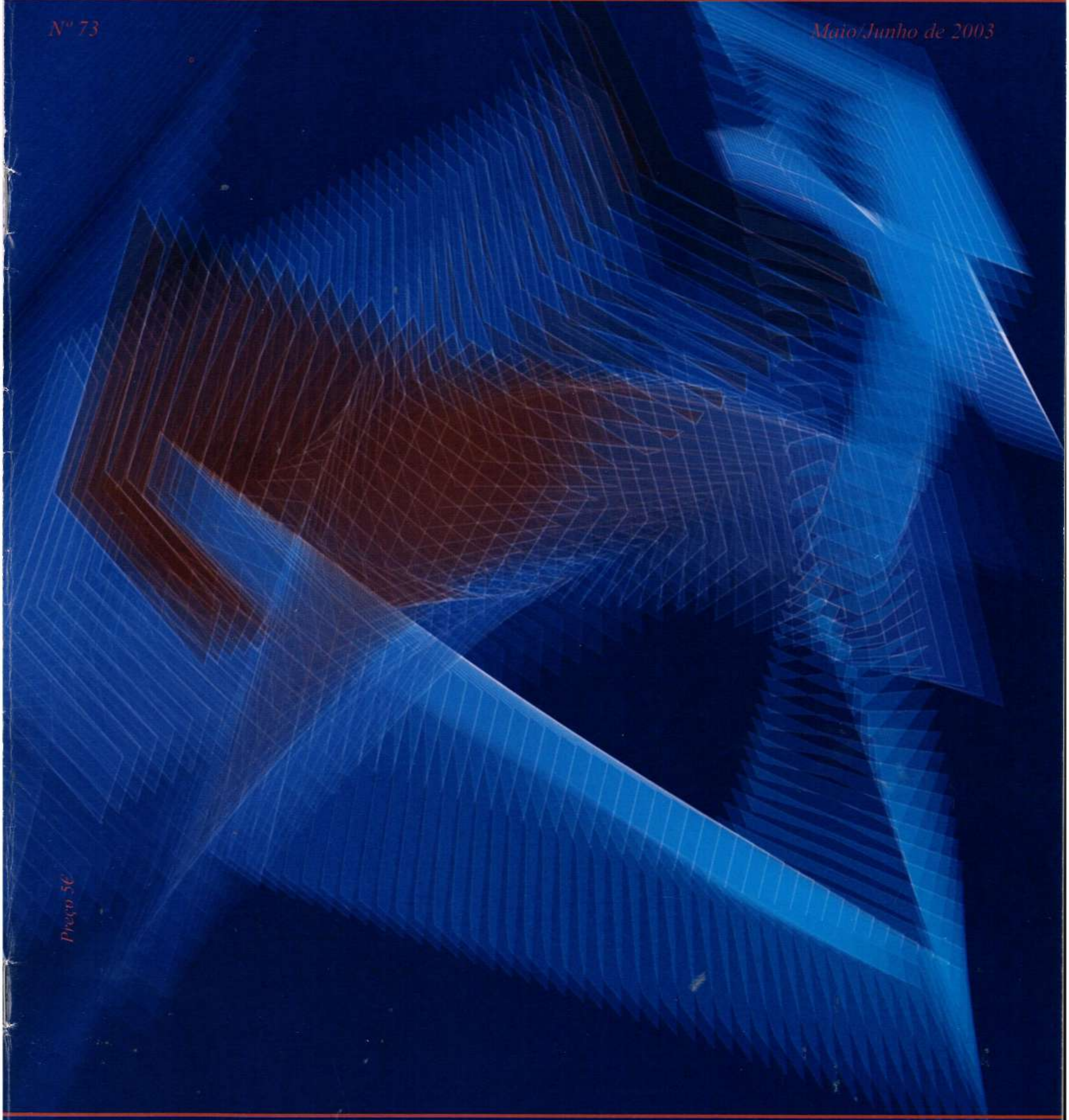
Nº 73

Maio/Junho de 2003

Educação e Matemática



Preço 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

A capa, cujo título poderia ser *O universo euclideano* foi, em certa medida, motivada por um dos artigos que surge neste número, da autoria de Eduardo Veloso e intitulado *Construcções geométricas, prazer dos deuses ...* .

A geometria euclidiana possui a característica, provavelmente ímpar, de ser ao mesmo tempo simples e útil na descrição de uma parte importante da realidade.

Uma indicação da sua simplicidade reside no facto de estar a salvo do fenómeno da incompletude. Quer isto dizer que qualquer afirmação, envolvendo noções euclideanas, ou se demonstra ou se refuta a partir dos axiomas.

Contudo, como já se referiu, esta simplicidade não obsta a que possa descrever realidades complexas.

A capa procura, assim, reflectir esta possibilidade de descrever o *complexo* a partir do *simples*.

Neste número também colaboraram

Ana Carla Campos, António Guerreiro, Carlos Pires, Cátia Ramos, Eduardo Veloso, Elisa Rodrigues, Isabel Cristina Dias, João Barroso, John Mahoney, Luciano Veia, Maria da Paz Martins, Maria José Brito, Nelson Martins Ferreira, Rogério Costa, Rosário Bento

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Junho de 2003.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 73
Maio/
Junho
de 2003

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Joana Brocardo

Subdirectora
Adelina Precatado

Redacção
Alice Carvalho
Ana Paula Canavarro
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Branca Silveira
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A
1500–236 Lisboa

Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Gráfica Torriana
N.º de Registo: 112807
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Autonomia das escolas
cinco anos e cinco ministros depois ...

João Barroso

Passaram-se cinco anos (e cinco ministros) desde que em 4 de Maio de 1998 foi publicado o Decreto–lei nº 115/A-98 que aprovou o *Regime de Autonomia, Administração e Gestão das Escolas e Agrupamentos de escolas.* O que mudou desde então? Se exceptuarmos a alteração formal dos órgãos de gestão das escolas (extensiva a todos os graus de ensino) e a criação dos agrupamentos, muito pouco mudou! Por isso é possível repetir hoje o que já afirmava em Março de 2001 no Relatório Global da avaliação externa[1] realizada aos dois primeiros anos de aplicação do referido decreto:

> "(...) para quem imaginava que o decreto–lei 115/A–98 era muito mais do que uma simples remodelação formal da gestão escolar, os resultados alcançados, no final de dois anos, são frustrantes. Mesmo sabendo que o processo era difícil e que contava com muitos obstáculos, era possível ter feito mais. (...) No essencial a evolução do processo depende do que for feito, de substancial, para dar uma expressão clara e efectiva ao aumento das competências e recursos das escolas. E aqui os "contratos de autonomia" podem ser decisivos. Contudo não podem ser cometidos os mesmos erros que foram cometidos até agora, o que passa por uma clarificação dos objectivos políticos, um reforço das competências e da perícia técnica dos serviços da administração, a criação de efectivos serviços de apoio às escolas, e uma progressão cautelosa e sustentada."

Como se vê (aparentemente) muita coisa mudou, mas tudo continua na mesma!

No governo anterior, foi patente a incapacidade (ou falta de vontade) dos responsáveis do Ministério da Educação e sua administração para levarem à prática um verdadeiro programa de reforço da autonomia das escolas, apesar de todo o investimento discursivo que foi feito.

No actual governo a retórica sobre autonomia tem diminuído, mas aumentou a retórica sobre a gestão. Contudo, um ano depois do início de funções, e se exceptuarmos o ressurgimento da "síndroma da gestão empresarial" (iniciada com o ministro Roberto Carneiro), nada de novo surgiu.

Entretanto, nas escolas, a sucessão das reformas, o seu carácter normativo tantas vezes desfasado da realidade, bem como os seus insucessos têm contribuído, como sabemos, para uma mescla de sentimentos que marcam o quotidiano de muitos professores que vão da frustração ao desespero, da culpa à evasão, do desencanto à indiferença.

Para muitos é o tempo de regressarem aos *seus casulos* tecendo, solitariamente, as teias da sua profissão. Para outros, é a oportunidade de legitimarem o seu desinteresse e procurarem alternativas de realização (material, profissional ou pessoal) fora do local de trabalho. Para outros ainda, é o momento de fazerem o luto *das ilusões perdidas* e (espera-se) de conquistarem, por essa via, a maturidade e a autonomia profissional que nunca tiveram.

Por isso, é difícil apelar, hoje, ao entusiasmo, ao profissionalismo, à dedicação dos professores, sem dar garantias efectivas que não se lhes está, de novo, a *oferecer presentes envenenados* ou a querer que sejam *cúmplices da sua própria exploração.*

É neste contexto (e no compasso de espera em que nos encontramos) que vale a pena recordar aqui um dos princípios que apresentei no estudo prévio que me foi encomendado pelo Ministro da Educação Marçal Grilo, em 1996[2]:

"Uma política destinada a *reforçar a autonomia das escolas* não pode limitar-se à produção de um quadro legal que defina normas e regras formais para a partilha de poderes e a distribuição de competências, entre os diferentes níveis de administração, incluindo o estabelecimento de ensino. Ela tem de assentar sobretudo na criação de condições e na montagem de dispositivos que permitam, simultaneamente, *libertar* as autonomias individuais e dar-lhes um sentido colectivo, na prossecução dos objectivos organizadores do serviço público de educação nacional, claramente consagrados na Lei Fundamental.

O reforço da autonomia das escolas deve traduzir-se necessariamente num conjunto de competências e de meios que os órgãos próprios de gestão devem dispor para decidirem sobre matérias relevantes, ligadas à definição de objectivos, às modalidades de organização, à programação de actividades e à gestão de recursos.

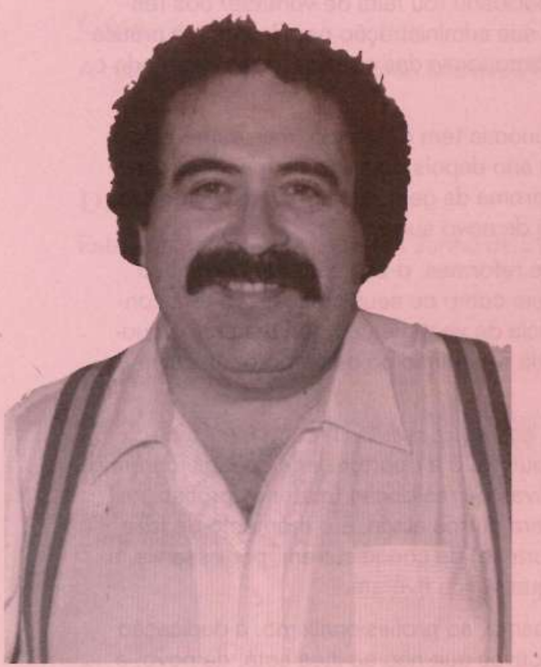
Contudo, não basta *regulamentar* a autonomia. É preciso criar condições para que ela seja *construída*, em cada escola, de acordo com as suas especificidades locais e no respeito pelos princípios e objectivos que enformam o sistema público nacional de ensino."

Notas

1 Os relatórios da avaliação externa do processo de aplicação do *Regime de Autonomia, Administração e Gestão das Escolas e Agrupamentos de escolas* encontram-se disponíveis no sítio do Centro de Estudos da Escola, em http://www.fpce.ul.pt/centros/ceescola

2 Barroso, João (1997). *Autonomia e Gestão das Escolas*. Lisboa: Ministério da Educação.

João Barroso
Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação
Universidade de Lisboa



Raul Fernando

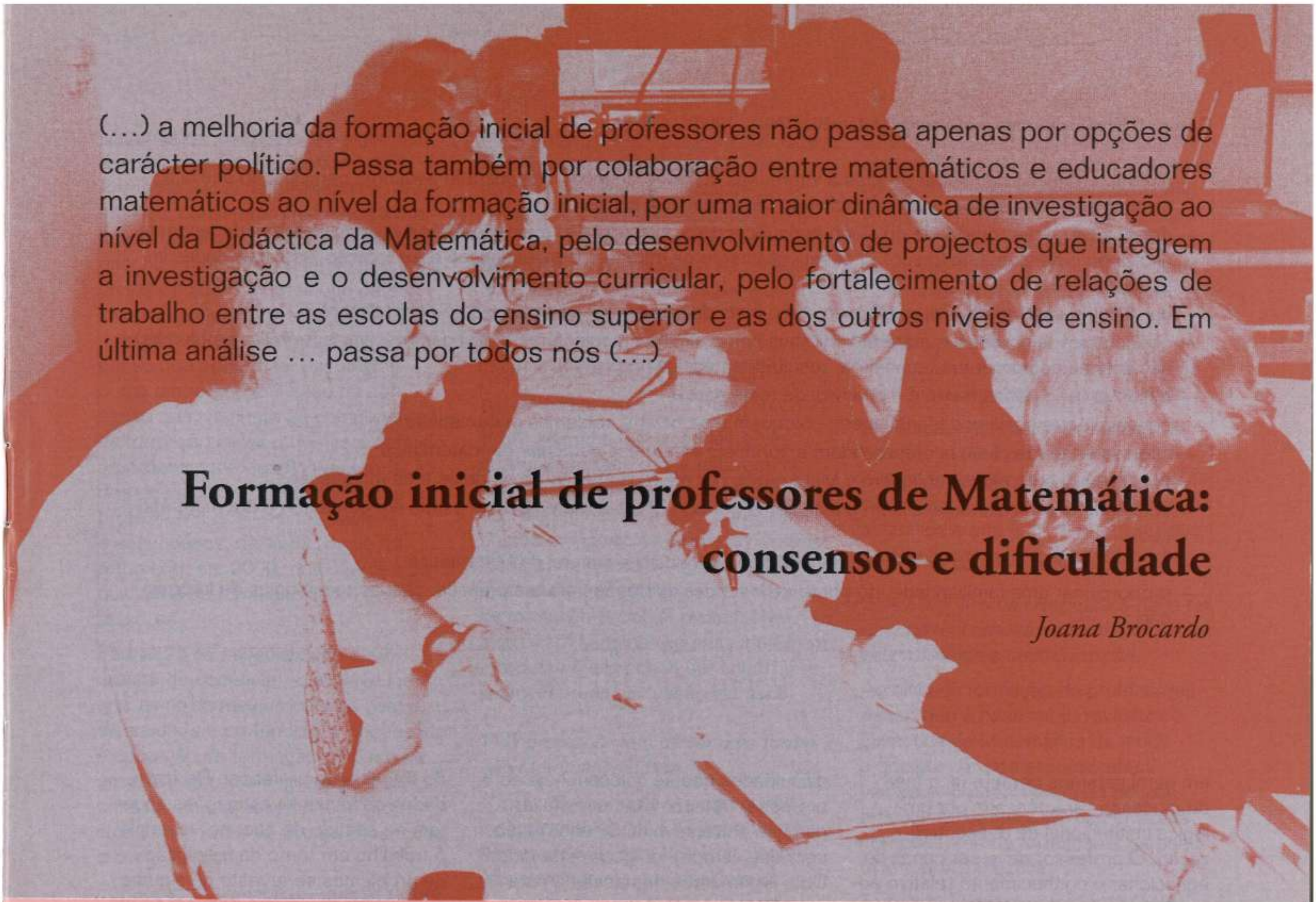
No passado dia 7 de Maio, faleceu no Maputo, em Moçambique, o nosso colega Raul Fernando Carvalho.

O Raul foi um professor de Matemática com uma carreira brilhante, tendo leccionado em Angola e em Portugal, em diversas escolas de várias regiões. Foi orientador de estágios pedagógicos e autor de manuais escolares.

Membro nº 16 da APM, o Raul foi um dos sócios fundadores da nossa associação, em cuja criação e primeira fase de desenvolvimento teve uma influência considerável. É especialmente interessante recordar que, em 1985, foi co-autor e dinamizador de um questionário distribuído aos participantes do ProfMat, através do qual se tornou claro que a criação de uma nova associação era uma aspiração de centenas de professores de Matemática. Em colaboração com o João Pedro da Ponte, coordenou o grupo de trabalho que elaborou a primeira proposta de estatutos da associação e, com o João Pedro e o Paulo Abrantes, integrou a mesa da assembleia constituinte da APM, a qual no dia 19 de Setembro de 1986, em Portalegre decidiu a fundação da nova associação e aprovou os seus estatutos.

O seu interesse muito especial pela problemática da formação de professores, assim como pela produção de materiais de apoio ao ensino e aprendizagem da Matemática, foi sempre muito evidente e prosseguiu na fase final da sua carreira, na Escola Superior de Educação de Setúbal e, mais tarde, em Moçambique. Foi o autor do editorial do nº17 da *Educação e Matemática*, de 1991, um número em grande parte dedicado à formação e ao grupo profissional dos professores de Matemática.

Ao mesmo tempo que expressa os seus sentimentos de profundo pesar aos familiares e amigos do Raul Fernando, a revista *Educação e Matemática* não quer deixar de registar nas suas páginas o papel que ele desempenhou numa fase decisiva da nossa associação.



(...) a melhoria da formação inicial de professores não passa apenas por opções de carácter político. Passa também por colaboração entre matemáticos e educadores matemáticos ao nível da formação inicial, por uma maior dinâmica de investigação ao nível da Didáctica da Matemática, pelo desenvolvimento de projectos que integrem a investigação e o desenvolvimento curricular, pelo fortalecimento de relações de trabalho entre as escolas do ensino superior e as dos outros níveis de ensino. Em última análise ... passa por todos nós (...)

Formação inicial de professores de Matemática: consensos e dificuldade

Joana Brocardo

Quando se procura discutir o ensino da Matemática e perspectivar alternativas, um aspecto central a ter em atenção é a formação inicial de professores. Que problemas identificamos? Que linhas de acção poderemos delinear para os ultrapassar?

Neste artigo começo por discutir brevemente o que significa, hoje, ser professor de Matemática procurando clarificar os campos de acção do professor e por os articular com as componentes que devem integrar a formação inicial. A partir deste contexto procuro identificar alguns factores que considero *inibidores* de uma formação inicial de qualidade e apontar caminhos que podem contribuir para os ultrapassar. Embora vários dos meus raciocínios e argumentos me pareçam válidos para a formação inicial de todos os professores de Matemática, eles decorrem da minha experiência e reflexão que se situa, sobretudo, ao nível da formação inicial de professores do 1° e 2° ciclos. Esta limitação, aliada à certeza de que este artigo é uma primeira tentativa de organização de um conjunto de ideias que reconheço como ainda incompletas, poderá encorajar-nos a aprofundar a reflexão sobre este tema. É com esta ideia presente que resolvi propor este artigo, dando um primeiro *pontapé de saída*. Convido o leitor a continuar, propondo/rebatendo reflexões e ideias relacionadas com a formação inicial de professores.

Campos de acção do professor e componentes da formação inicial

Num artigo publicado na *Educação e Matemática 69*, João Pedro da Ponte caracteriza de uma forma bastante clara os principais campos em que se desdobra a prática profissional do professor dando uma ideia bastante precisa da complexidade de que se reveste, hoje, ser professor de Matemática. Segundo este autor, podem distinguir-se três campos fundamentais e fortemente relacionados:

— *a prática lectiva*, que diz respeito à organização e condução de situações de ensino-aprendizagem, de acordo com uma perspectiva curricular e que compreende a concepção de tarefas apropriadas para os alunos e a avaliação da sua progressão nos diversos objectivos;

— *a prática extra-lectiva*, que inclui todas as situações em que o professor interage com outros elementos da comunidade ou trabalha na preparação e avaliação dos momentos de prática lectiva.

— *o desenvolvimento profissional*, que diz respeito a todas as situações em que o professor reflecte sobre a sua prática e procura aprofundar os seus conhecimentos e competências.

Analisando estes três campos de acção mais de perto, podemos perceber o que tem vindo a mudar ao nível do papel do professor e fazer um primeiro levantamento das dificuldades que hoje se colocam ao professor.

Na prática lectiva sobressaem as consequências da evolução do currículo. Em primeiro lugar, ao nível curricular

Quadro 1. Finalidades para o ensino da Matemática (Niss, 1996)

— centrar a atenção nas necessidades e interesses do aluno de modo a prepará-lo para uma participação activa ao nível da sua vida pessoal e social, incluindo uma cidadania activa.
— desenvolver a personalidade do aluno enriquecendo o auto-respeito e autoconfiança, o pensamento independente (incluindo o pensamento lógico), o desenvolvimento de atitudes de investigação e exploração, as capacidades linguísticas, etc.
— dar ênfase à actividade matemática do aluno mais do que à aquisição passiva de conhecimento;
— dar ênfase aos processos matemáticos (tais como explorar, conjecturar, investigar, resolver e formular problemas) e não apenas aos produtos (conceitos, resultados, técnicas);
— desenvolver o pensamento e a criatividade matemática;
— conseguir que os alunos identifiquem, coloquem e resolvam problemas matemáticos,
— conseguir que os alunos compreendam e apreciem a natureza particular da matemática;
— conseguir que os alunos apliquem a Matemática por meio da criação de modelos e da modelação;
— conseguir que os alunos analisem criticamente o modo como a Matemática é usada em contextos extra-matemáticos;
— proporcionar aos alunos uma compreensão do papel social e cultural da Matemática;
— proporcionar uma familiaridade, do ponto de vista das aplicações em Matemática, com as tecnologias de informação.

em geral estamos perante uma fase de mudança caracterizada por uma lógica institucional de descentralização. O professor deve ser capaz de equacionar o conhecimento relativo ao currículo da sua disciplina em termos de grandes finalidades curriculares. O currículo deve ser pensado como um projecto aberto e flexível que exige tomada de decisões e resolução de problemas e que se desenvolve a partir da análise da diversidade de necessidades e contextos locais e individuais. Assim, ao contrário da nossa tradição fortemente marcada pela visão do professor como 'consumidor de currículo' hoje defende-se que o professor tem de ter um papel decisivo ao nível de um desenvolvimento curricular orientado pela reflexão através da prática. Em segundo lugar, ao nível do ensino da Matemática, emergiram novos objectivos curriculares que é necessário ter em conta. Procurando exemplificar esta ideia, indicam-se, no quadro 1, as finalidades para o ensino da Matemática que, segundo Niss (1996), se têm vindo a perspectivar nos últimos anos e que continuam a ser relevantes para prosseguir no futuro. (Quadro 1)

Perante estes dois aspectos que influenciam fortemente a prática lectiva não será aceitável afirmar que as dificuldades que se colocam hoje ao professor não são mais complexas das que enfrentava há 50 anos? Não será que sempre foi igualmente *difícil*? Dois argumentos que destaco para um *não* como resposta a estas duas perguntas: (1) a planificação a partir dos documentos curriculares oficiais é complexa, e (2) dar ênfase aos objectivos curriculares de ordem superior não é simples.

Relativamente ao primeiro aspecto destaco a dificuldade em articular as orientações curriculares de 2001—Currículo Nacional do ensino Básico: competências essenciais—com as dos programas de 1991. Esta dificuldade parece-me particularmente premente no 1° ciclo em que o programa de Matemática *desemboca* em objectivos muito específicos indicados por ano e que prevêem uma progressão que me parece difícil de compatibilizar com as competências definidas no documento de 2001.

Quanto ao segundo, penso que alguns dos aspectos que inegavelmente hoje são importantes na formação matemática dos alunos—como identificar, formular e resolver problemas, explorar investigações ou ser capaz de analisar e criticar uma dada situação complexa—envolvem dificuldades ao nível do trabalho do professor. De facto, dados de várias investigações apontam no sentido de que, por exemplo, o trabalho em torno da resolução de problemas se reveste de alguma complexidade e que é necessário um certo investimento e persistência do professor para o prosseguir.

Isto não significa que considere que a prática lectiva é uma *missão impossível*. Apenas considero que ela se reveste de dificuldades que devem ter implicações na formação dos professores e, em particular, ao nível da formação inicial.

Retomando os campos de acção do professor identificados por Ponte (2002), destaco a complexidade dos aspectos relativos à dimensão colaborativa cada vez mais presente na prática extra-lectiva—é importante que o professor trabalhe em equipa, proponha planos de acção e contribua para o desenvolvimento de projectos educativos—e da generalização de práticas reflexivas e da importância da investigação sobre a sua prática profissional que são aspectos centrais no desenvolvimento profissional do professor.

Tendo em conta esta breve reflexão sobre os aspectos subjacentes ao que significa, hoje, ser professor de

Matemática, percebem-se algumas das dificuldades e exigências da formação inicial de professores. No entanto, considero que se nos situarmos a um nível global, não será difícil encontrarmos um consenso sobre as principais componentes que devem integrar qualquer curso de formação de professores. Assim, a este nível, penso que podem ser assumidos como um referencial-base de consenso relativamente às componentes da formação inicial o que está definido no ordenamento jurídico da formação dos educadores de infância e dos professores dos ensinos básicos e secundários, de 1989, e que foi retomado, em 2000, nos padrões de qualidade da formação inicial de professores:

Formação na especialidade da(s) área(s) de docência—que deve integrar as unidades curriculares com a diversidade e profundidade necessária à obtenção de formação de base na área do curso e em áreas do saber conexas para o desempenho profissional nos níveis de docência para que o curso habilita.

Formação educacional—que se refere às didácticas específicas para que o curso habilita e a outros domínios do saber sobre educação que são relevantes para a compreensão do acto educativo.

Iniciação à prática profissional—entendida como a observação, colaboração, intervenção, análise e reflexão sobre situações educativas.

Formação cultural, social e ética—que integra, por exemplo, a sensibilização para os grandes problemas do mundo contemporâneo, o alargamento a áreas do saber e cultura diferentes das da sua especialidade de docência e a reflexão sobre os problema éticos que se colocam na actividade docente.

Embora com modos de operacionalização diferentes estas componentes estão presentes nos cursos de formação inicial de professores existentes.

No entanto, penso que estamos longe de considerar que *tudo está bem* ao nível da formação inicial de professores. O que será então que *não está bem*? O que identificamos como necessário para melhorar a formação que oferecemos? Que mudanças poderemos perspectivar?

Para uma formação inicial de qualidade: algumas perspectivas

Promover uma formação inicial de qualidade implica reunir esforços no sentido de melhorar as condições de que dispomos. Para isso, parece-me bastante importante conseguir estabelecer um conjunto de outros consensos relativamente a aspectos chave da formação inicial de professores. Indico, em seguida, algumas ideias em torno das quais penso ser importante promover uma discussão alargada.

1. *O professor tem de ter uma formação matemática sólida.*

A importância deste aspecto parece-me indiscutível—não se pode ser um bom professor sem dominar o conteúdo científico que se pretende ensinar. A grande questão é se poderemos assumir, como é veiculado por alguns, que a formação matemática necessária para ser professor assenta essencialmente nos conhecimentos que o aluno deve ter ao terminar o 12º ano. Sendo assim, no ensino superior, o aluno deverá estudar mais Matemática mas sem que o que estuda tenha em conta o facto de estar a ser formado para ser professor.

A fraca relação entre uma formação avançada em Matemática e os conhecimentos matemáticos necessários para ensinar é um aspecto que é salientado por vários investigadores (Ball, Lubienski e Mewborn, 2001). Naturalmente, isto não é sinónimo de que os futuros professores não devam estudar mais Matemática. No entanto, a orientação a dar à formação em Matemática deve reflectir o facto de os alunos estarem a ser preparados para assumir profissionalmente a educação matemática das crianças e jovens do ensino básico e secundário.

Assim, uma parte substancial das disciplinas de Matemática dos cursos de formação inicial de professores deve incluir, de um ponto de vista aprofundado e superior, os temas centrais do ensino básico e secundário dando oportunidade aos futuros professores de, como referem Ball, Lubienski e Mewborn, *revisitar e aprofundar os seus conhecimentos matemáticos de aritmética, álgebra ou de geometria.*

Em suma, o conhecimento matemático necessário para ensinar é uma componente que tem de ter expressão na formação inicial e que deve ser assumida como importante por todos os que formam futuros professores.

2. *A Didáctica da Matemática deve ter um papel charneira na formação inicial de professores desta disciplina.*

Ao nível da formação de professores penso que é necessário revitalizar a Didáctica da Matemática de modo a que ela consiga assumir, efectivamente, o papel que deve ocupar: articular os contributos das diversas componentes de formação e perspectivar a prática lectiva.

Tomando como exemplo o 1º Ciclo, parece-me que não é exagerado afirmar que muito pouco se tem vindo a problematizar, sistematizar e desenvolver. Que trabalhos temos vindo a desenvolver sobre a articulação da Didáctica da Matemática com as outras Didácticas? Que reflexões temos vindo a fazer, por exemplo, sobre os números e operações? Que conhecimento organizado temos vindo a produzir neste âmbito para além do que suporta, genericamente, um conjunto de indicações curriculares gerais?

Relativamente aos outros ciclos a situação não me parece significativamente diferente. Penso que é importante perspectivar linhas de desenvolvimento, sistematizar reflexões sobre o campo de intervenção dos formadores e fazer mais investigação nesta área. Deste modo, poderemos efectivamente revitalizar a Didáctica da Matemática e perspectivar, de um modo mais fundamentado e preciso, o seu papel de charneira ao nível da formação inicial de professores.

3. *A iniciação à prática pedagógica tem de ser uma componente de qualidade e uma realidade em todos os cursos de formação inicial de professores*

A operacionalização desta ideia tem gerado um certo debate em torno da integração ou não da prática pedagógica ao longo do curso. Prefiro não retomar esta polémica e apontar para discussão um aspecto que me parece bastante problemático: assumir a iniciação à prática profissional como um aspecto essencial da formação inicial de professores e, como tal, implicar as instituições de ensino superior na qualidade do trabalho desenvolvido nesta área. Esta ideia articula dois aspectos distintos: o porquê da importância da prática pedagógica e algum conhecimento sobre a diversidade de concepções subjacentes às opções *práticas* das instituições de ensino superior.

A importância da iniciação à prática pedagógica, entendida como compreendendo a observação de aulas de Matemática, a planificação de situações de aprendizagem e a sua condução no contexto de sala de aula, é por de mais evidente. De facto, ela é uma componente fundamental da formação de professores uma vez que permite o enriquecimento da prática pela relação com a teoria e o aprofundamento do significado da teoria pela problematização da prática. No entanto, ainda hoje, em várias instituições, ela é assumida como o *parente pobre*: nalguns casos a prática quase que se resume à observação de aulas, noutros, o seu acompanhamento é quase integralmente feito pelos professores que recebem os alunos nas suas aulas, noutros é da responsabilidade de professores que pouco contacto têm com a perspectiva seguida nas disciplinas teóricas.

Penso que é importante alterar esta situação e garantir que todos os futuros professores tenham uma experiência de formação que envolva, com um peso significativo, a gestão de tarefas apropriadas à aprendizagem dos alunos e que essa experiência seja realmente integrada nas perspectivas e no trabalho desenvolvido nas outras componentes da formação inicial.

4. *A relação entre as instituições responsáveis pela formação inicial de professores e as escolas cooperantes deve ter uma componente forte de desenvolvimento de projectos de investigação sobre a prática profissional.*

As relações que se estabelecem entre as instituições de formação e escolas cooperantes são bastante diversas. No entanto, penso poder afirmar-se que tende a dominar um certo *sentimento de incompreensão*: os professores das escolas sentem que as instituições estão centrados na *teoria* e afastadas dos problemas da *prática*; os das instituições sentem que os professores das escolas tendem a não integrar na sua acção práticas inovadoras. Na prática, as relações entre estes dois contextos de formação tendem a resumir-se à realização de duas ou três reuniões gerais onde se tratam de aspectos mais ou menos burocráticos e a pequenas reuniões entre os supervisores da prática, o aluno estagiário e o professor responsável da turma, focadas na reflexão das aulas conduzidas pelo aluno-professor.

É urgente pôr cobro a este *sentimento de incompreensão* e caminhar para uma parceria que compatibilize linhas de acção e que torne viável a concepção e concretização de projectos de investigação centrados no desenvolvimento profissional. Deste modo, poderão criar-se condições para que a iniciação à prática profissional do aluno estagiário se desenvolva num ambiente em que se aposta na qualidade de ensino, em que se procuram soluções, em que se reflecte sobre os resultados das opções tomadas, ao mesmo tempo que se criam condições mais gerais para melhorar o ensino da Matemática no nosso país.

5. *É necessário repensar a formação inicial dos professores do 1º Ciclo.*

A legislação actual prevê duas vias para a formação de professores do 1º Ciclo: um curso de quatro anos destinado, de base, à formação de professores do 1º ciclo e um curso, também de quatro anos, que forma professores do 1º Ciclo e do 2º Ciclo numa determinada variante (no caso da Matemática, na variante Matemática/Ciências).

Na primeira via de formação, considero particularmente problemática a formação científica em Matemática. Para além de uma formação em didáctica da Matemática, os alunos precisam de reforçar a formação Matemática com que chegam ao curso—e que muitas das vezes inclui apenas o 9º ano de Matemática e os Métodos Quantitativos—de modo a consolidar conhecimentos e a desenvolver uma visão alargada da Matemática. Assim, penso que será importante *exigir* planos de curso que reflictam uma atenção especial à formação científica em Matemática.

A segunda via de formação parece-me extremamente problemática por vários motivos. Considero, sobretudo, muito difícil conseguir compatibilizar, em quatro anos, a formação de um professor generalista num ciclo de estudos com a de um especialista em duas áreas científicas de um outro ciclo de estudos. Esta dificuldade é ainda mais *agravada* pela nossa tradição escolar que influencia fortemente a existência de dois *mundos diferentes*: o do 1º Ciclo e o do 2º Ciclo.

No actual quadro de organização curricular parece-me bastante difícil construir respostas para esta problemática: por uma lado não faz sentido formar professores para um nível de ensino composto por dois anos de escolaridade e, por outro, não faz sentido integrar a formação de especialistas para um Ciclo, na de generalistas para um outro Ciclo. Pelo contrário, o que me parece ser urgente promover é a formação de professores do 1º Ciclo que se especializam numa das áreas científicas deste Ciclo. Assim, ao nível das escolas, a equipa de professores poderia beneficiar do apoio mais especializado de cada um para a planificação e condução do processo de ensino-aprendizagem.

Razões de vária ordem justificam o reequacionar a nossa organização curricular por ciclos. Uma delas, é sem dúvida, esta contradição ao nível da formação de professores.

6. *Terminada a formação inicial é importante criar mecanismos de acompanhamento dos primeiros anos da profissão.*

Os primeiros anos de profissão são determinantes para o desenvolvimento profissional do professor. No entanto, no nosso país continuamos a não criar condições para ultrapassar uma integração que se resume, muitas das vezes, a atribuir um horário (que frequentemente integra as turmas mais problemáticas da escola) e a criar condições de acesso a indicações centradas sobretudo no cumprimento de determinadas directrizes—tempo a dedicar a cada conteúdo, critérios de avaliação, organização das áreas curriculares não disciplinares, normas para o contacto com os encarregados de educação. Com a nossa tradição de organização escolar, é difícil às escolas criar espaços de formação e colaboração que visem o acompanhamento dos primeiros anos da profissão. Assim, considero importante analisar globalmente este aspecto e estabelecer, de facto, as condições que permitam a organização de um acompanhamento efectivo dos novos professores.

A concluir

Ao longo deste artigo procurei identificar um conjunto de ideias que poderão contribuir para que possamos, cada vez mais, ter melhores professores de Matemática. Gostava ainda de salientar que é a preocupação com a qualidade (e não com a quantidade) que deve nortear a nossa linha de reflexão e acção.

Ao centrar medidas relativas aos professores numa análise quantitativa, o Ministério tomou várias decisões que relegaram a qualidade para segundo plano. É disto um exemplo a decisão de dar habilitação própria a licenciados com habilitações reduzidas em Matemática. No momento actual, continua a dominar, ao nível das preocupações do governamentais, o factor quantidade no delinear de opções futuras: há professores a mais e como tal é prioritário formar menos professores. Esta *lógica* para além de redutora, já mostrou poder conduzir a situações críticas. Não devemos cair no erro cometido por alguns países que hoje se debatem com falta de professores. Assim, penso que é fundamental nortear a nossa linha de acção em torno de princípios que de facto valorizem a profissão docente, permitam investir numa formação de qualidade e incentivem, pela positiva, a melhoria do ensino da Matemática.

Finalmente, gostava de salientar que a melhoria da formação inicial de professores não passa apenas por opções de carácter político. Passa também por colaboração entre matemáticos e educadores matemáticos ao nível da formação inicial, por uma maior dinâmica de investigação ao nível da Didáctica da Matemática, pelo desenvolvimento de projectos que integrem a investigação e o desenvolvimento curricular, pelo fortalecimento de relações de trabalho entre as escolas do ensino superior e as dos outros níveis de ensino. Em última análise ... passa por todos nós, quer sejamos professores da formação inicial, quer sejamos professores que recebem alunos-estagiários nas suas aulas ou, *apenas*, professores que trabalham nas escolas do ensino básico e secundário.

Referências bibliográficas

Ponte, J. P. (2002). Continuidade e mudança no papel do professor. *Educação e Matemática, 69*, pp. 61-64.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D. L., Lubienski, S. e Newborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching.* New York: Macmillan.

Joana Brocardo
ESE de Setúbal

Nota da redacção:

No passado dia 28 de Novembro realizou-se, por iniciativa do Conselho Nacional de Educação (CNE), um seminário subordinado ao tema: *O Ensino da Matemática—Situações e Perspectivas.* Este seminário incluiu duas conferências e dois painéis. Pela pertinência do tema e relevância das intervenções, a redacção da *Educação e Matemática* convidou alguns dos intervenientes a escreverem artigos para cada um dos números da revista deste ano. Uma das conferências foi proferida pela Joana Brocardo a quem solicitámos o artigo que agora publicamos: *Formação inicial de professores de Matemática: consensos e dificuldades.*

O fim do início da *gestão centrada na escola* do 1.º ciclo

Com se sabe, está em curso um processo de reestruturação organizacional dos estabelecimentos de educação e ensino. Trata-se, de agrupar à escola básica de 2.º e 3.º ciclos, geograficamente mais próxima, os estabelecimentos de ensino onde é leccionada a educação pré-escolar e o 1.º ciclo do ensino básico. De acordo com o jornal Público de 17 de Abril de 2003, baseando-se nas afirmações do Secretário de Estado da Administração Educativa, o objectivo é integrar os mais de 13 mil estabelecimentos existentes em cerca de duas mil unidades de gestão. Segundo este responsável político *é fundamental concentrar as escolas numa unidade de gestão autónoma e responsável, para garantir a sequencialidade das aprendizagens, criar uma dinâmica necessária a que o investimento possa gerar uma maior qualidade e para que possa realizar a aposta num melhor sistema de gestão e informação.*

Tudo isto, independentemente da situação organizacional em que os estabelecimentos se encontram e sem consideração pela(s) autonomia(s) construídas, ou pela aprendizagem e literacia organizacional adquiridas por algumas escolas e agrupamentos.

Os pontos de vista que expresso neste texto não têm por base de sustentação uma avaliação empírica. Até porque ela não existe ... Baseiam-se na reflexão construída por via indutiva e dedutiva, na minha cultura profissional, nas inferências emergentes das conversas abertas com colegas, donde surgem desabafos, dúvidas, cepticismos, convicções ...

A diversidade de situações que contextualizam os estabelecimentos onde é leccionado o 1.º ciclo é enorme. Vai desde a tipologia, estado físico e dimensão até ao regime de gestão. Aparentemente, esta constatação parece ser uma boa justificação para a medida tomada, tal como a aspiração a uma efectiva sequencialidade e articulação entre os ciclos do ensino básico.

Como contra-argumentação contextualizo as minhas considerações (cuja profundidade fica muito aquém do desejável, tendo em conta a economia do texto) nos seguintes aspectos: participação e representatividade, organização pedagógica e lógicas profissionais e definição de campo organizacional.

A verticalidade imposta pode implicar menor representatividade dos professores do 1.º ciclo nos processos de tomada de decisão ao nível dos órgãos de administração e gestão, já que, geralmente, não é directamente proporcional ao número de alunos desse ciclo. Um estudo recente revela que as direcções executivas mostram uma sobre-representação dos ciclos ou níveis de escolaridade mais elevados.

Para além das inúmeras *barreiras de comunicação* que a verticalidade implica, adivinha-se uma tendência cada vez mais acentuada para formas de *não-participação* de *pseudo-participação* ou de outras formas como a participação *apática* ou *resignada* não havendo, assim, condições para a construção de uma verdadeira cultura de participação. Uma das minhas maiores preocupações com a verticalidade prende-se com a ausência de formas de participação dos alunos do 1.º ciclo na vida da organização escolar e nos processos de tomada de decisão.

As especificidades características do 1.º ciclo (sendo as mais marcantes a iniciação sistematizada nas várias literacias, a integração curricular, a monodocência e as idades dos alunos) assinalam uma organização pedagógica e uma lógica de gestão curricular que se articula com uma lógica de cultura profissional que advém dos percursos formativos do professor do 1.º ciclo. Desta forma, julgo que é no confronto destas lógicas com outras lógicas e culturas que reside uma das principais causas da falta de sequencialidade entre ciclos que, acredito, não será esbatida com a verticalização.

O agrupamento vertical de todas os estabelecimentos de 1.º ciclo, incluindo as escolas de grande dimensão, implica a extinção da ideia de escola primária como unidade de gestão munida de órgãos próprios de decisão de política educativa, ou seja de uma *gestão centrada na escola*. Desde o princípio da sua existência que a escola primária viu, a si, vedada esta possibilidade.

Perante esta morte anunciada de um importantíssimo objecto de estudo adivinha-se uma escassez cada vez maior de estudos organizacionais sobre a escola primária, sobretudo os que se focalizam nos processos e instrumentos de autonomia e de administração e gestão.

Assim, estou convencido de que a organização pedagógica subjacente ao 1.º ciclo poderá influenciar significativamente a organização e administração da escola (tal como já ocorreu em episódios da história do ensino primário em Portugal). Partindo deste pressuposto a essa lógica de acção deverá corresponder um campo organizacional de contornos específicos (embora flexíveis), que permita aquilo que alguns autores designam por *aprendizagem organizacional*.

Parece-me, pois que esta emancipação da *escola primária* deve passar por um processo de criação, manutenção e qualificação de desenho de escolas, preferencialmente, de grande dimensão que consintam a existência de órgãos de gestão próprios. Esta medida pressupõe uma simbiótica articulação curricular e organizacional com a educação pré-escolar e com alargamento do ensino primário para seis anos de escolaridade.

Fica lançada a polémica!

Carlos Pires
Professor do 1.º ciclo

Uma história com proporcionalidade directa

É quinta-feira, estamos a meio da manhã numa turma do sétimo ano bastante interessada e participativa. Os alunos têm dificuldade em trabalhar de forma organizada, todos querem responder ao mesmo tempo, mostrar que sabem e é difícil aguardarem a sua vez para intervir.

Nesse dia logo no início da aula são, por mim, avisados que teremos quatro professores a assistir à aula.

Vários alunos: __ Logo quatro Setora ... ?

Professora: __ Sim, duas das professoras já têm assistido às vossas aulas e as outras duas vêm de novo.

De referir que estes alunos têm um comportamento totalmente diferente quando outros professores assistem às aulas: são uns anjinhos nestes dias ... As duas professoras que assistem habitualmente às aulas são duas estagiárias da Universidade Lusófona e as outras duas são alunas do quarto ano da mesma Faculdade. No ano passado foi, por mim, sugerido que os alunos do quarto ano deviam assistir a aulas dos colegas estagiários e dos professores orientadores para terem alguma noção das dificuldades que terão que enfrentar dentro de alguns meses.

Nesta aula íamos terminar a proporcionalidade directa—fazer uma síntese de tudo o que tinham aprendido. Como fazer com que a aula fosse interessante para todos os assistentes e para os alunos?

Ao meditar sobre o assunto resolvi experimentar o seguinte:

Coloquei no retroprojector um acetato da Porto Editora com o título Proporcionalidade Directa e, em que eram exibidas duas situações, que passo a descrever:

Situação A—uma torneira despeja água num recipiente cilíndrico.

Situação B—Outra torneira igual à primeira despeja água para outro recipiente que tem a forma de um tronco de cone, mais estreito em baixo que em cima.

Por baixo de cada uma das situações encontram-se as tabelas que relacionam o tempo, em minutos, que a torneira está a deitar água com a altura, em centímetros, que a água atinge ao fim desse tempo e os respectivos gráficos. Os gráficos neste momento ainda estão tapados.

Os alunos olham atentamente para a figura projectada. Proponho então, aos alunos, que inventem uma história que traduza a situação que se encontra no acetato.

Todos os alunos estão em silêncio e olham para o écran.

Um aluno: __ Já sei Setora ... Posso dizer?

A professora: __ Então começa lá.

O mesmo aluno: __ Era uma vez o Sr. João que não tinha água em casa e resolveu ir à fonte encher uma vasilha ...

Outro aluno interrompe: __Mas são duas vasilhas e duas torneiras ...

Terceiro aluno: __ Não, pode ser só uma torneira e duas pessoas a encher, uma de cada vez, não é Setora?

A Professora: __ E os outros alunos o que é que acham?

Quarto aluno: __Podem ser as duas coisas, pode ser uma só torneira e duas pessoas enchem duas vasilhas diferentes uma de cada vez ou pode ser uma fonte com duas torneiras e duas pessoas a encher ao mesmo tempo.

A Professora:__ Todos concordam?

Muitos alunos ao mesmo tempo: __ Sim.

A Professora: __ Vamos continuar a história mas antes precisamos de decidir qual das situações vamos considerar. Penso que será preferível considerar que é uma só torneira e duas pessoas a encherem duas vasilhas diferentes.

O primeiro aluno: Posso continuar, Setora?

A Professora: __ Sim, continua.

Outro aluno: __ Setora não é justo, só ele é que fala?

A Professora: __ Calma, todos irão participar na sua vez ...

O primeiro aluno: __ Era uma vez o Sr. João que não tinha água em casa e resolveu ir à fonte encher uma vasilha. Quando lá chegou encontrou o seu amigo Manel e resolveram apostar quem iria encher mais depressa a sua vasilha.

A Professora: __ Muito bem, agora outro aluno continua ...

Oferecem-se muitos voluntários e a professora escolhe uma aluna.

Aluna: __ O Sr Manel diz que a vasilha dele é a que enche mais rapidamente porque é mais estreita em baixo, o Sr. João responde que não e para tirarem as teimas resolvem medir a altura ao fim de cada minuto até aos cinco minutos.

A Professora: Muito bem, vou eu terminar com a seguinte frase: Quem achas que ganhou a aposta?

Um aluno: __ Eu acho que foi o Sr. Manel ... .

Outro aluno: __ Não foi nada, foi o Sr. João ...

A Professora: __ Não é só dizer que se acha isto ou aquilo, é preciso defender a sua opinião...Quem acha que foi o Sr. João, levanta o braço. Vários alunos levantam o braço. Quem acha que foi o Sr. Manel, levanta o braço. Vários alunos levantam o braço.

A Professora repara que duas alunas não levantam o braço nem num caso nem no outro e decide que lhes irá pedir a opinião. Começa por solicitar a um dos alunos que achavam que era a vasilha do Sr. Manel que iria encher mais depressa que justificassem a sua opinião.

Um dos alunos: __ A vasilha é mais estreita em baixo logo demora menos a encher.

A Professora: Os outros concordam?

Os alunos do mesmo grupo:__ Sim

Os alunos do outro grupo: __ Não

A Professora: __ Porque é que não concordam?

(Continua na página 12)

Na Páscoa fomos para o Algarve ... trabalhar!

António Guerreiro e Luciano Veia

Duzentos estudantes, educadores e professores partiram de diversos pontos do país em busca da EB1 de Alto de Rodes, em Faro, para trabalhar durante os dias 23 e 24 de Abril no VI Encontro Nacional de Professores do 1° Ciclo—A Matemática no 1° Ciclo.

Para a comissão organizadora, com especial destaque para o empenho das professoras da referida escola, e os dinamizadores das sessões, o trabalho de planificação e preparação da iniciativa começou alguns meses antes, como é normal em iniciativas da APM.

Logo pela manhã do primeiro dia, os participantes dirigiram-se às instalações da Escola de Hotelaria e Turismo de Faro (EHT), para receber a documentação e assistir à Sessão de Abertura, com a presença de representantes do DEB e da C. M. de Faro, do Director Regional de Educação do Algarve, de Fernando Nunes, Presidente da APM, e de Madalena Guerreiro, Presidente do Conselho Executivo da EB1 de Alto de Rodes.

Trabalho em Plenário no Auditório da Escola de Hotelaria e Turismo de Faro

Na manhã do primeiro dia, trocámos pontos de vista trabalhando em plenário: Jorge Pinto da ESE de Setúbal abordou o tema da Avaliação a partir de exemplos de actividades de professores que constituem momentos de avaliação e de reflexão sobre as concepções de aprendizagem e Lurdes Serrazina (ESE de Lisboa), Joana Brocardo (ESE de Setúbal) e Jean Marie Kramer (CITO, Holanda) abordaram o tema *O Sentido do Número no 1° Ciclo*, partindo das respostas de alunos dos 2° ao 4° anos relacionados com a compreensão do número e das operações, dando particular ênfase à compreensão dos processos não formais de cálculo.

Na tarde do segundo dia, realizou-se o painel Projectos e Matemática com a participação de Rui Trindade, da FPCE da Universidade do Porto, Hélia Sousa, da EB1 da Portela de Sacavém, Manuela Castro Neves, da EB1 nº 4 de Oeiras e Maria Eugénia de Jesus, da EB1 de Alto de Rodes e a moderação de Cristina Loureiro, da ESE de Lisboa. As professoras intervenientes no painel apresentaram projectos multidisciplinares desenvolvidos pelos alunos nas suas escolas, dando ênfase à dimensão da construção do conhecimento matemático no decorrer da realização dos projectos. O Rui Trindade teceu comentários a propósito das situações relatadas, realçando que estes exemplos comprovam que é possível desenvolver projectos de Matemática na sala de aula do 1° Ciclo a partir de situações do quotidiano dos alunos.

Na Escola Básica do 1º Ciclo de Alto Rodes em Faro

Depois das diversas peripécias para encontrar o caminho entre as duas escolas, auxiliados com o respectivo mapa da cidade, devidamente assinalado, na tarde do primeiro dia estávamos *em casa*, numa agradável Escola Básica do 1° Ciclo.

Algumas novidades na banca da APM e a exposição *A Matemática é de Todos* obrigou-nos a gerir alguns momentos de descanso para tomar notas de actividades e adquirir material didáctico e de reflexão para transformar as nossas aulas

Trabalhar com as mãos ... nas actividades

As sessões práticas são *as meninas dos nossos olhos* das iniciativas da APM. E desta vez foram numerosas, diversificadas e concorridas pelos estudantes, educadores e professores participantes no Encontro.

A Ana Lebre, da EB 2/3 de Marrazes e o José Saleiro, do Agrupamento de Escolas de Caxinas envolveram os participantes com simetrias e pavimentações. Passeámos no Parque observando os animais e medimos Dinossaurios com o António Guerreiro e a Natália Sousa, da ESE da Universidade do Algarve. Num ambiente de Pavilhão Chinês a Maria Adília Redinha trouxe, de Macau, o Ábaco Chinês e Operações Aritméticas. Os jogos (de conhecimento) na aula de Matemática estiveram presentes com o Fernando Nunes, procurando estratégias vencedoras nos jogos do galo, cartas e ouri e lançámos (Só) dados com Pedro Almeida, do Centro Alfredo Pinheiro e António Luís, da Coordenação do Ensino Recorrente de Alcobaça. Com os Poliedros, o José Tomás Gomes, da ESE da Lisboa, correu o risco de contribuir para o aumento do volume (de construção) no Algarve, apesar das suas formas regulares. Descobrimos o caminho mais curto entre as duas escolas através dos Grafos e da Resolução de Problemas da Graciosa Veloso, da ESE de Setúbal e investigámos com a Helena Amaral, da EB1 nº 124 de Lisboa.

Os Educadores de Infância no Encontro

O Grupo de Trabalho do 1° Ciclo da APM alargou esta iniciativa aos Educadores de Infância, desenvolvendo esforços para uma melhor articulação, da aprendizagem da Matemática, entre o Jardim de Infância e o 1° Ciclo, nomeadamente através das sessões práticas *Com os Sentidos na Matemática* dinamizada pelas Educadoras de Infância Helena Sousa e Rosa Horta, da APPC de Faro e *O Preto e o Branco* orientada pela Maria Adília Lino, da EB 2/3 de Estói, Faro.

Da discussão surge a ... reflexão

Os Grupos de Discussão constituíram momentos de reflexão e debate de variados temas relacionados com o ensino e aprendizagem da disciplina. A Cristina Loureiro e o Pedro Almeida discutiram aspectos relacionados com a Matemática e Cidadania, tendo por base situações da vida quotidiana dos alunos. A Conceição Patrício, da EB1 nº 3 de Corroios e a Teresinha Nunes, da EB1 nº 3 de Famões, trouxeram para a discussão a forma como os manuais permitem trabalhar alguns conceitos matemáticos, nesta época de Currículo Nacional do Ensino Básico. A Manuela Soares, da EB1 nº 4 da Cova da Piedade, Margarida Porto, da EB1 nº 52 de Lisboa e Manuela Ferreira, da EB1 de Queluz de Baixo procuraram as estratégias mentais que os alunos utilizam na resolução de problemas com a travessia do rio e o sobe e desce do caracol. A Alice Carvalho, da EB1 Orlando Gonçalves da Amadora e a Henriqueta Gonçalves, da EB1 Mina de Água da Amadora abordaram a Construção de Conceitos relacionados com a divisão e números racionais (discussão que se prolongou para além da hora do almoço).

Plenários na ... EB1 de Alto Rodes em Faro

Para além dos plenários na cantina durante a hora do almoço e no beberete de fim de tarde animado pela actuação do grupo musical de Santa Maria, realizou-se um painel, na tarde do primeiro dia, moderado pela Natália Serrazina da EB1 Cabecinha, Benedita e com a participação Fernando Nunes (APM), Paulo Feytor Pinto (APP) e Glória Maria Martins (APEI) para discutir aspectos relacionados com cooperação entre as Associações Profissionais.

Não foi possível vasculhar no baú das recordações de cada uma dos participantes mas fica aqui um possível testemunho de como tudo decorreu ao longo destes dois dias. Uma palavra de apreço para a EB1 de Alto de Rodes, Conselho Executivo, docentes, funcionários e alunos.

António Guerreiro
Luciano Veia
Escola Superior de Educação
Universidade do Algarve

Pontos de vista, reacções e ideias...

(Continuação da página 10)

Os alunos do outro grupo: __Porque se olharmos para a tabela vemos que ao fim de cinco minutos a vasilha do Sr. João tem já 15 cm de altura de água e a do Sr. Manel só tem 9 cm de altura de água.

A Professora: __ Então se a vasilha é mais estreita em baixo não devia encher mais depressa?

Uma das alunas que não concordou com os colegas: __ Ó Setora posso responder?

A Professora: __ Sim.

A mesma aluna: __ Mas é que o diâmetro das duas vasilhas não é o mesmo, logo a da situação B pode demorar mais a encher. Também não sabemos se a torneira está aberta da mesma maneira ou se duma das vezes correu mais quantidade de água ...

A Professora: __ Boa conjectura. Parabéns. É preciso dar atenção a todos os pormenores. Para podermos avançar teríamos que fazer aquilo que normalmente os cientistas fazem ou seja definirem muito bem as condições em que se realiza a experiência e tornar o mais possível iguais essas mesmas condições, logo no caso da nossa história para poder haver comparação, a quantidade de água que corria deveria ser a mesma enquanto se enchiam as duas vasilhas. Para terminarmos são capazes de dizer em qual das situações temos uma proporcionalidade directa?

Vários alunos: __ Eu, eu, ...

A Professora: __ Calma, vai dizer um aluno que ainda não tenha respondido.

Esse aluno: __ A primeira situação é e a segunda não porque dividindo a altura pelo tempo dá sempre três na primeira tabela e na segunda situação dividindo não dá constante.

A professora: __ Podíamos ver isso logo no desenho inicial?

O mesmo aluno: __ Sim, Setora, porque como a primeira vasilha tem o mesmo diâmetro em cima e em baixo enche sempre da mesma maneira e a outra não.

A Professora: __ Vamos agora ver os gráficos correspondentes às duas situações.

Um aluno: __ O de proporcionalidade directa é uma recta que passa na origem e o outro está torto.

A professora: __ Não está torto é uma curva.

Neste momento ouve-se a campainha para a saída e alguns alunos exclamam: Já!!!

Foi agradável dar esta aula, os professores assistentes gostaram muito e os alunos também. Comentaram depois que nunca tinham pensado que, explorar desta maneira um acetato vulgar, entusiasmasse tanto os alunos.

Rosário Bento
EB 2,3 Prof. Noronha Geio—Queijas

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar compórtável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível da Revista.

Preparar o próximo ano lectivo: tarefa possível, impossível ou indeterminada?

Novos programas do 10º ano não cabem nas disciplinas antigas

Enquanto a revisão do secundário não entrar em vigor, os professores vão ter de cortar na matéria

ISABEL LEIRIA

ANTÓNIO PEDRO VALENTE/ARQUIVO

—, estes programas também não se adequam nem aos nomes das disciplinas, nem às cargas horárias estabelecidas para cada cadeira, que vão continuar a vigorar durante o próximo ano.

Vai ser preciso fazer adaptações – o ministério chama-lhes "medidas de operacionalização"

Apesar da rev… aprovada pe… Educação (M… vigor em 20… que no próx… se matricul… vão já apre… com novos p… blema é que… sido pensad… curricular a… cutivo sociali… revogada pelo actual —, estes programa… …em não se adequam … …os nomes das discipl…s, nem às cargas horárias estabelecidas para cada cadeira, que vão continuar a vigorar durante o próximo ano.

Para que possam então ser aplicados, o ME já informou as escolas secundárias que vão ter de adoptar algumas "medidas de operacionalização". E que passam, por exemplo, pela "redução, no ano lectivo de 2003/04, do módulo inicial que, nos programas, está previsto para cerca de três semanas". Quer isto dizer que os professores vão ter de cortar na matéria, designadamente na primeira parte, que devia ser dedicada à actualização dos conceitos essenciais de cada disciplina.

Isto, porque os novos programas, quer da componente de formação geral (Português B, Língua Estrangeira e Introdução à Filosofia), quer da específica exigem uma carga horária superior em relação aos actuais tempos lectivos.

A informação consta de um ofício do Departamento do Ensino Secundário enviado às escolas e motivou o alerta do Sindicato dos Professores da Grande Lisboa (SPGL).

Ainda para compensar a diferença de tempo de aprendizagem prevista na actual estrutura curricular, o ME diz que, em relação a algumas disciplinas da componente específica (como Geografia, História ou Matemática, por exemplo), é também necessário que as escolas consagrem mais "unidades lectivas para apoiar a aplicação dos novos programas". O SPGL alega que esta solução vai traduzir-se "num aumento substancial da carga horária semanal dos alunos, já agora bastante sobrecarregada".

Finalmente, o ofício da tutela recomenda que as escolas passem já a adoptar as chamadas "aulas de 90 minutos". Afinal, foi a partir desse modelo que se conc… ram e elaboraram os n… programas — e não par… actuais tempos lectivos … minutos.

Consequência deste de… samento entre a entrad… vigor das novas matéria… própria revisão curricul… também o facto de os alu…

Os professores vão ter de cortar na matéria, designadamente na primeira parte, que devia ser dedicada à actualização dos conceitos essenciais de cada disciplina

O ministro David Justino justificou na altura que os compromissos assumidos com as editoras de manuais escolares obrigaram a que não se mexesse nos conteúdos e entrada em vigor dos programas. Caso contrário, o Estado arriscava-se a pagar uma avultada indemnização. ■

…não os progra… …homologados.

O ministr… …vid Justino justificou … altura que os compromissos assumidos com as editoras de manuais escolares obrigaram a que não se mexesse nos conteúdos e entrada em vigor dos programas. Caso contrário, o Estado arriscava-se a pagar uma avultada indemnização. ■

In Público, 5 de Junho de 2003.

Com o final dum ano lectivo aproxima-se a preparação do seguinte. Nas escolas começa-se a organizar o trabalho: escolha dos manuais escolares, decisões relativamente aos projectos a iniciar/continuar e ao modo de funcionamento, planificação do trabalho lectivo, … . É esta a vida das escolas e, embora havendo muitas *coisas* para fazer relativamente ao ano escolar que acaba—reuniões de trabalho, avaliações, exames—um novo ano traz sempre com ele a necessidade de pensar em n aspectos diferentes e de decidir sobre modos de os organizar, mesmo quando não se vive, como desde há uns tempos um período de alterações sucessivas. Os professores sabem-no bem.

Todos nós, sobretudo se *já andamos cá* há vários anos, vivemos períodos de mudança em que tivemos que enfrentar novas orientações curriculares, novas áreas curriculares, novas regras, novas formas de organização. Felizmente, nalguns casos, estes desafios foram agarrados com entusiasmo porque sentíamos pertinentes e coerentes algumas das novas propostas, e então preparar o novo ano lectivo tornava-se uma tarefa porventura mais difícil … mas, sobretudo, mais desafiadora!

Como está a ser a preparação do próximo ano lectivo?

No ensino secundário graça a confusão: embora a revisão curricular só entre em vigor em 2004/2005 o 10° ano vai ter novos programas já no próximo ano lectivo … só que concebidos para uma carga horária diferente e para disciplinas com nomes diferentes. À partida, compromete-se a coerência mínima que se deve exigir de um novo programa, isto é, que ele seja adequado à carga e distribuição horária semanal.

No ensino superior a confusão não é menor: as regras para propor o número de vagas dos diferentes cursos chegaram às instituições depois de 20 de Maio, numa altura em que vários aspectos relativos à preparação do novo ano lectivo—distribuição de serviço, requisições de professores, contratos de professores—já estavam definidos.

Tudo isto tem consequências desastrosas e o que é ainda mais lamentável é que, pelo modo como as coisas são feitas, ficamos com a ideia de que todos estes imprevistos de última hora estavam previstos há muito tempo. A opção de anunciar medidas em prol da melhoria e da qualidade do ensino—sejam elas uma nova revisão curricular ou novas perspectivas para o ensino superior oficial assentes na recusa e crítica das anteriores—colhe dividendos políticos imediatos. Infelizmente, todos já sabemos que quando as novas propostas não se consubstanciam numa previsão sustentada, articulada e rigorosa das mudanças, não há, efectivamente, qualquer investimento na melhoria do ensino.

Então, como sentimos que está a ser a tarefa de preparar o próximo ano lectivo?

Organizar um programa que é novo para uma carga horária que não lhe corresponde, não é fácil. Organizar um ano lectivo sem saber quais os cursos que vão funcionar, também não. Nós, os professores, lá iremos pensando nestas e noutras tarefas que têm contornos quase *impossíveis*.

É difícil não pensar que estamos num contexto *indeterminado* e que só lá mais para o Verão se definirão mais aspectos que terão implicações para o próximo ano lectivo. Mas lá conseguiremos, como tantas vezes, descobrir possibilidades de definição e encontrar opções em que continuamos a investir. Mas, pela parte que nos cabe, sentimos que só depois das férias é que teremos forças para tal. É que, para já, preparar o próximo o ano lectivo nos parece mesmo uma tarefa demasiado árdua e complexa para nos poder parecer *possível*!

Fátima Guimarães
Joana Brocardo

A modelação matemática é considerada um processo com origem num fragmento do mundo real e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade (...) identificada uma determinada situação é muitas vezes necessário simplificar alguns aspectos de modo a produzir um modelo para a sala de aula que seja interessante e compreensível para os alunos

Porque sobem os corvos a 5 metros?

Uma experiência de sala de aula

Adelina Precatado e Maria da Paz Martins

Introdução

A modelação matemática é considerada um processo com origem num fragmento do mundo real e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade. Sendo o processo de modelação matemático um dos itens que constitui o tema *Lógica e Raciocínio Matemático* do programa do ensino secundário é necessário adaptá-lo ao contexto educativo. Nesta perspectiva, identificada uma determinada situação é muitas vezes necessário simplificar alguns aspectos de modo a produzir um modelo para a sala de aula que seja interessante e compreensível para os alunos e que permita utilizar determinados conteúdos matemáticos.

É neste contexto que decidimos propor, aos nossos alunos de 11° ano (duas turmas do 1° agrupamento e uma do 3°), uma das tarefas existentes no site do NCTM (http://illuminations.nctm.org) que utiliza funções racionais para investigar o comportamento dos corvos de uma determinada região. A descrição e análise que se apresenta da experiência visa dar a conhecer uma tarefa que proporciona a vivência de diversas fases do processo de modelação com o auxílio da tecnologia.

Descrição da experiência

Na primeira aula—de turno—foi apresentada a seguinte situação: *um investigador observou que os corvos de determinada região se alimentam de búzios e que para os partirem os erguem no ar até uma altura de cerca de 5 metros e os deixam cair, repetindo a operação até os búzios partirem. Porque sobem os corvos até 5 metros?*

Apresentada a situação, os alunos trabalharam em grupo (dois ou três alunos), no computador, procurando responder à primeira questão colocada: qual dos trajectos é melhor, A ou B? (Ver Figura 1)

O vídeo inicial que apresenta os corvos a deixarem cair os búzios sobre as rochas, transmitiu algum realismo à situação e permitiu o confronto com as hipóteses colocadas pelos alunos acerca do melhor trajecto.

Seguidamente foram convidados a formular conjecturas tendo em atenção as seguintes questões: (a) que factores influenciam a altura a que os corvos sobem para deixarem cair os búzios? (b) haverá um número mínimo de quedas para partir um búzio? (c) e haverá uma altura máxima ou mínima para deixar cair um búzio? (d) que relação existirá entre o número de vezes que é necessário deixar cair um búzio e a altura a que o corvo sobe? Após a discussão, em grupo, esboçaram um gráfico correspondente às suposições feitas.

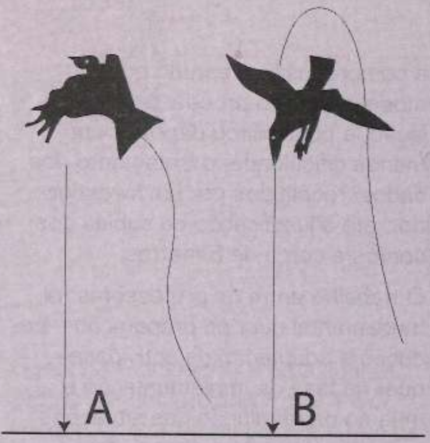


Figura 1.

Neste contexto, estavam criadas as condições para ir um pouco mais além na investigação e tentar perceber se o modo como os corvos deixam cair os búzios minimiza o seu trabalho, tendo em conta que esse trabalho depende quer da altura da queda do búzio quer do número de quedas ou seja do número de vezes que o corvo deixa cair o búzio e volta a apanhá-lo. Na impossibilidade de fazer uma simulação com os búzios, como fez o investigador Reto Zach, os alunos realizaram uma experiência semelhante mas com amendoins.

Os alunos deixaram cair amendoins descascados de diversas alturas e registaram o número de quedas necessárias para os partir (ver ficha em actividade para a sala de aula). Juntaram os dados obtidos por cada um dos grupos permitindo assim que a experiência fosse mais significativa e também a construção de uma tabela única para toda a turma. Os dados de cada um dos grupos foram introduzidos no computador que de imediato apresentou as médias e o desvio padrão do número de quedas para cada uma das alturas.

A título de exemplo deixamos os resultados obtidos numa das turmas (ver Tabela 1).

Na 2ª aula foi distribuída aos alunos uma ficha que possibilitou a continuação da tarefa sem o uso do computador. A partir daqui os dados foram tratados com a calculadora gráfica.

Analisados os dados dos amendoins, os alunos concluíram que a função era decrescente e que devia ter uma assimptota horizontal e outra vertical, o que conduziu à hipótese de considerar uma função racional para modelar a situação.

Retomando algumas das questões iniciais, nomeadamente as relativas ao número mínimo de quedas necessárias para partir um amendoim e a altura mínima para que este se parta, foi possível perceber que uma função do tipo

$$N = a + \frac{b}{h-c}$$

seria aceitável. Como para partir um amendoim é necessário pelo menos uma queda tomou-se para a o valor 1. Depois os alunos procuraram o valor dos outros parâmetros: b e c.

A ficha sugere, para a descoberta de b e c a utilização de um processo de regressão linear, depois de levar os alunos a reflectirem sobre a equivalência das seguintes expressões:

$$N = 1 + \frac{b}{h-c}$$

e

$$(N-1)^{-1} = \frac{h-c}{b}.$$

A última equação estabelece uma relação linear entre $(N-1)^{-1}$ e h. A equação de regressão linear que relaciona h e $(N-1)^{-1}$ foi obtida na calculadora, introduzindo os dados relativos a $(N-1)^{-1}$ e a h e, depois, foi resolvida a equação em ordem a N.

A equação encontrada pela turma já referida foi:

$$N = 1 + \frac{126,8}{1-10,3},$$

em que N é o número médio de quedas e h a altura em centímetros a que se deixa cair o amendoim.

Analisados os dados dos amendoins, estavam criadas as condições para tratar, da mesma forma, os dados estatísticos relativos aos búzios, recolhidos pelo investigador e fornecidos aos alunos na ficha de trabalho. (Ver Tabela 2.)

O modelo encontrado foi

$$N = 1 + \frac{20,41}{h-0,84}.$$

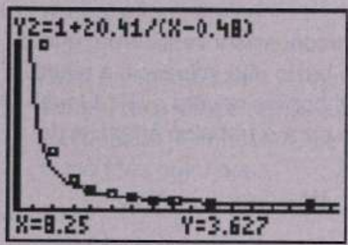


Gráfico 1.

No final desta aula cada um dos grupos entregou um pequeno relato do trabalho desenvolvido e das conclusões que depois lhes foi devolvido com algumas correcções e ou comentários. O estudo foi continuado em casa com auxílio da ficha e foi pedido aos alunos um relatório individual.

Os alunos procuraram responder à questão inicial, tendo em conta que

Tabela 1.

Alturas (cm)	15	20	25	30	35	40	50	60
Média do número de quedas	22,25	17,75	7,25	7	7,5	6,5	3,88	3,5
Desvio padrão	6,99	5,39	3,58	3,34	2,73	3,59	2,48	0,93

Tabela 2.

	Altura da queda (metros)									
	1,5	2	3	4	5	6	7	8	10	15
Nº médio de quedas	56	20	10,2	7,6	6	5	4,3	3,8	3,1	2,5

o trabalho do corvo para partir um búzio depende do seu peso e do peso do búzio, da altura da queda e do número de vezes que é necessário deixar cair o búzio. Supondo que o peso do corvo e do búzio é sensivelmente constante e admitindo que é 1 unidade, encontraram para o trabalho (W):

$$W = h \times N = h\left(1 + \frac{20,41}{h - 0,84}\right).$$

O estudo desta função permitiu concluir que o trabalho é mínimo quando a altura é de cerca de 5 metros, tal como o gráfico 2 apresenta.

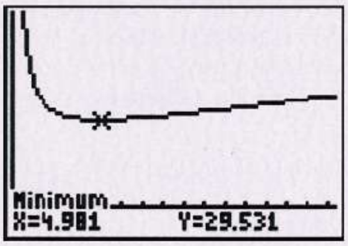


Gráfico 2.

Também curioso foi verificarem que o peso do búzio não influencia a altura a que os corvos devem subir. Considerando para o trabalho a família de funções

$$W = p \times h \times N =$$
$$= p \times h\left(1 + \frac{20,41}{h - 0,84}\right)$$

e atribuindo vários valores (sugeridos na ficha) ao peso do búzio os alunos constataram que o valor da altura para o qual o trabalho era mínimo se mantinha constante. Na discussão deste aspecto, em algumas turmas, nomeadamente nas do primeiro agrupamento, evidenciou-se a relação de proporcionalidade directa entre W e p traduzida na equação e que justifica que se mantenha a altura para a qual o trabalho é mínimo. (Gráfico 3)

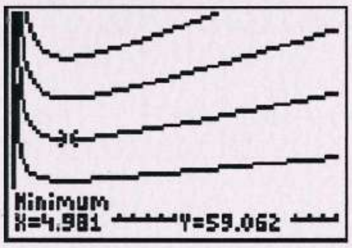


Gráfico 3.

Durante o período dado para a conclusão da tarefa e elaboração do relatório houve necessidade de introduzir na aula pequenos momentos para discutir aspectos relacionados quer com o trabalho de modelação quer com a clarificação do que se pretendia—ou exigia—no relatório.

Embora estes alunos já tivessem realizado relatórios de outras actividades, esta levantou algumas dúvidas sobre o que era exigido. Depois de alguma discussão entre nós (professoras) decidimos clarificar as orientações sobre o conteúdo dos relatórios:

— a descrição da experiência com os amendoins e apresentação do modelo;
— a resposta à questão *Porque sobem os corvos a 5 metros?*, de forma fundamentada, o que incluiria obrigatoriamente o estudo da função do trabalho no contexto do problema.

Conclusões/Reflexão

A apresentação da situação com recurso ao computador (INTERNET), nomeadamente o vídeo inicial contribuiu para criar um clima de mobilização dos alunos transportando-os para o real.

A discussão da primeira questão colocada aos alunos acerca dos trajectos possíveis entusiasmou sobretudo os alunos do primeiro agrupamento que quiseram estudar em qual dos trajectos de voo o búzio alcançava maior velocidade. A colaboração com a professora de Físico-Química revelou-se fundamental, nesta altura, para fazer o estudo da velocidade, nos dois trajectos, com base nas leis do movimento. No final percebemos que a diferença de velocidade não era muito significativa e que, por outro lado, o trajecto parecia estar mais relacionado com o facto de os corvos avistarem ou não o lugar onde caíam os búzios.

A experiência dos amendoins foi, quanto a nós, extremamente importante porque ajudou a envolver os alunos na tarefa, contribuiu para a compreensão e estudo quer do modelo quer do processo de modelação, e possibilitou depois, com menos dificuldade, o tratamento dos dados recolhidos por um investigador até à justificação da subida dos corvos a cerca de 5 metros.

O trabalho entre as professoras foi fundamental quer na preparação—tradução e adaptação da actividade—quer na fase de implementação e mesmo na resolução das situações que entretanto foram surgindo.

A ficha apresentada aos alunos para além da actividade de modelação coloca questões relacionadas com o estudo das funções o que a torna bastante extensa. Desde o início discutimos esta questão embora tivéssemos optado por não a simplificar por considerarmos ser uma oportunidade para consolidar o estudo das funções racionais. Pareceu-nos, no entanto, que para alguns alunos ela foi demasiado extensa, facto que contribuiu para as dúvidas surgidas acerca do que incluir no relatório. Tivemos que alargar um pouco o prazo inicialmente previsto para a entrega dos relatórios individuais.

Os alunos em geral gostaram e empenharam-se no desenvolvimento deste pequeno projecto, quer nas aulas quer no trabalho em casa. Alguns sentiram dificuldades que foram sendo ultrapassadas com o professor ou nos momentos colectivos que introduzimos nas aulas para discussão da tarefa.

Muitos alunos referiram espontaneamente, no momento de auto-avaliação, esta actividade como uma das que mais gostaram de desenvolver durante o ano e escolheram-na para ser apresentada à equipa de avaliação internacional do Projecto Ciência Viva que visitou a escola e também no V Forum Ciência Viva.

Adelina Precatado
Maria da Paz Martins
Escola Secundária de Camões

Figuras & Companhia

Figuras & Companhia é uma adaptação do conhecido jogo *Party & CO*, em que as diferentes provas a que os jogadores têm que se submeter são substituídas por outras, envolvendo conhecimentos e terminologia no âmbito da geometria ao nível do 8° ano de escolaridade.

Entre as muitas provas possíveis, os alunos podem ter que, recorrendo apenas a gestos, levar os seus colegas de equipa a pronunciar a palavra *ângulo* ou então, por meio de desenhos (e sem recurso a letras, números ou outros símbolos), induzi-los a dizer *Teorema de Pitágoras*. A simplicidade aparente das provas constitui um aspecto importante para conseguir o envolvimento de todos ... e as dificuldades que tendem a surgir contribuem, simultaneamente, para criar um ambiente de boa disposição (são comuns as situações hilariantes) e para aprofundar conceitos (quando surgem sugestões quanto ao gesto ou desenho que poderia ter sido feito).

N° de equipas: 2 a 4

N° de jogadores por equipa: 2 a 5

Material necessário: um tabuleiro de jogo; um dado de seis faces; uma ampulheta de 60 segundos; quatro marcas de cores diferentes (com ranhuras para introduzir as fitas das cinco provas); quatro fitas da cor de cada uma das provas; cartões com a indicação das provas a realizar (50 de cada cor); suporte para os cartões das provas; papel e lápis; um puzzle do Tangram; ampliações dos cartões com as figuras a realizar com o Tangram, do tamanho das peças disponíveis (facultativo).

Objectivo do jogo:

O objectivo do jogo é realizar com sucesso uma prova em cada uma das cinco casas em forma de estrela, para assim conseguir reunir as cinco fitas e tentar realizar a prova final na casa central.

Modo de jogar

Começa-se por sortear qual a primeira equipa a jogar.

Todas as equipas partem da casa central, lançando um dado e deslocando a sua marca o correspondente número de casas, na direcção que desejarem.

Se caírem numa casa em forma de triângulo ou estrela deverão realizar uma prova da cor correspondente. Se o fizerem com sucesso podem continuar a jogar e, no caso de estarem numa casa em forma de estrela, recebem ainda uma fita da cor correspondente, para colocarem na sua marca (se não tiverem já uma fita dessa cor).

Se caírem numa casa em forma de dado, podem jogar de novo e deslocar a sua marca na direcção que quiserem.

As provas a realizar variam em função da respectiva cor (ver Tabela 1).

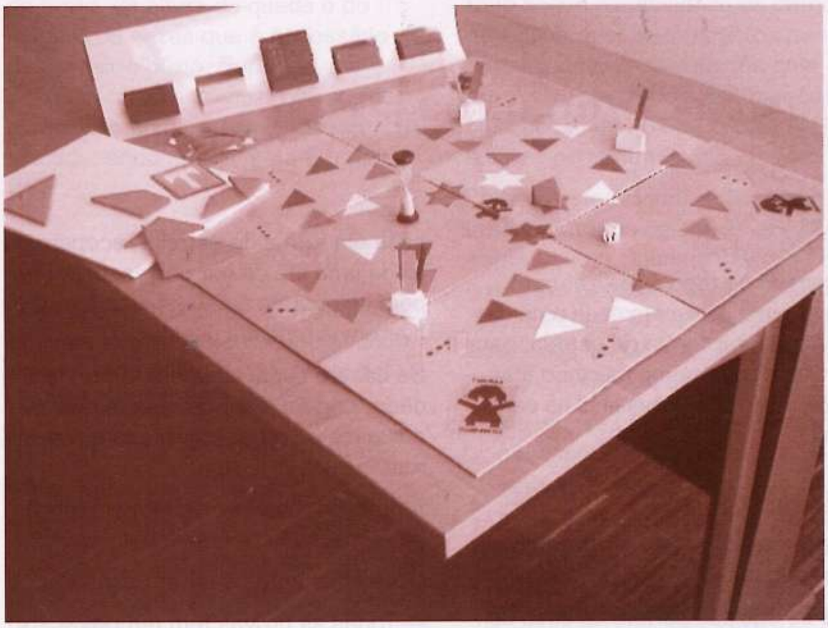
Outros aspectos a ter em conta:

— Todas as provas têm tempo máximo para a sua realização, cabendo às equipas adversárias virar a ampulheta no início da prova e fazer o respectivo controlo.

— Uma equipa só pode voltar à casa central ou a passar pela casa central quando já conseguiu obter as cinco fitas coloridas.

Tabela 1.

Cor	Provas	Como realizar
Verde claro	Ler nos lábios	O jogador deve conseguir que a equipa adivinhe o que está no cartão apenas com o movimento dos seus lábios, sem emitir qualquer som.
Roxo	Mímica	O jogador deve conseguir que a equipa adivinhe o que está no cartão apenas utilizando gestos, sem emitir qualquer som.
Verde escuro	Perguntas	Um jogador de outra equipa fará a pergunta à equipa em jogo, que deverá dar apenas uma resposta.
Azul acinzentado	Desenhos	O jogador deve conseguir que a equipa adivinhe o que está no cartão através de desenhos, sem falar ou gesticular e sem escrever, letras, números ou outros símbolos.
Vermelho	Tangram	A equipa terá que formar um desenho igual ao do cartão, usando o Tangram.



— Deve haver alternância nos papéis a desempenhar pelos elementos de cada equipa no desenrolar das várias provas.
— Com excepção da prova que consiste em responder a uma pergunta, os elementos da equipa podem dar as respostas que quiserem, dentro do tempo limite.
— Os jogadores que respondem são os únicos que não podem ver o cartão.
— Não pode haver mais do que uma equipa em cada casa do tabuleiro. Se por este motivo uma equipa não puder avançar perde a vez.
— Não há qualquer ordem pré-estabelecida para a obtenção das cinco fitas coloridas.

Fim do jogo

Uma vez conseguidas as cinco fitas, a equipa deve tentar alcançar a casa central, onde realizará uma prova cuja cor é escolhida pelos adversários. Se for bem sucedida na prova será a equipa vencedora, caso contrário, deverá abandonar a casa central na próxima jogada e tentar de novo.

Variações

Este jogo presta-se a inúmeras variações. Pode obviamente ser utilizado com alunos de outro nível de escolaridade, envolvendo conhecimentos no âmbito da geometria ou de outro tema, ou ainda envolvendo diferentes temas em simultâneo.

As características das provas também podem ser modificadas e as possibilidades são imensas! Uma das provas pode, por exemplo, consistir na construção, usando *polydrons*, de um sólido com determinadas características; ou na construção, com base em pequenos cubos, de uma figura de que são apresentadas as vistas laterais e de frente; ou ainda na descoberta de um termo a partir das palavras-pista dadas pelo colega de equipa. Pode ainda fazer-se com que todas as provas consistam na descoberta de um determinado termo matemático por diferentes processos (recorrendo a desenhos, mímica, leitura de lábios, palavras-pista, ...) e permitir que sejam os alunos da equipa adversária que acabou de perder a vez a escolher o termo. Esta última alternativa tem a vantagem de tornar a construção do jogo mais simples para o professor, uma vez que deixam de ser necessários cartões com as provas, mas também pode ter alguns inconvenientes ...

Um aspecto a que convém dar atenção neste jogo, ponderando a possibilidade de introduzir alterações, é o tempo. Em função das características dos alunos envolvidos pode mostrar-se conveniente estender um pouco o tempo destinado à execução de cada prova, uma vez que o jogo se tornará profundamente desinteressante se nenhuma das equipas estiver a conseguir concluir qualquer prova. Mas uma equipa que consegue ser bem sucedida durante muitas provas também se pode revelar um problema. Uma vez que de acordo com as regras do jogo as equipas só perdem a vez quando falham uma prova, pode acontecer que a certa altura os alunos comecem a ter a sensação de que é sempre a mesma equipa a jogar. Assim, poderá ser conveniente considerar a possibilidade de estabelecer um limite ao número de jogadas seguidas que uma equipa pode realizar.

Cátia Ramos
Elisa Rodrigues
alunas da Univ. Nova de Lisboa
Helena Rocha
Universidade Nova de Lisboa

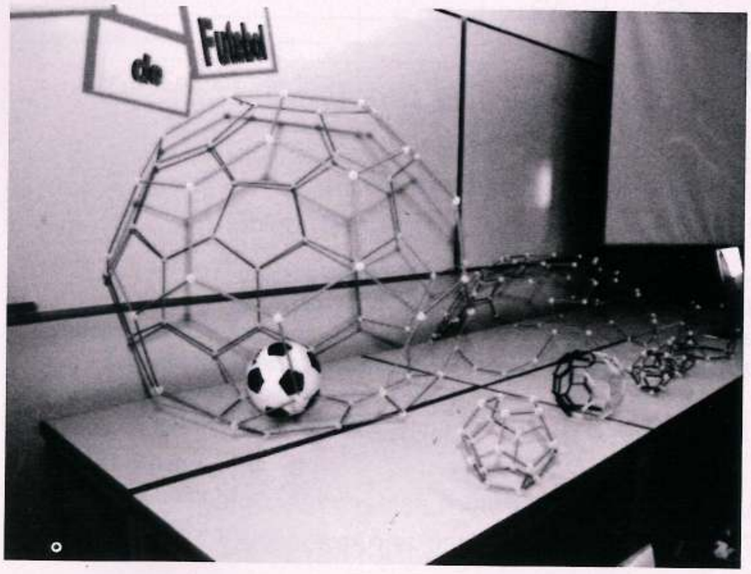
A Matemática e a Tecnologia na ESTG de Leiria

Nelson Martins Ferreira

A Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria realizou nos dias 19 e 20 de Março a 8ª edição do Dia Aberto, iniciativa que tem como principal objectivo dar a conhecer a realidade da Escola. O Departamento de Matemática desta escola apresentou uma exposição sobre a Matemática e a Tecnologia, no âmbito do ano temático proposto pela APM, a qual consistiu na apresentação de vários exemplos de avanços tecnológicos favorecidos pela Matemática e alguns exemplos de avanços na Matemática que só foram possíveis com o desenvolvimento das tecnologias. Além disso, esteve também patente uma mostra com a evolução da Matemática a par da Tecnologia, desde a antiguidade até aos nossos dias (que poderá ser consultada em formato digital em www.estg.ipleiria.pt/dep.php?id=10935).

Como não podia deixar de ser, a tecnologia na Matemática estará sempre associada aos números primos. Em última análise são estes os elementos mais sofisticados da Matemática. Poder-se-á ir mais longe e dizer ainda que o avanço tecnológico de uma civilização está directamente relacionado com o seu conhecimento dos números e em particular dos números primos.

A exposição esteve organizada de modo que o visitante, ao longo do seu percurso, pudesse ver à sua direita uma linha do tempo com a evolução das descobertas mais significativas na Tecnologia e na Matemática, assim como o progresso no conhecimento dos números primos de Mersenne (números primos que são da forma 2^p-1 com p primo). Neste percurso, o visitante constatava que até 1950 os primos de Mersenne foram descobertos a uma média de um por século, e que após essa data começaram a surgir a uma média de um por ano. De facto foi o advento dos computadores que possibilitou esse salto; por outro lado, foi grande a influência que as teorias da computação teórica de Alan Turing e outros tiveram no desenvolvimento dos computadores modernos.



À medida que a visita prosseguia, e que a linha do tempo evoluía, podiam encontrar-se vários tipos de interacção entre a Matemática e a Tecnologia, uma vez mais com os números primos a desempenharem um papel principal. Exemplos disso são os códigos de chave pública (que se baseiam no princípio de que é simples multiplicar dois números mas que, por outro lado, é extremamente difícil decompor um número nos seus factores primos) e o *bug* detectado no processador do Pentium, lançado pela Intel em 1994. Este erro no processador, que só ocorria uma vez em um milhão, foi detectado por um professor de matemática quando este tentou calcular o somatório dos inversos dos pares de números primos gémeos. Existe até uma piada que circula entre os matemáticos segundo a qual os técnicos de computadores só dispõem de dois modos efectivos para testar um aparelho: atirá-lo do cimo de um penhasco ou deixar um matemático usá-lo.

Ainda no seguimento dos números primos, podiam observar-se alguns dos avanços da tecnologia no sentido do aperfeiçoamento de computadores quânticos. Um computador quântico tira partido das propriedades quânticas das partículas, mais concretamente do efeito de superposição no qual uma partícula pode estar em vários estados simultaneamente. Se de facto os computadores quânticos se desenvolverem até ao nível em que possam ser facilmente programados então o problema da decomposição de um número (mesmo que muito grande) nos seus factores primos deixa de ser intratável e o princípio dos códigos de chave pública cai por terra.

Um dos grandes atractivos da exposição foi, sem dúvida, a parte de modelação da face humana, onde os visitantes podiam modificar as suas próprias feições utilizando um software que aplica transformações lineares e permite a manipulação de uma fotografia real numa espécie de caricatura artística.

Estavam também presentes outros exemplos de aplicações tecnológicas utilizadas diariamente na vida quotidiana, sem que tenhamos consciência da matemática que lhe está subjacente, como, por exemplo, a previsão meteorológica, o funcionamento dos circuitos electrónicos, o fabrico da bola de futebol ou ainda a gravação de um CD. Na parte da influência da Tecnologia na Matemática, o exemplo mais elucidativo foi a demonstração do Teorema das Quatro Cores (TQC). O TQC diz que não são necessárias mais do que quatro cores diferentes para colorir qualquer mapa, desde que este esteja sujeito à restrição de que dois países com um pedaço de fronteira comum não possam ser coloridos com a mesma cor. Este foi durante anos um problema em aberto na matemática, só solucionado com o auxílio do computador.

A exposição consistia também de uma panóplia de aplicativos informáticos que permitiam explorar a Matemática no computador.

À saída, o visitante era confrontado com os sete problemas do milénio. Pela resolução de qualquer um deles é oferecida uma recompensa de um milhão de dólares. Pode parecer até uma brincadeira, mas o que é facto é que das suas resoluções dependerá o nosso futuro tecnológico.

Nelson Martins Ferreira
Departamento de Matemática da
Escola Superior de Tecnologia e
Gestão do Instituto
Politécnico de Leiria

Materiais para a aula de Matemática

Porque sobem os corvos a 5 metros?

Esta tarefa é uma adaptação da ficha que apresentámos aos alunos na actividade descrita no artigo *Porque sobem os corvos a 5 metros?*

No endereço http://www.apm.pt/recursos/secundario/corvos/index.html, para além da actividade interactiva podem encontrar e fazer download da ficha completa tal como a usámos na sala de aula.

Adelina Precatado
Maria da Paz Martins
Esc. Sec. Camões

Escola..

Ano/Turma.............................. Data............................ Aluno(a)...........................

Porque sobem os corvos a 5 metros?

As gaivotas e os corvos alimentam-se de vários tipos de moluscos erguendo-os no ar e deixando-os cair contra as rochas para abrir as conchas.

Reto Zach—um investigador americano—estudou o comportamento dos corvos de determinada região, com o objectivo de tentar explicar porque é que eles voam para uma altura de cerca de 5 metros antes de deixarem cair um búzio contra a rocha. Para isso realizou a seguinte experiência: deixou cair várias vezes um búzio de uma altura fixa até a concha partir, repetiu a experiência considerando diferentes alturas, registou e analisou os dados.

Esta experiência pode ser simulada com a queda de outros objectos por exemplo amendoins.

Experiência com amendoins

Para modelar a queda precisas de uma régua e de amendoins descascados.

Deixa cair um amendoim de uma altura de 15 cm e repete a operação até que ele se separe em duas partes. Regista o número de vezes que o deixaste cair.

Repete o processo com pelo menos oito amendoins e determina o número médio de quedas necessárias.

Experimenta agora com as seguintes alturas: 20, 25, 30, 35, 40, 50 e 60 cm.

Junta os dados do teu grupo com os obtidos pelos outros grupos e regista os resultados na tabela:

		Altura da queda (em cm)							
Nº de quedas		15	20	25	30	35	40	50	60
	Média								
	Desvio padrão								

1. Representa num referencial cartesiano os pontos (h, N) em que h representa a altura da queda e N o número médio de quedas para cada uma das alturas.
2. Haverá um número mínimo de quedas necessárias para abrir um amendoim? E uma altura mínima para que o amendoim se abra?
3. O que pensas de uma função do tipo

$$N = 1 + \frac{b}{h - c}$$

para descrever a relação entre a altura (h) da queda e o número médio de quedas (N) necessárias para partir o amendoim?

4. Tenta descobrir os parâmetros b e c.

Sugestão: O uso da função de regressão linear da calculadora poderá ser um processo para encontrares o modelo. Repara que $N = 1 + b/(h - c)$ é equivalente a $(N-1)^{-1} = (h-c)/b$ e esta última equação estabelece uma relação linear entre $(N-1)^{-1}$ e h. Porquê?

Introduz na calculadora os dados relativos a h e $(N-1)^{-1}$ e pede a função de regressão linear que os relaciona. Regista a equação obtida e resolve-a em ordem a N.

Testa o modelo encontrado sobrepondo-o à nuvem de pontos.

Porque sobem os corvos até 5 metros?

Os dados recolhidos pelo investigador *Reto Zach*, para os búzios, foram os seguintes:

	Altura da queda (metros)									
	1,5	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**15**
Nº médio de quedas	56	20	10,2	7,6	6	5	4,3	3,8	3,1	2,5

1. Faz, para os búzios, um estudo semelhante ao dos amendoins para descobrires o modelo que relaciona o número médio de quedas com a altura .
2. Supondo o peso do búzio igual a 1 unidade e sabendo que o trabalho (W) de um corvo para partir um búzio depende do seu peso, da altura da queda e do número de vezes que é necessário deixá-lo cair, vem então:

$$W = h \times N = h \times \left(1 + \frac{b}{h-c}\right).$$

   Para que valores de h é mínimo o trabalho do corvo?
3. A altura para a qual o trabalho é mínimo dependerá do peso do búzio?

Se quiseres saber mais acerca desta tarefa consulta a página da Internet:
http://www.apm.pt/recursos/secundario/corvos/index.html

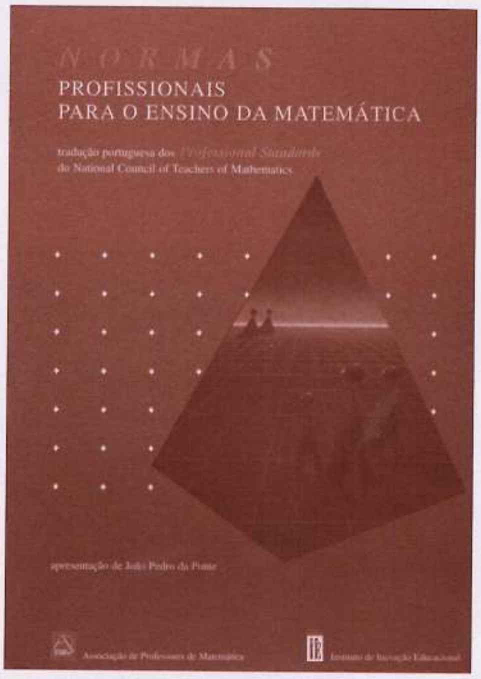
APM
Publicações

O NCTM *(National Council of Teachers of Mathematics)* tem vindo a desenvolver, desde há mais de 15 anos, um esforço concertado para elaborar normas para a matemática escolar. A APM traduziu essas normas de modo a torná-las acessíveis aos professores portugueses. Essas normas estão divididas em três livros, que podem ser considerados como integrantes de um todo: *Normas para o Currículo e Avaliação em Educação Matemática*, *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* e as *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar*.

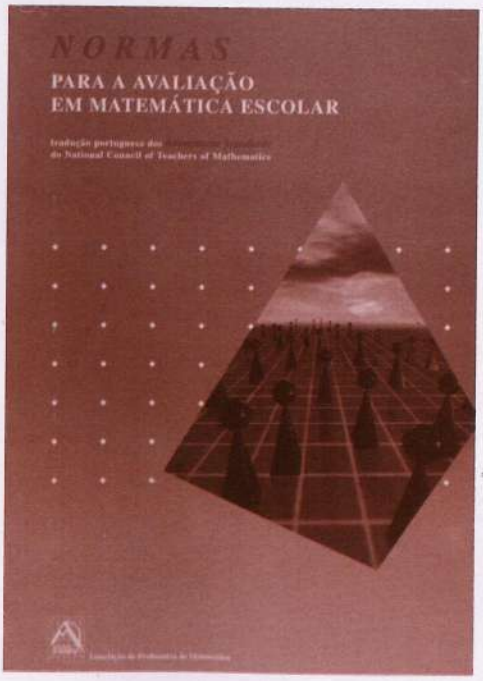
Normas Profissionais para o Ensino da Matemática

205 pp. APM, 1994

Sócio: €10,48
PVP: €20,96



Neste livro, podemos encontrar orientações para o ensino que, em diferentes níveis de escolaridade, são sugeridas no desenvolvimento de cada norma e nos episódios comentados que são usados como exemplos. Estes episódios mostram um leque de situações nas quais um bom ensino e uma boa aprendizagem da matemática podem ter lugar, tendo o cuidado de comentar e criticar a natureza das actividades propostas e o que é esperado dos alunos.



Normas para a Avaliação em Matemática Escolar

112 pp. APM, 1999

Sócio: €13,47
PVP: €26,94

Estas normas surgiram da necessidade que os professores tiveram quando alteraram as suas práticas de acordo com a nova visão da matemática transmitida pelas normas Profissionais para o Ensino da Matemática e se confrontaram com o dilema de esses esforços não serem apoiados pelas práticas de avaliação tradicionais.
Este documento apresenta, portanto, seis normas para a avaliação que constituem os critérios a usar na análise de práticas de avaliação. Para ilustrar os seus usos, apresenta quatro categorias gerais para as quais se recolhe normalmente evidência sobre o desempenho dos alunos.

Construções geométricas, prazer dos deuses ...

Eduardo Veloso

Este artigo surge na sequência da interessante proposta feita pela Branca Silveira na sua secção de *Tecnologias* na *Educação Matemática* (*Educação e Matemática*, nº 71). Tem a ver com os trabalhos do italiano Mascheroni sobre o que é possível construir, geometricamente, se apenas se utiliza um compasso. Mas comecemos pelo princípio ...

O jogo das construções euclidianas

Como sempre, o princípio não se sabe quando foi, mas o que não há dúvidas é que 300 anos antes da nossa era, quando Euclides publicou a sua obra memorável, os *Elementos*, escreveu os seus resultados matemáticos sob a forma de problemas de construções geométricas (por exemplo: "construir um triângulo equilátero tendo um dado segmento por lado"), e as suas proposições assumem frequentemente o seguinte formato:

a) descrição de um processo de construção;

b) demonstração de que esse processo conduz à resolução do problema proposto.

O que tornou o livro de Euclides tão memorável foi o facto do seu autor inaugurar um estilo de apresentação dos resultados matemáticos que viria a tornar-se um paradigma característico da nossa ciência. Tentativas anteriores de criação desse estilo parece terem existido, mas Euclides foi tão eficaz e sistemático que as fez esquecer para sempre.

Para compreendermos a situação, podemos fazer uma comparação talvez não muito abusiva e imaginar um conjunto de pessoas que tem o hábito de jogar xadrez. Acontece que algumas dessas pessoas jogam com um tabuleiro dividido em 49 quadrados, enquanto outros utilizam o tabuleiro de 64 quadrados. Por outro lado, para uns os bispos movem-se "na diagonal", para outros as suas possibilidades de movimento são diferentes. E assim sucessivamente.

Se duas dessas pessoas decidem jogar uma partida de xadrez, a primeira coisa que naturalmente tentam fazer é assentar em regras comuns, sem as quais não terão qualquer prazer em jogar um contra o outro.

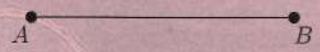
Nos séculos que antecederam a publicação dos *Elementos*, a matemática grega passou por um período de grande actividade criativa. Muitos problemas foram propostos e se tornaram conhecidos nesta época, em particular relativos a construções geométricas. Por exemplo, os três problemas clássicos (duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo) datam desse período. Consideremos por exemplo o problema da trissecção do ângulo:

> Dado um ângulo AÔB, construir um ângulo CÔB tal que AÔB = 3 CÔB.

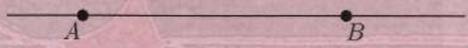
Como é habitual em matemática, (...) depois de uma exploração prolongada das construções euclidianas, surge um momento em que alguém se interroga: e se ...?

Instrumentos euclidianos: régua não graduada e compasso

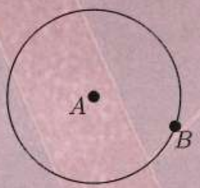
Postulado I. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar o segmento AB.



Postulado II. Dado o segmento AB, é permitido prolongá-lo obtendo dessa forma uma semirecta ou uma recta.



Postulado III. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar a circunferência de centro A e passando por B.



Também neste jogo das construções geométricas sentimos imediatamente a necessidade de ter regras comuns. Dois geómetras gregos que entrassem em competição na descoberta da solução da construção pedida, combinariam naturalmente que instrumentos geométricos poderiam usar, para "ter alguma graça" a sua competição, por assim dizer. No caso da trissecção, por exemplo, se o geómetra A usasse compasso e régua não graduada e o geómetra B apenas uma régua com duas marcas traçadas no seu bordo, B estaria em clara vantagem sobre A (pois sabemos desde os gregos que a régua com as duas marcas chega para esta construção e desde o século XIX que a construção não é possível usando apenas um compasso e uma régua não graduada!).

Pois bem, o que Euclides pretendeu essencialmente nos Elementos, se assimilarmos as suas proposições relativas a construções geométricas a outros tantos desafios num "jogo de construções geométricas", foi estabelecer logo de início as regras do jogo que estava a propor. E depois resolver ele próprio esses desafios obedecendo estritamente a essas regras.

Por essa razão, as construções possíveis de acordo com essas regras passaram a chamar-se construções (geométricas) euclidianas. Mas há evidentemente possibilidade de inventar outros jogos de construções geométricas—por exemplo, Mascheroni[1] inventou um jogo em que apenas podia usar um compasso.

Vejamos alguns pontos deste tema um pouco mais em pormenor.

As escolhas de Euclides[2]

Tratando-se de um jogo de construções geométricas, Euclides escolhe os instrumentos que vai poder usar e, para tornar tudo o mais claro possível, exactamente o que vai ser possível fazer com eles (são as regras do jogo, por assim dizer).

Como é conhecido, o primeiro livro dos *Elementos* de Euclides (que compreende treze) começa com uma lista de 23 *definições*, 5 *postulados*, e 5 *noções comuns*. Seguem-se 48 *proposições*.

Através do enunciado de três postulados que Euclides escolhe três regras do jogo. Ver caixa ao lado, onde uso uma tradução um pouco diferente da habitual para salientar o seu carácter de regras de um jogo.

Note-se que tanto a regra como o compasso têm características especiais. A régua é não graduada, corresponde portanto ao bordo não graduado das nossas réguas habituais. Com uma régua desse tipo, podemos perfeitamente traçar segmentos (postulado I), e prolongar segmentos em semirectas e rectas (postulado II). Quanto ao compasso, é diferente dos nossos compassos habituais, no sentido em que não serve para transportar segmentos. Na realidade, o compasso que podemos usar para estarmos no contexto estrito da geometria euclidiana é um compasso sem memória—o chamado compasso euclidiano—, ou seja, dados dois pontos A e B, posso traçar a circunferência de centro em A e passando por B (de acordo com o postulado III), mas, depois de traçada esta circunferência, e levantado o compasso, ele não mantém a abertura, ou seja, nada nos permite traçar uma circunferência *com o mesmo raio* e de centro, por exemplo, num terceiro ponto C! Temos que ter isto em atenção quando tentamos fazer uma construção euclidiana.

Se o leitor possui o programa *Sketchpad*, no menu lateral esquerdo tem dois icons que correspondem precisamente a estes dois instrumentos.

Por exemplo, se construo dois pontos A e B, servindo-me da ferramenta ⊙, poderei traçar a circunferência de centro A e passando por B tal como posso traçar a circunferência de centro B e passando por A, está claro. Mas, apenas com esta ferramenta, não poderei traçar mais nenhuma circunferência que tenha garantidamente o mesmo raio!

O exame atento das três primeiras proposições dos *Elementos* que vamos fazer pode ajudar-nos a compreender muito bem ao que corresponde um jogo de construções geométricas, neste caso euclidianas.

Ampliando o poder do compasso euclidiano

É um bom exercício imaginar Euclides, depois de ter escrito as 23 *definições* (def.), os 5 *postulados* (post.) e as 5 *noções comuns* (n.c.)[3], preparando-se para escrever o enunciado da primeira proposição. Euclides quer desafiar os seus leitores, e a si próprio, com uma primeira proposta de construção geométrica. Sabe que vai ter que descrever essa construção e depois demonstrar que responde correctamente ao desafio. Mas sabe também que para jogar dentro das regras que a si próprio impôs apenas dispõe dos dois instrumentos indicados, com os quais pode construir segmentos, rectas e circunferências (com as limitações que vimos). Com estes instrumentos não pode construir directamente paralelas ou perpendiculares, e Euclides ainda não descreveu nem demonstrou como se podem fazer tais construções. Que poderá propor?

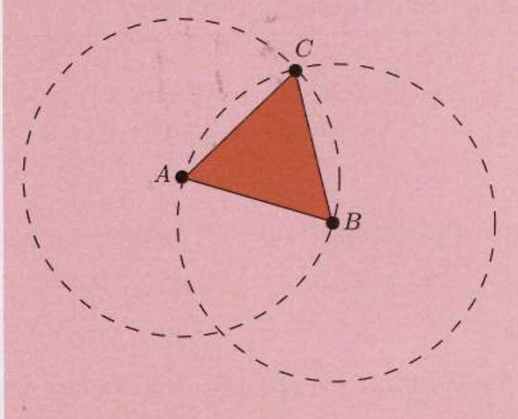


Figura 1.

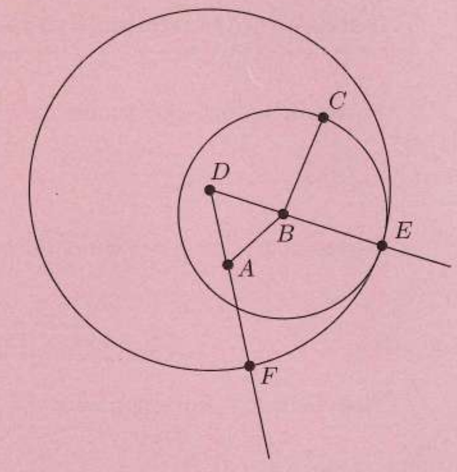


Figura 2.

A primeira proposição dos Elementos é a seguinte:

> **I.1.** *Dado um segmento AB, construir um triângulo equilátero que tenha AB como lado.*

Vejamos passo a passo qual a construção proposta por Euclides e como este vai justificando a (possibilidade) e justeza da sua construção. (Figura 1)

a) Trace-se a circunferência de centro A e passando por B (post. III).
b) Trace-se a circunferência de centro B e passando por A (post. III).
c) Seja C o ponto de intersecção das duas circunferências.
d) Trace-se o segmento AC (post. I).
e) Trace-se o segmento BC (post. I).
f) O segmento AC é igual ao segmento AB (def. 15: *circunferência*).
g) O segmento BC é igual ao segmento AB (def. 15: *circunferência*).
h) O segmento AC é igual ao segmento BC (n.c.1: *duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si*).
i) O triângulo ABC é equilátero (def. 20: *triângulo equilátero*).

O único passo que não está justificado é o passo c), que afirma a existência de um ponto comum às duas circunferências. Na realidade, os pressupostos de Euclides—as regras do jogo das construções euclidianas—não lhe permitiam fazer tal afirmação (apenas *evidente* a partir da figura que acompanha a demonstração ...)[4].

Depois de ter resolvido o primeiro problema de construções geométricas—a construção de um triângulo equilátero—como acabamos de ver, Euclides propõe um novo desafio que resolve de modo muito engenhoso. É a proposição

> **I.2.** *Dados um segmento BC e um ponto A, construir um segmento igual a BC com uma extremidade em A.*

Propomos ao leitor que se sirva da Figura 2 para tentar reconstituir a construção de Euclides e respectiva justificação (poderá recorrer evidentemente também à tradução de David Joyce).

Note-se que agora Euclides, além dos postulados, pode já usar (e usa!) a construção da prop. I.1, referente ao triângulo equilátero.

Vejamos ainda a proposta seguinte de Euclides:

> **I.3.** *Sejam AB e CD dois segmentos (AB maior do que CD). Cortar em AB um segmento igual a CD.*

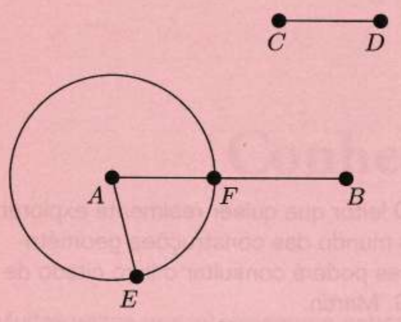


Figura 3.

Também neste caso sugerimos que o leitor tente seguir pelo desenho (Figura 3) a construção e a justificação de Euclides.

Na caixa ao lado, apresentamos um esquema dedutivo simplificado das três primeiras proposições dos *Elementos* de Euclides, que acabamos de examinar (um esquema completo deveria incluir as noções comuns utilizadas e também as definições). Este esquema sugere-nos o seguinte:

- com a primeira proposição (construção do triângulo equilátero) Euclides fica apto a demonstrar a proposição I.2., onde como podemos ver Euclides necessita utilizar os três postulados I, II e III e ainda a única proposição até aí demonstrada;
- claramente, as proposições I.1 e I.2 apenas foram demonstradas de início para conseguir chegar à proposição I.3.

David Joyce salienta que a construção descrita na proposição I.3 é utilizada em todos os livros de geometria dos *Elementos*, e mais vezes do que qualquer outra! Podemos compreender que assim seja, se repararmos que essencialmente o que nos fornece esta proposição é a possibilidade de transportar o segmento CD para uma outra posição (neste caso para *cima* do segmento AB). Isto é, embora Euclides tenha escolhido como instrumento para o seu jogo das construções um *compasso sem memória*, ao fim das primeiras três proposições já adquiriu o direito de usar um *compasso moderno*, ou seja, já pode transportar segmentos, sempre que precisar.

Outros jogos de construções

Como é habitual em matemática, numa tal situação—depois de uma exploração prolongada das construções euclidianas—, surge um momento em que alguém se interroga: e se ...?

Assim, em 1672 o dinamarquês Georg Mohr (no livro *Euclides Danicus*) e em 1797 o italiano L. Mascheroni, sem saber do primeiro (no livro *Geometria del Compasso*) perguntaram a si mesmos *e se tivesse apenas um compasso?* e ambos chegaram à conclusão que

Todas as construções feitas com compasso e régua não graduada podem ser feitas apenas com compasso

Evidentemente que sem régua não podemos *traçar* uma recta ou um segmento, mas compreende-se bem que o que é decisivo e *matemático* nas construções geométricas não é o acto de traçar a recta mas sim o de encontrar os dois pontos que a definem... é isso o que Mohr e Mascheroni querem dizer, está claro.

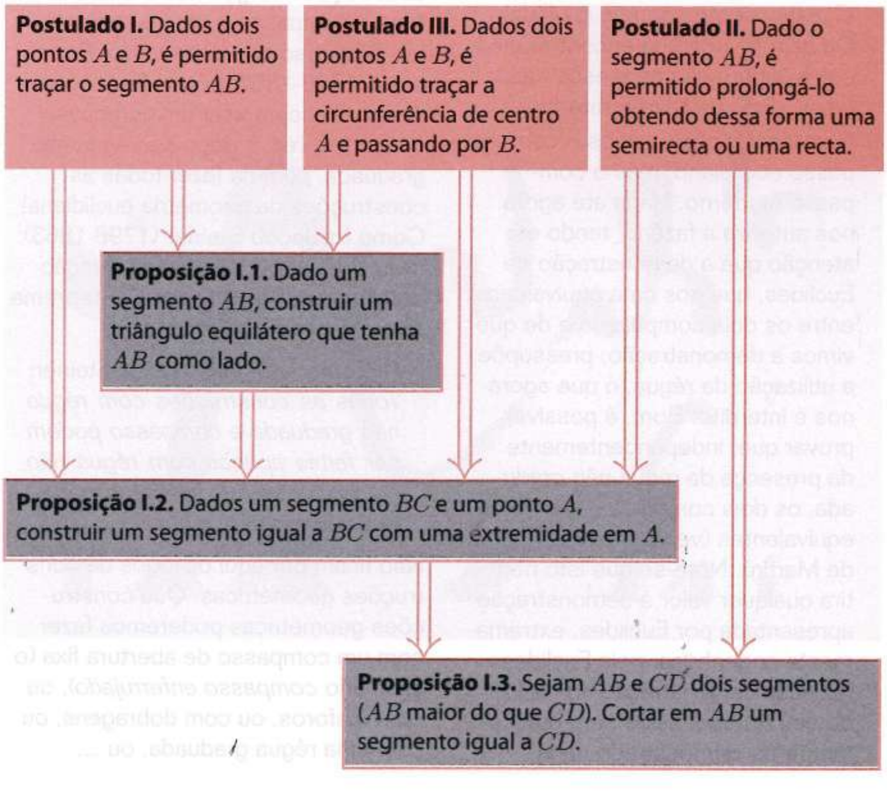
A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de Martin indicado na bibliografia. A título de exemplo, e para não retirar aos leitores o prazer (dos deuses) de encontrar as soluções das propostas da Branca Silveira, vejamos como é possível resolver, *apenas com compasso*, um outro problema:

Encontrar a intersecção da recta AB com a circunferência de centro C e passando pelo ponto D.

Observe a Figura 4 e acompanhe o texto seguinte.

a) A recta AB é dada pelos pontos A e B, e pretende-se encontrar os pontos X e Y de intersecção da recta AB com a circunferência de centro C e passando por D.

b) Construam-se as circunferências de centros em A e B e passando por C, encontrando-se assim o



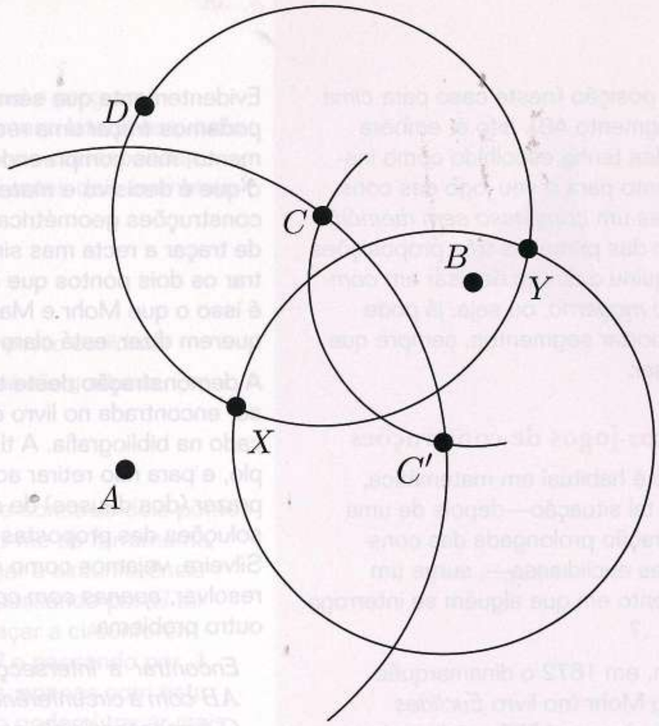


Figura 4.

ponto C' simétrico de C em relação à recta AB.

c) Construa-se agora a circunferência de centro C' e raio igual ao segmento CD, obtendo-se desta forma as intersecções X e Y, como pretendido.

Se o leitor seguiu atentamente este texto, certamente notou duas coisas:

i) Se a recta *AB* passa pelo centro *C*, esta construção não é válida! Ou seja, temos que encontrar uma outra construção para esse caso (veja o livro de Martin referido).

ii) Na alínea c) não usámos o compasso euclidiano, mas o compasso moderno. Nada até agora nos autoriza a fazê-lo, tendo em atenção que a demonstração de Euclides, que nos dá a equivalência entre os dois compassos e de que vimos a demonstração, pressupõe a utilização da régua, o que agora nos é interdito! Bom, é possível provar que, independentemente da presença da régua não graduada, os dois compassos são ainda equivalentes (ver de novo o livro de Martin). Note-se que isto não tira qualquer valor à demonstração apresentada por Euclides, extremamente engenhosa, pois Euclides faz essa demonstração no início do seu tratado, ainda sem praticamente ter demonstrado nada.

E se...?

O leitor já está certamente a adivinhar que os "e se ... ?" não ficaram por aqui ... Com efeito, e naturalmente, surgiu a interrogação:

E se apenas pudermos utilizar a régua não graduada?

Não é razoável esperar que com esta limitação possamos fazer todas as construções da geometria euclidiana! Mas o compasso é um instrumento tão poderoso que Jean Victor Poncelet (1788-1867) pôde afirmar que, se o deixassem usar um compasso uma única vez, e depois a régua não graduada, poderia fazer todas as construções da geometria euclidiana! Como foi Jacob Steiner (1796-1863) que apresentou uma demonstração detalhada dessa afirmação, o teorema tem o nome dos dois;

Teorema de Poncelet-Steiner: *Todas as construções com régua não graduada e compasso podem ser feitas apenas com régua não graduada, se for dada uma circunferência e o seu centro.*

Não ficam por aqui os jogos de construções geométricas. Que construções geométricas poderemos fazer com um compasso de abertura fixa (o chamado *compasso enferrujado*), ou com fósforos, ou com dobragens, ou com uma régua graduada, ou ...

O leitor que quiser realmente explorar o mundo das construções geométricas poderá consultar o livro citado de G. Martin.

Os ficheiros de Sketchpad referentes a este artigo encontram-se no endereço: http://www.apm.pt/din-revista/listageral.html

Notas

1 Encontra facilmente no endereço: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html a biografia de qualquer matemático.

2 Existem boas traduções dos *Elementos* de Euclides em inglês e em francês, e uma tradução parcial em português (ver bibliografia). Recomendo a utilização de uma versão *online* (em inglês e em catalão) muito interessante e informativa, com figuras interactivas, da autoria de David Joyce, da Universidade de Clark.

3 Recorde essas definições, postulados e noções comuns na versão *online* de David Joyce, por exemplo.

4 David Hilbert resolve esta questão na revisão da axiomática de Euclides feita nos *Fundamentos da Geometria* (ver bibliografia).

Bibliografia

Livros

Euclid. The Elements. 3 volumes. Tradução de Sir Thomas Heath. New York: Dover Publications, Inc, 1956.

Hilbert, David. *Fundamentos da Geometria*. Traduzido por Maria Pilar Ribeiro e J. Silva Paulo. Lisboa: Instituto para a Alta Cultura, 1952.

Martin, George E. *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag, 1998.

Online

Euclides. *The Elements* (em inglês): http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Euclides. *Elements* (em catalão): http://www.xtec.es/~jdomen28/indexeuclides.htm

Euclides. *Elementos* (tradução parcial em português) http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html

Eduardo Veloso

Branca Silveira

Conhece a origem do símbolo @?

Muitas vezes nos interrogamos sobre a origem de símbolos que utilizamos correntemente, na Matemática e não só, mas a maioria dos casos eles já fazem de tal modo parte da nossa vida que nem sequer nos preocupamos muito com isso, pelo menos alguns de nós. Foi o que me aconteceu com o símbolo @. Nunca coloquei em causa a sua utilização nos endereços de e-mail, mas interroguei-me várias vezes sobre o nome que alguns lhe davam. Porque é que lhe chamavam *arroba*? Como na altura não encontrei resposta e nunca gostei de *arroba* continuei a chamar-lhe *at*, como os ingleses. Há poucos dias ao viajar na Internet, e um pouco inesperadamente, encontrei a resposta às minhas questões tão antigas.

Embora este símbolo não esteja directamente relacionado com a Matemática, relaciona-se de certeza com a tecnologia e portanto vou apenas dar uma informação muito breve, que fui retirando dos numerosos sites que existem na Internet sobre o assunto.

A utilização do @ nos endereços de e-mail foi introduzida, no início dos anos setenta, por Ray Tomlinson, que enviou a si mesmo a primeira mensagem de correio electrónico. A título de curiosidade o texto da mensagem era *QWERTYUIOP* e entende-se perfeitamente porquê!

Embora se encontrem vários comentários sobre os motivos que levaram este engenheiro americano a utilizar o @, alguns deles atribuindo-lhe uma grande carga simbólica, o mais fiável parece ser a razão que o próprio apresenta: *procura de um símbolo já existente nas máquinas, que fosse pouco utilizado e não aparecesse nos nomes das pessoas*. Parece-me ser esta a explicação mais racional!

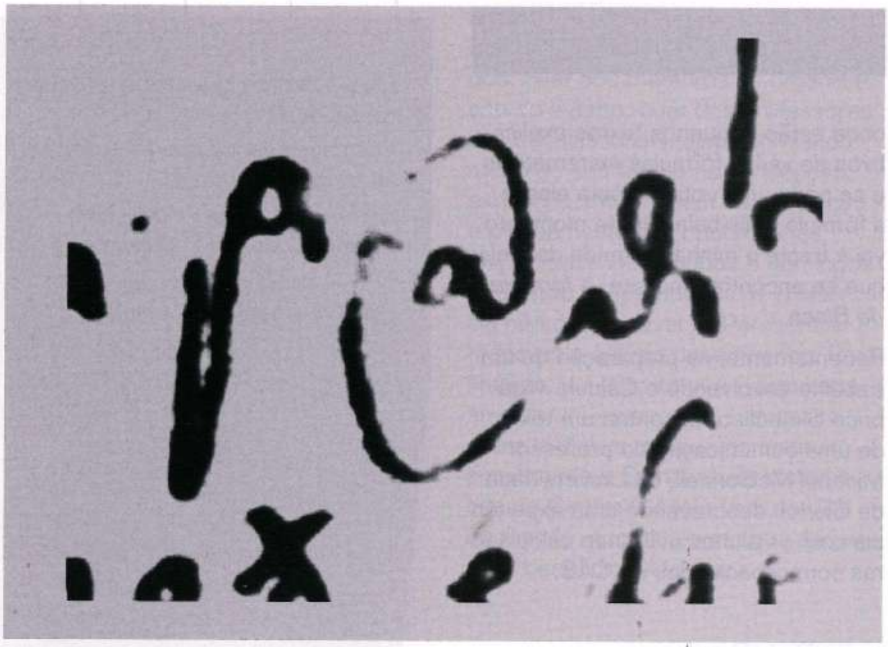
A razão deste símbolo existir nos teclados das máquinas prende-se com o facto dele ser desde há muito tempo utilizado em documentos ligados ao comércio.

Recentemente Giorgio Stabile, professor de História da Ciência da Universidade La Sapienza de Roma, numa das suas investigações, encontrou o @ em documentos sobre trocas de mercadorias na República de Veneza do século XV. (Ver figura.)

Este símbolo representava uma unidade de peso e de capacidade (ânfora).

Foi depois utilizado em Inglaterra com o significado *at* (at price of).

É interessante ver o nome que os vários países lhe atribuem. Desde um simples a *comercial* passando por nomes relacionados com animais: caracol, cauda de porco ..., ou termos da gastronomia local: kanelbulle, strudel, ..., até à nossa *arroba*. Mas arroba... porquê? Este termo é usado em Portugal e em Espanha e os franceses encontram aí uma possível explicação para o seu *arobase*. Não será de estranhar designação arroba, pois num dicionário latino-espanhol editado em Salamanca em 1492, a palavra *ânfora* é traduzida precisamente por *arroba*.



Afinal uma explicação simples, exactamente como eu gosto.

Estes dados, a imagem incluída no texto e outras informações encontram-se, por exemplo, em:

http://www.encyclopedie-universelle.com/a%20commercial2.html

http://www-alteich.com/tidbits/t051401.htm

http://www.e-commerce.org.br/Artigos_Geral/Uma_breve_historia_do_@.htm

mas este tema apareceu-me casualmente em:

http://www.matematicamente.it/storia/chiocciola.html, quando visitava o site italiano

http://www.matematicamente.it/

É um site com algum interesse onde se encontram várias secções, nomeadamente história da Matemática, Matemática e arte, actividades, testes de exames, etc., e ainda uma secção intitulada

onde estão pequenos textos explicativos de várias fórmulas matemáticas e se pede uma votação para eleger a fórmula mais bela. Neste momento vai à frente a minha preferida daquelas que se encontram no site: a *fórmula de Binet*.

Recentemente, na preparação de um trabalho envolvendo o Cálculo Algébrico Simbólico, encontrei um texto de uma comunicação do professor Michael McConnell, da Universidade de Clarion descrevendo uma experiência com os alunos utilizando calculadoras com capacidades de CAS.

A actividade apresentada enquadra-se na teoria dos números e faz uma exploração interessante com os números de Fibonacci

$$(F_n\text{: } 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$$

e de Lucas

$$(L_n\text{: } 1, 3, 4, 7, 11, \ldots),$$

Na primeira parte da actividade pretende-se chegar às fórmulas de Binet:

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$L_n = a^n + b^n$$

em que a é o número de ouro e b o seu conjugado algébrico.

Parte dessa actividade é a nossa *proposta de trabalho* deste número:

Utilize, se quiser, uma calculadora com CAS

— Sendo a o número de ouro e b o seu conjugado algébrico, calcule as sucessivas potências de a e de b. Com os resultados que for obtendo organize uma tabela, do tipo

n	a^n	b^n
1		
2		
…		

— Qual o padrão que encontra nesses resultados?

— Com base nesse *padrão* encontre as fórmulas de Binet

— Defina uma sequência S_n (tipo Fibonacci) do modo seguinte $S_n + 2 = cS_n + dS_n + 1$, com c e d inteiros não nulos.

Mostre que

$$\lim_{n \to x} \frac{S_n + 1}{S_n} = \frac{d + \sqrt{d^2 + 4c}}{2}$$

— Suponha que $S_1 = S_2 = 1$ e faça, por exemplo, $c = 1$ e $d = 3$. O limite anterior é neste caso

$$p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Determine as sucessivas potências de p e verifique que obedecem a um padrão do tipo

$$p^n = \frac{T_n + U_n\sqrt{13}}{2}$$

em que T_n e U_n são sequências (tipo Fibonacci) que satisfazem a mesma lei de formação de S_n

Nota

Num dos próximos números, esta secção tratará exclusivamente da utilização de tecnologia com funcionalidades CAS no ensino não superior. Gostaríamos de conhecer a sua opinião sobre este assunto. Escreva-nos para branca@esb.ucp.pt

Quinzena da Matemática e Tecnologia no Centro Ciência Viva de Vila do Conde

balanço de uma experiência

De 18 a 30 de Março de 2003, no Centro Ciência Viva de Vila do Conde, decorreu a Quinzena da Matemática e Tecnologia, promovida pelo grupo de Leiria e Coimbra da APM. Passados que foram estes quinze dias, um balanço se impõe e, para começar, nada mais apropriado do que ver os números envolvidos: foram montados 9 módulos numa exposição interactiva, proferidas 6 comunicações/workshops, mais de 1700 jovens visitaram a exposição, provenientes de escolas da região norte e centro (Grande Porto, Lousada, Barcelos, Stº Tirso, Braga, Coimbra, Fafe, entre outros); além disso, mais de 200 pessoas assistiram às comunicações apresentadas, a maioria dos quais jovens da escola secundária local (E.S. José Régio), tudo isto num Centro com limitações de espaço, dadas as dimensões do seu edifício. Nada mal … ou poder-se-á mesmo dizer: um êxito.

Em relação à exposição apresentada pela APM, destaca-se pela positiva, a interligação que os módulos apresentados fizeram com outras ciências (física, fisiologia, biologia), com contextos do quotidiano (código de barras, bilhete de identidade), e com a componente lúdica. De grande interactividade, os módulos aliciaram e desafiaram os visitantes, apelando à sua participação (quem não gostou de tentar *imitar o gráfico*?); A ligação com os conteúdos programáticos e o apoio feito aos *curricula* das escolas foi um aspecto comentado por alguns professores, e uso da tecnologia como veículo da informação ou ferramenta de trabalho foi uma aposta ganha.

Seria bom que fosse possível adequar a programação do software envolvido, principalmente nas calculadoras, de modo que sejam auto-executáveis e que não se possa sair dos programas facilmente. Por outro lado, seria também vantajoso minimizar a dependência do módulo com o escaparate escrito a nível das instruções, pois são poucas pessoas que o lêem, começando a utilizar o módulo de forma aleatória e indiscriminada: o escaparate deverá ser utilizado preferencialmente para explicações sobre os conteúdos envolvidos.

De realçar a dedicação à causa dos Professores de Matemática envolvidos, quer dos membros da organização do evento, quer dos professores das escolas locais, disponibilizando muito do seu tempo na concepção, execução e montagem da exposição e planeamento das conferências, disponibilizando sábados e domingos e fazendo várias viagens de distância não desprezável … Parabéns a todos pelo óptimo desempenho. Para finalizar, um convite que é simultaneamente um repto: após o sucesso desta iniciativa, propomos instituir anualmente a Quinzena da Matemática no Centro Ciência Viva de Vila do Conde, numa parceria que decerto trará benefícios a todos.

Ana Carla Campos
Coordenadora do Centro de Ciência Viva de Vila do Conde

José Paulo Viana

Reuniões com as três tribos

Naquela famosa ilha existem três tribos: os Verks que dizem sempre frases verdadeiras, os Falks que mentem sempre, e os Alterns que, ao longo da vida, dizem alternadamente uma frase verdadeira e outra falsa. Numas importantes reuniões ministeriais, estavam três pessoas em cada mesa, cada uma representando uma tribo.

Fui à primeira mesa e perguntei-lhes de que tribo eram. Eis o que ouvi.

Alan: "Sou Verk."

Judite: "O Alan é Verk."

Paulo: "Eu e o Alan somos Verks."

Fiquei elucidado e passei à segunda mesa.

Ana: "A Graça é Verk e o João é Altern."

Graça: "O João é Verk e a Ana é Altern."

João: "A Ana é Altern e a Graça é Falk."

Fui então à terceira mesa.

Marco: "O Eduardo é Altern e a Rita é Falk."

Eduardo: "A Rita é Altern e o Marco é Falk."

Rita: "O Marco é Verk."

De que tribo são estas nove pessoas?

(Respostas até 17 de Setembro)

Um terreno por herança

O problema proposto no número 71 de *Educação e Matemática* foi apresentado no Torneio Matemático do Limousin (França) e era o seguinte:

Dois irmãos receberam de herança um terreno com um dos lados encostado a uma estrada. O terreno tem a forma de um triângulo irregular. Para aceder da estrada ao terreno existe um portão P, mais perto de um dos vértices que do outro. Os irmãos querem dividir o terreno em duas partes com a mesma área e um deles sugeriu que o melhor era construir, a partir do portão, um caminho em linha recta. Como irão eles traçar esse caminho?

Tivemos 13 respostas:

Alan Guimarães (V. N. Gaia), Ana Correia (Lisboa, Eduardo Veloso (Lisboa), Graça Cruz (Ovar), Orlando Freitas (Funchal), João Sá (Parede), João Oliveira & Berta Sampaio, João M. Oliveira (Cartaxo), Judite Lima (Vouzela), Marco Santos (Ponta Delgada), Paulo Correia (Alcácer do Sal), Pedrosa Santos (Queluz) e Rita Bastos (Lisboa).

Como já é habitual, apareceram vários processos de resolução. (Ver Figura 1)

Um deles,usado por vários leitores, é o *método prático*, explicitado pela Ana Correia: fazer as medições necessárias, determinar a área do terreno, calcular a altura h' que o triângulo PQB deve ter para a sua área ser metade e depois traçar uma paralela a AB à distância h' para ficar a saber onde ficaria o ponto Q. Mas, acrescenta ela, "interessante será fazer essa construção sem efectuar medições", usando apenas instrumentos geométricos.

E aparecem então os que usam a geometria analítica e os que enveredam pela utilização dos programas de geometria dinâmica.

Das resoluções analíticas enviadas, umas eram mais simples que outras, mas todos chegaram à solução.

As geométricas apoiadas no Sketchpad ou no Cabri são sempre interessantes e algumas bastante simples e simpáticas. A Graça Cruz resolveu da forma seguinte.

Como a área de BPQ é metade da área de ABC, temos

$$\frac{\overline{BP} \times h'}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AB} \times h}{2}$$

ou

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{h/2}{h'} \text{ (eq. 1)}$$

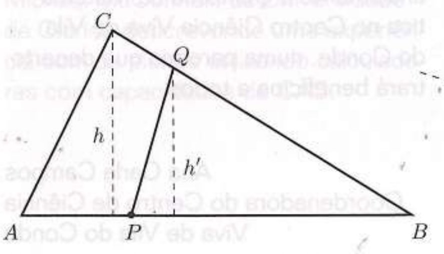


Figura 1.

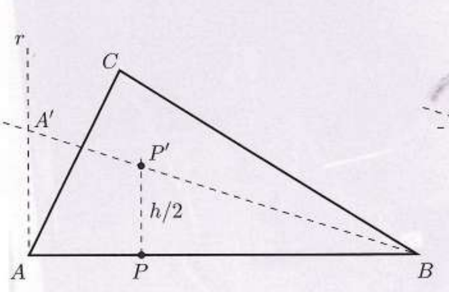


Figura 2.

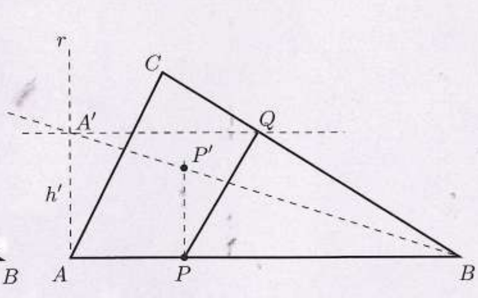


Figura 3.

Traçamos por P uma perpendicular a AB e marcamos o ponto P' à distância $h/2$. (Ver Figura 2)

Traçamos a recta BP' e a recta r perpendicular a AB no ponto A. As rectas BP' e r intersectam-se em A'. Pelo Teorema de Tales e pela equação 1, o segmento AA' tem o comprimento procurado h'. (Ver Figura 3)

Por A' traçamos uma paralela a AB, que intersecta BC no ponto Q. O segmento de recta PQ é o caminho procurado, que divide o terreno em duas partes de igual área.

Vale também a pena ir ver a resolução animada que o Paulo Correia desenvolveu e colocou em: http://www.esec-alcacer-sal.rcts.pt/esasmat/index.html, na secção de Problemas Resolvidos, ou em http://matem.pt.vu.

Caça ao Tesouro, o relato de uma experiência

Integrado nas actividades do ano temático *Matemática e Tecnologia* decorreu nos dias 19, 20 e 21 de Fevereiro de 2003 o concurso 'caça ao tesouro' com o objectivo de incentivar a utilização pedagógica da Internet na aprendizagem interactiva da Matemática e de dinamizar escolas e alunos alertando-os para o ano temático.

Aproveitando a experiência anterior no âmbito do Softciências, e a colaboração da Uarte nas questões relativas ao 1° ciclo, alargou-se a participação aos alunos de todos os ciclos de ensino tendo-se criado 4 categorias A, B, C e D correspondentes, respectivamente, aos 1°, 2°, 3° ciclos e secundário. Em cada um dos dias em que decorreu o concurso, foram colocadas on-line, desde as 9 até às 23 horas, na página web criada para o efeito (www.apm.pt/mt/website/index.php?id=15) três perguntas para cada categoria acompanhadas da respectiva sugestão de início de pesquisa.

Quanto ao modo como decorreu o concurso nas escolas, pelo que fomos apurando, houve um pouco de tudo. Se por um lado, algumas escolas se organizaram e dispunham de computadores que os alunos utilizaram, outras houve em que só foi feita a divulgação, como atesta o testemunho da colega Isabel Costa, de Vale de Cambra, "na minha escola não houve nenhuma acção concreta, apenas a divulgação do concurso pelos professores e o apelo à participação dos alunos. Os computadores da escola com acesso à internet, disponíveis para os alunos, estão constantemente com problemas pelo que os alunos que participaram fizeram-no através do seu próprio PC ou outro". Infelizmente, em muitas escolas nem a divulgação foi feita, como refere o Hugo Pinto, do Porto, um dos vencedores da categoria C, "(...) acho que se este tipo de concurso fosse mais divulgado, teria uma adesão muito maior. Por exemplo, quando contei a alguns colegas que tinha ganho aqueles prémios todos (em especial a máquina de calcular gráfica) só por ter respondido a umas perguntas na internet, todos disseram que também gostavam de ter participado. Por outro lado, quero dizer que gostei muito de participar. Acho que foi tudo muito bem organizado, e que todos gostámos. Para concluir, gostava de dizer que deviam tomar mais iniciativas destas e que estou certo que para a próxima vão aderir muito mais pessoas. Parabéns!"

De qualquer modo, apesar das dificuldades sentidas pelos professores e alunos nas escolas devidas à ausência ou inoperância do equipamento informático, em especial as ligações à internet, o balanço é bastante positivo. De facto, só com um mês e meio de divulgação, tivemos a participação de 420 de todos os níveis de ensino e notámos, devido às mensagens que fomos recebendo, antes e depois do concurso, um grande interesse por parte de todos os intervenientes.

Finalmente, foi num ambiente de festa que decorreu a entrega dos prémios do concurso Caça ao Tesouro no passado dia 24 de Maio, que coincidiu com o encerramento da quinzena *Matemática e Tecnologia* no Exploratório Infante D. Henrique, em Coimbra. Após uma visita ao Exploratório e, em particular, à exposição alusiva ao tema aí patente, o colega Jaime Carvalho Silva presenteou-nos com uma comunicação denominada BTT (Brócolos, Topologia e Tecnologia), ao ar livre, à mistura com muito vento, pó e outras peripécias, que cativou tanto os mais miúdos (do 1° ciclo) como os mais crescidos. O contexto não podia ser mais matemático e até a árvore ajudou na exemplificação dos fractais. As magias topológicas e numéricas intrigaram e despertaram a curiosidade para saber mais e porquê. Após o recebimento dos prémios e das compras de brinquedos científicos do exploratório, seguiu-se o saboroso lanche que juntou participantes, famílias, professores e organizadores. Como disse um dos pais, foi uma tarde de sábado muito bem passada.

Em jeito de conclusão, deixo as palavras dos alunos do 4° ano da escola do 1° ciclo de Cabecinha, Concelho de Alcobaça, que justificam plenamente todo o nosso esforço:

"O nosso coração bateu mais forte ...

O nosso coração bateu mais forte quando a nossa professora nos anunciou que tínhamos ganho o concurso *Caça ao Tesouro* e que iríamos a Coimbra receber o prémio. A excitação foi muita, pois foi a primeira vez que iríamos sair da Escola para um acontecimento destes.

Rogério Costa
Escola Superior de Educação de Leiria
da Comissão Coordenadora do Ano Temático

Como montar uma Exposição?

Mª José Brito

Quais as infra-estruturas básicas necessárias? Como escolher o espaço? Que iluminação assegurar? Como dispor os diferentes materiais? Qual a melhor maneira de apresentar?

É hábito as pessoas terem reacções bastante curiosas quando se lhes fala em aprender como montar uma exposição. Por se tratar de uma experiência que em algum momento da vida já tiveram, consideram frequentemente, ser um assunto já superado, com conhecimento adquirido. Nós, porém, temos uma visão diferente e consideramos importante, não só reflectir sobre todo o processo, como poder transmitir algumas regras básicas a quem sendo educador/pedagogo se vê confrontado com a montagem de uma exposição. Debrucemo-nos pois sobre a problemática conceptual e técnica que a realização de um projecto de qualidade requer. Antes de mais pensemos ...

Para quê uma exposição?

Na sua origem, e estamos a falar na Antiguidade Clássica, foi a necessidade de mostrar colecções que fez nascer espaços destinados a museus. A partir daí, o caminho estava aberto, às exposições. Para este desenvolvimento posterior muito contribuiu também a convicção de que o acesso à cultura e à arte não deveria ser privilégio de uma minoria ...

Hoje em dia, as exposições converteram-se por um lado num fenómeno sociocultural insubstituível e, por outro lado, num instrumento indispensável para a apresentação, interpretação e difusão de colecções ou objectos de interesse patrimonial. Também é verdade que cada vez há maior consciência da importância do modo de expôr, ou seja, dos fenómenos de interpretação e de comunicação, devido ao reconhecimento cada vez maior das suas potencialidades educativas.

Uma exposição é, ou deveria ser, um método de trabalho essencial na aproximação e diálogo com a comunidade.

Que tipos de exposição?

Há vários tipos de exposições de acordo com os objectivos e da sua concretização formal. Esta variedade depende tanto da função como do grau de complexidade dos assuntos e modelos discursivos.

Na sua origem, as funções de uma exposição situavam-se genericamente em quatro tipos: simbólica, comercial, documental e estética (artística ou industrial).

Hoje, porém, a intenção sociocultural de uma exposição pode induzir a vários tipos de exposição, nomeadamente, exposição—apresentação; exposição—informação; exposição—comunicação; a exposição como obra; a exposição como meio de exploração ou ainda a exposição como montagem e instalação.

Há ainda factores que são determinantes no tipo de exposição, tais como a dimensão e o tempo de duração. Assim podemos classificá-las em permanentes, temporais, itinerantes e portáteis.

Quais as infra-estruturas básicas necessárias?

Na montagem de uma exposição há condições básicas que são determinantes: haver espaço suficiente, garantir a protecção dos objectos

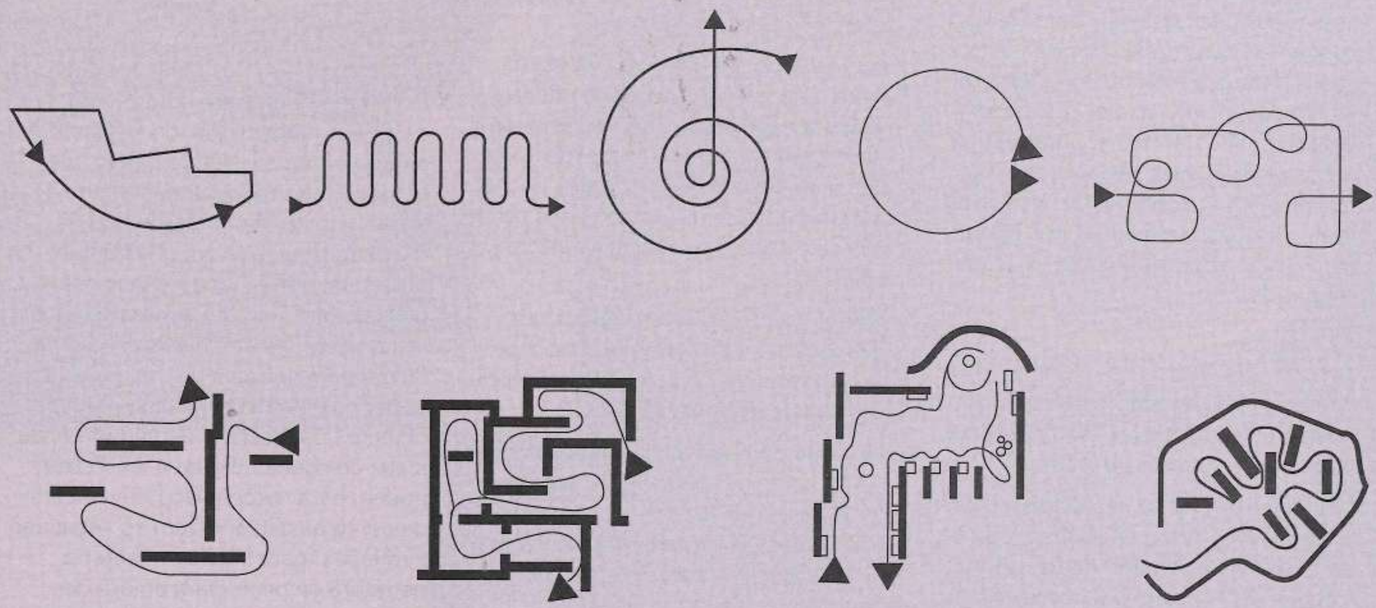


Figura 1. Espaço de circulação

expostos, ter iluminação conveniente (existirem tomadas eléctricas para se poder ligar aparelhagem diversa), assumir a manutenção, …

As instituições que pretendem realizar e estimular este tipo de actividades, cada vez mais reconhecida como potencial meio educativo, devem assegurar uma infra-estrutura material e organizativa adequada, ou seja, devem manter um espaço bem equipado para que, em qualquer momento, possam realizar uma exposição, aproveitando a oportunidade do acontecimento.

Também é importante poderem contar com o assessoramento de pessoas com experiência, para que possam realizar projectos de qualidade.

Como escolher o espaço/ localização

Uma característica fundamental para que um espaço seja considerado adequado para exposições é que tenha uma boa iluminação (o que pressupõe além de entradas de luz natural, a existência de pontos de luz artificial q.b.). Será pois necessário garantir a presença de tomadas eléctricas para se poderem instalar projectores, aparelhagem sonora, equipamento audiovisual, informático, etc.

Por outro lado, é fundamental que a forma desse mesmo espaço, que deve ser amplo, seja regular, sem colunas, com uma altura de tecto adequada, e ainda com entradas e saídas bem situadas. O ideal é que este espaço tenha um telefone acessível.

A proximidade de locais de estacionamento e a acessibilidade são pontos importantes bem como, sob o ponto de vista arquitectónico, a existência de rampas e elevadores em vez de degraus.

Também a cor do espaço destinado a receber exposições deve apresentar-se neutro, para permitir que se destaquem as cores dos elementos expostos.

Que se entende por espaço de circulação?

Por vezes, as exposições têm uma determinada ordem que tem de ser respeitada para que ela seja compreendida. Assim, os placares da exposição devem convidar o visitante a um itinerário, facilmente compreensível. Caso isso não seja possível, pode recorrer-se a uma sinalização, também esta, de fácil interpretação (figura 1).

Qualquer que seja o sistema de sinalização escolhido, este deve ser num código muito acessível e deve, ainda, prever todas as situações de informação, de modo a que o visitante faça o percurso previsto.

Que iluminação assegurar?

A iluminação é um aspecto chave num espaço destinado a exposições. Cada peça exposta reclama um tipo de iluminação adequado às suas características. Por isso, devem existir tomadas suficientes para, caso seja necessário, se proceder a uma instalação eléctrica flexível.

Há condições básicas a considerar: observação cómoda; visibilidade dos pormenores da forma, cor e textura; fontes de luz pouco visíveis; evitar reflexos; apostar nos contrastes estimulantes, mas não excessivos; conseguir um contorno visual agradável; a luz não ser excessiva e poder reproduzir adequadamente as cores (figura 2).

Há necessidade de segurança?

Há que prevenir todo o tipo de acidentes ou catástrofes (se necessário, tratar do seguro das peças).

Devem prevenir-se não só possíveis inundações, fogos ou roubos, como evitarem-se acidentes de transporte, toques ou contactos desnecessários com o público, etc. Assim, no espaço da exposição, devem colocar-se além de extintores (caso não haja detectores de fumo), vidros, cordões, varões ou vasos, que delimitem espaços em redor das peças expostas.

Quantos e que placares?

A colocação dos placares vai determinar o espaço de circulação dos visitantes, pelo que, previamente, se deve pensar, entre outros aspectos, nas suas dimensões e formas, no material em que são concebidos na sua cor, flexibilidade, número necessário.

Normalmente são constituídos por elementos modelares que, uma vez encaixados, se podem colocar vertical ou horizontalmente (figura 3).

No caso de haver peças volumétricas a expor, há necessidade de assegurar a existência de *pianhas* de distintas dimensões. Estas poderão ter a forma de cubos ou paralelepípedos, tornando-se assim polivalentes.

Serão necessárias vitrines/suportes?

Por vezes, é necessário proteger os objectos expostos do contacto directo com os visitantes, pelo que se pode recorrer a vitrines (figura 4). Porém, como não é fácil prever as diversas situações em que irão ser utilizadas, podem construir-se campânulas (em vidro ou acrílico transparente), com dimensões iguais a uma face de um cubo ou de um paralelepípedo, criando assim vitrines. Muitos objectos necessitam de suportes para a sua colocação (figura 4-A). Estes podem estar escondidos ou deliberadamente assumidos com as seguintes intenções: para ajudar a manter a estrutura da peça, para amortecer as vibrações ou, fixados ao objecto, para evitar que este seja removido. O material usado na fabricação destes suportes deve por um lado ser compatível com a sua função e, por outro, respeitar a estética do objecto.

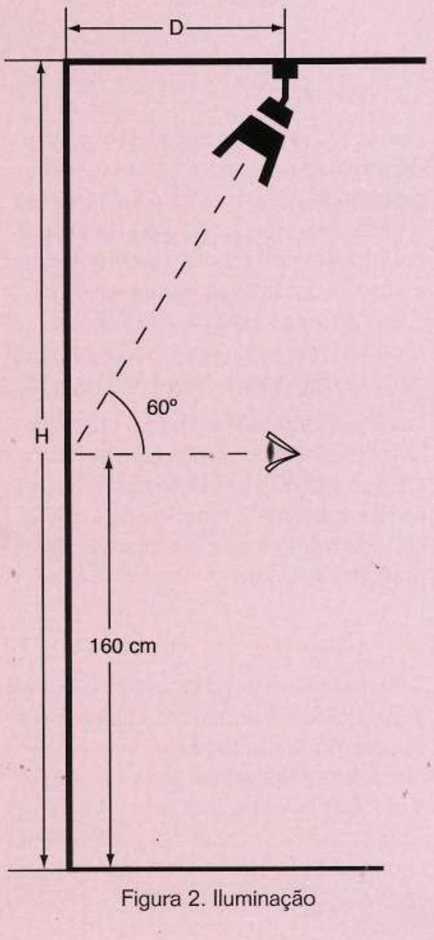


Figura 2. Iluminação

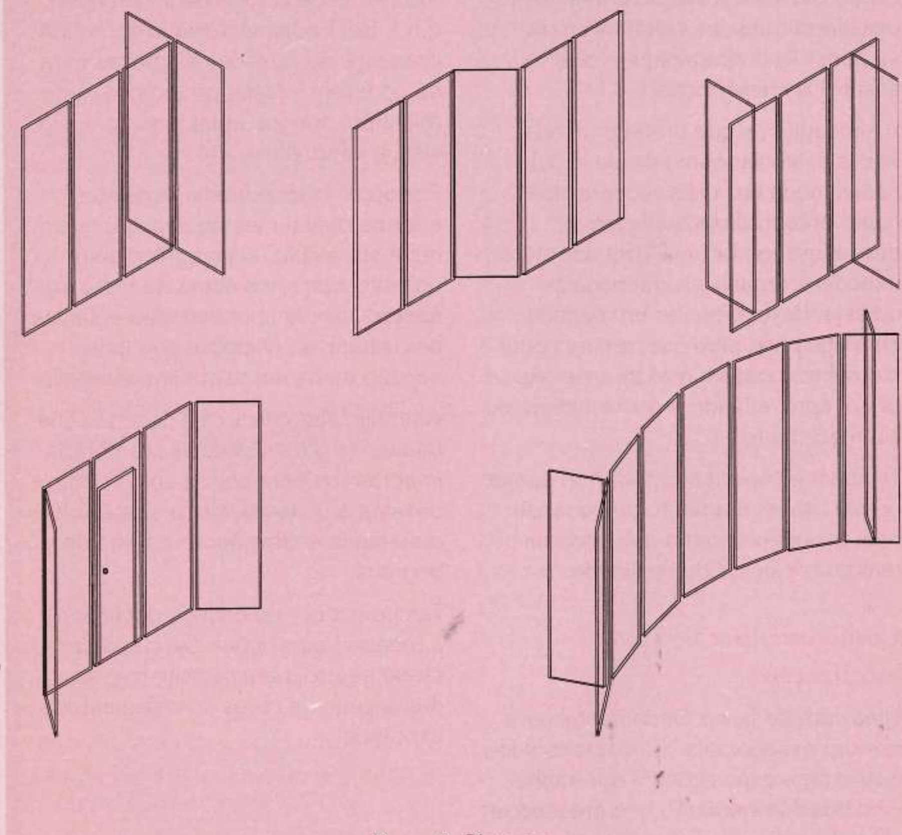


Figura 3. Placares.

Figura 4. Vitrines

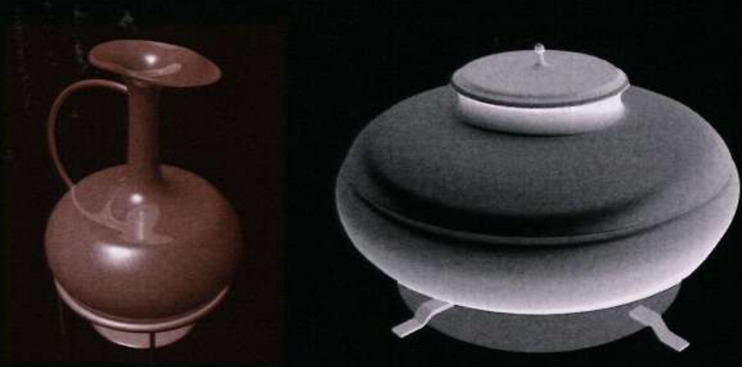


Figura 4–A. Suportes

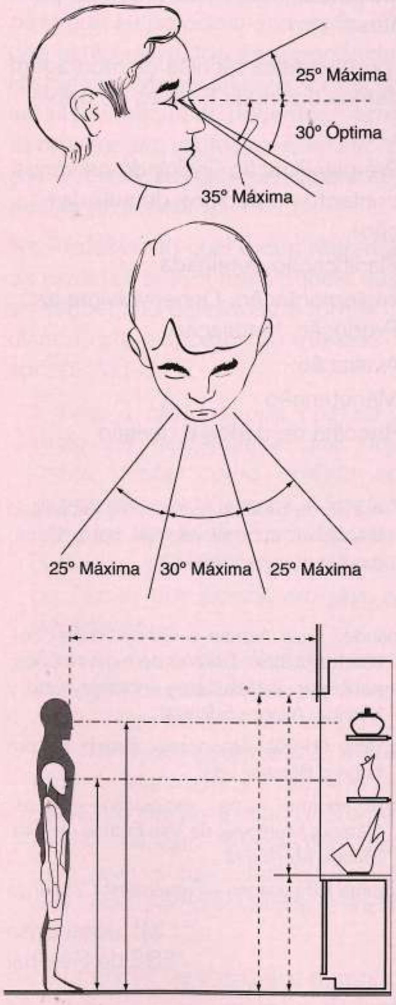


Figura 5. Ergonomia

Que tipografia escolher?

Em qualquer meio de comunicação escrito, o tipo de letra é fundamental. Este deve sempre apresentar-se adequado à natureza do texto.

O tipo de letra FUTURA ou HELVÉTICA é o mais adequado para textos impessoais ou técnicas. O tipo TIMES é mais adequado para textos literários, históricos ou pensamentos.

Compor o texto, significa ordenar os espaços e as componentes tipográficas sobre o suporte.

Um texto bem composto deve apresentar, de forma clara, a ordem de leitura, podendo apresentar-se com uma estrutura abstracta ou geométrica, previamente seleccionada.

Os títulos devem em média conter apenas 1 ou 2 palavras, sendo aceitável um máximo de 10 palavras (como medida de referência pode tornar-se como mínimo a de 60mm).

Os subtítulos devem, no máximo, apresentar 10 a 20 palavras (como medida de referência pode tomar-se como mínimo a de 40mm).

O texto introdutório, que deve estar à entrada da exposição introduzindo os conceitos principais, deve conter de 50 a 200 palavras e estar dividido em parágrafos de 75 palavras no máximo (como medida de referência pode tomar-se como mínimo a de 30mm).

Os *textos de sectores* devem apresentar 75 a 150 palavras no máximo. Estes textos são referentes a grupos de objectos e têm intenção informativa e interpretativa (como medida de referência pode tomar-se como mínimo a de 20mm).

As *legendas* são específicas de um objecto ou de um pequeno grupo de objectos. Identificam o objecto e os seus factores básicos (como medida de referência pode tomar-se como mínima a de 12mm

Fará falta ter em conta a ergonomia?

Para se decidir a que altura se devem colocar os objectos, há que ter em conta as regras que a ergonomia (adaptação dos elementos às condições do corpo humano) e a proxemia (área de estudo sobre a percepção e uso do espaço humano como elaboração especializada de uma cultura) aconselham. Assim, serão respeitados os percentis médios das medidas antropométricas dos potenciais destinatários, para que haja a certeza que os objectos se situam dentro do cone do ângulo de visão humano e, em altura, na chamada linha do horizonte (figura 5).

A tipologia da sala deve permitir que o visitante possa observar a peça a uma distância aproximada ao dobro da maior dimensão da peça.

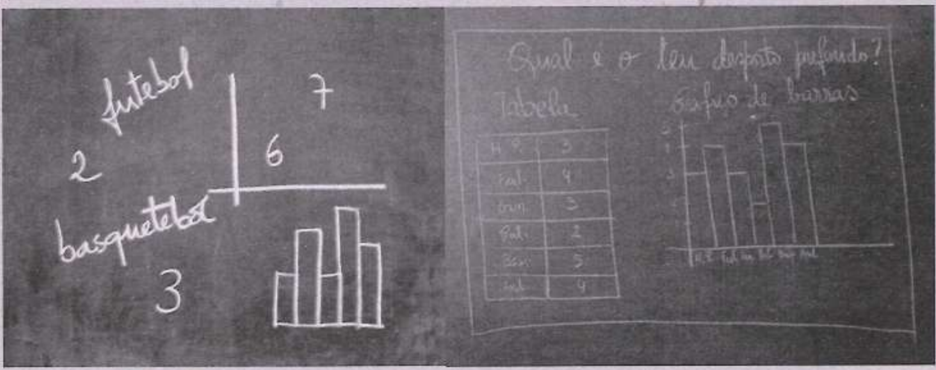


Figura 6. Maneiras de apresentar

Qual a melhor maneira de apresentar?

Mostrar implica ordenar, classificar e valorizar os elementos a expor, numa escala relativa a um sistema linguístico, social, cultural, histórico e político determinante.

Expor é sobretudo um acto de dar significado. Assim, a forma de apresentar deve ter uma lógica, uma estrutura interna de modo a que o exposto adquira o sentido desejado.

O facto de expor um objecto de uma determinada maneira, por exemplo, junto com outros feitos do mesmo material, com a mesma função ou com a mesma cor ou, pelo contrário, expo-lo junto do ambiente referencial que lhe corresponde, restituindo-lhe a sua autenticidade e valor cultural, são formas completamente distintas.

Outro factor a ter em conta é a ordem natural de leitura. A maioria das pessoas nas culturas ocidentais num espaço não estruturado tem tendência para virar à direita, esquecendo a parede da esquerda e de ler de cima para baixo (figura 6).

Temos de nos preocupar com a composição?

A informação exposta num placar inclui, normalmente, texto e imagem. A *mancha* ocupada pelo texto deve apresentar-se em uma ou duas colunas, interagindo com imagens. Neste tipo de composição, as imagens podem ser usadas de forma flexível e estimulante. Podem, por exemplo, atravessar as duas colunas de texto e chegarem até ao *romper* das margens, ou então, pelo contrário, pode ser o texto a submeter-se ao espaço deixado pelas imagens.

Em qualquer situação, é importante o estudo das proporções dos elementos entre si (imagem e texto) e, ainda, do seu peso visual na superfície de suporte.

O peso visual de uma mancha ou de uma figura depende da sua posição/colocação, da sua cor, do seu tamanho e da sua forma.

Nem sempre a figura mais pesada é a de maior dimensão; há outras formas de simular peso, por exemplo, criando diferenças entre tons claros e escuros. Uma imagem de tonalidade escura ou com maior contraste atrai-nos mais que uma imagem clara ou com menos contraste. Também as cores brilhantes nos atraem mais.

Que potencialidades educativas pode conter uma exposição?

A exposição é um meio único de aprendizagem onde o visitante pode escolher livremente o que quer assimilar, demorando o tempo que quiser, ou seja, respeitando o seu ritmo.

É a montagem da exposição que, respeitando determinadas regras, pode levar o visitante à compreensão dos conceitos. Por isso, deve começar por apresentar os conceitos em consonância com o tema para, gradualmente, levar o visitante à fronteira do conhecimento e "convidá-lo" a aprofundar outros temas. É, pois, no modo como se apresenta a informação que podemos fazer despertar a curiosidade e estimular o desejo de conhecer mais. É não dar respostas antecipadas, mas antes provocar perguntas.

Na problemática técnica da montagem podemos distinguir 6 fases de trabalho:

1. Pré-planificação (incluindo os vários contactos e pedidos de autorização).
2. Planificação detalhada.
3. Implementação. Desenvolvimento. Produção. Instalação.
4. Avaliação.
5. Manutenção.
6. Recolha de dados e revisão.

Nota

A ESE de Setúbal possui uma exposição disponível subordinada ao tema Como montar uma exposição?

Bibliografia

Fernández, Luis Alonso e Garcia, Isabel Fernández (1999). Diseño de exposiciones: concepto, instalación y montaje. Arte y Musica: Alianza Editorial

Lida, Itiro (1990). Ergonomia. Brasil: Editora Edgard Blucher Lda.

Como montar uma exposição—tópicos. Câmara Municipal de Vila Franca de Xira. Museu Municipal

Programa Exhi-visions—Generalitat Catalunya

Mª. José Brito
ESE de Setúbal

História da Matemática

A obra—constituída por doze textos—é, nas palavras dos seus autores, *uma introdução básica à História da Matemática, destinada a complementar a formação de futuros professores de Matemática, ou de outros leitores que tenham gosto e interesse pelo assunto* (p. 18). Tendo o projecto surgido por sugestão da Universidade Aberta, viria a ser concretizado por cinco investigadores para quem *parece primordial que todos os professores de Matemática tenham uma informação sobre a História da disciplina que se propõem ensinar* (p. 17) e que estão convictos da importância da História da Matemática na formação inicial e contínua de docentes: *Acreditamos que um professor com informação e formação histórica poderá ser melhor professor* (p. 17).

No Prefácio, do qual foram retirados os excertos anteriores e aquele que se segue, são definidos de forma clara os pressupostos do trabalho apresentado:

> *É pois a História que nos dá a visão da Matemática que hoje temos. Esta, como edifício em permanente evolução, (...) estará sempre ligada às necessidades culturais, económicas, ambientais ou físicas dos povos em que se desenvolve.*
>
> *Através de conceitos e algoritmos análogos desenvolvidos por povos muito distanciados no tempo ou nas fronteiras geográficas, a História da Matemática é também um elemento de união das diferentes raças, culturas, civilizações, cada uma com a sua criatividade própria, mas sempre valiosa e indispensável* (p. 17).

As diferenças de estilo dos autores são evidentes, assumidas e, de certo modo, inevitáveis, mas em nada prejudicam um trabalho conjunto que tem como denominadores comuns o rigor histórico e uma apresentação dos assuntos estruturada de modo a facilitar a transposição para a sala de aula. Em relação a este último aspecto há a salientar que dos objectivos da aprendizagem enunciados para cada capítulo consta sempre o de o leitor—supostamente um futuro professor—ficar apto a esboçar a planificação de lições em que utilize conhecimentos matemáticos de cada uma das épocas e/ou civilizações. Acresce ainda a inclusão, em todos os textos, de problemas originais e de problemas baseados em textos históricos, estes com as respectivas soluções ou sugestões de resolução.

A preocupação dos autores com os aspectos didácticos é assumida também relativamente aos temas escolhidos, no sentido de uma possível utilização na sala de aula. E embora essa escolha pudesse ter sido diferente, pudesse ter sido maior ou menor o desenvolvimento de cada tema e diferentes os aspectos destacados em cada uma das épocas analisadas, é indubitável que o livro dá uma excelente perspectiva global da evolução histórica das matemáticas. Os capítulos que o constituem são os seguintes:

1. A Matemática no Antigo Egipto; 2. A Matemática na Mesopotâmia; 3. A Matemática na China; 4. A Matemática na África; 5. A Matemática na Grécia Antiga; 6. A Matemática na Índia Medieval; 7. A Matemática na Civilização Islâmica; 8. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI; 9. Alguns desenvolvimentos posteriores; 9.1. A criação das geometrias não-euclidianas; 9.2. Das equações à Álgebra moderna; 9.3. O aparecimento da geometria analítica e do cálculo infinitesimal; 10. A Matemática em Portugal.

A existência de um livro em português sobre História da Matemática, escrito por historiadores, investigadores e educadores matemáticos com larga experiência neste campo, assume uma grande importância. De facto,

História da Matemática

Autores: Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva e Maria José Costa

Editora: Universidade Aberta

Agosto de 2000 | 608 pp.

Preço: 29,94 € (PVP)

dois dos óbices, apontados pelos docentes a uma maior presença da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática, têm sido a falta de bibliografia em português e a escassez de elementos que permitam uma fácil integração de actividades históricas diversas na planificação das aulas da disciplina. Assim, este conjunto de textos de qualidade, com um cariz generalista e prático, para além de ser útil a todos os que se interessam pela História da Matemática, será certamente uma ferramenta de trabalho indispensável aos professores dos diferentes níveis de ensino.

Isabel Cristina Dias
Esc. Sec./3º Ciclo José Cardoso Pires, Stº António dos Cavaleiros

Cálculo Algébrico Simbólico nas nossas escolas: alguns axiomas e exemplos

John F. Mahoney

A crescente divulgação dos sistemas de computação algébrica, que actualmente já se encontram disponíveis em alguns modelos de calculadoras, levou-nos a seleccionar, para este número, um artigo da autoria de John Mahoney, no original Computer Algebra Systems in Our Schools: Some Axioms and Some Examples, *publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, em Novembro de 2002, num número temático da revista* Mathematics Teacher.

Ao longo deste artigo são-nos apresentadas algumas das potencialidades destes sistemas, ao mesmo tempo que são discutidos aspectos relativos à sua integração no ensino da matemática.

Os alunos podem resolver os problemas tradicionais de álgebra e cálculo usando tecnologia com cálculo algébrico simbólico (CAS), mas pode esta tecnologia ajudar os alunos a aprender matemática? Com tecnologia CAS podem decompor expressões em factores, resolver equações e sistemas de equações, calcular derivadas e integrais, resolver equações diferenciais, etc. Dadas as poderosas ferramentas da tecnologia CAS, é importante antecipar como o seu uso afectará o ensino da matemática. Este artigo inclui cinco axiomas, de algum modo provocativos, e exemplos acerca do uso do CAS nas nossas escolas.

Axioma 1:

A tecnologia CAS tem potencial para desenvolver a compreensão matemática dos alunos de um modo tão significativo como já tiveram as calculadoras gráficas.

Há mais de uma década que os alunos usam calculadoras gráficas para explorar conceitos do ponto de vista gráfico e numérico. Estas calculadoras traçam rapidamente o gráfico de uma grande variedade de funções, incluindo as que são dadas na forma polar ou paramétrica. Facilmente produzem tabelas de valores de funções e usam técnicas de regressão para encontrar funções que se adequam aos dados disponíveis. Permitem ver, de uma forma rápida e fácil, as relações existentes entre os gráficos de várias funções. As potencialidades gráficas tornam ainda possível a investigação de propriedades das funções ao encontrar zeros, vértices e pontos de intersecção. A tecnologia CAS dá aos alunos as ferramentas para investigarem matemática algebricamente.

Exemplo 1: Os gráficos de quatro parábolas da forma

$$y = x^2 - 2kx + 3$$

estão representados na figura 1. Um aluno com uma calculadora gráfica pode ver o efeito de alterar o parâmetro k e a relação entre k e o vértice da parábola.

Com a ajuda de uma calculadora com tecnologia CAS, um aluno investigando as mesmas parábolas pode determinar que os vértices têm coordenadas

$$(k, 3 - k^2)$$

e concluir que esses vértices são também pontos da parábola

$$y = 3 - x^2,$$

(figura 1). O aluno pode tentar generalizar este resultado para descobrir o lugar geométrico dos vértices de uma parábola da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

quando b varia, (figura 2). Resolvendo em ordem a b a equação da abcissa do vértice,

$$x = -\frac{b}{2a}$$

e substituindo esta expressão na equação geral obtém-se a equação

$$y = c - ax^2$$

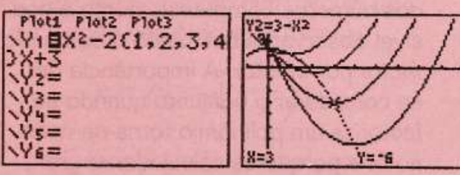


Figura 1.

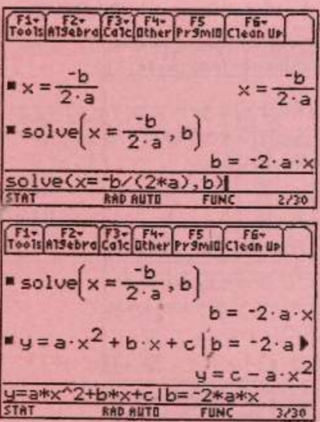


Figura 2.

do lugar geométrico dos vértices duma parábola.

Exemplo 2: O que significa decompor um polinómio em factores? A resposta depende de se estar a fazer a decomposição no âmbito do conjunto dos números racionais, reais ou complexos. As calculadoras gráficas permitem ao utilizador escolher o conjunto desejado. A figura 3 ilustra a sintaxe dos comandos. O comando *factor* $(x^2 - 4.x - 5)$ dá o resultado

$$(x-5)(x+1),$$

uma vez que esta função quadrática é factorizável no conjunto dos números racionais. O comando *factor*

$$(x^2 - 4.x - 6)$$

dá o resultado

$$x^2 - 4.x - 6,$$

uma vez que esta função não se decompõe no conjunto dos números racionais. Decompõe-se sim no conjunto dos números reais, como é possível constatar incluindo x no comando. De um modo semelhante, o polinómio

$$x^2 - 4x - 6$$

não é factorizável no conjunto dos números reais mas sim no conjunto dos números complexos, como é possível observar substituindo o comando *factor* por *cfactor*. A importância de se considerar o conjunto quando se factoriza um polinómio torna-se mais notória porque as calculadoras gráficas usam comandos ligeiramente diferentes consoante efectuam a decomposição no conjunto dos números racionais, reais ou complexos.

Exemplo 3: Os alunos podem usar a tecnologia CAS para investigar a composição de funções. A figura 4 mostra o efeito cíclico da composição repetida da função

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

Aqui a função é repetidamente composta com ela própria. Depois de três iterações o resultado é a função identidade

$$I(x) = x,$$

e a iteração seguinte produz a função original.

Axioma 2
A tecnologia CAS pode permitir aos alunos aprender bem cálculo mesmo que não dominem a álgebra.

Muita da álgebra é aritmética generalizada. As calculadoras gráficas podem ajudar os alunos a aprender conceitos de álgebra embora possam não dominar a aritmética. As calculadoras podem realizar operações aritméticas com precisão e, por conseguinte, libertá-los para se concentrarem nos conceitos e nas técnicas algébricas. Pensa-se que os alunos não estão prontos para aprender álgebra nos 8º e 9º anos, porque o seu conhecimento de aritmética é insuficiente. As calculadoras científicas e gráficas podem ajudá-los a aprender álgebra mais facilmente. Muito do cálculo é álgebra generalizada e geometria. O cálculo é, muitas vezes, um filtro que impede os alunos de ingressarem em cursos de ciências, economia e matemática. Os alunos podem não ser capazes de estudar cálculo mais avançado porque não dominam a álgebra e o cálculo elementar. As calculadoras com tecnologia CAS tornam possível estudar—e dominar—esses conceitos.

Exemplo 4: Um aluno pediu-me ajuda porque não conseguia obter a resposta correcta quando tentava calcular

$$\int (\cos x - \sin x)^2 dx$$

Olhei para o seu trabalho e vi que tinha erradamente desenvolvido a expressão

$$(\cos x - \sin x)^2$$

como

$$\cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x.$$

Não tinha compreendido que estava a fazer um erro de álgebra e não um erro de cálculo. Fi-lo desenvolver a expressão numa calculadora com CAS (figura 5), e ajudei-o a compreender porque o seu resultado não era equivalente ao resultado da calculadora.

Exemplo 5: Considere-se a equação

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = 1$$

que apresentei a uma turma de matemática avançada. Os alunos cometem normalmente muitos erros ao resolver equações com radicais. Frequentemente perdem-se nos detalhes do problema e falham na compreensão da abordagem correcta, que envolve gerar possíveis soluções, seguido da

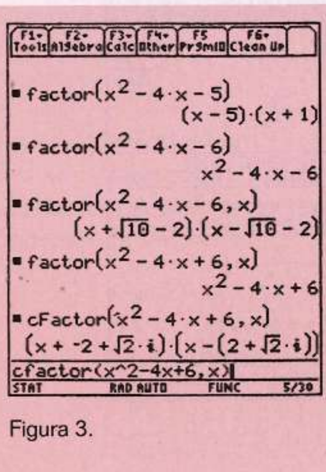


Figura 3.

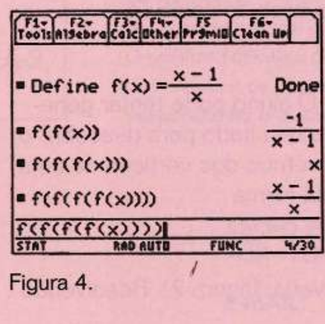


Figura 4.

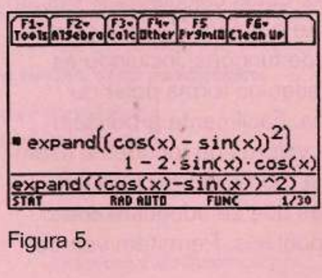


Figura 5.

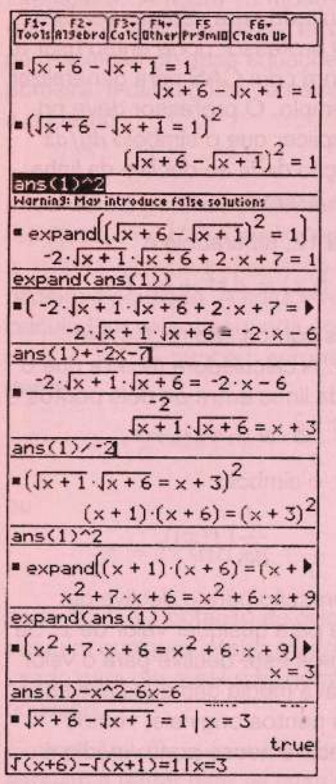


Figura 6.

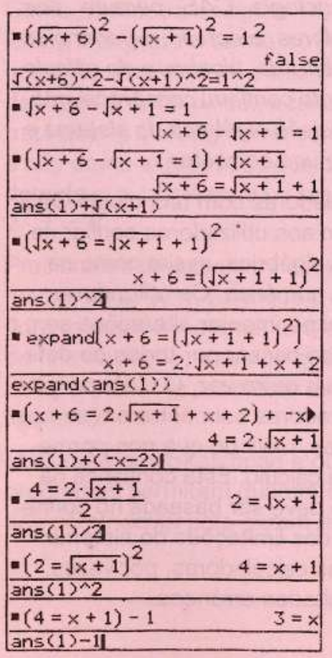


Figura 7.

eliminação das que se revelam falsas. Uma vez que o CAS remove o tédio do cálculo, isso ajuda os alunos a centrarem-se no que é importante. Como professor, foi-me possível usar o exemplo seguinte para ajudar os alunos a centrarem-se nos procedimentos e não nos detalhes.

Os meus alunos começaram por sugerir elevar ao quadrado os dois membros da equação (figura 6). Vimos o aviso *Pode introduzir falsas soluções*, que a TI–89 produz, quando se realiza uma tal operação. Este aviso alerta o utilizador para a necessidade de confirmar se as soluções da equação assim obtida também o são da equação inicial. A turma queria resolver a equação e assim desenvolvemos o caso notável, somámos

$$(-2x-7)$$

a ambos os membros e dividimos tudo por -2. De novo elevámos ao quadrado ambos os membros e efectuámos o produto. Somando

$$-x^2-6x-6$$

a ambos os membros conseguimos resolver em ordem a x. Testámos o resultado na equação original.

Perguntei aos alunos se conheciam outras formas de resolver a equação. Uma sugestão foi a de elevar ao quadrado cada termo (figura 7). A calculadora deu o resultado *falso* porque esta equação é equivalente a

$$(x+6)-(x+1)=1$$

ou seja a $5=1$. Outra sugestão foi adicionar o termo

$$\sqrt{x+1}$$

a ambos os lados da equação e depois elevar ao quadrado os dois membros. Depois de simplificar a equação, somar $-x-2$ aos dois lados e dividir por 2 ambos os membros. Elevando de novo ao quadrado os dois lados e subtraíndo 1, obtém-se o mesmo valor para x que foi obtido usando o primeiro método.

Este exemplo ilustra como o uso das calculadoras com CAS nos permite concentrar nos grandes passos básicos envolvidos na resolução de equações, mais do que nas especificidades de cada passo. Idealmente, depois de verem exemplos como este, os alunos devem ser capazes de resolver por si próprios problemas semelhantes. Projectando este exemplo, os professores podem convidar os alunos a participar. Os alunos podem sugerir os passos a tentar e ver, de imediato, o efeito das suas sugestões. As calculadoras com CAS podem permitir uma álgebra dinâmica.

Axioma 3

A tecnologia CAS tornará mais fácil, aos professores de álgebra, geometria e cálculo elementar, a introdução de conceitos de cálculo mais avançados.

Os professores de aritmética mais inovadores introduzem conceitos de álgebra e geometria enquanto ensinam alunos de níveis elementares. Familiarizam os seus alunos com processos de resolução de equações lineares e com as propriedades das figuras geométricas. Os professores do ensino secundário podem usar os SCA para familiarizar os seus alunos com conceitos de cálculo.

Exemplo 6: Um professor pode convencer os seus alunos, por exemplo, que o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio r pode ser dado pela fórmula

$$p = 2n\sin\left(\frac{180}{n}\right)r.$$

O professor pode fazer os alunos explorarem os resultados desta fórmula para valores particulares de n e de r com uma calculadora gráfica ou um CAS compatível. Na figura 8, a variável x é usada em lugar de n

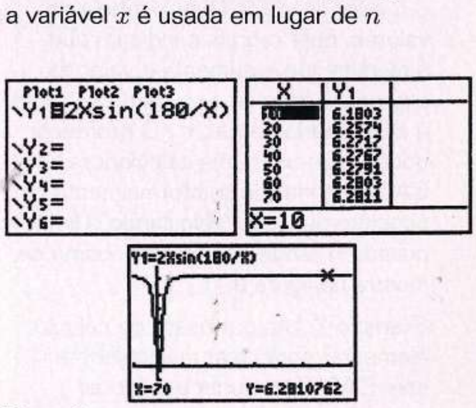


Figura 8.

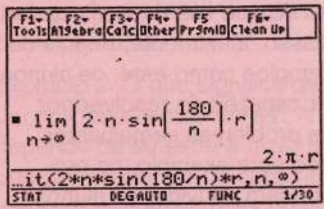


Figura 9.

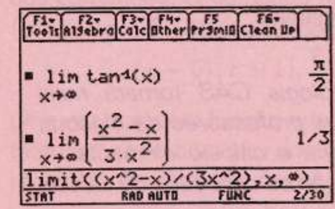


Figura 10.

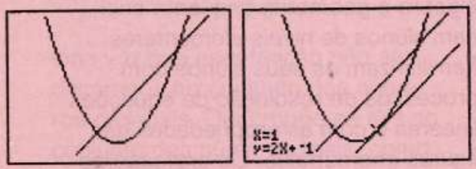


Figura 11.

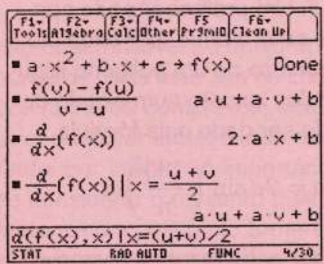


Figura 12.

e o valor de r é 1. Quer a tabela de valores, quer o gráfico indicam que à medida que x aumenta o valor da expressão aproxima-se de 6,2811, isto é aproximadamente 2π. O professor pode então usar uma calculadora com CAS para introduzir informalmente o conceito de limite, calculando o limite quando n tende para infinito, como se mostra na figura 9.

Exemplo 7: Um professor de cálculo elementar pode usar a calculadora com CAS para ajudar a explorar assimptotas horizontais e, ao mesmo tempo, introduzir o conceito de limite. Pode perguntar à turma: *Qual é o comportamento da função*

$$y = \tan^{-1} x$$

para grandes valores de x? Usem a calculadora para explorar esta função. Alguns alunos podem substituir x por valores grandes. Outros podem fazer o gráfico da função num domínio amplo e recorrer a *trace*. Outros podem obter valores que estão próximos de 90 e outros podem obter valores próximos de 1,571, dependendo do facto das suas calculadoras estarem a trabalhar em graus ou em radianos. Os alunos devem poder concluir que esta função tem uma assimptota horizontal. O professor pode então usar uma calculadora com CAS para calcular o limite quando x tende para infinito, como se mostra na figura 10. Se a calculadora está no modo graus, a resposta correspondente é 90. A turma pode então explorar o comportamento da mesma função à medida que x se torna cada vez menor. Um outro exemplo poderia ser o cálculo das assimptotas da função

$$y = \frac{x^2 - x}{3x^2}$$

como se mostra na figura 10.

Exemplo 8: Os professores podem introduzir o conceito de derivada pedindo aos seus alunos para desenharem uma parábola numa calculadora gráfica ou numa calculadora com CAS e seleccionarem quaisquer dois pontos sobre a função, calculando em seguida o declive da linha que une esses pontos. Na figura 11, a parábola é $y = x^2$ e os pontos são $(-1,1)$ e $(3,9)$. A equação da recta que passa pelos dois pontos é $y = 2x + 3$. Desenhamos então a linha tangente à curva em $x = 1$, valor correspondente à média das abcissas dos dois pontos originais. Algumas calculadoras, como a TI–83 Plus, têm um comando que permite ao utilizador desenhar a tangente a uma curva num dado ponto. Os alunos podem observar que esta tangente parece paralela à primeira recta, como se vê na figura 11.

Este resultado será sempre verdadeiro? O professor pode então usar a calculadora com CAS para generalizar este exemplo. O professor deve primeiro explicar que o símbolo dy/dx é a notação dada ao declive da linha tangente à curva.

Na figura 12, a parábola é

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

e os dois pontos são $(u, f(u))$ e $(v,\ f(v))$. A calculadora mostra que o declive da linha entre os dois pontos é

$$a \cdot u + a \cdot v + b.$$

A seguir, o símbolo

$$\frac{d}{dx}(f(x))$$

dá a expressão para o declive da tangente para qualquer valor de x. Se calcularmos este declive para o valor de x igual à média das duas abcissas dos dois pontos originais, vemos que o declive nesse ponto médio é também

$$a \cdot u + a \cdot v + b.$$

Este trabalho mostra que o declive de uma linha secante a uma parábola é igual ao declive da tangente no ponto médio das abcissas dos pontos em que a secante cruza a parábola.

Axioma 4:

A tecnologia CAS permite aos utilizadores efectuar experiências no âmbito da álgebra e do cálculo enquanto confiam, com precaução, na precisão algébrica do sistema e no seu uso correcto.

As calculadoras com tecnologia CAS permitem aos utilizadores confiar na precisão algébrica, assim como na precisão numérica. Os utilizadores podem experimentar alterações sem o esforço de passar por todos os detalhes uma e outra vez. O CAS permite aos utilizadores concentrarem-se nos problemas, mais do que nos pormenores de cálculo. Esta confiança na precisão deve ser baseada no conhecimento das limitações do sistema, porque as calculadoras, por vezes, dão resultados erróneos.

Exemplo 9: A figura 13 mostra os resultados aparentemente erróneos na resolução de duas equações. Na primeira, a calculadora tenta resolver a equação

$$3 \cdot x - 2 = 4$$

em ordem a y . O surpreendente resultado $1 = 2/x$ é equivalente a $x = 2$, o valor de x que torna verdadeira a equação. A solução da calculadora para a segunda equação, $\sin x = 1/2$, é também surpreendente:

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{5 \cdot \pi}{6}$$

ou

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$$

onde $@n1$ é a notação da calculadora para um qualquer inteiro arbitrário usado para dar a solução geral da equação.

Exemplo 10: Os alunos de cálculo que estejam a tentar usar as suas calculadoras para diferenciar implicitamente, necessitam de o fazer cuidadosamente. Consideremos a curva cuja equação é

$$x^2 - xy + 2y^2 = 0$$

e tentemos encontrar a expressão para dy/dx.

Como se mostra na figura 14, a calculadora interpreta o termo xy como o nome de uma variável e não o produto de x por y. Além disso, a calculadora trata quer y quer xy como constantes e não como expressões que dependem de x e, por isso, dá o resultado $2 \cdot x = 0$.

Precisamos de exprimir y como função de x, $y(x)$, para que a calculadora realize correctamente a operação de diferenciação, e temos que introduzir xy como $x \cdot y$, como se mostra na figura 15.

O Geometer's Sketchpad e outros programas permitem guardar comandos como *script* para serem reutilizados mais tarde. As calculadoras TI–89 e TI–92 têm uma capacidade semelhante. Todos os comandos que o utilizador insere na calculadora podem ser gravados como texto. Este texto pode depois ser executado passo a passo como um *script*. Pode também ser modificado facilmente. Esta capacidade permite aos utilizadores investigar relações algébricas. O utilizador pode começar com um exemplo específico e se os resultados se mostrarem interessantes, o trabalho pode ser guardado como *script*. Então o exemplo pode ser alterado para um outro do mesmo tipo. Se os resultados são ainda interessantes, o *script* pode ser usado para tentar esboçar a essência da prova de uma relação.

Exemplo 11: Considere-se um polinómio do terceiro grau com três raízes reais: 3, –2 e –4. Traçamos o gráfico do polinómio

$$y = (x - 3)(x + 2)(x + 4).$$

A média dos dois primeiros zeros é

$$\frac{3 + (-2)}{2} = 0,5.$$

Traçamos a tangente ao gráfico do polinómio para $x = 0,5$ e observamos, na figura 16, que a tangente parece cruzar a terceira raiz do polinómio.

Podemos usar a calculadora TI–89 para determinar se a tangente passa de facto pelo ponto $(-4, 0)$. Os passos, indicados na figura 17, são:

- Introduzimos na memória um dado polinómio como $f(x)$.
- Calculamos a média dos dois primeiros zeros (raízes).
- Calculamos o valor da derivada no ponto médio daqueles zeros.
- Escrevemos a equação da recta tangente nesse ponto e usamo-la para encontrar o valor de x quando esta cruza o eixo dos xx.
- Resolvemos a equação em ordem a x e verificamos que a tangente cruza o eixo dos xx em $x = -4$, a terceira raiz.

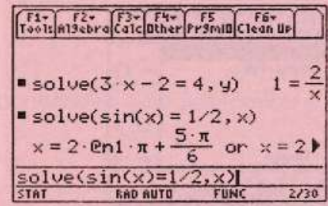


Figura 13.

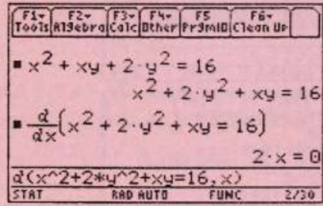


Figura 14.

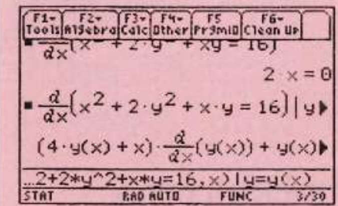


Figura 15.

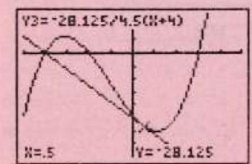


Figura 16.

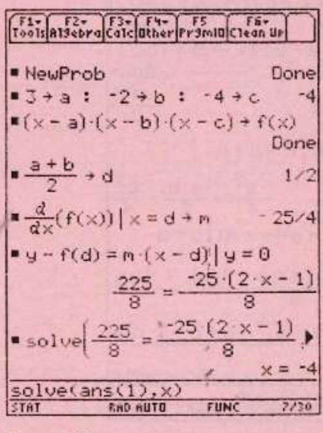


Figura 17.

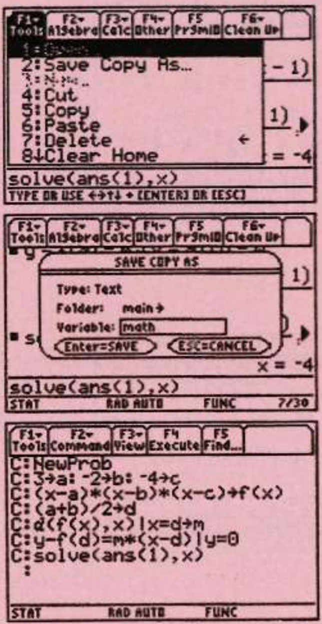


Figura 18.

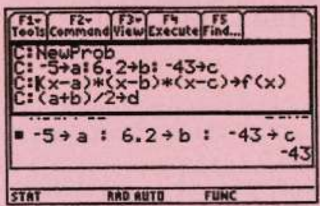


Figura 19.

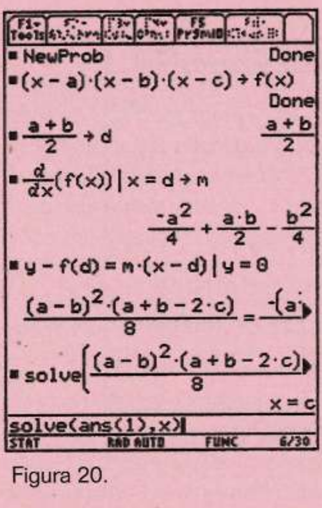


Figura 20.

Em seguida, usamos o editor de texto para guardar uma cópia destes comandos como *script*, como se mostra na figura 18. Podemos alterar os valores de a, b e c e correr de novo o *script* passo a passo para verificar se a propriedade é verdadeira para outros polinómios do terceiro grau, como se mostra na figura 19.

Mais interessante ainda, podemos eliminar a segunda linha do *script* e determinar se esta propriedade é sempre verdadeira. A figura 20 mostra o resultado de se executar o *script* sem o comando de dar valores concretos a a, b e c. O essencial da demonstração algébrica desta propriedade dos polinómios do terceiro grau é produzido por este *script*. Como anteriormente, a tangente ao polinómio do terceiro grau no ponto médio de duas raízes passa pela terceira raiz, $x = c$.

Os alunos podem descobrir e provar outras propriedades interessantes das funções polinomiais e doutras funções. Os alunos poderiam achar tais trabalhos como um desafio insuportável sem o auxílio do cálculo algébrico simbólico, mas muito mais razoável com ele.

> *Axioma 5:*
>
> *O CAS irá modificar a matemática que nós ensinamos nas escolas e o modo como o fazemos de maneira semelhante às transformações que ocorreram quando começámos a usar calculadoras gráficas e científicas.*

A popularidade das calculadoras com CAS servirá de catalisador para a mudança. E elas estão a tornar-se populares por três razões:

- São agora relativamente baratas e vendidas em muitos locais.
- Os modelos mais recentes têm um inter-face mais agradável.
- A sua utilização é permitida em alguns exames de matemática nos Estados Unidos.

Cada vez mais estudantes estão a utilizar calculadoras com CAS na sala de aula. Alguns dos meus alunos compram-nas em vez de calculadoras gráficas. Os alunos esperam que os seus professores estejam familiarizados com elas; que os conteúdos matemáticos dos seus cursos reflictam as capacidades das suas calculadoras; e que o seu uso seja permitido nos trabalhos de casa, no trabalho da aula, nos testes e nos exames.

Há trinta anos atrás, ensinava aos alunos como usar a régua de cálculo, como interpolar dados de tabelas de valores, como manipular a característica e a mantissa de logaritmos, o algoritmo da raiz quadrada, o método Horner, as regras de sinais de Descartes, e uma série de outros tópicos. As calculadoras científicas mudaram o que ensinávamos nos anos 70. As calculadoras gráficas mudaram o que ensinávamos nos anos 90. Anteriormente analisávamos as funções para as representar graficamente, mas agora frequentemente desenhamos o seu gráfico para compreender as suas propriedades. O uso do CAS em computadores e, em particular, nas calculadoras está a vulgarizar-se. Com o maior uso do CAS prevejo que menos ênfase seja dada às técnicas de resolver equações, simplificar expressões, resolver sistemas de equações, decompor em factores, calcular derivadas e integrais. Prevejo que seja dada mais ênfase à modelação e às aplicações. A questão mais importante na educação matemática tem sido sempre: Que matemática é importante ensinar? A resposta, acredito, é que iremos ensinar como modelar situações, equacionar problemas e determinar como os resolver. Com o auxílio do CAS, os alunos podem muitas vezes fazer o resto. No fim da década, as calculadoras com CAS mudarão o que nós ensinamos nas salas de aula. Eu não consigo esperar.

Tópicos para investigação com CAS

Estas quatro investigações envolvem polinómios. Primeiro, devemos explorar as propriedades com polinómios e, em seguida, generalizar os resultados com a ajuda do CAS.

Investigação 1

Muitos polinómios do terceiro grau têm um máximo relativo, um mínimo relativo e um ponto de inflexão. Compare as suas cordenadas.

Resultado: O ponto de inflexão é o ponto médio do segmento que liga os pontos correspondem ao máximo e ao mínimo (figura 21).

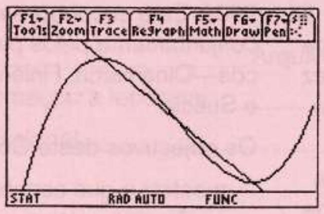


Figura 21

Investigação 2

A tangente ao gráfico de um polinómio do terceiro grau, num ponto P qualquer, intercepta o gráfico do polinómio num segundo ponto Q. Considere a recta definida por Q e pelo ponto de inflexão, I, do polinómio. Calcule a área da superfície compreendida entre a tangente e a curva, entre os pontos P e Q. Calcule a área da superfície compreendida entre a recta IQ e a curva, entre os pontos Q e I.

Resultado: A razão entre estas duas áreas é $27/16$. Na figura 22, a primeira região está representada a tracejado vertical e a segunda a tracejado horizontal.

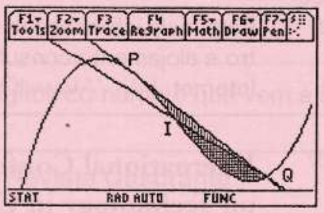


Figura 22

Investigação 3

A tangente ao gráfico de um polinómio do terceiro grau, num qualquer ponto P, intercepta a curva num segundo ponto Q. Considere uma segunda tangente no ponto Q, que intercepta o gráfico em R.

Resultado: A razão das áreas das regiões consideradas é sempre $16/1$. Na figura 23, a primeira região está identificada com tracejado vertical e a segunda com tracejado horizontal.

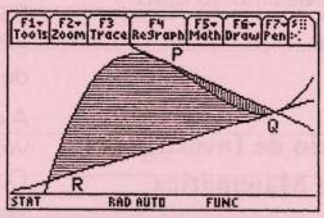


Figura 23

Investigação 4

Muitos polinómios do quarto grau têm três *concavidades*, por conseguinte, dois pontos de inflexão. Considere a recta que passa pelos dois pontos de inflexão, A e B. Esta recta define com a curva três regiões. Compare as áreas.

Resultado: A região da esquerda (a tracejado horizontal) e a região da direita (a tracejado vertical), têm a mesma área e a região do meio (a tracejado diagonal) é a soma das outras duas, como se mostra na figura 24.

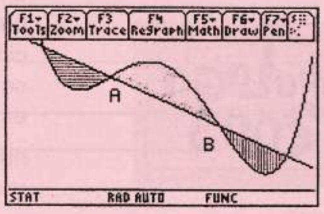


Figura 24

Traduzido por Maria José Bóia e Helena Rocha

Encontros

ProfMat2003

O Encontro Nacional de Professores de Matemática, vai realizar-se em Santarém, na Escola Superior de Educação, nos dias 19, 20 e 21 de Novembro de 2003. Poderá consultar a página do ProfMat2003 em http://www.eses.pt/profmat2003.

Escola Superior de Educação de Santarém

XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática

Este seminário, organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação da APM, vai realizar-se nos dias 17 e 18 de Novembro em Santarém, na Escola Superior de Educação.

Para mais informações contacte siem 2003@esel.ipleiria.pt

Eurologo 2003

Este encontro é organizado pelo Centro de Novas Tecnologias da Informação e vai realizar-se nos dias 27, 28, 29 e 30 de Agosto, na Casa de Vilar, no Porto.

Focará a utilização criativa da tecnologia como uma ferramenta de aprendizagem, no âmbito da filosofia do Logo, mas não apenas restrita às linguagens e ambientes do Logo.

Mais informações poderão ser encontradas no seguinte endereço: http://www.eurologo.org/eurologo2003

Challenges 2003

A terceira edição do Challenges 2003—III Conferência Internacional sobre Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação e quinto Simpósio Internacional em Informática Educativa—vai decorrer mais uma vez em Braga, na Universidade do Minho, de 17 a 19 de Setembro.

A organização do evento é mais uma vez da responsabilidade do Centro de Competência Nónio Séc. XXI da Universidade do Minho.

m-ICTE2003

2nd International Conference on Multimedia and ICTs in Education

Este encontro decorrerá entre 3 e 6 de Dezembro de 2003 em Badajoz, Espanha. Nele serão discutidos para além de aspectos mais gerais, assuntos de âmbito pedagógico e didáctico e no campo da tecnologia. Trata-se de uma conferência de carácter interdisciplinar, podendo toda a informação ser consultada na página da internet em:

http://www.formatex.org/micte2003/micte2003.htm

ICME 10

O 10º Congresso Internacional em Educação Matemática realizar-se-á em Copenhagne, de 4 a 11 de Julho de 2004. Este encontro será organizado conjuntamente pelos países nórdicos—Dinamarca, Finlândia, Noruega e Suécia.

Os objectivos deste Congresso são:

- mostrar o que acontece na educação matemática, no mundo, no âmbito da investigação e do ensino;
- trocar informação sobre os problemas da educação matemática no mundo;
- aprender e beneficiar dos recentes avanços na Matemática, como disciplina.

Este encontro espera reunir 3000 a 4000 investigadores e professores em educação matemática.

A inscrição *on-line* estará disponível a partir de Agosto de 2003 e, se for feita até 28 de Fevereiro de 2004, será de, aproximadamente 417€.

Para mais informações sobre o encontro e alojamento consulte a página da Internet: http://www.ICME-10.dk

International Conference on Technology in Collegiate Mathematics

Tendo a 15ª conferência sido um sucesso, está em fase de preparação uma nova página para o 16th Annual ICTCM que terá lugar de 30 de Outubro a 2 de Novembro de 2003 em Hyatt Regency O'Hare, Chicago, IL.

Para mais informações consulte a página da internet http://www.ictcm.org/index.html

Quota 2003

No ano de 2003 o valor da quota é de €43,00 para professores, €30,50 para estudantes (só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ______________________________ Sócio nº: __________

Morada: ______________________________

Código Postal: ______________ Distrito: ______________

Telefone: ______________ Email: ______________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: ______________

Nº do B.I. ______________ Arquivo: ______________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: ______________ Nível de ensino: ______________

Categoria profissional: ______________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: ______________ Email: ______________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |__|__|__|__| |__|__|__|__| |__|__|__|__| |__|__|__|__| cvv |__|__|__| *

Visa ☐ **MasterCard** ☐

Validade ______________ o valor de ______________ correspondente a ______________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a)	€10,00
☐ Sócio(a) residente no estrangeiro	€12,50

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: apm@netcabo.pt

Índice

1 **Autonomia das escolas: cinco anos e cinco ministros depois …**

João Barroso

3 **Formação inicial de professores de Matemática: consensos e dificuldade**

Joana Brocardo

9 Pontos de vista, reacções e ideias …

O fim do início da *gestão centrada* na escola do 1º ciclo, *Carlos Pires*

Uma história com proporcionalidade directa, *Rosário Bento*

11 **Na Páscoa fomos para o Algarve … trabalhar!,** *Antônio Guerreiro e Luciano Veia*

13 Actualidades

Preparar o próximo ano lectivo: tarefa possível, impossível ou indeterminada, *Fátima Guimarães e Joana Brocardo*

14 **Porque sobem os corvos a 5 metros? Uma experiência de sala de aula**

Adelina Precatado e Maria da Paz Martins

17 Vamos Jogar

Figuras & Companhia, *Cátia Ramos, Elisa Rodrigues e Helena Rocha*

19 **A Matemática e a Tecnologia na ESTG de Leiria**

Nelson Martins Ferreira

21 Materiais para a aula de Matemática

Porque sobem os corvos a 5 metros?

24 **Construções geométricas, prazer dos deuses …**

Eduardo Veloso

29 Tecnologias na educação matemática

Conhece a origem do símbolo @?

31 **Quinzena da Matemática e Tecnologia no Centro Ciência Viva de Vila do Conde,** *Ana Carla Campos*

32 O problema deste número

Reuniões com as três tribos

33 **Caça ao Tesouro,** *Rogério Costa*

34 **Como montar uma Exposição?**

Mª José Brito

39 Leituras

História da Matemática

41 Para este número seleccionámos

Cálculo Algébrico Simbólico nas nossas escolas: alguns axiomas e exemplos, *John F. Mahoney*

48 Encontros