre 0,26 e 0,46

Pontuação: 1

Desenha esta régua numa folha transparente.



Jogo Grão a Grão

Folha de registo das jogadas

Equipa ______________________ / ______________________

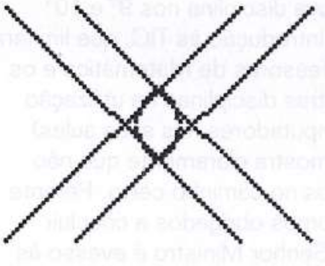
Jogadas	Número decimal pedido	Número com mais uma décima	cálculo	Número com menos uma décima	cálculo	Valor marcado com o grão na régua	Pontuação
1ª							
2ª							
3ª							
4ª							
5ª							
Pontuação:		Vencedor:					
1ª							
2ª							
3ª							
4ª							
5ª							
Pontuação:		Vencedor:					

As maravilhas da calculadora gráfica

Num destes dias decidi procurar todos os meus registos, documentos e certificados, para começar a elaborar o meu documento de reflexão crítica, referente aos últimos anos de carreira.

Ao folhear um dos meus dossiês do professor, recordei (sobretudo) cada turma, cada aluno: como eram, o que faziam e não faziam, que avaliações obtiveram, etc.

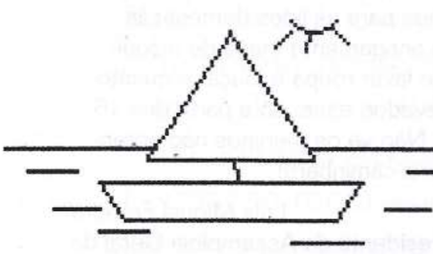
Debrucei-me um pouco mais sobre o 10º ano, turma B, uma turma de desporto, 29 alunos. Que turma! Apesar de me ser difícil agrupá-los, pois cada um era um caso, vou tentar fazê-lo: apenas cinco escolheram a opção de



DANIEL LEANDRO 10ºB Nº11

E.T.

INÊS PISCALHO 10ºB Nº6



NELSON COSTA 10ºB Nº22

Desporto por gostarem mesmo da prática desportiva e pensarem num futuro voltado para esta área; treze escolheram esta área por pensarem ser esta a mais fácil; onze eram alunos muito desinteressado pelas aulas, pelo ensino e pelo desporto.

Talvez isto seja suficiente para terem uma ideia de como era difícil trabalhar com estes alunos. As novas metodologias do ensino da Matemática como o trabalho com tecnologias, a resolução de problemas, a investigação, o trabalho experimental, e outros, muito pouco resultava. A turma era grande, as condições da escola eram poucas. As ambições destes alunos eram limitadas, alguns um pouco revoltados com a escola, o ensino e a sociedade em geral. Muitos destes alunos tiveram que *perder* um ano para se aperceberem que de facto aquele não era o melhor lugar para eles, abandonaram a escola e seguiram outros rumos (escolas profissionais e mercado de trabalho).

Poucos destes alunos tinham calculadora gráfica, o que dificultou ainda mais a abordagem dos conteúdos programáticos do 10º ano, sobretudo no capítulo das funções. Quando cheguei a este capítulo, decidi requisitar as dez calculadoras pertencentes ao grupo de Matemática. Com estas, a minha e mais algumas dos alunos, elaborei fichas de trabalho, onde os alunos registavam o que faziam na calculadora e as devidas conclusões. Com estas fichas, os alunos descobriram o significado gráfico dos parâmetros existentes nas funções afim, quadrática, módulo e funções definidas por ramos. Aprenderam também a trabalhar com o modo dinâmico da calculadora gráfica. Perceberam melhor o significado das transformações de funções, pois esboçaram vários gráficos e compararam-nos.

Um dia, fiz um desenho na calculadora, só com as funções estudadas com os alunos. Levei o View-screen para a aula, e mostrei-lhes o meu trabalho. Ficaram interessados, fizeram-me algumas perguntas sobre as funções utilizadas e até ouvi quem dissesse: "eu consigo fazer melhor!". Propus então que se fizesse o seu próprio desenho e o trouxessem para ser visto na aula.

Surgiram trabalhos excelentes. Alguns até utilizaram o modo dinâmico da calculadora: os raios do farol do André rodavam, as ondas do Nuno Costa mexiam-se, a boca do rosto do Nuno Silva também se mexia ....

Fiquei encantada.

Já repararam nos conceitos que estão por trás destes simples desenhos feitos só com funções? ... Por trás de cada traço está a expressão de uma função (Que função? Que domínio? Onde situar? Que inclinação dar à recta? Que abertura dar à parábola? ...

Queixei-me no início da dificuldade de trabalhar com estes alunos, vejam do que eles foram capazes.

Vanda Rosa
Escola Secundária da Marquesa de Alorna (Almeirim)

Elevadores só aos 16!!!

Na edição nº 73 da *Educação e Matemática*, a colega Branca Silveira assinou um artigo que pretendia apresentar o Plano de Acção para a Sociedade de Informação aprovado no Conselho de Ministros de 26 de Julho de 2003. Depois de o fazer com clareza, concluiu o texto referindo-se à "sensação do *déja-vu*" uma vez que, sob o ponto de vista teórico, de facto, o que se diz nos documentos oficiais, pouco traz de novo e de inovador. No entanto, na prática, no plano das acções, muito para além dos documentos oficiais e das meras intenções, em particular no sector da Educação, ao contrário do que seria desejável, temos regredido no que concerne à utilização de tecnologias. O actual Ministro da Educação tem dito e feito muitas asneiras, nomeadamente no campo da Matemática. Não podemos exigir que o Senhor Ministro da Educação domine todas as matérias relacionadas com o sector. Aliás, nem seria de todo possível!! O próprio terá consciência disso, mesmo se tiver como máxima aquela expressão já conhecida "Nunca tenho dúvidas e raramente me engano"!

Seria, portanto, muito natural que na tomada de decisões, este e qualquer outro Ministro fundamentassem as suas posições com base em estudos científicos existentes sobre a matéria em causa ou nas opiniões das associações profissionais respectivas. Dizia eu que "seria natural" uma vez que o Senhor Ministro da Educação procede precisamente ao contrário, revelando com esta atitude não só desrespeito por todos aqueles que estão no terreno, mas também uma certa dose de arrogância e pouco sentido de responsabilidade.

Na semana em que mais de mil professores de Matemática se reuniam em Santarém para a XIX edição do ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática) organizado pela Associação de Professores de Matemática (APM), além de ter declinado o convite para estar presente na sessão de abertura por dificuldades de agenda, o Senhor Ministro da Educação teve a infelicidade e a deselegância de anunciar a intenção de limitar o uso de calculadoras nos primeiros seis anos de escolaridade. Ora, relacionar o insucesso na disciplina de Matemática com a utilização de calculadoras, para além de revelar uma profunda ignorância sobre o tema, é acima de tudo uma tontice e uma aberração. A concretizar-se esta medida, será recuar no Ensino da Matemática décadas, será afastar mais a Escola da realidade e da Sociedade em que hoje nos inserimos, será tornar a Matemática ainda mais odiosa para os alunos, será impedir "aprendizagens fundamentais para o desenvolvimento de competências matemáticas indispensáveis para os cidadãos", será ignorar e contrariar tudo aquilo que a APM tem vindo a promover e a estimular com base em estudos científicos, em projectos de mestrado e doutoramento, na partilha de experiências com outras associações congéneres de outros países europeus, em projectos de investigação desenvolvidos por grupos de trabalho no terreno, nas salas de aula, com os alunos. Ignorar esta realidade e tomar medidas que contrariam o que, neste momento, é cientificamente aceite, é demonstrar uma profunda irresponsabilidade.

O combate ao insucesso na disciplina de Matemática com este tipo de medidas, no meu entender, está irremediavelmente perdido. A Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências criada pelo Senhor Ministro há um ano atrás, neste seu primeiro relatório, pelo menos neste ponto concreto, fez um péssimo trabalho, relatório este secundado por opiniões de outros cientistas *pop* que, nos vários programas televisivos em que participam, vão defendendo estas soluções idiotas.

As tecnologias no Ensino da Matemática são muito bem vindas, são úteis, são aconselháveis e recomendadas no maior estudo sobre esta matéria realizado nos últimos tempos em Portugal — Matemática 2001 — superiormente coordenado pelo saudoso Paulo Abrantes. Aliás, nesse mesmo estudo, referia-se que 56% dos professores do 1° ciclo referem nunca ou raramente utilizarem calculadoras nas aulas o que demonstra, claramente, que o insucesso, que é real, não tem ligação directa com a utilização das calculadoras. Pelo contrário, o Relatório Matemática 2001 havia uma recomendação no sentido de que "prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (...) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadoras e computadores."

Por outro lado, se a restrição no uso de calculadoras potenciasse o sucesso na disciplina de Matemática, nos países de terceiro mundo, onde não há, certamente, acesso a calculadoras, o desempenho na disciplina seria, no mínimo, razoável. Pelos menos, haveria melhores condições para a promoção do sucesso. Não será bem isso que acontece!!

Mas esta medida toma ainda proporções mais ridículas, quando é tomada na mesma semana em que o Senhor Ministro anunciou o programa que financiará a aquisição de um computador por sala de aula o que, aliás, é uma boa medida. Ora, como nos computadores podemos aceder a uma calculadora ou a uma folha de cálculo, espero, sinceramente, que o Senhor Ministro não mande desactivar estas aplicações. Porque tomar esta medida no que toca às calculadoras, seria o mesmo que, para combater o insucesso dos alunos na Língua Portuguesa (no que respeita particularmente aos erros ortográficos), se limitasse a utilização dos computadores e dos processadores de texto.

Já há tempos o Senhor Ministro tomou uma medida, de certa forma relacionada com esta (a criação de uma nova disciplina nos 9° e 10° anos - Introdução às TIC, que limitará os professores de Matemática e os das outras disciplinas na utilização de computadores nas suas aulas) e que mostra claramente que não estamos no caminho certo. Perante isto, somos obrigados a concluir que o Senhor Ministro é avesso às tecnologias. O Senhor Ministro vive num mundo que não é nosso e, ao tomar medidas descabidas, desenquadradas, não fundamentadas e reveladoras de aversão às tecnologias, não está a contribuir para o sucesso na disciplina de Matemática. Está a tornar a sala de aula menos estimulante e a Escola bem mais distante da Sociedade da Informação e do Conhecimento em que hoje vivemos. Estou mesmo a ver o Senhor Ministro (e todos aqueles que lhe transmitem estas *miseráveis* ideias) a educarem os filhos para as lides domésticas como antigamente (nada de máquinas de lavar roupa e louça) e quanto ao elevador, esse, só a partir dos 16 anos. Não vá os meninos não aprenderem a caminhar!!!

Luís Miguel Ferreira
Presidente da Assembleia Geral da APM

eLearning: do HTML às plataformas

Nuno Lavado

Fazer do longe perto … As acções de formação contínua para os Professores do Ensino Básico e Secundário através de Cursos on-line estão a ganhar cada vez mais popularidade e credibilidade a nível nacional e internacional. O Centro de Formação da APM vai realizar em 2004 a sua primeira Acção de Formação recorrendo a este novo paradigma (ver APM*informação* n.º 69).

eLearning: a quarta geração de ensino à distância

Com o aparecimento da *Internet*, considerada a tecnologia mais importante dos nossos tempos, a *Web* emergiu como um dos meios mais económicos e democráticos de ensino e aprendizagem à distância, tornando-se rapidamente num instrumento poderoso, global, interactivo e dinâmico de partilha de informação. Jamais houve um volume tão grande de informação ao alcance de quem quer que seja, onde quer que esteja. Graças à *Internet* e aos dispositivos multimédia nunca foi tão fácil, tão rápido e tão barato chegar ao Conhecimento. Alunos de qualquer ponto do mundo usufruem do mesmo acesso às inúmeras fontes e recursos de aprendizagem disponíveis na *Web*.

Este novo conceito de ensino e aprendizagem, difundido pela primeira vez por *Elliot Masie* nos EUA, não é mais do que uma forma de aprendizagem à distância, mediada pela tecnologia *Web*, cuja filosofia tem vindo a ser designada por *eLearning*. Podemos considerar esta recente explosão de interesse como a quarta geração de educação à distância. A primeira geração foi a troca de conhecimento por correspondência em meados do séc. XIX. A segunda geração surgiu com o aparecimento da televisão e com ela o sonho de levar educação à casa de todas as pessoas, projecto então designado em Portugal por *Telescola* nos anos 70 e 80. A terceira geração emergiu nos finais dos anos 80, altura em que as Instituições de Ensino Superior dos EUA começaram esporadicamente a oferecer cursos *on-line* numa altura em que a *Internet* dava os primeiros passos sendo uma espécie de clube restrito para pessoal universitário e militar. A quarta geração de ensino à distância é aquela que hoje vivemos.

Segundo a IDC (*International Data Corporation*), durante o ano 2000 mais de 70 milhões de pessoas receberam educação/formação através da *Internet* e em 2003 espera-se que o seu valor ronde os 11,4 mil milhões de dólares só nos EUA. Um elevado nível de crescimento, tendo em conta os 550 milhões de 1998. Na Europa, também segundo a IDC, o número de utilizadores deverá rondar os 200 milhões em 2004, resultado de um investimento aproximado de 1600 mil milhões de dólares.

Tipicamente associada ao paradigma da *Nova Economia*, esta realidade está cada vez mais ao alcance de todos: estudantes universitários, executivos ou meros autodidatas. Esta aprendizagem suportada pela *Internet* tem crescido essencialmente associada ao paradigma de aprendizagem ao longo da vida, imposta pelas exigências do próprio mercado: valorização das competências e reciclagem constante dos conhecimentos. E os ganhos para o utilizador são evidentes: actualização, acessibilidade e focalização.

Mais recentemente temos também assistido a um crescente interesse no *eLearning* por parte de instituições de formação inicial, nomeadamente as Instituições de Ensino Superior. No Ensino não Superior são raras as experiências de *eLearning* e os *sites* existentes contemplam essencialmente a divulgação de provas de avaliação e de textos de apoio ao estudo dos alunos. As acções de formação contínua para os Professores do Ensino Básico e Secundário em ambiente de ensino distribuído estão a ganhar cada vez mais popularidade e credibilidade a nível nacional e internacional. O Centro de Formação da APM vai realizar em 2004 a sua primeira Acção de Formação recorrendo a este novo paradigma (ver APM*informação* n.° 69).

Plataformas de *eLearning*

Até à pouco tempo quando um membro duma instituição pretendia oferecer um curso à distância, ou simplesmente oferecer conteúdos de complemento às aulas tradicionais, ele ou ela, para além de ser perito no conteúdo a divulgar, teria ainda que ser capaz de conceber de raíz toda uma estrutura que originaria o site onde iria divulgar o seu curso.

Todo este processo, quando realizado sem ajuda de profissionais, implicava o investimento de muitas e muitas horas. Primeiro teria que passar por um processo de aprendizagem sobre o funcionamento das ferramentas de edição de páginas *web*, tarefa que já não exigindo o conhecimento de programação HTML, podia levar várias horas para os menos habituados a estas coisas dos computadores. Depois de dominadas algumas funcionalidades dessas ferramentas, havia ainda uma série de coisas a considerar. Desde opções de imagem, opções dinâmicas e toda uma série de novas opções multimédia, fóruns, *chats*, que implicam antes demais muitas horas *on-line* a aprender com o que os outros têm feito.

Desenvolver tudo isto de raíz e sem ajuda pode queimar por completo a tal ideia inovadora dos conteúdos *on-line*. Em Portugal, regra geral é este ainda o processo habitual, com os professores a título individual a desenvolverem as suas páginas de apoio à sua disciplina, envolvendo recursos não institucionais e diferentes tipos de tecnologias. Todo este esforço, talvez possa no futuro ser considerado como a necessária fase de iniciação. Esta fase ficará marcada pelo fraco aproveitamento das tecnologias existentes, com um produto caracterizado pela digitalização, sem tratamento prévio, das velhas sebentas, que em formato PDF são distribuídas pelos alunos nos ditos cursos *on-line*.

Cientes dos altos retornos esperados no mercado do *eLearning*, várias empresas de desenvolvimento de *software* têm vindo a desenvolver *software* específico para a gestão e desenvolvimento de cursos *on-line*, ao qual tem sido atribuída a designação de plataformas de *eLearning*.

Duma maneira geral a filosofia destas aplicações é permitir aos utilizadores, professores/formadores e alunos/formandos, que com um mínimo de tempo de aprendizagem possam usufruir de tudo o que a tecnologia tem para oferecer. Assim, as instituições adquirem a plataforma que é normalizada pelos serviços de informática ou por grupos de trabalho, tendo em vista a definição da imagem que se pretende transmitir e do tipo de funcionalidades a disponibilizar. Depois os professores (só) têm que aceder à *Internet* e mediante uma *password* fazer uso do espaço que a instituição lhes oferece. Espaço esse que já vem com as tais normalizações, tendo o professor apenas que preencher os espaços em branco para implementar o seu curso *on-line*. Se por um lado se perde alguma liberdade na construção das páginas, por outro ganha-se em termos de facilidade de gestão e desenvolvimento, com a grande vantagem de deixar de ser uma iniciativa individual e passando a ser uma questão de imagem de marca da instituição.

O desenvolvimento duma dessas plataformas de *eLearning* contou com a participação de Portugal e originou a designada plataforma TWT (Teaching Web Toolkit). O ambiente de trabalho desta aplicação informática para gestão de programas de ensino a distância, oferece uma série de funcionalidades necessárias ao paradigma do *eLearning*, entre as quais: Fóruns, *Mailing list* e *Chat*. Os pré-requisitos necessários para ser utilizador do TWT, são apenas, alguns conhecimentos e experiência na utilização de um computador, nomeadamente na navegação na *Internet*. A plataforma TWT foi a escolhida pelo Centro de Formação da APM para realizar a sua primeira Acção de Formação *on-line*.

O caminho da aceitação

Um percurso que é importante registar, é a caminhada realizada nos EUA rumo à aceitação e reconhecimento desta forma de ensino à distância. Inicialmente o *eLearning* era visto como educação de segunda categoria, por parte das Instituições de Ensino (IE) e dos seus membros. No entanto, para os estudantes/formandos, a conveniência e a facilidade de acesso são preocupações primárias e os programas de *eLearning* possuem ambas as características. As entidades empregadoras também procuram, no âmbito da formação contínua, cada vez mais necessária, programas de educação de qualidade que possam ser seguidos de forma conveniente pelos seus empregados. Como estudos recentes nos EUA mostraram que os programas de educação à distância são equivalentes aos tradicionais, estudantes e empregadores tomaram este facto como a evidência de que estavam a ser bem servidos, quando recorriam a cursos *on-line*. A confiança dos estudantes e das entidades empregadoras levaram a um aumento das ofertas de formação, que por sua vez atraíu a atenção dos administradores das IE, que estão constantemente à procura de novas formas de financiamento. Nalguns casos, as IE são as últimas a abraçar a ideia do *eLearning*. Consequentemente, o caminho da aceitação é frequentemente: empregador, estudante, administrador e finalmente professor.

Nuno Lavado
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Nova versão do Cabri

Cabri-géomètre

Foi lançada uma nova versão do Cabri. Tanto quanto pude saber ainda não se encontra à venda em Portugal, embora já há bastante tempo se faça referência a ela nas revistas inglesas da ATM.

O Cabri II Plus apresenta novas capacidades e tem resolvidos alguns dos problemas que surgiam na versão Cabri II.

Assim, como novidades destaco, por exemplo:

- a possibilidade de escrita de expressões com variáveis e cálculo do seu valor, desde que se encontre no ecrã o valor a atribuir a cada uma das variáveis. Se a expressão for uma expressão apenas na variável x, activando um sistema de eixos e clicando no eixo dos xx é desenhado o gráfico da função;
- há novos objectos chamados *linhas inteligentes*, isto é podem ser desenhadas apenas *partes* de rectas (diferente de segmento) para melhor legibilidade da figura;
- a possibilidade de colocação de uma imagem de fundo, ou ligada a um objecto;
- tudo o que se refere a lugares geométricos: podem ser intersectados, é possível determinar a sua equação, a definição gráfica é melhorada automaticamente;
- botões relacionados com objectos que numa lógica de on-off permitem esconder ou mostrar os objectos a que estão associados;

Há melhoramentos em aspectos já existentes, como por exemplo:

- todos os objectos podem ser nomeados e não só os pontos, as rectas e circunferências, como acontecia na versão anterior;
- a edição de textos foi ampliada;
- a cor de fundo do ambiente de trabalho pode ser modificada;
- a paleta de cores foi aumentada para 36 cores;
- as superfícies coloridas podem apresentar-se no modo transparente para casos de sobreposição;
- a barra de atributos tem mais opções;
- é possível gravar e imprimir o decorrer de uma sessão;
- está solucionado o problema que existia na transferência de tabelas para uma folha de cálculo (Excel, por exemplo).

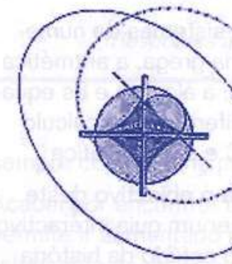
Achei bastante interessante e importante a possibilidade de gravar os ficheiros de modo a poderem ser transferidos para as calculadoras que possuem o Cabri, para utilização posterior nas calculadoras

Navegando pela Internet

A partir da página http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/, chega ao *Museu Matemático* em: http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/museum/museum_cat.html.

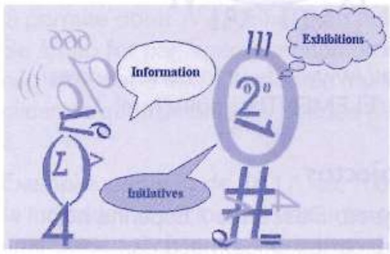
Aqui encontra uma régua de cálculo interactiva e um construtor universal de equações. A página tem ficheiros em Cabri e Sketchpad que podem ser utilizados para efectuar simulações do trabalho a realizar com esse mecanismo.

Continue dando uma volta por museus da matemática.



Parta para o *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica da Università degli studi di Modena e Reggio Emilia* em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/ e visite o *Laboratório de Máquinas Matemáticas* e a exposição no *Theatrum Machinarum*.

Encontra várias temas, como: secções cónicas, perspectivas projecções e anamorfoses, transformações, traçado de curvas e instrumentos para resolver problemas.



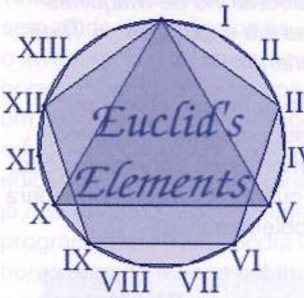
Visite ainda as páginas do *Jardim de Arquimedes* (versão inglesa) em: http://www.math.unifi.it/archimede/archimede_inglese/index.html.

Na apresentação chama-se a atenção para o facto deste museu não ser um museu *de* matemática mas sim um museu *para* a matemática, que "não se limita a mostrar coisas do passado, mas sim, onde os visitantes podem tomar contacto com o que há de concreto e vivo nesta ciência e aprender a relevância que a matemática tem na vida real".

Deixando os museus mas continuando pela história encontra disponível em: http://web.unife.it/altro/tesi/A.Montanari/index.html uma tese *Storia delle Matematiche Elementari — Una Guida ad Internet* com uma breve história da matemática.

Está dividida em: sistemas de numeração, a geometria grega, a aritmética da Índia à Europa; a álgebra e as equações; o cálculo diferencial, o cálculo automático; o PC e a matemática

Segundo a autora o objectivo deste trabalho é fornecer um guia interactivo na Internet para o estudo da história da matemática elementar e, como tal, tem muitas ligações para variados sites, entre eles, o que se indica seguidamente, que contém os Elementos de Euclides com animações em Java



http://www.educa.fmf.uni-lj.si/java/pck/ELEMENTS/bookV.html

Projectos

Projecto Descartes / Espanha http://descartes.cnice.mecd.es/

Descartes

Descartes é um projecto promovido pelo governo espanhol, cuja principal finalidade é promover a criação de um ambiente de colaboração na área de Matemática.

Foi criada uma ferramenta, também chamada Descartes, que permite gerar aplicações educativas e de fácil utilização pelos professores.

No site, encontram-se unidades didácticas, aplicações desenvolvidas pelos professores, experiências realizadas na sala de aula, uma caixa de ferramentas matemáticas de apoio ao professor, um motor de pesquisa interno, etc.

Também se disponibiliza toda a documentação técnica sobre o programa e os materiais de formação que são usados nos cursos de formação a distância e que poderão ser utilizados para autoformação.

National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics

National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics (projecto da Utah State University) http://matti.usu.edu/nlvm/nav/vlibrary.html

Contém simulações interactivas para todos os níveis (1 a 12) de temas envolvendo números e operações, álgebra, geometria, medida, estatística e probabilidades.

M2T2

Projecto M2T2 (Mathematics Materials for Tomorrow's Teachers) http://www.mste.uiuc.edu/m2t2/default.html.

Neste site, em http://www.mste.uiuc.edu/m2t2/appletslist.html encontra uma lista com ligação a vários *applets* do projecto, que pode experimentar.

The MathPage http://www.themathpage.com/index.html

Página de um projecto que contém aquilo a que os autores chamam um curso completo sobre: Aritmética; tópicos de trigonometria; tópicos de cálculo elementar; evolução dos números reais

Conferências

Finalmente, algumas conferências a realizar em 2004, na área da Matemática e Tecnologia:

- *Cabriworld 2004*
  Roma, Itália, 9–12 Setembro
  3ª Conferência Internacional de Cabri-géomètre
  http://italia2004.cabriworld.com/
- *Technology and its Integration in Mathematics Education* (TIME–2004)
  Montréal, Québec, Canadá
  15–18 Julho
  http://www.time-2004.etsmtl.ca/
  Este simpósio integra a oitava Academia de Verão da ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra) e a sexta conferência internacional Derive & TI-CAS
- 2ª Conferência anual USACAS sobre Cálculo Algébrico Simbólico no ensino secundário
  Glenview, IL, USA, 19–20 Julho

E já agora … se gosta de citações pode consultar a página da Furman University, Mathematics Quotation Server em: http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.shtml

No momento da consulta a citação de abertura da página era de Siméon Poisson (França, 1781–1840):

"A vida é boa apenas por duas coisas, descobrir matemática e ensinar matemática"

Os nomes e os números

Estava outro dia com uns amigos quando resolvemos transformar as letras dos nossos nomes próprios em números, de acordo com um dos mais antigos códigos que se conhecem: $A = 1, B = 2, C = 3, \ldots, X = 22, Z = 23$ e depois cada um de nós multiplicou os números do seu nome.

No meu caso, JOSÉ deu $10 \times 14 \times 18 \times 5 = 12600$.

Uma das minhas amigas obteve 24 453. O resultado de um dos meus amigos foi 497 420.

Como é que eles se chamam?

(Respostas até 31 de Março)

Quatro números e diferenças

O problema proposto no número 74 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

— Escolher quatro números naturais e colocá-los numa fila inicial (fila 0).

— Construir a fila 1 a partir dos números da fila anterior: cada novo número é a diferença, em valor absoluto, entre o número que está por cima e o que está à direita desse; o quarto número é a diferença entre o que está por cima e o primeiro.

— Repete-se o processo para cada nova fila, obtendo-se sempre os novos números à custa dos quatro anteriores.

— O processo termina quando se chega a uma fila só com zeros.

Consegues arranjar quatro números iniciais que dêem origem a dez filas não nulas? E a 20 filas?

Pergunta adicional: Qual será a maior sequência de filas que se consegue com quatro números iniciais inferiores a 1000?

Quando, há já uns anos, encontrei este problema na internet, no grupo de discussão *Snark* sobre resolução de problemas, fiz algumas experiências um pouco ao acaso e encontrei uma fila inicial que dava origem a 13 filas:

1 — 18 — 49 — 106 (fila inicial)
17 — 31 — 57 — 105 (fila 1)
14 — 26 — 48 — 88 (2)
12 — 22 — 40 — 74 (3)
10 — 18 — 34 — 62 (4)
8 — 16 — 28 — 52 (5)
8 — 12 — 24 — 44 (6)
4 — 12 — 20 — 36 (7)
8 — 8 — 16 — 32 (8)
0 — 8 — 16 — 24 (9)
8 — 8 — 8 — 24 (10)
0 — 0 — 16 — 16 (11)
0 — 16 — 0 — 16 (12)
16 — 16 — 16 — 16 (13)

Dei-me por satisfeito. Bastante tempo depois encontrei a folha onde tinha tomado as minhas notas e resolvi tentar encontrar alguma estratégia ou algumas regras que permitissem ir aumentando o número de linhas. Não foi nada fácil, mesmo socorrendo-me mais intensamente da folha de cálculo no computador.

Algumas propriedades são imediatamente constatáveis: se somarmos, subtrairmos ou multiplicarmos por uma constante todos os elementos da fila inicial, a nova linha obtida dá origem a uma série de linhas com o mesmo comprimento da anterior. Consequência imediata: o número mais baixo pode sempre ser 1 e podemos sempre colocá-lo na primeira posição.

Acabei por encontrar um método que permite ir aumentado o número de linhas uma a uma. Aqui vai ele.

Por uma questão de simplificação dos cálculos, resolvi admitir que também podia incluir o número zero (depois, no fim, é somar uma unidade a todos os elementos da linha inicial).

Imaginemos que uma certa linha inicial

$a1, a2, a3, a4$

dá origem a N linhas não nulas.

Seja $k = |a_4 - a_1 - a_2 - a_3|$.

Uma nova linha inicial igual a

$$0, a_1 + \frac{k}{2}, a_2 + k, a_1 + \frac{k}{2}$$

já permite obter N+1 linhas não nulas. Se k não for par, aparecem números não inteiros, e então temos de multiplicar os quatro números obtidos por 2.

Exemplo: partindo de 0, 17, 48, 105 (a indicada no início mas com menos uma unidade) obtemos 13 linhas.

Então $k = 105 - 48 - 17 = 40$

e a nova linha de partida é

0, 0+20, 17+40, 105+20 ou

0, 20, 57, 125

que dá origem a 14 linhas não nulas.

Seguindo este processo, a mais eficaz com números inferiores a 1000 é

0, 81, 230, 504

que origina 18 linhas.

Continuando este processo várias vezes, para conseguir 20 linhas obtemos:

0, 230, 653, 1431

Por curiosidade, eis a mais longa que obtive, que dá 33 linhas:

0, 35890, 101902, 223317

O Paulo Correia, de Alcácer do Sal, fez um programa de computador que analisou todos os casos possíveis de linhas iniciais com números inferiores a 1000 e obteve todas as 10 soluções que dão origem a 18 linhas:

0 — 81 — 230 — 504

0 — 118 — 335 — 734

0 — 138 — 392 — 859

0 — 149 — 423 — 927

0 — 155 — 440 — 964

0 — 274 — 423 — 504

0 — 399 — 616 — 734

0 — 467 — 721 — 859

0 — 504 — 778 — 927

0 — 524 — 809 — 964

Note-se que cada uma destas soluções dá origem a outra, colocando os números em sentido inverso. Por exemplo, à primeira solução corresponde esta outra:

0 — 504 — 230 — 81

O Paulo colocou a resolução do problema *on-line* na página da sua escola: http://www.esec-alcacer-sal.rcts.pt/mat/4n_filas.html conjuntamente com o programa utilizado, disponível para *download*.

Encontros

XII Encontro de Investigação em Educação Matemática

Este encontro é promovido pela Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação e vai realizar-se em Beja, a 2, 3 e 4 de Maio de 2004.

A História do que constitui hoje o campo da Educação Matemática começa a dar os primeiros passos em Portugal. Pretende-se neste encontro possibilitar uma discussão entre distintas abordagens, metodologias e paradigmas, congregando os resultados já obtidos neste campo e contando para o efeito com a colaboração de especialistas de História, de Matemática e de História da Educação, bem como de investigadores nacionais e estrangeiros.

Prevê-se o funcionamento dos seguintes grupos de discussão: • Formação do currículo de Matemática;

• Livros de texto de Matemática;

• História do ensino da Matemática.

Para mais informações, pode consultar o site http://www.eseb.ipbeja.pt. E-mail: jrevez@eseb.ipbeja.pt.

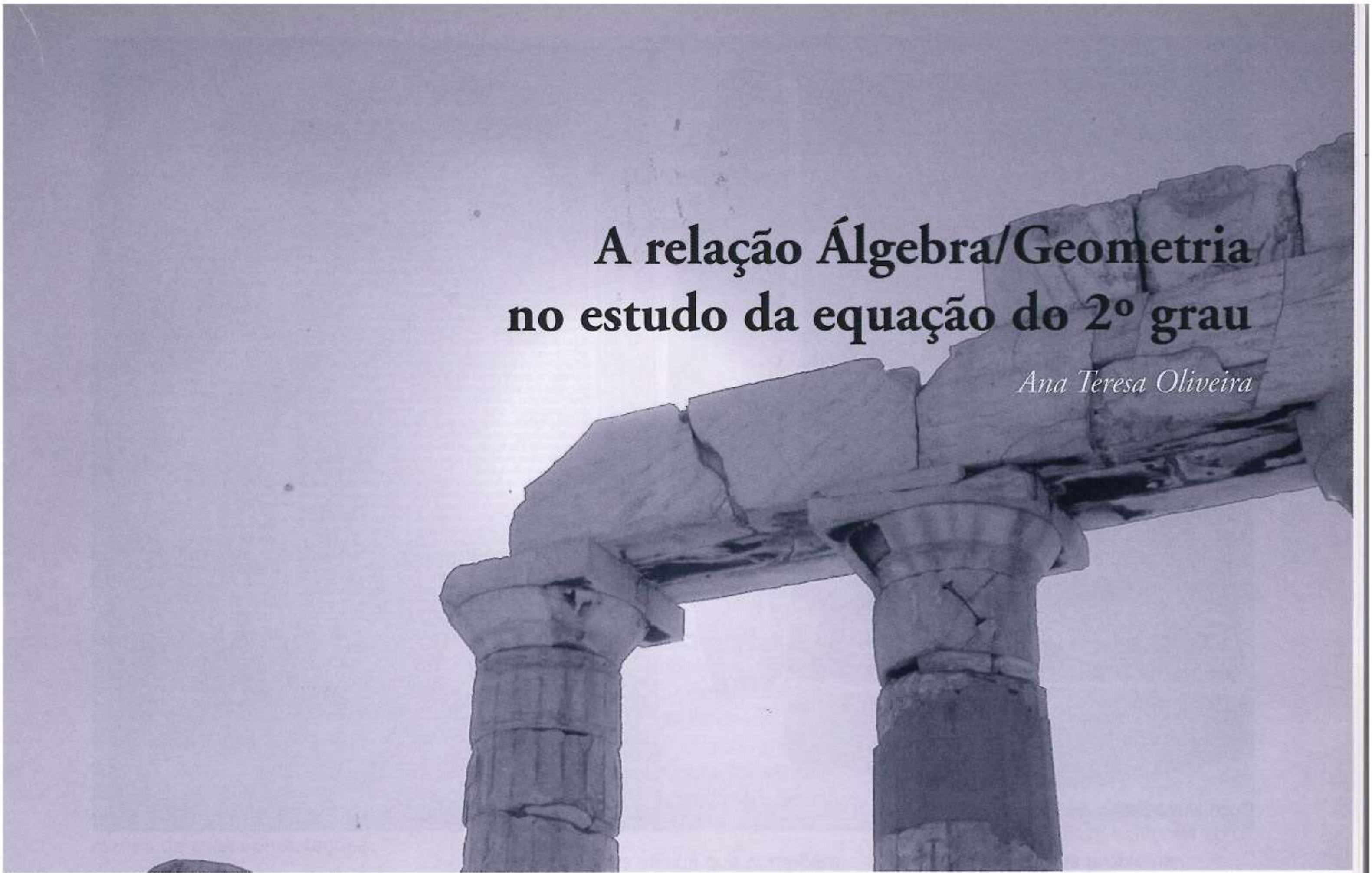
ProfMat2004

O Encontro Nacional de Professores de Matemática, ProfMat2004, irá realizar-se nos dias 29 e 30 de Setembro e 1 de Outubro, na Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Brevemente estará disponível a página do Encontro, onde se encontrará informação diversa, incluindo todas as inovações do ProfMat2004.

Localização do sítio do Encontro: http://www.apm.pt/profmat2004.

Endereço electrónico do Encontro: profmat2004@apm.pt.



A relação Álgebra/Geometria no estudo da equação do 2º grau

Ana Teresa Oliveira

Um pouco de história

Os egípcios

O papiro mais famoso, que permitiu conhecermos quase tudo o que sabemos hoje sobre a matemática dos egípcios, foi o *Papiro de Rhind* [1], provavelmente escrito próximo a 1650 a.C., descoberto em 1858 e que contém 85 problemas.

Os egípcios tratavam a incógnita de uma equação por *aha* e os papiros mostram que a sua álgebra era bastante primitiva e prática. Na maioria das vezes, os problemas não exigiam nada mais do que a solução de uma equação linear simples, e eram, geralmente, resolvidas pelo método que ficou conhecido por *a regra da falsa posição*. Há, no entanto, a presença de problemas que envolvem variável com expoente 2, apesar de os egípcios não se terem dedicado à equação do 2º grau e ao cálculo das suas raízes.

Um dos problemas contidos num papiro datado de aproximadamente 1950 a.C. está citado abaixo, bem como a solução que apresentaram através do método da falsa posição.

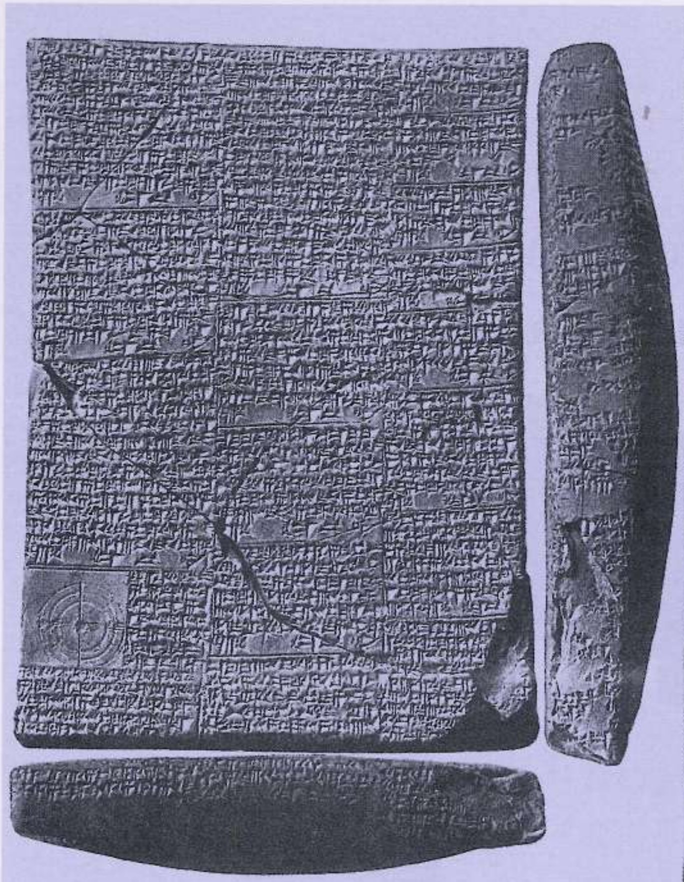
Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão um para o outro como 1 está para 3/4 (Eves, 1995, p. 74).

Ao resolvermos o problema pelo método da falsa posição como faziam, por conveniência devemos partir de $y = 4$, o que facilita o cálculo da quarta parte. Consequentemente, $x = 3$. Isto fornece $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100, que é o valor que o problema pede que seja encontrado. Se, contudo, dobrarmos estes valores, temos a situação que nos interessa, que é $x = 6$ e $y = 8$. Como podemos observar, estes valores têm a soma de seus quadrados igual a 100. Os valores iniciais encontrados eram *falsos*, o que provavelmente explicou o nome atribuído ao processo.

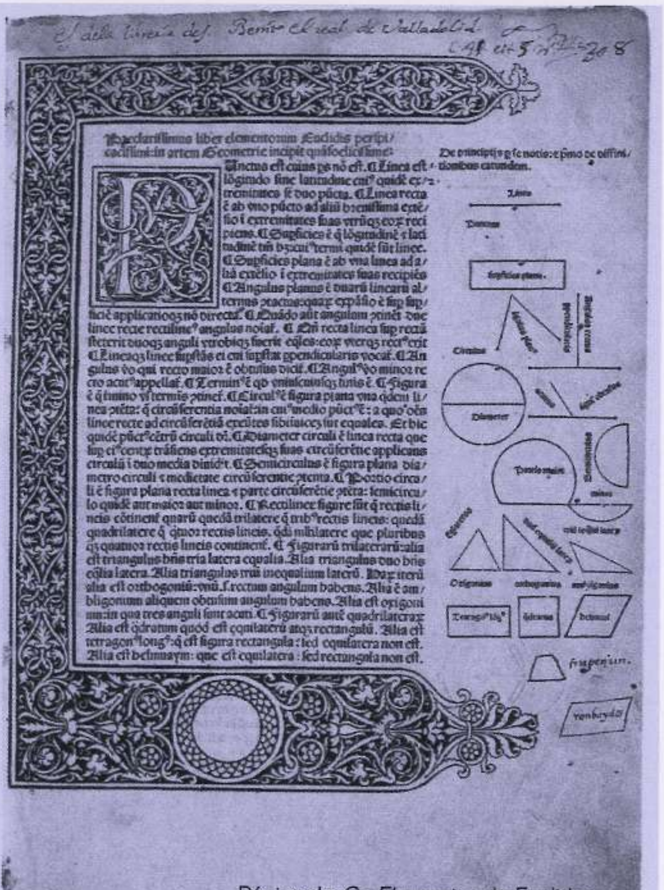
No tocante à equação do 2º grau, não construíram nenhum conhecimento substancial a respeito de sua solução ou aplicações. Propuseram, contudo, soluções para equações que envolviam o expoente 2, como pudemos observar no exemplo fornecido, sem terem formalizado nenhum processo que se voltasse para o cálculo das raízes da equação do 2º grau. Não esboçaram tendências nem intenções de articular conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos. Se pudermos entender que os dois papiros mais expressivos foram dirigidos, também, aos alunos desta época, e considerando que o conteúdo deste material era quase todo prático e priorizava cálculos—eles mostraram regras para cálculos sem motivação—provavelmente esta foi a tendência do ensino de matemática no Egipto.

Os babilónios

O que em geral é tratado por *civilizações babilónicas* são as da antiga Mesopotâmia, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros que habitaram a área. Na verdade, estamos tratando da matemática desenvolvida pelos povos que habitaram a região entre os rios Tigre e Eufrates, incluindo todos os que acabamos de citar.



Documento babilónico



Página de *Os Elementos* de Euclides

É curioso destacar que não usavam letras para representar as quantidades, pois o alfabeto não era, ainda, conhecido, mas apresentavam, próximo a 2000 a.C., *álgebra retórica* bem desenvolvida. A propósito de termos usado o termo retórica para caracterizar a álgebra desenvolvida pelos babilónios, é conveniente citarmos os três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.

O papiro de Rhind

Na *álgebra retórica*, os argumentos da resolução de um problema são expostos em prosa pura. Um estágio posterior é caracterizado por *álgebra sincopada*, que envolve algumas abreviações para quantidades e operações usadas frequentemente. No último estágio, o da álgebra simbólica, as resoluções são expressas com símbolos que nada têm a ver, aparentemente, com aquilo que representam. Dentro de sua álgebra ainda retórica, colocavam no lugar de letras, palavras tais como *comprimento*, *largura*, *área*, *volume*.

As equações quadráticas foram classificadas em três tipos, e todos estiveram presentes nos textos babilónicos. São da forma $x^2 + px = 9$, $x^2 = px + 9$ e $x^2 + q = px$.

Nesta época não havia a intenção de se resolver uma equação da forma $x^2 + px + q = 0$ com p e q positivos, pelo facto de a equação não ter raiz positiva. Vamos citar um exemplo de problema encontrado em *tabletes babilónicos*.

Subtraiu-se o lado de um quadrado de sua área e isto é 14,30. Pede-se o lado (Boyer, 1974, p. 23).

Este número—14,30—que está representado no sistema sexagesimal, equivale a 870 no sistema decimal. Logo, o problema consiste em resolver a equação $x^2 - x = 870$. A solução é dada pelos babilónios, com palavras e no sistema sexagesimal, assim:

— Tomar 1, o coeficiente do lado do quadrado. Dividir 1 em duas partes. $0; 30 \times 0; 30 = 0; 15$ e acrescentar 14,30. O resultado—14,30;15—tem raiz quadrada igual a 29;30.

— Acrescenta-se 29;30 a 0;30, que tinha sido multiplicado por ele mesmo, e 30, o resultado, é o lado do quadrado.

Ao observarmos os problemas propostos e resolvidos pelos babilónios, estes não deixam dúvidas quanto à questão de que os babilónios entendiam um produto como a área de um rectângulo, um quadrado como uma área de um quadrado, se observarmos a terminologia usada em seus problemas. Entretanto, apesar de os formularem usando termos da geometria, os processos usados nas suas soluções foram predominantemente algébricos. A presença de elementos geométricos para dar nomes aos valores envolvidos nos seus problemas—dados ou valores a serem descobertos—não significa que tenham dado algum enfoque geométrico aos problemas algébricos. O nome *quadrado*, provavelmente, figurava com o mesmo sentido que atribuímos a uma letra na álgebra simbólica. E não a nenhum carácter demonstrativo ao que propuseram. As soluções eram fornecidas como receitas a serem seguidas.

Os gregos

Entre 800 a.C e 800 d.C ficou caracterizado um período de mudanças nos pólos de civilizações. Uma nova civilização crescia rapidamente rumo a assumir a liderança da produção cultural da época—os gregos. Foram estes os responsáveis, sem dúvida, por dar à matemática um novo tratamento. Ou seja, os gregos encarregaram-se de fazer o que as civilizações orientais tinham deixado por fazer—buscar as razões de suas constatações.

Uma das mais importantes descobertas de Pitágoras, foi ter colocado a questão da parceria entre dois ramos da matemática—aritmética e geometria—surgindo os irracionais. A razão entre a diagonal e o lado do quadrado não podia ser expressa por um número racional. Daí a dificuldade encontrada na época em se resolver a equação da forma $x^2 = 2$. *Números*, até então, significavam *números racionais*. Desta forma, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ colocou a álgebra diante de um problema que aparentemente era simples, quanto à sua formulação, mas que numericamente não tinha solução.

O impasse quanto aos *incomensuráveis* foi responsável pela origem da *Álgebra Geométrica* dos gregos. A álgebra foi reformulada em termos geométricos. Dentro deste novo enfoque, a equação $x^2 = 2$ passou a ter solução geométrica, pois x é a diagonal de um quadrado de lado 1.

Os princípios da álgebra geométrica motivaram a apresentação de soluções geométricas para a equação do 2° grau. Na álgebra geométrica plana, três operações fundamentais foram definidas:

— A soma de dois segmentos de reta a e b é um segmento c tal que c pode ser dividido em duas partes de tal forma que (modernamente) $a + b = c$.

— A soma de dois polígonos A e B é um polígono C que pode ser dividido em duas partes tais que (modernamente) $A + B = C$.

— O produto de dois segmentos de reta de medidas a e b é um rectângulo R determinado pelos dois segmentos. Cabe observar que este produto não é entendido como um número, mas como um objecto geométrico.

Dentro desta forma de interpretar as variáveis e as operações entre elas, a raiz quadrada de um determinado elemento N é o lado de um quadrado de área N. Analogamente, $a.b$ é a área de um rectângulo de lados medindo a e b. De acordo com estes princípios, as equações quadráticas foram resolvidas pelos gregos, geometricamente, explorando *áreas*.

Entre os vários sábios que compõem a história da matemática grega, Euclides destaca-se como um dos que mais influenciaram a matemática no mundo. Sua principal obra—*Os Elementos*—é composta por treze livros e, talvez, seja o material escrito mais reproduzido e estudado. Foi composto, provavelmente, em torno de 300 a.C. Serviu, inclusive, como guia do currículo escolar por muito tempo, de onde eram retirados os conteúdos geométricos e a sua abordagem axiomática e dedutiva. É considerado, portanto, como uma referência para quem deseja conhecer as características da matemática antiga e o nível de desenvolvimento alcançado pelas diversas civilizações, nas diversas áreas em que organizamos o conhecimento em matemática.

No livro II desta obra, encontramos a solução de uma equação da forma $ax + x^2 = a^2$. Assim com se mostra na figura 1, Euclides parte de um quadrado $ABCD$ de lado a. AD é bissectado em E. Traçamos EB, prolongando o lado DA a F de tal modo que $EF = EB$. Completamos o quadrado $AFGH$. Prolongamos GH até cortar DC em K. Desta forma aplicamos ao segmento AD um rectângulo $FK = ax + x$ igual a um quadrado

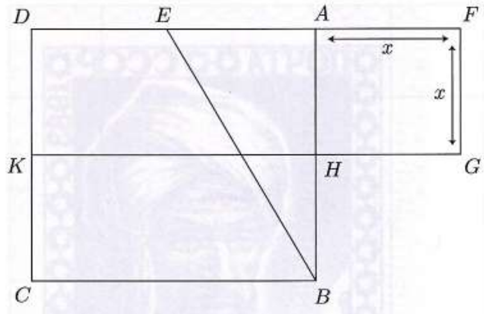


Figura 1.

dado $AC = a$ e excedendo por um quadrado x . No desenho fornecido, x é a medida do lado AF.

Provavelmente, a abordagem geométrica fornecida por Euclides para a solução da equação do 2° grau deve ter tido sua motivação a partir da descoberta dos irracionais. O facto de $x^2 = 2$ não ter solução no universo dos racionais, desafiou os gregos, que buscavam soluções exactas para os problemas que queriam resolver, apesar de conhecerem soluções aproximadas para alguns problemas.

É importante considerar que, embora a solução geométrica para a equação do 2° grau tenha surgido como um caminho para resolver um problema sem solução no campo numérico, não significa que este procedimento geométrico seja acessível ou de fácil compreensão. O facto de passarem a ter condições de resolver as equações quadráticas não significou, de forma nenhuma, que conquistaram processos mais simples. Os processos geométricos que fornecemos e analisamos são sofisticados e de difícil compreensão.

De acordo com a metodologia proposta pelos gregos, para resolver equações quadráticas, era necessário entender x e os coeficientes das equações como quantidades geométricas e lidar com construções e teoremas para a obtenção do valor de x—raiz da equação—que eram sofisticados e envolviam um alto nível de elaboração.

Os árabes

Três homens se destacaram na matemática árabe: Al - Khwarizmi, Tabit ben Qurra e Omar Khayyam. Entre eles, contudo, Muhammad ibn Musa Al -

Al - Khwarizmi, num selo

Khwarizmi, nascido em 780 d.C., em Khiva, foi o responsável pelo apogeu das actividades islâmicas nas ciências exactas.

A álgebra de Al-Khwarizmi, seu principal trabalho, tinha o título *Hisab al-jabr wal-mugabala*, o que significa *ciência da redução e da confrontação* ou *ciência das equações*. Esta álgebra tornou-se conhecida em todo o Ocidente por meio de suas traduções latinas e a palavra al-jabr se tornou o mesmo que álgebra. Este trabalho é expresso em palavras, isto é, em álgebra *retórica*, ainda distante de ser um trabalho em álgebra *sincopada* ou *simbólica*.

Al-Khwarizmi, neste trabalho que o notabilizou, tratou das equações quadráticas, forneceu regras para a obtenção de soluções, apresentou demonstrações para as regras apresentadas e ilustrou-as trabalhando sobre exemplos.

Analisando as soluções apresentadas nesta obra em sua versão latina, encontramos a resolução, em seis capítulos, dos seis tipos de equações que podemos compor se considerarmos três espécies de quantidades combinadas: raízes—x, quadrados—x^2 e números, como foram interpretados pelo autor.

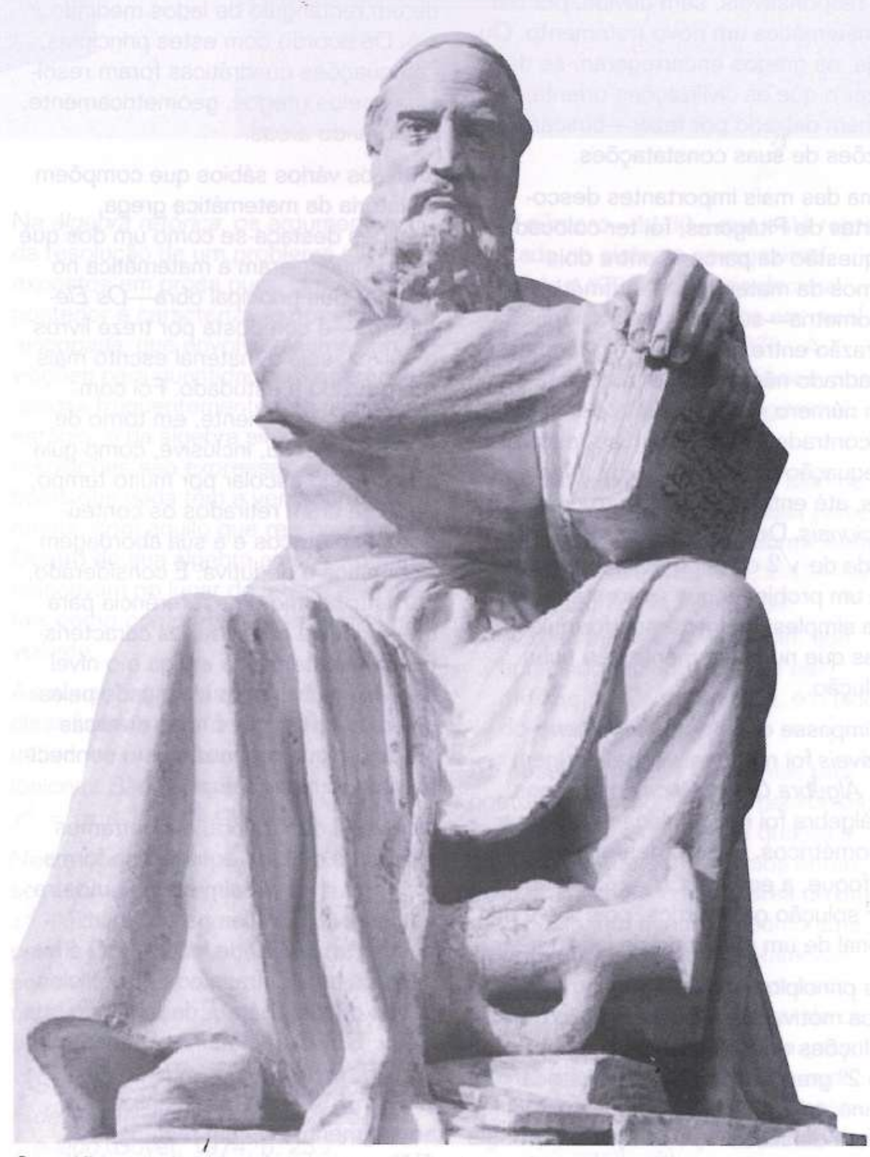
Os seis tipos expressos em álgebra *retórica* são referidos a seguir, apresentados, cada qual, da maneira como os expressamos em álgebra simbólica—raízes iguais a quadrados $bx = ax^2$, raízes iguais a números $bx = c$, quadrados iguais a números $ax^2 = c$, quadrados e raízes iguais a números $ax^2 + bx = c$, raízes e números iguais a quadrados $bx + c = ax^2$, quadrados e números iguais a raízes $ax^2 + c = bx$.

Para ilustrar, citaremos um exemplo de problema apresentado por Al-Khwarizmi, fornecido por Van der Waerden (1985, p. 4), que se funda na resolução de uma equação do tipo *quadrados iguais a raízes*.

> *Dividi 10 em duas porções. Multipliquei uma porção pela outra. Depois disto, multipliquei a primeira delas por ela mesma, e o produto da multiplicação dela por ela mesma é quatro vezes aquele (o produto) de uma porção pela outra.*

O que acabamos de ler equivale a dizer *um quadrado de algo desconhecido é igual a quarenta vezes esta quantidade desconhecida, menos quatro vezes o quadrado*, isto é, $x^2 = 40x - 4x^2$. Isto porque, Al-Khwarizmi tratou uma das partes pelo que em álgebra simbólica tratamos por x e a outra pelo que faltava a esta para completar 10, isto é, $10 - x$. E todas as vezes que sugere operações com estas duas porções, elas são entendidas como tal.

Expressar em álgebra simbólica o que está em prosa no texto apresentado remete-nos à expressão



Omar Khayyam (1048–1131). Importante algebrista, filósofo e poeta.

$x.x = 4.x.(10 - x)$ que é equivalente à equação do 2° grau que já citámos anteriormente.

Após o sexto capítulo, é apresentado um novo caminho para a solução destes problemas, revelando um perfil grego na sua conduta. Segundo o próprio Al-Khwarizmi, era preciso constatar a verdade dos factos geometricamente. As soluções apresentando números já tinham sido devidamente exploradas.

Al-Khwarizmi desenvolveu o seu processo de solução geométrica de forma diferente da dos gregos. Três exemplos de equações quadráticas completas que foram tratados pela sua obra são: $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ e $3x + 4 = x^2$. Foram dados tratamentos diferenciados a estas equações, pois naquela época, só eram considerados os coeficientes positivos. Vamos exemplificar, apresentando a solução geométrica e a solução numérica fornecidas por Al-Khwarizmi para uma das equações presentes no seu trabalho: $x^2 + 10x = 39$. A solução inicialmente fornecida por Al-Khwarizmi—numérica—foi expressa da seguinte forma:

> Você divide ao meio o número raiz (resultado 5). Multiplique-o por ele mesmo (resultado 25). Adicione 39 (resultado 64). Tire a raiz quadrada deste valor (resultado 8). Tire de 8 o resultado obtido na 1ª etapa (resultado 3).

Geometricamente, esta mesma equação foi resolvida partindo de um quadrado ab para representar x^2. Vejamos a figura apresentada a seguir. Em cada um dos lados deste quadrado, coloca rectângulos c, d, e, f com largura $2\ 1/2$. Para completar o quadrado grande são necessários quatro pequenos quadrados nas quinas, com lado $2\ 1/2$, ou seja, de área $6\ 1/4$ unidades. Como são quatro destes quadrados, a área total é equivalente a 25 unidades.

Se a $x^2 + 10x = 39$, que equivale ao quadrado inicial e aos quatro rectângulos, acrescentarmos 25 unidades temos 64, que é o quadrado completo. Isto leva-nos a descobrir que seu lado mede 8 unidades. Se de 8 retirarmos duas vezes $2\ 1/2$, chegamos à medida do lado x que é 3. (Ver Figura 2.)

É importante observarmos que nos trabalhos árabes, as diversas influências se misturam, deixando-nos em dúvida a respeito da origem da sua álgebra. Tudo leva a crer que se valeram de uma composição, trazendo em suas posturas diferentes nuances metodológicas. Vejamos:

É evidente a presença de inspiração grega, apesar de que seus primeiros modelos de resolução de equações geometricamente são um pouco diferentes do que os gregos propuseram. Sem dúvida, são procedimentos mais simples do que os dos gregos.

Revelaram habilidades algébricas ao lidar com as equações do 2° grau. Desta forma, podemos dizer que o seu estilo foi algorítmico e demonstrativo. Este estilo permitiu abordagens referentes tanto ao universo numérico quanto no universo geométrico.

Conclusões

As equações quadráticas tratadas pelos babilónios, apesar de sua terminologia geométrica, tiveram soluções puramente algébricas. Ou seja, não articularam, em seus processos, álgebra e geometria. O seu estilo de solução era algorítmico. Não mostraram compromisso com formulação de regras para soluções de problemas, envolvendo equações do 2° grau.

Os processos gregos foram geométricos, mas bastante sofisticados e de difícil compreensão. As construções eram elaboradas e lidavam com teoremas complexos.

Os árabes apresentaram abordagens diferentes—no universo numérico e no universo geométrico. Com esta soma de procedimentos, revelaram a capacidade de articular dois fios condutores que conduziram o pensamento matemático nas civilizações antigas—a abordagem geométrica presente na matemática grega e o método algorítmico usados pelos babilónios. Devemos aos árabes a ampliação dos horizontes no tocante às possibilidades que ofereceram na solução da equação do 2° grau e consequentemente à dialéctica entre a álgebra e a geometria.

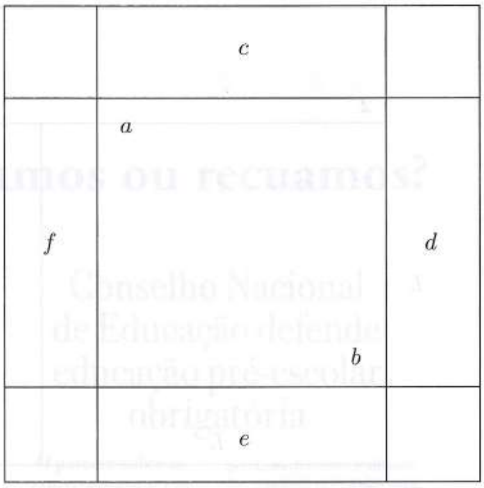


Figura 2.

Ficaram, ainda, diante de dois obstáculos que não podemos deixar de citar—os números negativos nesta época ainda indefinidos, o que restringiu os tipos de equações possíveis de serem solucionadas e a falta de um simbolismo algébrico. Estas duas questões vieram a ser estudadas posteriormente.

Sugestões metodológicas

O estudo da equação do 2° grau envolve terminologias e procedimentos que fazem parte do cenário algébrico. Ao tentar resolver a equação do 2° grau, cada aluno utiliza, em função de sua bagagem de conhecimento e de dificuldades, vários procedimentos ou práticas no cenário algébrico, e as dificuldades com manipulações algébricas são constatadas. Certamente, os recursos à decomposição em factores, ao uso do discriminante, a determinado produto notável ... são recursos que estão disponíveis para uns e não para outros. E seja em que nível for, apesar de idades variadas e experiências diversas com este tema, revelam, em diferentes nuances, erros básicos comuns, que se repetem ao longo de sua vida escolar. O uso de letras, notações, convenções algébricas, o conceito de variável ... são responsáveis por dificuldades em lidar com expressões algébricas, consequentemente, com a equação do 2° grau.

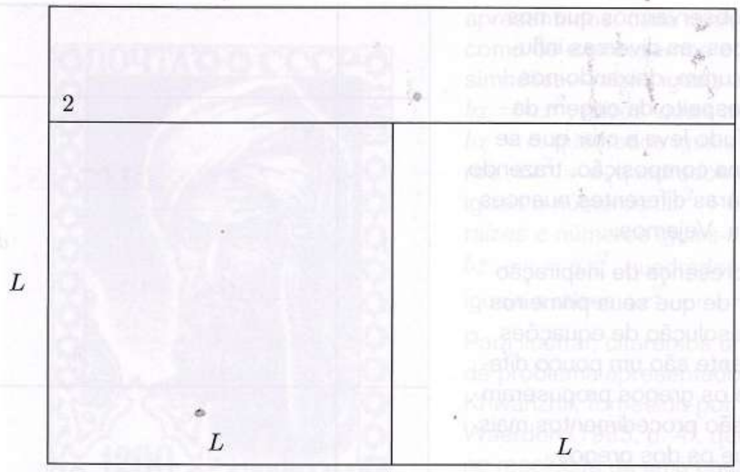


Figura 3.

O ensino de matemática deve priorizar a inter-relação entre os diversos tópicos de ensino. Quando falamos de um ensino que promova a integração entre os diversos assuntos tratados pela matemática escolar, estamos nos referindo a conexões de diversas ordens—entre cada objecto novo de ensino e conhecimentos já adquiridos, entre o conhecimento escolar e o conhecimento quotidiano e entre os diversos contextos matemáticos possíveis de serem alcançados pelos alunos, no seu nível de escolaridade.

Entendemos que apresentar aos alunos a equação do 2° grau como uma expressão algébrica não constitui uma metodologia que lhes proporciona significado. Isto refere-se a apresentá-la como uma expressão da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e c reais e $a \neq 0$, forma geral e abstracta, através da qual todo e qualquer conteúdo semântico é suprimido, indicando-se, apenas, o essencial das relações e transformações matemáticas envolvidas. Trata-se de uma apresentação árida, complexa para alunos principiantes em álgebra. No entanto, há uma série de situações ou problemas que, apesar de responderem à mesma equação, têm conteúdos semânticos muito diferentes em função das relações que se estabelecem entre os dados e suas naturezas. Os dados, por exemplo, podem ser geométricos, sendo esta equação a expressão matemática de uma situação que envolve áreas ou perímetros.

A propósito das diferentes abordagens para a solução da equação do 2° grau apresentadas e analisadas resumidamente neste texto, cabe considerar o quanto é interessante e curioso tratarmos da história da matemática com os nossos alunos, desde que respeitando as restrições que os diferentes níveis da escolaridade apresentam em relação à compreensão das informações. Acreditamos que construir a visão histórica de um conhecimento matemático pode contribuir satisfatoriamente para o processo de ensino/aprendizagem. Este recurso à história pode ser usado pelo professor para ilustrar e clarear noções matemáticas que estão sendo apreendidas pelos alunos, principalmente, fornecendo esclarecimento quanto às suas *razões* e, desta forma, permitindo uma leitura mais crítica sobre o tema que está sendo estudado. Paralelamente, ao estabelecermos relações entre 'conceitos' e sua história, estamos ampliando o valor formativo destes conceitos na medida em que se tornam revestidos de significado cultural, sociológico e antropológico.

Apesar de não almejarmos construções geométricas tão sofisticadas como as que aqui apresentamos, é importante que estejam sempre presentes no trabalho escolar as possíveis articulações entre álgebra/geometria no estudo dos diversos tópicos de conteúdo que propiciam esta relação. As expressões algébricas podem ter representações geométricas e, se assim forem trabalhadas desde o início do aprendizado dos alunos, sem dúvida que o ensino da equação do 2° grau terá sua compreensão bastante facilitada. Ao propormos uma metodologia que integra vários contextos, reiteramos a nossa certeza de que saber matemática exige, entre outras habilidades, a capacidade de inter-relacionar conhecimentos em um mesmo contexto e gerar significados diversos para um determinado conhecimento, transitando por contextos diversos.

Algumas ideias …

Proponha um problema geométrico qualquer que possa ser traduzido em linguagem matemática pela equação $2x^2 = 18$ e depois resolva-o.

Dê uma interpretação geométrica para a equação $x^2 + 3x = 180$. Desenhe o que falou.

A figura 3 mostra um corredor rectangular e duas salas quadradas. Temos uma área total de 70m^2. Qual é o valor de L sabendo que é um número inteiro?

Nota

1 Henry Rhind foi um cidadão escocês que comprou o papiro que levou seu nome numa cidade às margens do rio Nilo.

Referências bibliográficas

Boyer, Carl B. *História da matemática.* São Paulo, Edgard Blücher, 1974. Traduzido para o português por Elza F. Gomide. Tradução de: A History of Mathematics.

Eves, Howard. *Introdução à história da matemática.* Campinas, SP, editora da Unicamp, 1995. Traduzido para o português por Hygino H. Domingues. Tradução de: An introduction to the history of mathematics.

Oliveira, Ana Teresa de C. C. *A Relação álgebra/geometria no estudo da equação do 2° grau.* Dissertação de mestrado. PUC-RJ, dez. 1997.

Van Der Waerden, B. L. "Three muslimic authors". In: ___. *A history of algebra*, p. 1–13, Alemanha, Springer–Verlag, 1985.

Ana Teresa Oliveira
Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro

Lei de Bases de Educação: Afinal avançamos ou recuamos?

O Conselho Nacional de Educação (CNE) emitiu um parecer pertinente sobre a proposta da Lei de Bases da Educação. Daí, termos seleccionado este artigo, que é mais um alerta para a necessidade de uma leitura crítica da proposta de Lei de Bases. Esta deve conter um conjunto de grandes opções e ideias que projectem o futuro e mobilizem a sociedade. A que é actualmente proposta contém algumas mudanças, como o alargamento da escolaridade obrigatória para 12 anos, mas é insuficiente noutras, como a de não integrar uma efectiva articulação entre políticas e estruturas de Educação e Formação Profissional. Diríamos mesmo que pode apresentar uma regressão nalgumas áreas, como na reestruturação dos ciclos de estudo e na educação pré-escolar.

Será que ainda não é desta que a Educação pré-escolar passa a ser obrigatória, o que contraria todos os anteriores pareceres do CNE e a orientação da Lei Quadro da Educação Pré Escolar, aprovada por unanimidade na Assembleia da República em 1997, que contempla o dever do Estado de criar uma rede pública de Educação Pré- Escolar e a sua gratuitidade? Deixar a responsabilidade desta educação apenas aos pais não vai acentuar as diferenças sociais e culturais, tendo em conta as dificuldades económicas de muitas famílias? Apesar de em Portugal se ter verificado que a taxa de participação nos jardins de infância passou de 18% para 73% nas duas últimas décadas (relatório "indicadores- chave da Educação na Europa", 2002), nem sempre as crianças, segundo o mesmo relatório, completam este ciclo antes de entrarem para o ensino básico.

A reestruturação dos ciclos de estudo, com o ensino básico e secundário a terem, cada um, uma duração de seis anos, é questionada no parecer do CNE e também não nos parece ser pacífica. Há muito se tem questionado a existência de um ciclo de estudos com apenas dois anos, o actual 2° ciclo, estrutura pouco usual no sistema educativo Europeu. A grande vantagem da criação de um ciclo de seis anos não seria a adopção de uma lógica multidisciplinar contrariando a lógica vigente no actual 2° ciclo? No entanto, na proposta de Lei de Bases do governo, artigo 13°, verifica-se a manutenção da divisão em dois ciclos, sendo que no 2° ciclo a organização preconizada é idêntica à actualmente existente.

Por outro lado, nesta proposta de divisão da escolaridade obrigatória em ensino básico e secundário, o actual 3° ciclo deixa de pertencer à Educação Básica. E propõe-se esta alteração com base em quê? Em que estudos? A consideração do ensino básico de 9 anos, em vez de 6, implicou uma reestruturação a nível de escolas e de equipamentos com a criação de escolas EB 2/3 e ainda a criação das escolas básicas integradas, possibilitando que os alunos façam todo o percurso do ensino básico na mesma escola. Como é que se põe em causa uma revisão curricular do ensino básico que se iniciou no ano lectivo 2000/ 2001, após uma fase de experimentação, e que está em fase de implementação sendo, por isso, prematura a sua avaliação? E que custos a nível de recursos e instalações?

No Expresso de 24 de Janeiro, a propósito do investimento alemão em Portugal questionava-se o facto de não ser possível reconhecer oficialmente diplomas obtidos em cursos de formação nas empresas e esperava-se que a nova Lei de Bases contemplasse essas questões. Estas e outras esperanças, como a habilitação da maioria da população com a escolaridade obrigatória de 12 anos, ou a efectiva descentralização do sistema educativo, não poderão ser goradas se a Lei de Bases da Educação não corresponder a estas exigências?

Conselho Nacional de Educação defende educação pré-escolar obrigatória

O parecer sobre as cinco propostas em discussão para uma nova lei de bases é votado hoje

ISABEL LEIRIA

Depois de vários acertos, o parecer final do Conselho Nacional de Educação (CNE) sobre a proposta de Lei de Bases da Educação do Governo e dos quatro projectos apresentados pelos partidos da oposição é hoje votado pelos mais de 60 conselheiros que o constituem.

Há matérias que continuam a dividir o CNE, mas há bastantes outras que não levantam dúvidas aos conselheiros e que, antes pelo contrário, são

"É necessário garantir que todas crianças dos 3 aos 6 anos tenham a oportunidade de uma educação em grupo e em ambientes estimulantes

ninos de quatro enquanto os restantes as em o pré-escolar como f ultativo.

O CNE entende que a regra deveria ser precisamente a contrária: "É necessário garantir

O que o CNE contesta, em relação à proposta do Governo, é a designação "Lei de Bases da Educação", considerando-a "reducionista" por não integrar "todos os processos de formação e aprendizagem ao longo da vida".

sidade de reforçar as medidas de combate ao abandono. Até porque, lembra, o CNE, a actual escolaridade obrigatória de nove anos continua a ser marcada por elevadas taxas de insucesso.

De igual forma, entende-se como fundamental que o novo diploma preveja a existência de percursos formativos diferentes, uns mais orientados para o prosseguimento de estudos, outros para a inserção na vida activa, que respondam às características dos alunos e do mercado de trabalho. No entanto, o CNE rejeita liminarmente que essas escolhas se façam precocemente, se associem à origem sócio-cultural dos alunos e sejam, nesse sentido, "fonte de discriminação".

A questão torna-se ainda mais premente quando a proposta do Governo determina uma restruturação dos ciclos de estudo, com o ensino básico (do 1.° ao 6.° ano) e o secundário (do 7.° ao 12.° ano) a terem cada um a duração de seis anos.

O ministro da Educação já garantiu que não irá ser pedi- que façam aos go no 7° ano. uestão não é selheiros que alteração da de estudos, e o ensino en- os deve ainda vo a aquisição de competências gerais e, como tal, deve continuar a ser considerado como básico.

Em relação ao ensino superior, e ainda que a posição assumida deva merecer a contestação do representante tos politécnicos, o o Governo e sus- s doutoramentos se izar exclusivamente sidades, dada a "li- s recursos [...] para de uma investiga- ca de qualidade". Já ita aos mestrados, corda com a sua técnicos.

NE contesta, em re- oposta do Governo, é a designação "Lei de Bases da Educação", considerando-a "reducionista" por não integrar "todos os processos de formação e aprendizagem ao longo da vida". O conselho preferia uma concepção que assentasse na "articulação efectiva entre políticas e estruturas de educação formação profissional. ■

In Público, 15 de Janeiro de 2004.

Apesar dos caminhos da educação não serem lineares (dentro do próprio CNE as questões do Ensino Superior não são pacíficas, por exemplo) vale a pena a discussão das ideias duma lei que vai gerir a educação nos próximos anos.

Isabel Rocha e Manuela Pires

Estatuto Editorial da *Educação e Matemática*

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático.

A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ...

A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redactorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de recepção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da *Educação e Matemática*

Quota 2004

No ano de 2004 o valor da quota é de €43,70 para professores, €31,00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,70 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ____________________ Sócio nº: ________

Morada: ____________________

Código Postal: ____________ Distrito: ____________

Telefone: ____________ Email: ____________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: ____________

Nº do B.I. ____________ Arquivo: ____________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: ____________ Nível de ensino: ____________

Categoria profissional: ____________

Escola: ____________________

Morada: ____________________

Telefone: ____________ Email: ____________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA **MasterCard** ☐ MasterCard

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ____________
____________ Data ___/___/___

Assinatura ____________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a)	€10,30
☐ Sócio(a) residente no estrangeiro	€12,80

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: apm@netcabo.pt

Índice