Educação e Matemática

Nº 75

Novembro/Dezembro de 2003

Periodicidade: 5 números por ano

Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Dossier do 1º Ciclo

Este número dedica várias páginas ao 1º Ciclo. Para além de um artigo de Joana Brocardo, Lurdes Serrazina e Jean-Marie Kraemer, intitulado *Algoritmo e sentido do número*, publicam-se os textos *Multiplicação e divisão: conceitos em construção...* de Alice Carvalho e Henriqueta Gonçalves, *Projectos de Matemática* de Hélia Sousa e *Investigar para aprender Matemática* de Helena Amaral.

Este conjunto de artigos, assinalados com , e as duas tarefas para os alunos incluídas na secção de *Materiais para a aula de Matemática* constituem as actas do *VI Encontro Nacional de Professores do 1º Ciclo — A Matemática no 1º Ciclo* que se realizou em Faro, em Abril de 2003.

A publicação das Actas neste número da revista *Educação e Matemática* justifica-se pelo facto de assim ser possível chegar a um maior número de leitores do que aqueles que estiveram presentes no referido encontro.

Sobre a capa

A capa deste número é inspirada numa polémica recente, (discutida neste número da *Educação e Matemática*) envolvendo a utilização de máquinas de calcular na aula de matemática. De facto, recentes disposições ordenam o aprisionamento da tecnologia, como *medida de sanidade pública*. Infelizmente, outra gravíssima enfermidade que torna os decisores ignorantes relativamente ao objecto das suas decisões, permanece incurável, ganhando cada vez mais as características de uma epidemia.

Neste número também colaboraram

Ana M. Boavida, António Guerreiro, Eduardo Dinis, GT Internet e Projecto IA, Hélia Sousa, Henrique M. Guimarães, Henriqueta Gonçalves, Jaime Carvalho e Silva, Jean-Marie Kraemer, João P. Ponte, Jorge Pinto, Leonor Santos, Lurdes Serrazina, Margarida Abreu, M. Eugénia de Jesus, Paulo Ferreira.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Dezembro de 2003.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 75
Novembro/
Dezembro
de 2003

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Joana Brocardo
Subdirectora
Adelina Precatado
Redacção
Alice Carvalho
Ana Paula Canavarro
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2580–250 Torres Vedras

N.º de Registo: 112807
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Reforma? Não, obrigado!

Rui Canário

Com a apresentação de uma proposta de Lei de Bases da Educação, o governo promete-nos uma "profunda reforma estrutural da educação em Portugal" que seria herdeira e continuadora da reforma conduzida por Roberto Carneiro, iniciada em 1986. Para quem guarda a memória do fiasco em que se traduziu essa tentativa reformadora, esta promessa não pode deixar de soar mais como uma ameaça. Como se costuma dizer, gato escaldado de água fria tem medo. A Reforma Educativa, que se *arrastou* entre 1986 e os meados dos anos 90, confirmou, em Portugal, a asserção, largamente evidenciada por todo o mundo, de que não são as reformas que mudam as escolas, mas sim as escolas que mudam as reformas. Os principais mentores e concretizadores da Reforma rapidamente perceberam e reconheceram os limites de uma metodologia de mudança, construída de cima para baixo e baseada na coerção legal. O termo reforma passou a ser evitado e criticado. A partir de 1995, a reforma *sumiu-se* e o Pacto Educativo cumpriu a função de ajudar a esquecê-la.

Hoje, pelos vistos, a Reforma está de regresso, com evidente falta de oportunidade e de pertinência. Se, já em 1986, o mito da Reforma era "um erro político crasso" (como reconheceu Roberto Carneiro), repetir agora esse erro seria incorrer num anacronismo que nada contribuirá para resolver o nosso mais importante problema: melhorar o desempenho das escolas. Para o conseguir, só há um caminho sério que é o de apostar na autonomia dos estabelecimentos de ensino, com uma tripla finalidade: reforçar a profissionalidade docente; fazer de cada escola uma organização capaz de aprender com a experiência; construir uma estratégia indutiva de mudança, apoiada nos bons exemplos que existem no terreno. Se temos razões para encarar com cepticismo o anúncio de uma *nova reforma*, esse cepticismo reforça-se quando nos confrontamos com a política seguida pela actual equipa ministerial e que a proposta de Lei de Bases pretende consagrar.

Uma política que contraria a autonomia e reforça o centralismo: até agora não foi dado um único passo para concretizar contratos de autonomia com as escolas, previstos na lei, mas avançou-se num processo burocrático e centralista de promover agrupamentos à força. Uma política que combina os inconvenientes da nossa tradição centralista e estatal com a inspiração em valores de competição e emulação, próprios do mercado: foi suspenso um programa de avaliação das escolas, mediática e politicamente substituído pela publicação de *rankings*, sem que às escolas com resultados menos bons seja facultado (como foi prometido) qualquer apoio. Uma política que, liquidando, sem glória nem proveito, qualquer política de incentivo à inovação (encerramento do IIE, fim de programas de apoio financeiro e pedagógico a iniciativas das escolas), se priva de aproveitar o capital de inteligência de que as escolas e os professores são depositários. Uma política em que as preocupações retóricas com a qualidade da formação dos professores coexistem, quer com o marasmo e a indefinição em que continuam a viver os Centros de Formação de Associações de Escolas, quer com a tomada de decisões inconsequentes, como é o caso da suspensão do processo de acreditação dos cursos de formação inicial, desperdiçando-se (uma vez mais sem glória nem proveito) recursos, conhecimento e trabalho.

Não se põe em dúvida que, a concretizar-se, a *profunda reforma* que nos prometem terá consequências para o nosso futuro. O problema reside em saber se é desejável o futuro que nos anunciam.

Rui Canário
FPCE da Universidade de Lisboa

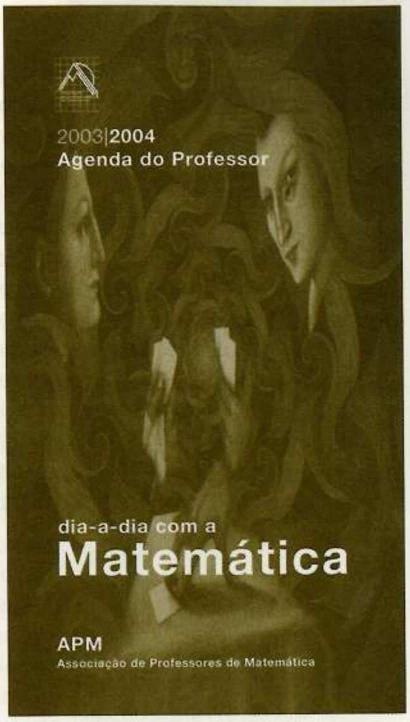
APM
Publicações

Agenda do Professor 2003/2004

Dia a dia com a Matemática

156 pp. APM, 2003

Sócio: €4,00
PVP: €5,60



Como já é habitual, a agenda do professor da APM acompanha-nos durante todo o ano com planos semanais e diários e apontamentos úteis para professores. Para além disso, este ano reúne um conjunto de jogos que, em cada mês, apresentam uma determinada temática: jogos numérico, geométricos, solitários, de papel e lápis, etc ... Aliás, 2004 é o ano temático *Matemática e o Jogo*, coordenado pelos Núcleos Regionais de Viseu e do Porto, que contribuíram para a recolha e organização dos jogos para esta agenda.

Organiza melhor o teu tempo, diverte-te e joga com os teus alunos, tendo por base a *Agenda do Professor da APM* que, para além disto tudo, apresenta um aspecto gráfico bastante apelativo e cuidado.

Para mim a Matemática é ...

144 pp. APM e ESE Bragança, 2003

Sócio: €6,00
PVP: €8,40

Esta edição apresenta uma colectânea de textos sobre a matemática na escola recolhidos ao longo dos anos de 2000 e 2001. Os autores dos textos são pessoas do distrito de Bragança, incluindo alunos, educadores e professores, das mais diversas idades, percursos escolares, tipos de escolas e áreas disciplinares (línguas, ciências sociais, ciências da natureza, educação física, educação musical e plástica), que se exprimem em prosa, poesia, ilustração e fotografia.

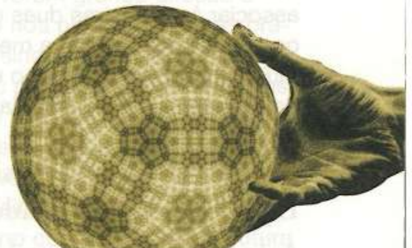
A edição deste livro é um contributo para que se tenha uma melhor visão social da matemática e resulta da parceria entre a APM (através do seu Núcleo Regional de Bragança) e da Escola Superior de Educação de Bragança.

Pontos críticos no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas dicotomias

Henrique Manuel Guimarães

"Uma crise só se torna desastrosa quando lhe pretendemos responder com ideias feitas, quer dizer, com preconceitos. Atitude que não apenas agudiza a crise como faz perder a experiência da realidade e a oportunidade de reflexão que a crise proporciona."

Hannah Arendt [1]



Usando o raciocínio dicotómico, que "nos obriga a pensar para fora na busca de outros entendimentos", este artigo fala-nos de alguns pontos críticos do ensino-aprendizagem da Matemática, abrindo caminhos para muitos outros.

Há em relação à educação, à Escola e ao ensino, e, portanto, também relativamente no ensino da Matemática, o sentimento de que vivemos uma situação de crise. Temos a percepção da complexidade dessa situação e das dificuldades que encerra, e apercebemo-nos de múltiplos dissentimentos e aspectos conflituantes, a vários níveis e de natureza variada, na situação que vivemos. Temos ainda a consciência da necessidade (e urgência) de escolhas, de decisões — também a vários níveis e em diversas vertentes — e, simultaneamente, do pouco esclarecimento que persiste a propósito das muitas questões e problemas que motivam, obrigam a essas escolhas e decisões. Há, por fim, o sentimento de que é de uma pluralidade de crises de que se trata, crise reflexo de crises, crise induzindo crises que coexistem em mútua influência, situação crítica que, sabemos bem, não é de hoje nem de ontem.

Podemos considerar pontos críticos no ensino e aprendizagem da Matemática os pontos em que, nesse ensino e aprendizagem, essa crise mais se evidencia. Os pontos em que se manifestam conflitos, dissenções ou controvérsia, porventura por traduzirem ou serem indício da complexidade da situação e das dificuldades que encerra. Mas também, e por isso mesmo, os pontos que a crítica deve privilegiar e, portanto, mais merecedores de atenção, análise e apreciação, num esforço para um maior esclarecimento e melhor compreensão da situação actual do ensino da Matemática e procura de alternativas e caminhos para a sua melhoria.

Consubstanciando uma aspiração que já não era recente, a lei de bases de 1986 consagrou uma escolaridade básica universal, obrigatória, gratuita que estendia até aos nove anos, visando, como era estipulado no primeiro objectivo para ensino básico, "assegurar uma formação geral comum a todos os portugueses ...". Tratava-se, simultaneamente, de uma aspiração e uma exigência social, ou uma aspiração que se tornou uma exigência (e necessidade) da sociedade. Podemos, é claro, interrogarmo-nos, em que medida ela é já uma realidade. Se a taxa de abandono é considerada inexistente no 1° ciclo, ela tem ainda alguma expressão nos restantes ciclos, particularmente no 3° onde se situa entre 5 e 7% (no 2° ciclo a taxa de abandono está entre 2-3%) e todos os anos, segundo uma notícia recente, cerca de 40 mil alunos saem da escola sem a escolaridade obrigatória[2].

Naturalmente, à consagração de um ensino para todos, corresponde a necessidade de uma Matemática para todos, ou, se quisermos, a necessidade de um ensino da Matemática para todos, o que, passe a auto-citação, considerei numa intervenção em 1990 como um dos grandes desafios com que os professores se iriam defrontar nas décadas que se avizinhavam[3]. A este desafio correspondiam problemas e dificuldades que ainda persistem e a que podemos associar às primeiras duas dicotomias que pretendo abordar, a meu ver muito presentes no ensino em geral e da Matemática em particular.

Massificação — Diversificação Equidade — Qualidade

Após o 25 de Abril, como é sabido, houve um enorme crescimento da população escolar. Entre 1970 e 1994, no 3° ciclo, por exemplo, o número de alunos matriculados duplicou, e no mesmo período esse número aumentou doze vezes no ensino secundário[4]. Em finais dos anos 90, excluindo o 1° ciclo, cuja população tem vindo a diminuir acentuadamente nas últimas décadas essencialmente devido à evolução demográfica, estavam matriculados cerca de um milhão de alunos no ensino regular diurno[5], o que representa mais 600 mil que trinta anos antes e mais 300 mil do que há vinte anos[6].

A escolaridade obrigatória hoje abrange mais alunos e dura mais tempo — começa mais cedo e acaba mais tarde — e isto é inegavelmente um bem. Este incremento quantitativo da escolaridade, em temos de frequência escolar e permanência na Escola, todavia, trouxe com ele uma modificação profunda na composição da população de crianças e jovens que actualmente a frequentam. O professor hoje confronta-se com alunos muito heterogéneos: do ponto de vista social, económico e cultural, do ponto de vista dos seus interesses e motivações, do ponto de vista das suas expectativas pessoais no que diz respeito aos percursos de vida de cada um, e mais. Trata-se, de facto, de uma situação que é verdadeiramente nova em relação à qual a Escola está ainda a adaptar-se. No ensino, no nosso caso, da Matemática, os professores vivem quotidianamente essa experiência, têm a consciência vívida da diversidade que os interpela e estão, estamos todos, a aprender como lidar com a heterogeneidade que penetrou a Escola. Este é, acredito, um desafio e um problema, uma dificuldade real para o sistema educativo, para as escolas e para o professor que, a meu ver, tende a intensificar-se (basta pensarmos no enorme incremento da população imigrada, agora também dos países de Leste) e a generalizar-se, às várias escolas, às várias zonas do país. Um ponto crítico, portanto, também no ensino e aprendizagem da Matemática que, numa pergunta, se poderá formular do seguinte modo: *numa escola de massas, como integrar positivamente a diversidade*?

Coloca-se a este respeito um outro problema, certamente com relações com o que acabei de expor, que é o problema do sucesso dos alunos em Matemática e, correlactamente, da qualidade do seu ensino. No relatório do projecto Matemática 2001 da Associação de Professores de Matemática[7] consta (dados de 1996/97) que cerca de 40% dos alunos do 9° ano das escolas da zona da grande Lisboa não atingem o nível três, e, acrescento, trata-se de uma zona onde outros estudos indicam que se localiza a população escolar tendencialmente com maior sucesso. Na verdade, o sucesso em Matemática dos alunos tem sido questionado, questionamento que não é de agora mas que hoje tem sido motivado, internamente pelos resultados dos alunos nas provas aferidas e nos exames nacionais, e, externamente, por estudos internacionais como o TIMSS e, mais recentemente, o PISA, que apresentam Portugal com resultados significativamente inferiores à grande maioria dos países europeus[8].

Assume-se hoje que o ensino é para todos, ou seja, que vale o princípio da equidade, o princípio de que todas as crianças e jovens devem ter oportunidade de estudar, no caso que nos interessa, Matemática. Refiro-me, naturalmente, à escolaridade básica que é obrigatória, sem esquecer, no entanto, que tem ainda algum peso, como vimos, a taxa de abandono neste nível de escolaridade, sobretudo nos anos mais avançados como atrás referi (no ensino secundário a situação é bem mais grave[9]). Mas a equidade no ensino — para não ser um mero contra-senso ou hipocrisia que pode mesmo questionar o sentido e alcance dessa equidade — obriga, a meu ver, a aceitar que, ao nível da escolaridade básica, todos os alunos são capazes de aprender Matemática, ou seja, podem ter sucesso na disciplina, ainda que o sucesso, possa não ser o mesmo em todos os casos. Nem todos aprenderão o mesmo e da mesma maneira, uns, consegui-lo-ão com mais facilidade do que outros, ou com mais gosto, ou progredindo mais depressa e conseguindo ir mais longe. Mas importa que a Matemática ensinada seja Matemática genuína, relevante e significativa, de acordo, naturalmente, com o nível de escolaridade a que se dirige. Nesta perspectiva, a equidade obriga a qualidade, da Matemática que se ensina, do ensino da Matemática. *Compatibilizar equidade e qualidade* constituirá certamente um outro ponto crítico no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Se a 'Escola está doente' e se há crise no ensino é importante reconhecer elementos de mudança positiva na evolução recente do sistema educativo, na Escola e no próprio ensino. Hoje, a escolaridade obrigatória de nove anos, com os problemas e insuficiências que mencionei, é um dado adquirido. O número de escolas cresceu muito e, em muitos casos, melhoraram as suas condições, sobretudo no que diz respeito ao seu apetrechamento e, em particular, no que se refere aos meios informáticos e computacionais. Importa todavia dizer que, a este respeito, a situação nas escolas portuguesas está ainda longe de poder ser equiparada com a dos países europeus[10]. Em muitas delas persistem problemas e carências materiais e humanas, bem como dificuldades de organização e dinamização internas, e ao nível das relações com outras escolas, a comunidade, e as estruturas educativas centrais.

Em relação aos professores, o problema de hoje não é de quantidade, e, neste âmbito, se soluções imediatistas poderão resolver(?) problemas perto da vista, deixam outros por solucionar e, por vezes, dão origem a mais. Será disto exemplo, quando o problema era de carência, a introdução de professores no sistema de forma pouco criteriosa e sem que muitos deles tivessem tido enquadramento e apoio suficiente para as funções que iam desempenhar. Se porventura agora o problema é de excesso de professores e a opção for a mais expedita — a extinção de cursos de formação, sem que se venha a acautelar o futuro com planeamento orientado e sustentado, e sobretudo com medidas que melhorem o bem estar profissional dos professores, valorizem a profissão docente e a tornem uma profissão atractiva — é bem possível que venhamos a sofrer, num prazo não tão longo quanto isso, o que vários países actualmente já sofrem: uma grande dificuldade para captar jovens que queiram ensinar nas escolas básicas e secundárias.

Por fim, os programas de Matemática. O movimento de renovação curricular dos anos oitenta culminou com a elaboração dos novos programas de 1991 que procuraram integrar as orientações curriculares que então se consideravam importantes para o ensino da Matemática, com alguns problemas de consistência e de articulação, e nem sempre com a mesma profundidade, como na época foi feito notar, muito em especial no que se destinava ao ensino secundário. O programa deste nível de ensino veio a ser ajustado e o que hoje está em vigor difere substancialmente do de 1991 e procura corresponder as referidas orientações curriculares. Penso que podemos dizer que temos hoje melhores programas sobretudo porque, de um modo geral, constituem um quadro programático que permite um tipo de trabalho matemático com os alunos que antes não era possível ou deparava com muitas dificuldades[11].

Os actuais programas realizaram na verdade um corte profundo com os que anteriormente vigoravam, quer em termos da sua forma e organização, quer em termos da sua substância. Entre outras coisas, e para o que agora interessa, introduziram um outro conceito de conteúdo de ensino que engloba, para usar os termos dos próprios programas, "conhecimentos", "capacidades/aptidões", e "atitudes/valores". Para além disso, e pela primeira vez em programas de Matemática — pelo menos com o detalhe e desenvolvimento com que foi feito — apresentam orientações metodológicas, quer de nível geral, quer de nível específico, por exemplo, no âmbito da definição de tarefas de aprendizagem e de formas de organização e de trabalho com os alunos. Estas alterações e a análise que faço da sua concretização nas escolas, conduzem-me a uma outra dicotomia.

Conteúdos de ensino — Metodologias de ensino

As alterações introduzidas pelos 'novos' programas e, muito em particular, o que era proposto ao nível das orientações metodológicas, muitas delas 'novas', tendo em conta a prática de ensino mais comum, tornaram manifesta uma tensão que a dicotomia enunciada pretende traduzir, e de que é indício a dificuldade que muitos professores diziam ter em 'cumprir' o programa com o novo entendimento, ou seja, em leccionar os conteúdos procurando seguir a metodogias sugeridas. Recordo que era corrente ouvir-se nas escolas, e houve estudos que o confirmaram, que com as metodologias propostas (abordagens intuitivas, utilização de materiais e tecnologias, utilização da resolução de problemas e das aplicações da Matemática, trabalho de grupo) era impossível ou difícil cumprir os conteúdos programáticos.

Nos anos sessenta, a chamada reforma da Matemática Moderna, recordo, pretendeu mudar os conteúdos dos programas mas, e embora nem sempre a isso seja dada a devida relevância, pretendeu também mudar os métodos de ensino. Na verdade, foi explicitamente considerado que na reforma dos programas deveria existir "uma revisão dos conteúdos e dos métodos de ensino"[12] da disciplina, tendo sido feitas pelos promotores da reforma recomendações nesse sentido, sendo exemplo, a valorização da abordagem intuitiva, a importância dada à compreensão face à mecanização, a ênfase na aprendizagem por descoberta. José Sebastião e Silva, em Portugal, diria também que "a modernização do ensino da Matemática terá que ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino"[13] e deu ele próprio corpo de letra a esta ideia, nomeadamente, nos seus célebres "Guias" para a utilização dos compêndios de Matemática ricos em considerações e sugestões de carácter metodológico, quer de âmbito geral, quer também de carácter específico.

Se as principais modificações no conteúdo e organização curricular propostas no âmbito da Matemática Moderna tiveram grande difusão e penetração nos programas e nas práticas de ensino, o mesmo não aconteceu com as propostas metodológicas que, de um modo geral, não vingaram nas escolas ou tiveram uma persistência muito reduzida. Há autores que, a este propósito, consideram que "as mudanças no conteúdo e na estrutura das disciplinas tendem a durar mais do que as mudanças nos estilos ou abordagem de ensino"[14], ou seja, podemos dizer, nas metodologias. Também em Portugal, as alterações ao nível metodológico que os programas de 1991 preconizavam não foram completamente apropriadas pelos professores e, pelos menos algumas delas, têm ainda uma penetração relativamente reduzida na sua prática de ensino[15]. Os dados do projecto Matemática 2001[16] de algum modo dão suporte a esta possibilidade, pois sugerem que a prática mais habitual nas aulas pode ser traduzida pelo binómio exposição realizada pelo professor — exercícios realizados pelos alunos, e que, em muitos aspectos, as orientações metodológicas dos programas (por exemplo, as que remetem para utilização situações de aprendizagem em Matemática envolvendo a relação com a realidade, actividades de exploração, utilização de materiais, computadores, e trabalho de grupo) têm ainda pouca expressão no trabalho com os alunos.

Um determinado método de ensino pode ser mais favorável do que outro para determinadas aprendizagens, matemáticas ou de outra natureza, que se pretendam promover no aluno. Isto, todavia, nem sempre é óbvio e claro e, para além disso, sabemos bem que o método não é por si só garantia dessas aprendizagens, sobretudo quando é identificado com os aspectos mais concretos e técnicos do ensino.

Por outro lado, as escolhas metodológicas do professor estão muito relacionadas com as suas concepções relativas à Matemática — por exemplo, sobre a sua natureza e valor, sobre a forma como se produz e desenvolve o conhecimento matemático — mas também relativas ao seu o ensino e aprendizagem — sobre que devem estes incidir? com que finalidades?. Estas são algumas razões por que, em meu entender, eventuais mudanças metodológicas, por um lado, são susceptíveis de serem relativizadas com alguma facilidade e, por outro, caso choquem com as concepções mais profundamente enraizadas no professor, são dificilmente adoptadas. *A apropriação generalizada de 'novas' orientações curriculares e a sua concretização na acção lectiva*, em particular, as de carácter metodológico, são processos difíceis e demorados e constituem certamente um outro ponto crítico no ensino, nomeadamente da Matemática.

Conteúdos matemáticos — Processos matemáticos

Esta outra dicotomia diz respeito apenas à Matemática e à ênfase que merecem aos seus diversos aspectos no ensino e aprendizagem. O primeiro pólo da dicotomia refere-se aos temas ou tópicos matemáticos, mais amplos ou mais restritos — Geometria ou propriedades dos triângulos, Funções ou proporcionalidade directa, Estatística ou noção de frequência absoluta e relativa, Números ou máximo divisor comum. O segundo pólo refere-se, por exemplo, a processos de raciocínio matemático — que incluem as diversas formas do raciocínio demonstrativo mas também o raciocínio conjectural ou plausível — a processos de representação e comunicação matemáticas, de resolução de problemas, de matematização interna ou externa.

Conteúdos e processos fazem parte da Matemática e, como tal, são (devem ser) objecto de ensino, conteúdos de ensino. Uns e outros estão íntima e profundamente interligados. Promover o conhecimento e compreensão dos números ou das funções, por exemplo, obriga certamente a convocação e utilização de processos de representação, de raciocínio matemático, de comunicação. Resolver um problema, argumentar matematicamente ou demonstrar uma conjectura exigem a compreensão e utilização de ideias, conceitos, técnicas matemáticas. Em termos do que se espera dos alunos esta dicotomia é, em muitos aspectos, equivalente à dicotomia (Aquisição de) conhecimentos — (Desenvolvimento de) capacidades e, com ela, pretendo exprimir o sentimento de que no ensino da Matemática existe e persiste, senão uma oposição, pelo menos uma tensão entre os dois pólos que a constituem. *Integrar equilibradamente conteúdos e processos (conhecimentos e capacidades)* é ainda uma dificuldade, um outro ponto crítico, se quiserem, no ensino da Matemática.

Outras dicotomias como, por exemplo, Cálculo — Conceitos, Compreensão— Mecanização/memorização, Intuição — Rigor, Autonomia — Controlo, exprimem, como as anteriores, tensões persistentes no ensino e aprendizagem da Matemática, e poderiam também ser convocadas para pensar sobre os pontos críticos nesse ensino e aprendizagem. Com a enumeração de todas elas não pretendo exaustividade ou sistematização e são apresentadas esperando que façam sentido e, sobretudo, que tenham algum poder de interpelação. O raciocínio dicotómico que adoptei pode ser visto como vicioso no que as dicotomias têm de eventualmente redutor e de centrípeto, obrigando a pensar 'para dentro', no interior dessas dicotomias. Mas, acredito, têm também carácter virtuoso na medida em que a oposição ou tensão que exprimem faz ressaltar o seu lado dinâmico e centrífugo e obrigam a pensar 'para fora' na busca de outros entendimentos e possibilidades.

Notas

1 Arendt, H. (2000, p. 23). A crise da educação, *Quatro textos excêntricos* (trad. O. Pombo). (pp. 21–53). Lisboa: Relógio d' água.

2 In Público, 15.10.2002.

3 Guimarães, H. M. (1990). Nova década, novos desafios. In P. Abrantes e A. Silva (org.) *Actas do VI ProfMat* (vol. I), pp. 23–36. Lisboa: APM

4 Barreto, A. e Preto, C. V. (1996). Indicadores da evolução social. In A. Barreto (org.) *A situação em Portugal, 1960-1995*, pp. 61–162. Lisboa: ICS.

5 APM (1998). *Matemática 2001 (relatório final)*. Lisboa: APM.

6 Barreto A. e Preto, C. (1996), o. c..

7 APM (1998), o. c..

8 Um relatório da UNICEF de Novembro de 2002— *A league table of educational disavantage in rich nations* — coloca Portugal em último lugar entre um conjunto de 24 países da OECD numa ordenação construída a partir de dados do TIMSS e do PISA. Esta ordenação diz respeito a alunos de 15 anos e foi elaborada recorrendo a "cinco medidas" correspondendo às percentagens desses alunos com pontuações inferiores aos limites fixados por esses estudos em: "literacia na leitura", "literacia em Matemática e Ciências" no PISA 2000 e no TIMSS 1999 (www.unicef-icdc.org).

9 A percentagem da população portuguesa entre os 18 e 24 anos apenas com a escolaridade básica é de cerca de 45%, o que nos coloca no último lugar entre os países da Europa (a média europeia é de cerca de 20%) (in *Education attainment levels in 1999s — some key figures, Laurent Freyssson, http://europa:eu.int/comm/eurostat*). Para além disso, apenas cerca de 20% dos portugueses entre 25 e 64 anos completam o ensino secundário, o que faz com que Portugal apareça igualmente na última posição, desta vez entre os países da OECD (média 64%, dados também de 2001) (in *Education at a glance 2002*, www.oecd.org).

10 O acesso a computadores dos estudantes portugueses com 15 anos é bem menor que o da média europeia — um computador para 13 alunos, face a um computador para 36 alunos em Portugal, em valores da mediana (in *Education at a glance 2002*, www.oecd.org).

11 Graças, por exemplo, à reorganização de que a geometria foi objecto e à importância que lhe foi dada, assim como à estatística, e também à ênfase dada às abordagens intuitivas e à contextualização das tarefas matemáticas, ao relevo dado à integração da tecnologia e das conexões matemáticas, à valorização da aprendizagem em contextos problemáticos e da diversificação de materiais de ensino.

12 OECE (1961, p. 11). *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE.

13 Silva, José Sebastião e, (1964, p. 1). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. (Vol. 1). Lisboa: MEN.

14 Usiskin, Z. (1985, p. 9). We need another revolution in secondary school mathematics. In Hirsh & Zweng (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum*, (pp. 1–21). Reston: NCTM.

15 É o que me leva a considerar que não faz qualquer sentido responsabilizar as 'novas' metodologias pelo insucesso dos alunos em Matemática de que muito se fala.

16 APM (1998), o. c..

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

Actualidades

Comissão quer mais Matemática e menos calculadoras no 1º ciclo

Ministro da Educação divulga propostas do grupo de trabalho constituído para melhorar o ensino da disciplina

ISABEL LEIRIA

Mais de um ano depois
sido formalmente const
a Comissão para a Pro
do Estudo da Matemátic
Ciências terminou o s
meiro relatório de diag
e recomendações. As pro
foram anunciadas onte
ministro da Educação,
Justino, e passam em
parte pelo reforço do en
Matemática logo a parti
ciclo (primeiros quatro an
ensino básico).

Neste nível de escolaridade, os professores devem consagrar pelo menos 90 minutos diários à Matemática (e outros tantos ao Português), começa por sugerir este grupo de trabalho. A definição de um número de horas mínimo torna-se ainda mais importante na medida em que, na actual organização curricular do 1º ciclo, apenas se estabelece o total de tempo lectivo semanal, a distribuir pelos docentes, entre as várias componentes do currículo. "A elevada componente de gestão flexível do currículo tem como resultado uma evidente dispersão dos desempenhos", lê-se nas recomendações.

Em consonância, também no 2º ciclo (5º e 6º anos) deverá haver um "reforço da componente horária" destas matérias, acompanhado de uma "redução do número de disciplinas".

> desaconselha-se a "utilização indiscriminada" da máquina de calcular, dado que "limita a aquisição dos automatismos de cálculo, imprescindíveis à realização em tempo útil das tarefas cognitivas mais complexas", sustenta a comissão.

a Matemática, será o ensino das ciências o centro das atenções

Ainda elação aos primeiros a s da escolaridade, desaconselha-se a "utilização indiscriminada" da máquina de calcular, dado que "limita a aquisição dos automatismos de cálculo, imprescindíveis à realização em tempo útil das tare
ple
A l
cal
ma
dá
da.
der
"su
de co

E se a m e calcular pode per portância, já a tabuada operações aritméticas d em ser revalorizadas. David Justino concorda: "Não há domínio da Matemática se não houver memorização, treino, repetição e rotina".

> David Justino concorda: "Não há domínio da Matemática se não houver memorização, treino, repetição e rotina".

Outra das medidas sugeridas prende-se com o reforço do estudo da geometria no 1º ciclo, como forma de tornar mais simples a aprendizagem dos conceitos mais abstractos da Matemática. A geometria poderá ajudar, por exemplo,

análises parcelares e contributos vários — faz ainda uma série de recomendações de carácter mais global (ver caixa).

Trata-se de alterações que esta comissão – que funciona como órgão consultivo do ministro e é presidida pelo próprio desde a saída pouco pacífica de António Manuel Baptista, que a liderava –, considera poderem ajudar a "eliminar os pontos de tensão que, devido a erros e indefinições, persistem no sistema".

Muitas das sugestões enquadram-se na linha dos princípios defendidos pelo Governo e encontram-se integradas no documento orientador da revisão curricular do secundário ou na proposta de lei de bases da educação, em discussão. Por isso David Justino afirmou ontem que subscreve a "esmagadora maioria" das recomendações.

O próximo passo da comissão será debruçar-se sobre o problema do ensino das ciências, culminando na elaboração de um novo relatório e de propostas destinadas especificamente a esta área. ■

In Público, 22 de Novembro de 2003.

Horizontes estreitos

As orientações para o ensino da Matemática do texto proposto pela Comissão, deixam frustrado qualquer professor de Matemática pelo que traduzem de míngua de objectivos no ensino da disciplina e falta de conhecimentos reais do significado e importância da utilização da calculadora de ensino. Inferir que o uso da calculadora está na base dos problemas que se sentem no domínio da Matemática é esquecer que temos também problemas no ensino e na prática de várias outras disciplinas, na economia, na saúde, na justiça, nas finanças.

Queremos com isto dizer que a posição da Comissão é redutora dos problemas (e), no que respeita à utilização da máquina de calcular na sala de aula, pouco informada e com objectivos demasiado limitados.

Referem-se à utilização indiscriminada da máquina de calcular.

Não é esta a prática dos professores que defendem a sua utilização, mesmo nos níveis mais elementares. Procura-se, sim, utilizar as calculadoras em conjunto com o cálculo mental, a estimação, avaliando a plausibilidade de resultados. Procura-se permitir às crianças a exploração de ideias numéricas e de regularidades, realizar experiências importantes para o desenvolvimento de conceitos, integrar o cálculo num contexto realista de resolução de problemas. As calculadoras habilitam também as crianças a resolver problemas que estariam fora do seu alcance se usassem apenas papel e lápis.

As calculadoras não substituem a necessidade de aprender a tabuada elementar, de calcular mentalmente ou de fazer cálculos razoáveis com papel e lápis. O uso inteligente das calculadoras aumenta a qualidade da aprendizagem.

Defendem a aquisição de automatismos de cálculo para a realização de tarefas cognitivas mais complexas em tempo útil e a necessidade de memorização, treino, repetição e rotina.

Valorizar os automatismos de cálculo e hierarquização da aquisição dos conhecimentos reflecte uma visão ultrapassada e inadequada do que são as competências matemáticas que todas as pessoas devem desenvolver.

A memorização, o treino, a repetição e a rotina, por si só, não promovem o contacto dos alunos com as ideias e os modos fundamentais de pensar da matemática e não são pré-requisito para o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de resolução de problemas. Não garantem que os alunos sejam capazes de utilizar os conhecimentos adquiridos, quando tiverem de enfrentar situações problemáticas simples surgidas num contexto diferente.

A capacidade de raciocinar e de resolver problemas e o conhecimento de procedimentos desenvolvem-se ao mesmo tempo, apoiando-se uns aos outros. A aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento. Não se aprende de uma vez por todas. A aprendizagem é uma questão de estabelecer relações, ver as mesmas coisas de diferentes ângulos ou noutros contextos.

O alargamento e democratização do ensino põe problemas significativos que não se resolvem recorrendo a objectivos mais restritos para o domínio da matemática, assentes na memorização, treino, repetição e rotina nem tão pouco ao regresso de uma cultura de *boas práticas pedagógicas* baseada *na transmissão e respectiva aquisição de conhecimentos*, atribuindo ao aluno um papel de receptor, como ressalta da leitura do resumo do relatório desta comissão.

Esperávamos que os objectivos agora explicitados para o ensino da matemática fossem bem mais ambiciosos e que, após um ano de trabalho, a Comissão tivesse analisado seriamente as diferentes variáveis que integram o problema do insucesso na matemática e, sem saudosismos, defendesse princípios adequados à sua resolução.

Mª José Bóia
Elisa Figueira

Até à Covilhã, não é verdade?

Margarida Abreu

— Boa viagem!!! Lá nos encontraremos na Covilhã !?

Quantos de nós teremos ouvido ou utilizado estas palavras para nos despedirmos?

Para quem esteja mais distante destas andanças, estas (poucas) palavras poderão não ter qualquer significado, no entanto, para mim, elas traduzem a importância de estar presente no ProfMat, o que já é quase um código utilizado entre os *profmáticos* e que de ano para ano se vai repetindo, apenas variando a palavra final, ou seja, o local do encontro. Aliás, começa a ser curioso verificar que, também na escola, os nossos colegas já nem estranham a nossa ausência e quando chegamos perguntam-nos se o *nosso encontro* correu bem.

Mas como se explica a afluência de tantos professores de Matemática a Santarém e a todos os locais onde o ProfMat se tem realizado nestes 19 anos?

Ao olhar mais uma vez para o programa do *ProfMat2003*, quando me sentava para redigir este pequeno texto, não pude deixar de pensar que, apesar das dificuldades acrescidas que acarreta a organização de um encontro com este formato, ele permite uma imensa liberdade de escolha. De facto, cada um de nós tem a possibilidade de traçar e seguir trajectos diferentes de acordo com as nossas necessidades ou interesses, ainda que apostados na melhoria do ensino da matemática.

Surpreendentemente (ou não) parece-me que o ProfMat consegue esclarecer e ilustrar o conceito de flexibilidade enunciado nos princípios da reorganização curricular do Ensino Básico.

Aqui, no espaço de três dias, com o dia de trabalho a iniciar-se às nove e a terminar às dezanove horas (na quadrícula horária, evidentemente), os grupos de professores desfazem-se e refazem-se a *toda a hora*, podendo ou não (re)encontrar-se, apesar de pertencerem a um mesmo ciclo de ensino, ou à mesma escola de onde partiram ou usarem o mesmo transporte que partilham para o hotel onde estão hospedados. Por outro lado, puderam assistir a conferências, comunicações, sessões práticas, painéis, apresentações de projectos, enfim, uma variedade muito grande de modos de apresentar e discutir ideias, o que só por si se torna tão aliciante quanto invulgar.

Talvez por isso, quando regresso à escola sinto a estranha sensação de ter chegado a um outro planeta e necessito de algum tempo para me readaptar ao formato que afinal conheço desde sempre.

Por outro lado, este ProfMat, tal como os anteriores, ofereceu uma diversidade tão grande de sessões que a escolha se tornou sempre difícil, pois não conseguimos estar presentes em todas as que iam de encontro a temas que gostaríamos de aprofundar ou que simplesmente nos despertaram a curiosidade. O certo é que ficamos com a certeza de que não param de fervilhar ideias e experiências que vale a pena apresentar, experimentar e discutir, e que de alguma forma o espírito que aqui se vive nestes dias nos impele a querer participar mais activamente e a querer transportá-lo para o trabalho a desenvolver com os nossos alunos e colegas na escola. Sim, porque nestes dias estão sempre aliados trabalho e diversão, razão e emoção.

Nos primeiros dois dias da semana, no decorrer dos cursos, estive bastante ocupada a tentar encontrar caminhos e respostas às situações que nos foram sendo colocadas pela Irene, Mª João e Mª José e, claro, conhecer algo mais sobre a cidade que nos estava a acolher, nomeadamente no que respeita à gastronomia. E realmente fiquei a saber, no jantar de segunda-feira, que mangusto é afinal uma espécie de miscelânea de batatas, couve e feijão que acompanha postas de bacalhau assado e não um mamífero carnívoro, um pouco maior que um esquilo e um exímio caçador de cobras venenosas, tal como supunha e me lembrava.

Ao longo dos três dias de ProfMat foram também imensos os pensamentos e ensinamentos que elaborámos e retirámos de tudo o que conseguimos assistir e abarcar, sendo por isso mais fácil realçar o bom tempo que nos acompanhou e facilitou a deslocação pela cidade, entre os dois locais onde se realizou o encontro, do que propriamente falar sobre os temas, problemas e desafios que nos foram sendo propostos no decorrer das sessões onde participámos. Aliás, demoro sempre algum tempo a *digerir* o que aqui se passou, pois a *refeição* foi bastante substancial.

Não, de facto não me estava a referir ao jantar do ProfMat, mas, já agora, parece-me oportuno felicitar a comissão organizadora, pelo facto de nos ter possibilitado aquele e muitos outros momentos agradáveis, uma vez que tudo correu muitíssimo bem.

"O recurso à calculadora nos primeiros seis anos da escolaridade conduziu à desvalorização do trabalho, do treino e da memória, sendo um dos factores de insucesso" na disciplina

de Matemática. Esta declaração do Ministro da Educação, noticiada no Expresso de 15 de Novembro, véspera da partida para Santarém marcou o discurso do presidente da APM nas sessões de abertura e de encerramento do ProfMat e terá com certeza algum eco nas reacções que, necessariamente, teremos de manifestar. Aliás, seria aconselhável que a discussão actual sobre *o estado da educação* e a alteração à Lei de Bases do Sistema Educativo se alargasse à participação e envolvimento de todos nós a fim de reflectirmos profundamente sobre as implicações das mudanças que se vêem como necessárias.

E, depois da bonita e dolorosa homenagem aos colegas Raul e Paulo, iniciaram-se os trabalhos, dando voz ao primeiro conferencista que se debruçou sobre o facto de nos situarmos ainda no século XIX e não no XXI (aqui a ordem dos símbolos é importante) no que respeita à forma como se tem vindo a ensinar ciências nas nossas escolas e as implicações que podem advir desta situação. Daí que o desafio que nos tenha colocado se centre na necessidade de alterar drasticamente as práticas de modo a que a escola leve mais jovens a estudar ciências e a enveredar por profissões científicas ou tecnológicas.

Nesta, tal como as outras conferências plenárias apresentaram-nos variações sobre temas que não sendo completamente novos, se revestem de novos significados e importância, indicando outros rumos e ideias a aprofundar. De facto, partindo de factos conhecidos e conceitos já vulgarizados no nosso vocabulário, eles foram sendo (re)equacionados e (re)definidos, pondo em destaque o modo como se despoleta e se dá corpo a ideias e resultados que pretendemos pôr em prática ou alcançar.

Mas, três dias passam num instante e acabam por ser muito pouco tempo para aquilo que gostaríamos de ver e fazer neste ProfMat. Quando desfolhámos o programa e registámos no plano geral as sessões a que gostaríamos de ir, apercebemo-nos logo que não conseguimos assistir a todos os relatos sobre projectos e experiências desenvolvidas com alunos, ou aprofundar um pouco mais os conhecimentos sobre determinado *software* a explorar, ou perceber melhor o que se passa noutros níveis de ensino, ou ouvir os resultados de um projecto de investigação-acção levada a cabo por professores, ou ... um sem fim de desejos e intenções que excedem largamente o número de horas de um dia, pois também queremos aproveitar esta proximidade para discutir pormenores e *adiantar serviço* em projectos que estamos a desenvolver com colegas de outras paragens.

Mas se algumas destas nossas *ausências* se podem resolver através da leitura atenta das actas, o mesmo já não acontece com a visita a algumas das exposições que, apesar de todos os esforços terão de esperar por uma próxima oportunidade.

Enfim, embora a curiosidade não tenha ficado completamente satisfeita, pois muito ficou por ver e fazer, regressa-se a casa já com indicações muito precisas sobre o hotel onde dentro de dias iremos marcar a reserva para estar presente no próximo encontro ...

Até à Covilhã, não é verdade?

Margarida Abreu
Esc. EB 2,3 de Tondela

Algoritmos e sentido do número

Joana Brocardo, Lurdes Serrazina e Jean-Marie Kraemer

Na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante e apela-se mais à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível.

O André tem 50 euros. Quantas galinhas pode comprar com este dinheiro?

Figura 1.

No documento curricular publicado em 2001 — Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais — no bloco Números e Cálculo são indicadas várias competências matemáticas que os alunos devem desenvolver ao longo dos três ciclos do Ensino Básico. Neste artigo vamos centrar-nos na "aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação" (DEB, p. 60) procurando construir um significado partilhado do modo de entender esta competência e analisar as implicações que esse significado pode ter ao nível da planificação do trabalho do professor do 1° Ciclo.

Começamos por analisar dois exemplos que contextualizam uma discussão sobre as dificuldades e potencialidades dos algoritmos.

Analisando dois exemplos

Exemplo 1. Uma professora do 1° Ciclo pediu aos seus 13 alunos de 4° ano que resolvessem a seguinte situação:

50007 – 19 = ______.

Intencionalmente, esta proposta não foi apresentada a partir de qualquer contexto. Todos os alunos entenderam, e bem, que deviam procurar determinar o valor exacto da diferença entre 50007 e 19. Também, todos eles, tentaram resolver a situação proposta recorrendo ao algoritmo. Segundo a sua professora, todos deveriam usar o seguinte procedimento: "9 para 17, 8 e vai 1; 1 mais 1, 2; 2 para 10, 8 e vai 1 …"

A análise do número de respostas certas (7) pode levar-nos a considerar que esta questão parece levantar alguma dificuldade a estes alunos e que quase metade dos alunos tem, pelo menos em algumas situações, dificuldade em seguir o procedimento que lhes foi ensinado para resolver as *contas de subtrair*.

As respostas dadas pelos 6 alunos que *erraram* a conta foram:

50008; 5000098; 50088;
56988; 50018; 50018.

Respostas como estas sugerem que as crianças não desenvolveram uma tendência de antecipar uma resposta e de controlar a exactidão do resultado a partir dessa antecipação. De facto, pensamos que eles têm a noção de que depois de tirarem 19 de 50008 devem obter um número inferior a 50008. No entanto, uma vez que usam um procedimento que apenas faz apelo a um percurso mecanizado não pensam nos números e na operação e dão uma resposta *cega* e que corresponde ao resultado da *conta* que fizeram.

Exemplo 2. Uma das questões de um teste aplicado a cerca de 1000 alunos de 4° ano foi a da Figura 1.

Uma das indicações explícitas que lhes era dada antes de começarem a resolver o teste era a de procurarem mostrar como resolviam cada uma das questões havendo, no enunciado, espaço para o fazerem (ao lado de cada pergunta havia um espaço em branco).

Uma análise estatística das respostas dadas a esta questão (onde se contabilizou apenas o número de respostas certas, erradas e não resolvidas) permitiu verificar que esta pergunta se revestia de alguma dificuldade.

De entre os alunos que resolveram o teste, escolhemos, ao acaso, duas turmas de 4º ano e analisámos as respostas a esta questão. No quadro seguinte, resumimos as respostas e os processos usados por estes alunos (Tabela 1).

Analisando estes resultados podemos salientar vários aspectos. Em primeiro lugar, para justificar as respostas que apresentam, os alunos ou usam um algoritmo ou não usam *nada*. Naturalmente que isto não significa que os alunos que não apresentam o processo que seguiram para resolver o problema não tenham usado nenhum processo. Mas, pelo menos aparentemente, não sentem a necessidade de exprimir por escrito o raciocínio que usam.

Em segundo lugar, apesar da consideração anterior, não podemos deixar de salientar que 19 dos 36 alunos recorram a um algoritmo para resolver este problema, ou seja, revelam não ser capazes de decidir se uma determinada situação requer o uso de um cálculo exacto ou de um cálculo aproximado (aspecto que nos parece muito importante e que é destacado em vários documentos (DEB, 2001; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Pensamos que, no 4º ano, os alunos já deveriam ser capazes de ver que 5 galinhas não podia ser, uma vez que $5 \times 10 = 50$. Depois podiam experimentar com 4. Para saber que $4 \times 12 = 48$, esperamos que o leitor concorde connosco e reconheça que ninguém deve precisar do algoritmo da multiplicação.

Finalmente, apesar da relativa *popularidade* do uso do algoritmo (19 alunos em 36 resolvem o problema usando um algoritmo) apenas 9 conseguem obter, através dele, uma resposta correcta para o problema. Alguns destes alunos parecem ter sérias dificuldades em ter uma noção minimamente razoável da ordem de grandeza do resultado que devem obter ao dividir 50 por 12 — a dois alunos dá 7, a outro dá 105! Os outros, parecem evidenciar uma escolha não pensada dos dados do problema e da *conta* que podem usar.

Os algoritmos: que problemas, que potencialidades?

Vantagens dos algoritmos

Embora de um modo não totalmente explícito, temos vindo a salientar algumas ideias que podem ser interpretadas como significando que consi-

Sentidos	Procedimentos usados	Nº alunos	Respostas dadas
Estruturar 50 em partes de 12	$50 : 12$	5	4
		1	105
		2	7
"Fazer" 50	Adição sucessiva $12 + 12 = 24$ $24 + 12 = 36$ $36 + 12 = 48$	4	4
Sentido incorrecto	Adição $12 + 15$	1	27
	Subtracção $50 - 12$	4	38
	Multiplicação 12×50	1	600
	Divisão $120 : 30$	1	23
Não apresentam o modo como chegaram à resposta	Não apresentam o modo como chegaram à resposta	3	4
		2	48 (preço 4 galinhas)
		1	50 (grandeza inicial)
		2	12 (valor de 1 grupo)
		2	2
		2	3
		1	600
Não apresentam nenhuma resolução		4	
Total alunos		36	33% de respostas correctas

Tabela 1.

deramos os algoritmos como algo de nocivo e que não deve ser incluído no ensino da Matemática. Pelo contrário, estamos conscientes de várias potencialidades importantes dos algoritmos:

— *generalidade:* o algoritmo é válido para quaisquer números. Para calcular $52 - 27$ uso as mesmas regras que para calcular $52007978 - 354756$.

— *eficácia:* um algoritmo pode sempre conduzir a uma resposta certa, ou seja, desde que se usem bem as regras, temos a certeza de chegar a um resultado certo.

Por outro lado, a procura e utilização de procedimentos algorítmicos é uma faceta importante da Matemática. Sem que isso signifique que o seu ensino se limite a focar os procedimentos e técnicas rotineiros, se queremos proporcionar aos alunos uma verdadeira experiência matemática não podemos ignorar os algoritmos.

Dificuldades dos alunos

Um estudo realizado por Kamii e Dominick (1998) permite-nos ter uma ideia dos efeitos da aprendizagem dos algoritmos. Três grupos de alunos resolveram problemas de adição/subtracção: 1) "grupo dos não algoritmos" (não conheciam os algoritmos); 2) "grupo dos algoritmos" (tinham aprendido na escola os algoritmos); e 3) grupo que tinha aprendido alguns algoritmos em casa, mas não na escola.

A comparação dos resultados permite fazer duas observações:

— o "grupo dos não algoritmos" apresentou, na globalidade, a maior percentagem de respostas correctas;

— os alunos do "grupo dos algoritmos" que erraram o resultado apresentaram respostas bem menos razoáveis do que as respostas incorrectas dadas pelos alunos do "grupo dos não algoritmos".

Segundo Kamii e Dominick (1998) os algoritmos são prejudiciais porque: (1) encorajam as crianças a desistir do seu próprio pensamento, isto é, utilizam um procedimento rotineiro que parece impedi-las de pensar, como pode concluir-se dos exemplos apresentados antes; (2) fazem-nas esquecer o que já sabem sobre o valor de posição na escrita dos números, impedindo o desenvolvimento do sentido do número, como é indicado no Currículo Nacional — compreensão global do número e das operações.

Kamii e Dominick referem também que quando as crianças inventam os seus próprios procedimentos fazem-no indo da esquerda para a direita, ao passo que nos algoritmos têm de o fazer ao contrário. Por exemplo, para calcular $366 + 199$.

Quando utilizam o algoritmo

$$\begin{array}{r} 366 \\ +\underline{199} \\ 565 \end{array}$$

o que a maior parte das crianças faz é:

$6 + 9 = 15$, colocam o 5 e sobra 1

$1 + 6 + 9 = 16$, colocam o 6 e sobra o 1

$1 + 3 + 1 = 5$

Ao passo que quando são capazes de pensar por si próprias, inventando os seus próprios procedimentos, fazem:

$300 + 100 = 400$; $60 + 90 = 150$; $6 + 9 = 15$

$\longrightarrow 400 + 150 + 15 = 565$

ou

$366 + 199 = 300 + 200 + 65 = 565$

Usar percebendo um algoritmo?

"As crianças têm dificuldade nos algoritmos porque não percebem o que estão a fazer". Esta é uma das ideias que várias vezes ouvimos a colegas professoras do 1° ciclo. Será que é assim? Em primeiro lugar, propomos que cada um se interrogue sobre a compreensão que usa para realizar um algoritmo. Por exemplo, continuando nas operações elementares, analisemos o que poderá ter de ocorrer à nossa mente para usar um *algoritmo percebendo.*

1) Comecemos pela tarefa apresentada no início do artigo:

$50007 - 19 = \_\_\_\_$

Se usarmos o algoritmo que os 13 alunos de 4° ano aprenderam teríamos de pensar de um modo muito semelhante ao seguinte:

— como de 7 não posso tirar 9, tenho de usar a propriedade de invariância do resto e somar dez unidades ao aditivo e uma dezena ao subtractivo. Assim, faço 9 para 17 e 2 para 0;

— mas como de 0 não posso tirar 2 tenho que adicionar 100 unidades ao aditivo e centena ao subtractivo. Assim faço 2 para 10 e 1 para 0;

— mas

Penso que todos concordamos que nenhum de nós faz isto. O que usamos é um conjunto de regras não pensadas que adquirimos à custa de uma grande prática. Usamos, também, um procedimento expedito — o *e vai um* — que nos ajuda a mecanizar o processo. No entanto, ele não pode ser fundamentado do ponto de vista matemático — de facto *não vai nada* — e, por isso, o seu uso não envolve nenhuma compreensão.

2) Quando calculamos $3427 : 16$ pelo algoritmo tradicional é preciso perceber qual o número que multiplicado por 16 é o mais próximo de 3247.

Para isso, os alunos têm de construir a tabuada do 16 (Tabela 2).

E, para além disso, têm de compreender o valor de posição representado pelos diferentes algarismos, começando por ver que com 34 centenas podem fazer 2 centenas de grupos de 16,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	32	48	64	80	96	112	128	144

Tabela 2.

$$
\begin{array}{r|l}
3427 & 16 \\ \hline
\underline{3200} & 200 \\
0227 & 10 \\
\underline{160} & \\
067 & \underline{+\ 4} \\
\underline{64} & 214 \\
4 &
\end{array}
$$

Fazer a subtracção para 34 centenas, ver depois que ainda sobram 22 dezenas o que dá para fazer 1 dezena de grupos de 16, obtendo deste modo o quociente.

No entanto, ninguém está a pensar em tudo isto quando faz de uma forma rotineira o algoritmo. É com certeza importante e é da essência da própria matemática a aquisição de rotinas e todos nós quando utilizamos os algoritmos não o fazemos percebendo, mas é preciso que as crianças tenham oportunidade para pensar sobre os números.

Calcular pensando no número, nas operações e nas suas relações

Uma alternativa ao uso quase obrigatório do algoritmo para resolver os problemas ou exercícios numéricos é a de estabelecer que os alunos podem escolher os seus próprios processos: podem fazer desenhos, podem concretizar a situação usando diferentes tipos de materiais, podem inventar estratégias. Esta opção tem sido veiculada de diversas formas no nosso país e é hoje um dos argumentos que ouvimos repetir com alguma frequência quando se questiona o ensino focado nos algoritmos.

Embora numa fase inicial da aprendizagem da Matemática o recurso à representação, por meio de desenhos, das situações problemáticas propostas aos aluno seja um importante meio de compreender as operações e as relações numéricas, ela não é uma estratégia potente para trabalhar com números *grandes*. Deixar que um aluno recorra sempre a um desenho para resolver um problema é limitador da sua compreensão dos números e das operações e impede o desenvolvimento de competências importantes para lidar com situações mais complexas, ou que, simplesmente envolvam o cálculo com números superiores a 20.

A análise das potencialidades dos materiais manipulativos é complexa (ver, por exemplo, Gravemeijer, 1991) e pensamos ser um ponto em que ainda não se reflectiu bastante no nosso país. Uma questão que pensamos ser crucial é o papel dos materiais na formação da noção dos números e das operações e no desenvolvimento de formas mais ou menos algoritmizadas de cálculo. Assim, os materiais têm um papel intermediário entre a realidade concreta e a sua representação mental e/ou entre as operações concretas dessa realidade e as operações matemáticas. Utilizar materiais concretos para aprender a subtrair deve desenvolver uma forma de raciocinar e de calcular que corresponde à forma mais abstracta de resolver o problema. Por exemplo, utilizar blocos unitários com a mesma cor bloqueia o cálculo inteligente uma vez que incentiva a contagem 1 a 1 em vez de centrar a atenção na utilização de relações entre os números.

Dar liberdade aos alunos para inventar as suas próprias estratégias e procedimentos é uma opção pedagógica que pode ser importante. De facto, várias investigações mostram que as crianças inventam e desenvolvem estratégias para lidar com problemas numéricos (por exemplo, Fuson *et al.*, 1997).

Consideremos o exemplo $368 + 208$. Quando as crianças têm liberdade de escolher as suas próprias estratégias, a grande maioria dos alunos utiliza dois métodos. O primeiro consiste em decompor os números, adicionar os grupos e recompor a partir dos resultados:

$$368 = 300 + 60 + 8;\ 208 = 200 + 8$$

$$300 + 200 = 500\ ;\ 60 + 0 = 60;\ 8 + 8 = 16$$

$$500 + 60 + 16 = 576$$

O segundo método consiste em somar 208 a 368 saltando na sequência numérica:

$$368 + 200 = 568;\ 568 + 8 = 576$$

A operação $368 + 198$ faz apelo aos mesmos métodos. Mas, neste caso, o número 198 *convida* uma minoria de crianças a transformar $368 + 198$ em $368 + 200$ e a compensar retirando 2 ao resultado. "É $568 - 2 = 566$". Este método é mais sofisticado uma vez que se baseia na utilização das relações entre as relações numéricas, ou seja,

— na equivalência das adições: $368 + 198 = 368 + 200 - 2$, logo 566;

— as subtracções: $70 - 36 = 70 - 35 - 1$, logo 34;

— as adições e as subtracções: $22 - 18 = 4$, porque $18 + 4 = 22$.

Neste sentido, o cálculo por transformação é mais elaborado do ponto de vista matemático (mais formal) que as formas de cálculo sequencial (em linha) e decimal onde as relações numéricas utilizadas só servem para encurtar ao máximo os cálculo realizados *no interior* do procedimento utilizado.

Como referem Fosnot e Dolk (2001), para ser capaz de calcular usando o sentido do número não basta dispor de uma listagem de estratégias. É preciso começar por olhar para os números, ser capaz de estabelecer relações que possam derivar deles e jogar com essas relações.

Qual será então o desafio que se coloca ao professor para conseguir ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido do número?

Pensamos que o desafio é fácil de perceber, no entanto, é mais difícil de realizar. A ideia consiste em criar as condições que permitam às crianças desenvolver, elas próprias e desde o início da escolaridade, os *instrumentos* que lhes permitam inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução dos problemas colocados pela vida de todos os dias. E, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante e apela mais à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível.

A *primeira condição* consiste em acompanhar a tendência natural de desenvolvimento de procedimentos de cálculo. Adicionar e subtrair desenvolve-se a partir da contagem de quantidades; multiplicar e dividir a partir da estruturação dessas quantidades em grupos equipotentes. Contar e estruturar desenvolvem-se em ligação com a noção que as crianças constroem dessas quantidades, desses números e do que fazem com essas quantidades e esses números. É nestas actividades com objectos concretos e que envolvem a exploração de situações da vida de todos os dias que nascem as representações mentais mais primitivas dos números e das operações e é nelas que se enraíza aquilo a que chamamos *sentido do número*.

A *segunda condição* consiste em ligar estruturalmente o desenvolvimento de métodos e de técnicas de cálculo à construção dos números, da sua organização e da sua estruturação e à reconstrução do nosso sistema de numeração de posição. São as descobertas das estruturas dos números e, como tal, as relações entre os números que geram a descoberta das possibilidades de explorar essas estruturas e relações. Se 8 é $5 + 3$ e se 9 é $5 + 4$, $8 + 9$ é $5 + 5 + 3 + 4$, logo $10 + 7$. E se 80 é $50 + 30$ e 90 é ......, $80 + 90$, só pode ser $100 + 70$.

A terceira condição deriva naturalmente das duas primeiras: retardar a aprendizagem dos algoritmos para poder dar possibilidade aos alunos de aperfeiçoar o seu sentido do número para poder aceitar o desafio dos algoritmos.

Conflitos causados pela mudança

Quando os professores do 1° ciclo tentam modificar a sua prática de acordo com as condições enunciadas no ponto anterior, podem ter de enfrentar, pelo menos, três conflitos: os manuais não têm esta perspectiva, os pais consideram que ensinar matemática é ensinar as *contas*, a formação de professores não tem correspondido a estas exigências.

Relativamente aos manuais é realmente verdade que muitos deles continuam a incluir desde cedo a escrita na forma de algoritmo mesmo quando ela não faz nenhum sentido, como é o caso da adição de números representados apenas por um algarismo.

Em relação aos pais é normal que eles tenham uma concepção da matemática correspondente às suas vivências enquanto alunos deste nível de escolaridade. É preciso conversar com eles sobre o que se pretende com o ensino da matemática hoje, de forma que compreendam que as exigências de hoje não são as do seu tempo e tomem consciência das competências que se pretendem desenvolver.

No que diz respeito à formação de professores, nunca e, cada vez mais hoje em dia, a formação inicial de professores foi considerada como adequada para o exercício da profissão *ad eternum*, pois a escola evolui. A formação inicial deve ser aquela imprescindível para começar a ensinar com a consciência de que é preciso continuar a formação quer pela reflexão e discussão com os colegas sobre o que se passa nas salas de aula, quer pela participação em acções de formação mais formais. Em última análise os professores devem ter iniciativa começando, por exemplo, a questionar a qualidade dos manuais, discutir o que deve ser o manual e ter uma atitude crítica sobre algo que saiu da cabeça de alguém e nunca foi testado pelos professores na sala de aula.

Reflexão final

Se queremos desenvolver a competência enunciada no início deste artigo, isto é, a "aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação" não podemos continuar a trabalhar apenas os algoritmos.

Como quisemos mostrar ao longo deste artigo, na nossa perspectiva, os algoritmos continuam a ser introduzidos aos alunos muito cedo não lhes dando oportunidade para desenvolver o sentido do número e pensar de um modo crítico sobre o sentido das operações, tendo como consequência o não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo. Trabalhar as operações introduzindo estratégias de cálculo mental, tendo por base a composição e decomposição dos números, utilizando as características de estarmos a lidar com um sistema de numeração de posição, parece-nos uma tarefa crucial a fazer antes da introdução dos algoritmos formais. Os pais devem ser esclarecidos sobre os objectivos que se pretendem. Se compreenderem que o importante é que as crianças aprendam a lidar com os números e as operações de um modo significativo e saibam resolver problemas terão, com certeza, uma atitude colaborante.

Os professores têm de fazer uma utilização crítica dos manuais e sempre que possível fazer uma selecção criteriosa dos mesmos. Para isso é fundamental o trabalho em equipa de professores do mesmo ano ou da mesma escola, reflectindo em conjunto, tendo como base os problemas concretos que surgem na prática. Deste modo têm noção das suas necessidades, vão identificando a quem podem recorrer e envolvem-se em formação com sentido.

Bibliografia

DEB (2001). Currículo Nacional: Competências Essenciais. Lisboa: Departamento de Educação Básica, Ministério da Educação.

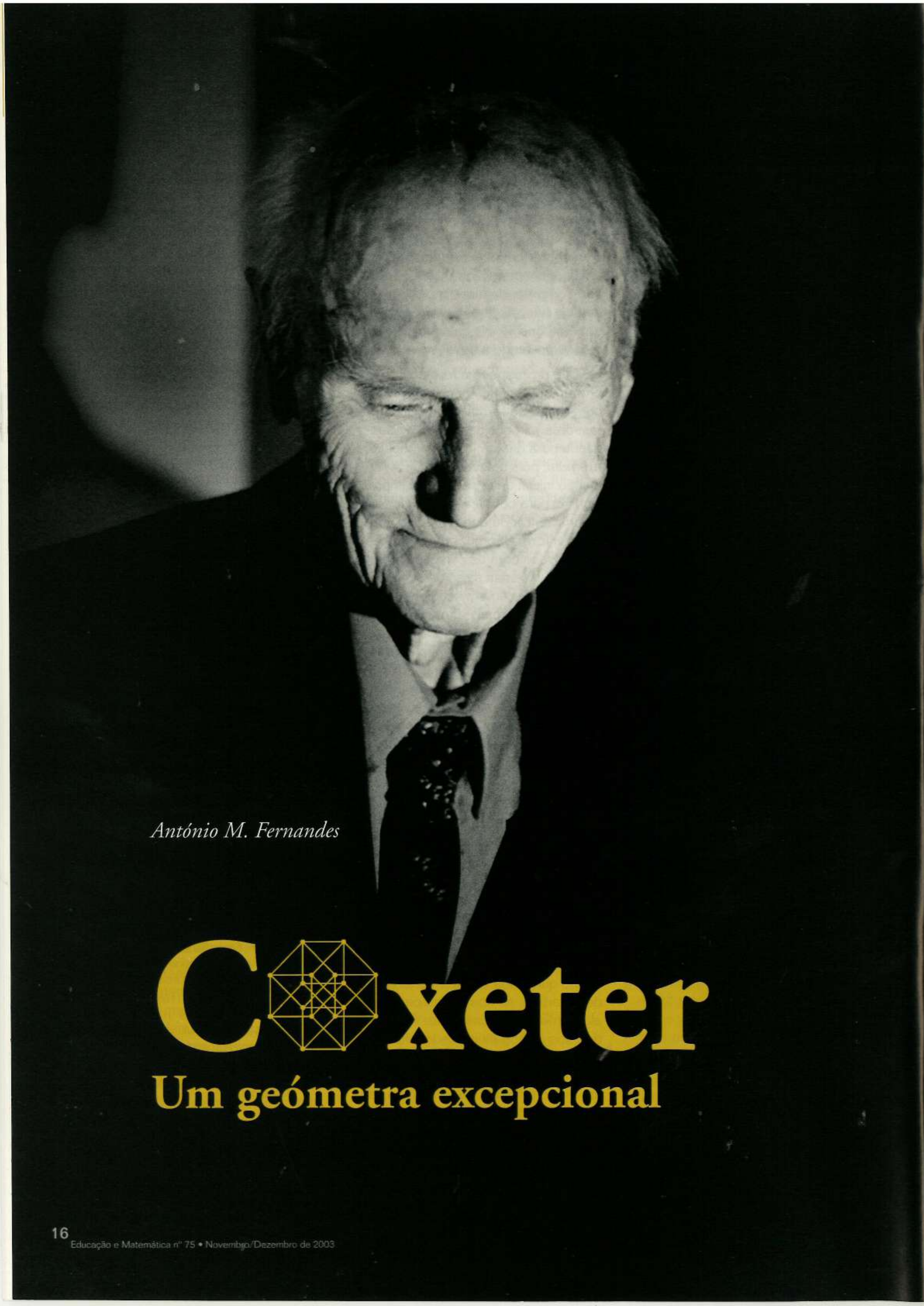
Fosnot, C. T. e Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & E. Fennema (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and substraction. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, N. 2, 130-162.

Gravemeijer, K. P. E. (1991). An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. Em L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Kamii, C. e Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. Em L. J. Morrow e M. J. Kenney (eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Joana Brocardo, ESE Setúbal
Lurdes Serrazina, ESE Lisboa
Jean-Marie Kraemer, CITO – Holanda



António M. Fernandes

Coxeter
Um geómetra excepcional

Coxeter é por muitos considerado o maior geómetra clássico do século XX. Assim expressa, esta ideia pode considerar-se consensual. Quiséramos não utilizar o adjectivo clássico e outros, como Alan Connes, responsável pelo desenvolvimento da denominada *geometria não-comutativa*, elevando esta disciplina a um nível de abstracção e generalidade nunca antes alcançado, libertando-a de noções como a de ponto, se perfilariam, dada a riqueza conceptual e o carácter revolucionário do seu trabalho, como candidatos naturais a um tal título. Estes são, contudo, exercícios de um tipo subjectivo a que não teremos qualquer necessidade de recorrer, tal é a importância do trabalho de Coxeter. Este foi fruto de uma intensa actividade matemática, que alimentou durante cerca de 70 anos, ao longo dos quais publicou 12 livros e mais de 200 artigos em geometria e em teoria de grupos.

Coxeter distinguiu-se pelo modo como explorou a relação entre álgebra e geometria, para ser mais preciso, a relação entre a *teoria de grupos* e *geometria*. O fulcro deste relacionamento reside no conceito de simetria. Ele viria, contudo, a elevar esta relação a um nível de sofisticação tal que obteve, por esta via, uma ferramenta fundamental na descrição de muitos objectos que habitam em espaços hiperdimensionais, onde a força do olhar, de pouca valia em tais circunstâncias, é substituída pela força do cálculo algébrico. Consideremos, a título de exemplo, o caso dos politopos regulares. Obtém-se um poliedro convexo, num espaço de determinada dimensão, intersectando um número finito de semi-espaços (no plano, um semi-espaço é a porção do plano que fica de um dos lados de uma recta, no espaço ordinário, um semi-espaço é a porção do espaço que fica de um dos lados de um plano, e assim sucessivamente). Um poliedro pode, assim, ser ilimitado (por exemplo um ângulo no plano). Aqueles que correspondem a regiões limitadas designam-se de politopos. É difícil caracterizar a noção de regularidade em termos puramente geométricos, mesmo que tomemos a decisão de nos restringir a espaços de dimensões pequenas. Mas, ainda pior, essas formas são difíceis de generalizar e essa generalização seria pouco útil. Felizmente, Coxeter engendrou um modo de proceder a esta caracterização em termos puramente algébricos. Na figura seguinte representa-se um icosaedro e uma das suas

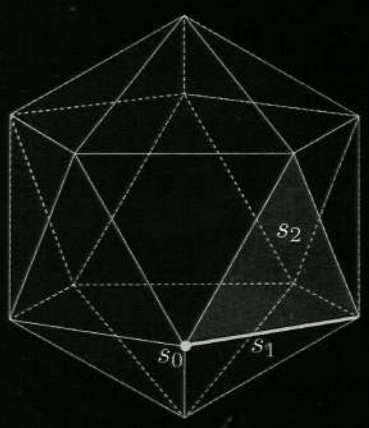


Figura 1. Icosaedro com uma das suas bandeiras assinalada.

bandeiras. Neste caso (da dimensão 3) uma bandeira é uma sequência $\langle s_0, s_1, s_2 \rangle$, onde s_0 é um ponto, s_1 é uma aresta que incide nesse ponto e s_2 é uma face que incide nesta aresta. A regularidade do icosaedro é traduzida pelo seguinte facto algébrico dadas duas quaisquer bandeiras, $b_1 = \langle s_0^1, s_1^1, s_2^1 \rangle$ e $b_2 = \langle s_0^2, s_1^2, s_2^2 \rangle$ existe sempre uma isometria do espaço θ que transforma b_1 em b_2, no seguinte sentido $\theta(s_0^1) = s_0^2$, $\theta[s_1^1] = s_1^2$ e $\theta[s_2^1] = s_2^2$.

Em linguagem da teoria de grupos diz-se que *o grupo de isometrias do icosaedro actua transitivamente no conjunto das suas bandeiras*.

Tomando este facto como a definição de politopo regular, Coxeter abriu as portas para que a álgebra pudesse substituir o olhar humano onde, como já se disse, esse olhar de pouco vale. Em certo sentido, podemos dizer que tanto o trabalho de Coxeter como o trabalho de Connes, revelam que a geometria consiste mais no exercício do pensamento geométrico que no estudo de propriedades de objectos particulares como o são pontos, rectas, planos ou outros, quaisquer que sejam.

Esta conexão entre a álgebra e a geometria foi ainda explorada por Coxeter a um outro nível. Ele produziu extenso trabalho no domínio da classificação dos grupos finitamente gerados, designadamente naqueles que são gerados por reflexões. Alguns dos resultados mais elegantes que se conhecem nesta área foram obtidos por Coxeter, depois de associar a cada grupo em estudo um determinado politopo de que o grupo é o grupo de simetrias, usando assim a sua intuição geométrica na solução definitiva do problema.

Coxeter exerceria uma notável influência em diversas personalidades, não só outros matemáticos que com ele colaboraram ao longo da sua vida, (o trabalho em colaboração foi, de resto, uma das características de Coxeter) como também em outras, trabalhando em áreas distintas da matemática. O seu trabalho na classificação de politopos regulares seria particularmente apreciado em meios tão distintos, como a Química, a Filosofia, a Arquitectura ou a Arte. Veremos disso alguns exemplos já de seguida.

A geometria como um meio de transformar o mundo

O filósofo R. Buckminster Fuller foi profundamente influenciado pelo trabalho de Coxeter. Classificar Fuller como filósofo é, talvez, demasiado restritivo; ele era o que se pode considerar, e muitos efectivamente consideram, como um pensador abrangente. Buckminster Fuller nasceu em 1895. Chegou a frequentar a Universidade de Harvard, mas foi expulso logo no primeiro ano devido a alegada *irresponsabilidade* e *falta de interesse*. Não obstante este facto, que certamente terá sido tomado como um mau indicador, ao longo da sua vida Fuller receberia 49 doutoramentos Honoris Causa e seria nomeado para receber o Prémio Nobel da Paz.

Figura 2. R. Buckminster Fuller.

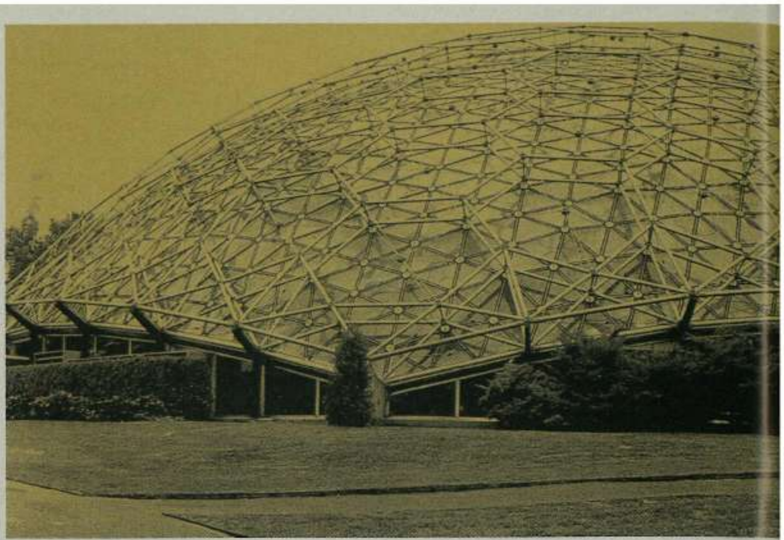


Figura 3. Cúpula geodésica.

Buckminster Fuller foi um dos primeiros futuristas a reflectir sobre os problemas da humanidade de uma forma macroscópica e global. Em 1927, decidiu trabalhar *sempre e apenas em prol de toda a humanidade*. Adoptando esta postura reflexiva abrangente, Fuller pretendia obter estratégias consistentes para a eliminação de problemas gerais da humanidade como são a *pobreza*, a *doença* e a *habitação precária*. Com o seu programa almejava ainda poder antever quais viriam a ser, no futuro, os problemas críticos da humanidade. Esta estratégia global de resolução de problemas foi pelo próprio designada de *Comprehensive Anticipatory Design Science*, cujo lema era fazer mais com menos, manifestando assim uma clara preocupação com a optimização dos recursos naturais e com a poupança de energia. Este princípio de optimização que, em última análise, possibilitaria a todos um melhor padrão de vida, foi baptizado por Fuller como *dymaxion*. No âmbito desta filosofia, Fuller afirma:

> Aprendi na escola que para fazer uma esfera, que é o que uma bolha é, se tem que utilizar o número π. Também aprendi que esse mesmo π é um número irracional ... assim, em que circunstâncias é que a Natureza ignora este facto e, como resultado de algum compromisso, produz uma bolha? E milhões delas por segundo? Penso que são demasiadas decisões para a Natureza tomar.

Todo o programa intelectual de Fuller foi implementado em termos práticos. Ele buscou incessantemente essas soluções optimais para inúmeros problemas. O seu maior instrumento foi a geometria e, em particular, a geometria desenvolvida por Coxeter, que procurou aplicar no estudo de formas que pudessem ser resistentes e poupar energia, não apenas na sua utilização mas igualmente na sua realização. A este campo de estudo chamou Fuller, *Sinergética*, tema sobre o qual escreveu muito, destacando-se *Synergetics, Explorations in the Geometry of Thinking*, publicado pela primeira vez em 1975. A obra é dedicada a Coxeter; reproduz-se abaixo a respectiva dedicatória.

> Este trabalho é dedicado a H. S. M. Coxeter, Professor de Matemática da Universidade de Toronto.
>
> Para mim, nenhuma outra experiência da infância reforça mais as nossas capacidades exploratórias que a geometria. A sua inspiradora eficiência afastando o que não é essencial, e avaliando uma variedade de aspectos desconhecidos a partir de uns, poucos, conhecidos, assim como a elegância das suas demonstrações, conduzem-nos à descoberta e ao entendimento de uma estratégia para a resolução global de problemas. Face à sua extraordinária vida como matemático, o Dr. Coxeter é o geómetra do nosso turbulento século XX que é espontaneamente aclamado como o conservador de todo o património histórico da ciência da análise dos padrões. Dedico-lhe este trabalho com particular estima e a todos os geómetras de todos os tempos com agradecimento pela importância que tiveram para a humanidade, importância da qual ele constitui o maior exemplo.

Da influência de Coxeter sobre Fuller resultaria ainda a denominada *Geometria Sinergética*, de que a famosa cúpula geodésica é, talvez, a mais emblemática concretização.

A descoberta do C60

Os resultados teóricos de Coxeter na classificação de politopos e respectivos grupos de simetrias, assim como os modelos concretos de Fuller, seriam determinantes na caracterização da estrutura de uma nova molécula, cuja descoberta valeria aos seus autores o Prémio Nobel da Química, em 1996. Neste ano, a Real Academia das Ciências Sueca decidiu atribuir o Prémio Nobel da Química, conjuntamente a Robert F. Curl, Jr. (Rice University, Houston, USA), a Harold W. Kroto (University of Sussex, Brighton, U.K.) e a Richard E. Smalley (Rice University, Houston, USA), pela descoberta de um novo arranjo molecular de átomos de carbono, designado por C60. A nova estrutura obtém-se vaporizando previamente carbono através de um laser intenso, e permitindo a condensação do gás resultante num meio composto por gases inertes. Deve referir-se que o C60 não é o único tipo de composto que resulta destas experiências mas, como aqueles cientistas notaram, é o mais abundante e o mais estável. A estabilidade estrutural está geralmente associada a uma geometria peculiar, frequentemente, a configurações espaciais muito simétricas.

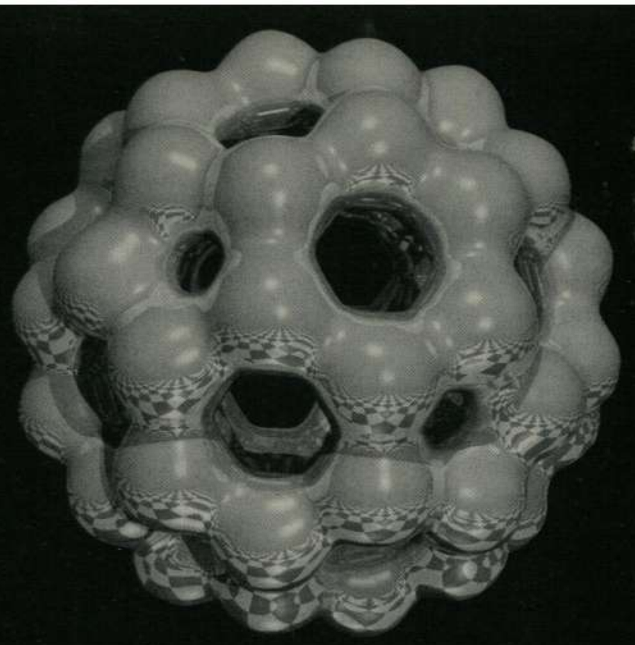


Figura 4. Representação artística da estrutura molecular do C60.

Os resultados de espectrometria confirmaram esta previsão. E, da confrontação desses dados experimentais, com a teoria matemática, designadamente com a teoria relacionada com a classificação dos poliedros e a caracterização das suas simetrias, concluiu-se que a estrutura molecular do C60 seria a de um icosaedro truncado. É importante notar que os primeiros dados experimentais não apontavam claramente para este tipo de conclusão. De facto os resultados relativos à descoberta do C60, foram publicados na revista Nature, e recebidos com um misto de entusiasmo e suspeita, já que nenhum físico ou químico, imaginaria que os átomos de carbono se podiam arranjar numa simetria diferente daquelas que já eram conhecidas.

Os sólidos platónicos são frequentemente tomados como modelos para estruturas moleculares. Pelo menos, como primeiras aproximações para a descrição dessas estruturas. Também neste caso uma busca semelhante teve lugar, através da análise do tipo de simetria encontrada. Assim sendo, foi todo o trabalho teórico na classificação de poliedros e na análise dos respectivos grupos de simetrias, para o qual Coxeter contribuiu de modo decisivo, que em primeiro lugar apontou o tipo de estrutura da nova molécula. Essa geometria inesperada viria a ser confirmada experimentalmente, através da realização de experiências, mais complexas e mais precisas.

Arte como matemática intuitiva

Considere-se, como último exemplo, a influência do trabalho de Coxeter sobre o artista gráfico Maurits Escher. Este possuía já ampla obra gráfica, obra essa, em muitos casos, cheia de significado matemático. O problema de pavimentar o plano agradava particularmente a Escher, que se tornou sensível a esta questão depois de visitar Alhambra. Nos anos 50, no entanto, Maurits estava particularmente interessado naquilo que se poderia designar por *representação do infinito*. Um exemplo desse tipo de representação é a sua obra *Wirlpool*. Nela, os motivos principais convergem gradualmente para um ponto no centro de toda a composição enquanto que, gradualmente, vão diminuído de tamanho.

Esher procurou, em vão, obter resultados explorando o caminho inverso, ou seja, que os motivos principais, partido do centro da composição, se aproximassem de um número infinito de pontos de uma circunferência limite, diminuindo gradualmente de tamanho. Depois de muitos esforços infrutíferos, Escher decidiu procurar Coxeter, na esperança que este o pudesse ajudar. Acabariam por se conhecer no Congresso Internacional de Matemática, que decorreu em Amesterdão, em 1954. Escher conhecia o trabalho de Coxeter sobre grupos cristalográficos em espaços hiperbólicos e procurou-o para obter mais informação nesta área. Coxeter acabaria por enviar a Escher uma cópia de um artigo seu, juntamente com uma carta onde agradecia ao artista holandês o facto de este o ter autorizado a reproduzir algumas das suas ilustrações. Nesse artigo, vários aspectos sobre cristalografia em espaços hiperbólicos eram mencionados e, embora não tivesse conseguido entender o conteúdo do ponto de vista matemático, Esher deixou-se impressionar por uma das figuras que descrevia uma pavimentação do plano de Poincaré com triângulos congruentes. O próprio Escher reconheceria que essas figuras o afectaram profundamente, revelando-se como a solução para o seu problema. De facto assim foi. Algum tempo depois, a materialização dos propósitos de Esher surgiu na forma de uma série de litografias com o título geral *Aproximating the Circle*. Coxeter diria dessas obras que Esher, não tendo compreendido os cálculos matemáticos efectuados para a obtenção da pavimentação do plano de Poincaré pôde, apesar de tudo, apreender a essência da construção de um ponto de vista puramente intuitivo.

Figuras 5, 6 e 7. Da esquerda para a direita: Richard E. Smalley, Harold W. Kroto e Robert F. Curl, Jr.

Uma vida plena

Harold Scott MacDonald Coxeter nasceu em Kensington (Inglaterra) em 9 de Fevereiro de 1907. Os pais de Coxeter interessavam-se por arte. A mãe era pintora e o pai, embora gerisse a Coxeter & Son, uma empresa fundada pelo avô de Coxeter, tinha como verdadeiros interesses a música e a psicologia. É assim natural assumir que, convivendo com este intenso interesse pela arte, o próprio Coxeter fosse por ela influenciado. Efectivamente, ainda criança, manifestou um enorme interesse pela música tendo, inclusivé, composto várias peças para piano, entre as quais a ópera *Outomn*. Com o advento da adolescência, porém, esse interesse musical foi cedendo o seu lugar ao interesse pela matemática e, em particular, pela geometria.

A educação de Coxeter seguiu o padrão típico de um membro da classe média inglesa da época. Depois de ter passado por outras escolas chegou à *St. George's School*. No período de três anos que passou nesta instituição travou conhecimento com John Flinders Petrie (1907–1971), filho único do famoso egiptólogo Sir Flinders Petrie. O conhecimento de ambos foi travado em circunstâncias peculiares já que se conheceram enquanto estiveram internados na enfermaria da escola, convalescendo de pequenas enfermidades. Para ocuparem o tempo discutiam muito sobre a questão dos cinco sólidos platónicos, um assunto que nos respectivos livros de texto aparecia como opcional. Colaborariam durante muitos anos, resultando dessa colaboração variadas contribuições no domínio do estudos dos poliedros em dimensões superiores. O fascínio de Coxeter pela geometria foi, já se referiu, precoce. Aos 16 anos ganhou um prémio com um ensaio intitulado *Analogia dimensional*. Este trabalho despertou a atenção de Bertrand Russel que era amigo do pai de Coxeter, (ambos eram militantes do movimento pacifista). Russel reconheceu de imediato o talento matemático de Coxeter e decidiu apresentá-lo a E. H. Neville, um matemático que anos antes tinha sido responsável, juntamente com G. H. Hardy, pela ida do matemático indiano Ramanujan para Inglaterra. Neville aconselhou o jovem Coxeter a abandonar todos os seus outros interesses e preparar-se para ingressar em Cambridge. Ele abandonou então a *St. George's School* e começou a receber lições privadas de alemão e de matemática, preparando a ida para Cambridge seguindo, deste modo, o conselho de Neville. O seu professor de matemática era então Alan Robson e foi sob a sua orientação que Coxeter adquiriu o conhecimento matemático necessário para o seu ingresso em Cambridge. Refira-se, a título de curiosidade, que Robson foi responsável pela publicação do primeiro trabalho matemático de Coxeter, uma breve nota, que surgiu na *Mathematical Gazette*, em 1926.

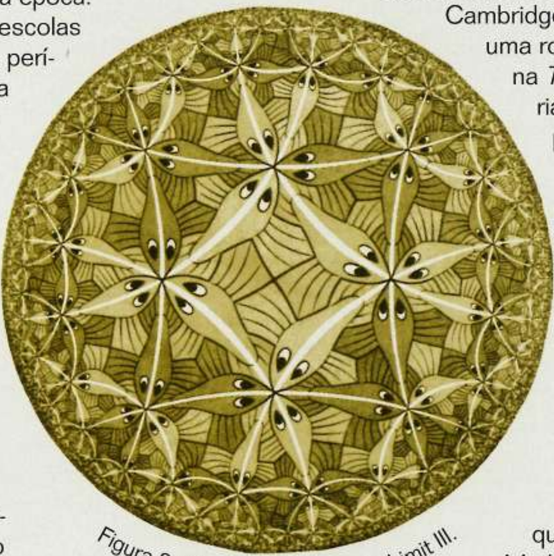


Figura 8. M. C. Escher—Circle Limit III.

Fruto desta eficaz preparação, Coxeter ingressou, finalmente, no Trinity College (Cambridge). Foi aí que pôde receber a influência de alguns dos matemáticos mais importantes da época como J. E. Littlewood, G. H. Hardy, S. Pollard, H. W. Richmond, P. W. Wood, A. S. Ramsey. Max Newman, Philip Hall, A. S. Besikovitch, L. Wittgenstein e H. F. Baker que seria o orientador da sua tese de doutoramento, cuja defesa decorreu em 1931. Em 1929, Coxeter recebeu o prestigiado *Smith's prize*, atribuído aos não doutorados com o melhor ensaio num qualquer tópico de matemática. Mas já em 1928, resultado de investigações independentes, Coxeter tinha publicado nos *Proceedings of the Cambridge Mathematical Society* um artigo intitulado *The pure Archimedian polytopes in six and seven dimensions*. Durante a sua estadia em Cambridge, Coxeter cumpria religiosamente uma rotina, participando todos os sábados na *Tea party*, um seminário que decorria na Escola de Artes. (Refira-se, a propósito, que a *Tea Party* é muitas vezes mencionada como o melhor de todos os seminários de geometria, organizados durante o Séc. XX.) Foi frequentando este seminário que Coxeter conheceu o matemático canadiano B. Robinson. Os dois haveriam de estar juntos durante 56 anos na Universidade de Toronto até a morte de Robinson em 1992. Juntamente com Robinson, Coxeter fundou o *Canadian Mathematical Congress* que viria mais tarde a ser a *Canadian Mathematical Society*, de que ambos foram presidentes. Coxeter foi ainda fundador e primeiro editor do *Canadian Mathematical Journal*. Ambos, Coxeter e Robinson, fizeram ainda parte do conselho editorial do *Mathematical Expositions*.

No passado dia 31 de Março de 2003, Coxeter faleceu em Toronto no Canadá. Quem sabe poderá agora substituir a álgebra pelo olhar celeste, no momento em que, certamente, pela força do seu génio e do se trabalho, conquistou o direito à imortalidade.

Referências

F. A. Sherk, P. McMullen, A. C. Thompson, A. I. Weiss (eds.); *Kaleidoscopes*. Selected Writings of H. S. M. Coxeter, Can. Math. Soc., Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons, 1995.

H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser; *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer Verlag, 1984.

H. S. M. Coxeter; *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1989.

H. S. M. Coeter; *Regular Polytopes*, Dover, 1973.

H. S. M. Coxeter; *Non-Euclidean Geometry*, MAA, 1998.

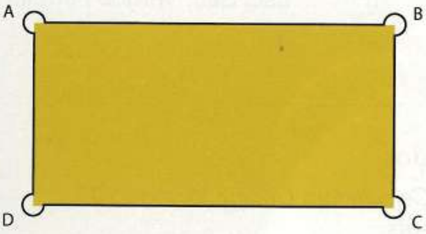
António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

O Problema do ProfMat 2003

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no *ProfMat 2003* de Santarém consistiu na resolução do problema *Tabelas, tabelas ...* :

Aquela mesa de bilhar media 1 metro por 2 e tinha um buraco em cada canto.



O Garcia é um excelente bilharista. Colocou a bola no canto C e deu-lhe uma forte tacada sem efeito. A bola partiu veloz, foi fazendo várias tabelas e, depois de percorrer exactamente 13 metros, entrou num buraco.

Quantas tabelas fez a bola e em que buraco entrou?

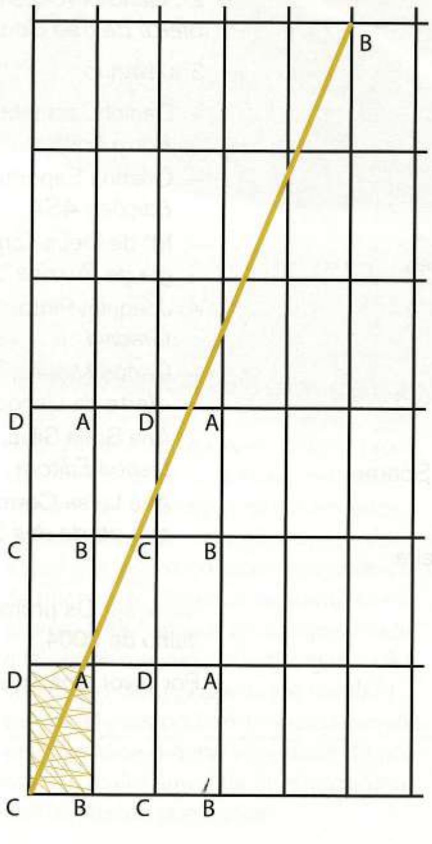
Comecemos pela introdução feita pelo Nuno e Angelina:

Como bilharistas experimentados — experimentamos muito e acertamos pouco — e baseados numa grande experiência ... teórica, sabemos que, em condições de mesa ideais e com bilharistas como o Garcia, se for dada uma forte tacada em qualquer direcção (para o lado de dentro da mesa, claro ...), a bola poderá entrar em algum dos outros buracos mas nunca em C.

E passemos agora à resolução do Eduardo Veloso:

Como as tabelas do bilhar funcionam como espelhos, os trajectos sobre o bilhar para tacadas a partir do ponto C, equivalem a semirectas do 1° quadrante com origem em C, se imaginarmos o bilhar reflectido indefinidamente nas tabelas/espelhos e nas imagens dessas tabelas umas nas outras. Estas reflexões formam uma rede rectangular.

Note-se a colocação, nessas imagens, dos buracos A, B, C e D que estão indicadas apenas nos primeiros rectângulos da rede.



Para $n \geq 0$ inteiro, os buracos têm na rede as seguintes coordenadas:

A $(2n+1, 2n+2)$

B $(2n+1, 4n)$

C $(2n, 4n)$

D $(2n, 2n+2)$

Como a bola acaba por cair num buraco, o seu trajecto nesta rede é um segmento com origem em C (0, 0) e extremidade num nó. Esse segmento é a hipotenusa h de um triângulo rectângulo em que os catetos são as coordenadas (números naturais) j e k do buraco onde a bola caiu.

Como $h=13$, temos que procurar j e k (par) tais que $j^2+k^2=169$.

Os quadrados dos números pares que podem interessar são 4, 16, 36, 64, 100 e 144. O único cuja diferença para 169 é um quadrado perfeito é 144. A diferença é 25 e portanto o buraco onde a bola caiu tem as coordenadas (5, 12), ou seja, é um B.

Quanto ao número de tabelas em que bate antes de cair em B, podem contar-se na figura: são 9.

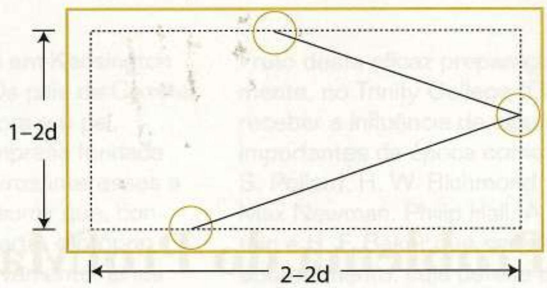
Houve vários outros processos de resolução:

- usando os programas de geometria dinâmica,
- fazendo uma grelha como a da figura anterior e traçando uma circunferência de raio 13 para ver se passava nalgum vértice,
- usando trigonometria,
- utilizando elipses e cálculos algébricos,

– experimentando com a calculadora gráfica.

O António Lucas fez uma curiosa montagem de acetatos para mostrar, passo a passo, a série de tabelas que a bola faz até chegar ao buraco B. Mas a Ana Sofia Silva foi mais longe com uma engenhosa dobragem em papel vegetal que permite ver toda a trajectória da bola no bilhar e depois, desdobrando, a recta que une o buraco de partida com o de chegada passando pelos vários rectângulos tal como se mostrou na resolução do Eduardo. O Miguel Ângelo também usou dobragens para a sua solução. O Daniel e a Sandra juntaram os dois processos, dobragens e acetatos, e depois apresentaram também a resolução em *PowerPoint* (um luxo!).

O Sérgio Valente apresenta, como curiosidade, o ângulo que da trajectória inicial da bola com o lado CD da mesa: $arc\ sen\ (5/13) \approx 22{,}6°$.



O Carlos Morais verificou que, se houvesse mais um buraco a meio de cada um dos lados maiores (como nas verdadeiras mesas de bilhar), o problema teria outra solução.

O François Jacquet resolve o problema por um dos métodos anteriores mas depois levanta algumas questões extremamente interessantes:

1. Ou estamos a admitir que o diâmetro da bola é zero e por isso a solução, do ponto de vista matemático é exacta, mas do ponto de vista físico … !
2. Ou consideramos que a bola tem um certo diâmetro d e então a bola percorre trajectórias no interior de um rectângulo de dimensões $2-2d$ e $1-2d$ …

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Lista de participantes

Individuais:

António Lucas, Ana Luísa Correia,

Ana Salvado Ana Sofia Silva,

Carlos Morais, Carlos Próspero,

Cristina Saporiti, Eduardo Veloso,

François Jacquet, Gonçalo Perdigão,

Graça Braga da Cruz, Helder Martins,

Joaquim Pinto, Jorge Luz

José Orlando Freitas, Miguel Ângelo Gomes

Ségio Valente, Vasco Dias

Vera Anselmo

Em equipa:

Daniel Castanho e Sandra Neves

Isabel Martins, Mª José Lopes e Natércia Soares

Iva & Nuno Angelino

Mª de Deus Torres, José Vieira e Célia Vieira

Premiados e prémios

1º. Eduardo Veloso, *Calculadora Gráfica Voyage 200, oferta Texas Instruments.*

2º. Carlos Próspero, *Calculadora Gráfica FX 9750 G Plus, oferta Beltrão Coelho.*

3ºs exaquo

- Daniel Castanho e Sandra Neves, *Diciopédia, oferta Porto Editora.*
- Cristina Saporiti, *"A Rainha do Sul", um livro oferta das Edições ASA*
- Mª de Deus Torres, José Vieira e Célia Vieira, *"Antologia de Puzzles", um livro oferta da Editora Replicação*
- Joaquim Pinto, *"E=mc2", um livro oferta das Edições Gradiva*
- Carlos Morais, *"Velas que Abriram o Mundo", um livro oferta da Lisboa Editora*
- Ana Sofia Silva, *"A Estrela de Belém", um livro oferta da Lisboa Editora*
- Ana Luísa Correia, *"Países do Mundo", um CD educativo oferta das Edições Texto*

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 31 de Julho de 2004.

Por favor, contactar a sede em Lisboa da APM.

Multiplicação e divisão: conceitos em construção ...

Alice Carvalho e Henriqueta Gonçalves

Este texto faz parte de um grupo de discussão apresentado no VI Encontro Nacional de Professores do 1° Ciclo — A Matemática no 1° Ciclo, que decorreu em Faro, nos dias 23 e 24 de Abril de 2003.

Partindo da convicção que os alunos desenvolvem grande parte da sua aprendizagem recorrendo a métodos próprios e de que a aprendizagem é um processo de construção activa do conhecimento, parece-nos que é importante para o professor conhecer como as crianças agem perante determinadas tarefas que lhe são propostas e quais as estratégias que utilizam para as resolver. Assim, procuraremos fazer uma breve reflexão sobre a aprendizagem dos conceitos de multiplicação e divisão, conceitos estes que envolvem novos sentidos de número e, por isso, bastante complexos. Mas, apesar da complexidade que envolve a sua aprendizagem, são várias as investigações que revelam que os alunos podem e necessitam de resolver uma grande variedade de problemas muito antes da aprendizagem formal destas operações.

Ao longo de muitas décadas, no 1° Ciclo, a aprendizagem da Matemática esteve associada ao ensino da aritmética, logo saber matemática significava essencialmente saber a tabuada e saber fazer contas (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Esta visão continua a influenciar bastante as escolas e, como consequência, a ênfase na aritmética ainda se faz sentir, continuando a ser atribuído um grande peso ao cálculo, tal como o comprovam diferentes investigações. Assim, são vários os organismos, tanto nacionais como internacionais

(APM, 1988; NCTM, 1991, NRC, 1989) que recomendam, entre outros aspectos, a necessidade de dar realce à compreensão e desenvolvimento do sentido de número e de operação.

Mas a que nos referimos quando falamos em sentido de número e operação?

O sentido de número e operação passa por uma intuição e uma grande flexibilidade com os números, operações e suas relações e só se adquire com muito trabalho e com recurso a uma variedade de situações de aprendizagem que intencionalmente estabeleçam estas conexões.

Huinker (2002), referindo-se a Howden e Sowder, defende *sete dimensões* importantes para o desenvolvimento do sentido de operação, sendo aplicáveis tanto aos números inteiros como às fracções e decimais.

A *primeira dimensão* prende-se com a *compreensão do significado de operação* sendo necessário que o aluno passe por uma fase conceptual extensa, durante a qual contactará com uma grande variedade de modelos para cada situação.

A *segunda dimensão* é a *capacidade para reconhecer e descrever situações de vida real* para as várias operações. Para desenvolver esta capacidade, Huinker (2002) realça que as crianças precisam de explorar problemas com estruturas diferentes no sentido de se familiarizarem com uma variedade de situações para cada operação. Por exemplo, adicionar e subtrair deve incluir situações de combinação, separação e comparação. Multiplicar e dividir deve envolver situações em que os alunos possam lidar com grupos equivalentes, com a disposição rectangular, com razões, comparações e produtos cartesianos.

A *terceira dimensão* implica *dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal*, o que envolve o estabelecimento de conexões entre a compreensão conceptual das crianças, a linguagem informal e a formal. Os símbolos vão-se tornando ferramentas para o pensamento à medida que os alunos os usam como registos das acções e das coisas que já sabem. Muitos são os autores que nos alertam para o facto da introdução prematura da linguagem simbólica sem ligação ao mundo real prejudicar o desenvolvimento do sentido de operação. Manipulando os símbolos sem significado, o conhecimento simbólico fica mais ligado à memória do que à compreensão.

A quarta dimensão é a *capacidade para mudar facilmente de um modo de representação para outro.* O sentido de operação é reforçado através da conexão entre o mundo real, a linguagem oral, a manipulação de materiais, a representação pictórica e a simbólica.

A *quinta dimensão* do sentido de operação é *compreender as relações entre as operações.*

A *sexta dimensão* envolve a *capacidade para compor e decompor números e usar as propriedades das operações.*

A *sétima dimensão* implica ser capaz de *raciocinar sobre os efeitos que estas têm nos números.* O sentido de operação interage com o sentido de número e torna os alunos capazes de tomar decisões cuidadosas acerca da razoabilidade dos resultados a que chegaram. Quando adicionas dois números, obténs um resultado maior ou menor? Quando subtrais, o que podes dizer com segurança acerca da resposta? Obténs sempre um número maior quando multiplicas dois números? Obténs sempre um número menor quando divides? Podes dividir um número menor por número maior?

Multiplicação e divisão: novos sentidos para os números

Compreender o raciocínio multiplicativo, implica uma transformação muito importante no pensamento das crianças, apesar de muitas vezes as operações multiplicação e divisão serem consideradas relativamente simples do ponto de vista matemático. Estas duas operações revestem-se de uma grande complexidade a nível cognitivo, quando são encaradas em termos de modelação de situações e não apenas do ponto de vista do cálculo dado que envolvem novos significados para os números e novos tipos de relações entre eles que devem ser exploradas.

Sendo um campo conceptual bastante complexo e prolongado, implica que as crianças tenham a oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que apresentem diferentes tipos de situações e que conduzam a uma formalização desta operação, em vez de *praticarem* um número restrito de situações sem significado que, muitas vezes, não são mais que a aplicação de um algoritmo aprendido muito precocemente e sem qualquer sentido.

Desde muito pequenas, e portanto antes de uma aprendizagem formal, as crianças são confrontadas, no seu dia a dia, com situações de multiplicação e divisão e resolvem-nas da forma que para elas faz mais sentido. É, pois, importante que os alunos tenham oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que embora mobilizem a mesma operação tenham uma estrutura diferente e envolvam novos sentidos de número. O quadro 1 mostra alguns destes exemplos, cuja classificação varia de autor para autor.

Dado que nem todas as situações de vida real se podem resolver através de divisões exactas, importa ainda propor aos alunos um conjunto de problemas que envolvam situações de divisão com resto, sendo que a resposta a dar ao problema, por vezes, implica ter em conta também o resto.

Vejamos alguns exemplos:

1. Numa turma de 25 alunos pretende-se fazer uma reunião de encarregados de educação. Sabendo que cada mesa se podem sentar 7 pessoas, se estes forem todos à reunião, quantas mesas são necessárias?

Numa situação destas, é fundamental *ter em conta o resto*, pois a resposta correcta ao problema, tal como a sua resolução em contexto real, depende precisamente dele. Neste caso, é necessário juntar mais uma mesa para sentar os 4 encarregados de educação que faltam sentar.

Para fazer um bolo são precisos 3 ovos. Quantos bolos se podem fazer com 17 ovos?

Em problemas como este, o resto não é importante para a resolução do problema.

Problema tipo	Multiplicação	Divisão como medida	Divisão como partilha
Grupos equivalentes	O Rui comprou 4 carteiras de cromos. Se cada uma tiver 6 cromos, com quantos cromos ele fica?	O Rui comprou várias carteiras de cromos e ficou com 24 cromos. Se cada uma tiver 6 cromos, quantas são as carteiras que o Rui comprou?	O Rui tem ao todo 24 cromos, arrumados igualmente nas 4 carteiras. Quantos são os cromos em cada carteira?
Razão	A Helena anda 3 km por hora. Quantos km percorre em 5 horas?	A Helena anda 3 km por hora. Quantas horas demora para fazer 15 km?	A Helena andou 15 km em 5 horas. Se ela andar sempre à mesma velocidade, quantos km andou por hora?
Preço	Cada caderno custa 2 euros. Quantos custam 7 cadernos?	Cada caderno custa 2 euros. Quantos cadernos se podem comprar com 14 euros?	A Rita comprou 7 cadernos e pagou 14 euros. Se cada caderno custar o mesmo preço, quanto pagou por cada um?
Comparação multiplicativa	A girafa é 3 vezes maior que o canguru. Se este tiver 2 m de altura, quanto medirá a girafa?	A girafa tem 6 metros de altura. O canguru tem 2 m. Quantas vezes é que a girafa é maior que o canguru?	A girafa tem 6 m de altura. Ela é 3 vezes maior que o canguru. Quanto mede o canguru?
Disposição rectangular	Se tivermos 3 filas cada uma com 4 crianças, quantas são as crianças ao todo?	Doze crianças estão dispostas em filas. Sabendo que são 3 filas, quantas crianças estão em cada fila?	
	Quantos mosaicos são necessários para cobrir o chão de uma sala, sabendo que o lado maior leva 12 e o menor 6?	Sabendo que o chão duma sala tem 72 mosaicos e que o lado maior tem 12, quantos mosaicos tem o lado menor?	
Produto cartesiano/ Combinatória	Se 4 rapazes e 3 raparigas estiverem a dançar, quantos pares diferentes se podem formar?	Num baile formaram-se 12 pares diferentes. Como os rapazes eram 4, quantas eram as raparigas?	

Quadro 1.

> Numa loja há 26 bolos para empacotar em caixas de 4 bolos cada. Depois de encher as caixas que se conseguir, quantos bolos sobrarão?

Neste caso, o resto é a resposta do problema.

> Uma senhora comprou 7 pizzas. Ela quer reparti-las todas igualmente pelos seus 6 sobrinhos. Que quantidade de pizza come cada sobrinho?

Esta situação aparece quando a resposta inclui uma parte fraccionária. Ela diverge um pouco das anteriores dado que, como o todo tem de ser esgotado, não pode haver resto.

As estratégias que as crianças usam para resolver os vários tipos de problemas apresentados ao longo deste artigo, quer sejam de multiplicação ou divisão como partilha ou medida, estão relacionadas com a representação mental que elas fazem das situações, podendo ser modeladas com o recurso a materiais manipuláveis ou a qualquer outra estratégia. O importante é que a criança possa recorrer aos seus próprios métodos, as *suas estratégias* de resolução, e tenha ainda oportunidade de confrontar os seus processos com os dos colegas. Conhecer estas estratégias ajuda o professor a desenvolver actividades cada vez mais elaboradas no sentido de os alunos progredirem no desenvolvimento dos conceitos.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., Empson, S. B. (1999). Multiplication and Division: Problem Types and Children's Solution Strategies. *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction* (pp. 33–53). Heinemann e NCTM.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., e Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplcation and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3–17.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 276–294). Nova Iorque: Macmillan.

Huinker, D. (2002). Examining Dimensions of Fraction Operation Sense. *Making Sense of Fractions, Rations, and Proportions. Yearbook*, (pp. 73–78). Reston, Virginia: NCTM

Matos, J. M., Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. e Serrazina, M.L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Alice Carvalho
E. B. 1 Orlando Gonçalves, Amadora
Henriqueta Gonçalves
E. B. 1 Mina de Água, Amadora

A ansiedade na Matemática

Os resultados na Matemática, olhados numa perspectiva quantitativa constituem, habitualmente, a principal preocupação de professores, pais e alunos relegando para um plano secundário as competências matemáticas. É certo que nos currículos/programas estas surgem especificadas de uma forma sistemática mas, na realidade, o objectivo a alcançar é a obtenção de resultados quantitativos, como consequência directa da forma de olhar o ensino, e em especial o ensino da Matemática, com base em estatísticas de insucesso/sucesso. No entanto, e não obstante os esforços no sentido da sua melhoria, estes resultados continuam a ser pouco satisfatórios e mantêm actual a discussão sobre o que influencia o aproveitamento dos alunos nesta disciplina.

Podem-se abordar os factores mais diversos mas pretendemos falar de um que, apesar de não surgir com um protagonismo relevante, pode ser decisivo no alcance dos objectivos: a ansiedade. A noção de ansiedade surge num trabalho subordinado a este tema da autoria de Cruz e Mesquita. Os autores referem Lazarus (1975) quando salientam a elevada prevalência do medo à Matemática como uma *fobia* da Matemática "e que as dificuldades representam *problemas* nos anos que se seguem" (p. 79).

A surgimento desta ansiedade deriva de um conjunto muito variado de causas, mas pensamos que algumas terão mais preponderância do que outras. O facto de os programas abordarem diversos conteúdos, muitas vezes de um modo muito superficial sendo os professores pressionados, na sua abordagem, pelo factor tempo, faz com que os problemas de aprendizagem não possam ser superados por um número significativo de alunos. Obviamente, se não forem adquiridas as competências necessárias, sobre as quais novas serão construídas, as dificuldades dos alunos ir-se-ão agravando. Sendo a Matemática constituída por *anéis* interrelacionados, é recorrente o sentimento de que as principais limitações na aprendizagem derivam da falta de bases que sustentam novas matérias.Por outro lado, a aceitação social que se verifica para justificar os maus resultados associando-os à falta de *jeito* natural, proporciona um suporte demasiadamente usado como desculpabilização geral.

A falta de ligação entre a Matemática que se aprende na escola e os reais interesses dos alunos, que olham para a disciplina como tendo um nível de abstracção exagerado e pouco compreensível, só ao alcance de alguns *iluminados*, faz com que a vontade de aprender se vá perdendo, à medida que o nível de complexidade vai aumentando.

Os autores referidos anteriormente apresentam várias conceptualizações e definições para a ansiedade face à Matemática e estabelecem uma distinção entre o que consideram *ansiedade nos testes* e a *ansiedade da Matemática*. Não deixa de ser verdade que a ansiedade nos testes se reflecte na ansiedade à disciplina, mas esta última assume um carácter mais psicológico como resistência à linguagem que constitui a forma de comunicação em Matemática.

Os alunos que manifestam mais dificuldades na aprendizagem e, consequentemente, maiores níveis de ansiedade revelam, na generalidade, um baixo nível de auto-confiança, por vezes como consequência de pressão por parte dos pais que colocam expectativas elevadas, às quais têm dificuldades em corresponder, também pelo desinteresse na actividade escolar, ou pela própria fase de crescimento que atravessam, a adolescência. Estes factores terão um efeito negativo no desempenho nos testes, que por si só causam tensão interna com reflexos na disciplina, sendo que o desempenho nos testes, frequentemente, não é consentâneo com a actividade desenvolvida pelo aluno na sala de aula. Desta forma, se os alunos se considerarem capazes de obterem resultados positivos, os níveis de ansiedade serão obrigatoriamente menores.

Para a maioria dos alunos, a educação escolar provoca um certo nível de ansiedade, a qual, provavelmente aumenta a actividade facilitando a aprendizagem. No entanto, quando a ansiedade se torna aguda, inibindo a natural predisposição para aprender, produz a desorganização das respostas cognitivas. Elevados níveis de ansiedade assumem um carácter prejudicial porque provocam dificuldade em transformar tensão em acção construtiva, tornando difícil enfrentar um problema.

Cruz (1989) enuncia um conjunto alargado de estudos nos quais se evidenciam os efeitos negativos da ansiedade no rendimento escolar e consequentemente nos *processos de adaptação dos estudantes à escola*.

Sendo certo que estamos perante uma situação complexa, talvez uma das formas de a ultrapassar seja a de promover as interacções entre professor-aluno no sentido de que este ganhe auto-confiança e sinta que tem algum apoio no processo de aprendizagem. Neste sentido aponta Ponte (1995) que refere que investigações realizadas por Neves (1998), Moreira (1989), Zambujo (1989) e Cardoso (1995) envolvendo turmas problemáticas nas quais se obtiveram resultados positivos promovendo uma relação directa entre professor e aluno.

Referências Bibliográficas

Cruz, J. F. A. (1989). *Incidência, desenvolvimento e efeitos da ansiedade nos testes e exames escolares* (pp. 111–130) *Revista Portuguesa de Educação, 2*(1) – CEEDC: Universidade do Minho.

Cruz, J. F. A. e Mesquita, A. P. (1995). *Ansiedade na Matemática: natureza e efeitos no rendimento escolar* (pp. 79–88) *Revista Portuguesa de Educação, 8*(2) – IEP: Universidade do Minho.

Ponte, J. P. et al. (1999). Investigação em Educação Matemática: implicações curriculares. *(Ciências da Educação, 22)* – Ministério da Educação: INE.

Eduardo Dinis

Escola Secundária de Ponte de Sôr

Cálculo da Páscoa

A Páscoa é uma festividade cristã de data variável. No ano de 325 d.C. foi instituído que a Páscoa seria celebrada após a primeira Lua Cheia depois do equinócio vernal (o primeiro dia de Primavera no hemisfério Norte). No entanto, em 1583, foi necessário fazer-se um reforma no calendário vigente, o calendário Juliano, que partia do pressuposto, errado, de que o ano era composto de 365 dias e 6 horas, ao invés de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos. Decorridos 1600 anos (de 46 a.C. a 1582), esta diferença já havia adiantado o calendário em 10 dias que vieram a ser retirados sob base científica nessa reforma, o que resultou na omissão de 10 dias na contagem do mês de Outubro daquele ano. À quinta-feira, dia 4, seguiu-se a sexta-feira, dia 15. Também, de acordo com esse sistema, os anos múltiplos de 100 deixam de ser bissextos, excepto os também múltiplos de 400, retirando-se, com isso, 1 dia a cada 100 anos e adicionando-se 1 dia a cada 400 anos. A partir daí, durante o papado de Gregório XIII (que também era astrónomo), para se calcular o dia de Páscoa num determinado ano, definiu-se que a Páscoa seria no domingo a seguir à primeira Lua Cheia, a cair no dia 21 de Março ou nos dias seguintes. Cada Lua Cheia ocorre 13 dias depois da Lua Nova anterior. A data da última Lua Nova de Janeiro calcula-se a partir da Epacta (número de dias desde a última Lua Nova, em 1 de Janeiro) do ano, e dela se obtém as Luas Novas de Fevereiro, Março e Abril.

Podemos recorrer a vários algoritmos para calcular a data desta festa. Encontrei alguns desses algoritmos durante uma pesquisa na Internet no site http://www.geocities.com/CapeCanaveral/4274/portug2.htm. Usando alguns dos algoritmos possíveis decidi criar o programa PÁSCOA. A título de exemplo, apresento os algoritmos aplicados, o de Jean Baptiste Delambre, que calcula a Páscoa a partir de 1583 (calendário Gregoriano) e outro anónimo para o calendário Juliano (anterior a 1583).

Para o *calendário Juliano*:

Faça:

A = o resto de $(Ano \div 4)$
B = o resto de $(Ano \div 7)$
C = o resto de $(Ano \div 19)$
D = o resto de $[(19 \times C + 15) \div 30]$
E = o resto de $[(2 \times A + 4 \times B - D + 34) \div 7]$
F = o inteiro de $[(D + E + 114) \div 31]$
G = o resto de $[(D + E + 114) \div 31]$
A Páscoa será no dia G+1 do mês F.

Para o *calendário Gregoriano*:

Faça:

A = o resto de $(Ano \div 19)$
B = o inteiro de $(Ano \div 100)$
C = o resto de $(Ano \div 100)$
D = o inteiro de $(B \div 4)$
E = o resto de $(B \div 4)$
F = o inteiro de $[(B + 8) \div 25]$
G = o inteiro de $[(B - F + 1) \div 3]$
H = o resto de $[(19 \times A + B - D - G + 15) \div 30]$
I = o inteiro de $(C \div 4)$
K = o resto de $(C \div 4)$
L = o resto de $[(32 + 2 \times E + 2 \times I - H - K) \div 7]$
M = o inteiro de $[(A + 11 \times H + 22 \times L) \div 451]$
P = o inteiro de $[(H + L - 7 \times M + 114) \div 31]$
Q = o resto de $[(H + L - 7 \times M + 114) \div 31]$
A Páscoa será no dia Q+1 do mês P.

O programa PÁSCOA poderá ser encontrado e descarregado no site http://Vr1.no.sapo.pt. O programa é de simples utilização. Depois de carregá-lo na sua calculadora, execute-o normalmente.

```
prgmPASCOA■
```

```
prgmPASCOA
MADE BY VR1,2003
ANO?■
```

Indique o ano:

```
prgmPASCOA
MADE BY VR1,2003
ANO?2004■
```

```
---------2004---------
PASCOA: 11 DE ABRIL
CALENDARIO GREGORIANO
```

Ficamos a saber que no próximo ano a Páscoa é a 11 de Abril. E pode-se continuar:

```
OUTRA DATA?
1:SIM
2:NAO
```

```
prgmPASCOA
MADE BY VR1,2003
ANO?2004
MADE BY VR1,2003
ANO?1143■
```

```
---------1143---------
PASCOA: 17 DE ABRIL
CALENDARIO JULIANO
```

Enquanto me dediquei a pesquisar e fazer este programa encontrei outras informações, das quais incluí algumas aqui, sobre os calendários ao longo do tempo e assuntos relacionados:

http://www.astro.up.pt/nd/astro_news/2002/0402pt.html

http://www.calendario.cnt.br/calendar11.htm

http://www.mat.ua.pt/rosalia/cadeiras/ADA/p11.pdf

http://www.calendariofacil.hpg.ig.com.br/calendario_gregoriano.htm

Paulo Ferreira, aluno do 11°, 7ª,
Esc. Sec. de Vergílio Ferreira—Lisboa

A propósito das Recomendações da Comissão para o Estudo da Matemática e das Ciências

A Comissão para o Estudo da Matemática e das Ciências preparou um documento, divulgado pelo Ministério da Educação à comunicação social, sobre o qual a Associação de Professores de Matemática (APM) não pode deixar de dar parecer. Antes de mais porque o texto enuncia que constitui *um conjunto de orientações destinado especificamente à Matemática*, área em que esta associação profissional tem já um longo trabalho.

Depois desta Comissão ter sido criada há mais de um ano, esperava-se que fossem apresentadas recomendações claras, organizadas e, principalmente, sustentadas por dados provenientes de avaliação, evitando que fossem as opiniões, as crenças ou os preconceitos a justificarem conclusões e a determinarem recomendações. Num campo tão complexo como é a educação, e também a educação matemática, é necessário existirem justificações fundamentadas e devidamente apoiadas em análises credíveis. Este documento não nos dá nenhum sinal de que essa preocupação tenha existido. Por exemplo, quando se afirma que *a elevada componente de gestão flexível do currículo tem como resultado uma evidente dispersão dos desempenhos*, gostaríamos de ser esclarecidos relativamente aos dados e à respectiva análise que sustentam estas afirmações.

Esperava-se que uma comissão vocacionada para indicar medidas que resolvessem os problemas com que se debate o ensino da matemática fosse independente e pudesse ser um órgão consultivo para aconselhar o Ministro da Educação. Também aqui a nossa expectativa ficou defraudada, pois não raras vezes as recomendações deste documento já tinham sido anunciadas e defendidas noutros contextos (a redefinição dos ciclos de escolaridade, na proposta de lei de bases da educação apresentada pelo governo, ou a instituição de exames nacionais no ensino básico, já legislados para o 9º ano de escolaridade). Além disso, a Comissão ultrapassou largamente a sua função de conselheira quando adianta a revisão do Estatuto da Carreira Docente, afirmando em que sentido ela será feita, no que diz respeito à selecção de candidatos a professores.

A eficácia das recomendações fica ainda mais comprometida por estas não estarem contextualizadas. De facto, não existe qualquer referência às condições de trabalho dos professores, à realidade das escolas ou ao actual momento do sistema educativo, com uma reorganização curricular no ensino básico e uma revisão/reforma do ensino secundário a darem os primeiros passos. Pelo contrário, várias das recomendações contrariam o que está estipulado em textos oficiais, sejam leis ou textos programáticos. Por exemplo, as calculadoras fazem parte integrante dos programas em vigor, nos diversos ciclos de escolaridade, mas são vistas com uma desconfiança nítida. Outra situação de contradição surge quando a Comissão defende a definição de competências por ano, contrariando a lógica de nível de ensino e de ciclo que é adoptada no Currículo Nacional do Ensino Básico.

Será de salientar a nossa concordância relativamente a alguns princípios defendidos, nos quais a APM revê o que defende e defendeu desde a sua constituição: a importância do ensino da geometria, a construção e divulgação de materiais didácticos específicos, o uso de calculadoras em contextos significativos são exemplos disso. O nosso trabalho tem ido no sentido de envolvermos os encarregados de educação e divulgarmos a matemática, procurando que a sua imagem societária seja marcada pela presença de prazer, criatividade, beleza e utilidade.

Existem diferenças no entendimento de cada um dos aspectos e nas justificações apresentadas. Claro que concordamos com a existência de uma cultura de avaliação, mas no sentido em que a avaliação seja vista como parte integrante do processo de ensino/aprendizagem. Evidentemente que defendemos o uso criterioso das calculadoras, tal como a utilização de qualquer outro material, do lápis ao computador, e não só nos dois primeiros ciclos de escolaridade. Obviamente, consideramos essencial a existência de um bom ambiente de sala de aula, no entanto não vemos a aprendizagem como um processo de transmissão.

Não deixa também de ser surpreendente que uma Comissão desta natureza pretenda num texto tão pouco fundamentado fazer as recomendações tidas como necessárias para fomentar *o valor formativo de disciplinas como a Matemática e as Ciências*. Aliás, o texto coloca mais dúvidas do que presta esclarecimentos. Eis alguns exemplos. Afirma-se, como medida de carácter global "*incentivar os cursos de formação contínua de professores nas áreas da matemática e do português. Promover a diferenciação positiva pela atribuição de mais créditos às acções de formação nestes âmbitos.*" Esta medida aplica-se a todos os professores? Os nossos colegas das outras disciplinas merecem esta discriminação negativa?

Para o 1° ciclo do ensino básico propõe-se o limite mínimo de 90 minutos para a matemática e o português. Apesar de também nós acharmos que se trata de áreas fundamentais, esta recomendação levanta-nos algumas questões. Há alguns estudos que informaram a Comissão sobre o tempo dedicado actualmente a cada uma das áreas disciplinares? Será recomendando 90 minutos que resolve o problema? Para fazer o quê? Quem costuma dedicar menos tempo como poderá ser apoiado de forma a não dar mais do mesmo? E questões como o isolamento, a pobreza das nossas escolas, a falta de materiais didácticos — é curioso que a recomendação para a valorização do ensino da geometria não inclui nenhuma indicação de materiais a serem utilizados — os quatro anos de escolaridade numa sala, etc, etc ... ? Como ficam as outras áreas contempladas nos programas? A maioria dos nossos alunos tem possibilidades de ter actividades de complemento curricular? Não tem de ser a escola a proporcionar-lhe um leque diversificado de opções? As cinco horas diárias chegam?

Todas estas dúvidas, que representam apenas uma parte das interrogações suscitadas pelas recomendações em apreço, deixam uma enorme confusão em quem, como nós, pretende colaborar na melhoria concertada do ensino da Matemática em Portugal. Quem são os destinatários destas recomendações? O Ministro da Educação que é simultaneamente o Presidente da Comissão? O documento vai ser sujeito a discussão? As mudanças anunciadas vão ser colocadas em texto de lei, sem uma discussão alargada? Haverá o cuidado de preparar essas mudanças, evitando que estejam simultaneamente em vigor directivas contraditórias, ao invés do que agora está a acontecer? Quais as recomendações que vão ser adoptadas? De que forma será considerada a nossa opinião?

Sabemos que directivas contraditórias e mudanças bruscas não ajudam em nada a resolução de problemas educativos, assim como estamos conscientes de que não existem alterações reais sem a participação efectiva dos professores. Tencionamos chamar a atenção para evitar a existência de condicionamentos geradores de instabilidade e estamos dispostos a colaborar na procura de soluções.

A Direcção da Associação de Professores de Matemática

Projectos de Matemática

Hélia Sousa

Este texto decorre de uma participação no painel sob o tema *Projectos de Matemática* integrado no VI Encontro de Professores do 1° Ciclo, realizado em Faro, em Abril de 2003, e baseia-se num estudo que se realizou no âmbito de uma tese de mestrado.

O trabalho de projecto na área da matemática levanta ainda muitas dúvidas para a maioria dos professores. Como é que os alunos se podem apropriar da matemática através de projectos? Será que o programa e as orientações curriculares são trabalhados? Que tipo de competências se desenvolvem através dos projectos? Como introduzir? Como organizar a turma? Qual é o papel do professor? E dos alunos? Estas e outras questões colocam-se aos professores chegando em muitos casos a constituir verdadeiros obstáculos à sua implementação.

Nesta investigação procurou-se dar alguns passos na compreensão das potencialidades do trabalho de projecto na área da matemática, neste nível de ensino. Realizou-se numa turma do 4° ano de escolaridade já familiarizada com a metodologia de projecto na área de Estudo do Meio, mas não na área da Matemática. A professora apresentou uma proposta de trabalho à turma que constou do seguinte:

> *"Gostariam de utilizar a metodologia de projecto na área de matemática? O que gostariam de investigar sobre a matemática na vida do dia-a-dia?"*

Os alunos aderiram ao desafio e, depois de pensarem no assunto durante alguns dias, apresentaram algumas questões que gostariam de investigar. Nessa aula, os alunos apresentaram as suas ideias, dialogaram, desmontaram algumas questões que estavam ainda pouco claras, formularam subquestões e negociaram com a professora a forma como se iriam organizar em grupos. As questões a investigar foram as seguintes:

- *Quanto dinheiro se gasta em combustível nas viagens?*
- *Que formas geométricas podemos encontrar na arquitectura e no design?*
- *Como funcionam os bancos?*
- *Qual é o preço das coisas?*
- *Há quanto tempo ocorreram acontecimentos importantes?*
- *Quais as formas geométricas das pedras preciosas?*
- *Que modificações vai haver com a entrada do Euro?*

Organizaram-se em grupos de três e/ou quatro elementos tendo como critério, na sua constituição, ter o mesmo interesse no assunto a investigar. A professora teve muita preocupação em identificar e incentivar as motivações dos alunos, de modo a que estes ficassem desde o primeiro momento envolvidos e apropriados do projecto que iriam desenvolver.

Em seguida, apresenta-se o desenvolvimento de um desses projectos.

O projecto das viagens

Quanto dinheiro se gasta em combustível nas viagens?

Esta questão foi colocada por três rapazes que se sentiram motivados para investigarem sobre os gastos em combustível nas viagens, consoante o tipo de transporte utilizado e o respectivo combustível. O grupo começou por conceber um plano do projecto. Para registarem os vários aspectos necessários utilizaram uma grelha, tal como se pode verificar no quadro 1.

Depois do plano elaborado, os alunos iniciaram um percurso de pesquisas e de recolha de dados. Para o efeito consultaram vários tipos de livros, a Internet, mapas e outras fontes. Perceberam que algumas questões eram demasiado complexas e optaram por abandoná-las, por exemplo, as

Sabemos que	Queremos saber	Como vamos fazer	Quem vai fazer	Como vamos apresentar
• Sabemos que os carros gastam mais combustível se andarem mais rápido e nas bichas. • Sabemos que carros diferentes podem gastar combustíveis diferentes. • Sabemos que há tipos de combustível mais caros do que outros.	• Se formos do Algarve ao Porto quanto dinheiro se gasta? • Qual o preço dos combustíveis: gasolina sem chumbo, gasolina super e gasóleo? • Quais são os carros que gastam mais e os que gastam menos? • Por que há carros que gastam mais combustível do que outros? • Quanto combustível gastariam um barco e um avião se dessem a volta ao mundo? • De que é feito o combustível? • Quanto combustível gasta uma mota a dar a volta ao mundo a 200Km?	• Ir a bombas de gasolina; • Consultar mapas de estradas; • Consultar o mapa de Portugal; • Entrevistar vendedores de carros; • Perguntar à filha da Márcia que trabalha na TAP; • Perguntar ao primo do Pedro que anda de barco; • Entrevistar os pais.	Filipe Fábio Paulo	

Quadro 1. Plano do Projecto: *Quanto se gasta em combustível nas viagens?*

questões que se relacionavam com viagens à volta do mundo, concentrando-se nas viagens de carro entre localidades portuguesas.

Dados recolhidos pelos alunos:

- Distâncias entre lugares (7 km, 228 km, 300 km, 306 km, 404 km, 732 km, 803 km)
- Tipo de carro, tipo de combustível e o combustível consumido aos 100 km.
- Preço do litro de cada tipo de combustível (dados recolhidos em 2001 com o escudo ainda em vigor).

Exemplos de problemas e estratégias de resolução

Problema A

Quanto se gasta de Vila V. de Raia a Vila Real de Santo António?

Dados do problema

- Distância — 803 km
- Carro — Cheroke
- Preço do combustível utilizado — 130$00 por litro
- Gasta aos 100 km — 10 litros

Estratégia de resolução: Os alunos começaram por organizar os dados e concluíram que o carro gastaria 1300$00 aos 100 km.

Litros	km	escudos
10 l	100 km	1 300$00
x 8	x 8	x 8
80 l	800 km	10 400$00

Em seguida seguiram o seguinte raciocínio:

Para percorrer 800 km são precisos oito vezes os litros gastos em 100 km, ou seja, 80 litros e, também, oito vezes a importância gasta em 10 litros.

Finalmente, faltava-lhes saber quanto dinheiro gastariam em combustível para percorrer 3 km.

E tiveram o seguinte diálogo:

Fábio: Se soubéssemos quanto se gasta para percorrer 1 km … .
Filipe: Sabemos que se gasta 1300 aos 100 … podemos dividir por 10 e por 100.

Organizaram os dados do seguinte modo:

100 km	10 km	1 km
1300$00	130$00	13$00

Calcularam 3 x 13$00 = 39$00.

Adicionaram os dois valores e obtiveram o valor gasto em 803 km (10.439$00).

Todo este processo até chegarem à solução foi desafiante e entusiasmou-os muito. A própria professora estava surpreendida com o desempenho dos alunos.

Problema B

Quanto se gasta de Bragança a Faro?

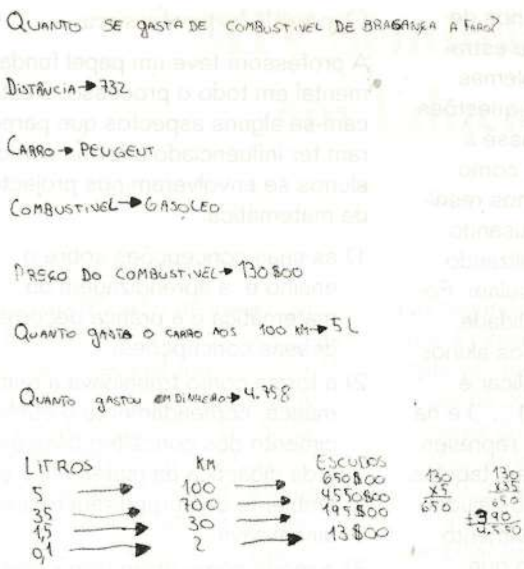
Dados do problema

- Distância — 732 km
- Carro — Peugeut
- Combustível — Gasóleo
- Preço do combustível — 130$00
- Quanto gasta o carro aos 100 km — 5 l

Estratégia de resolução: Seguiram o mesmo tipo de raciocínio e começaram por calcular quanto dinheiro se gastava para andar 100 km e 700 km. E, mais uma vez, registaram recorrendo a um esquema:

Litros	km	escudos
5	100	650$00
35	700	4550$00
?	30	?
?	2	?

Enquanto registavam iam avançando com propostas de resolução. Faltava-lhes ainda saber quantos litros de combustível eram necessários para percorrer 30 km e 2 km e, também, quanto dinheiro se gastava para percorrer essas mesmas distâncias.



Um dos alunos começou por descobrir a quantidade de combustível necessária para percorrer 30 km.

Paulo: ... aos 100 km gasta 5 l ... aos 10 km gasta 0,5 l ... 30 km ... são três vezes dez, por isso, são três vezes 0,5 litro ... dá 1,5 l

Mas outro aluno tinha outra estratégia que explicou ao grupo:

Fábio: ... gasta aos 100 km — 5 l ... aos 300 km — 15 l ... aos 30 km — 1,5 l

Ambos tinham chegado ao mesmo resultado, mas por processos diferentes.

Depois outro aluno continuou:

Filipe: Se cada litro custa 130$00, quanto custa meio litro?

Resolveram recorrer à *máquina das metades* como costumavam fazer noutras situações:

13	½	6,5
130$		$

E assim rapidamente chegaram ao que precisavam ...

Filipe: ... um litro custa 130$00 então meio litro custa 65$00 e mentalmente calcularam.

Paulo e Filipe: 1,5 litro custa 195$00.

Continuaram ... iam falando e um deles registava:

Fábio: ... em 100 km gastam-se 5l ... em 200 km gastam-se 10 l ... em 2 km ... 0,1 l

Este raciocínio foi fácil para eles porque tinham um bom sentido de número, nomeadamente dos *números decimais* e dominavam muito bem este tipo de conhecimentos.

Paulo: Se 1 litro custa 130$ ... 0,1 custa 13$00.

Finalmente foi fácil chegar ao custo total, isto é, quanto se gasta para percorrer os 732 km de Bragança a Faro, num Peugeot a gasóleo ao preço de 130$00 o litro. Adicionaram os valores obtidos: 4550 + 195 + 13 = 4 758$00.

Problema C

Quanto se gasta de S. Leonardo ao Porto?

Depois de pesquisarem a informação necessária e estarem na posse dos dados iniciaram o processo de resolução.

Dados do problema

- Distância — 404 km
- Carro — Opel
- Preço do litro da gasolina sem chumbo 98 — 191$00
- Gasta aos 100 km — 7 l

Estratégia de resolução: Desta vez, o grupo organizou a tabela 1 que os ajudou a sistematizar os dados e a tornar mais fácil a resolução do problema. Esta forma de organização facilitou-lhes o raciocínio e a sequência dos passos a realizar.

Filipe: Se o carro gasta 7 litros aos 100, em duzentos gasta 14 litros, em 300 ... 21 litros e em 400 ... 28 litros. Como o preço do litro é 191$00 ... 28 vezes 191$00 (fizeram o algoritmo) dá 5348$00.

Paulo: Então e agora?

Filipe: Agora temos de pensar ...

Fábio: Olha ... sabemos 400 ... 40 é uma décima, 4 é uma centésima. (E aplicaram a regra da divisão por cem)

Filipe: Boa. Agora soma-se ... (fizeram o algoritmo) e dá 5401$48.

Os alunos continuaram a resolver situações similares, embora procurando distâncias que tornassem a resolução cada vez mais complexa e desafiante.

Comunicação à turma

Este grupo optou por apresentar o projecto sem o recurso a quaisquer meios ou materiais suplementares. Na apresentação, começaram por ler alguma informação que tinham recolhido e iam mostrando as ilustrações que tinham feito sobre os assuntos. Em seguida, foram comunicando as várias situações que tinham explorado. Procuraram explicar aos colegas o raciocínio que tinham seguido para resolver os problemas. No final, os elementos do projecto distribuíram por todos os grupos uma folha com problemas do mesmo tipo dos apresentados para os colegas resolverem.

100 km	200 km	300 km	400 km	40 km	4 km	404 km
7 l	14 l	21 l	28 l	2,8 l	0,28 l	28,28 l
1337$00			5348$00		53$48	5401$48

Tabela 1.

Avaliação do projecto

No momento de avaliação final, os elementos do grupo que realizaram o projecto começaram por fazer a auto-avaliação. Expressaram o seu agrado em terem realizado o projecto, mas referiram também que tinham sentido algumas dificuldades iniciais, nomeadamente: terem colocado algumas questões difíceis e não saberem se iriam conseguir encontrar as respostas e, também, terem demorado muito tempo na recolha dos dados. Os três elementos do grupo referiram que tinham aprendido muito e gostaram de ter trabalhado em conjunto. Relativamente à hetero-avaliação, alguns colegas referiram que tinham gostado do projecto, mas alguns alunos comentaram que a apresentação poderia ter sido mais interessante se tivessem utilizado materiais, por exemplo, usando acetatos ou outros meios. Também manifestaram o seu agrado pelos problemas que o grupo preparou para a turma resolver. A professora destacou a forma como os alunos resolveram os problemas e o empenho com que o grupo tinha trabalhado, mas também referiu que a apresentação poderia ter sido mais cuidada.

Comentário

Este projecto tem um grande interesse do ponto de vista matemático e da aprendizagem da matemática para este nível de ensino. A literatura científica tem demonstrado a importância de alguns *caminhos* que facilitam a compreensão dos conceitos de razão e de proporção (por exemplo, Kieren, 1988; Vergnaud, 1988; Lamon, 1993), mas em Portugal, tradicionalmente, os alunos aprendem a resolver os problemas que envolvem razão e proporção usando a regra de *três simples* ou o *produto cruzado*, procedimentos que memorizam e acabam por utilizar em todas as situações que implicam três valores e uma variável do tipo $a/b = c/x$ (podendo a variável mudar de lugar).

No projecto das viagens não foi isto que aconteceu. A professora não pretendia ensinar-lhes conhecimentos ou procedimentos novos que, além de não fazerem parte do programa do 1° ciclo, iriam impedir os alunos de desenvolverem outro tipo de estratégias de resolução de problemas. Por isso, foi-lhes colocando questões e dando pistas que os ajudasse a avançar mas sem lhes dizer como deviam fazer. Assim, os alunos resolveram todos os problemas usando estratégias pessoais e mobilizando os conhecimentos que possuíam. Foi interessante observar a facilidade, flexibilidade e agilidade que os alunos tiveram nos cálculos (multiplicar e dividir por 10; 100; 0,1; 0,01 ...) e na mobilização de esquemas e representações simbólicas (diagramas, tabelas, esquemas, grelhas ...) que os ajudou no raciocínio e no desenvolvimento dos processos de resolução que seguiram.

A diversidade de estratégias que estes alunos utilizaram na resolução dos problemas também estava relacionada com a forma como tinham aprendido Matemática desde o 1° ano de escolaridade, ou seja, habituados a fazerem descobertas, a pensarem por si próprios, a encontrarem estratégias diversificadas para resolverem os problemas, a comunicarem os seus raciocínios e a serem muito ágeis e flexíveis no cálculo. A autonomia e a responsabilidade no próprio processo de aprendizagem foram aspectos muito visíveis nestes alunos na realização dos projectos bem como a criatividade, o pensamento crítico e o desenvolvimento de competências de nível superior, como por exemplo, a capacidade de reflectirem sobre o desenvolvimento do processo e de alterarem caminhos, entre muitos outros aspectos. O trabalho cooperativo teve, também, um papel determinante no desempenho dos alunos.

Na realização dos projectos de matemática, os alunos abordaram e desenvolveram vários aspectos fundamentais do currículo proposto para este nível de ensino, de uma forma integrada e dando verdadeiro sentido às aprendizagens. A dimensão social e os aspectos afectivos e emocionais estiveram implicados em todo o processo. Os desempenhos dos alunos, designadamente no projecto das viagens, superaram as expectativas da professora.

O papel da professora

A professora teve um papel fundamental em todo o processo. Destacam-se alguns aspectos que pareceram ter influenciado a forma como os alunos se envolveram nos projectos de matemática:

1) as suas concepções sobre o ensino e a aprendizagem da matemática e a prática decorrente dessas concepções;
2) a forma como trabalhava a matemática, nomeadamente o conhecimento dos conceitos básicos e da didáctica da matemática e o ambiente de aprendizagem que dinamizava;
3) o modo como dinamizou e orientou o trabalho de projecto.

A natureza das tarefas que os professores propõem aos alunos e o que estes fazem nas aulas de Matemática são questões centrais no ensino desta disciplina, principalmente numa perspectiva de *Matemática* para todos e numa sociedade que exige, cada vez mais, cidadãos competentes e literados. O trabalho de projecto tem potencialidades únicas no desenvolvimento de cidadãos com esse tipo de perfil e, por isso mesmo, merecia que lhe fosse dado maior visibilidade neste nível de ensino.

A prática deste tipo de metodologia exige, no entanto, professores bem preparados, reflexivos, empenhados num investimento contínuo na sua formação e na troca de experiências com os seus pares. Neste sentido, o trabalho colaborativo e cooperativo entre os professores assume a máxima importância na escola de hoje.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P (1995). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do projecto MAT_{789}*. Tese de doutoramento. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P. (2002). Trabalho de projecto na escola e no currículo. In ME/DEB, *Novas áreas curriculares*. Lisboa: DEB, pp. 19–38.

DEB, (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Hélia Sousa
Escola EB1 nº 195, Lisboa

XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática

O Grupo de Trabalho de Investigação da APM organizou, na Escola Superior de Educação de Santarém, a 17 e 18 de Novembro de 2003, o XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Este, que teve como o objectivo central divulgar a investigação em Educação Matemática que se realiza no nosso país, seguiu o formato habitual e contou com a participação de cerca de centena e meia de investigadores e professores dos diversos níveis de ensino.

O XIV SIEM iniciou-se com uma sentida homenagem ao Paulo Abrantes, salientando as diferentes facetas da sua vida pessoal e profissional, como professor e investigador.

Na primeira conferência plenária, Leonor Santos, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa abordou o tema *A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática*. Nela foram analisados os resultados obtidos por cinco estudos realizados em Portugal no âmbito da avaliação. Estes estudos apontam para um *deficit* tanto em práticas inovadoras de avaliação como na utilização de uma diversidade de instrumentos e formas de avaliação dos alunos.

Aliás, Lorenzo Blanco, da Universidad Extremadura, no comentário que realizou a esta conferência, reforçou a ideia da necessidade de uma maior diversidade de instrumentos e formas de avaliação.

A segunda conferência plenária realizada por Teresa Assude, da Universidade de Provença, abordou o *Estudo do currículo de Matemática: abordagem ecológica e alguns resultados.* A partir do currículo do ensino da álgebra, especialmente do ensino da inequações, em França, foi apresentada uma abordagem ecológica da evolução dos currículos, destacando as grandes referências e rupturas na organização curricular ao longo do século XX.

No segundo dia de trabalhos, a conferência plenária *As investigações matemáticas: análise de um projecto curricular* de Joana Brocardo, da Escola Superior de Educação de Setúbal, incidiu nas investigações matemáticas na sala de aula a partir de dados relativos a um projecto de desenvolvimento curricular levado a cabo numa turma do 8º ano de escolaridade, sendo evidenciadas as potencialidades das investigações matemáticas como metodologia de desenvolvimento do currículo.

Nas variadas comunicações, que incidiram particularmente no currículo e na gestão curricular, nos debates que se lhes seguiram e nas conversas ocasionais, durante os intervalos das sessões e jantar convívio do primeiro dia, discutiu-se um conjunto diversificado de temas em torno da Matemática e da Educação Matemática.

Questionou-se a diminuição da componente de prática profissional dos novos cursos para o ensino da Matemática, com vista à criação do *Espaço Comum Europeu de Educação.* Alguns participantes defenderam um maior compromisso social da Matemática e da Educação Matemática (e dos Investigadores) de forma a combater a aparente neutralidade da Matemática e a contribuir para o ensino da ciência num contexto real, nas suas componentes culturais, sociais e políticas, nomeadamente através das temáticas relacionadas com a cidadania.

Criticaram-se os manuais escolares (principalmente os dos primeiros anos) particularmente pela ausência de análise crítica em relação aos conteúdos científicos, à sua ênfase nas metodologias expositivas e ao *deficit* de propostas de carácter investigativo.

Realçou-se a importância das práticas colaborativas e do papel de reflexão e colaboração no desenvolvimento profissional dos professores.

Salientou-se o papel das Tecnologias de Informação e Comunicação nas salas de aula, e na formação didáctica dos professores e na investigação matemática. E o facto de estarem ausentes em muitas salas de aula e na formação inicial de professores.

De entre os posters apresentados, o poster *Corpo métrico: um video aberto para o ensino da Matemática* de Alcino Simões da Escola Básica 2, 3, Dr Daniel, Matos de Vila Nova de Poiares e João Silva da Escola Básica 2, 3 Teixeira Lopes de Vila Nova de Gaia, foi distinguido pela sua originalidade.

No espaço do Grupo de Trabalho de Investigação, Henrique Guimarães entrevistou as directoras das revistas *Quadrante* e *Educação e Matemática*, nomeadamente Lurdes Serrazina e Joana Brocardo. Foram também apresentadas as actuais linhas de força das duas revistas e salientada a importância destas publicações na divulgação das actividades da APM e dos investigadores e professores de Matemática.

Na tarde do segundo dia realizou-se o painel *Perspectivas e práticas curriculares*, com a participação de Ana Vieira Lopes, Cristina Loureiro, Manuel Saraiva, e Susana Nápoles, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e moderado por João Almiro. O debate incidiu nas as perspectivas da reorganização curricular de Matemática do Ensino Básico e Secundário e as práticas curriculares dos professores, salientando a existência, de um significativo desfasamento entre os modelos teóricos e as práticas profissionais.

A terminar, eu próprio, apresentei um balanço crítico do seminário realçando a importância da realização de iniciativas como estas, na reflexão sobre a inovação das práticas educativas.

António Guerreiro
ESE da Universidade do Algarve

Investigar para aprender Matemática

Helena Amaral

No início do séc. XX, as grandes preocupações da educação focalizavam-se na aquisição de competências de literacia tais como ler, escrever e calcular. Os sistemas educativos não tinham por finalidade ensinar todas as pessoas a pensar e ler criticamente, a expressar-se de forma clara e persuasiva, a resolver complexos problemas de matemática. Hoje, estes aspectos de literacia de nível superior são exigidos a todos, a fim de gerir com sucesso a complexidade da vida contemporânea.

A alteração dos modos de vida resultante da evolução dos meios tecnológicos e da sua utilização generalizada em situações do quotidiano, tanto na vida pessoal como na profissional, tem reflexos quer sobre a escola quer sobre a sociedade em geral. Sobre a escola, na medida em que esta deixa de poder satisfazer todas as necessidades de formação. As questões relacionadas com o ambiente, os novos modelos de desenvolvimento, a banalização dos produtos derivados das tecnologias de informação e as contínuas descobertas em todos os ramos do saber exigem de cada um de nós uma constante capacidade de adaptação ao ritmo de mudança com que se vão desenvolvendo. Para esta adaptação acontecer, ser constante e eficaz, torna-se necessário garantir um processo educativo e formativo cuja duração se confunde com o tempo de vida dos indivíduos, ou seja, um processo educativo permanente. O significado de "conhecer" deslocou-se, assim, de ser capaz de recordar e repetir informação para ser capaz de a usar.

Nesta perspectiva, à escola deixa de ser atribuído o papel de transmitir conhecimentos de forma simples, mas exige-se que o processo de aquisição e produção desses conhecimentos seja também objecto da sua acção. Se, na Era Industrial a finalidade fundamental da escola era preparar trabalhadores, "para assegurar a memorização de factos básicos, regras, fórmulas e procedimentos, *enchiam-se* os alunos de conhecimentos, encorajando-os a depender de autoridades como o professor e manuais escolares" (Baroody, 1993). Na idade pós industrial, "os cálculos são feitos por computador. Do que necessitamos é de pessoas que saibam dizer aos computadores o que fazer, e de verificar se os resultados são ou não razoáveis. Do que necessitamos é de pessoas que sejam capazes de analisar e pensar logicamente sobre novas situações, que desenvolvam processos de solução não especificados e que comuniquem as suas soluções a outros com clareza e convicção" (Baroody, 1993).

Uma nova filosofia de desenvolvimento, assente no princípio materialista segundo o qual os custos de desadaptação de cada um recaem sobre todos os outros, é causa e consequência de novos conceitos de Educação e justifica um sistema educativo promotor do sucesso para todos, com características diversas do que temos conhecido, mas a partir do qual se definirão conceitos de cidadania e civilidade.

As *sociedades de conhecimento*, sociedades em *permanente aprendizagem*, sociedades de múltiplos saberes, que ao mesmo tempo dinamizam e respondem aos imperativos da sociedade tecnológica, operam alterações significativas no domínio das práticas, dos conceitos e dos valores, nomeadamente no campo das aprendizagens. A mudança civilizacional que se está a operar é profunda e tem origem numa revolução tecnológica de ampla dimensão e tem importante efeito nos comportamentos, já que se lograram substituir os actos repetitivos, como fulcro da produção, em favor da eficácia do conhecimento. Em função das noções de competência emergentes, torna-se necessário reformular o quadro onde o saber é criado e transmitido, bem como as metodologias de ensino aprendizagem.

O dever da escola não é só permitir desenvolver o espírito crítico a todos os níveis, mas também, e sempre, encorajá-lo. Os objectivos da aprendizagem escolar são concebidos em termos de conduzir os alunos a desenvolver ferramentas intelectuais e estratégias de aprendizagem necessárias para permitir pensar criticamente nas diferentes áreas do saber. A sustentabilidade do processo educativo permanente implica um conhecimento essencial dos assuntos que inclui a capacidade de colocar questões pertinentes e significativas acerca das diferentes áreas do conhecimento.

Aos objectivos descritos parece corresponder, como processo de produção dos saberes na escola, uma metodologia investigativa. A realização de tarefas investigativas como forma de aprendizagem preenche muitas das exigências que se colocam à escola e poderá constituir a base de práticas educativas que sejam uma resposta eficaz aos desafios da sociedade actual.

A introdução de tarefas investigativas na aprendizagem da Matemática no 1° Ciclo constitui algo novo que coloca desafios às crenças estabelecidas quanto ao modo de entender a Matemática. Assim, a forma como percebemos a aprendizagem, o processo como as crianças evoluem na aprendizagem e ainda ao modo com entendemos o ensino são ainda questionados. "Todos nós temos crenças acerca do que é o conhecimento, do modo como é aprendido, e de quais as melhores formas de ajudar as crianças a aprender matemática. Conscientemente ou não, estas crenças são os alicerces em que baseamos as nossas práticas de ensino e abordamos a tarefa de ensinar" (Baroody, 1993). Ensinar é concebido de forma diversa consoante as crenças que mantemos acerca do processo de aprendizagem, da Matemática e da organização de ambientes de aprendizagem.

Para especificar o que se entende como processo de aprendizagem da Matemática salientam-se como ideias particularmente relevantes o entendimento de que "o desenvolvimento do raciocínio dos indivíduos e os processos de construção de sentido não podem ser separados da sua participação na constituição interactiva de significados matemáticos partilhados" (interaccionismo simbólico), e ainda que "os objectivos e crenças sobre a actividade matemática e a aprendizagem se desenvolvem em conjunto como um sistema dinâmico" (reflexividade da etnometodologia). A aprendizagem da Matemática é entendida "tanto como um processo de construção activa individual, como um processo de aculturação das práticas matemáticas a uma sociedade mais alargada" (Yackel e Cobb, 1996). O conceito de aprendizagem será, pois, entendido como: "a reconstrução subjectiva dos saberes sociais e dos modelos através da negociação de significados em interacção social" (Cobb e Bauersfeld, 1995).

Em termos da organização dos ambientes em que a aprendizagem da Matemática decorre, entende-se que:

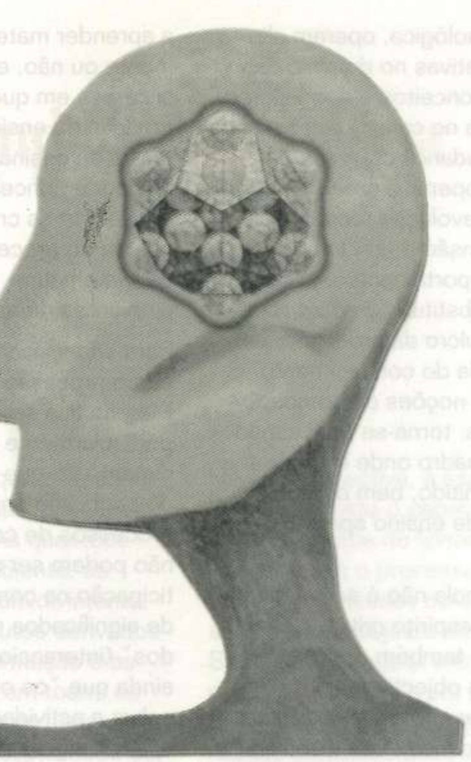
> participar nos processos de uma aula de Matemática é participar numa cultura de usar a Matemática, ou melhor, uma cultura de matematização como prática. As diversas competências que um observador pode identificar e tomar como principais representantes da cultura, formam apenas a superfície procedimental. Estes são os alicerces para a construção, mas o plano para o edifício da matematização é processado num outro nível. Assim como nas culturas, o núcleo do que é aprendido através da participação está no *quando* fazer o quê e *como* fazê-lo. (...) os principais resultados que emergem da participação na cultura da aula de Matemática aparecerão principalmente num metanível e são 'aprendidos' indirectamente. (Cobb e Bauersfeld, 1995)

Assumir a aula de matemática como uma comunidade tem importantes consequências na aprendizagem. O facto de se centrar o ambiente que se cria na ideia de comunidade, em múltiplos sentidos, tem implicações nas formas de abordar as tarefas, desenvolver actividades e no modo como se gerem as interacções que ocorrem na aula. Especialmente importantes são as normas que os participantes aprendem uns com os outros e continuamente negoceiam. Ao nível das escolas e das aulas mais concretamente, a aprendizagem pareceria estar imbuída de normas sociais que permitissem aos alunos e professores cometer erros no sentido de incentivar a aprendizagem. No entanto, escolas e aulas diferentes demonstram um conjunto diverso de normas e expectativas. Uma norma oculta que parece estar subjacente ao funcionamento de certas aulas é a de que o aluno não deverá nunca ser apanhado sem conhecer uma resposta. Esta norma pode impedir os alunos de colocar questões quando não compreende ou de explorar novas conjecturas ou colocar hipóteses. Existem normas que parecem específicas de determinadas áreas do saber. Cobb (1992) refere que as normas na aula de matemática se podem restringir-se a saber calcular, por oposição a colocar a compreensão no fulcro do trabalho matemático. Não se pretendendo argumentar que os alunos não devem aprender a calcular, mas sim que a ênfase deverá antes ser colocada na possibilidade de aprendizagem de outras coisas, nomeadamente fazer e dar significado à Matemática e pensar matematicamente. Em muitas escolas, é usada, como forma de motivação, a competição entre os alunos para conseguir a aprovação do professor. Esta competição é muitas vezes inibidora de aprendizagens.

Propor tarefas de cariz investigativo pressupõe que a forma como são apresentadas e a actividade que se espera que seja desenvolvida pelos alunos estabeleçam pontes com outras áreas de conhecimento e a diferentes níveis do conhecimento matemático dos alunos. Entende-se que a aprendizagem se centra nos processos utilizados, deslocando para um plano menos relevante a dicotomia entre certo e errado e colocando a ênfase na apresentação de argumentos em favor das conclusões encontradas.

As sugestões de materiais que se apresentam pretendem ser duas propostas curtas em que a exploração implique a recolha de dados, o reconhecimento de regularidades e padrões potenciando a comunicação matemática a partir de temas comuns da Matemática usualmente trabalhada no 1º Ciclo. A sua adequação e pertinência são justificadas pelo Currículo Nacional do Ministério da Educação onde se afirma que:

> competência matemática que todos devem desenvolver, no seu percurso ao longo da educação básica, inclui, entre outras, a predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica; o gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior; e a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação. (DEB, 2001)



Referências bibliográficas

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: helping children think mathematically.* New York: Macmillan (Texto policopiado traduzido e adaptado por Cristolinda Costa e Maria de Deus Viegas)

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning — interaction in classroom cultures.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cobb, R., Yackel, E., Wood, T (1992). Interaction and learning in Mathematics Classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp 99–122.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação.

Yackel, E., Cobb, R., (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27(4), pp. 458–477.

Helena Amaral
EB1 Parque Silva Porto, nº 124 de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

Dado os dados... e *O que há mais...?* são duas propostas de tarefas a serem exploradas por alunos do 1º Ciclo pretendendo abordar temas recorrentes nas aprendizagens da Matemática neste nível de ensino recolocando as finalidades das actividades na procura de regularidades e padrões e na comunicação e discussão das conclusões. Projectadas para serem exploradas em trabalho de pequeno grupo e de seguida apresentadas e discutidas em grande grupo, o processo de elaboração de conjecturas, dos testes necessários para as confirmar ou infirmar poderão contribuir para a consolidação de aprendizagens elementares. O artigo *Investigar para aprender Matemática* refere a pertinência da introdução deste tipo de actividades nas experiências de aprendizagem dos alunos, a sua integração no Currículo Nacional e algumas das ideias subjacentes no que refere aos desafios colocados às crenças sobre aprendizagem e ambientes em que esta se desenvolve.

Helena Amaral, EB1 Parque Silva Porto, nº 124 de Lisboa

Escola..

Ano/Turma.......................... Data....................... Aluno(a)..........................

Dado os *dados*...

Experimenta lançar dois dados e regista os números que saírem na tabela assinalando se são pares ou ímpares.

Preenche de seguida o resultado da sua adição, subtracção e multiplicação.

1º Dado	P/I	2º Dado	P/I	+	P/I	−	P/I	x	P/I

Que conclusões podes tirar acerca da adição de números pares e ímpares?

E da subtracção? E da multiplicação?

Experimenta jogar com três dados e registar os resultados. Podes tirar outras conclusões?

E se jogares com quatro dados a que conclusões podes chegar?

Escola..
Ano/Turma.................... Data.................... Aluno(a)..

O que há mais...?

Na tabela da multiplicação existem mais resultados pares ou ímpares?

Tenta mostrar se a tua conjectura é verdadeira colorindo a tabela.

Explica porquê.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Recomendações para a promoção do estudo da Matemática: algumas interrogações, inquietações, preocupações . .

A Comissão para a promoção do estudo da Matemática e das Ciências elaborou recentemente um conjunto de recomendações, destinadas especificamente à Matemática, que incluem três aspectos: desenvolvimento de culturas, recomendações gerais e recomendações específicas.

Estranhamente, não conseguimos encontrar estas recomendações no site do Ministério da Educação — e interrogamo-nos sobre as razões da dificuldade em aceder a este documento que, no nosso entender, deveria ser amplamente divulgado e discutido. Estranhamente também, encontramo-lo no site educare, de uma editora livreira. Para o consultar, poderá aceder a http://www.educare.pt/noticia_novo.asp?fich=NOT_20031127_3392. Aqui encontra o acesso à respectiva versão pdf.

De seguida, apresentamos reacções sobre alguns aspectos das recomendações avançadas pela Comissão, solicitadas a alguns colegas, na expectativa de contribuir para a divulgação e discussão do documento, cujo teor nos preocupa.

A Redacção

A cultura de bom ambiente em sala de aula ou do novo se (quer) faz(er) velho

Ana Paula Canavarro (Univ. Évora)

Vem finalmente a público a proposta da Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências. Não é, na minha opinião, caso para se dizer que *valeu a pena esperar para ver*. Compreendo que a elaboração de um documento com a ambição de recomendar ideias orientadoras para a aprendizagem da Matemática e Ciências exija um período alargado de tempo. Afinal, há que conhecer a fundo a realidade do país; há que conseguir identificar as dificuldades essenciais e as suas razões; há que estudar o que a investigação, nacional e internacional, tem a dizer; há que conjugar todas estas dimensões e perspectivar o(s) caminho(s) que parecem mais adequados, não perdendo de vista que, em educação, tudo é bastante complexo, e que essa complexidade é acentuada pela diversidade dos tempos que vivemos. Compreendo, pois, que fosse preciso esperar. O que já não compreendo é que um documento com a referida ambição se apresente com a forma e conteúdo daquele a que agora acedemos, um conjunto de medidas avulsas, não fundamentadas, reveladoras de uma grande falta de conhecimento do domínio da educação matemática e dos problemas reais, querendo fazer passar por novas, ideias que são já demasiado velhas, escondidas, com o rabo de fora, por banalidades e termos modernos.

Um dos aspectos, para mim, mais gritantes tem a ver com as recomendações relativas à *Cultura de bom ambiente em sala de aula*. Não questiono a pertinência da consideração deste aspecto no documento. Aliás, a cultura da sala de aula de Matemática é, verdadeiramente, um ponto essencial de qualquer currículo de Matemática — e é com grande atenção e relevo que tem vindo a ser tratada, desde há alguns anos, por inúmeros autores e entidades especialistas em educação matemática. Quando em 1988 a APM publica Renovação do Currículo de Matemática, dedica um capítulo inteiro a discutir a natureza e organização das actividades de aprendizagem e o papel do professor com vista à promoção de um ambiente de sala de aula que possibilite aos alunos viverem uma experiência matemática significativa, explorando os seus interesses, dando-lhe um papel activo, fazendo-os participar na construção do conhecimento. Quando em 1991 o *National Council of Teachers of Mathematics* publica as *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*, faz incidir toda uma norma exactamente sobre o ambiente de aprendizagem, referindo: "O professor de Matemática deve criar um ambiente de aprendizagem que favoreça o desenvolvimento do poder matemático de cada aluno" (APM, 1994, p. 59). Ao discriminar as diversas acções para levar à prática esta norma, o NCTM aponta o tipo de actividade que deve ser proporcionada ao aluno de modo a encorajar o desenvolvimento da sua competência matemática. Exemplos são: "trabalhar independentemente ou em colaboração de modo a dar sentido à matemática"; "aceitar riscos intelectuais, colocando questões e formulando conjecturas"; "manifestar um sentido de competência matemática ao validar e defender ideias com argumentos matemáticos" (p. 59). O essencial destas ideias é retomado e desenvolvido em 2000, nos *Principles and Standards for School Mathematics*, reconhecendo-se que o ambiente de aprendizagem da sala de aula marca decisivamente a Matemática que os alunos aprendem, o que aprendem sobre ela e a sua relação com a disciplina.

Também a literatura de investigação em educação matemática estuda com especial interesse inúmeras questões relacionadas com o ambiente de sala de aula. Apenas para salientar um breve exemplo, Even e Tirosh (2002, *Handbook of International Research in Mathematics Education*, LEA), afirmam: "a cultura da sala de aula é inseparável da aprendizagem da Matemática, uma vez que a aprendizagem ocorre sempre num contexto sócio-cultural específico." E prosseguem, discutindo como a construção do conhecimento matemático na sala de aula está intimamente ligada com as concepções dos alunos sobre a disciplina, com o tipo de interacções que o professor promove, com a existência de uma comunidade de aprendizagem em que todos se possam sentir participantes.

Existem, portanto, razões de sobra para que o ambiente de aprendizagem da sala de aula de Matemática deva ser um aspecto a considerar num documento sobre orientações curriculares. No entanto, não posso deixar de ficar perplexa com aquilo que sobre o assunto é dito pela Comissão. Primeiro, espanto-me com a banalidade das primeiras quatro linhas e meia: "Não há boas aprendizagens sem bons ambientes de sala de aula e de escola" ... e prossegue neste tom. De facto, o mau ambiente nunca é desejável — seja em que contexto for — e isso é uma coisa que qualquer pessoa sabe. Depois, continuando, espanto-me com o teor das especificações que se seguem nas restantes seis linhas (e sobretudo, com o que leio nas entrelinhas). Afinal, as recomendações da Comissão sobre o ambiente da sala de aula referem-se à "postura corporal", disposição e circulação dos alunos no espaço físico da sala, bem como à sua intervenção na aula, e estes aspectos devem ser controlados pelo professor de forma a conseguir a "transmissão dos conhecimentos e a sua respectiva aquisição" por parte dos alunos.

Porque é que fico perplexa ao ler isto? Se calhar, porque me evoca imediatamente a imagem de um modelo de aula em que o português escolarizado esteve sentado, durante décadas, a tentar receber a Matemática que o professor tentava dar-lhe, aceitando sem pestanejar, treinando sem compreender, excluindo-se e/ou sendo excluído sem questionar. Se calhar, porque me confrangem os níveis de iliteracia matemática a que este modelo de aula conduziu, já largamente documentados, e que mostram que a população portuguesa sabe contar e calcular — mas não sabe usar a matemática como um instrumento de raciocínio, como um instrumento de poder sobre a realidade. Se calhar, porque aquilo que esta Comissão agora apresenta como proposta vai ao arrepio da evolução consistente que se tem vindo a constatar no que diz respeito ao enunciado das tendências curriculares internacionais na disciplina de Matemática — e que se pode traduzir, de uma forma muito geral, pela preocupação com o desenvolvimento, por parte de todos os alunos, de competência matemática adequada a uma participação informada e crítica na sociedade.

Mas talvez esta proposta ambiciosa para, pasmo outra vez, "regenerar o sistema educativo", não chegue a ser tomada a sério. Afinal, o ministério não a colocou no seu *site*, o senhor ministro referiu-se-lhe apenas pontualmente, não foi lançado nenhum processo público de divulgação e discussão ... e isso seria o mínimo, não é?

Aprendizagem no 1º ciclo: que visão?

Lurdes Serrazina (ESE de Lisboa)

Uma das recomendações explícita para o 1º ciclo consiste em "re-centrar o esforço de aprendizagem no português e na matemática". Argumenta-se com a necessidade de definir de forma mais precisa as cargas horárias das diferentes disciplinas, sugerindo que "à matemática e ao português seja sempre atribuído uma dedicação de pelo menos 90 minutos diários, respectivamente". É certo que por vezes não se dedica o tempo suficiente à matemática, mas preconizar que aquelas duas disciplinas ocupem uma carga horária diária de cerca de dois terços do tempo real dos alunos na Escola é não ter em conta as outras componentes do currículo como o Estudo do Meio, onde devia ser feita uma iniciação à cultura científica dos alunos, às questões do ambiente, à história de Portugal, aos estudos sociais. E onde trabalhar as Expressões (Plástica, Musical e Dramática) e a Educação Física que parecem ser fundamentais nestas idades? Claro que se pode aprender Matemática a partir das Expressões ou Língua Portuguesa através do Estudo do Meio, mas não parece ser este o sentido da recomendação da comissão.

Uma segunda recomendação é "Reforçar o ensino da geometria a partir do 1º ciclo". À primeira vista é de aplaudir, mas que geometria? As capacidades de visualização espacial e de organização do espaço, consideradas hoje em dia fundamentais para as restantes aprendizagens, nomeadamente a da leitura e a escrita, e para exercer o direito de cidadania nem sequer é referida. Refere-se uma geometria ligada ao número e à medida, isto é, na prática mais fórmulas e procedimentos.

Mais à frente, refere a comissão: "importa assim, que os alunos durante o primeiro ciclo adquiram os automatismos de cálculo, incluindo a memorização das ferramentas cognitivas necessárias a este, tais como a tabuada e as propriedades fundamentais das operações aritméticas. A aquisição de novos conhecimentos e a sua aplicação pressupõe a compreensão de conhecimentos prévios e a mecanização de cálculos elementares e de estruturas lógico-dedutivas básicas". Mas qual o sentido desta recomendação?

As teorias de aprendizagem actuais (ver por exemplo Brandsford, Brown e Cocking, 2000) referem que não basta conhecer um grande número de factos desligados. A falsa dicotomia de ou se treinam os procedimentos base ou se ensina a resolver problemas, não faz mais sentido. Ambas são necessárias. A investigação revela que a capacidade dos alunos de adquirirem um conjunto organizado de factos e destrezas aumenta quando estas aparecem ligadas a actividades significativas de resolução de problemas, e quando os alunos são ajudados a compreender o porquê, quando e como aqueles factos e destrezas são relevantes. Assim, os alunos devem ter possibilidade de poderem viver experiências de aprendizagem diversa e em múltiplos contextos de modo a desenvolverem uma representação mais flexível do conhecimento.

Proibir a calculadora: Uma medida eficaz?

João Pedro Ponte (FCUL)

A Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências anunciou finalmente as suas propostas. Entre as medidas específicas relativas à Matemática destaca-se a limitação do uso de calculadoras em todos os níveis de escolaridade — ou seja, desde o 1° ciclo do ensino básico ao ensino secundário.

A proibição da calculadora é uma decisão mediática e os jornais deram-lhe de imediato o destaque que era de prever. É uma notícia que tem um aspecto positivo e outro negativo. O positivo é que se trata de uma medida barata, que não envolve quaisquer despesas. O aspecto negativo é que tem muito mais probabilidades de agravar do que de melhorar as competências dos alunos e a sua relação com a Matemática.

Hoje em dia, colocar na escola barreiras artificiais ao uso das tecnologias de informação e comunicação é não só ineficaz como contraproducente. Os jovens sabem que existem calculadoras, computadores, vídeos, telemóveis. Contactam com esses equipamentos no seu dia a dia e usam-nos para as suas actividades de estudo, de convívio e de lazer. Pretender que a escola ignore esse facto e se circunscreva às linguagens e tecnologias do passado tem por único efeito suscitar nos jovens dissonância cultural, levando-os a uma atitude de rejeição relativamente à educação escolar.

Por isso, a perspectiva correcta em relação a estas tecnologias não é limitar drasticamente o seu uso na escola, mas sim promovê-lo em moldes correctos.

O que os alunos de Matemática precisam não é que os proíbam de usar máquinas de calcular (nem programas de processamento de texto com correctores ortográficos, nem programas de navegação na Internet com motores de pesquisa, etc.) mas sim que os ensinem a usar adequadamente estes instrumentos. Se não forem ensinados na escola a lidar correctamente com estes poderosos meios, vão usá-los na mesma, fora da escola. Muito provavelmente vão usá-los de modo inadequado, porque não foram levados a reflectir sobre os problemas que podem surgir quando não se toma a devida atenção. Com a agravante que, com tais proibições, os alunos ficarão ainda mais de pé atrás em relação à escola e, em particular, à Matemática.

O argumento *sério* que é invocado para justificar esta medida é que os alunos precisam de treinar a memória e de ter automatismos de cálculo para poderem ter bom desempenho em Matemática e, por isso, não podem usar a calculadora. É um argumento que não resiste a uma análise mais atenta.

Em primeiro lugar, é claro que o treino da memória é importante. No entanto, este treino pode ser feito de diversas maneiras e a realização de fastidiosos cálculos está longe de ser a mais eficaz. A memória tem de ser educada por meio de tarefas interessantes e recorrendo a processos inteligentes e não com proibições e apelos ao espírito de sacrifício.

Em segundo lugar, também é claro que saber a tabuada é importante, nomeadamente para se ser capaz de realizar cálculo mental e para se desenvolver um bom *sentido do número*. A aprendizagem da tabuada tem de estar associada à compreensão da estrutura do sistema decimal de posição. Tem de seguir a via da observação de regularidades e da construção de significados para os conceitos e operações numéricas, do desenvolvimento de raciocínio e da formação do sentido crítico. A memorização à força, sem perceber o que se diz, cria, somente, uma ilusão de conhecimento. Os alunos até parecem dar respostas *certas*, mas não são capazes de usar com discernimento os *conhecimentos* assim adquiridos e rapidamente esquecem tudo o que pareciam ter aprendido. O problema, por isso, não está na necessidade de se saber a tabuada. Poderá estar, isso sim, no modo como se ensina e se aprende a tabuada.

O problema é que os algoritmos aritméticos e os procedimentos de manipulação algébrica, a elaboração de gráficos de funções, a realização de gráficos e cálculos estatísticos — processos que, aprendidos com compreensão, são fundamentais na aprendizagem da Matemática — envolvem, muitas vezes, cálculos e procedimentos cuja execução repetitiva se torna fastidiosa. De meios para resolver problemas, esses algoritmos tornam-se um fim em si mesmos. As novas tecnologias permitem fazer tudo o que é repetitivo de modo infinitamente mais rápido e mais eficiente do que as formas tradicionais em que o único recurso é o papel e lápis. Usando-os, e usando-os bem, os alunos podem concentrar-se no que é verdadeiramente importante — o significado dos cálculos e a sua interpretação em cada situação concreta — e não nos passos mecânicos que é necessário executar.

Bento de Jesus Caraça deixou-nos páginas notáveis onde fala da necessidade da escola usar os instrumentos tecnológicos do seu tempo. José Sebastião e Silva sublinhou a importância dos meios automáticos de cálculo e promoveu o uso da régua de cálculo pelos alunos das turmas-piloto da Matemática Moderna. Prescindir, hoje em dia, do uso das novas tecnologias para a realização de cálculos, é fazer regredir o ensino da Matemática aos anos cinquenta do século XX. Não será certamente por essa via que Portugal se transformará num país avançado, com uma força de trabalho produtiva e esclarecida.

A investigação nacional e internacional, de resto, já mostrou sobejamente que o uso de calculadoras não tem como consequência a redução das capacidades dos alunos em cálculo aritmético. Pelo contrário, este uso está associado a alguma melhoria no desempenho dos alunos e a atitudes mais positivas em relação a esta disciplina. É o que se pode ver no último número de um dos mais prestigiados jornais internacionais sobre o ensino da Matemática (*Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 34, pp. 433–463), num artigo que analisa os resultados de diversos estudos realizados neste campo. Realmente, o que vale isso em comparação com a sapiência opinativa da nossa douta Comissão?

Um estudo publiçado em 1998 pela Associação de Professores de Matemática mostra níveis de utilização da calculadora muito baixos no 1° ciclo e não muito elevados nos 2° e 3° ciclos. É muito possível que, em Portugal, a calculadora (e o computador) não estejam a ser bem usados em muitas salas de aula. Existe portanto aqui um problema. De novo, a solução não é proibir ou limitar o uso destes instrumentos mas incentivar o seu uso em moldes pedagogicamente correctos, através de programas adequados de formação de professores, da publicação de materiais pedagógicos e da divulgação de experiências.

Parece estar hoje muito na moda procurar resolver um problema através da criação de um problema ainda maior. Os resultados dos alunos em Matemática são francamente insatisfatórios e exigem que se tomem medidas. Este problema não se resolve contra os alunos, com proibições e ameaças, e contra os professores, ignorando a sua experiência. Resolve-se procurando perceber que conhecimento existe sobre o assunto e, no caso das dúvidas persistirem, fazendo cuidadosamente experimentação em pequena escala.

Proíba-se ou não as calculadoras, os alunos vão usá-las. O importante é que as saibam usar bem. Medidas mediáticas e *económicas*, baseadas na pedagogia da memorização, só podem contribuir para piorar as coisas no ensino da Matemática. O futuro se encarregará, muito rapidamente, de o confirmar.

Geometria e demonstração: Queremos seguir por aqui?! ...

Ana Maria Roque Boavida (ESE de Setúbal)

Foi com perplexidade e preocupação crescentes que fui lendo as *Medidas de carácter específico* 2 e 3 constantes do "conjunto de orientações destinado especificamente à Matemática" propostas pela *Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e Ciências* e, respectivamente, intituladas *Reforçar o ensino da geometria a partir do 1° ciclo* e *Raciocínio lógico e método hipotético-dedutivo*. Não porque ponho em causa que a geometria deva ter uma presença significativa nos currículos de Matemática, nem porque considero que não é relevante que, na escola, os alunos aprendam a demonstrar em Matemática. Muito pelo contrário. Todos conhecemos as nefastas consequências para a formação matemática dos alunos que advieram de, em tempos recentes, a geometria ter sido relegada para uma posição secundária. E se pretendemos que todos tenham oportunidade de se envolver em experiências de aprendizagem em que a justificação do que fazem e a compreensão do porquê das *coisas* tem um lugar de destaque, obviamente, que não se pode deixar de lado a argumentação matemática de que a demonstração é um caso particular.

O grande problema que vejo nas referidas medidas reside nas perspectivas que as ideias apresentadas deixam transparecer, nomeadamente, quanto ao papel que a geometria deve desempenhar nos currículos de Matemática e quanto aos processos de ensino e aprendizagem da demonstração. Desvelar estas perspectivas passa, do meu ponto de vista, por centrar a atenção não só no que se diz, mas também no que se cala.

A geometria surge como um meio que "ajuda a disciplinar o raciocínio ao contribuir para criar as estruturas lógico-dedutivas" (medida 2) e, na medida em que "oferece excelentes oportunidades para a realização de demonstrações simples e curtas que valem tanto pelos seus resultados como pelo facto de habituarem o alunos ao rigor de construção de provas lógicas" (medida 3), surge como um contexto privilegiado para o "raciocínio lógico e método hipotético dedutivo" (idem) isto é, para que os alunos sejam "progressivamente familiarizados com o estabelecimento de axiomas e definições e com os procedimentos demonstrativos que constituem o cerne da matemática" (idem). Aspectos como a visualização espacial, uma componente importante do pensamento geométrico, a intuição geométrica, que Sebastião e Silva tão frequentemente defendia, ou a geometria como contexto para a aprendizagem da matematização da realidade, com tudo o que envolvem de criatividade, liberdade e espaço para a imaginação, não são, nas referidas medidas, mencionados. Ou seja, a geometria parece constituir, para a Comissão, um veículo para *disciplinar* o raciocínio dos alunos, para os *habituar* ao rigor matemático e para os ir *acostumando*, *adaptando* ao raciocínio hipotético-dedutivo. É por aqui que importa seguir? Se tivermos em conta diversos trabalhos que sobre o assunto têm sido publicados, quer em Portugal quer noutros países, não me parece que a resposta possa ser afirmativa.

Examinando o que é dito sobre a demonstração, colocam-se-me novos problemas, a começar por se considerar que os procedimentos demonstrativos *constituem o cerne da matemática*. Cerne significa parte essencial, âmago, ponto fulcral. Embora um primeiro olhar para os Elementos de Euclides, ou mesmo para alguns textos matemáticos mais modernos de índole formalista, possa fazer supor que na produção matemática o que surge em primeiro lugar são axiomas e definições e que as conclusões são daí derivadas através de deduções lógicas, no desenvolvimento da matemática as coisas não se passam desta forma. O que vem em primeiro lugar são problemas seguidos de soluções audaciosas, frequentemente designadas por conjecturas, a que se segue um trabalho em que a pesquisa da demonstração se articula com a procura de contra-exemplos e/ou de novas conjecturas. A demonstração surge como meio de validar conjecturas que resistiram a sucessivos testes, de compreender o porquê da sua validade e de comunicar ideias matemáticas de modo a que outros possam analisá-las cuidadosa e criticamente. Assim sendo, o cerne da matemática não me parece situar-se nos procedimentos demonstrativos, mas numa actividade muito mais abrangente que dá sentido a estes procedimentos e em que o conjecturar, o argumentar, o demonstrar e o formular e resolver problemas estão intimamente entrelaçados. Com bem dizia Pólya, referindo-se ao ensino da Matemática, "aprendamos a demonstrar, certamente, mas aprendamos também a conjecturar".

Esta ideia de Pólya é reforçada quando se tem em conta que uma das grandes dificuldades que a aprendizagem da demonstração envolve é, como mostram vários estudos, os alunos não conseguirem ver a sua necessidade, importância ou poder explicativo. A exploração de situações matemáticas que possibilitem a formulação e teste de conjecturas pode proporcionar a aprendizagem do raciocínio plausível, o desenvolvimento de intuição matemática — parceira indispensável da demonstração — que permite adivinhar caminhos antes de nos envolvermos nos detalhes de uma prova. Este trabalho não só facilita a compreensão do porquê da actividade de demonstrar, mas é, também, frequentemente inspirador de argumentos a encadear lógica e dedutivamente para produzir demonstrações. Não há referência a estes aspectos quando a Comissão, nas medidas supramencionadas, escreve sobre demonstração.

Perspectivar o ensino e aprendizagem da demonstração, exclusivamente, como uma familiarização progressiva, dos alunos, com axiomas, definições, procedimentos demonstrativos, como um meio de introduzir temas básicos de lógica e de os habituar ao rigor, não me parece ser uma via prometedora. Quando consideramos a demonstração, de um ponto de vista educativo, o seu papel fundamental deve ser, como defendem diversos autores, o de promover a compreensão da Matemática. Ou seja, o que é importante é que constitua, para o aluno, não um objecto matemático que é estudado como um fim em si mesmo no âmbito de unidades temáticas particulares — sejam elas geometria, lógica, ou quaisquer outras —, não um conjunto de algemas que reprime e restringe a sua imaginação — para onde, facilmente, se resvala se o formato da demonstração não estiver subordinado à possibilidade de compreensão —, mas sim um meio que lhe é útil para fazer matemática e progredir na compreensão seja da tarefa que tem, no momento, em mãos, seja dos objectos matemáticos com que, ao longo da escolaridade, vai lidando.

Desenvolver uma cultura de avaliação: Os equívocos de um conceito!

Leonor Santos (FCUL)

Tal como se pode ler no ponto introdutório das recomendações, a Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências perspectivou um conjunto de orientações destinado especificamente à Matemática, que passa pelo desenvolvimento de culturas e/ou por recomendações gerais e específicas. As quatro culturas identificadas são as seguintes: cultura de bom ambiente em sala de aula (1/3 de página); cultura de avaliação (3/2 de página), cultura de ligação entre a escola e a casa (3/4 de página) e cultura científica na comunidade (1/3 de página).

Pelo espaço ocupado no texto por cada um destes pontos poder-se-á inferir que é à cultura de avaliação que se atribui maior importância ou, no mínimo, é certamente uma das consideradas mais fundamentais. À primeira vista, esta opção poderia ser bem vinda. Não há qualquer dúvida que um aspecto comum, que atravessa todo o tipo de documentos actuais referentes à educação, em geral, e ao ensino e aprendizagem da Matemática, em particular, é a necessidade de desenvolver uma nova cultura de avaliação, que passa por atribuir-lhe um significado diferente do do passado e consequentemente um uso e fins igualmente diversos. Falamos de uma perspectiva de avaliação ao serviço da aprendizagem, isto é, uma avaliação que não se identificando com uma medida, seja sobretudo encarada como uma interacção social, um processo desenvolvido por pessoas e ao serviço da aprendizagem, fim primeiro de toda a educação. Mas, uma leitura atenta das recomendações da referida comissão contraria totalmente esta visão. Senão vejamos!

As cinco medidas concretas que se apresentam como via para dar origem à cultura de avaliação que se preconiza, cobrem as seguintes áreas: avaliação externa, com carácter selectivo (medidas 1 e 5); divulgação mais informada de estudos internacionais (medida 2); análise da situação actual (medida 3); formação de professores (medida 4). Desde logo se vê que nenhuma destas áreas cobre explicitamente as actuais orientações para a avaliação. Para além disso, as medidas 1 e 5 levantam-nos sérias preocupações pelo paradigma que as sustentam.

Reforçar a avaliação externa como principal medida para melhorar a aprendizagem do ensino da Matemática parece basear-se na ideia que é desenvolvendo mais momentos de controlo que a aprendizagem é garantida. Será esta relação de causa e efeito verdadeira? Os alunos só estudam sobre a ameaça dos exames (e é esta perspectiva que queremos incentivar?)? Os professores só são profissionais responsáveis se houver exames? As dificuldades de aprendizagem ultrapassam-se através de exames? Os processos de ensino adequam-se através de exames? Outro tipo de questões se poderiam aqui acrescetar, como seja, as aprendizagens que um exame pode abarcar são as mais importantes no que se entende por saber Matemática nos dias de hoje? São as aprendizagens realizadas *à pressão* para o exame as que perduram no tempo? Etc ...

Na minha opinião, reforçar a avaliação externa em nada contribui para a melhoria da aprendizagem em Matemática. Assim, a estratégia recomendada não só não resolve o problema identificado, como contradiz a obrigatoriedade do ensino básico, para além de provavelmente vir a agravar um outro problema já existente. Refiro-me à situação, já por si muito preocupante, dos valores do abandono escolar em Portugal. De acordo com os valores do censo 2001 do Ministério da Educação, cerca de 25% dos indivíduos entre os 18 e 24 anos não concluíram o 3° ciclo e não estão a frequentar a escola e 2,7% dos indivíduos entre os 10 e os 15 anos, que não concluíram o 3° ciclo, não se encontram igualmente a frequentar a escola. Podemos assim dizer que, de acordo com estes dados, cerca de 28% dos indivíduos com idade inferior a 25 anos não concluíram a escolaridade obrigatória (valores referentes ao continente português). A situação daqueles que ainda estão no ensino básico, embora com repetências (12,7%), são um grupo que tendencialmente poderá vir a aumentar a percentagem anterior. Se atendermos ao ensino secundário, a situação agrava-se. Ainda segundo a mesma fonte, perto de metade dos indivíduos dos 18 aos 24 anos (44%), residentes no continente português, não concluíram o ensino secundário, nem se encontram a frequentar a escola. Pergunta-se, então, de que forma a criação de "várias etapas de avaliação uniforme", a serem aplicadas "progressivamente em todos os ciclos de escolaridade", vai dar resposta a esta situação tão grave que se vive hoje em Portugal? Será aceitável defender-se, num país democrático e europeu, uma escola apenas para alguns? Certamente que, se excluirmos do sistema todos aqueles que têm dificuldades de aprendizagem, o sucesso escolar melhora, mas à custa de quê? Que problemas sociais e éticos estamos a criar?

Sim, certamente é necessário desenvolver uma nova cultura de avaliação, mas tal não significa voltar ao passado, mas sim ter a coragem para avançar para o futuro com propostas responsáveis e criativas!

O que (não) se diz sobre a formação de professores!

Fátima Guimarães (EB 2,3 de Telheiras)

Consonante com o tom da global das Recomendações da Comissão para o Ensino da Matemática, a formação de professores é referida num só parágrafo e numas parcas seis linhas. É deste modo que, na segunda medida de carácter global, esta Comissão trata uma problemática considerada das mais críticas, pelos vários sectores da acção educativa.

Tal como se pode ver, a preocupação da Comissão dirigiu-se para a interligação da formação inicial os estágios e subsequente formação:

"2. Reforçar a interligação entre a formação inicial dos professores, os estágios e os cursos de aperfeiçoamento (formação contínua)"

Nas seis linhas que compõe esta recomendação, nem uma palavra é dita sobre a formação inicial pelo que ficamos sem saber o que recomenda a Comissão para esta formação. Ficamos a conhecer, isso sim, que a separa do estágio, o que para além de demonstrar falta de rigor, deixa adivinhar uma visão restrita da formação inicial, porque identificada com a sua componente académica.

Mas, tão preocupante como o que fica por dizer, é o que se diz sobre, neste caso, a formação contínua dos professores. Para nos apercebermos da vacuidade total de ideias e da displicência do tratamento desta problemática, transcrevo as seis linhas na íntegra:

"É necessário que os mecanismos de formação contínua de professores estejam ligados à sua progressão na carreira. Para isso, cada actividade de formação de professores que tenha peso na progressão na carreira deve estar adequada ao currículo que cada professor lecciona e deve resultar numa classificação que reflicta a qualificação do docente em causa. A regulação dessa progressão profissional competirá ao Estatuto da Carreira Docente."

Sobre a actividade de formação de professores, esta Comissão nada mais relevante encontrou para recomendar, além de dever ser "adequada ao currículo que cada professor lecciona" e "resultar numa classificação que reflicta a qualificação do docente". Somente lhe surge dizer que é "necessário que os mecanismos de formação contínua de professores estejam ligados à sua progressão na carreira", o que, para além de esquecer que a formação do professor é um direito e também um dever, teve, aliás, até aqui, o efeito perverso de reduzir a procura de formação a uma "caça aos créditos" necessários à progressão na carreira.

Apesar de desde há muito se conhecer a dificuldade de transferências de conhecimentos adquiridos na formação para o local de trabalho, nem uma palavra é dita sobre a necessidade de se assumir, definitivamente, o espaço escolar como unidade estratégica de formação. Nem uma palavra sobre a necessidade da ligação da formação com a prática, lugar por excelência de aprendizagem do professor, do papel que a participação em projectos, a trocas de experiências e o trabalho conjunto com colegas podem desempenhar nessa formação!

Nem uma palavra se diz sobre a necessidade de implicar e envolver, no processo formativo, a pessoa do professor. Nem uma palavra sobre a necessidade de valorizar as dinâmicas próprias de formação, corresponder e responder a efectivos interesses e necessidades dos professores, enfim, de promover uma formação participada e integrada que, como todos sabemos, já há décadas, a investigação vem realçando e considera imprescindível!

Acções de formação, com o formato de cursos, podem constituir um suporte para o professor desde que devidamente articuladas com as experiências anteriores, as qualidades e as necessidades dos professores, as práticas curriculares e a própria gestão escolar. Podem ser de utilidade para os professores, se constituírem oportunidades para examinar e rever as suas ideias sobre a natureza da matemática, sobre como deve ser ensinada e sobre o modo como os alunos a aprendem, se forem ocasiões para o professor observar e analisar diversas abordagens do ensino e aprendizagem, avaliar a adequação e a eficácia do ensino e desenvolver a sua predisposição para o ensino da matemática (APM, 1994). No entanto, ficamos sem saber o que pensa a comissão sobre elas, pois, nestas recomendações, nem uma palavra é dita sobre a filosofia lhes poderá estar subjacente.

Mas as necessidades de actualização dos professores, não poderão ser colmatadas por acções de formação que, como aparentemente surgem aqui neste documento, são reduzidas exclusivamente a cursos de aperfeiçoamento. Esperar que com eles se capacite o professor para o exercício da sua actividade profissional é uma visão retrógrada e restrita de formação e do professor, que conduziu a resultados que todos vemos. A formação contínua encerra em si a ideia de formação permanente, e a falta de eficácia de uma formação assente, exclusivamente, em cursos, construídos numa lógica de acumulação discreta e não de apropriação contínua de conhecimentos e voltada para certificação dos professores, já há muito ficou provada. Todos nos lembramos das *acções de reciclagem*, todos presenciámos a dos anos setenta, que, já na altura, demonstraram ser completamente inadaptadas à complexidade do ensino e ao mundo em que se move o professor, onde os seus saberes continuamente evoluem e uma enorme diversidade se lhe impõe!

O que é feito do Silvino?

Jorge Pinto (ESE de Setúbal)

Durante algum tempo, tive como colega de carteira o Silvino. Já o conhecia, pois tínhamos entrado no mesmo ano para a escola primária, mas nunca tinha sido seu colega de carteira. O Silvino tinha fama de ser um aluno com problemas, pelas suas origens humildes. Quando a professora revistava, normalmente à quarta-feira, o estado de limpeza das unhas e das orelhas, o Silvino nem sempre passava despercebido. Mas, o Silvino era um bom companheiro de carteira. Íamos construindo as nossas cumplicidades. Na aula, onde a professora *enunciava de cima do estrado, nós ouvíamos* e passávamos para o caderno, como podíamos, ao nosso ritmo de escrita, nem sempre à altura da velocidade da enunciação. Muitas vezes, o caderno era para esquecer ou então, através de múltiplas comparações, lá construíamos a nossa *verdade supostamente igual à da professora*. O silêncio era a regra, indispensável para que ouvíssemos a professora, mas não suficiente para compreendermos.

Era assim a vida, dia após dia, marcada pela Matemática (explicações, exercícios de exemplificação e treino) e pela Língua Portuguesa (ditados, redacções e gramática). Por vezes, falava-se de outras coisas, mas já não me lembro bem do quê. Ah! A Geografia e a História de Portugal! As batalhas, com os seus heróis e mártires, as linhas do caminho-de-ferro, os rios e as montanhas, que tinham de ser decoradas na ponta da língua, mais a tabuada e a gramática. Esta rotina era quebrada às quintas-feiras, em que se realizavam as sabatinas, nos dias de provas e quando o inspector vinha à escola. Nas sabatinas formávamos uma roda e a pergunta era lançada a um aluno. Se ele não sabia, passava a outro e assim sucessivamente. O que soubesse trocava de lugar com o primeiro. No fim do jogo era hora de fazer o balanço dos ganhos e dos prejuízos, isto é, dos lugares que se tinha descido, que se traduziam para além da humilhação, em reguadas correspondentes ao número de posições perdidas. O Silvino era de facto um dos mártires desta história. Quando nos sentávamos, enquanto esfregava as mãos vermelhas, Silvino exclamava em surdina raivas e impropérios contra a professora. Depois estes jogos serviam para arrumar os alunos por ordem de excelência. Aí eu perdi o Silvino. Ele foi definitivamente para a *fila dos burros* e eu deixei a primeira fila e fiquei oscilando entre a segunda e a terceira. As provas eram também dias particulares, pois serviam não só para treinar para o exame da 4ª classe, mas também para a avaliação no final do período. Era a sério, numa folha de 35 linhas, dobrada do lado esquerdo. Apesar de haver canetas de tinta permanente e esferográficas, tínhamos que escrever com as canetas de aparo (pena) que íamos molhando no tinteiro. Esta exigência, em nome da justiça social (porque nem todos os meninos tinham dinheiro para comprar uma) e de uma melhor aprendizagem (porque a esferográfica não ajudava ao desenvolvimento de uma boa caligrafia), era terrível nesses momentos críticos. Já não bastavam os problemas, em que a Dona Alzira foi à loja do senhor Augusto comprar 3246 mm de popelina para fazer uma bata, que pagou com um nota de 20$00 escudos, e sabendo que o metro custava 5$60, quanto recebeu de troco, ainda tínhamos a preocupação de fazer escrever o aparo de uma forma fluente, para as coisas serem bem apresentadas. Nesses dias, o Silvino ficava doente, o aparo não escrevia, o senhor Augusto, a Dona Alzira, os milímetros, os escudos e o fazer escrever o aparo, tudo se emaranhava e, já em desespero, as sacudidelas na caneta faziam borrões no papel por entre as contas apresentadas. Normalmente, depois destas batalhas e após a correcção no quadro, era previsível que a sinalética avermelhada dominante fosse o X em vez do C. Apesar de tanta avaliação, no início do 3º período, o Silvino não voltou à escola. A professora disse-nos que tinha desistido, e que tinha feito bem pois ela não o levaria a exame, porque ele nunca conseguiria passar. Nunca mais vi o Silvino, apesar de tanto rigor e de tanta avaliação. A professora lá continuou ano após ano, com a sua imagem de boa professora, porque muito exigente, pelo menos para alguns dos pais.

Foi desta história que me lembrei, quando li o documento da Comissão para a Promoção do Estudo da Matemática e das Ciências ...

José Paulo Viana

Enormes potências

$7^{7^{7^{7}}}$

O número 7 elevado a 7 elevado a 7 elevado a 7 é enorme.
Quais são os seus dois últimos algarismos?

$6^{6^{6^{6}}}$

E quais são os dois últimos algarismos de 6 elevado a 6 elevado a 6 elevado a 6?
Só para especialistas: Que aconteceria se usássemos outros quatro números iguais, de 2 a 9?

(Respostas até 29 de Fevereiro)

Reuniões com as três tribos

O problema proposto no número 73 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Naquela famosa ilha existem três tribos: os Verks que dizem sempre frases verdadeiras, os Falks que mentem sempre, e os Alterns que, ao longo da vida, dizem alternadamente uma frase verdadeira e outra falsa. Numas importantes reuniões ministeriais, estavam três pessoas em cada mesa, cada uma representando uma tribo.

Fui à primeira mesa e perguntei-lhes de que tribo eram. Eis o que ouvi.

Alan: "Sou Verk."

Judite: "O Alan é Verk."

Paulo: "Eu e o Alan somos Verks."

Fiquei elucidado e passei à segunda mesa.

Ana: "A Graça é Verk e o João é Altern."

Graça: "O João é Verk e a Ana é Falk."

João: "A Ana é Altern e a Graça é Falk."

Fui então à terceira mesa.

Marco: "O Eduardo é Altern e a Rita é Falk."

Eduardo: "A Rita é Altern e o Marco é Falk."

Rita: "O Marco é Verk."

De que tribo são estas nove pessoas?

Infelizmente este enunciado, quando foi publicado, tinha uma gralha. Na segunda mesa, a frase da Graça saiu "… e a Ana é Altern" em vez de "… e a Ana é Falk". A Isabel Viana (Porto) enviou logo uma mensagem alertando para este facto. Realmente, raciocinando em torno das frases dessa mesa, conseguia-se chegar a uma pretensa solução mas esta entrava em contradição quando se fazia a confirmação. Talvez por isso recebemos muito poucas respostas:

Alan Krizan Guimarães (V. N. Gaia), Iola Ribeiro (Estarreja), Domingos Rijo (Castelo Branco), Edgar Martins (Queluz) e Pedrosa Santos (Queluz).

Como já é habitual, apareceram vários processos de resolução. Houve quem usasse tabelas de verdade, houve quem partisse das frases para daí retirar conclusões.

Primeira mesa

Demos a palavra à Iola Ribeiro.

O Paulo não pode falar verdade pois, se assim fosse, havia dois Verks na mesa.

A Judite não pode ser Verk pois, se assim fosse, havia também dois Verks na mesa.

Logo, o Verk é o Alan.

Como assim a Judite fala verdade, ela é Altern.

Resulta que o Paulo é Falk.

E, fazendo a confirmação, vemos que o Alan fala verdade, a Julieta também e o Paulo mente.

Segunda mesa

Usemos um outro método, testando desta vez as várias hipóteses possíveis de quem é Verk nesta mesa.

Hipótese 1: A Ana é Verk. A Ana diria a verdade, logo a Graça teria de ser Verk. Impossível, porque só há um Verk na mesa.

Hipótese 2: A Graça é Verk. A Graça diria a verdade, logo o João teria de ser Verk. Impossível, porque só há um Verk na mesa.

Hipótese 3: O João é Verk. Como ele dirá a verdade, a Ana será Altern e a Graça será Falk.

Confirmação: a Ana está a mentir (ao dizer que a Graça é Verk), logo pode ser uma Altern; a Graça mente (embora fale verdade quando diz que o João é Verk, mente ao acrescentar que a Ana é Falk), logo pode ser uma Falk.

Terceira mesa

Vejamos como o Edgar Martins resolve esta situação:

O Marco não é Verk porque ele diz que a Rita é Falk e a Rita diz que o Marco é Verk.

A Rita não é Verk porque diz que o Marco é Verk (e não há dois Verks na mesa).

Assim, o Eduardo é Verk e portanto a Rita é Altern e o Marco é Falk.

Se fizermos a confirmação, vemos que realmente a Rita está a mentir (e pode ser Altern) e o Marco também mente (e pode ser Falk).

Matemática, tecnologia e listas de discussão

Jaime Carvalho e Silva

Uma das actividades que foi incentivada durante o Ano Temático 2003, subordinado à temática *Matemática e Tecnologia*, foi a da participação em listas de discussão. A própria equipa do Ano Temático criou uma lista de discussão para divulgar as actividades promovidas e para divulgar e discutir outras actividades, páginas da internet e textos relacionados com o tema das relações entre a Matemática, a Tecnologia e o Ensino da Matemática.

O que é uma Lista de Discussão?

Uma página da Internet

http://geocities.yahoo.com.br/unificatordigitalis/lista.html

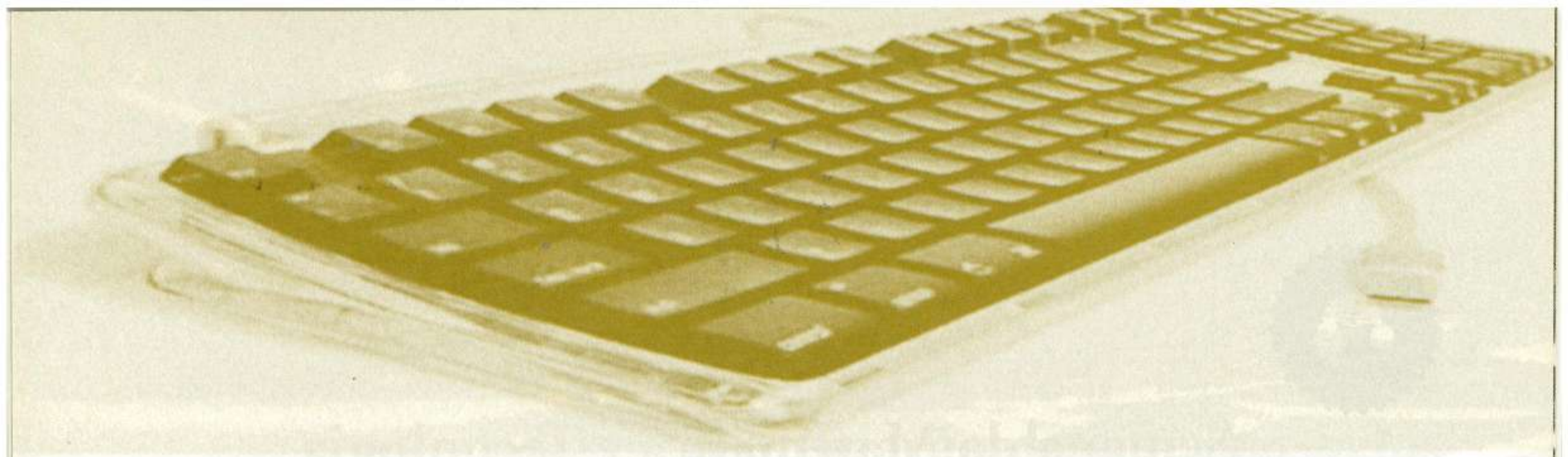
define-a do seguinte modo:

"Lista de discussão é a reunião de pessoas com o objectivo de debater (discutir) sobre um tema qualquer. O grupo é virtual, as pessoas participam dele se cadastrando por *e-mail*. Toda lista funciona por *e-mail* e a partir de sua inscrição você receberá em sua caixa dezenas de *e-mails* de várias pessoas comentando sobre o tópico da lista. Para você participar basta enviar também um *e-mail* para o endereço da lista (que você receberá imediatamente ao se inscrever) e este *e-mail* automaticamente irá ser enviado a todas as outras pessoas que da lista participam. O resultado é uma total interacção entre todos sendo uma alavanca geradora de debates."

Para participar numa lista de discussão basta, assim, ter um endereço de correio electrónico. Feito o registo na lista de discussão, o novo assinante fica a fazer parte de uma comunidade virtual de pessoas (por vezes várias centenas) interessadas num mesmo tema. O sistema é extremamente simples: se uma mensagem é enviada para um certo endereço electrónico, o endereço da lista de discussão, a mesma mensagem é reenviada automaticamente para todos os seus assinantes. A eficácia é total: todos os assinantes recebem automaticamente todas as mensagens enviadas para a lista: se o assinante estiver mesmo interessado no tema da mensagem, abre-a, caso contrário pode perfeitamente ignorá-la ou guardá-la para leitura posterior. Deste modo, pessoas que não se conhecem necessariamente, que podem estar afastadas centenas ou mesmo milhares de quilómetros, podem discutir os temas da sua preferência e podem trocar informações potencialmente de interesse para um grande número de pessoas.

De Matemática, e em língua portuguesa, existem já bastantes listas que qualquer professor de Matemática poderá assinar com proveito. Vou começar por apresentar uma breve descrição do objecto das 12 listas que me parecem de mais interesse.

- *Matemática Feliz:* Todos os temas e áreas da Matemática são aceites nesta lista.
- *Teoremaprob:* Esta lista é destinada à discussão de problemas de matemática; é promovida pela associação Teorema, uma sociedade brasileira sem fins lucrativos dedicada à divulgação da Matemática.
- *Mtapm:* Lista da responsabilidade da equipa do Ano Temático 2003 que pretende divulgar informações, experiências, materiais e actividades sobre o ensino da Matemática com utilização de Tecnologias.
- *SEM:* Lista de notícias e reflexões sobre Educação Matemática, da responsabilidade da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- *SBEM-L:* Lista de notícias e reflexões sobre Educação Matemática, da responsabilidade da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- *Hist-mat-port:* Lista para discussão de tópicos de História da Matemática, de História do Ensino da Matemática e do uso educacional da História da Matemática.
- *TecMat:* Lista dedicada à reflexão e troca de informações relacionadas com o uso da Tecnologia no Ensino da Matemática (em todos os níveis de ensino do Elementar ao Superior).
- *Calc-TI:* O uso de calculadoras Texas na sala de aula, abordando aspectos didácticos e pedagógicos, políticas educacionais, questões técnicas e parâmetros curriculares.



- *Casiopt:* O uso de calculadoras Casio na sala de aula, abordando aspectos didácticos e pedagógicos, políticas educacionais, questões técnicas e parâmetros curriculares.
- *Funcoes-sec:* Reflexão sobre o papel das Funções no Ensino Secundário (do décimo ao décimo segundo anos de escolaridade).
- *Teoremalista:* Lista para todos os interessados em Olimpíadas de Matemática; é promovida pela associação Teorema, uma sociedade brasileira sem fins lucrativos dedicada à divulgação da Matemática.
- *STAT-MATH:* Uma lista dedicada à Estatística que também divulga vagas de estágios e empregos para estatísticos no mercado financeiro e na indústria e comércio do Brasil.

Para se tornar assinante de uma destas listas basta, normalmente, enviar uma mensagem sem assunto nem texto para um certo endereço. O quadro seguinte mostra como se podem assinar as listas já referidas. Quando mais nada for indicado, deve enviar-se uma mensagem sem assunto nem texto para o endereço indicado.

- *Matemática Feliz:* matfeliz-subscrib e@yahoogrupos.com.br
- *Teoremaprob:* teoremaprob-subscri be@yahoogrupos.com.br
- *Mtapm:* mtapm-subscribe@yahoogr oups.com
- *SEM:* enviar uma mensagem para Majordomo@kernel.cc.fc.ul.pt sem assunto e com o seguinte texto subscribe sem
- *SBEM-L:* é preciso ir à página http://listas.rc.unesp.br/mailman/listinfo/sbem-l e aí fazer a subscrição da lista
- *Hist-mat-port:* hist-mat-port-subscr ibe@yahoogrupos.com.br
- *TecMat:* TecMat-subscribe@yahoog rupos.com.br
- *Calc-TI:* enviar uma mensagem para listserv@lists.ppp.ti.com sem assunto e com o seguinte texto: SUBSCRIBE CALC-TI-PORTUGUES [Nome] [Apelido]
- *Casiopt:* casiopt-subscribe@yahoo groups.com
- *Funcoes-sec:* funcoes-sec-subscri be@yahoogroups.com
- *Teoremalista:* teoremalista-subscrib e@yahoogrupos.com.br
- *STAT-MATH:* STAT-MATH-subscrib e@yahoogrupos.com.br

Quem quiser saber quais as discussões já havidas em cada lista pode consultar as páginas que incluem os arquivos das listas e outras informações sobre as listas. O quadro seguinte mostra os endereços dessas páginas para a maioria das listas:

- *Matemática Feliz:* http://br.groups.yahoo.com/group/matfeliz
- *Teoremaprob:* http://br.groups.yahoo.com/group/teoremaprob
- *Mtapm:* http://groups.yahoo.com/group/mtapm/
- *SEM:* http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/arqsem/index.html
- *Hist-mat-port:* http://br.groups.yahoo.com/group/hist-mat-port
- *TecMat:* http://br.groups.yahoo.com/group/TecMat
- *Casiopt:* http://br.groups.yahoo.com/group/casiopt
- *Funcoes-sec:* http://br.groups.yahoo.com/group/funcoes-sec
- *Teoremalista:* http://br.groups.yahoo.com/group/teoremalista
- *STAT-MATH:* http://br.groups.yahoo.com/group/STAT-MATH

Um último conselho para quem resolver assinar todas estas listas de discussão: dificilmente terá tempo de ler, de cada vez que for consultar o seu correio, as mensagens que for recebendo das 12 listas que recomendei. Se usar um programa de leitura de correio electrónico como o Eudora — e se não usa pode passar a usar visto que se trata de *software* excelente e gratuito

http://www.eudora.com

— então pode tirar partido de uma das suas características: os filtros. Basta definir um filtro para cada uma das listas e, automaticamente, quando verificar o seu correio electrónico, as mensagens que receber relativamente a cada uma das listas, vão para a pasta que criou para essa lista, e depois pode lê-las, calmamente, quando puder e quiser.

Boas discussões.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Semana da Matemática e Tecnologia

Por proposta das professoras que constituem o Conselho de Docentes do 2º ano da Escola Básica do 1º ciclo de Alto de Rodes, decorreu na última semana do mês de Maio uma exposição de trabalhos com a temática — Matemática e Tecnologia.

Após consulta da página da APM na Internet e decorrente de algumas pesquisas realizadas, foi elaborado um dossier com propostas de trabalho.

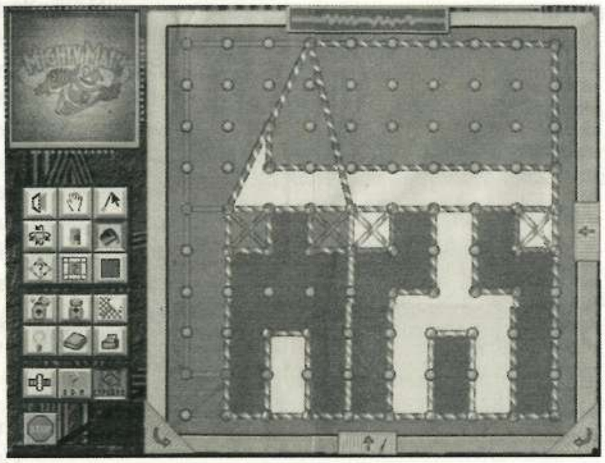
As mesmas foram apresentadas no Conselho Pedagógico, através dos Coordenadores de ano, e visavam o seu desenvolvimento com os alunos dos diferentes anos de escolaridade.

Assim, havia propostas para:

- a utilização da máquina de calcular: exploração livre da máquina, descoberta de regularidades, investigações, jogo do intervalo e estimativas, … ;
- utilização da Internet, como por exemplo, Geometria no 1º ciclo: volumes, … ;
- outro tipo de actividades, nomeadamente: o tamanho do coração, padrões circulares, …

No final do mês de Maio realizou-se uma exposição de trabalhos com a temática já referida.

Salientamos o trabalho desenvolvido nas turmas do 2º e 3º anos.



O segundo ano desenvolveu trabalhos com a máquina de calcular – exploração livre, descobertas, estimativas e jogos, bem como trabalhos com *software* educativo – Euros e Tangrans (juntam-se alguns cartazes expostos).

Na avaliação das actividades desenvolvidas reflectiu-se sobre a forma como os alunos desenvolveram determinadas competências com o uso das calculadoras, sua exploração livre e depois orientada a partir de guiões. Foi esta actividade do agrado de todos os alunos.

Quanto ao uso de *software* educativo (Jogo do Euro e Geoplano) as professoras utilizaram uma metodologia de trabalho a pares, logo aqueles alunos que já dominavam melhor o computador e/ou o jogo ajudavam os outros.

O desenvolvimento destas propostas de trabalho foi um factor de sucesso no entendimento da moeda Euro e o balanço feito é muito positivo.

O terceiro ano desenvolveu a actividade do *Tamanho do coração* proposta pela APM na sua página da Internet.

A forma como a actividade *Tamanho/medida do coração* foi abordada, constitui um desafio para os alunos e todos quiseram fazer descobertas e estender as actividades a outro tipo de *medições e de conhecimentos*.

Maria Eugénia de Jesus
EB1 de Alto de Rodes, Faro

A utilização da Internet pelos professores de Matemática

GTInternet e Projecto IA

Os professores de Matemática usam cada vez mais a Internet, embora ainda pouco se saiba sobre a forma como o fazem. O presente artigo pretende contribuir para caracterizar a actual utilização da Internet pelos professores, pretendendo simultaneamente estimular o seu uso na sala de aula de Matemática.

Que interesse pode ter a Internet para os professores de Matemática? Utilizam-na regularmente? Para fazer o quê? É o que vamos tentar saber com base num pequeno estudo realizado junto de professores portugueses de todos os níveis de ensino.

Muitos são os desafios que se colocam presentemente ao professor de Matemática. Um deles é a utilização da Internet na sua actividade profissional e, em particular, no ensino da sua disciplina. Neste artigo, começamos por equacionar algumas razões para a utilização deste recurso. Depois, apresentarmos alguns resultados de um estudo realizado, em colaboração, pela equipa do Projecto *Investigar e Aprender* (Projecto IA) e pelo Grupo de Trabalho da Internet da APM (GTInternet), cujo objectivo é conhecer a utilização do *e-mail* e da *World Wide Web* (*WWW*) feita pelos professores de Matemática do ensino básico e secundário (incluindo professores do 1° ciclo). Terminamos com diversas reflexões e interrogações.

Razões para a utilização da Internet

Porque deve o professor de Matemática utilizar a Internet? Mesmo sem discutir detalhadamente as múltiplas facetas e potencialidades desta tecnologia, podemos facilmente identificar diversas razões que justificam a sua integração na actividade profissional do professor.

1. *A Internet está cheia de conteúdos matemáticos.* A Internet apresenta uma enorme quantidade de material relacionado com a Matemática, envolvendo todo o tipo de conteúdos matemáticos, nos mais diversos suportes: texto, som, imagens e aplicações interactivas. Esta quantidade e diversidade de conteúdos permite que professores e alunos possam escolher o que mais lhes agrada para desenvolverem a sua actividade matemática.

2. *O uso da Internet pode estimular aprendizagens matemáticas importantes.* Na verdade, os alunos podem desenvolver importantes conceitos matemáticos e adquirir uma visão muito mais alargada sobre esta ciência, usando a Internet. Isso pode ser conseguido através de actividades que vão desde a simples procura de informação, até à realização de tarefas e projectos mais ambiciosos e, ainda, pela interacção com outros colegas e elementos da comunidade (matemáticos, engenheiros, técnicos de entidades que utilizam modelos matemáticos, etc.).

3. *Os alunos utilizam a Internet.* A frequência com que os alunos utilizam a Internet é cada vez maior. Por isso, é mais do que razoável que os professores pensem seriamente na forma como esta tecnologia pode estar integrada na sua actividade de aprendizagem matemática.

4. *Em muitos casos, o professor já utiliza a Internet no seu quotidiano.* Muitos professores começam a utilizar a Internet para comunicar com amigos, para recolher informação de interesse, ou seja, para a sua vida pessoal, e até para preparar as suas aulas, embora não a usem directamente com os seus alunos. A utilização na sala de aula surge normalmente só depois de se ter um conhecimento mais profundo desta tecnologia e esse passo pode agora ser dado por muitos professores.

5. *Existem medidas a nível nacional para fomentar o uso da Internet.* Todas as escolas de ensino básico, incluíndo as do 1º ciclo, estão ligadas à Internet. Embora essas ligações deixem bastante a desejar, a sua existência viabiliza a possibilidade de os professores utilizarem a Internet directamente com os seus alunos.

Apresentação do estudo

A equipa do Projecto IA e o GTInternet decidiram realizar um estudo para conhecer melhor a utilização da *WWW* e do *e-mail* feita pelos professores que ensinam Matemática no ensino básico e secundário. Este estudo baseou-se nos dados recolhido através de um inquérito[1], distribuído através do Núcleos Regionais da APM, entre Dezembro de 2002 e Fevereiro de 2003. Este inquérito, para além de procurar caracterizar os respondentes, tinha questões orientadas para a utilização do *e-mail* e da *WWW* e, por fim, uma pergunta específica relacionada com a página Investigar e Aprender (http://ia.fc.ul.pt).

A amostra é constituída por 132 professores, dos quais 29% são do 1º ciclo, 11% do 2º ciclo, 11% apenas do 3º ciclo, 22% do 3º ciclo e secundário e, por fim, 27% apenas com secundário. Esta amostra não é representativa do país do ponto de vista geográfico, uma vez que a região de Lisboa não foi abrangida e alguns núcleos da APM também não foram contemplados. Mas, mesmo assim, dará uma ideia do que se passa em termos gerais.

Alguns resultados

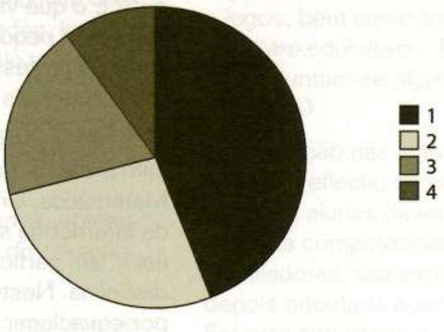
Neste artigo apresentamos os resultados que nos pareceram mais relevantes. Os leitores interessados podem encontrar mais informações no relatório do estudo[2].

1. *Utilização da Internet.* Das respostas recebidas, verifica-se que 78% dos professores são utilizadores de *e-mail* e/ou da *WWW* e apenas 22% afirmam que não são utilizadores. Ou seja, mais de três quartos dos professores respondentes são utilizadores de uma ou das duas ferramentas.

A percentagem de professores que utilizam a *WWW* e/ou *email* é muito significativa nos 2º e 3º ciclos e no ensino secundário (92%). No 1º ciclo

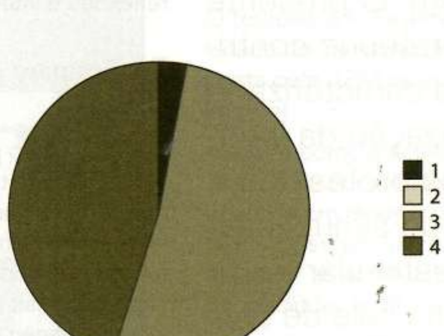
Locais de acesso ao e-mail

Opção	Percentagem de professores que assinalaram usar o *e-mail* …
1. Em casa e na escola	44
2. Só em casa	27
3. Só na escola	19
4. Outros casos	10



Uso de motores de busca

Opção	Percentagem de professores que assinalaram usar motores de busca …
1. Nunca	3
2. Raramente	0
3. De vez em quando	52
4. Com muita frequência	45



temos apenas 42% de utilizadores. Além disso, a percentagem dos utilizadores tende a ser mais elevada para os professores de escalões etários mais jovens.

A maioria dos professores que acede à Internet fá-lo tanto em casa como na escola (44%). Os professores que acedem só em casa são cerca de 27% e, só na escola, são 19%. Comparando estes resultados com um estudo realizado por Jacinta Paiva, em 2002, sobre a utilização pelos professores das Tecnologias de Informação e Comunicação, verificamos que eles são semelhantes, uma vez que no estudo desta autora 48% dos professores utiliza a Internet em casa e 22% só acede à Internet a partir da escola.

2. *Utilização de e-mail.* Há a registar que a utilização de *e-mail* por parte dos professores desta amostra é relativamente elevada. Dos professores utilizadores da Internet, 23% referiu que raramente utiliza o *e-mail*, 26% indica que utiliza uma vez por semana e 51% refere utilizar mais do que uma vez por semana ou todos os dias. Na maior parte dos casos, essa utilização prende-se tanto com razões profissionais como para contactar familiares e amigos (51%); são uma minoria os que apenas usam o *e-mail* por razões profissionais (12%) ou só para contactar familiares e amigos (16%).

3. *Utilização da WWW.* A maior parte dos professores consulta a *WWW* mais do que uma vez por semana ou todos os dias (57%). A percentagem de professores que consulta uma vez por semana é de 36% e apenas raramente de 7%. Na maior parte dos casos, a consulta é para fins profissionais. Cerca de metade (49%) consulta-a só para esse fim, enquanto que 42% dos professores usa-a para ambas as actividades (profissionais e outras). São 9% os utilizadores que só consulta a *WWW* para outras actividades. Esta percentagem é maior entre os professores do sexo masculino, entre os professores que leccionam o 3° ciclo e o ensino secundário e entre os professores de escalões etários mais elevados.

Os temas que os professores mais procuram na Internet, para sua actividade profissional, são relacionados com a Educação em geral (55%), seguindo-se temas sobre o ensino/aprendizagem da Matemática (52%), sobre a Matemática (30%) e sobre a História da Matemática (23%).

Nestas consultas, o que os professores mais procuram são materiais para utilizar nas aulas (79%), notícias/informações (62%) e divulgação de experiências (52%). São ainda procuradas numa percentagem bastante significativa páginas com textos (47%) e *software* (33%).

Verificou-se, em particular, que o *site* Investigar e Aprender, apesar de ser temático, tem uma projecção significativa, principalmente entre professores do ensino secundário (41% conhece) e do 2° ciclo (39%).

A grande maioria dos professores utiliza, sobretudo, páginas portuguesas (78%), enquanto que os restantes utilizam sobretudo páginas estrangeiras (15%) ou tanto páginas nacionais como estrangeiras (7%). A procura de *sites* noutras línguas é maior entre os professores de níveis etários mais avançados e entre professores do sexo masculino.

4. *IRC e fóruns de discussão.* A utilização do *IRC* (*Internet Relay Chat*), fóruns e listas de discussão, consultórios ou cursos *on-line*, pelos professores portugueses é muito reduzida. A maioria dos professores nunca visitou fóruns e listas de discussão (62%) nem IRC (60%). Apenas 8% dos professores afirmou visitar regularmente fóruns e listas de discussão e apenas 3% afirmou utilizar regularmente o *IRC* e enviar mensagens.

Conclusão

As características da amostra levam-nos a ter prudência nas conclusões a tirar. Limitamo-nos por isso a apontar algumas ideias que podem constituir desafios para aprofundar futuramente.

1. O facto dos professores usarem o *e-mail* e a *WWW* sobretudo para fins profissionais sugere que existe uma ampla margem para a utilização destes recursos ao serviço do ensino da Matemática.

2. O elevado contraste entre os níveis de utilização por parte dos professores do 1° ciclo do ensino básico e dos restantes níveis de ensino (2° e 3° ciclos e secundário), sugere que estamos perante duas culturas distintas, e que um esforço adicional deve ser feito para dotar as escolas do 1° ciclo das condições necessárias ao uso destas tecnologias, bem como para criar oportunidades de formação neste campo para os professores.

3. O facto dos professores parecerem procurar sobretudo materiais para a sala de aula, notícias e informações, relatos de experiências, textos e *software* cria um vasto campo de possibilidades para quem se interessa por desenvolver páginas *WWW* para os professores de Matemática em língua portuguesa.

4. A percentagem de professores que visita fóruns e listas de discussão é pequena. Mas mesmo os que visitam estes serviços, mostram um reduzido envolvimento. Porque será que tal acontece? Será que são os temas destes fóruns e listas de discussão que são pouco aliciantes? Fazem pouco sentido para o professor? São questões sobre as quais vale a pena reflectir, pois estas formas de discussão podem ser muito úteis para o debate dos mais diversos assuntos, ajudando a definir um ponto de vista profissional sobre os problemas que nos afectam.

Notas

1 O inquérito (documento pdf) pode ser consultado no endereço http://www.apm.pt/estudo/inquerito.pdf.

2 O relatório completo do estudo pode ser consultado no endereço http://www.apm.pt/estudo/relatorio.pdf.

A equipa do Projecto IA e GTInternet

Encontros

3º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática

O DEFCUL está a organizar o 3º Simpósio sobre o Ensino das Ciências e da Matemática, desta vez subordinado ao tema *Formção de professores: perspectivas e desafios.* O simpósio realiza-se nos dias 8, 9 e 10 de Janeiro de 2004, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Para mais informações, pode consultar o site http://semc.fc.ul.pt

TIME-2004

O Simpósio International em Tecnologia e a sua Integração na Educação Matemática realiza-se em Montreal, entre 15 e 18 de Julho de 2004. A data limite de inscrição é 20 de Fevereiro. Para obter informações, consulte http://www.time-2004.etsmtl.ca.

9ª Conferência Internacional sobre Matemática Escolar — Métodos alternativos de ensino e de avaliação

Esta Conferência terá lugar em Viena, Áustria, durante os dias 23 e 26 de Fevereiro de 2004. Para mais informações, consulte o site http://www.algebra.tuwien.ac.at/institut/schulmathematik/index_engl.html.

2ª Conferência de USACAS — Sistemas de Cálculo Álgebrico na Matemática da Escola Secundária.

Esta conferência realiza-se em Glenview, Illinois, perto de Chicago, nos dias 19 e 20 de Junho de 2004. Informações adicionais podem ser obtidas em http://www.mste.uiuc.edu/mailman/listinfo/usacas.

5th International Conference on Information Communication Technologies in Education — ICICTE international conference

5ª Conferência Internacional sobre as Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação.

Esta Conferência realiza-se em Samos, uma ilha grega, entre 1 e 3 de Julho de 2004. Para mais informações, consulte o site http://www.ineag.gr/ICICTE.

ICME 10

O 10º Congresso Internacional em Educação Matemática realizar-se-á em Copenhagne, de 4 a 11 de Julho de 2004. Este encontro será organizado conjuntamente pelos países nórdicos—Dinamarca, Finlândia, Noruega e Suécia.

Os objectivos deste Congresso são:

— mostrar o que acontece na educação matemática, no mundo, no âmbito da investigação e do ensino;

— trocar informação sobre os problemas da educação matemática no mundo;

— aprender e beneficiar dos recentes avanços na Matemática, como disciplina.

Este encontro espera reunir 3000 a 4000 investigadores e professores em educação matemática.

A inscrição *on-line* estará disponível a partir de Agosto de 2003 e, se for feita até 28 de Fevereiro de 2004, será de, aproximadamente 417€.

Para mais informações sobre o encontro e alojamento consulte a página da Internet: http://www.ICME-10.dk

Quota 2004

No ano de 2004 o valor da quota é de €43,70 para professores, €31,00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,70 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ______________________ Sócio nº: __________

Morada: ______________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ Email: __________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: __________

Nº do B.I. __________ Arquivo: __________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de ensino: __________

Categoria profissional: __________

Escola: ______________________

Morada: ______________________

Telefone: __________ Email: __________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA **MasterCard** ☐ MasterCard

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________

__________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a) €10,30

☐ Sócio(a) residente no estrangeiro €12,80

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: geral@apm.pt

Índice