Educação e Matemática

Nº 70

Novembro/Dezembro de 2002

Preço: 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

As capas de 2002

A primeira das capas deste ano foi dedicada a Leonardo da Vinci. Corresponde basicamente a uma montagem, envolvendo desenhos do próprio Leonardo, em que se pretendeu criar um ambiente de certa *intimidade* entre os conceitos matemáticos e a *natureza humana*.

Quanto à segunda capa, corresponde ao número 67, ela é muito descritiva. Tal como a anterior pretende homenagear um grande vulto, neste caso o matemático português Pedro Nunes. A capa é construída sobre dois objectos, um deles, um astrolábio ao qual se encontra acopolado um nónio, o segundo a representação da famosa *loxodromia*. Embora aparentemente simples, trata-se de uma das capas tecnicamente mais difíceis de obter já que, na sua concepção, estiveram envolvidos meios tão diferentes como modelação 3D, desenho vectorial e software matemático.

A capa do número 68 destaca, não uma pessoa mas a secção dedicada ao *Ano Temático* intitulado de *Matemática e Profissões*. Para obter modificaram-se, usando *software*, detalhes de um quadro de Laurent de la Hire (1649), de modo a estabelecer uma dicotomia entre o estudo teórico, e abstracto, e a sua aplicação concreta que é, na capa, simbolizada pela mão que segura o esquadro e o compasso.

No caso do número temático, a respectiva capa pretende descrever, em termos gráficos, o próprio tema abordado naquele número—*a iliteracia*. Por um lado, a presença de objectos, com componentes reconhecíveis, mas cujo conjunto permanece enigmático, tenta constituir uma definição metafórica do conceito em si. Outros, por seu lado, tentam descrever o drama humano que se encontra associado à proliferação do fenómeno.

Finalmente, chegamos à capa do presente número. É inspirada num dos artigos que aborda aspectos relacionados com a problemática da compreensão dos objectos matemáticos. Trata-se de um desafio insuperável, este de caracterizar essa interacção, em termos gráficos. Ainda assim, é de tal modo interessante, que é impossível não o tentar vencer, mesmo sabendo que isso é impossível. Em certo sentido a matemática é uma substância vítria, mas de formas complexas, que só se deixam perceber se conseguirmos eliminar as *ilusões* criadas pela interferência da luz do nosso próprio entendimento. Essa luz entra e sai pela cúpula que, a propósito, é a cúpula do museu Guggenheim de Nova Iorque, projectado pelo grande arquitecto Frank Loyd Right.

Agora, que o leitor já me confundiu com um *artista* é altura de não escrever mais nada.

António Marques Fernandes
Instituto Superior Técnico

Neste número também colaboraram

Ana Maria Boavida, Anabela Gomes, Branca Silveira, Eduardo Dinis, Elsa Fernandes, Henrique Manuel Guimarães, João Carlos Frias, Joaquim Cândido Machado, Jorge Nuno Silva, José Duarte, José Manuel Duarte, Maria Carolina Marques, Rita Carmo, Sílvia Machado, Sónia Mendes.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Dezembro de 2002.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
e-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 70
Novembro/ Dezembro de 2002

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Joana Brocardo
Sub-Directora
Adelina Precatado
Redacção
Alice Carvalho
Ana Paula Canavarro
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Lina Brunheira
Manuela Pires
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes
Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação
Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Tiragem
5000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Printipo – Indústrias Gráficas, Lda.
N.º de Registo: 112807
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Onde estão os Professores (?)

Fernando Nunes

Para quem já deu alguma atenção e reflectiu sobre a educação, será uma banalidade dizer que ela é um campo complexo onde interagem grupos sociais e profissionais distintos, se jogam interesses diversos e se confrontam ideologias e políticas variadas. Não é fácil encontrar consensos, ainda por cima num tempo em que o contexto é tão rapidamente mutável, evoluindo de dia para dia. Além disso, dentro dos diversos grupos (professores, alunos, encarregados de educação, autoridades educativas, elementos da comunicação social fazedores de opinião, etc.) é natural a existência de opiniões diferentes e até contraditórias.

Os professores estão na confluência de tudo isto. São eles que têm uma responsabilidade próxima na educação dos alunos e que têm, em última análise, de gerir as contradições existentes, nem mais nem menos. Não podem fugir destas evidências. No entanto, também não podem deixar de dizer o que acham, avaliar as directivas e a sua coerência, falar sobre as condições de trabalho, explanar posições, pedir igualmente responsabilidades aos outros sectores que realmente as têm de assumir e exigir ajuda e colaboração, procurando uma cooperação aberta com todos, sejam eles igualmente professores ou não.

Talvez seja outra banalidade dizer-se que não se consegue fazer nada sem os professores, que nenhuma mudança, revisão, reorganização ou reforma pode singrar de facto sem a sua participação activa. Pode ser que seja trivial, mas não é isso que tem sido assumido pelo poder político, antes ou depois do 25 de Abril de 1974. Houve ocasiões em que os professores intervieram mais do que noutras, mas essa evidência relativa à necessidade de envolvimento dos professores nunca foi levada às últimas consequências.

Estamos numa fase em que a presença dos professores do básico e do secundário, níveis de ensino onde se pretendem efectuar mudanças, está muito rarefeita. Qual tem sido a solicitação para a participação destes profissionais na elaboração de finalidades e na delineação de linhas de actuação? Como está a sua representação em órgãos entretanto criados? Quase nula, é a resposta a ambas as perguntas. Tal não tem inibido a APM de se expressar, dirigindo-se às autoridades educativas, respondendo a solicitações da comunicação social ou aceitando convites para intervir oficialmente. A nossa ida à Comissão para a promoção do estudo da matemática e das ciências foi um desses momentos, uma oportunidade para explicar o que tem sido o nosso trabalho e as nossas ideias e opiniões. Será que iremos ver consequências? Isso não sabemos, nem nos foi garantido. O que posso dizer é que acho importante continuar o debate entre nós, condição para reforçar a coerência e força das posições que iremos defender futuramente.

Fernando Nunes
Presidente da APM

ProfMat 2002, em Viseu

José Manuel Duarte

A um mês de distância, o que é que, do ProfMat 2002, me deixou o coração aquecido? Sim, do último, havido na cidade de Viseu, bela, crescida e cheia de rotundas (não gozem com as *n* rotundas viseenses, porque elas são úteis e estão bem desenhadas).

Primeiro que tudo, a alegria de ter revisto fulano(s) e fulana(s), aquelas caras conhecidas que não consigo ligar a nenhum nome. Em especial, ter revisto amigos por cuja saúde temia, o que suplanta o desgosto por não ter revisto alguns amigos que estiveram ausentes.

Que mais salientar? Optei por, num texto naturalmente curto e cingido ao fundamental (não querem saber o que é que eu almocei no dia do encerramento, pois não?), o fazer de forma impressionista, já que um pequeno acidente doméstico recente me obriga a escrever de memória.

Ficção científica

Estive num dos Cursos que, juntamente com o Seminário de Investigação, ocupam os dois dias que precedem os ProfMats. A Ana Isabel Rosendo e o Jaime Carvalho e Silva apresentaram um cenário futurista: conjecturar "teoremas" geométricos com a ajuda do *Sketchpad*, e depois demonstrá-los com um programa de manipulação simbólica, enriquecido com umas *macros* adequadas, pelo Miguel de Guzmán. (Continuo a achar que, se planeado, os Cursos do ProfMat poderiam associar-se a outras formações curtas, sediadas local ou distritalmente, com tema consonante, e assim conceder um crédito oficial aos participantes. Difícil? Sem dúvida! Impossível? Não acredito! Ideia polémica? Claro!...).

A Assembleia da República em Viseu

Nos tempos que correm, era de esperar. A Direcção da APM, pela boca, oficial, do Fernando Nunes e pela posição, oficiosa, da conferência de encerramento, contrapôs-se ao discurso do ministro da Educação: contradições evidentes, e entretanto uma cordialidade mútua estimável. O ministro apresentou algumas ideias fortes mas bastante fragmentadas, o presidente da APM reafirmou o rumo da Associação, criticando alguns aspectos da política educativa actual. Apreciei o facto de ideias terem sido postas em confronto, só gostaria que tivesse havido mais espaço e ocasião para o difícil mas necessário debate dessas ideias.

O Encontro teve, entretanto, alguns bons debates, que tanto aprecio e de que tenho pena de ter estado ausente: o mérito ou os perigos de estudos como o Pisa, e como desejavelmente se articularão, investigação, formação e prática lectiva, por exemplo... (Havendo tantas sensibilidades sobre problemas candentes do ensino da Matemática, nem se compreenderia que não houvesse cada vez mais um esforço para propiciar debates, que só podem enriquecer a democracia da nossa Associação e dinamizar a sua intervenção).

Ciência e arte

Assisti a uma sessão do Eduardo Veloso de que me vou lembrar por muitos anos: Piero de la Francesca, a pintura renascentista italiana e a matemática da perspectiva: os personagens dos quadros a deixarem de ser só Deus, os anjinhos e a Madonna (não é esta, é a outra), multidões e paisagens a ganharem direito à imagem, e nós a vermos, com o Eduardo, a Toscânia, os quadros e as suas cores e a sua gente, real porque em perspectiva: uma revolução em relação a todo o precedente da Humanidade e da Arte, apresentada nas suas explicações matemáticas com o *Sketchpad*. (Pensei: que vídeo maravilhoso para a Universidade Aberta, a RTP, o Ministério, o DES, a APM, ou sei lá quem, gravar e permitir a escolas, professores, alunos e cidadãos terem o mesmo prazer e enriquecimento de que eu, um das poucas centenas de assistentes, pude disfrutar).

Assisti a conferências estimulantes do inglês John Mason, sobre a importância de se estimular a produção de imagens mentais, e do sul-africano De Villiers, sobre como conceber a demonstração em Geometria com a utilização de programas de geometria dinâmica, como o *Sketchpad* ou o *Cabri* (e pude participar numa sessão prática correspondente deste último).

Assisti a uma conferência da Lurdes Serrazina, da Joana Brocado e de um colega investigador estrangeiro, a viver na Holanda, sobre o desempenho de miúdos do 1º ciclo, na resolução de problemas e tarefas matemáticas, desempenho que varia conforme o contexto do enunciado da tarefa.

A cultura, "amiga" do espírito científico

Assisti a uma estupenda conferência do biólogo Alexandre Quintanilha responsável por uma prestigiada instituição com sede no Porto e recente co-autor de linhas orientadoras para enfrentar a droga sobre o risco, e sobre a percepção e a avaliação que fazemos desse risco, risco que está sempre associado à inovação e às descobertas científicas. Esta questão, essencial para a visão da cidadania e para a decisão política, varia enormemente consoante certas variáveis de tipo psicológico, sociológico ou outros, como mostrou Quintanilha, à base de exemplos convincentes.

Adeus, até ao meu regresso

Por fim, direi que as instalações e a alimentação corresponderam (mais uma obra, entre outras, da organização). E, apreciei (embora o porta-moedas disso se ressentisse) a tradicional variedade e qualidade de materiais presentes, da APM, de editoras e outras instituições, estrangeiras inclusivamente: livros, calculadoras, programas, que sei eu? E andei entretido a congeminar soluções para o costumeiro "Problema do ProfMat"...

Numa "nau" tão grande, faltaram-me locais de descanso e convívio, adjacentes às salas das actividades do Encontro (ou fui eu que não os procurei devidamente?).

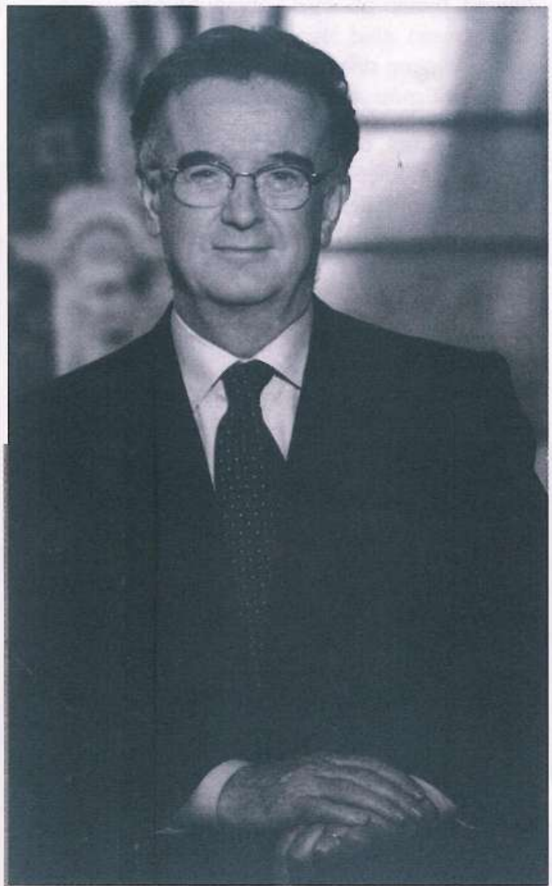
Ficou-me a recordação, em muitos momentos, da frustração, mas também da satisfação, de ter que fazer opções (perder três coisas interessantes, para assistir a outra a decorrer em simultâneo). Daí, tanta coisa boa que o ProfMat teve, e de que eu estive miseravelmente ausente, e este texto comigo, o desgraçado...

Uma recordação geral grata, a do ProfMat 2002, em Viseu.

José Manuel Duarte
Esc. Sec. Fernando Lopes Graça

Mensagem de sua Excelência o Presidente da República ao "XVIII ProfMat"

Viseu, 2 a 4 de Outubro de 2002



É com muito gosto que me associo à realização do "XVIII – ProfMat". Faço-o com renovada satisfação por reconhecer na sua organização uma crescente maturidade e a procura de cada vez maior qualidade por parte da comunidade dos que se interessam e esforçam pela melhoria das condições de aprendizagem da matemática. Tenho pelo vosso trabalho e capacidade associativa grande consideração.

A matemática constitui um conhecimento indispensável à compreensão do Mundo e à acção sobre ele. Representa ainda um modo de pensar rigoroso e organizado. Devemos, por isso, proporcionar a sua aprendizagem a todas as crianças e jovens. Permitam-me, por isso, que partilhe convosco a minha preocupação com os problemas desta área. Acredito que todos podem, e devem, saber matemática e que seremos capazes de ultrapassar as dificuldades existentes.

Considero que a escola deve proporcionar a todos os meios para aprender, para aprender a estudar e para superar as suas dificuldades. Defendo uma escola exigente, relativamente ao trabalho dos alunos, mas exigente também na qualidade do ensino e dos apoios que oferece. Só assim poderemos falar de integração e de realização pessoal de todos os alunos.

O desenvolvimento da sociedade, que todos desejamos, reclama um grande esforço de todos para a construção de uma escola de qualidade. Uma escola onde se aprenda a gostar de trabalhar e aprender.

Quero renovar, hoje, o meu apelo a uma união de esforço de professores e investigadores para uma melhoria das aprendizagens desta disciplina, em todos os níveis de ensino e muito em particular no ensino básico, em que todo o futuro escolar das crianças se decide.

Bem hajam os que debatem e aprendem os pontos de vista e as percepções dos outros. Bem hajam os que se preocupam com o avanço da compreensão da ciência matemática e com a sua importância para a sociedade, neste começo de século.

Desejo um bem merecido sucesso para os vossos trabalhos.

Lisboa, 1 de Outubro de 2002

Com amigas saudações

Jorge Sampaio

Cabri, Cinderella e Sketchpad

Na secção Tecnologias das revistas Educação e Matemática nº 66, 67 e 68 foram publicados três artigos da autoria de Eduardo Veloso, Jorge Nuno Silva e Branca Silveira, respectivamente sobre os programas de geometria dinâmica Sketchpad, Cinderella *e* Cabri. *Com esta mesa redonda Educação & Matemática (EM) propôs aos autores uma discussão em torno das forças e fraquezas de cada um dos programas tendo presente aquilo a que eles se destinam — o ensino da geometria. A mesa redonda, virtual, desenvolveu-se por* mail*, em duas fases: numa primeira fase, os três intervenientes responderam individualmente às questões colocadas por EM, na segunda fase, reagiram às respostas dadas por todos e a algumas observações dos moderadores.*

Educação & Matemática (EM): Depois da apresentação dos programas Sketchpad, Cinderella *e* Cabri *nas revistas nº 66, 67 e 68, é altura de discutirmos como usá-los no ensino da Matemática e da Geometria em particular. Em que níveis de ensino podem ser usados cada um dos programas?*

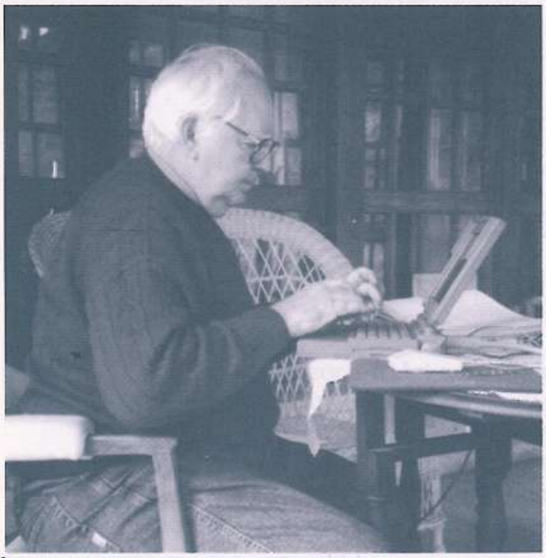
Jorge Nuno Silva (JNS): Em todos. Contudo, a edição em português do *Cinderella* foi distribuída gratuitamente por todas as Escolas Secundárias. A página da WWW dirigida aos utilizadores portugueses (http://cinderella.lmc.fc.ul.pt) está vocacionada para a troca de ideias entre os utilizadores do *Cinderella* dos diversos graus.

Branca Silveira (BS): Todos eles podem ser usados em qualquer nível de ensino, embora me pareça que o Ensino Superior possa ter mais facilidade em recorrer ao *Cinderella*. Claro que o *software* só tem validade de acordo com o que fizermos com ele, mas há algumas funcionalidades que facilitam o tratamento de certos assuntos. Na formação que tenho feito com o *Cabri*, têm aparecido vários formandos com experiência de utilização do *Sketchpad*. Não notei qualquer problema de adaptação ao *Cabri* mas é normal dizerem que acham a filosofia de utilização do *Cabri* mais intuitiva para os mais pequenos, do que a do *Sketchpad*. Nunca encontrei ninguém que utilizasse o *Cinderella*, portanto não posso fazer comparações. Se me fosse pedida uma hierarquia talvez dissesse: Ensino Básico — *Cabri*; Secundário — *Sketchpad*: Superior — *Cinderella*.

Eduardo Veloso (EV): Julgo que em geral os programas de geometria dinâmica, classe à qual pertencem os três apresentados, podem começar a ser usados desde bastante cedo (digamos segundo ciclo do Ensino Básico). Não tenho qualquer experiência educacional com crianças do 1° ciclo nem do 2° ciclo, portanto estou apenas a imaginar que no segundo ciclo se esteja a dar a transição do uso de programas directamente interactivos (jogos e em geral *applets* educacionais — ou seja com *feedback* visual ou sonoro imediato) para programas que exigem, na sua utilização, uma compreensão do funcionamento de *menus*, a "programação mental" de uma sequência de acções e outras coisas deste tipo que pressupõem uma maturidade que na minha ignorância julgo que apenas começa a estar presente nas crianças a partir daquelas idades. No que diz respeito ao *Sketchpad*, programa que conheço muito melhor, estou convicto que pode perfeitamente ser usado a partir do 3º ciclo do Básico e pode (e deveria) ser utilizado daí para a frente — Secundário, Superior (formação inicial de professores, por exemplo) e autoformação dos professores em serviço. Embora julgue que a utilização do *Cabri* é bastante menos intuitiva que a do *Sketchpad*, em diversos aspectos, diria que as suas possibilidades de utilização são semelhantes às do *Sketchpad*. Quanto ao *Cinderella*, acho que nesta versão inicial a sua utilização preferencial deva ser feita de acordo com aquilo que o distingue positivamente dos outros dois programas, ou seja a facilidade de trabalho em geometrias não-euclidianas. Isto, portanto, aponta para uma utilização no Ensino Superior.

EM: Na apresentação de alguns dos programas fala-se em renovação do ensino da geometria. Em que consiste essa renovação e como pode cada um dos programas contribuir para ela?

BS: Pretende-se que o ensino da matemática e não só o da geometria



Eduardo Veloso

tenha um carácter mais experimental, mais centrado na resolução de problemas, na exploração de conceitos, na formulação e testagem de conjecturas, em pequenas investigações. No caso particular da Geometria qualquer *software* de geometria dinâmica contribui decisivamente para todos os aspectos que referi anteriormente. Não faço distinção entre qualquer deles. Como já disse, tudo depende da forma como forem utilizados pelo professor e pelos alunos.

EV: São bem conhecidas as críticas que o movimento da Matemática Moderna (MM) fez ao ensino da geometria que vigorava nos anos 40 e 50. Como dizia Dieudonné em *Royaumont* (a célebre reunião em 1959 que lançou, por assim dizer, a MM) "Julga-se desonroso não poder apresentar aos alunos uma teoria completamente dedutiva a partir dos axiomas fundamentais; como isto é muito difícil para o nível elementar, pensa-se ser preferível passar a uma *escroquerie* intelectual em vez de reconhecer francamente a situação". Este célebre matemático do grupo *Bourbaki* reconhece depois lucidamente que "não se pode desenvolver com proveito uma teoria sob forma axiomática enquanto o aluno não está familiarizado com as questões a que ela se aplica, trabalhando algum tempo numa base experimental ou semi-experimental, fazendo constantemente apelo à intuição". É na linha desta última observação de Dieudonné que os programas de geometria dinâmica podem intervir na renovação do ensino da geometria, fornecendo a alunos e professores uma ferramenta ideal para, usando "constantemente" a intuição, explorarem situações problemáticas de carácter geométrico, desenvolverem investigações, formularem conjecturas e ficarem convictos da sua veracidade ou não, quando encontram contra-exemplos que as refutam. No primeiro caso, serão ainda muitas vezes levados a procurar uma demonstração que explique porque razão tal resultado é verdadeiro. Numa palavra, os programas de geometria dinâmica contribuem para que o ensino da geometria constitua uma verdadeira experiência matemática para os alunos ... não se pode querer melhor renovação para o ensino da matemática do que esta!

Na conferência e no *workshop* de Michael de Villiers (com títulos respectivamente "Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica" e "Repensar a demonstração com o *Geometer's Sketchpad*"), neste ProfMat de Viseu, ficou bem claro como, em particular, o *Sketchpad* pode ser uma ferramenta poderosa nesta renovação.

JNS: O *Cinderella* é um programa de geometria dinâmica muito fácil de usar, muito versátil e matematicamente correcto. Será de grande utilidade para professores e alunos, seja qual for o programa de geometria.

EM: Quer o Eduardo quer a Branca valorizam as experiências de aprendizagem que passam pela experimentação, pela resolução de problemas, pela investigação, formulação e testagem de conjecturas antes de chegar à demonstração. O Jorge Nuno fala sobretudo da facilidade, versatilidade e correcção do programa Cinderella. O que pensa destes aspectos referidos pela Branca e pelo Eduardo?

JNS: Concordo completamente com eles. Nomeadamente com o papel dos programas de geometria dinâmica na elaboração e discussão de conjecturas e problemas.

EM: Uma utilização regular por parte dos alunos, ao longo da escolaridade, de programas de geometria dinâmica será compatível com a tradicional avaliação — escrita, de tempo limitado e com o computador ausente?

JNS: Sim, mas o *Cinderella* está também adaptado a outras formas de avaliação, menos ortodoxas. Os programas destinam-se a ajudar. Com eles só podem os alunos beneficiar. A adequação dos métodos de avaliação é uma questão diferente, que já é problemática mesmo antes de se pensar em introduzir estes programas no dia a dia da prática lectiva.

EV: Esta é uma questão muito importante e decisiva para a referida renovação. Em teoria, apesar da "tradicional avaliação", nada parece impedir — e alguns professores o fazem — a utilização de programas de geometria dinâmica nas suas aulas. Mas, na prática, a "tradicional avaliação" e a interpretação que ela implica para o currículo implementado pela maioria dos professores (independentemente das recomendações incluídas nos próprios programas) são um dos maiores obstáculos a essa utilização regular. E a questão não é a do computador estar ausente dos exames (e portanto dos testes de treino para aqueles). Não me admirava que no futuro os alunos pudessem durante "10 minutos" ir a um computador fazer um exercício qualquer, ficando salva a "honra da casa" das tecnologias, tanto na boca dos Guterres, dos Durões e dos Justinos. A questão principal é que qualquer tipo de avaliação imediata, escrita e de tempo necessariamente limitado tem que ser à base de "exercícios" e "respostas múltiplas" e ignorar o tipo de questões e experiências que precisamente são características da tal renovação e que são estimuladas pelo uso da geometria dinâmica. Há aqui uma contradição fundamental: ou os alunos são treinados para fazer exames e isso consiste em adestrá-los em receitas e técnicas para que possam resolver rapidamente as perguntas postas "sem perderem muito tempo a pensar"; ou fazem experiências matemáticas significativas nas aulas e ganham gosto e proficiência no verdadeiro trabalho matemático — são persistentes, perguntam muitas vezes a si mesmo "e se?", abrindo caminho para questões diferentes das iniciais, tentam vários caminhos e vão aprendendo e ganhando maturidade matemática com os resultados obtidos, embora porventura errados, etc.

Um professor que durante um 12º ano use regularmente nas suas aulas programas de geometria dinâmica e promova a segunda alternativa no seu ensino não pode deixar de sentir uma contradição profunda entre a aprendizagem que os seus alunos estão a fazer e a avaliação a que vão ser sujeitos no fim do ano.

BS: Importa que o aluno adquira os conceitos e os saiba utilizar, quando necessário, na resolução de problemas. Os programas de geometria dinâmica ajudam a construção destes conceitos, que o aluno vai usar quer esteja a utilizar o computador ou o papel e lápis. A utilização destes programas por parte dos alunos é tudo menos "regular" e enquanto este estado de coisas se mantiver, não me parece que haja qualquer incompatibilidade com a avaliação tradicional.

Ainda que a utilização por parte dos alunos passe a ser regular e mesmo que a avaliação continue nestes termos, (se assim acontecer será um enorme disparate!), acho que, mesmo numa avaliação dita tradicional, os alunos serão mais capazes de responder ao que lhes é pedido. Falei em disparate, pois, insistir num tipo de

Jorge Nuno Silva

Branca Silveira

avaliação em que os alunos se limitem a resolver exercícios, mais ou menos rotineiros, é uma perda de esforço e de tempo, quando de certeza os alunos terão muito mais vantagem em investir na resolução de situações problemáticas.

EM: Há algum aspecto no programa que apresentaram que o distinga de forma positiva dos outros? Qual? Porquê?

BS: Já respondi, em parte, a esta questão. Principalmente acho mais intuitivo o trabalho com o *Cabri* do que com os outros programas pois segue uma ordem de selecção de comandos e objectos que é mais "natural" na nossa linguagem corrente.

Ainda uma ou outra nota ao acaso sobre pormenores elementares. No caso de transformações geométricas o *Sketchpad* apresenta a vantagem de se poder transformar de uma só vez um conjunto de objectos. O estudo da Geometria Analítica pode ser mais fácil. Já no caso dos polígonos e das cónicas o *Cabri* tem vantagem. Nas geometrias não euclideanas creio que a vantagem vai para o *Cinderella*. A versão actual do *Cinderella* "perde" muito relativamente aos outros programas por não ter a capacidade de construção de *macros* como no *Cabri*, ou de *scripts* como no *Sketchpad*. Segundo os seus autores a nova versão já vai trazer essa funcionalidade.

O facto de se fazer a selecção dos objectos no *Sketchpad* antes de estar dito o que se quer fazer com eles, pode levar a situações estranhas, como por exemplo, quando se pede a construção de um ponto num objecto e por acaso se "esqueceu" uma selecção feita de vários objectos, num passo anterior.

O *Cabri* apresenta, por vezes, um problema relacionado com os ângulos, em certas situações de experimentação. Um problema semelhante, mas agora relacionado com segmentos, aconteceu-me com o *Cinderella*, na resolução de um problema, que um colega nosso propôs a alguns de nós, embora tenha sido dito que o "problema dos saltos" estava resolvido.

EV: Existem diferenças fundamentais, na minha opinião, entre o *Sketchpad* e os outros dois programas em apreciação (*Cabri* e *Cinderella*) que distinguem positivamente o *Sketchpad*. Indico apenas uma: Interface e tipo de interactividade. Quase que basta olhar para os *menus* dos três programas (*Sketchpad* — Figura 1, *Cabri* — Figura 2, *Cinderella* — Figura 3, para perceber as grandes diferenças no interface.

Enquanto no *Sketchpad* o interface é claro e bem organizado (construções e instrumentos fundamentais euclidianos à esquerda — ponto, régua não graduada e compasso "sem memória"— e menus em palavras em cima — mas quem pode ter dúvidas que *construct* são construções e que *transform* são transformações?) no *Cabri* os ícones ajudam menos do que facilitam. É preciso *clicar* no botão que tem um ponto azul sobre um traço vermelho para perceber que afinal aí está quase tudo, desde recta até polígono regular... E quem diria que uma seta e dois pontos queria dizer transformações? Ao fim de algum tempo habituamo-nos a tudo, mas parece-nos que este interface é bastante menos intuitivo. O *Cinderella* copiou em parte o *Cabri*, mas a profusão de *ícones* obriga a associar (*rollover*) a cada um deles um pequeno texto. Mas o que distinguirá o quarto *icon* da segunda linha ("*draw a parallel line*") e o sétimo da terceira ("define a *parallel line*")? Em parte no *Cabri*, mas sobretudo no *Cinderella*, do ponto de vista *icónico* um ponto vale o mesmo que por exemplo uma cónica, não há distinções claras entre os objectos básicos, por assim dizer, da geometria e os outros. O *menu* em palavras do *Cinderella* não é mais explícito. Que quererá dizer a palavra "*modes*", "modos" na versão portuguesa? Depois de procurar muito e ir ao manual, percebi que modos (ou modos interactivos) quer dizer no fundo "construções" (ponto médio, perpendicular, etc.). Porquê "modos"?

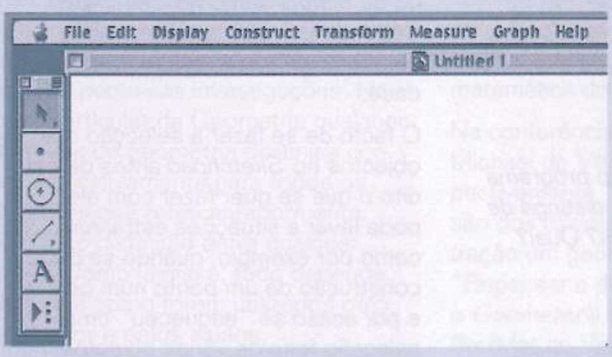


Figura 1. Menu do programa *Geometer's Sketchpad*.

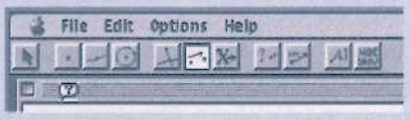


Figura 2. Menu do programa *Cabri Géomètre*.

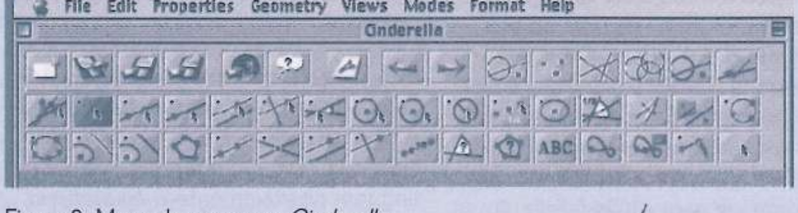


Figura 3. Menu do programa *Cinderella*.

O *Sketchpad* usa o paradigma "primeiro o substantivo, depois o verbo" enquanto o *Cabri* e o *Cinderella* usam o paradigma "primeiro o verbo, depois o substantivo". Que quer isto dizer? Que o *Sketchpad*, conforme é habitual nos programas elementares de computador, como por exemplo nos processadores de texto, escolhe primeiro os objectos geométricos e depois a operação que quer fazer com eles: escolho dois pontos e depois peço o ponto médio, tal como nos processadores de texto selecciono uma palavra e depois escolho itálico. No *Cabri* e no *Cinderella* faço o contrário, escolho perpendicular e depois ando à procura de um ponto e de uma recta para tirar a perpendicular... Parece-me um grande erro de concepção.

Tanto o *Sketchpad* como o *Cabri*, embora com grandes diferenças, podem ser utilizados no ensino da geometria nos ensinos básico e secundário, pois embora não sendo programas perfeitos, não têm insuficiências fundamentais. Isso distingue-os positivamente do *Cinderella*, que na sua versão actual (julgo que a primeira) não tem comandos para rotações nem para dilações, por exemplo, nem é capaz de construir *macros* ou *scripts*, ou seja, não se pode estender com novas ferramentas construídas pelo utilizador. Os aspectos positivos do *Cinderella* (geometrias não euclidianas e facilidade de colocação na Web) não compensam, no que diz respeito ao ensino da geometria naqueles níveis, as deficiências apontadas.

JNS: O *Cinderella* é o programa mais simples e intuitivo de usar. O utilizador só precisa de *clicar* o rato, nada mais. As crianças do Básico aderem a este *software* imediatamente. O *Cinderella* produz construções interactivas com uns *cliques* do rato e mais um clique exporta uma construção para a WWW, na forma de um *applet Java* interactivo. Em particular, os exercícios interactivos, de correcção automática, são muito fáceis de criar e exportar para a WWW.

O *Cinderella* está escrito em *Java*, pelo que se pode instalar em qualquer sistema operativo, e as suas construções podem ser partilhadas por todos, independentemente do computador ou sistema operativo em que trabalhem. O *Cinderella* opera em três Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica. Todas as construções são "traduzíveis" noutra geometria com um clique do rato. O *Cinderella* está traduzido em português e encontra-se distribuído por todas as Escolas Secundárias do país. Há uma página na *web*, destinada aos utilizadores de língua portuguesa (http://cinderella.lmc.fc.ul.pt), onde se podem partilhar (*upload* e *download*) construções geométricas, problemas, textos interactivos, etc.

EM: O facto de o Sketchpad usar o paradigma "primeiro o substantivo e depois o verbo" referido pelo Eduardo, por exemplo só disponibilizando a opção de traçado de perpendicular a uma recta passando por um ponto após a selecção desses objectos, não exigirá à partida do aluno maiores conhecimentos de matemática? É uma vantagem ou desvantagem?

BS: Não concordo com o que disse o Eduardo sobre este assunto. A vantagem que eu vejo em seleccionar primeiro a construção e depois os objectos é apenas porque acho que se segue a linguagem natural. Na resolução de um problema dizemos: "agora vou precisar de traçar uma perpendicular por este ponto a esta recta" ou "preciso de traçar uma perpendicular a esta recta por este ponto", por exemplo, e o *Cabri* permite estas duas sequências. E se o Eduardo está de acordo com a técnica do processador de texto, então também deve estar de acordo com esta sequência. No processador de texto a lógica é a mesma (estou a referir-me à lógica de pensamento e não à sequência de *cliques*). Dizemos "esta palavra vai ficar em itálico" e então seleccionamos primeiro a palavra. Se seguíssemos a lógica do *Sketchpad* teríamos que dizer "em itálico vai ficar esta palavra" Não vejo diferença nos dois casos.

O aluno ao utilizar qualquer dos programas tem que ter os conhecimentos matemáticos para resolver as situações propostas. Os programas são apenas uma ferramenta muito poderosa que o ajuda a resolver o seu problema e que lhe pode dar pistas para ir muito mais além. O resto é técnica.

EV: Julgo que não é num programa de geometria dinâmica que um aluno deve adquirir uma primeira noção do que é, por exemplo, tirar por um ponto a perpendicular a uma recta. Quando está no meio de uma construção, de uma investigação ou da resolução de um problema, o aluno deve ter uma ideia do quer fazer, do que quer experimentar. A ideia do aluno não pode ser, não deve ser, talvez tirando uma perpendicular que não sei bem o que é, nem sei a quê, nem por onde deve passar... Deve ser qualquer coisa do tipo: talvez tirando uma perpendicular por este ponto àquela recta eu consiga perceber o que se passa, por isso vou experimentar. Se selecciona apenas um ponto (e não a recta) a perpendicular não está acessível e é uma aprendizagem importante para ele perceber que o computador é estúpido e precisamos de lhe dar os dados todos para ele funcionar. Mais importante que tentar resolver o problema por tentativas, *clicando* primeiro em perpendicular e depois indo fazer perpendiculares a qualquer coisa passando por qualquer coisa sem saber bem porquê e para quê ... .

EM: Pelo que conhecem e pelo que foi dito dos três programas, o que aproveitariam de cada um (ou o que não abdicariam do que conhecem melhor) para construir um Ambiente de Geometria Dinâmica ideal?

JNS: Creio que a próxima versão do *Cinderella*, com as suas desvantagens resolvidas (ausência de transformações geométricas e de *scripts*, por exemplo) e com muitas outras funcionalidades disponíveis, constituirá um fantástico ambiente para a Geometria (e não só). Esta nova versão será disponibilizada gratuitamente a todos os que disponham da versão primitiva, por *download* directo da página WWW do *Cinderella*.

EV: Aproveitaria os *menus* e as capacidades do *Sketchpad*, talvez juntasse a capacidade do *Cabri* para "verificar propriedades" (embora talvez por não conhecer tenha algumas dúvidas sobre a sua real utilidade) e do *Cinderella* juntava com certeza a capacidade de apresentar as três geometrias simultaneamente e a facilidade de colocar *applets Java* na *Web* (mas apenas se a programação em *Java* não fosse a causa — o que veremos nas próximas versões — da falta de *macros* ou *scripts* e outras grandes insuficiências da presente versão).

BS: Estou de total acordo com o Eduardo quando diz que o *Cinderella* tem *ícones* a mais. Pode tornar-se de facto muito confuso. Já não concordo quando diz que os *ícones* do *Cabri* só complicam. Respondendo à questão colocada e apenas pelo que conheço dos três programas, rejeitava o interface do *Cinderella*, aproveitava construções elementares, polígonos e cónicas do *Cabri*, parte da geometria analítica e talvez animações do *Sketchpad*, geometrias não euclidianas e a facilidade de colocação na *Web* do *Cinderella* e naturalmente nunca abdicaria das *macros* do *Cabri* ou dos *scripts* do *Sketchpad*.

A Mesa Redonda foi conduzida por
Adelina Precatado
Esc. Sec.de Camões
e José Duarte
ESE de Setúbal

APM
Publicações

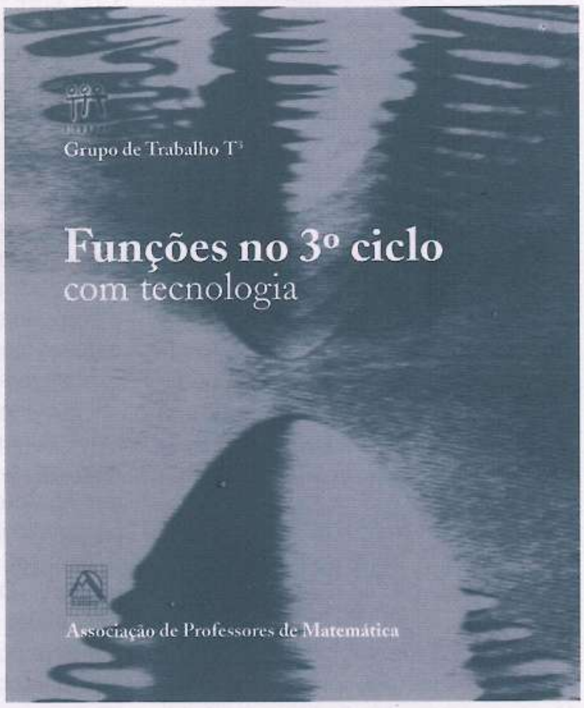
Funções no 3º ciclo com tecnologia

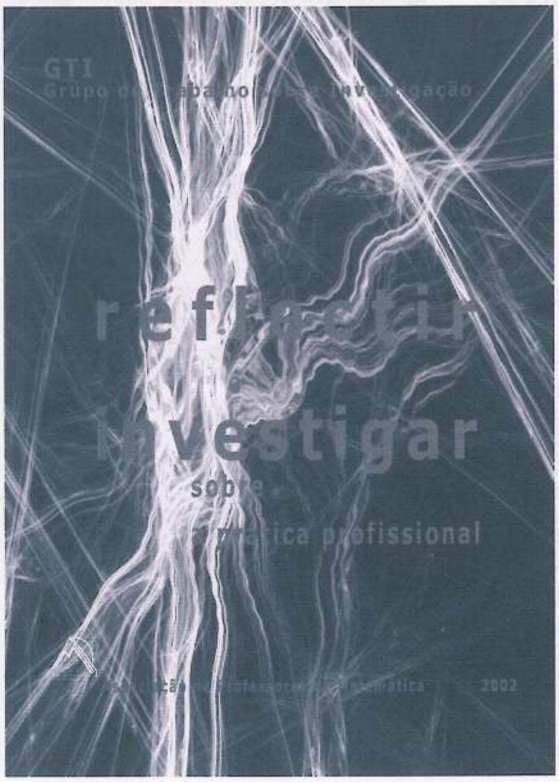
Grupo de Trabalho T^3

152 pp. APM, 2002

Sócio: €4,00
PVP: €8,00

Esta publicação reúne um conjunto de actividades destinadas à utilização na sala de aula, centradas no tema das Funções e visando o 3º ciclo do ensino básico e a utilização de tecnologia. A quase totalidade das actividades dirige-se às calculadoras gráficas e várias propostas estão associadas a experiências de recolha de dados, com ou sem sensores. Os enunciados das actividades vêm acompanhados de notas para os professores. Como as actividades foram experimentadas em ambiente de sala de aula, no âmbito de Oficinas de Formação, a segunda parte desta publicação pretende ilustrar e comentar essa experimentação.





Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional

Grupo de Trabalho sobre Investigação

335pp. APM, 2002

Sócio: €9,10
PVP: €18,20

Todo o campo de prática social constitui um terreno fértil para pesquisa. Investigando as suas práticas, os profissionais da educação—professores, orientadores de estágio, formadores ou técnicos da administração educativa—aprofundam a compreensão dos problemas que se lhes colocam e testam o alcance de estratégias de intervenção. A investigação sobre a prática, realizada individualmente ou em equipas colaborativas, promove o desenvolvimento profissional dos respectivos protagonistas e dá uma maior capacidade às suas organizações para lidarem com os problemas emergentes. Esta investigação constitui, também, um contributo para o conhecimento, por parte da comunidade, dos problemas referentes ao campo profissional da educação. *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*, é um livro que ganhou forma a partir de uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores de diversos níveis de ensino, que nos interpela sobre o papel da investigação na cultura profissional dos professores.

O mundial de futebol e os aniversários

José Paulo Viana

Neste artigo ilustra-se de uma forma particularmente interessante algumas situações probabilísticas em que a nossa intuição nos engana, evidenciando a necessidade de cidadãos estatisticamente literados.

De vez em quando surge-nos pela frente um problema que nos seduz, ou porque gostamos imediatamente do desafio que ele nos lança ou porque ao resovê-lo descobrimos aspectos completamente inesperados. Um dos meus favoritos é o dos "Aniversários no campo de futebol":

> *Durante um jogo de futebol há 23 pessoas dentro do campo: 11 jogadores de cada lado e mais o árbitro. Qual é a probabilidade de, nesse grupo de pessoas, haver duas (pelo menos) que fazem anos no mesmo dia?*

Leitor, se nunca ouviu falar neste problema, faça uma estimativa dessa probabilidade. Pense um bocadinho e, antes de continuar a ler, diga se lhe parece ser muito ou pouco provável haver duas pessoas no campo que fazem a sua festa de anos na mesma data.

Bem, temos apenas 23 pessoas, cada uma delas com 365 hipóteses de aniversário (sim, Celina, sim, eu sei que também se pode fazer anos a 29 de Fevereiro mas, para simplificar os cálculos, vamos apenas considerar os outros 365 dias...). Praticamente toda a gente a quem esta questão é colocada pela primeira vez responde que a probabilidade é pequena. É que 23 datas em 365 possíveis não são lá muitas, não. A probabilidade de haver repetição não parece ser muito grande. Pelo contrário, "deve" ser pequena. A nossa intuição diz-nos que as possibilidades de haver aniversários repetidos não são lá muitas.

Passemos aos cálculos

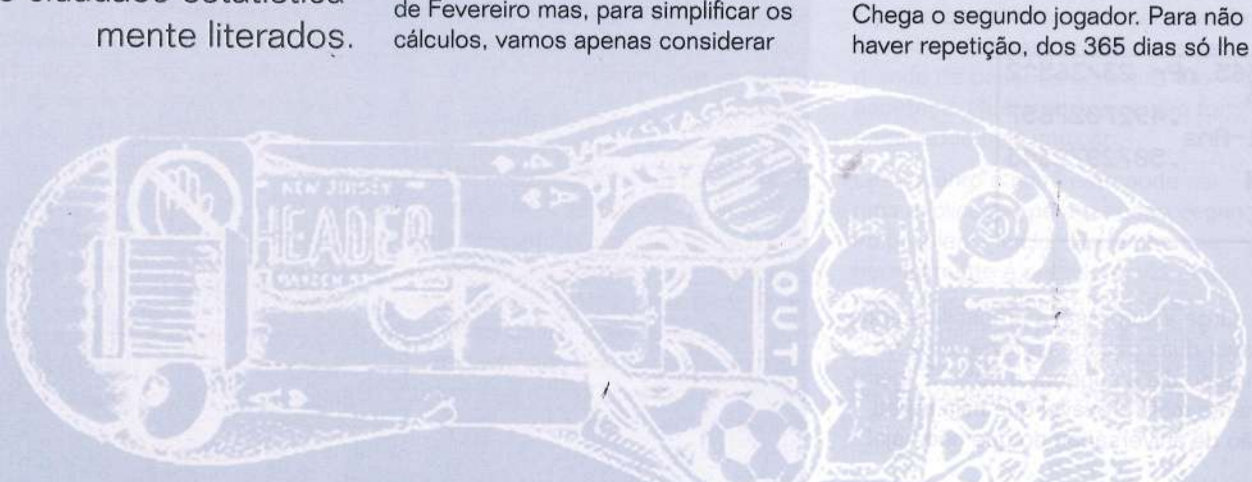
Há, como sempre, vários processos de chegar ao resultado mas, em todos eles, é mais simples começar por calcular a probabilidade de não haver aniversários repetidos.

1° Processo

Vamos analisar os aniversários um de cada vez, de modo a não haver repetição.

O primeiro jogador pode fazer anos em qualquer dia. Dos 365 dias possíveis, servem-lhe todos: 365/365.

Chega o segundo jogador. Para não haver repetição, dos 365 dias só lhe



servem 364, ou seja, 364/365.

Para o terceiro jogador, já só servem 363 dias: 363/365.

E assim sucessivamente, até ao 23° jogador, para o qual há 343 dias disponíveis: 343/365.

A probabilidade de não haver aniversários repetidos é então: 365/365 x 364/365 x 363/365 x ... x 343/365.

A probabilidade P de haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é o complementar deste valor: P = 1 – 365/365 x 364/365 x 363/365 x ... x 343/365.

Não façamos este cálculo (que poderia dar um bocadinho de trabalho) e passemos a outra maneira de resolver o problema.

2° Processo

Para não haver aniversários repetidos, calculemos os casos possíveis e os casos favoráveis para o grupo de 23 pessoas.

Cada pessoa tem 365 possibilidades de dia de anos, logo os casos possíveis são 365^{23}.

Os casos favoráveis (para a não repetição) são todos os conjuntos de 23 datas diferentes, ou seja, ${}^{365}A_{23}$.

A probabilidade de não haver aniversários repetidos é então: ${}^{365}A_{23}/365^{23}$.

A probabilidade P de haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é o complementar deste valor: $P = 1 - {}^{365}A_{23}/365^{23}$.

Reparemos que esta expressão é equivalente à que obtivemos pelo primeiro processo.

Os cálculos podem ser feitos rapidamente com a calculadora.

```
365 nPr 23/365^2
3
          .4927027657
1-Ans
          .5072972343
█
```

E surge a surpresa: a probabilidade de haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é superior a 50%. É ligeiramente mais provável que haja repetição de aniversários do que não haja!

Grupo G

Itália

Nº	POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR	BUFFON	28-01-1978	Juventus	26	0
2	D	PANUCCI	12-04-1973	AS Roma	24	2
3	D	MALDINI	26-06-1968	AC Milão	122	7
4	D	COCO	08-01-1977	FC Barcelona	13	0
5	D	CANNAVARO	13-09-1973	Parma	58	0
6	M	ZANETTI	14-04-1977	Inter Milão	4	0
7	A	DEL PIERO	09-11-1974	Juventus	49	17
8	M	GATTUSO	09-01-1978	AC Milão	13	1
9	A	INZAGHI	09-08-1973	AC Milão	38	15
10	A	TOTTI	27-09-1976	AS Roma	29	5
11	M	DONI	01-04-1973	Atalanta	3	1
12	GR	ABBIATI	08-07-1977	AC Milão	0	0
13	D	NESTA	19-03-1976	Lazio SS	43	0
14	M	DI BIAGIO	03-06-1971	Inter Milão	28	2
15	D	IULIANO	12-08-1973	Juventus	16	1
16	M	DI LIVIO	26-07-1966	Fiorentina	38	0
17	M	TOMMASI	17-05-1974	AS Roma	14	1
18	A	DELVECCHIO	07-04-1973	AS Roma	16	3
19	M	ZAMBROTTA	19-02-1977	Juventus	23	0
20	A	MONTELLA	18-06-1974	AS Roma	14	3
21	A	VIERI	12-07-1973	Inter Milão	24	10
22	GR	TOLDO	02-12-1971	Inter Milão	22	0
23	D	MATERAZZI	19-08-1973	Inter Milão	7	0
Treinador		**Giovanni Trapattoni**				

Equador

Nº	POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR	CEVALLOS	17-04-1971	Barcelona SC	62	0
2	D	POROZO	13-04-1974	Emelec	26	0
3	D	HURTADO	16-08-1974	Barcelona SC	90	4
4						
5	M	OBREGON	12-05-1972	LDU Quito	40	0
6	D	GUERRON	12-10-1976	Deportivo Quito	23	0
7	M	ASENCIO	26-04-1975	Barcelona SC	4	0
8	D	GOMEZ	20-04-1972	Barcelona SC	8	1
9	A	KAVIEDES	24-10-1977	Barcelona SC	26	10
10	M	AGUINAGA	09-07-1968	Necaxa	92	20
11	A	DELGADO	23-12-1974	Southampton	46	21
12	GR	IBARRA	08-09-1969	El Nacional	21	0
13						
14	M	BURBANO	15-02-1969	El Nacional	18	0
15	D	MARLON AYOVI	27-09-1971	Deportivo Quito	26	0
16	M	CHALA	29-06-1971	El Nacional	64	6
17	D	ESPINOZA	12-04-1977	Aucas	19	1
18	A	CARLOS TENORIO	14-05-1979	Deportivo Quito	9	2
19	M	MENDEZ	16-03-1979	Deportivo Quito	24	2
20	M	EDWIN TENORIO	16-06-1976	Barcelona SC	33	0
21	M	SANCHEZ	19-06-1974	Emelec	35	3
22	GR	VITERI	12-12-1981	Emelec	0	0
23	D	WALTER AYOVI	11-08-1979	Emelec	2	0
Treinador		**Dario Gomes**				

Os aniversários dos jogadores do Grupo G (*In* A Bola, 25 Maio 2002).

Este resultado vai completamente contra a nossa intuição. Como é que, havendo tantos dias possíveis para se fazer anos, é mais fácil encontrar repetições? Mais à frente tentaremos dar uma explicação para isto.

Notemos que um grupo de 23 pessoas é o menor em que a probabilidade de haver repetições ultrapassa 50%.

Os aniversários no Mundial 2002

Como o resultado é surpreendente (e há mesmo quem, depois de efectuados os cálculos, ache que se deve ter cometido algum erro), apetece logo ir verificá-lo experimentalmente. Uma hipótese simpática, para nós professores, seria ir à caderneta dos nossos alunos e, em cada turma, escolher os 23 primeiros e anotar as datas de nascimento.

No entanto, em Maio deste ano, nas vésperas de começar o Mundial de Futebol, lembrei-me que seria interessante aproveitar os jogadores dos 32 países participantes. Por uma excelente coincidência, cada país podia levar um conjunto de exactamente 23 jogadores: o ideal para este problema. Sabia também que os jornais desportivos costumam trazer alguns dados sobre os jogadores participantes. Como semanalmente costumo jogar futebol com um grupo de amigos, alguns dos quais fanáticos deste desporto, expliquei-lhes o que iria fazer e pedi-lhes para que estivessem atentos e me arranjassem o que eu queria. Passados poucos dias, o António Madeira apareceu-me com as fotocópias de duas páginas de "A Bola" com os aniversários de todos os jogadores.

É sempre uma emoção partir para esta verificação. É que, mesmo sabendo o resultado teórico, continuamos a não acreditar verdadeiramente que apareçam repetições em cerca de metade das equipas.

O primeiro país da lista era a França. E começámos bem: Vieira e Zidane fazem ambos anos a 23 de Junho!

E continuámos. Com aniversários repetidos havia ainda: Dinamarca, África do Sul, Brasil, Polónia, Estados Unidos, Alemanha, Irlanda, Argentina, Nigéria, Suécia, Equador, Croácia, México, Japão e Tunísia.

Ou seja, em metade das equipas verificava-se o que procurávamos. Exactamente o valor esperado. Bela coincidência!

Mas ainda havia melhor. Em três dos países (Brasil, Polónia e Tunísia) havia dois pares de jogadores com o

Croácia

Nº	POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR	PLETIKOSA	08-01-1979	Hajduk Split	17	0
2	D	SERIC	15-01-1979	Verona	8	0
3	D	SIMUNIC	18-02-1978	Hertha Berlim	6	0
4	D	TOMAS	06-03-1976	Vicenza	17	1
5	M	RAPAIC	16-08-1973	Fenerbahce	23	1
6	D	ZIVKOVIC	15-11-1975	Bayer Leverkusen	15	1
7	M	VUGRINEC	24-03-1975	Lecce	21	7
8	M	PROSINECKI	12-01-1969	Portsmouth	48	10
9	A	SUKER	01-01-1968	Munique 1860	68	45
10	[redacted]					
11	A	BOKSIC	21-01-1970	Middlesbrough	36	10
12	GR	BUTINA	30-03-1974	Dinamo Zagreb	7	0
13	M	STANIC	10-04-1972	Chelsea	43	7
14	M	SOLDO	02-11-1967	Estugarda	59	3
15	D	SARIC	04-08-1972	Panathinaikos	25	0
16	M	VRANJES	31-01-1980	Bayer Leverkusen	7	0
17	D	JARNI	26-10-1968	Panathinaikos	78	1
18	A	OLIC	14-09-1979	NK Zagreb	4	1
19	A	VLAOVIC	07-08-1972	Panathinaikos	50	15
20	D	SIMIC	12-11-1975	Inter Milão	48	1
21	D	ROBERT KOVAC	06-04-1974	Bayern Munique	19	0
22	[redacted]					
23	GR	VASILJ	06-07-1975	NK Zagreb	2	0
Treinador		Mirko Jozic				

México

Nº	POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR	PEREZ	01-02-1973	Cruz Azul	37	0
2	D	GABRIEL DE ANDA	05-06-1971	Pachuca	15	1
3	[redacted]					
4	M	MARQUEZ	13-02-1979	AS Monaco	36	4
5	D	VIDRIO	23-08-1972	Pachuca	27	1
6	M	TORRADO	30-04-1979	FC Sevilha	28	2
7	M	MORALES	10-10-1975	Guadalajara	17	1
8	M	GARCIA ASPE	11-05-1967	Puebla	108	22
9	[redacted]					
10	A	BLANCO	17-01-1973	Valladolid	75	16
11	M	LUNA	08-09-1974	Necaxa	15	1
12	GR	SANCHEZ	21-09-1973	Guadalajara	22	0
13	M	MERCADO	21-12-1968	Atlas	18	0
14	M	VILLA	02-04-1973	America	46	0
15	A	HERNANDEZ	22-12-1968	America	85	35
16	D	CARMONA	22-08-1975	Toluca	56	0
17	A	PALENCIA	28-04-1973	Espanhol	67	9
18	M	JOHAN RODRIGUEZ	15-08-1975	Santos Laguna	14	1
19	M	CABALLERO	05-02-1971	Pachuca	5	0
20	D	BROWN	28-01-1979	Cruz Azul	8	0
21	A	ARELLANO	08-05-1973	Monterrey	49	5
22	D	ALBERTO RODRIGUEZ	01-04-1974	Pachuca	13	0
23	GR	JORGE CAMPOS	15-10-1966	Pumas UNAM	123	0
Treinador		Javier Aguirre				

mesmo aniversário. Se um par já nos surpreende, dois pares deixam-nos de boca aberta! Mas, do ponto de vista das probabilidades, também isto era de esperar. Não vamos apresentar aqui os cálculos porque são um pouco complicados, mas a probabilidade de haver mais do que uma coincidência de aniversários num grupo de 23 pessoas é de cerca de 1/9. Portanto, neste conjunto de 32 equipas, o número esperado de países com dupla repetição é 32 x 1/9 ≈ 3,56, ou seja 3 ou 4. Foi o que aconteceu!

É tão bonito ver as probabilidades a funcionar ...

Quem faz a festa comigo?

Aproveitei o facto de ter as datas de nascimento destas 23 x 32 = 736 pessoas aparecidas ao acaso para investigar outro problema relacionado com aniversários:

Qual é a probabilidade de haver neste grupo alguém que faz anos no mesmo dia que eu?

Quantas pessoas é de esperar que apareçam com o mesmo dia de aniversário que eu?

Para responder à primeira pergunta, é novamente mais fácil calcular a probabilidade de não haver ninguém a fazer anos comigo.

A probabilidade de uma pessoa não fazer anos no mesmo dia que eu é 364/365.

A probabilidade de nenhuma de duas pessoas fazer anos no mesmo dia que eu é 364/365 x 364/365.

Para a grupo das 736 pessoas, a probabilidade de nenhuma fazer anos no mesmo dia que eu é $(364/365)^{736}$.

A probabilidade de haver alguém a fazer anos comigo é: $1 - (364/365)^{736} \approx 0{,}867$.

```
(364/365)^736
        .132760881
1-Ans
        .867239119
■
```

Ou seja, é bastante provável que isso aconteça (mais de 86%). Só falha, em média, uma vez em cada 7 ou 8.

E quantos jogadores é de esperar que façam a festa no mesmo dia que eu?

Basta multiplicar o número de jogadores pela probabilidade de terem nascido no mesmo dia que eu: 736 x 1/365 ≈ 2,016.

Bem, deverá haver dois jogadores nestas condições.

E lá fui procurar.

Como esperado, havia quem festejasse comigo.

E quantos eram eles? Exactamente dois: o uruguaio Rodriguez e o brasileiro Edilson.

Ai, é tão bonito ver as probabilidades a funcionar...

Festa num grupo mais pequeno

Vimos que, num grupo de 736 pessoas, é muito provável (86,7%) que haja alguém a fazer anos no mesmo dia que nós. Se o grupo for menor, a probabilidade diminui, é claro. Então, podemos pôr a seguinte questão:

Qual é a menor dimensão de um grupo para que a probabilidade de haver alguém a fazer a fazer anos connosco seja superior a 50%?

Se o grupo procurado tiver N pessoas, terá de ser $1 - (364/365)^N = 0{,}5$ ou $(364/365)^N = 0{,}5$.

Aplicando logaritmos: N.log (364/635) = log 0,5.

Podemos resolver rapidamente esta equação com a calculadora:

```
log(0.5)/log(364
/365)
        252.6519888
■
```

N ≈ 253,65

Só com 253 pessoas é que a probabilidade de haver alguém a fazer anos no mesmo dia que nós ultrapassa os 50%.

E é isto que a nossa intuição nos diz: é preciso um grupo relativamente grande de pessoas para que isto aconteça. Neste problema não fomos enganados pela intuição.

Ora, quanto a mim, esta pode ser uma explicação para o nosso engano no problema inicial. Sabemos que normalmente é preciso muita gente até encontrar alguém que faça anos connosco. E generalizamos para os outros. Portanto, num tão pequeno grupo de 23 pessoas "não

deve" haver aniversários repetidos. Esquecemos é que, para não haver repetições: eu não posso fazer anos com nenhum dos outros 22, nem o segundo do grupo com os restantes 21, nem o terceiro com 20 seguintes, e assim sucessivamente. Ou seja, são muitas coisas que não podem acontecer — cada uma delas pouco provável, mas são muitas...

Festa todos os dias?

Voltemos aos 736 jogadores do Mundial 2002.

Outra questão se pode colocar:

Será que neste grupo haverá festas de anos todos os dias?

Reparemos que o número de jogadores é ligeiramente superior ao dobro do número de dias do ano, portanto há gente mais do que suficiente para isso.

Que lhes parece? Será provável que isto aconteça?

Foi o que fui verificar.

Bem, há muitos dias sem ninguém a festejar o seu aniversário. São exactamente 49. Estamos ainda longe de preencher o ano todo.

Aliás, não há sequer um mês completo. Os melhores são Março, Agosto e Setembro, cada um deles com dois dias sem ninguém a fazer anos. O pior é Novembro, em que há 9 dias sem aniversários.

Calcular a probabilidade de todos os dias do ano serem dias de festa num grupo de 736 pessoas não é nada fácil de calcular.

Mas podemos colocar outra questão:

Em média, quantas pessoas é preciso juntar para ter pelo menos uma a fazer anos em cada dia?

Este é o famoso problemas das colecções: Para fazer uma colecção de N objectos que se vão obtendo aleatoriamente, em média quantos objectos é preciso juntar?

O problema foi exaustivamente estudado por matemáticos ao longo do tempo e a resposta obtém-se usando uma fórmula bastante simpática e simples mas cuja demonstração já não me lembro onde encontrei (e que não deve ser lá muito fácil). A média M de elementos de uma colecção para ela estar completa é

$$M = N \sum_{(k=1)}^{N} \frac{1}{k}$$

Portanto, para preencher todos os dias dos anos, em média, é preciso juntar um número de pessoas dado por:

$$M = 365 \sum_{(k=1)}^{365} \frac{1}{k} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{365})$$

Para fazer este cálculo podemos voltar a usar a nossa sempre útil calculadora gráfica:

```
sum(seq(1/X,X,1,
365))
        6.478482256
Ans*365
        2364.646023
■
```

Ou seja, é preciso juntar um grande grupo de pessoas. Em média, temos de arranjar um grupo de 2365 pessoas para que haja sempre alguém a fazer anos em cada dia.

Por fim, só mais algumas curiosidades sobre as datas de nascimento dos jogadores que participaram no Mundial de Futebol de 2002.

O mês com mais aniversariantes é Agosto (88) e com menos é Novembro (39).

Os dias com mais pessoas a festejar o seu aniversário são 23 de Junho, 2 de Agosto, 16 de Agosto e 15 de Outubro, todos eles com 7 jogadores.

E, atenção Celina, o guarda-redes sueco Kihlstedt faz anos a 29 de Fevereiro!

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira, Lisboa

Olímpiadas ibero-americanas de matemática

A equipa portuguesa presente nas Olimpíadas ibero-americanas de matemática, realizadas, em El Salvador, conseguiu duas medalhas de bronze e uma menção honrosa. Essas medalhas foram obtidas por Andreia Maria Hortense Gomes (aluna do 12° ano da escola secundária Frei Gonçalo de Azevedo, São Domingos de Rana) e por Domingos José Ramos Lopes (aluno do 10° ano da escola secundária da Gafanha da Nazaré); a menção honrosa foi atribuída a Luís Alexandre Meira Ferreira Pereira (aluno do 11° ano da escola secundária José Gomes Ferreira, Lisboa).

Os nossos alunos sabem a "tabuada"? E o que é "saber" a tabuada? E aplicá-la?

J. Carlos Frias
Mª Carolina Marques

Durante o Verão do ano passado esteve em foco o fraco desempenho dos estudantes portugueses.

Em Agosto de 2001, nas páginas do jornal *Público*, o seu director e, depois, várias personalidades ou simples leitores, debateram o que está mal no ensino e aprendizagem da matemática, também a propósito da publicação das listas ordenadas (*rankings*) de escolas.

Uma coisa que nos despertou a atenção foi a insistência na chamada falha da *tabuada* por parte de personalidades tão responsáveis como o director do Público, a presidente da SPM e o, então, ministro da Educação (entre outros). Certamente, querendo usar uma imagem forte — mas fazendo-o simplisticamente — resumiam o fenómeno da descida de nível educativo, no que toca à nossa disciplina, quase com a mesma "boca" que se pode ouvir a uma mesa de café: "*Eles* agora nem a tabuada sabem!"

É claro que, se um indivíduo não domina a tabuada (as tábuas de multiplicar) terá dificuldade no cálculo mental e no cálculo aritmético em geral. Terá dificuldades em estimar quanto custa 2,5 Kg de certa mercadoria, ou quanto cabe a cada um de cinco amigos ao dividir em partes iguais um lucro ou uma despesa. E por aqui fora. (Se entra aqui, ou não, a questão da calculadora, para alguns a verdadeira razão do dito desconhecimento da tabuada, não foi objecto de investigação. Também se pode argumentar que a presença da calculadora pode induzir *mais*, e não *menos*, treino da estimativa, etc.)

Será verdade que os nossos alunos não dominam a tabuada? E que a esse *handicap*, esse obstáculo, se deve

4 ESPAÇO PÚBLICO
PÚBLICO • SÁBADO, 4 AGO 2001

INUMERACIA

Foram maus, muito maus, os resultados a Matemática no 12º ano. Talvez porque damos pouca atenção ao cálculo, à aritmética, à tabuada, nos primeiros anos de escolaridade.

A história é real, mas podia passar-se em qualquer loja de um qualquer centro comercial, com uma qualquer "rapariguinha do 'shopping'". Foi assim: no momento do pagamento da mercadoria — três simples peças de roupa — o sistema informático foi abaixo; aflita, a empregada perguntou à cliente se não podia voltar mais tarde: é que nem calculadora a pilhas tinha, isto é, não tinha forma de fazer a conta... A cliente pediu então um papel e uma caneta e fez ela o cálculo, perante a vergonha da rapariga, pagou e saiu.

Na caixa do hipermercado ou para pagar o almoço já muitas vezes todos nos defrontámos com a dificuldade de quem nos atende em fazer o mais simples dos cálculos, ou para verificar que troco tem a entregar. Esta pequena história apenas ilustra o limite da ignorância a que se chegou, apenas mostra a dificuldade que jovens com o nono ano — no mínimo — têm em realizar operações de aritmética elementar. Mais: revela a aversão a números de quem deveria estar habituado a lidar com eles.

Editorial

Esta pequena história atesta que temos um problema de "inumeracia" porventura bem mais grave do que os conhecidos problemas de iliteracia. Uma inumeracia que também se recorda quando se olha para as médias dos exames de Matemática do 12º ano, que este ano caíram para 7,4 valores. Quando se verifica que sete em dez alunos obtiveram na disciplina nota negativa.

O que é afinal saber a tabuada.

"É responder 3 x 4, 12, 3 x 5, 15, etc.? E se responder certo 97 vezes e errar 3: conclui-se que sabe ou que não sabe a tabuada? E se souber a tabuada empinada mas não souber aplicá-la a uma situação de divisão (30 a dividir por 6 são ...) ou de estimativa (7,2 vezes 4 é o dobro do 3,6 vezes ...) ?"

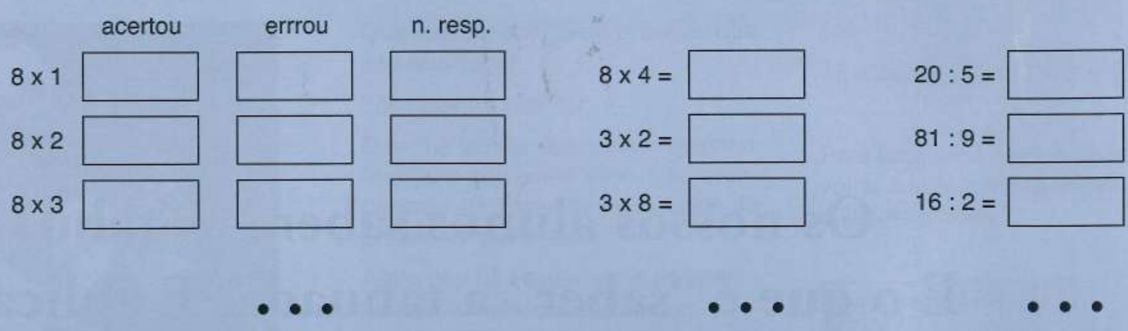


Figura 1. A *tabuada do 8*, algumas perguntas de *tabuada diversa por escrito salteada* e outras de *divisões salteadas*.

o seu mau desempenho em tarefas como o cálculo mental, as estimativas, a feitura de uma divisão com papel e lápis, e por aqui fora? Como pensámos contribuir, com uma simples investigação, para a elucidação desta momentosa questão?

Vejamos: é verdade que, se $a \Rightarrow b$, $\sim b \Rightarrow \sim a$ ...

Ou, se a antecedente fôr composta:

se $(a_1 \wedge a_2 \wedge ...) \Rightarrow b$, $\sim b \Rightarrow \sim a_1 \vee \sim a_2 \vee$ ...

Se a tabuada (a competência em *tabuada*) fosse a única causa presente no processo que vai das *competências inferiores* para as *superiores*, seria aplicável a primeira regra.

No entanto, encontramos uma generalidade de alunos que sabem a tabuada mas não sabem aplicá-la. Fica contraditada $a \Rightarrow b$ e também a sua equivalente $\sim b \Rightarrow \sim a$ ... (Não ser competente nas competências superiores não implica não ser competente nas competências inferiores ...)

Uma explicação está contida na nossa hipótese de trabalho:

A nossa hipótese, sugerida pela evidência do dia-a-dia da leccionação, é que a competência em *tabuada* é apenas um dos elementos em jogo, e falha muito menos do que as "análises" simplistas fazem supôr.

A ser assim, claro, as causas das fraquezas têm de ser procuradas noutros elementos/factores.

Ou seja, aplicar-se-à a segunda das regras atrás:

se $(a_1 \wedge a_2 \wedge ...) \Rightarrow b$, $\sim b \Rightarrow \sim a_1 \vee \sim a_2 \vee$ ...

Nesta nossa investigação, que teve características exploratórias, e que outros prosseguirão e melhorarão, quisemos contribuir para a resposta à pergunta: "*Eles* sabem ou não sabem a tabuada?"

Claro que, logo na fase do desenho da investigação nos defrontámos — como o colega leitor já adivinhou — com a questão de saber *o que é afinal saber a tabuada*. "É responder 3 x 4, 12, 3 x 5, 15, etc.? E se responder certo 97 vezes e errar 3: conclui-se que sabe ou que não sabe a tabuada? E se souber a tabuada empinada mas não souber aplicá-la a uma situação de divisão (30 a dividir por 6 são ...) ou de estimativa (7,2 vezes 4 é o dobro do 3,6 vezes ...) ?"

Nesta nossa pequena investigação, *saber a tabuada* é *recitar* as tábuas mas também sabê-las *salteadas*; e *aplicar a tabuada* é efectuar mentalmente pequenas divisões.

Outra investigação mais completa cruzará a sabedoria da tabuada com outras competências (cálculo mental, ...). Na nossa investigação levámos em conta o Nível atingido na disciplina de Matemática na formação da amostra.

Considerámos que o aluno que errou nem que seja uma resposta, *não sabe* esse grupo (subdividimos em 6 grupos: 4 *tábuas*, a *tabuada* do 2, a do 3, a do 6, a do 8; a tabuada diversa por escrito salteada ; e as divisões salteadas).

O contexto em que aplicámos dois questionários (um oral e outro escrito, preparados por nós e pelo colega Hélder Gonçalves) foram turmas do 5° ano e do 7° ano da nossa escola. A aplicação dos questionários foi feita extra-aula, procurando-se obter uma amostra representativa dos vários níveis de competência (fraco, médio, bom) em matemática (mais concretamente, a nível do Cálculo). Os alunos sabiam que este questionário não contava para avaliação mas, no entanto, colaboraram activamente nas respostas, estando atentos e esforçando-se por responder correctamente. O questionário era composto por quatro tabuadas ou tábuas (do 2, do 3, do 6 e do 8) a que o aluno tinha de responder oralmente, por um grupo de tabuada *salteada* e por outro de divisões *salteadas*.

Estes dois últimos eram respondidos por escrito. (Saliente-se que havia algumas perguntas de controle, por exemplo à pergunta 8 x 9 sucedia-se a pergunta 9 x 8)

Dado o pequeno efectivo (n=16), os dados recolhidos não autorizam conclusões do tipo: "*os alunos quando chegam ao 7° estão mais esquecidos do que no 5° ano*". (Mas um estudo longitudinal, embora moroso, não seria difícil.)

Passou algum tempo desde que os alunos interrogados estudaram pela primeira vez a tabuada (as tábuas do 2, do 5 e do 10 pertencem ao Programa do 2° ano de escolaridade, as restantes, ao Programa do 3° ano). Tiveram de então para cá, várias oportunidades em aplicá-la. No 5° ano ainda não estão muito habituados a trabalhar com calculadora, no 7° já estão mais familiarizados. (Claro que aplicámos os questionários sem antes ter feito treino específico de *tabuada*...).

		Divisões salteadas	
		não soube	soube
	não acertou completamente nenhuma Tabuada (nenhuma tábua)	3	0
	acertou alguma(s)[1]	9	3
Tabuada	acertou todas, e completamente; ou seja, sabe Tabuada (inclusivé, *salteada*)	0	1

Tabela.

A análise dos erros nas respostas mostrou:

— da tabuada perguntada oralmente e sequencialmente: 2 x 1, 2 x 2, ..., as respostas menos erradas são 2 x 1, 2 x 10, 3 x 1, e semelhantes (100 % de acertos); as mais erradas foram 6 x 8 e 6 x 9 (81,25% de acertos);

— das perguntas salteadas de tabuada (perguntadas por escrito e não sequencialmente) algumas (5 x 4, 2 x 4, 2 x 5, 2 x 6, 3 x 3, ...) foram acertadas por todos os alunos; e a mais errada foi 6 x 7 (68,75% de acertos);

— as mais erradas das perguntas são as divisões, *todas as divisões* que havia nos questionários: por exemplo, 30 a dividir por 2 foi acertada em 56,25% dos casos e 49 a dividir por 7, teve 43,75% de acertos.

Ou seja, em média revelou-se mais fácil para os alunos recitar as tabuadas de cor do que acertar multiplicações (no entanto, as mesmas das tabuadas) ou fazer divisões simples.

O processo de aplicação permitiu observar, no momento das respostas, que actualmente está muito espalhado aquele ensino da tabuada que faz acompanhar a memorização da compreensão: os alunos podem, ou não, saber a tabuada encarreirada mas, nos momentos de hesitação, usam o mecanismo — que dessa maneira mostram ter compreendido — da formação do produto a partir da soma de parcelas iguais. (Grande parte dos erros deveram-se a uma falha num produto particular — por exemplo o erro "2 x 4 são 7" obrigava a outros erros: "2 x 5 são 9", etc., até que determinado enunciado "soasse mal" e obrigasse a "voltar ao princípio").

Conclusões

A evidência do dia-a-dia mostra que é frequente encontrar alunos que até sabem a tabuada (!) mas não conseguem aplicá-la, e isto aconteceu na nossa investigação.

Como seria de esperar, quando os alunos não sabem a tabuada, estão pior colocados para responder certo às *divisões salteadas*. Isso é visível em geral (1ª linha com dados, da Tabela) e em particular — por exemplo: de entre aqueles que não souberam a tabuada do 2 os que *não* souberam as *divisões salteadas* foram *o quíntuplo* daqueles que souberam.

Como seria de esperar, aquele aluno que acertou todas as perguntas, de todas as tabuadas (ou tábuas), incluindo as perguntas *salteadas* acertou as doze perguntas de *divisão salteada* sem errar uma. Esta é uma tendência observável nos dados: em geral, quanto mais acertam nas respostas à(s) tabuada(s) mais perguntas de *divisão salteada* acertam.

Mas, também, ressalta dos dados que a maior parte dos alunos (mesmo se temos de salvaguardar estarmos na presença de uma amostra pequena, o certo é que foram 9 em 16 casos!), se até soube alguma coisa[2] de tabuada(s), não soube *aplicar*, falhou a aplicação às *divisões salteadas*.

Ainda fica muita coisa por dizer mas o que nós pudemos ver é que eles até sabem a tabuada, se *saber* significa o que nós perguntámos nos nossos questionários. O que eles não conseguem é aplicá-la.

Notas

1 "acertou alguma(s)" significa algo como: "acertou totalmente as tabuadas do 2, do 3 e do 8, mas errou três linhas da tabuada do 6 e uma pergunta das doze da tabuada *salteada*".

2 Não esquecer, como ficou atrás, que na parte da tabuada *recitada* (oral) a resposta mais vezes errada teve, ainda assim, 81,25% de acertos.

J. Carlos Frias
Mª Carolina Marques
EB 2,3 de Telheiras nº 2

Argumentação na aula de matemática
Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa

Ana Maria Boavida, Anabela Gomes e Sílvia Machado

Introdução

Diversos documentos relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática destacam, actualmente, a importância dos alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática enquanto experiências particulares de aprendizagem em que a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático, a formulação e avaliação de conjecturas e a refutação ou prova dessas conjecturas assumem um papel preponderante.

A emergência de uma problemática da argumentação no âmbito da educação matemática localiza-se na convergência do reconhecimento e interesse por várias ideias, algumas das quais situadas no interior deste campo e outras relacionadas, mais directamente, com áreas de conhecimento com que ele se articula. Entre essas ideias destacam-se, em particular, (a) a perspectiva — veiculada por actuais tendências na filosofia e sociologia da ciência — de que a produção científica é uma actividade humana, desenvolvida a um nível simultaneamente individual e social, onde a resolução de problemas e os processos de argumentação ocupam um lugar de destaque, (b) o equacionamento dos fenómenos de aprendizagem da matemática em quadros teóricos que valorizam a interacção, (c) a valorização das linguagens naturais consideradas um meio fundamental e privilegiado de promover e facilitar a comunicação entre os indivíduos, (d) dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem da prova matemática e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem, (e) a importância atribuída a objectivos curriculares que valorizam o raciocínio matemático, considerado nas suas múltiplas vertentes e (f) a necessidade dos sistemas educativos proporcionarem, a todos os alunos, possibilidades de desenvolvimento de certas competências transversais, entre as quais a competência argumentativa, fundamentais ao exercício de uma cidadania responsável numa sociedade que se quer democrática.

Apesar do reconhecimento de que a argumentação matemática é uma componente do raciocínio matemático indispensável à construção de objectos matemáticos e de uma racionalidade matemática, esta actividade é, muitas vezes, inexistente em diversas salas de aula. Por outro lado, vários estudos têm mostrado que não é fácil criar ambientes de ensino facilitadores do desenvolvimento, pelos alunos, de competências argumentativas. Na verdade, estes são processos muito complexos que se revestem de sérias dificuldades para os alunos e que colocam vários problemas e dilemas ao professor. Conhece-se pouco sobre os processos argumentativos, sobre o trabalho do professor a eles associado, sobre o que o pode facilitar ou o dificulta.

É neste contexto que surge a ideia de desenvolver um projecto de investigação colaborativa focado na dinâmica da aula de matemática quando os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática, com especial incidência na análise do papel do professor. Este artigo apresenta alguns aspectos relacionados com o desenvolvimento deste projecto.

Um projecto de investigação colaborativa: Intervenientes e etapas

O projecto iniciou-se em Novembro de 2001 e prevê-se que continue até Maio de 2003. Desenvolve-se em duas turmas do 3° ciclo do ensino básico e envolve três professoras: a Ana, docente numa Escola Superior de Educação, a Anabela, professora numa escola 2,3 e a Sílvia que exerce a sua actividade numa escola do ensino secundário. A Sílvia e a Anabela leccionaram em 2001/2002 as turmas do 8º ano em que o projecto se desenvolveu, mantendo estas turmas, agora no 9º ano, em 2002/2003.

Seguindo diversos autores, perspectivou-se a investigação colaborativa como uma investigação que é feita *com* pessoas e não *sobre* pessoas. A adesão a esta ideia orienta a forma como se concebe a organização e natureza do trabalho a desenvolver conjuntamente. Assim, ao longo de todo o percurso de trabalho em colaboração já experienciado privilegiou-se a construção de relações pessoais não hierárquicas e baseadas na confiança, respeito e compromisso. Considerou-se que existiam entre os elementos do grupo diferenças complementares de competências, formações, experiências e perspectivas que constituíam um recurso para o trabalho colaborativo. O que importa é tirar partido desta complementaridade para que os seus benefícios governem o processo de colaboração. Esta ideia abriu a porta à possibilidade de existirem papéis diferenciados entre os membros do grupo. Procurou-se que estes papéis, as responsabilidades e a natureza do envolvimento de cada uma de nós nas várias tarefas a realizar fossem cuidadosamente negociados sendo as decisões conjuntamente tomadas, tendo em conta as necessidades, expectativas e desejos de todas. Privilegiou-se a necessidade e vontade de uma comunicação efectiva no grupo, valorizando-se a participação de cada pessoa e encarando-se a diversidade de pontos de vista, não como algo a evitar, mas como um factor enriquecedor do diálogo profissional. Deste modo, todas nós, ao partilharmos, com liberdade, interpretações e significados, enriquecemos a nossa compreensão sobre o tema do projecto e contribuímos para o pensamento criativo que é parte da investigação.

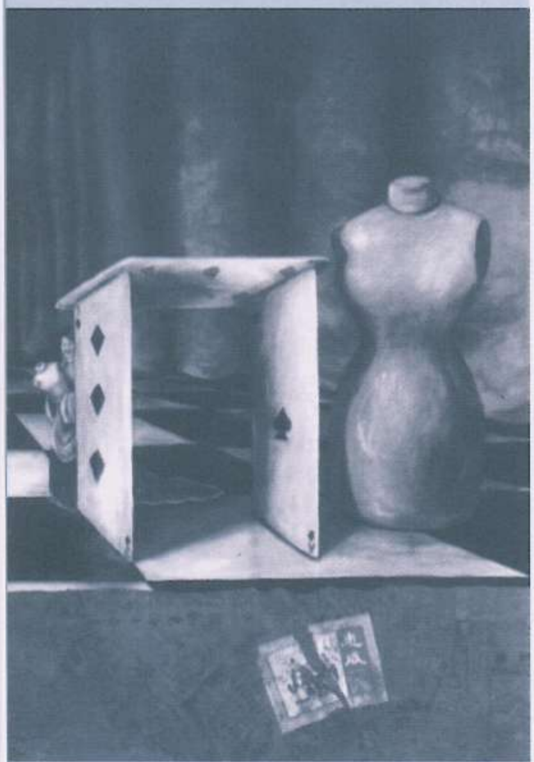
O projecto desenrola-se em duas fases, a primeira relativa ao ano lectivo de 2001/2002 e a segunda correspondente a 2002/2003. É sobre parte do trabalho realizado na primeira fase que incide este artigo.

Em 2001/2002 a equipa do projecto reuniu-se semanalmente e o trabalho que desenvolveu organizou-se em torno de quatro etapas, que embora interligadas, visaram, prioritariamente, objectivos diferentes.

- A primeira etapa focou-se na negociação inicial do projecto de colaboração.
- A segunda centrou-se quer na análise de episódios de sala de aula e outros documentos de carácter teórico relacionados com o tema da argumentação matemática, quer na discussão e reflexão sobre tarefas potencialmente desencadeadoras de actividades de argumentação na aula de matemática. Durou cerca de dois meses e teve como objectivos prioritários o conhecimento recíproco e a construção de uma linguagem e referencial comuns. A existência desta etapa facilitou todo o trabalho posteriormente realizado. De facto, embora estes dois objectivos tivessem estado presentes em todo o percurso de desenvolvimento do projecto, ela permitiu-nos, desde o início, não só começar a partilhar e enriquecer perspectivas sobre a argumentação na aula de matemática de modo a comunicarmos de uma maneira mais efectiva, mas também a iniciar o desenvolvimento, entre nós, de uma relação de confiança e cuidado que se revelou fundamental nas etapas seguintes.
- A terceira etapa foi a mais longa (cerca de 4 meses), constituiu um período fundamentalmente dedicado à preparação e observação de aulas e à reflexão conjunta sobre episódios de argumentação aí existentes e incluiu a selecção/construção de tarefas consideradas, potencialmente, desencadeadoras de actividades de argumentação matemática. A escolha destas tarefas estava a cargo de toda a equipa do projecto. As opções relacionadas com a condução e gestão das aulas em que seriam propostas, bem como a identificação do momento mais adequado para o fazer eram da responsabilidade da Sílvia e da Anabela embora, muito frequentemente, algum do tempo das sessões de trabalho conjunto fosse dedicado a analisar e discutir ideias relacionadas com estes aspectos. A Ana garantia a gravação áudio e vídeo destas aulas e providenciava sempre a reprodução de três cópias de cada uma que distribuía a todos os elementos da equipa. Para além disto, transcrevia partes de aulas identificadas como relevantes pelo grupo, que fazia chegar à Anabela e à Sílvia. A partir daqui, e depois de uma análise feita individualmente por cada uma de nós com base nas gravações vídeo e transcrições, procedíamos a uma reflexão conjunta sobre os episódios de argumentação matemática existentes nas aulas gravadas: o que os desencadeou, o que os facilitou, o que os dificultou, qual o papel dos alunos, qual o papel do professor, que dificuldades experimentaram os alunos, que problemas se colocaram ao professor ...
- A quarta etapa destinou-se a uma reflexão global sobre todo o traba-

lho desenvolvido até ao momento, à identificação de campos de investimento futuro e à preparação da divulgação do trabalho realizado, objectivo previsto desde o início do projecto[1].

Embora estas etapas fossem, em certa medida, sequenciais, foram também interdependentes. Por exemplo, à medida que íamos partilhando dúvidas, riscos e vulnerabilidades inerentes, nomeadamente, ao próprio processo de análise de episódios de aulas gravadas e de preparação conjunta de uma sessão pública de divulgação do trabalho conjuntamente realizado, íamos também desenvolvendo afinidades, aprofundando o conhecimento recíproco e melhorando a nossa relação de confiança e cuidado, objectivos considerados prioritários na segunda etapa. E embora tenha havido momentos em que se dedicou uma atenção especial à negociação do plano de trabalho conjunto, houve ao longo de todo o processo uma renegociação constante dos caminhos a prosseguir de modo a que o trabalho a realizar tivesse em conta as necessidades, objectivos, interesses e desejos de cada elemento do grupo.



Trabalho realizado no âmbito do projecto: Alguns aspectos

Uma das primeiras necessidades com que nos deparámos no início do projecto foi a de construirmos uma perspectiva comum sobre o significado a atribuir a argumentação matemática. Simultaneamente, e à medida que íamos reflectindo sobre textos teóricos, analisando episódios de sala de aula, recolhidos em diversos contextos, e discutindo potencialidades educativas de determinadas tarefas matemáticas, ia ganhando força a ideia de que o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática poderia ser facilitado tanto pela existência, na sala de aula, de certas práticas normativas, como pela proposta de tarefas com determinadas características, embora, em relação a este último aspecto, se tivesse consciência de que as tarefas, em si mesmas, não contêm conceitos e ideias matemáticas o que origina que não determinem, por si só, as aprendizagens pretendidas ou as competências visadas.

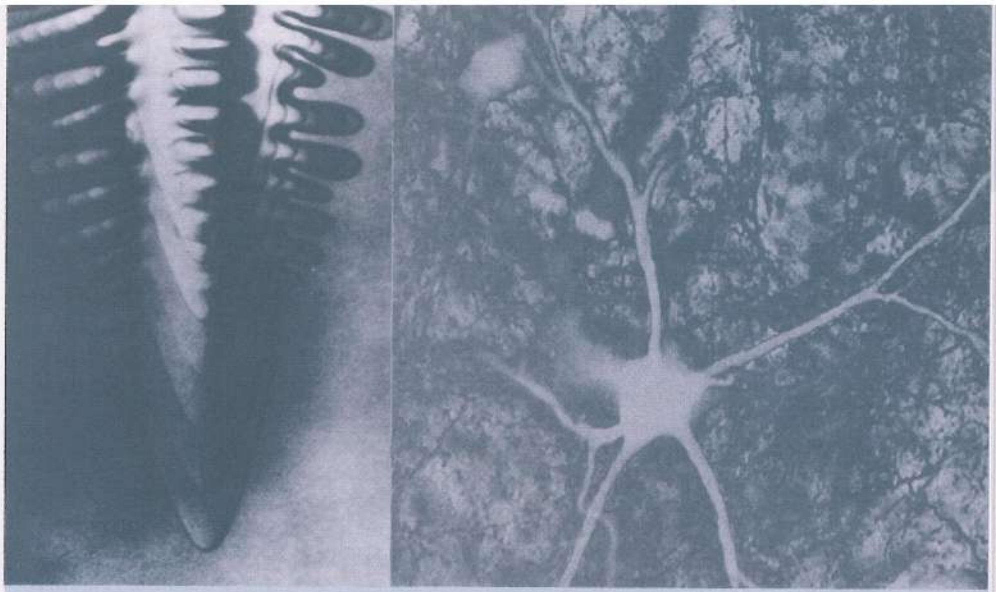
A análise dos trabalhos de alguns autores ajudaram a tomar decisões quanto ao significado a atribuir, no âmbito do projecto, a argumentação matemática, a seleccionar tarefas potencialmente desencadeadoras de actividades de argumentação e a identificar normas reguladoras da actividade matemática cujo desenvolvimento na sala de aula se considerou desejável.

Argumentação matemática: Que significado?

Ao estudarem a argumentação na aula de Matemática, Yackel & Cobb (1994) delimitam este conceito focando-se nas interacções que estão relacionadas com explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos durante ou após tentativas de resolução de problemas. Neste âmbito distinguem várias funções para os argumentos: informar outros de interpretações do problema; re-descrever o que outros disseram; explicar métodos de resolução e respostas; tentar convencer outros sobre a validade ou não validade de uma resposta ou método de resolução; anunciar uma descoberta matemática ou generalização. Wood (1999), por seu lado, considera a argumentação como um processo interactivo de saber como e quando participar num argumento, ou seja, numa troca discursiva entre pessoas com o objectivo de convencerem outros através de certos modos de pensamento. As trocas discursivas analisadas por esta autora, no âmbito de um projecto conduzido em aulas de matemática de alunos do 2° ano de escolaridade, tiveram por base um desafio definido como a expressão de um desacordo acerca de uma explicação apresentada.

As perspectivas sobre argumentação expressas por estes autores levam-nos a considerar, seguindo, por exemplo, Krummheuer (1995), que a argumentação na aula de matemática não deve ser considerada equivalente à demonstração matemática, entendida como um encadeamento dedutivo e formalmente lógico que conduz, necessariamente, ao estabelecimento de conclusões também formalmente lógicas. Ou seja, a argumentação na aula de matemática embora possa incluir processos de produção de provas matemáticas é uma actividade mais ampla do que a que estabelece, necessariamente, a veracidade de um resultado através de um percurso formal, lógico e linear. Esta ideia parece ser consistente com outra apresentada por Lampert (1990), para quem a argumentação matemática é um caminho em zig-zag — e não um percurso linear — que se inicia com a formulação de conjecturas, que envolve a análise de premissas e inclui desacordos e contra-exemplos.

Tendo em conta as ideias anteriormente apresentadas, considerámos, no âmbito do projecto, que os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática quando vivem experiências de aprendizagem em que, individual ou colectivamente, (a) se interrogam sobre o porquê de determinados resultados, relações, procedimentos ou ideias, procuram descobrir estes porquês e, nesse processo, fundamentam os raciocínios que fazem e as respostas que apresentam através da apresentação de justificações, adequadas ao seu nível etário, mas aceitáveis de um ponto



de vista matemático; (b) participam na análise e resolução de desacordos, relativamente a afirmações ou questões matemáticas, não através do recurso a uma autoridade exterior — seja ela do professor ou do manual — mas antes através da apresentação de argumentos convincentes e matematicamente consistentes; (c) formulam conjecturas, investigam a sua plausibilidade e tentam refutá-las ou validá-las através da procura de contra-exemplos ou da construção e/ ou avaliação de provas matemáticas.

Tarefas matemáticas: Que opções?

Uma vez que pretendíamos que os alunos se envolvessem em actividades de argumentação matemática, procurámos seleccionar tarefas não rotineiras que os desafiassem a ir para lá da mera manipulação mecânica de símbolos e cuja resposta não pudesse ser encontrada através da simples aplicação directa de procedimentos já seus conhecidos. Pretendíamos tarefas que, potencialmente, originassem boas discussões matemáticas, que proporcionassem o confronto de ideias e resoluções e que desafiassem os alunos a envolverem-se na procura, defesa e justificação de posições, processos e soluções. Neste âmbito, optámos por problemas e tarefas de carácter investigativo. Em qualquer dos casos os alunos desconheciam o processo de resolução. No entanto, as tarefas de carácter investigativo distinguiam-se dos problemas pelos processos matemáticos que lhes estavam associados. Nomeadamente, pretendia-se que os alunos explorassem situações a partir da análise de casos particulares, formulassem questões, identificassem regularidades, descobrissem relações, formulassem conjecturas, testassem estas conjecturas e as reformulassem no caso de se revelarem incorrectas e que tentassem validar as que resistiam a tentativas de refutação apresentando argumentos convincentes para si próprios e para a turma, incluindo aqui o professor (Brocardo, 2001). Pretendia-se, além disso, que os alunos ganhassem alguma compreensão sobre a origem e processo de formulação das conjecturas em matemática, aprendessem a distinguir conjectura de afirmação provada, se apropriassem da ideia de que muitos exemplos não chegam para garantir a validade de uma conjectura e que experienciassem a prova matemática como um instrumento que podem usar para explorar e compreender o porquê da validade de conjecturas formuladas e não apenas como um meio de garantir esta validade.

Contextos para a argumentação matemática: Que caminhos?

Um dos dilemas com que o professor de matemática se confronta quando, na sala de aula, pretende envolver os alunos em actividades de argumentação matemática deriva do facto de, por um lado, procurar que as ideias que estes apresentam sejam as bases das justificações e discussões que ocorrem e, por outro lado, ter que se assegurar de que as trocas discursivas são matematicamente produtivas. Ou seja, o professor tem que, simultaneamente, promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, do ponto de vista destes alunos, validam as ideias que enunciam e assegurar-se do carácter matemático de tais práticas argumentativas. Estes dois objectivos nem sempre são fáceis de compatibilizar.

As ideias de Forman *et al.* (1998), relativamente aos meios através dos quais os professores socializam a argumentação através da *orquestração* de discussões na sala de aula, e os conceitos de *normas sociais* e *normas sócio-matemáticas*, utilizados, nomeadamente, por Cobb e Yackel (1998), revelaram-se, no âmbito do projecto, instrumentos úteis para lidar com este dilema. Todos estes autores defendem que a argumentação na aula de matemática depende dos membros desta comunidade partilharem uma perspectiva comum tanto sobre os objectos em discussão como sobre os meios pelos quais a discussão pode ocorrer. Esta perspectiva depende, por seu lado, das expectativas dos diferentes membros que constituem esta comunidade. Por exemplo, se alguns alunos pensarem que a velocidade e a exactidão são mais importantes do que a compreensão, poderão ter dificuldades em aceitar o tempo, por vezes longo, necessário à exploração de situações e o risco inerente ao processo de formulação de conjecturas. Esta crença poderá entrar em conflito com expectativas de um professor que valorize o modo como os alunos explorem tarefas que lhe são propostas e discutem criticamente processos de resolução destas tarefas.

Forman *et al.* indicam que professor pode ajudar os alunos a mudar o modo como se vêem a si próprios e uns aos outros como participantes legítimos na actividade de formular, analisar e avaliar justificações, conjecturas e conclusões, orquestrando habilmente as discussões na sala de aula. Para ilustrar como pode ocorrer este processo recorrem à noção de *redizer* que envolve o re-falar o discurso de alguém através do *repetir, expandir, parafrasear* e *relatar*. O redizer inclui diferentes objectivos: clarificar ou amplificar o conteúdo do que é dito, ir mais longe na explicação do raciocínio, introduzir ideias particulares ou redirigir a discussão. O professor, ao redizer o discurso dos alunos, para lá de o tornar mais visível para toda a turma o que poderá facilitar a sua avaliação, situa-os em relação ao conteúdo, confere-lhes um posicionamento em relação ao tópico em discussão, posicionamento este de que os alunos poderão apenas estar vagamente conscientes, e clarifica os pólos do debate mostrando, através deste processo, que espera que os alunos se responsabilizem pela defesa das ideias que apresentam.

Cobb e Yackel recorrem aos conceitos de normas sociais e normas sócio-matemáticas para analisarem o processo pelo qual professores, participantes num projecto de inovação, lidaram com conflitos entre as suas expectativas e as dos alunos, relacionadas com a participação destes nas discussões com toda a turma. Para estes autores, culturas de sala de aula caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação são, em geral, reguladas e sustentadas por normas que valorizam a explicação e justificação de soluções, as tentativas de encontrar sentido em explicações dadas por outros, a indicação de acordo ou desacordo e a discussão de alternativas conflituais relativas a interpretações e soluções.

Contrariamente às normas sociais, cuja negociação pode ser feita no âmbito do ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo disciplinar, as normas sócio-matemáticas focam-se "em aspectos normativos das discussões matemáticas específicos da actividade matemática dos alunos" (Yackel & Cobb, 1996, p. 461). Um exemplo de uma norma sócio-matemática é o que conta, na sala de aula, como uma explicação e justificação matemática aceitável.

Quer as normas sociais quer as sócio-matemáticas não são critérios pré-determinados, introduzidos na sala de aula a partir do exterior, nem a sua negociação é completamente antecipada e prevista pelo professor. Originam-se e são continuamente modificadas no decurso das interacções que se geram na sala de aula quando professor e alunos falam acerca da matemática. Ou seja, embora desde o início, o professor, que constitui na sala de aula o representante da comunidade matemática, possa ter ideias claras sobre as normas que pretende desenvolver, fundamental é o modo como capitaliza acontecimentos não antecipados e os perspectiva como situações paradigmáticas para discutir com os alunos o que espera deles.

Tendo por referência as ideias anteriormente apresentadas, que foram objecto de reflexão nalgumas das sessões de trabalho do projecto, considerámos importante dedicar uma atenção especial e consciente à constituição, nas aulas, de um conjunto de normas partilhadas entre cada professora e os alunos de cada uma das turmas envolvidas no projecto, reguladoras da actividade matemática a desenvolver conjuntamente, que nos pareciam poder facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Procurava-se criar na sala de aula uma atmosfera de mútuo respeito e confiança que levasse os alunos a sentirem-se confortáveis, quer a expressarem e fundamentarem os seus pontos de vista, sem recearem os erros que poderiam cometer, quer a analisarem criticamente as ideias apresentadas por outros, a tentarem encontrar sentido nestas ideias e a manifestarem o seu acordo ou desacordo em relação a elas. Assim, ao longo de todo o ano lectivo de 2001/2002, a Sílvia e a Anabela, quer através de intervenções mais explícitas, quer implicitamente, através, por exemplo, da forma como geriam as interacções na sala de aula ou lidavam com acontecimentos não previstos, foram procurando que os alunos se apropriassem da ideia de que, na aula de matemática, se esperava que apresentassem explicações e justificações para as afirmações que faziam, que assumissem e defendessem as suas posições, que expressassem opiniões diferentes quando existiam, que se responsabilizassem pela fundamentação dos seus pontos de vista, que escutassem atentamente e tentassem compreender as ideias apresentadas por outros, que expressassem as suas próprias ideias de forma audível para todos e não se dirigindo apenas a elas próprias, e que participassem activamente nos processos de resolução de desacordos que emergiam de modo a, em conjunto, encontrarem consensos

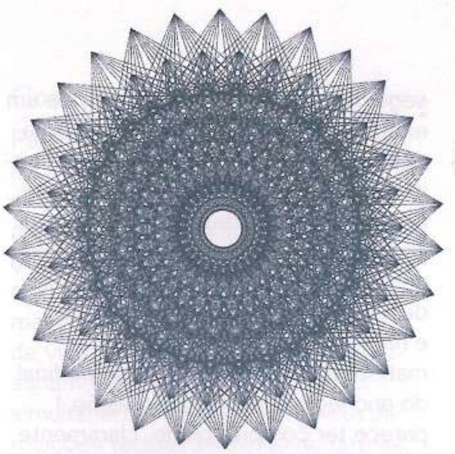
significativos para todos. Frequentemente houve necessidade de dar uma maior visibilidade a estes desacordos bem como a argumentos apresentados a favor de uma ou outra posição, o que foi feito pela Anabela e Sílvia que, recorrendo à noção de *re-dizer* de que falam Forman *et al.*, alinharam os alunos com uma ou outra posição, garantiram que explicações apresentadas por uns eram claras para todos e, além disso, actuaram como moderadoras, e não avaliadoras, na sua resolução. Ao longo de todo este processo foram, simultaneamente, procurando valorizar a ideia de que a fundamentação de opiniões e defesa de pontos de vista se deveria apoiar em argumentos matematicamente válidos, ou seja argumentos do tipo "é assim porque a maioria diz que é assim, ou porque o melhor aluno o disse ou porque a professora o ensinou" não foram considerados válidos nas aulas de matemática.

Episódios de sala de aula: Alguns exemplos

Os dois primeiros episódios reflectem tentativas feitas numa das turmas para os alunos se apropriarem de normas reguladoras da actividade matemática a desenvolver na sala de aula. O episódio três passa-se numa outra turma e revela dificuldades relacionadas com a aprendizagem do processo de prova matemática.

Episódio 1

Surge numa aula em que os alunos, a partir da análise de casos particulares, formularam conjecturas relacionadas com a relação entre a razão das áreas de dois triângulos semelhantes e a



razão de semelhança destes triângulos. A professora pretende que avaliem as conjecturas formuladas e que fundamentem a sua avaliação.

1. Alunos: É o quadrado.
2. Aluno: É o dobro.
3. Professora: Ora bem, ora bem, ora bem. Tenho aqui duas opiniões. Uma que é o dobro e outra que é o quadrado.
4. Alunos: É o quadrado.

(...)

5. Professora: E ainda há uma terceira opinião. Há alguém que acha que são as duas coisas (risos). Portanto, agora convençam-se ...

Episódio 2

Anteriormente à ocorrência deste episódio, os alunos tinham formulado várias conjecturas, utilizando o Geometer Sketchpad, *sobre o polígono obtido a partir da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer. No momento em que surge o diálogo, um dos alunos enunciou uma das conjecturas formulada pelo seu grupo. Na sequência, a professora lança à turma o desafio de comentarem o enunciado apresentado, tendo a intenção de, em conjunto, o tornarem mais preciso.*

1. Aluno: [enuncia a conjectura]
2. Professora: Diz mais alto, de maneira que se ouça, para toda a gente ouvir, com uma voz que se perceba [dirigindo-se ao aluno]. Ouçam agora ... [dirigindo-se à turma]
   (O aluno repete e a professora regista no quadro o que o aluno dita)
3. Professora: O que é que o resto da turma tem a dizer?
4. Aluna: Está incompleto
5. Professora: Está incompleto, porquê?

(...)

6. Professora: Vocês convençam-se uns aos outros. Vejam se se habituam a falar uns com os outros e não só comigo ... Vá lá ...
7. Alunos vários: Têm que ser os pontos médios de lados consecutivos.
8. Professora: Estão todos a falar ao mesmo tempo, eu não ouço agora. Digam lá, vá ... Conseguem resolver vocês ...
9. Aluna: Põe-se consecutivos, mas ele ali em cima não tem.
10. Professora: E então?
11. Aluna: Se a gente não diz nada podemos unir cada ponto aos outros três.

Os episódios 1 e 2 surgem em aulas leccionadas em duas semanas consecutivas. Anteriormente, a reflexão feita, quer individualmente pela professora da turma, quer colectivamente na equipa do projecto, tinha evidenciado que, apesar dos esforços feitos em sentido contrário, neste momento havia ainda diversos alunos que pareciam valorizar apenas o que ela dizia, que viam a sua autoridade como a única forma de garantir a validade de uma afirmação e que quando solicitados a explicarem ou justificarem as suas ideias o faziam dirigindo-se apenas a ela e, nalguns casos, em voz tão baixa que a maior parte dos colegas não conseguiam entender. No primeiro episódio a professora começa por redizer as falas dos alunos, através do relato (linha 3), com o objectivo de os levar a avançarem na explicação do raciocínio. Ao fazê-lo, dá uma maior visibilidade à existência de posições divergentes face à tarefa ("tenho aqui duas opiniões"; "e ainda há uma terceira opinião") e, simultaneamente, torna legítima esta existência destacando, assim, que espera que os alunos não só observem essas diferenças como justifiquem, de uma forma convincente, as posições que adoptarem ("agora, convençam-se").

A importância dos alunos fundamentarem as suas afirmações de modo a resolverem desacordos, aparece também no segundo episódio ("vocês convençam-se uns aos outros"). Este ilustra, além disso, o modo como a professora tenta capitalizar acontecimentos da sala de aula para ajudar os alunos a interiorizarem normas que, do seu ponto de vista, caracterizam culturas de sala de aula onde a argumentação é valorizada. As intervenções das linhas 2 e 6 revelam a importância dos alunos falarem e se ouvirem uns aos outros: por um lado quem emite uma asserção deve fazê-lo de forma suficientemente audível para que todos, e não apenas a professora, possam avaliar o que é dito; por outro lado, a professora ao dizer "ouçam agora", "vejam se se habituam a falar uns com os outros e não só comigo" mostra que espera que os alunos escutem atentamente as ideias dos seus pares e não apenas aquilo que ela própria diz, passo fundamental para poderem encontrar sentido nas explicações dos colegas. Ao registar no quadro a conjectura apresentada pelo aluno e ao interpelar a turma através da pergunta "o que é que o resto da turma tem a dizer", abre um espaço para o questionamento de afirmações quando os alunos discordam delas. Simultaneamente, ao não corrigir a resposta do aluno, que regista no quadro tal como lhe é ditada, mostra que o seu papel é o de moderar a discussão e não o de avaliar o que é dito. Além disso, ao afirmar "conseguem resolver vocês..." destaca a importância da obtenção, pelos alunos, de consensos sobre as respostas que apresentam. Por último, o pedido explícito de justificação feito a uma aluna, na sequência de uma resposta que esta apresenta, (linha 5) e a reacção "e então" à fala de outra (linha 10) indicam que espera que os alunos justifiquem as suas interpretações e posições.

Episódio 3

Este episódio surge posteriormente a uma aula em que os alunos, a partir de explorações feitas com o Geometer Sketchpad, *formularam, entre outras, a conjectura que indica que o polígono resultante da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo. Ocorre depois da professora ter pedido aos alunos que enuncias-*

sem todas as conjecturas formuladas, de ter desafiado a turma a analisá-las e discuti-las, de ter proposto que se tentasse provar uma das conjecturas não refutadas e da turma ter escolhido a "conjectura do paralelogramo". É neste contexto que as interacções entre a professora e os alunos conduzem à produção de uma prova para esta conjectura tendo por referência um quadrilátero desenhado no quadro. O aluno 1, que participou adequada e activamente nestas interacções, parece, no entanto, não ter ficado satisfeito com o trabalho realizado.

1. Aluno 1: Porque é que se prova, com um quadrilátero, que forma sempre um paralelogramo lá dentro, sôtora?
2. Professora: Então vamos lá ver. Eu não me preocupei... Diz lá [dirigindo-se à aluna 2 que manifestava vontade de responder].
3. Aluna 2: Está ali um exemplo...
4. Aluno 1: Está ali um exemplo?! ... Sôtora, mas com um exemplo não se prova nada... provamos é com conjecturas.
5. Aluno 3: Não! A conjectura vem de um exemplo.
6. Professora: Só um bocadinho. Diz lá [dirigindo-se ao aluno 3].
7. Aluno 3: Uma conjectura... Forma-se uma conjectura a partir de um exemplo.
8. Professora: A partir de exemplos. Depois para provares a conjectura ...
9. Aluno 3: Tem que ser com um contra-exemplo.
10. Professora: Um contra-exemplo é para quê? É para provar ou para...
11. Aluno 3: Para provar que não é.
12. Professora: Para provar que não é...
13. Aluno 3: Se a gente conseguir ver que... não conseguimos provar com um contra... pronto... isso (sorriso).
14. Professora: Se não conseguirmos arranjar um contra-exemplo, é isso que queres dizer?
15. Aluno 3: Sim. Se não conseguirmos arranjar um contra-exemplo é porque é verdadeira.
16. Professora: É porque é verdadeira ...
17. Aluno 1: E se houver alguém que consiga arranjar? Tu não consegues mas há alguém que consegue ...
18. Aluno 3: Já não é.
19. Aluno 1: Aaaah!... (...) Então mas assim não dá para provar nada! Estamos a falar que aquilo é um paralelogramo!!!...
20. Aluno 3: Olha lá, contenta-te com o que a sôtora ensina, pá...
21. Professora: Não, não, não, [falando para o aluno 3]... (...)

À primeira vista poder-se-ia colocar a hipótese da primeira intervenção do aluno 1 estar relacionada com o questionamento da necessidade da prova. De facto, nesta altura, todos os alunos da turma, a partir das várias explorações que tinham feito com o *Geometer Sketchpad*, tinham constatado que não conseguiam encontrar um contra-exemplo que refutasse a "conjectura do paralelogramo". Embora na altura em que surge este episódio os alunos tivessem já experienciado outras situações de formulação e prova de conjecturas e da professora ter procurado, através de diversos meios, que os alunos se apropriassem da ideia de que muitos exemplos não bastam para garantir a validade de uma conjectura, esta concepção continuava a prevalecer em vários dos alunos. Este não parecia ser, no entanto, o problema do aluno 1.

A análise de várias intervenções que foi fazendo ao longo da aula revela que o que o parecia perturbar era o facto da prova se ter baseado no quadrilátero desenhado no quadro que ele interpretava como sendo um caso particular ("um exemplo") e não como uma figura que podia representar um quadrilátero qualquer. Este aluno estava consciente de que "com um exemplo não se prova nada" e daí a sua relutância em aceitar uma prova que, do seu ponto de vista, se baseava num exemplo.

Este episódio, ilustra, por outro lado, a tentativa dos alunos 1 e 3 encontrarem sentido na relação entre provas e conjecturas. A afirmação do aluno 1 "provamos é com conjecturas" parece revelar que não compreende ainda muito bem qual a função das conjecturas no processo de prova. O aluno 3 começa por questionar esta afirmação acrescentando, em seguida, que "a conjectura vem de um exemplo" o que pode indiciar alguma compreensão sobre a origem das conjecturas. No entanto, para este aluno, apesar destas poderem ser refutadas por contra-exemplos, a sua validação parece depender da impossibilidade de alguém os conseguir encontrar e não da produção de uma prova matemática. Curiosamente, já no final do ano lectivo, enquanto o aluno 1 parece ter compreendido, claramente, que se formulam conjecturas a partir da análise de exemplos e de usar esta ideia na exploração de situações, o aluno 3 continua a justificar conjecturas recorrendo a casos particulares. O facto de ninguém na turma conseguir encontrar contra-exemplos para conjecturas que são formuladas parece continuar a bastar-lhe para ficar convencido acerca da sua validade.

O diálogo transcrito no episódio 3 revela que, nesta aula, os alunos colocaram questões com o objectivo de obter clarificações, ouviram-se uns aos outros, procuraram explicar o seu pensamento a outros e questionaram afirmações dos colegas quando não concordavam com elas. A professora participou neste diálogo desempenhando várias funções que não só contribuíram para legitimar este papel assumido pelos alunos como introduziram outros aspectos importantes à criação, na sala de aula, de uma cultura que pode favorecer o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Em particular, ajuda o aluno 3 a expressar o seu pensamento de modo a torná-lo mais claro, re-diz a sua fala (8), via repetição e expansão, iluminando, ao introduzir o plural "exemplos", um aspecto importante da discussão e, ao não corrigir a incorrecção na posição do aluno 3 (falas 15 e 16) mostra que o seu papel é o de moderar a discussão e não a de um avaliador que explica. Finalmente, a reacção que tem à fala 21 do aluno 3, ilustra a importância que concede ao facto dos fundamentos para os resultados que se enunciam não deverem basear-se no seu estatuto ou autoridade como professora.

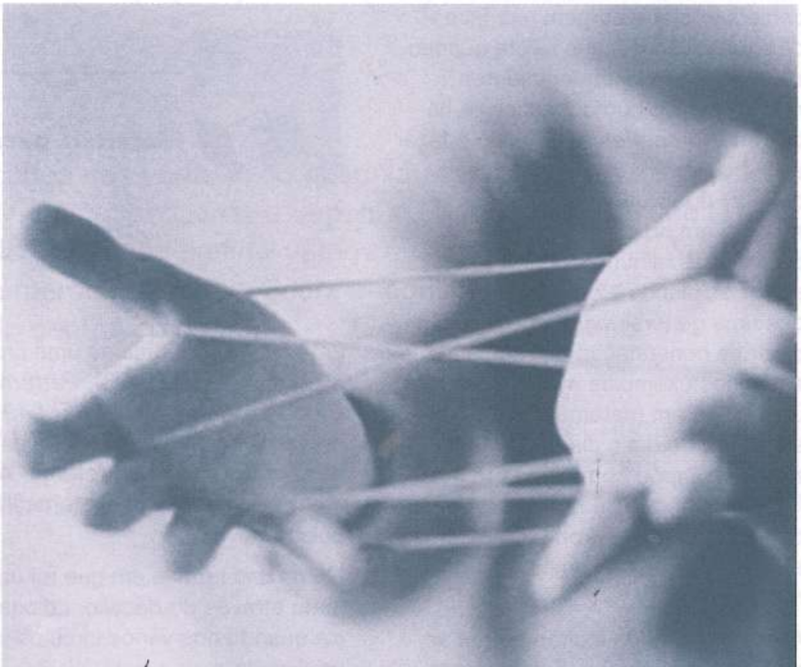
Considerações finais

Passado cerca de um ano desde o início do projecto reforça-se, em nós, a ideia de que o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática no âmbito do currículo existente, é uma tarefa morosa mas entusiasmante que, do ponto de vista do professor passa, necessariamente, por um investimento simultâneo numa rede complexa de relações tecidas entre (a) as tarefas matemáticas que se seleccionam, (b) as normas reguladoras da actividade matemática a desenvolver na sala de aula que se negoceiam e (c) os papéis e funções que se escolhem para o professor. O investimento apenas num destes pólos parece-nos condenado ao fracasso.

Embora considerando importante investir em competências matemáticas transversais aos vários temas curriculares dos programas do 8º ano de escolaridade, entre as quais pensamos estar a competência argumentativa cujo desenvolvimento é muito exigente em termos de tempo, não se queriam deixar de lado estes temas curriculares. Ao longo do projecto nem sempre foi fácil compatibilizar estas duas dimensões. Procurámos que as tarefas a propor aos alunos surgissem, aos seus olhos, como naturalmente articuladas com os temas que trabalhavam ou iriam trabalhar em determinado momento, tentando, assim, evitar que a experiência matemática por eles vivida nas aulas em que a Ana estava presente fosse considerada marginal relativamente ao desenvolvimento do seu trabalho nas restantes aulas. Esta parece ter sido uma boa opção. Além disso, se, por um lado, o trabalho realizado tem mostrado que os problemas e as tarefas de investigação são meios privilegiados para proporcionar boas discussões matemáticas, tem também revelado que mais importante do que escolher tarefas com esta ou aquela características são as estratégias e recursos usados pelo professor para orquestrar estas discussões de modo a estimular e facilitar a apresentação de explicações e justificações pelos alunos.

A negociação de normas sociais e sócio-matemáticas facilitadoras do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação na aula de matemática tem-se revelado um processo lento e não muito fácil, mas que continua a fazer sentido para toda a equipa do projecto constituindo um dos campos em que consideramos que é fundamental continuar a investir. A negociação do que conta como uma justificação matemática aceitável tem-se mostrado problemática nos casos em que esta justificação assume a forma de uma prova matemática de conjecturas de que os alunos estão convencidos da validade, relativamente às quais não é possível apresentar contra-exemplos, e em que a questão do porquê desta validade não lhes desperta curiosidade. Quanto ao processo de negociação de normas sociais há um exemplo que pode permitir iluminar aspectos relativos ao desenvolvimento deste processo. Na primeira aula do ano lectivo de 2002/2003, os alunos de uma das turmas, a pedido da professora, foram capazes de indicar quais os papéis que era esperado que desempenhassem na aula de matemática. Entre estes estava o exprimirem-se de forma a que todos ouvissem, a necessidade de justificarem raciocínios, a importância de tentarem compreender pontos de vista dos colegas, o não falarem apenas para a professora, etc. No entanto, passados cerca de quinze dias, numa fase de discussão com toda a turma das conclusões a que tinham chegado a propósito de uma tarefa que lhes tinha sido proposta, muitos deles não conseguiram mobilizar este conhecimento em situação de modo a participarem da forma que eles próprios tinham considerado adequada. Esta constatação leva-nos a reforçar a ideia de que, embora sem menosprezar a possibilidade e até vantagem de, em determinados momentos, existirem conversas com os alunos em que o professor aborda, explicitamente, o que espera deles, a renegociação de normas parece, sobretudo, ocorrer por vias mais implícitas, nomeadamente através do modo como o professor capitaliza acontecimentos de sala de aula em que há transgressões às normas consideradas desejáveis.

Em todos estes processos o papel do professor é múltiplo e muito exigente. Por exemplo, há que "resistir a tentações" de validar ou invalidar, de imediato, argumentos e resoluções que vão sendo apresentados, há que não ceder, nas fases de discussão de uma tarefa, a apelos insistentes de determinados alunos para que se desloque aos seus lugares de modo a poderem mostrar-lhe, apenas a ele, as ideias que têm ou os resultados a



que chegaram, há que ajudar estes alunos a ultrapassarem o receio de se exporem aos olhos dos seus pares e assumirem, com naturalidade, as possibilidades de erro, há que dar visibilidade a determinadas posições e argumentos, procurando minimizar o risco desta atitude ser considerada como manifestação de preferência por determinados alunos, há que colocar questões e pedir esclarecimento, mostrando, simultaneamente, que se espera que os próprios alunos assumam também estes papéis.

Obviamente que esta tarefa não é fácil e mesmo quando se investe na globalidade das relações atrás referidas o professor debate-se com problemas e dilemas de vária ordem a que, frequentemente, em cima do acontecimento precisa de dar resposta. Neste âmbito há questões que permanecem em aberto e sobre as quais nos parece importante continuar a reflectir. Por exemplo, como ajudar os alunos a valorizarem as intervenções dos colegas e a tentarem encontrar sentido nelas? Como aproveitar o entusiasmo freqüentemente proporcionado pela exploração de situações e descoberta de conjecturas para motivar, nos alunos, o desejo de explorarem caminhos que possam mostrar a validade das que resistiram a tentativas de falsificação e compreender o porquê dessa validade? Como lidar com a diversidade, por vezes numerosa, de conjecturas que surgem nas fases de exploração de uma tarefa quando são fortes os constrangimentos resultantes do currículo oficial e há que interromper esse trabalho e fazer escolhas para haja tempo, na sala de aula, dos alunos e professor se envolverem no processo de prova de, pelo menos, algumas delas? Como ajudar os alunos a compreenderem que uma generalização que fazem a partir da constatação de regularidades em vários exemplos não constitui uma prova em matemática quando em situações do dia a dia uma generalização se impõe com muita força e, frequentemente, com um estatuto de certeza, quando a propósito dela se evocam diversos exemplos da mesma natureza?

A estas questões muitas outras se poderão acrescentar. Estamos convictas que a reflexão sobre elas bem como sobre os problemas e dilemas que o professor enfrenta quando pretende envolver os seus alunos em actividades de argumentação matemática, poderá ajudar a encontrar pistas que nos permitam responder ao desafio difícil, mas possível, de conseguir que todos os alunos participem, com prazer, nestas actividades e as sintam como relevantes e essenciais à sua aprendizagem da matemática.

Nota

1 A equipa do projecto dinamizou no ProfMat 2002 um grupo de discussão intitulado Reflectindo sobre a prática: A argumentação matemática na sala de aula. Algumas das ideias incluídas neste artigo foram sistematizadas no âmbito do trabalho de preparação desta sessão.

Referências bibliográficas

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano.*, Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspectives of the mathematics classroom. Em F. Seeger & J. Voigt & U. Wascheschio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.

Forman, E. et. al. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*, 527-548.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauersfeld. (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* (27), 29-63.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding mathematical argumentation.* Apresentação feita em AERA 1994.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458 - 477.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in a mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Ana Maria Boavida
ESE de Setúbal

Anabela Gomes
EB 2,3 D. Luís de Mendonça Furtado

Sílvia Machado
Esc. Sec. de Casquilhos

Materiais para a aula de Matemática

Números em círculos

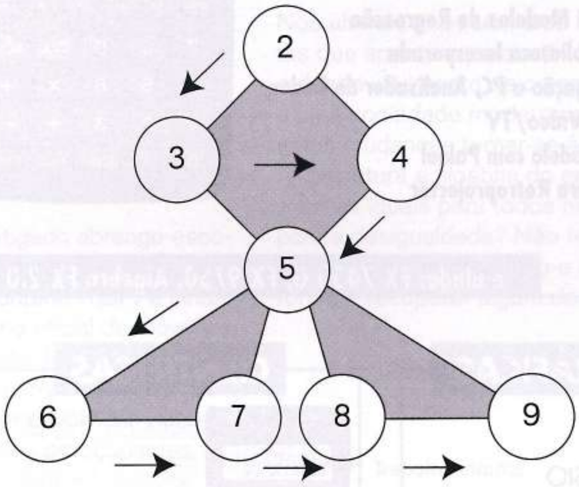
Esta tarefa adaptada de uma proposta de trabalho apresentada por Boavida, A & Guimarães, F. (1998), *Patterns, alfebraic thinking and classroom interactions, Proceedings of the CIEAEM 49*: Escola Superior de Educação de Setúbal, foi realizada pelos alunos das duas turmas do 8º ano do projecto de investigação colaborativa a que se refere o Artigo publicado nesta revista intitulado Argumentação na aula de matemática: Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa.

Numa das turmas em que foi utilizada esta tarefa, a exploração do padrão continuou através do desafio, colocado aos alunos, para investigarem o que acontecia quando nos vários círculos se colocavam múltiplos consecutivos de 2, de 3, de 4..., de *n*, ...

Escola...
Ano/Turma.................................. Data............................ Aluno(a)...........................

Números em círculos

Considera o padrão de círculos a seguir apresentado, constituído, na sua parte superior, por um quadrilátero em cujos vértices foram desenhados quatro círculos e, na parte inferior, por dois triângulos igualmente com círculos em todos os vértices. O círculo central está desenhado sobre o vértice comum aos três polígonos. Em cada círculo escreveram-se números naturais consecutivos começando no círculo superior e seguindo o sentido das setas da figura.



1. Adiciona os quatro números colocados nos vértices do quadrilátero, depois os três números colocados nos círculos do triângulo da esquerda e depois os do triângulo da direita. Por fim, adiciona as três somas obtidas. A esta soma final vamos chamar o *Grande Total*. Repetindo este processo com vários números naturais, procura encontrar uma relação entre os números que escreveste no círculo central do padrão e os *Grandes Totais* obtidos.

2. A relação encontrada manter-se-á quando se inicia o processo com qualquer número inteiro negativo? No caso de não se manter, tenta encontrar uma nova relação que "funcione" com estes números. Tenta encontrar inteiros negativos que não satisfaçam a nova relação que encontraste. Que concluis?

12/13 anos de escolaridade obrigatória
Para quando? E como?

No debate actual sobre escolaridade obrigatória, são muitos os que defendem uma escolaridade obrigatória de 12 anos (13 se incluirmos um ano do ensino pré-escolar). Prevê-se que em 2015, na maioria dos países desenvolvidos, 75% da população estará habilitada com o nível do ensino secundário. Como concretizar este objectivo, no nosso país, se todos os anos cerca de 40 mil alunos saem das nossas escolas sem a escolaridade obrigatória de 9 anos?

Como concretizar este objectivo quando com esta notícia lemos algumas conclusões de um trabalho de investigação realizado por uma equipa coordenada por Manuel Sarmento do Instituto de Estudos da Criança (Universidade do Minho) indicando que 12% das crianças em escolaridade obrigatória, no vale do Cávado, têm uma intensa carga de trabalho e 40% dessas crianças, na sua maioria a frequentar o 1.° ciclo, desempenham alguma actividade comercial ou industrial?

Tendo em conta, que o universo investigado abrange escolas (frequentadas por cerca de 2000 alunos) que eram Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP) e ainda que nestas escolas, segundo o relatório oficial de Novembro de 2001, a taxa de abandono escolar foi, de facto, diminuindo ao longo dos últimos anos, se outras escolas, não abrangidas neste projecto TEIP, fossem envolvidas neste estudo, as conclusões ainda seriam mais preocupantes.

E depois da escolaridade obrigatória, qual o panorama?

Actualmente cerca de 80% da população portuguesa não ultrapassa o nível de ensino básico e a qualificação profissional de nível III é inexpressiva, sendo Portugal o país da Europa com a mais baixa percentagem de conclusão do secundário e menos formação profissional. Estará a escolaridade obrigatória a cumprir o seu papel de contribuir para os mais desfavorecidos e menos instruídos ultrapassarem as suas desvantagens iniciais? O trabalho infantil, continua a ser um dos factores que contribui para esta baixa qualificação profissional, pois a notícia refere que, segundo os investigadores, "o ingresso num trabalho intenso arrasta a diminuição de expectativas de mobilidade social e de qualificação profissional".

Portugal, segundo os dados da Eurostat, é de facto, na União Europeia, o país com as mais baixas qualificações e maior percentagem de abandono escolar após o 9.° ano (cerca de 45%, sendo a média europeia de 19,3%). Para além disso, são também preocupantes as taxas de insucesso no ensino secundário (apenas 25% dos alunos concluem a formação secundária ao fim dos três anos), os problemas de qualificação de adultos e de jovens e os problemas de adaptação a novas profissões.

Assim, se todos os anos novas avalanches de pessoas não qualificadas entram na vida activa e, se ainda, segundo estudos publicados recentemente, somos um país sem iniciativa, pouco empreendedor e com medo de errar, será o caminho certo continuar a propor currículos uniformes que aumentam mais as diferenças?

A caminhada não terá de ser inversa, ou seja, qualificar os que estão dentro da escolaridade e integrar os adultos em novos ciclos de aprendizagem, o que passará certamente pela certificação de adquiridos e pela educação em alternância (na escola e em ambiente de trabalho)?

Nos últimos anos têm sido intensamente debatidas propostas que apontam para a diversificação de programas e para o desenvolvimento de competências e atitudes adequadas a uma sociedade moderna em mudança permanente. Mas estas mudanças tornar-se-ão efectivas sem uma mudança na estrutura e filosofia do ensino secundário? Programas e exames iguais para todos não são factores que contribuem para a desigualdade? Não terá a sociedade de fazer um esforço de compreensão e adaptação a estas ideias, de forma a recuperar algum do nosso atraso cultural?

Isabel Rocha, ESE de Leiria
Manuela Pires, Esc. Sec. Eng. Acácio Calazans Duarte

REPORTAGEM Trabalho infantil

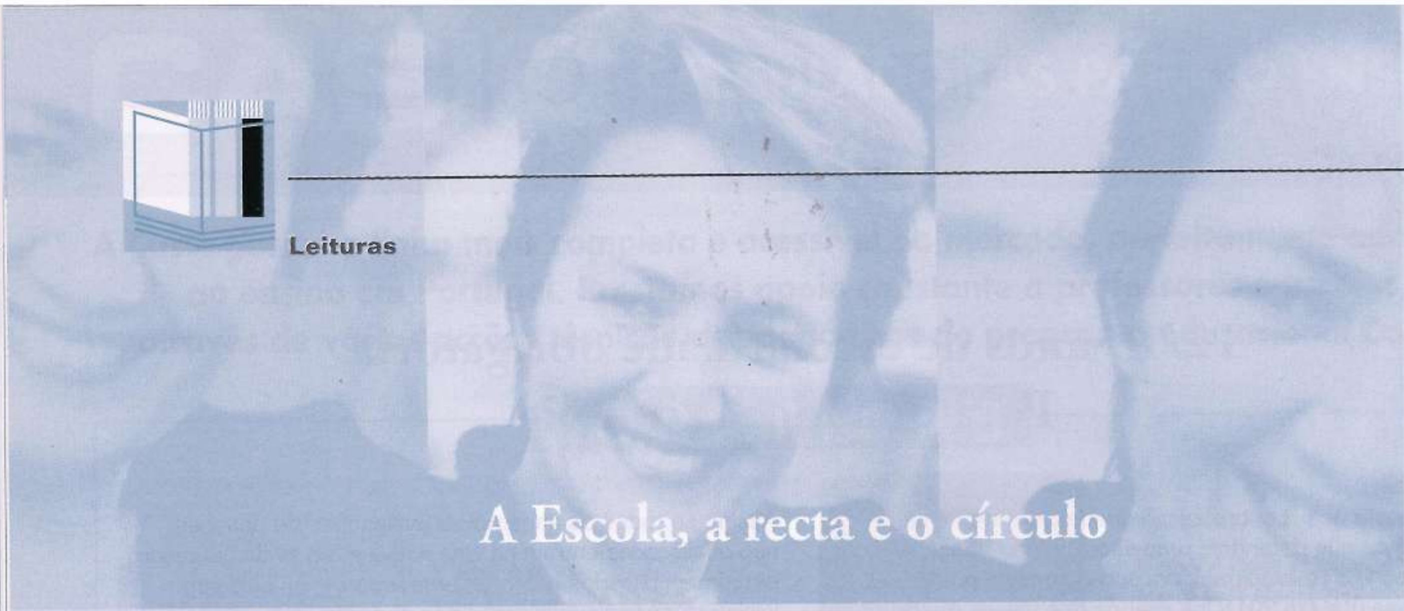
Meninos que não são meninos

Estudo da Universidade do Minho revela haver uma percentagem elevada de crianças do vale do Cávado a trabalhar

ELSA COSTA E SILVA

Nesta região do Minho, o número de crianças a trabalhar intensivamente é o triplo do que acontece em Portugal. A média nacional de menores com actividade económica, aferida no ano passado pelo Ministério do Trabalho e da Solidariedade, é de 4,2 por cento.

In Diário de Notícias 27 de Outubro 2002.

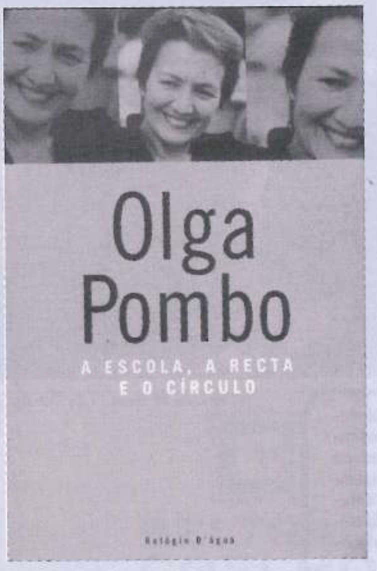


A Escola, a recta e o círculo

"Só a Escola inscreve, no caminhar para diante da condição humana, o retorno, o regresso ao legado cultural do passado e, assim, dá continuidade ao elo da criação." (p. 28)

Há alguns meses foi publicado um livro onde Olga Pombo, a autora, colige um largo conjunto de textos escritos ao longo de quase vinte anos e que acolheu sob o título *A Escola, a recta e o círculo*. Vem este título de um dos textos coligidos, precisamente aquele com que o livro abre e que, curiosamente, foi originalmente publicado na *Educação e Matemática*, como o foi um outro, sobre a Área Escola, que igualmente faz parte do livro. Um outro ainda, aproveito também para dizer, foi primeiramente o texto da conferência plenária *A matemática e o trabalho de 'dar a ver'* que Olga Pombo proferiu no ProfMat realizado em Viseu no ano de 1992 e que a APM também publicou em primeira mão.

O livro recolhe textos sobre uma variedade de temas guardados em três partes que estruturam a obra e dão coesão aos textos que encerram: a primeira, agrupando os escritos sobre a Escola e o Ensino e ainda sobre a formação de professores, a segunda, textos sobre epistemologia e ensino das ciências, e a última, os que incidem sobre alguns aspectos das reformas que têm vindo a acontecer no campo educativo. Deste modo, apesar do espaçamento cronológico dos vários textos e da diversidade dos temas que tratam, o livro ganha uma unidade a que as ideias de fundo que os atravessam e relacionam dão esteio, unidade também acentuada pelo propósito com que foram escritos e são agora apresentados. "Escrevi quase todos os textos", diz Olga Pombo, "em regime de resistência" e, acrescenta, "eles são o efeito doloroso do confronto com o mundo das doutrinas e das representações artificiais do que seja a escola e o ensino que lentamente ocupam os ministérios, as universidades e a própria sala de aula". Escritos *resistentes*, portanto, que vejo também como uma forma de combate, do seu combate, mais intensivo que ostensivo, travado, em primeiro lugar, consigo própria, ao procurar sempre, em cada um e com cada um, o exercício dessa "tarefa inquietante do pensar". Mas combate também pelas ideias que contêm, ideias que vão contra o discurso educativo mais corrente e mais comum, ideias que, por isso, não aquietam mas inquietam, agitam, provocam. Com convicção e paixão.



A Escola, a recta e o círculo
Autor: Olga Pombo
Editora: Relógio D'Água
Fevereiro de 2002
316 pp.
Preço: 14.40 €

No texto de abertura em que pego para apresentar o livro, Olga Pombo analisa e discute o(s) sentido(s) da ideia de sucesso aplicada à Escola e ao aluno (sucesso hoje, e desde há tanto tempo, muito questionado e muito em especial na Matemática). Em ciências humanas, diz Olga Pombo, os problemas ou questões não são equacionáveis, no sentido matemático do termo, a sua língua de trabalho é a língua natural, e por isso, "sem um esforço de clarificação, há uma derrapagem constante do sentido". Daí partir para um trabalho de esclarecimento do conceito de sucesso que nos vai proporcionar, como leitores, uma experiência interpretativa, de ilucidação de significados que atravessa todo o texto e que usufruímos com aquele prazer que só a compreensão dá, prazer que nos chega, diga-se, em muitos momentos do livro todo.

É, o sucesso dos alunos, a sua "capacidade para progredir na escola"? Aquele que é expresso pelos seus bons resultados que lhes permitem suceder na escola, 'passar' de ano, ano após ano? Mas este sucesso, sabemos bem, muitas vezes esgota-se nele próprio e alunos com sucesso escolar muitas vezes não são igualmente bem sucedidos fora da escola. Deverá, então, o sucesso escolar ser aferido pelo sucesso extra-escolar, ou seja, só o ser na medida em que traduza "a capacidade dos alunos para a vida fora da escola", na medida em que se constitui como "um trampolim" para a inserção bem sucedida do aluno na sua vida futura?

A estes dois sentidos de sucesso, a que aponta limitações e insuficiências, Olga Pombo contrapõe um terceiro sentido: o sucesso como a capacidade de auto-superação, a capacidade de cada um "dar o seu melhor sem competir": "Na esfera própria das nossas capacidades (...) não teremos que procurar ser o melhor possível? Não será esse o nosso destino? E, não será esse o nosso dever (e dever da escola que nos diz pretender *educar*) procurar desenvolver as nossas capacidades?". Deste entendimento de sucesso, retira uma implicação: uma Escola em que tal sucesso se cumpra terá que ser uma "escola exigente, que põe à prova cada um de nós, que nos solicita esforço, que nos leva à superação dos nossos limites". Uma Escola que é "lugar privilegiado de aquisição de competências cognitivas" e "lugar complementar de desenvolvimento de si", Escola que ensina e educa, mas educa acima e antes de tudo porque ensina, sem que se limite a propósitos tendencialmente moralizadores ou endoutrinadores.

Olga Pombo desperta-nos já aqui para uma outra ideia que desenvolve e aprofunda num outro texto livro, *Eticidade/racionalidade na comunicação e ensino do conhecimento científico*: a ideia de que "é necessário reconhecer a eticidade do ensino para lá da moralidade da escola". Ou seja, a ideia de que, se a Escola não é neutra do ponto de vista dos costumes e valores sociais e, por conseguinte, exercerá sempre, e em qualquer circunstância, uma função social visando a transmissão desses costumes e valores, é possível investir o ensino de uma qualidade ética na medida em que se lhe reconheça o seu papel e importância na manutenção e desenvolvimento do conhecimento. "Não poderá o ensino", interpela-nos Olga Pombo, "aspirar a um estatuto ético na medida em que, justamente, não perdesse a consciência da sua participação no processo de investigação e produção do conhecimento científico?"

Se escolhi, para falar do livro, o texto inicial com o inspirado título *A Escola, a recta e o círculo* é porque, a meu ver, ele dá o mote e o tom que marcam o livro (dá-lhe também, muito significativamente, o próprio nome) e é nele possível encontrar algumas das suas ideias mais centrais. A Escola como lugar de comunicação vertical entre gerações, pela qual a herança cultural da humanidade é mantida e transmitida e pode desse modo ter continuidade e alargar-se. Escola, portanto, como lugar de conservação e transmissão de saberes, condição para a produção de novos saberes, ideia que Olga Pombo também defende e desenvolve no texto *Comunicação e construção do conhecimento científico*, na segunda parte do livro. O ensino como "fala assimétrica [entre professor e aluno(s)] que ilumina, desdobra e esclarece", como modo "de dar a ver", ideia a que Olga Pombo se refere logo no prefácio e que vai depois retomar mais demorada e detalhadamente no texto *A matemática e o trabalho de 'dar a ver'*. Ensinar, diz-nos aí, "é iluminar para que o outro veja" num acto que leva quem aprende a ser tocado pelo "prazer superior de *ter visto*".

Este livro é, na verdade, um livro sobre a Escola. Com a recta e o círculo lembra-nos, em sugestivas metáforas, a linearidade do percurso do humano apontado à eternidade, "não dos indivíduos mas da cultura", e a circularidade temporal da Escola que, recomeçando em cada ano, todos os anos, pode, com o ensino que *dá a ver*, permitir aos que chegam "participar da visibilidade conquistada pelas gerações precedentes" e que o seu "olhar se alargue a novas paisagens sem se deixar de enternecer com isso".

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Falta de continuidade...

Vai-se iniciar o ano lectivo 2002/2003 e encontro-me à espera do resultado do concurso de colocação por destacamento, pela primeira vez. A indefinição do local de colocação não é novidade, é a rotina anual mas, convenhamos que não é nada agradável, quer a nível pessoal quer profissional e é neste contexto que surge esta reflexão. A utopia tanta vez criada ao longo da formação, da colocação definitiva foi algo que a realidade tão duramente veio desmistificar.

Na escola onde leccionei este ano lectivo, foram-me atribuídas turmas do 10° e do 11° anos, entre outras. Olhei para este desafio com o objectivo de chegar ao fim e alcançar resultados positivos. Além disto, sentia-me estimulado em virtude de não ter ainda leccionado o 10° ano e também de poder acompanhar os alunos até ao exame final.

A turma de 11° ano era uma turma muito heterogénea, onde as classificações variavam de 8 a 19 valores, e os alunos tinham perspectivas e anseios completamente distintos.

Assim, norteei sempre a minha acção no intuito de preparar o melhor possível os alunos, quer de um ano, quer de outro. No início não foi fácil, por razões várias, por exemplo, no 10° ano os alunos não tinham hábitos de trabalho consentâneos com o ano que frequentavam e tinha havido no 11° ano, uma mudança de professor. Mas, com o passar do tempo, conseguimos "remar" no mesmo sentido e os resultados foram surgindo, sendo, no final, globalmente positivos. Neste percurso surgiram pois obstáculos que, com maior ou menor esforço de todos, foram sendo ultrapassados. Contudo, continuam a verificar-se algumas deficiências preocupantes que são notórias nos alunos do 10° ano, pelo facto das matérias leccionadas adquirirem neste ano de escolaridade uma complexidade maior, mas também devido à falta de preparação com que chegam uma parte deles. Pode ser oportuno perguntar: se um aluno tem anos sucessivos de insucesso na disciplina, que perspectivas tem ele de obter sucesso nessa disciplina do 10° ano?

Neste meio onde estamos inseridos, devido a este insucesso, a situação de abandono escolar surge como solução rápida e conclusiva. Pela primeira vez, deparei-me com casos destes e confesso que um sentimento de frustração me percorreu. Todos sabemos que muitos alunos são "empurrados" até ao 9° ano, embora com situações constantes de insucesso na Matemática. O que é que a escola pode fazer por eles? Porquê prolongar, "meter a cabeça na areia", atirar o problema para a frente, sabendo que ele nos irá surgir exponencialmente agravado? Será que a solução é continuar a empurrar? Sabemos que, neste como noutros casos, o tempo não costuma ser bom conselheiro. Duma vez por todas, em vez de decidir primeiro e pensar depois, pensemos primeiro e decida-se depois.

Como professor de turmas onde questões destas surgem constantemente no meu pensamento, por vezes chega a ser desanimador. Mas a relação estabelecida com os alunos, o conhecer outras pessoas, não só os alunos, conviver com eles, ajuda a perceber e dá-nos "dicas" para a compreensão/resolução dos problemas. Assim, desenvolve-se uma relação de amizade. Mas tudo isto se torna irrelevante no "processo maquinal de colocações" de professores. Tenho pena que assim seja e, talvez, quem tem responsabilidades nesta situação devesse gastar um bocadinho do seu tempo a pensar nela. Para além dos professores serem prejudicados com a indefinição que reina até à última hora, começa a criar-se ansiedade e frustração desde o início da carreira porque todo o processo permanece imune às relações e ao trabalho que o professor desenvolve na escola. No entanto, preocupa-me mais ainda a situação de alunos que são os principais prejudicados no seu percurso escolar, com constantes adaptações a novos professores, novos métodos, em vez de a preocupação principal ser a de aprender. Nesta escola onde leccionei, as turmas do secundário que vêm com os mesmos professores desde o básico manifestam muito melhores resultados do que os "outros", que todos os anos têm novos professores. Mas, apesar de tudo, mantenho a esperança de que a situação melhore.

Eduardo Dinis
Esc. Sec. de Ponte de Sôr

Uma aventura no mundo dos professores...

A entrada no mundo do trabalho, qualquer que seja a profissão, é acompanhada por dúvidas, incertezas e angústias. Para qualquer pessoa é sempre um caminho novo a percorrer, na perspectiva de atingir o sucesso que a sociedade exige. A chave desse sucesso e da tão ambicionada estabilidade profissional poderá estar numa formação adequada para o trabalho que se vai executar.

No caso concreto da profissão docente, o início da carreira pode ser bastante traumático. Isto porque, apesar das novas exigências e responsabilidades atribuídas aos professores, não se verificaram mudanças significativas na sua formação, ainda que este seja fundamental para a dignificação da carreira e para a valorização social da função do professor. António Novo aponta um outro motivo de desfasamento entre a formação inicial e o desempenho profissional: a preocupação das universidades ser formar investigadores especializados. Desta forma, não é de estranhar que, quando acabam os seus cursos e começam a dar aulas, os professores sofram grandes choques com a realidade.

A forma como está concebida e como é vivida a formação inicial de professores pode gerar ansiedade nos docentes. Muitos sentem que não dispõem dos recursos necessários para responderem, adequadamente, a certas situações conflituosas, desenvolvendo, assim, a ansiedade e a sensação de não serem capazes de resolverem, com êxito, essas situações. O ano de estágio é, por isso, um ano fulcral na vida de qualquer jovem e inexperiente professor.

É durante o estágio que as expectativas, motivações e constrangimentos dos estagiários se confrontam. Nesta fase de formação, surgem dificuldades e dilemas específicos para os quais os estagiários nem sempre encontram solução. Por exemplo, sobretudo no ensino básico, o controlo da disciplina dos alunos é uma das suas principais dificuldades. O período do estágio apresenta-se como uma etapa da vida do professor que provoca um certo cansaço e cujo utilidade é, muitas vezes, posta em causa.

É muita pressão para quem inicia uma profissão, não vos parece? Perante este panorama, resolvemos contar-vos um pouco da nossa experiência enquanto estagiárias e como temos vivido a aventura de sermos professoras "sem rede", agora que leccionamos sem orientadores. E resolvemos fazê-lo porque pensamos ter algo muito positivo para dizer. Primeiro, porque não consideramos que o nosso estágio foi inútil, antes pelo contrário. Segundo, porque também é necessário reconhecer os aspectos mais conseguidos da formação inicial e não apontar apenas as falhas...

Podemos dizer que o nosso estágio teve de tudo um pouco: medo, confiança, frustação, alegria, incerteza, orientação, motivação, desmotivação, trabalho, convívio, boa disposição... Acima de tudo, aprendizagem!...

Tínhamos medo de falhar, de não corresponder às nossas próprias expectativas. No fundo, sentíamos o peso da responsabilidade: estudámos tanto, tivemos tantas dores de cabeça, durante o curso, sofremos tanto para conseguir ultrapassar as dificuldades, e agora? E se constatássemos que não tínhamos nascido para sermos professoras? E se nos apercebêssemos que todos aqueles anos de estudo iam por água abaixo? Tivemos medo!

Felizmente, com o início das aulas (a primeira aula foi uma emoção, uma aventura que nenhuma de nós vai esquecer...), recuperámos a confiança na nossa capacidade de trabalho e voltámos a acreditar que realmente nascemos para sermos professoras.

Claro que nem tudo foi um mar de rosas! Voltámos a ter momentos em que nada nos parecia bem! Só para terem uma ideia, quando mostrámos as primeiras fichas de trabalho — convém dizer, que passámos uma semana a elaborá-las — aos nossos três orientadores (saliente-se que as leram e analisaram separadamente, mas as discutiram em conjunto connosco) pensámos: "Isto está assim tão mau? Somos assim tão "nabiças"?!..." Havia, em todas a fichas, alguma coisa que faltava, algum pormenor em que não tínhamos pensado, algum aspecto que tínhamos descurado... Enfim, que frustação! Tanto trabalho (parecia!) para nada...

Mais tarde, percebemos, quando fizemos outras fichas de trabalho e, que tudo o que nos tinha sido apontado, foi bem apontado e só serviu para evoluirmos. Mais do que isso, percebemos que as nossas primeiras fichas, sem esses detalhes, poderiam ter fracassado na aula. Existem muitos aspectos que a inexperiência não deixa ver e, aqui, é essencial a presença de alguém experiente para nos alertar dos perigos que os materiais didácticos por nós elaborados podem apresentar.

É por isso que dizemos que o nosso estágio teve, sobretudo, aprendizagem! Errámos, melhorámos! Errámos, melhorámos! E hoje, quando elaboramos, por exemplo, fichas de trabalho, mesmo sabendo que não há os "olhos" dos orientadores para fiscalizarem o nosso trabalho e detectarem os erros, somos suficientemente autocríticas (como se agora fossemos orientadoras de nós próprias) para dizer o que está bem e o que precisa de ser melhorado.

Talvez um dos factores que mais contribuiu para a aprendizagem foi o excelente trabalho de equipa que criámos como núcleo de estágio. Tivemos o privilégio de poder ter orientadores com quem tínhamos escolhido trabalhar no âmbito do projecto de investigação a que pertenciamos (Interacções sociais e apresentação de conhecimento). Um dos aspectos que nos assustava no período pré-estágio, era a possibilidade de divergência entre os vários orientadores, obrigando-nos a desenvolver um tipo de trabalho completamente diferente para cada um deles, o que acabaria por nos desorientar, em vez de orientar. Porém, como conhecíamos o tipo de trabalho desenvolvido pelos três orientadores, sabíamos que íamos remar no mesmo sentido. A nossa aventura no mundo dos professores começou, assim, da melhor forma!... Desde o início, sentimo-nos sempre à vontade para colocar dúvidas, questões, por mais absurdas que elas nos parecessem. E o mesmo se passava em relação aos erros que, por vezes, cometíamos. Estes eram encarados como algo natural, próprio da aprendizagem e vistos de forma construtiva, contribuindo para a nossa evolução como professoras.

Um contributo, também, essencial foi o facto de, com alguma regularidade, os orientadores assistirem e participarem nas nossas aulas. O *feedback* dado no momento permitia-nos tomar consciência de aspectos a melhorar que, de outro modo, não seriam identificados.

Por tudo isto, hoje, professoras "sem rede", sentimo-nos mais seguras, confiantes e capazes de, por nós mesmas, identificarmos as nossas falhas. Aprendemos a reflectir, a pensar no que fazemos, ou não fazemos e podíamos ter feito sem ser preciso alguém nos alertar para isso.

(continua na página 43)

O problema do ProfMat 2002

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat2002 de Viseu consistiu na resolução do problema *Três Lógicos e Oito Discos*:

> Encontrei três matemáticos brilhantes, capazes dos melhores raciocínios lógicos.
> Mostrei-lhes oito discos: quatro vermelhos e quatro pretos. Depois, coloquei dois discos nas costas de cada um e escondi os dois que sobraram. Cada matemático podia ver os discos dos outros mas, claro, não conseguia ver os seus.
> A seguir, fui-lhes perguntando sucessivamente se sabiam que discos tinham nas costas. Cada um, depois de ouvir as respostas anteriores e de pensar um pouco, foi respondendo:
> Augusto — Não.
> Beatriz — Não.
> Carlos — Não.
> Augusto — Não.
> Beatriz — Sim.
> Como é que a Beatriz descobriu e que discos tem ela?

Houve dois métodos que os concorrentes seguiram para resolver o problema.

1º. Método de eliminação de hipóteses

Este foi o processo mais utilizado. Começamos por fazer a lista de todas as hipóteses possíveis de distribuição dos discos (Quadro 1).

Caso	Augusto	Beatriz	Carlos
1	V V	V V	P P
2	V V	V P	V P
3	V V	V P	P P
4	V V	P P	V V
5	V V	P P	V P
6	V V	P P	P P
7	P P	P P	V V
8	P P	V P	V P
9	P P	V P	V V
10	P P	V V	V V
11	P P	V V	V P
12	P P	V V	P P
13	V P	V V	V P
14	V P	V V	P P
15	V P	P P	V V
16	V P	P P	V P
17	V P	V P	V V
18	V P	V P	P P
19	V P	V P	V P

Quadro 1.

A partir da respostas dos matemáticos, vai ser possível ir eliminando as hipóteses.

O Augusto vê quatro discos, dois em cada um dos outros personagens. Se os quatro discos fossem todos da mesma cor (por exemplo, vermelhos), ele saberia a cor dos seus (pretos neste caso). Como ele responde "Não" podemos eliminar os casos 6 e 10.

O mesmo se passa quando a Beatriz diz "Não": Concluímos que não está a ver discos todos da mesma cor. Eliminam-se então os casos 4 e 12.

Também, pela resposta negativa do Carlos, se pode eliminar as hipóteses 1 e 7 (em que ele veria os discos todos iguais).

Mas esta resposta do Carlos ainda nos dá mais indicações. Se estivéssemos no caso 5, em que ele vê VV e PP, ele saberia que não tinha PP (porque o Augusto teria descoberto antes) nem VV (porque a Beatriz teria descoberto antes) e portanto teria respondido "Sim". Logo, eliminamos a hipótese 5.

Um raciocínio idêntico permite eliminar o caso 11.

Passamos à segunda volta de respostas. Volta a ser o Augusto.

No caso 14, ele saberia que não tinha PP (porque a Beatriz teria falado antes) nem VV (porque assim o Carlos teria descoberto antes) e então saberia que tinha um disco de cada cor e responderia "Sim". Como não o fez, é porque não estamos na hipótese 14.

O mesmo raciocínio permite eliminar o caso 15.

Mas, ainda, a partir da segunda resposta negativa do Augusto se podem tirar mais conclusões.

Se estivéssemos no caso 13, o Augusto pensaria:

"Se eu tivesse VV, o Carlos teria descoberto logo. Se eu tivesse PP, o Carlos estaria a ver PP e VV e teria também descoberto (ver raciocínio anterior do Carlos). Logo eu tenho VP".

Mas como o Augusto não falou, é porque não estamos no caso 13.

Por um raciocínio idêntico ao anterior, podemos eliminar a hipótese 16.

Sobram os casos 2, 3, 8, 9, 17, 18 e 19. Mas em todos eles a Beatriz tem um disco de cada cor. Logo, a Beatriz pode dizer que sabe: tem um disco vermelho e outro preto.

2º. Método de dedução pura

Aqui, vão-se fazendo raciocínios que permitirão chegar à resposta. Das várias deduções que apareceram, a mais curta e elegante é, sem dúvida, a do Miguel Mata, que assim tem direito ao 1º Prémio (e depois de a lermos até nos parece que o problema é fácil...):

> Neste problema, a sequência de respostas negativas é extremamente importante. Sempre que um dos matemáticos responde "Não", por falta de dados, está a prestar informações preciosas aos outros. As três primeiras respostas são negativas porque um deles tem dois discos de cores diferentes. Caso contrário, os quatro discos de dois dos matemáticos seriam iguais e o outro matemático saberia que discos tinha nas costas e teria respondido "Sim". O Carlos, que tem esta informação antes de responder, considera que não tem dados para acertar porque vê dois discos de cores diferentes num dos seus colegas.
>
> Resumindo, ao fim das três primeiras respostas sabemos todos que ou a Beatriz ou o Augusto têm dois discos de cores diferentes.
>
> Se a Beatriz tivesse dois discos da mesma cor, o Augusto sabia que tinha um disco de cada cor, mas ele volta a responder negativamente pelo que a Beatriz só pode ter dois discos de cores diferentes.
>
> É a vez de a Beatriz responder...

Além disso, antes de apresentar esta sequência de raciocínios, o Miguel tinha começado por fazer as seguintes considerações:

> É interessante verificar que fazendo um pouco de "batota" é possível afirmar à partida que a Beatriz tem dois discos de cores diferentes. Isto porque o problema só tem sentido se tiver solução e esta é a única solução possível. Isto acontece porque quem responde a este problema nunca poderá concluir que a Beatriz tem dois discos pretos ou dois discos vermelhos, visto não ser possível distinguir estas duas situações.

Finalmente, o José Manuel Duarte acrescentou uma segunda resposta: "Descobri uma resposta muito mais sintética e bela, mas a carga da esferográfica acabou-se ".

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Lista de participantes

Individuais:

Alexandra Mateus
António Amaral
Augusto Taveira
Carla Dias
Elisabete Rodrigues
Idílio Ruivo
Jorge Ferreira
José Manuel Duarte
Manuel Silva
Miguel Mata
Pedro Oliveira
Ségio Valente

Em equipa:

Ana Morais, Avelino Sousa e Joana Morais
Célia Lobo, Mª José Costa e Edite Alves
Graça Lopes e Armando Fernandes
Iva & Nuno Angelino
Luís Santos, Manuel Marques e José Luís Pegada
Mária e António Almeida
ZéZé (José Carlos Campos e José Fernandes)

Premiados e Prémios

1º. Miguel Mata
Calculadora Gráfica Voyage 200, oferta Texas Instruments.

2º. José Carlos Campos e José Fernandes
Calculadora Gráfica TI-89, oferta Texas Instruments.

3º. Manuel Silva
Calculadora Gráfica TI-83, oferta Texas Instruments.

4º. Luís Santos, Manuel Marques e José Luís Pegada
Quatro livros da Colecção "Ciência e Educação", oferta Porto Editora

5º. Augusto Taveira
"O Diabo dos Números", um livro oferta das Edições ASA

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 31 de Julho de 2003. Por favor, contactar a sede em Lisboa da APM. Os vencedores do concurso do ano passado e que ainda não receberam os prémios devem também contactar a sede da APM.

José Paulo Viana

Grupos Equivalentes

A Carolina anda toda entusiasmada com a escola, com os números e com as operações.

Escreveu os números 1, 2, 3,... até um certo *N* e depois separou-os em dois grupos, de tal modo que a soma dos elementos de cada grupo fosse igual. Reparou que, para certos valores de *N*, isso era possível mas que para outros já não era.

Quais são os valores de *N* para os quais consegue o seu objectivo?

E se ela quiser dividir os números em 3 grupos? E em 4? E...?

(Respostas até 28 de Fevereiro)

Cubinhos e Tinta Verde

O problema correspondente ao número 68 de *Educação e Matemáica* foi o seguinte:

Com vários cubinhos iguais e de aresta 1 construiu-se um cubo grande. Depois, algumas das faces do cubo grande foram completamente pintadas de verde. Quando se voltou a desmanchar o cubo grande, havia 24 cubinhos que não tinham nenhuma face verde. Quantos cubinhos havia no total e quantas faces do cubo grande foram pintadas?

Chegaram-nos 19 respostas: Ana Paula Canavarro (Évora), Augusto Taveira (Faro), Darcília Machado (Aveiro), Edgar Martins (Queluz), Eduarda Santos (Tavira), Eduardo Dinis (Ponte de Sôr), Fernanda Correia & Vírgilio Cardoso (Oliveira de Azeméis), Graça Lopes & Armando Fernandes (Vouzela & Esgueira), Helder Martins (Lisboa), Helena Perpétua (Setúbal), Isabel Viana (Porto), Iva & Nuno Angelino, João Barata (Castelo Branco), João Maria Oliveira (Cartaxo), Judite Lima (Vouzela), Paulo Lopes (Covilhã), Paulo & Maria Luís Vasco (Vila Real), Pedrosa Santos e Vidal Minga.

Como diz a Ana Paula, o problema pode ser resolvido em duas fases:

A) Mostrar que só é possível num cubo de lado 4, portanto com 64 cubinhos.

B) Mostrar que foram pintadas 3 faces do cubo grande.

Muitas das resoluções seguiram este caminho. Vejamos, por exemplo, como fez a Helena Perpétua:

Se n for o número de cubinhos por aresta, o total de cubinhos será x^3.

O número mínimo m de cubinhos que não têm nenhuma face pintada é $m=(n-2)^3$. Logo:

Se $n=4$ então $m=8$.

Se $n=5$ então $m=27$.

Como há 24 cubinhos sem nenhuma face verde, será necessariamente $n<5$.

Para $n=3$ o número máximo de cubinhos sem faces verdes é 18 (obtém-se pintando apenas uma face do cubo inicial). Logo, *n* não pode ser 3.

Portanto, $n=4$ e há um total de 64 cubinhos.

Vejamos quantas faces do cubo grande foram pintadas.

Faces pintadas	**Nº de cubinhos sem faces verdes**
1 face	64 – 16 = 48
2 faces concorrentes	64 – 16 – 9 = 39
2 faces paralelas	64 – 32 = 32
3 faces concorrentes	64 – 16 – 12 – 9 = 27
3 faces, sendo duas paralelas	64 – 16 – 16 – 8 = 24

Vários leitores — Edgar, Helder, Isabel, Iva & Nuno e Paulo Lopes fazem o estudo completo para um cubo com *n* cubinhos de lado e para os vários casos de faces pintadas, o que permite uma eventual generalização do problema.

Programa de Empréstimo

TEXAS INSTRUMENTS

education.ti.com/portugal

A Texas Instruments disponibiliza empréstimos de calculadoras e acessórios aos professores de matemática e ciências. Os empréstimos terão uma duração máxima de duas semanas, estão sujeitos à disponibilidade do material e tem como objectivo principal a realização de acções de formação e workshops.

Os seguintes **produtos** estão **disponíveis**:

- TI-83 Plus
- TI-89
- TI-92 Plus
- Voyage 200™
- Calculator-Based Laboratory™ (CBL™) System
- CBL 2™
- Calculator-Based Ranger™ (CBR™) System
- Cabri Geometry II™
- TI Presenter™

Poderá pedir sensores para a sua acção com o CBL. Pode pedir posters, transparências e literatura para distribuir aos participantes durante a sua acção.

Lista de Sensores	Ref #	Lista de Sensores	Ref #
Acelerómetro até 25g	ACC-DIN	Sensor de pressão de 0 a 2.1 atm	GPS-BTA
Acelerómetro de 3 eixos	3D-BTA	Detector de batimentos cardíacos	HRM-DIN
Barómetro	BAR-DIN	Microfone	MCA-CBL
Colorímetro	COL-DIN	Sensor de PH	PH-DIN
Conductividade	CON-DIN	Sensor de humidade relativa	RH-DIN
2 amperímetros e 2 voltímetros	CV-DIN	Monitor de radiações	SRM-DG
Temperatura	DCT-DIN	Termopar tipo K-temperaturas de -200 a 1400°C	TCA-DIN
Sensor de força de duplo alcançe	DFS-DIN	Sensor de luminosidade TI	CBL/CA/C
Sensor de electrocardiograma	EKG-DIN	Sensor de voltagem TI	CBL/CA/G
Monitor de batimentos cardíacos para exercício	EHR-DIN	Sensor de campo magnético	MG-DIN
Sensor de fluxo da água	FLO-CBL	Detector de movimento por ultrasons	MD-CBL

USUFRUIR DOS NOSSOS EMPRÉSTIMOS É GRÁTIS E FÁCIL!

As calculadoras e o ViewScreen™ (caso seja pedido), serão entregues pela nossa transportadora em mala própria, um dia ou dois antes do começo da sua acção. No fim, apenas terá de arrumar as calculadoras na mala, colar a etiqueta fornecida e telefonar para o serviço de entregas para fazer o levantamento.

Não se esqueça de nos contactar pelo menos com um MÊS DE ANTECEDÊNCIA.

CARTA: CSC (Centro de Suporte ao Cliente) C/o Sitel Belgium Woluwelaan 158–1831 Diegem — Bélgica

TELEFONE: 800 832 627 (número gratuito) | **FAX:** 21 424 51 30 | **E-MAIL:** ti-loan@ti.com | **INTERNET:** http://education.ti.com/portugal/apoio/pemprestimo/

Se quiser fazer o pedido por fax ou carta, por favor preencha o formulário seguinte:

Nome: ____________________ Escola e cursos ensinados: ____________________

Data do inicio da formação: ____________________ Data do fim da formação: ____________________

Telefone (escola): ____________________ Telefone (casa): ____________________

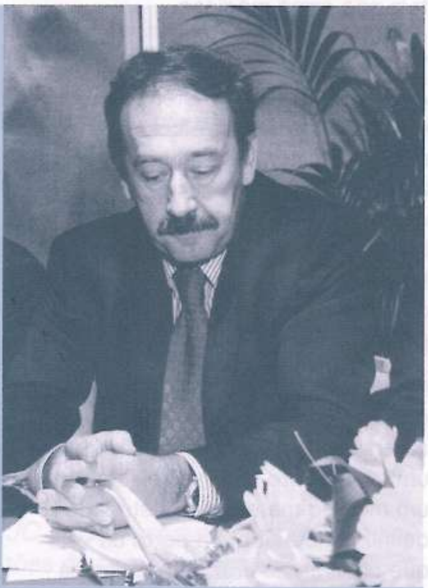
Morada: ____________________ Fax: ____________________

E-mail: ____________________

Produtos Necessários	Quantidade	C/ Viewscreen (Sim ou Não)

A multidisciplinaridade em medicina

Isabel Rocha e Manuela Pires



Biografia

- 1973 — Licenciatura em Medicina pela Universidade de Lisboa
- 1973–1974 Monitor de Neurologia no Serviço de Neurologia (Director Prof. Miller Guerra) do Hospital de Santa Maria
- 1981 — Especialização em Neurologia no Hospital da Universidade de Coimbra (Director Prof. Nunes Vicente)
- 1992–1998 Membro da Direcção Nacional da Ordem dos Médicos (2 mandatos)
- 1996 — Chefe do Serviço de Neurologia nos Hospitais Civis de Lisboa
- 1996 — Director do Serviço de Neurologia do Hospital de S. José
- Desenvolveu no Hospital Militar Principal e no Hospital de S. José a Técnica de Potenciais Evocados
- Área de investigação a que se tem dedicado — Acidentes Vasculares Cerebrais

Em conversas de amigos muitas vezes se tem debatido, de uma forma informal, as ligações entre a Medicina e a Matemática, a evolução convergente e as mudanças que vão acontecendo nas profissões. Surgiu, a propósito do ano temático Matemática e Profissões, a ideia de formalizarmos algumas dessas trocas de opinião. Convidámos num domingo ventoso, o nosso amigo *Joaquim Machado Cândido*, neurologista, animador frequente dessas discussões, para almoçar uma bela sopa de peixe e outros acepipes marinhos, bem regados, que nos preparam para a troca de ideias que se segue.

Educação e Matemática (EM) — A nossa entrevista tem a ver com a forma como as profissões utilizam a Matemática e a primeira questão é: como é que o médico lida profissionalmente com a Matemática?

Joaquim Cândido (JC) — A questão é tão ampla que vale a pena falar do passado e do presente na história da Medicina. É do conhecimento de todos que as raízes da medicina ocidental estão na velha Grécia, contudo são os árabes que mais desenvolvem a medicina na Península Ibérica, em particular, em Espanha. Córdoba, no séc. XII, tornou-se o centro da medicina árabe. A originalidade desta medicina estava em atribuir grande importância à prática, principalmente aos meios terapêuticos. Avicena, filósofo e médico, que viveu no séc. XIII, aconselhava "deve-se seguir o filósofo na filosofia e o médico em matéria de medicina". Ele foi seguramente um dos médicos mais decisivos na formação de um pensamento médico ocidental.

Esta componente empírica, mais arte do que ciência, ainda tem um peso importante na actividade médica do dia a dia. Uma boa parte das nossas decisões terapêuticas são baseadas na nossa experiência pessoal, não têm evidência científica. O cirurgião que opera 100 doentes com a mesma patologia, tem melhores resultados do que o cirurgião que só operou um doente pois a sua probabilidade de errar é menor, mas ele decide em função da sua experiência, não é uma decisão científica.

EM — Esse é um conhecimento que vem da prática...

JC — O conhecimento médico vem muito da prática e da experiência acumulada. Contudo não pode prescindir da investigação e da contribuição de múltiplas ciências. Hoje, um médico, não pode decidir unicamente pela sua experiência e pelo maior ou menor conhecimento da fisiopatologia das doenças. Necessita, cada vez mais, de se apoiar em estudos epidemiológicos que mostram a evidência na decisão terapêutica. A linguagem entre médico e doente é, cada vez mais, no sentido da probabilidade científica. A experiência e a arte do médico são importantes quando a decisão é científica.

EM — Mas hoje no acto médico, feita a história clínica do doente, há decisões que se baseiam em pressupostos...

JC — Em pressupostos científicos e aí é que entra a Matemática. Estamos na fase da grande mudança na Medicina, tornar a decisão médica científica.

E hoje há dois tipos de Medicina, dois conceitos que estão em confronto em todo o Mundo. No conceito corporativo do médico, a relação entre o médico e o doente assenta no pressuposto de que o médico tem razão, é uma pessoa com conhecimentos e decide sempre bem, conceito que hoje está posto em causa pela ciência. Por mais experiência que eu tenha, não posso continuar a decidir só pelos meus conhecimentos, só pela minha experiência, é preciso demonstrar "matematicamente" que a minha decisão é correcta.

EM — Mas isso também tem a ver com a investigação ser agora algo muito mais amplo, com o aumento da comunicação, com o conhecer-se mais casos.

JC — Um exemplo: nos Estados Unidos, a determina altura, a cirurgia das carótidas nos doentes com tromboses cerebrais, tornou-se a cirurgia vascular mais realizada. Ao fim de uns anos de reflexão, quando se começou a estudar esta população, do ponto de vista epidemiológico, quando se começou a usar a estatística, chegou-se à conclusão que só os doentes que tinham uma estenose superior a 70% tinham vantagem em ser operados, ou seja, todos os outros que o estavam a ser, por melhores que os cirurgiões fossem, estavam a ser prejudicados, pois estes ficariam melhores com alguns miligramas de aspirina.

EM — Estás a dizer que o médico para além de uma boa formação que tem de ter nas áreas que já focaste tem de ter uma boa formação matemática também?

JC — A formação do médico, em matemática, é muito insuficiente, contudo, penso que são as preocupações científicas e a investigação clínica que mostram o nosso desconhecimento ou as nossas insuficiências na matemática. Os médicos trabalham muito isolados de outras ciências, como a matemática. A cultura de "gestão" entrou mais na linguagem médica do que a cultura matemática. Se ele não tiver uma cultura matemática, componente fundamental da sua cultura científica, ele tem problemas de decisão. Para tomar uma decisão correcta tem de se apoiar na evidência e hoje eu não posso só dizer que tomar aspirina é bom, tenho de saber quais e quantos estudos mostraram que se fizer isto há menos tromboses, é a questão da probabilidade, é a utilização das ciências pré-clínicas, neste caso a matemática, a estatística para decidir. Há dias em que tomo mais de cem decisões importantes, faz isto ou aquilo, liga, desliga, são decisões importantes sobre a vida das pessoas. Há pessoas que tomam diariamente muitas decisões importantes.

A medicina moderna, nos últimos 30 anos, passou a utilizar a matemática para tornar a decisão médica científica. Cada dia temos novas evidências terapêuticas, ao mesmo tempo que são destruídas "verdades" que foram inquestionáveis durante décadas.

EM — Onde é que achas que os médicos podem desenvolver mais essa cultura matemática? Na formação inicial, ao longo da vida, em períodos de investigação...

JC — Mais do que novas cadeiras de matemática, é preciso criar protocolos e projectos conjuntos entre médicos, matemáticos e outros. Falta multidisciplinaridade.

Esta questão nunca foi muito compreendida na formação médica. Nos últimos anos tem havido mais informática e estatística, a matemática tem sido progressivamente incluída, mas ainda é muito pouco. Hoje a Matemática para mim é um novo instrumento e uma nova linguagem. Ultimamente, algumas Universidades e Departamentos, como a Universidade de Aveiro e o I. S. Técnico, têm desenvolvido vários programas na área da neurologia, em parceria, com os respectivos serviços dos hospitais. O avanço tecnológico recente e o desenvolvimento das capacidades dos computadores permitiram desenvolver modelos biológicos capazes de antecipar com grande precisão os resultados de muitos procedimentos médicos.

EM — Estás então a referir-te ao papel das tecnologias e da modelação matemática no acto médico?

JC — As novas tecnologias aplicadas na medicina, em particular nos meios auxiliares de diagnóstico, vieram aumentar desmesuradamente a informação sobre a doença. A decisão tornou-se mais complexa. Este crescimento da informação tem deixado para segundo plano a observação clínica com consequências graves para o doente. Hoje temos doentes com "doenças" porque a tomografia axial computadorizada ou a ressonância nuclear magnética mostram uma determinada imagem. Lá por ter uma "pintinha" pode não querer dizer nada. Estes excessos de tecnologia sem uma semiologia e uma observação clínica já têm um peso significativo nos erros médicos.

EM — E quanto à modelação?

JC — Os modelos matemáticos vieram, de facto, revolucionar a epidemiologia clínica, a cirurgia e os meios auxiliares de diagnóstico permitindo o desenvolvimento de métodos não invasivos de prevenção, diagnóstico terapêutico e de reabilitação das mais diversas patologias, cardiovasculares, pulmonares, ...

Quando se está a fazer uma cirurgia ao coração e se vai buscar uma safena (veia da perna), ou fazer um transplante, é possível, com um modelo matemático estudado definir exactamente a parte da veia que nós vamos tirar com todas as suas particularidades, no sentido, por exemplo, de ser enxertado. No electroencefalograma, recolhemos energia cerebral normal da nossa actividade, estimulamos do ponto de vista auditivo, visual e eléctrico os pés ou as mãos, e também estimulamos do ponto de vista posicional e até do ponto de vista intelectual. Há técnicas em que mandamos as pessoas fazer contas, técnicas de memorização e isso vai provocar energia e essa energia acrescenta a energia da actividade normal. Hoje, pela grande capacidade dos computadores e com determinados modelos matemáticos consegue-se prever, seleccionar dentro da actividade a energia que para lá mandaste, que estás a recolher, e prever a localização dessas ondas e daí os modelos matemáticos estarem à frente dessas coisas. Vão-se estudando os modelos e vai-se confirmando com a realidade. E muitas vezes têm de se fazer estudos epidemiológicos para se perceber se correspondem à realidade. A angiografia era uma chatice, porque o paciente levava um catéter. A própria TAC era um método mais atrasado, mas hoje com a TAC em espiral faz-se quase uma angiografia, porque se reproduz tudo a três dimensões, o vaso, estrutura do vaso, com imagens semelhantes, ou melhores que as angiografias e tudo virtual, fruto de modelos matemáticos de aproximação. O tridimensional é a nova geração, a ecografia veio revolucionar tudo a três dimensões, é diferente de ver a uma ou duas dimensões.

EM — Quer dizer que ao longo dos quase 30 anos de actividade profissional tu sentes uma grande diferença na tua prática profissional

JC — Esta discussão da medicina científica é uma discussão que se coloca nos últimos 20 anos e não é pacífica, mesmo entre médicos. Nós estamos num momento de grande discussão e de opções, isto não é certo que evolua no sentido do científico.

EM — Esta conversa faz-nos lembrar as questões de educação, parece que o debate é comum a várias profissões...

JC — Estou convencido que as questões do corporativismo, da linguagem e da formação são comuns à generalidade das profissões, as questões têm sido mais sindicais e menos técnicas. Os profissionais têm-se preocupado pouco com o desenvolvimento científico na sua actividade profissional.

Os doentes, felizmente, vão sendo cada vez mais exigentes. A participação em estudos multicêntricos, europeus e mundiais têm aumentado em Portugal. São estudos caros que exigem rigor científico. A maior facilidade de contactos na Europa tem trazido um grande impulso à investigação.

EM — E as equipas são multidisciplinares?

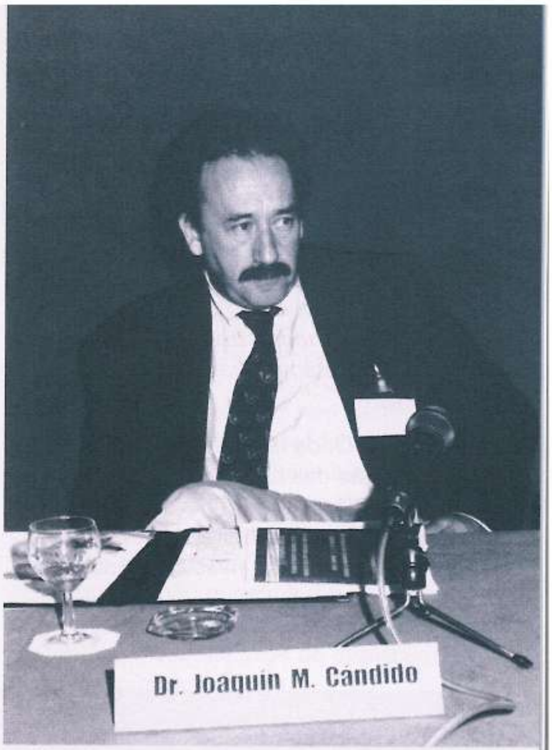
JC — Do ponto de vista da medicina sim, mas há aqui uma questão cultural que ainda não ultrapassámos: contratar matemáticos, físicos, biólogos para equipas multidisciplinares. Se alguém propuser isso no hospital acham-no louco. O que existe é colaboração, como já referi, com Universidades na área da neurologia e têm-se feito coisas interessantes no tratamento de sinal electroencefalográfico no sono.

As pessoas que hoje são defensoras da medicina científica têm de fazer tudo para a aproximação com os biólogos e os matemáticos. A matemática aqui funciona como um instrumento, como uma nova linguagem e até como uma maneira de pensar.

EM — A questão agora é virada para a neurologia. Deves conhecer a teoria das múltiplas inteligências de Howard Gardner, que tem fundamento em trabalhos da neurobiologia, teoria que tem interesse do ponto de vista pedagógico. Segundo ele, há zonas cerebrais específicas que desempenham um papel fundamental, tendo identificado sete inteligências, entre as quais a inteligência lógico-matemática e a inteligência espacial. Achas que há zonas do cérebro que desempenham um papel fundamental?

JC — Não existe evidência de que os grandes matemáticos tenham uma estrutura biológica excepcional. A questão da localização das funções cerebrais é muito antiga. A avaliação neuropatológica de doentes com acidentes vasculares cerebrais ou tumores encefálicos mostra alterações das funções nervosas superiores de acordo com a área do cérebro atingida. Hoje, a investigação neuropsicológica tenta analisar e individualizar várias áreas do cérebro responsáveis por funções determinadas. António Damásio, autor do "Erro de Descartes" apresentou o trabalho mais consistente de investigação ao correlacionar a afectividade com determinadas lesões cerebrais em dezenas de doentes.

Por exemplo, as operações mentais com números não são uma actividade fácil para o nosso cérebro. Não nascemos espontaneamente matemáticos. Se compararmos a capacidade de memorização dos números entre ocidentais e orientais constatamos que os orientais memorizam mais números do que nós, provavelmente porque a verbalização do número é mais curta do que a nossa, da mesma forma que num acidente vascular cerebral de um chinês as alterações da escrita são diferentes de um ocidental.



EM — E a idade é um factor determinante na aquisição de competências relacionadas com a matemática?

JC — Não aprendemos o mesmo em qualquer idade. Se uma criança não tiver contactos com pessoas que falem, não aprende a falar. A criança nos primeiros meses de vida identifica alguns números. A aprendizagem da matemática deve iniciar-se o mais cedo possível, contudo a maturação cerebral traz limites à sua aprendizagem.

EM — Mas achas que pode haver crianças com mais aptidão lógico-matemática do que outras e isso é determinante? Ou o ambiente em termos de estímulo também pode ser determinante?

JC — Existem diferenças significativas entre as crianças na sua capacidade de aprendizagem da matemática. Algumas com QI baixos têm grande capacidade matemática. O processo de maturação cerebral é determinante na capacidade de resolver problemas matemáticos. O ambiente, o estímulo e a persistência no estudo da matemática são decisivos nos resultados finais.

EM — Mas em relação à Matemática também há muitos estudos americanos, nomeadamente sobre as diferenças entre o homem e a mulher. O Lobo Antunes numa entrevista ao Público, relativamente às diferen-

ças entre o cérebro do homem e da mulher, afirma que, provavelmente, as poucas aptidões que são diferentes é a habilidade matemática, em que as mulheres poderão ser mais hábeis. Estes estudos fazem-nos um pouco de confusão. Achas que há evidência disso?

JC — Onde há mais evidência é na questão das capacidades espaciais, onde a mulher tem mais dificuldades. No resto, a mulher tem mais capacidade analítica, mais capacidade de linguagem e depois há muita coisa de abstracção, porque o problema que se coloca nesta investigação é que se tem de comparar o que é comparável e depois faltam estudos em termos reais e em termos culturais há muitas variáveis.

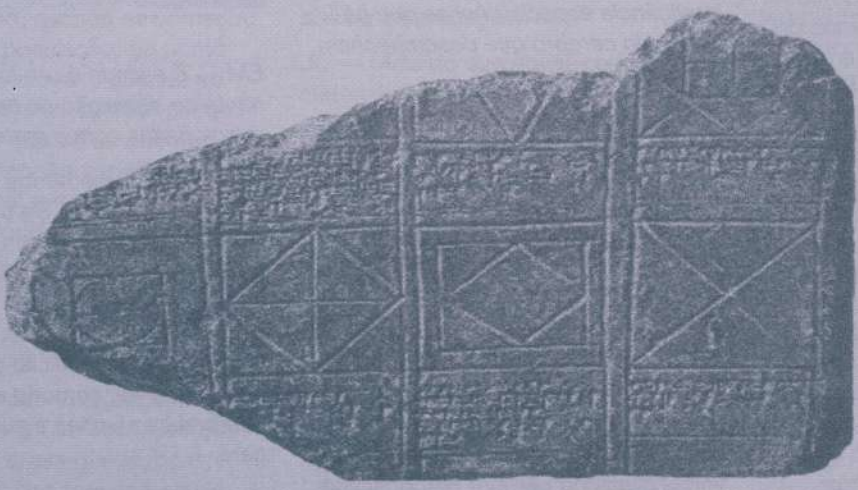
EM — Com esta ideia da necessidade de prosseguirem os estudos nestas áreas parece-nos oportuno terminar esta entrevista (quando as mulheres ainda estão em vantagem ...)

Em nome da redacção da revista Educação & Matemática, agradecemos a colaboração e á disponibilidade do Dr. Joaquim Machado Cândido.

Isabel Rocha
ESE de Leiria

Manuela Pires
Esc. Sec. Eng. Acácio Calazans Duarte

Fotografias de Manuela Pires



O Teorema de Pitágoras "escondido"

Elsa Fernandes

Há dias, quando assistia às aulas da disciplina de 'Práticas de Serralharia', de um curso de serralharia promovido por uma Escola de Formação Profissional, observei o seguinte episódio:

Os aprendizes construíam uma peça com a forma rectangular que iria servir de tampo para uma cadeira. O Paulo mede 6 cm num dos lados e faz um pequeno traço na peça. Depois mede 8 cm no lado perpendicular ao primeiro medido e faz de novo uma marcação. Finalmente mede a distância entre a primeira marcação e a segunda. Depois, comenta com o Alberto.

Paulo: Não está. Temos que desmanchar.
Elsa: Porquê?
Paulo: Tem 102 mm.
Elsa: E então?
Alberto: Tinha que ter 100.
Elsa: Porquê?
Paulo: Nós usamos sempre estas medidas 6, 8 e 10.
Elsa: Mas...
Alberto: Normalmente usamos o esquadro. É mais fácil. Vê-se logo. Mas não havia aqui nenhum.
Elsa: Mas porquê 6, 8 e 10?
Paulo: Se tiver essas medidas, está em esquadria.
Elsa: Como é que sabem?
Silêncio.

Nesse momento o Mestre, que escutava atentamente a nossa conversa, aproxima-se e diz:
Mestre: Quando vos ensinei isso, expliquei que era o Teorema de Pitágoras, não expliquei?
Ao lado, encontrava-se Richard a construir uma outra peça.
Richard: Trinta e seis mais sessenta e quatro dá cem.
Mestre: Pois.

Sobre este episódio podemos dizer: — Que engraçado! Os serralheiros também usam o Teorema de Pitágoras - e ficarmo-nos por aí. Mas se estivermos num dia mais virado para a reflexão podemos olhar para aspectos da aprendizagem da Matemática escolar tomando este episódio como ponto de entrada.

Meses antes da acorrência deste episódio, assisti às aulas de Matemática do mesmo curso e portanto com os mesmos alunos como actores principais. Os alunos que na prática de serralharia não identificaram o Teorema de Pitágoras, na aula de Matemática resolveram várias tarefas que envolviam a utilização do Teorema de Pitágoras. Utilizaram-no com menor ou maior grau de sucesso, mas, de facto, trabalharam com este teorema e até o chamavam pelo nome.

Parece então que podemos afirmar que estes alunos não fazem conexões entre o que aprendem na aula de Matemática e a Matemática que utilizam na prática de serralharia. A que se deve tal facto?

A Matemática, muitas vezes, surge incorporada nas ferramentas e nas práticas e não é visível para os aprendizes de serralheiro. Tenho evidência de outros episódios (ver Fernandes, 2002) que mesmo quando ela surge de uma forma mais explícita, os aprendizes de serralheiro também não fazem conexões. O mesmo acontece na escola, com as diferentes disciplinas. Os alunos sabem, por exemplo, resolver equações na aula de Matemática e não as sabem resolver na aula de Física. Porquê? Reflictamos sobre a forma e função das tarefas em cada um dos contextos (prática da Matemática escolar e prática de serralharia).

Que semelhanças/diferenças entre o modo como o Teorema de Pitágoras é utilizado na prática de serralharia e na prática da Matemática escolar? As duas utilizações são realmente bastante semelhantes em termos de forma. E em termos de função? O que poderemos dizer sobre cada uma delas? Quais são as características estruturais do cenário real de cada uma delas? Assemelha-se mais à prática de serralharia ou à da Matemática escolar (em termos da fonte onde reside a autoridade)? Quais as características estratégicas do cenário real em cada um dos casos? Privilegia a linguagem da serralharia ou a linguagem matemática? (Dowling, 2001) Na prática de serralharia o Teorema de Pitágoras surge como um problema do aprendiz, que ele tem que resolver para construir a cadeira. Da construção da cadeira faz parte, entre outras coisas, a resolução de uma questão que nós, Educadores Matemáticos e Matemáticos, identificamos como sendo Matemática. E os aprendizes de serralheiro verão o problema do mesmo modo que nós? Para os aprendizes a questão faz parte da arte de serralheiro, tal como desenhar, medir, soldar, cortar. A Matemática surge entrançada com as outras actividades de serralharia. Aprender serralharia é aprender a articular todas estas 'técnicas' de modo a possibilitar a construção de um determinado projecto. Saber cada uma das técnicas separadamente não implica necessariamente saber construir uma cadeira ou uma janela. Um serralheiro competente é aquele que é capaz de articular todos os saberes de modo a construir uma determinada peça. Do mesmo modo que um aluno matematicamente competente é aquele que é capaz de articular os conhecimentos matemáticos que tem para resolver uma determinada tarefa (seja ela proposta no âmbito escolar ou não escolar).

A utilização do Teorema de Pitágoras no âmbito da Matemática escolar é uma tarefa "imposta" pelo professor, e é uma questão que o aluno tem de resolver porque é aluno de Matemática daquela turma.

Assim o objectivo e função das tarefas propostas na aula de Matemática é muito diferente do objectivo e função das questões, por nós identificadas como matemáticas, na prática de serralharia. Na serralharia os princípios de avaliação residem no aprendiz de serralheiro. É ele que avalia se utilizando um determinado processo consegue ou não construir a o projecto a que se propos. Na aula de Matemática os princípios de avaliação residem com o professor.

Estas dissemelhanças estruturais e estratégicas entre a prática da Matemática escolar e a prática de Serralharia colocam um desafio no debate sobre a possibilidade da Escola ser ou podem ser o contexto para a transmissão de habilidades que possam ser generalizadas de um modo simplista para outras práticas, como seja, por exemplo, a prática de serralharia.

Bibliografia

Dowling, P. (2001) Reading mathematics texts. In P. Gates (Ed), Issues in Mathematics teaching. pp. 180-196. London and New York: Routledge/Falmer.

Fernandes, E. (2002) A recontextualização na sala de aula de Matemática e na Serralharia. Em Actas do ProfMat2002. APM. Lisboa.

Elsa Fernandes
Universidade da Madeira

Matemática • Profissões

Pontos de vista, reacções e ideias...

(continuação na página 33)

É importante que um professor tenha consciência que também erra, que também falha. Há que assumir esses erros e essas falhas, melhorá-los e seguir em frente. É isso que tentamos fazer.

Sentimos que podemos fazer um bom trabalho (se nos deixarem ter colocação! ...), mesmo sem termos muitos anos de experiência. Temos muito para dar, mesmo trabalhando por vezes em situações adversas, com poucos recursos e poucas ajudas. Sentimos ter aprendido que trabalhar em equipa é dos melhores remédios para as "doenças" de que a Educação sofre no nosso país. Sentimos uma grande frustação por não termos a certeza de que, no próximo ano lectivo, estarmos a fazer o que gostamos... Mas continuaremos a remar juntas... Para que a aventura continue... Se nos deixarem...

Rita Carmo e Sónia Mendes

Encontros em 2003

ProfMat 2003

Santarém

19, 20 e 21 de Novembro

XII Encontro de Investigação em Educação Matemática

Este encontro, organizado pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, vai realizar-se nos dias 18, 19 e 20 de Maio de 2003 em Évora.

Contactos:

António Borralho
amab@uevora.pt

Cecília Monteiro
ceciliam@fenix.eselx.ipl.pt

Em breve mais informações em:

www.dpe.uevora.pt

3º Simpósio Ensino das Ciências e de Matemática

O Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa promove o 3º simpósio que tem como tema central a Formação de Professores: Perspectivas e Desafios. O simpósio terá lugar nos dias 30 e 31 de Janeiro e 1 de Fevereiro de 2003, na Faculdade de Ciências. Para obter mais informações contacte Carmen Galinhas/ Fernanda Freire (DEFCUL) Campo Grande, C1–Piso 2, 1749–016 Lisboa. Telef.: 351 21 750 00 49/21 750 01 41. E-mail: educacao@fc.ul.pt

ICTMT 6

A sexta conferência do International Conference on Tecnology in Mathematics Teaching realizar-se-á na Universidade Thessaly, na Grécia, decorrendo de 10 a 13 de Outubro de 2003. Para obter mais informações, poderá consultar o site

http://ictmt6.pre.uth.gr

XI Conferência Inter-Americana da Educação Matemática

O Comité Interamericano da Educação Matemática (CIAEM) e a Universidade Regional de Blumenau (FURB) vão realizar entre 13 e 17 de Julho de 2003, em Blumenau-SC, Brasil, a XI Conferência Inter-Americana da Educação Matemática.

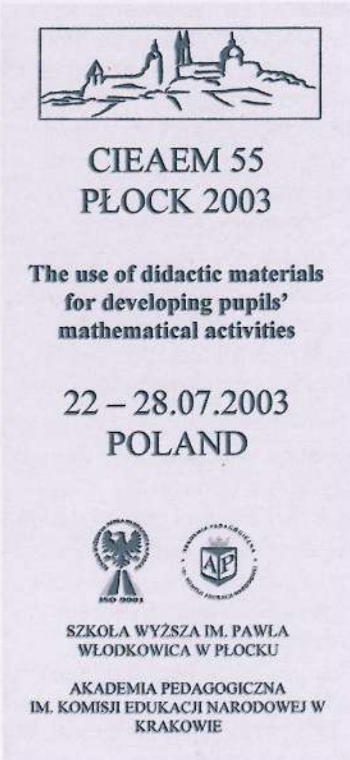
Para mais informações consulte a página: http://www.furb.br/xi-ciaem

CIEAEM 55

Plock 2003

O próximo CIEAEM cujo tema é "Uso de materiais didácticos" terá lugar em Plock, Polónia de 22 a 28 de Julho de 2003.

Para mais informações contactar o secretariado da conferência através do e-mail: cieaem55@ wlodkowic.pl



Online Educa Barcelona 2003

De 5 a 7 de Maio

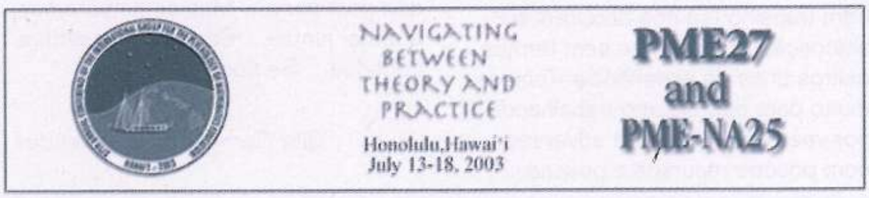
http://www.online-educa-barcelona.com/esp/index.htm

PME27

O encontro PME27 irá ter lugar em Honolulu, Hawi'i, decorrendo de 13–18 Julho de 2003.

Para o caso de se querer inscrever, poderá fazer o *download* do primeiro anúncio na *web*:

http://www.hawaii.edu/pm27



Quota 2003

No ano de 2003 o valor da quota é de €43,00 para professores, €30,50 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €47,00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Nome: ______________________ Sócio nº: __________

Morada: ______________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ Email: __________

Data de Nascimento __/__/__ Nº de Contribuinte: __________

Nº do B.I. __________ Arquivo: __________ Data de emissão: __/__/__

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de ensino: __________

Categoria profissional: __________

Escola: ______________________

Morada: ______________________

Telefone: __________ Email: __________

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número I_I_I_I_I I_I_I_I_I I_I_I_I_I I_I_I_I_I cvv I_I_I_I *

Visa ☐ **MasterCard** ☐

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________ __________ Data __/__/__

Assinatura ______________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Assinatura da Revista Quadrante

☐ Sócio(a)	€10,00
☐ Sócio(a) residente no estrangeiro	€12,50

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12,47 — 20%; de €12,47 a €24,94 — 15%; mais de €24,94 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: apm@netcabo.pt

Índice