Educação e Matemática

Nº 67

Março/Abril de 2002

Preço: 5€

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

A capa deste número é dedicada ao matemático português Pedro Nunes. Os elementos básicos que a constituem são a loxodromia e o nónio. A loxodromia foi caracterizada pela primeira vez por Pedro Nunes, como uma curva que aproxima assimptoticamente os pólos. A curva foi, neste caso, produzida usando o software MAPLE, implementando a aplicação inversa da projecção de Mercator e aplicando-a a uma espiral (figura 1). A referência ao nónio é feita através de uma réplica de um astrolábio de grande precisão, ao qual se encontra acopolado um nónio. Esta réplica foi elaborada recorrendo a um programa de modelação 3D. A peça, desta réplica, de execução mais difícil foi, curiosamente, a que se descreve na figura 2.

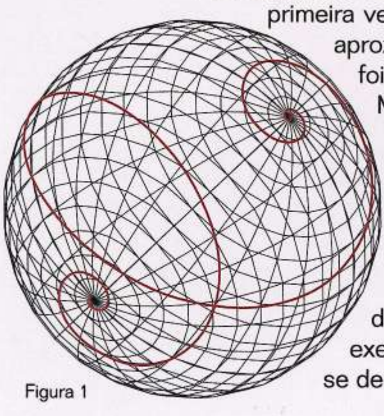


Figura 1

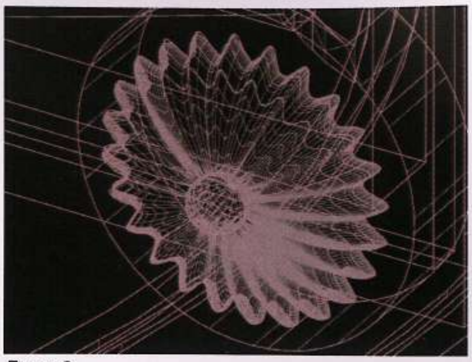


Figura 2

Neste número também colaboraram

Adelina Gouveia, Ana Vieira Lopes, António Manuel Silva, Carlos Sá, Célia Eusébio, Cristina Loureiro, Cristina Roque, Fátima Alves, Fernando Nunes, Francisco Martins, Isabel Cristina Dias, José J. Borges, Jorge Nuno Silva, Luís Reis, Luísa Carvalho, Luísa Solla, Maria Eugénia de Jesus, Maria Fernanda Estrada, Maria Otília Moreirinha, Nuno Dias, Paulo Jorge R. Dias, Paulo Oliveira, Pedro Esteves.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Abril de 2002.

Correspondência — A revista tem novo e-mail!

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27 - A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 217163690
Fax: (351) 217166424
e-mail: revista@apm.pt

Nota

nº 67
Março/ Abril de 2002

De Abril 1988 a Abril 2002, e segue...

Fernando Nunes

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Joana Brocardo

Sub-Directora
Adelina Precatado

Redacção
Alice Carvalho
Ana Paula Canavarro
António Fernandes
Elisa Figueira
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Isabel Rocha
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Paginação e Pré-Impressão
Gabinete de Edição da APM
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Tiragem
5200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez
Impressão
Scarpa impressores
N.º de Registo: 112807
N.º de Depósito Legal: 72011/93

Há precisamente 14 (1+4+9) anos, em Abril de 1988, realizou-se um seminário promovido pela APM, sob o título "Renovação do Currículo de Matemática". Não pretendo comemorar efemérides — muitas vezes esquecidas e sem continuidade — nem defender que não se evoluiu nada nestes anos de intervalo — a palavra "competência", então ausente, é de uso frequente nos dias que correm — julgo antes que é importante haver intenções expressas nos textos para discussão que se possam concretizar. Esta é a minha opinião, depois de os ler uma vez mais.

Os princípios a que deveria obedecer "Um currículo para a Educação Matemática" são sete. Defendem algumas ideias fortes a serem consideradas, quando se pensa na concepção de linhas orientadoras para a Matemática nos currículos dos diferentes níveis de escolaridade. Começa-se por chamar a atenção que "todo o currículo é histórico", portanto nunca pode ser considerado definitivo e deve ser avaliado e sujeito a reformulações. Tem de ser legível e utilizável pelos professores, devendo "ser entendido como um instrumento", um meio que forneça informação sobre experiências de aprendizagem. "O currículo deve ser flexível", permitindo concretizações diferenciadas, em relação a alunos e professores e também "significativo", pois o aluno tem de "reconhecer valor naquilo que estuda e no momento" em que o faz. Outra ideia fundamental tem a ver com a "integração" da Matemática, evidenciada pelo estabelecimento de relações, seja dentro dela própria, seja com outras disciplinas e com o mundo real. Finalmente são realçadas as ideias de "equilíbrio", onde se defende que todos têm o direito de aprender Matemática, com a existência de uma base curricular geral no ensino básico, e a de "consistência", no sentido de ela existir entre vários aspectos, nomeadamente entre os princípios e orientações e a avaliação.

Não é difícil reconhecer nestes princípios algumas orientações que foram marcando ao longo dos anos a actividade da Associação e também os documentos oficiais de índole curricular, no que respeita à Matemática. De facto, a revisão programática do início dos anos 90, do século passado, incorporou nos programas de Matemática a necessidade de se dar atenção ao desenvolvimento de capacidades e à consideração de atitudes, a par com a chamada aquisição de conhecimentos. A influência tem sido crescente e é nas actuais orientações para o ensino básico e no que está delineado para o ensino secundário que se podem identificar vários pontos concordantes com os princípios defendidos há 14 anos por participantes no seminário. Desde a unidade do ensino básico, integrado um currículo nacional, passando pela existência de espaços curriculares onde a Matemática pode e deve existir, associada a outras áreas, até à flexibilização curricular anunciada, vários são os aspectos que se alinham com o que tem sido defendido pela APM. Claro que existem outros onde ainda não se nota reflexo. Para tocar apenas num deles, está ainda por fazer um esforço maior para que a avaliação seja concordante com o que é considerado importante a nível dos conteúdos e processos curriculares. No entanto, existiu um processo esforçado e longo, para o qual a APM contribuiu na medida das suas capacidades, no sentido de concretizar uma mudança nas linhas adoptadas em relação às orientações curriculares.

Mesmo sabendo que o que é dito, antes de umas eleições legislativas pelos vários quadrantes políticos, é bem diferente do que se diz depois de elas se realizarem, e ainda mais diferente do que efectivamente se faz, não parece ser uma atitude responsável, por parte de quem deve assumir a responsabilidade, ignorar todo esse processo e inviabilizar que se possa avaliar o que está actualmente proposto. Não é imprescindível que se concorde com a totalidade das medidas legais, nem com a forma como a informação tem circulado, para se reconhecer que existem grandes potencialidades, já expressas e ratificadas ou com possibilidade de o virem a ser, nas actuais propostas curriculares. Como todos sabemos que em educação as mudanças levam tempo a efectivar-se e mais ainda a mostrar os seus resultados, parece ser mais avisado que se tente melhorar o que parece estar mal, do que suspender ou anular por decreto a mudança anunciada, deixando-nos a fraca alternativa de deixar tudo na mesma.

Fernando Nunes
Presidente da APM

XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática

O Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM) é uma realização do Grupo de Trabalho de Investigação da APM.

Realiza-se em Viseu, nos dias 30 de Setembro e 1 de Outubro de 2002. Para mais informações contacte na internet http//www.apm.pt/siemxiii.

ICTE 2002

A International Conference on Information and Communication Technologies in Education realiza-se em Badajoz de 20 a 23 de Novembro de 2002. Para mais informações consultar a página http//www.formatex.org/icte2002.html.

ProfMat 2002

2, 3 e 4 de Outubro, em Viseu

O primeiro ProfMat capicua do novo milénio vai realizar-se em Viseu nos dias 2, 3 e 4 de Outubro na Escola Superior de Tecnologia do Instituto Superior Politécnico de Viseu. Nas páginas do encontro em www.apm.pt/profmat2002 tem disponível toda a informação sobre datas, alojamentos, programa, como participar no encontro, as fichas de inscrição e participação, etc. Caso deseje ter conhecimento da informação mais recente relativa ao encontro, envie um email para profmat2002@apm.pt e no assunto escreva "Informação actualizada do ProfMat2002".

John Fauvel (1947–2001)

John Fauvel, morto prematuramente aos 53 anos, em Maio de 2001, tinha amigos em todo o mundo. E também em Portugal. Quando a notícia da sua morte foi conhecida, centenas de mensagens, lembrando John, foram enviadas de inúmeros países (podem ler-se em http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/Fauvel.html). A mensagem que enviámos de Portugal dizia:

> *The Portuguese friends of John Fauvel will remember him as a wonderful and kind person that helped them not only to understand better what could be the value of history in mathematics education but, in a more relevant and lasting way, how, even if you are more advanced and informed in a certain subject, you could work with others in a way that really everybody is growing and learning from each other.*
>
> *We have decided to try to convey this and other memories of our work with John in a colective article in a next issue of the journal of the Portuguese Association of Teachers of Mathematics.*

É esta decisão que concretizamos neste número de Educação e Matemática, reunindo neste espaço alguns testemunhos de colegas e amigos portugueses de John. Na secção leituras, é feita por Isabel Cristina Dias uma recensão do livro The History of Mathematics, a Reader, que John Fauvel organizou com Jeremy Gray.

John Grant Fauvel—Um tributo em jeito de cronologia

Maria Fernanda Estrada

Recordo John Fauvel com um misto de tristeza, porque já não o temos connosco, e de alegria, porque torno vivo na minha memória, o grande homem que foi e o bom amigo em que se tornou para mim.

John Fauvel nasceu a 21 de Julho de 1945, em Glasgow, e morreu com uma disfunção do fígado e dos rins, em 12 de Maio de 2001, em Leamington Spa. Foi uma das pessoas mais simpáticas, amáveis, generosas e humanas que eu conheci.

O seu trabalho na história da matemática foi particularmente notável; nele se empenhou com inteligência, esforço e entusiasmo, diria mesmo, com paixão.

De todas as formas e em várias regiões do mundo, fez sentir a sua influência, não só promovendo o desenvolvimento do estudo da história da matemática com recurso às fontes primárias, mas também incidindo no papel desse estudo no ensino/aprendizagem, em todos os níveis.

Depois do bacharelato em matemática, em 1970, obteve dois graus de mestre: mestre em Ciências em 1973 e mestre em Matemática em 1977, ambos pela Universidade de Warwick.

Em 1974 começou a trabalhar para a Open University, integrando, a partir de 1979, a Faculdade de Matemática desta Universidade como docente.

Fez parte do grupo de História de Matemática da Open University tão conhecido e prestigiado internacionalmente, composto ainda por Jeremy Gray, June Barrow-Green e Robin Wilson.

Nas palavras de Jeremy Gray, John foi um dos melhores professores da Open University e contribuiu enormemente para a melhoria do ensino à distância na área da história da matemática. Segundo Gray, John tinha uma rara sensibilidade para com as expectativas dos alunos à distância, prevendo as suas reacções e respostas. As suas inovações no curso são particularmente relevantes no MA 290: *Topics in the History of Mathematics*. Elas passam do abandono de uma grande sobrecarga da aprendizagem de factos históricos estabelecidos, para a iniciação à investigação em história da matemática, através da leitura e reflexão de textos originais. Este curso é conhecido e apreciado por muitos de nós; é constituído por 16 pequenos livros em que é feita a introdução dos temas, com comentários interessantíssimos, e belas ilustrações. Contém ainda questões de reflexão que estimulam e testam a capacidade do leitor para a investigação histórica.

Os textos nele referenciados foram coligidos e apresentados por John e Jeremy Gray num livro por eles co-editado, que se tornou um clássico de textos originais, *The History of Mathematics: a Reader*, publicado em 1987.

Em conexão com este curso, John colaborou na edição da colecção dos oito filmes que o ilustram; além disso, foi ainda o organizador e apresentador de uma série de programas de rádio relacionados com a história da matemática, nos anos noventa.

John esteve ainda na co-edição de outros livros: *Let Newton be!* (1990); *Mobius' and his Band* (1993); *Learn From the Masters* (1995); *Oxford Figures: 800 Years of mathematical science* (2000).

Figura 1. John e Hélia Oliveira, Convento de Cristo — Tomar

Estes livros são um prazer para os olhos e para o espírito, neles se revelando o sentido e gosto artístico de John, comunicador por excelência.

Fez ainda parte do corpo editorial de vários jornais e revistas, incluindo *Science and Education*, *For the Learning of Mathematics*, *Themes*, *Paradigm* e *Radical Philosophy*.

Aliás, os seus interesses eram multifacetados; gostava também de música e tocava violino, flauta de bisel e clavicórdio; gostava de jardinagem e de cozinhar, chegando mesmo a colaborar em livros de cozinha.

Como historiador da Matemática, John ocupou-se sobretudo de aspectos da matemática do séc. XVII, com particular incidência na linguagem e simbolismo do trabalho de Isaac Newton. Orientou ainda a tese de doutoramento de Jack Stedall sobre A Álgebra de John Wallis, que foi elogiada e galardoada.

Como foi reconhecido, os últimos dez anos de vida de John foram particularmente ricos e reveladores do prestígio e consideração que ele grangeou a nível nacional e internacional.

Foi presidente da BSHM (British Society for the History of Mathematics) desde 1991 até 1994; editou a Newsletter da Sociedade desde 1995. Com ele, a Newsletter tornou-se mais abrangente e erudita, com mais ilustrações, muitas delas captadas por ele na máquina fotográfica que sempre o acompanhava

Desde 1990, ele co-organizou 29 conferências para a BSHM, incluindo várias das reuniões anuais do HIMED (History in Mathematics Education), vários dos encontros anuais do RiP (Research in Progress) e ainda as conferências de Setembro sobre temas de história da matemática, que têm lugar alternadamente em Oxford e em Cambridge.

Sendo "homem dum só parecer, dum só rosto e de uma só fé" como o nosso Sá de Miranda, empenhou toda a BSHM numa campanha de protesto contra a destruição da campa do matemático judeu James Joseph Sylvester, situada no terreno onde queriam implantar um parque automóvel; empenhou-se também numa outra campanha de protesto contra a Universidade de Keele, quando esta vendeu a colecção de textos matemáticos históricos e raros da Colecção Turner.

Em 1998 foi o docente universitário convidado pela Sociedade Matemática da Nova Zelândia; em 1999 e 2000 foi regularmente convidado para apresentar comunicações em importantes conferências nos Estados Unidos.

De 1992 a 1996 foi presidente da HPM (Grupo Internacional de estudo das relações entre História e Pedagogia da Matemática), filiada da ICMI (Comissão Internacional da Instrução Matemática).

Nessa qualidade co-organizou muitas das conferências internacionais da HPM e o seu papel foi particularmente importante na co-presidência do estudo do ICMI sobre *The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics*, publicado em 2000 pela Kluwer, com o título *History in mathematics classroom*.

Eu encontrei o John Fauvel pela primeira vez em 1993, em Montpellier, na 1ª Universidade Europeia de Verão em História e Epistemologia na Educação Matemática.

Ele tinha o dom raro de acolher as pessoas com um misto de alegria e gentileza que em breve nos fazia sentir amigos de longa data. Foi o que aconteceu comigo; dali a um ou dois dias já estava a incentivar-me para eu participar no HIMED 94, que se realizaria no ano seguinte em Winchester, o que acabei por fazer.

Em Montpellier estava um grande grupo de portugueses; talvez por isso, o John e a Évelyne Barbin, que tinham estado na organização do Encontro, sugeriram que Portugal poderia acolher a 2ª Universidade Europeia de Verão em História e Epistemologia na Educação Matemática, que teria lugar em 1996. Então, o Eduardo Veloso e eu, fomos por eles convidados e incentivados a organizar em Portugal tal Encontro.

O desafio foi aceite e o Encontro foi de facto realizado na Universidade do Minho, em Braga. Teve cerca de 600 participantes de diversas partes do mundo, com oradores de mérito consagrado; acabou por ser um sucesso, como então noticiado.

O HIMED 94, uma conferência de 3 dias em Winchester, deu-me a oportunidade de apreciar as qualidades humanas do John, traduzidas num acolhimento caloroso dos participantes, com palavras de incentivo, suporte e amizade, que faziam de todos uma família.

Foi uma experiência interessantíssima, em que participaram outros portugueses: o Eduardo Veloso, a Ana Vieira e a Margarida Oliveira.... As nossas participações no encontro foram noticiadas e apreciadas no nº 25-26 da Newsletter da BSHM.

Em Maio de 94, o John veio a Portugal para preparar o encontro de 96, combinado em Montpellier. Designámos este Encontro por HEM – Braga 96.

O John deslocou-se primeiro a Lisboa e depois a Braga; eu fui buscá-lo a Coimbra, tendo-nos encontrado no Departamento de Matemática. Tive então ensejo de melhor o conhecer e apreciar, através das muitas atitudes que me cativaram e me revelaram a sua alma sensível e terna.

Logo em Coimbra, antes de partirmos, vi-o encantado e entusiasmado a fotografar os baixos-relevos da entrada do Departamento de Matemática; fazia elogiosos comentários a todo o recinto e edifícios da Universidade.

Durante a viagem, parámos numa estação de serviço; um magnífico arco-íris se divisava no céu; não posso esquecer como o John, maravilhado, o fotografou.

No dia seguinte tratámos dos aspectos burocráticos relativos à preparação do Encontro; ainda houve tempo para o John nos brindar com uma conferência sobre a história da matemática no ensino e um workshop em que, de uma forma informal, nos convidou a trabalhar sobre textos matemáticos diversos.

Antes de o levar a Coimbra, onde iria proferir uma conferência no âmbito do SNHM (Seminário Nacional de História da Matemática), ainda houve tempo para visitar o Sameiro e o Bom Jesus. Além das muitas fotografias que quis fazer, comprou um enorme conjunto de postais para enviar aos muitos amigos dispersos pelo mundo; gentilmente, convidou-me a subscrever todos aqueles que eram enviados a pessoas que eu também conhecia. Era assim o John.

Em 1995 voltei a encontrá-lo, em Oxford, numa conferência dedicada a Arthur Cayley, em que participei, a seu convite. Acolheu-me com o calor e a gentileza já habituais.

Convidou também investigadores portugueses em história da matemática a fazerem-se presentes nos encontros acima denominados RiP (Research in Progress). Estes encontros reúnem investigadores principiantes, dando-lhes oportunidade de expor os seus trabalhos, de os discutir e de, eventualmente, ouvirem sugestões de investigadores já consagrados, também presentes. Do meu conhecimento, aproveitaram esta oportunidade as colegas Elza Amaral e Maria da Graça Alves. Ambas tecem os maiores elogios à forma como foram acolhidas, incentivadas, estimuladas; de estrangeiras que lá chegaram, passaram a sentir-se parte da família, graças ao carinhoso suporte do John.

Em Julho de 1996 foi o Encontro na Universidade do Minho, em Braga, da 2ª Universidade Europeia de Verão em História e Epistemologia na Educação Matemática, o já aludido HEM-Braga 96.

Foi uma semana grande em que o John, como um dos organizadores internacionais e fundamental motor do Encontro, se fazia presente nas diversas actividades, sempre com palavras de suporte, elogio e estímulo para os organizadores locais.

Voltei a encontrá-lo em 1997, em Oxford, no encontro de Setembro sobre Ancient Mathematics, de que ele era um dos organizadores. Acolhida com a sua gentileza e amizade, senti-me em casa.

Em Julho de 1999, realizou-se a 3ª Universidade Europeia de Verão em História e Epistemologia na Educação Matemática, na Bélgica. Decorreu em Louvain-la-Neuve e Leuven. Participaram vários portugueses. Como sempre, o John animou o Encontro, com a sua presença calorosa e o seu sorriso simpático e bondoso.

Em 1999 voltei a Oxford, à conferência de Setembro; desta vez éramos cinco portugueses: a Isabel Cristina, a Maria da Graça Alves, o Carlos Sá, o Prof. Carlos Vilar e eu. Como era o maior grupo de estrangeiros do mesmo país, tivemos atenções especiais do John, e depois uma fotografia dos cinco, que foi publicada na Newsletter nº 40 da BSHM.

Os meus contactos pessoais com o John acabaram aqui, embora tivéssemos continuado a trocar correspondência.

Nos anos que o conheci tive revelações muito gratificantes da sua grande alma, que me permitem afirmar que ele era uma das raras pessoas capazes de ver para lá das aparências. Além de tudo fazer para ajudar e estimular os outros, era também capaz de tudo fazer para minorar o seu sofrimento e trazer de volta a esperança. Que Deus o abençoe !

Maria Fernanda Estrada
Universidade do Minho

Conhecer Fauvel

Isabel Cristina Dias

Figura 2. John e Hélia Oliveira, Castelo dos Mouros — Sintra

Foi há cerca de sete anos, quando passei a integrar, na APM, o Grupo de Trabalho de História e Ensino da Matemática (GTHEM), que ouvi pela primeira vez o nome de John Fauvel.

Começou por ser um nome, o nome do autor de uma obra de referência em que se baseava o estudo feito pelo grupo naquele momento. Depois, conforme crescia o meu interesse pelo assunto, o nome passava a estar associado a variados artigos e textos que ia lendo e que marcaram fortemente a minha atitude face à História da Matemática. Sem cometer qualquer exagero, posso afirmar que foram os seus trabalhos escritos e as sessões e conferências a que assisti que guiaram inicialmente o meu já existente interesse pela História da Matemática. Com o decorrer dos anos fui conhecendo vários aspectos do trabalho de John Fauvel e fui avaliando a importância da sua contribuição no estudo e divulgação da História da Matemática e na reflexão acerca do papel desta no ensino da disciplina de Matemática.

Contactei com o John Fauvel quando participou como convidado num ProfMat, quando veio a Lisboa proferir uma conferência na Faculdade de Ciências e quando pertenceu à Comissão Científica do HEM Braga 96 de cuja Comissão Organizadora eu fazia parte enquanto membro do GTHEM. Há pouco mais de um ano, num encontro sobre Matemática Medieval realizado em Oxford foi, como sempre, inexcedível na forma extraordinariamente amável como nos recebeu — éramos cinco portugueses presentes no encontro — e na simplicidade e simpatia que sempre o caracterizavam. Dizer que foi um grande privilégio conhecê-lo pode parecer um lugar-comum mas está longe de exprimir o que sinto sobre o assunto.

Quando soube que estava doente e quando, pouco tempo depois, soube que morrera, pensei imediatamente que tinha ainda muitas coisas para lhe perguntar, muito para aprender... A grande disponibilidade e facilidade que o John Fauvel tinha em partilhar o saber e o entusiasmo com que o fazia leva-me a crer que aquele meu pensamento egoísta não lhe pareceria uma má homenagem.

Isabel Cristina Dias
Esc. Sec. José Cardoso Pires
St°. António Cavaleiros

Fauvel e a história da matemática na educação matemática

Paulo Oliveira

A história [da matemática] não é apenas uma espécie de lubrificante ou aditivo que vem numa bisnaga e que pode ser usado em determinada altura, como o amaciador para pôr na máquina de lavar[1].

John Fauvel

Conheci o John Fauvel em Montpellier, em 1993. No ano seguinte, ele esteve em Portugal para dinamizar uma sessão prática sobre a integração da história da matemática no seu ensino. Fauvel defendeu uma perspectiva tríplice para essa integração: educativa, histórica e matemática. Nesta perspectiva, o aluno age como um historiador da matemática, ou se se quiser, como um matemático que se interessa pela dimensão histórica da sua ciência. A autenticidade histórica tem aqui um peso assinalável: o aluno utiliza técnicas, procedimentos, métodos e abordagens matemáticas próximos do que se fazia tipicamente numa dada época ou numa dada região.

Para Fauvel, há uma intencionalidade político-social que perpassa esta combinação da matemática com a sua história, em contextos educativos:

> As escolas têm mostrado uma crescente preocupação em ajudar alunos de vários estratos culturais a atingirem todas as suas potencialidades, bem como em assegurar que todas as crianças possam apreciar as diferentes raízes culturais da matemática. Muitos professores estão também preocupados em como garantir que as raparigas possam continuar a desenvolver o seu total potencial matemático durante a adolescência. Todos estes aspectos podem ser incrementados pela perspectiva histórica.[2]

A insistência numa visão eurocêntrica da história da matemática distorce a verdade dos factos, porque esconde o universalismo e o cosmopolitismo da matemática. No entanto, ainda para Fauvel, este cosmopolitismo relaciona-se dialecticamente com particularidades da tradição matemática local. Por conseguinte, questiona-se:

> Em que medida deve o conhecimento da herança matemática local – matemática portuguesa para alunos portugueses, matemática inglesa para os ingleses, brasileira para os brasileiros, e assim por diante – constituir uma parte privilegiada da educação matemática dos jovens?[3]

Esta valorização das matemáticas nacionais, cultural, histórica e educativamente ricas, é consistente com a posição de valorização das minorias (e.g., étnicas, os *handicaped*,...) que Fauvel acreditava poder ser conseguida também através da história da matemática.

Last but not least, Fauvel defendeu uma história da matemática viva na educação matemática moderna, através da ideia de trilho matemático[4], quer dizer, levar os alunos às fontes da história (e.g., edifícios, exposições, locais,...) além de levar as fontes da história aos alunos (na sala de aula).

Léo Ferré cantou: *Avec le temps tu s'en va*. Porém, a figura de Fauvel como um propugnador de uma educação matemática que integre dinamicamente a história da matemática, perdurará na memória dos que leram os seus trabalhos, ouviram as suas conferências ou discutiram as suas ideias.

Notas

1 In A utilização da História em Educação Matemática (p. 17), artigo traduzido em Cadernos do GTHEM nº1. Apesar deste artigo ter sido escrito em 1991, continua a ser uma referência básica para quem se interessa pela articulação da história da matemática com o seu ensino e pelas problemáticas que lhe estão associadas.

2 Op. cit. p. 19.

3 In Utilização da história da matemática local na educação do jovem matemático (p. 3), Educação e Matemática nº 27.

4 In op. referida em 3, p. 4.

Paulo Oliveira
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Figura 3. John, Hélia Oliveira e Eduardo Veloso, Castelo dos Mouros — Sintra

O estudo ICMI sobre História na Educação Matemática

Carlos Sá

John Fauvel era bem conhecido dos professores de matemática portugueses. Só muito esporadicamente esteve em Portugal e, é claro, proferia as suas palestras e dinamizava as suas sessões práticas em inglês, mas nem a raridade das visitas nem a barreira linguística lhe tornavam difícil a comunicação connosco. Com competência, profissionalismo, simplicidade e simpatia, cativava as audiências mais reticentes ao uso duma língua estrangeira e deixava uma recordação indelével na alma de quem o ouvia.

Há contudo um episódio da vida profissional de John Fauvel que só dois de nós (o Jaime Carvalho e Silva e eu próprio) tivemos a oportunidade de testemunhar: a preparação do livro *History in Mathematics Education*, com os resultados dum estudo internacional patrocinado pelo ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

A tarefa parecia-me, à partida, gigantesca: reunir mais de sessenta pessoas para, em conjunto, escreverem um livro! Nunca consegui pensar nisto sem um momento de surpresa por uma tal ideia alguma vez ter chegado a sair da fase das intenções. A verdade, porém, é que não só saiu dessa fase, como superou todas as seguintes, e o livro foi publicado no prazo de dois anos.

Um livro escrito por mais de 60 pessoas? Receio que alguns leitores pensem imediatamente numa colecção de 60 minúsculos artigos... Não é nada disso! É um livro com apenas (?!) onze capítulos (todos eles em co-autoria, obviamente) dedicados a outros tantos aspectos do problema da integração da história da matemática no ensino, a todos os níveis, da disciplina de matemática. Não é, contudo, do livro que eu queria falar agora, e sim de quem tudo fez para que ele se tornasse uma realidade. Neste aspecto, o que eu aqui escrever sobre John Fauvel vale igualmente para o outro editor, Jan van Maanen. Formaram uma equipa notável, sem a qual o livro nunca teria saído.

O momento decisivo teve lugar em 1998, na penúltima semana de Abril, no centro da Société Mathématique de France, em Luminy, perto de Marselha. Foi um encontro que decorreu de forma exemplar, em virtude do cuidado com que John Fauvel e Jan van Maanen o conceberam (e não seria justo deixar de mencionar também Jean-Luc

Figura 4. John, Paulo Oliveia, Ana Vieira e Eduardo Veloso, Castelo dos Mouros — Sintra

Dorier, o responsável pela impecável organização local). Cada participante pertencia a dois grupos temáticos distintos, um dos quais reunia todas as manhãs, enquanto que o outro reunia todas as tardes. Cada grupo era coordenado por um dos seus elementos, que haveria de ter um papel determinante no subsequente desenrolar do processo: assegurar que o correspondente capítulo fosse efectivamente escrito, coligindo as contribuições individuais e coordenando a redacção final.

Os interesses de investigação dos participantes no encontro de Luminy eram muito diversificados. Havia especialistas em educação matemática (de tendências várias), matemáticos profissionais, historiadores da matemática, professores de matemática (tanto dos que têm a seu cargo a "frente de batalha" em que se ensina matemática à generalidade das crianças e dos jovens, como dos outros, isto é, dos que se dedicam à formação inicial ou contínua dos primeiros...). Havia também, embora em menor número, pessoas ligadas aos aspectos políticos ou administrativos da educação. E, de entre os professores, alguns dedicavam-se a formas especiais de ensino (nocturno de adultos, de crianças com dificuldades, de crianças sobredotadas). Não era fácil concertar tantas sensibilidades, tantas "posturas". Por isso me parece tão digno de realce o sucesso do encontro, fruto do carinho com que John Fauvel e Jan van Maanen o prepararam. Tudo decorreu num esplêndido espírito de boa cooperação e até de camaradagem. Todos os grupos de trabalho cumpriram a sua quota parte na tarefa, tanto em Luminy, durante o encontro, como depois, quando o "verdadeiro" trabalho tinha de ser feito, isto é, os diferentes capítulos do livro tinham mesmo de ser redigidos.

É certo que este não foi o único caso dum Study Book do ICMI preparado de acordo com este esquema. Eu, contudo, desconhecia o fenómeno; e, até chegar a uma fase já relativamente adiantada do processo, nem a grande curiosidade sobre o que iria passar-se, nem os momentos de entusiasmo e entrega ao projecto conseguiram abafar por completo o meu cepticismo. Agora, que passei pela experiência, estou absolutamente convencido de que não é qualquer pessoa que pode levar a tarefa a bom termo. É necessário alguém que saiba e possa aliar a inteligência especulativa (do editor dum texto académico) ao bomsenso prático (do gestor dum projecto de envergadura), que saiba e possa conciliar o espírito de rigor (para cumprir escrupulosamente os prazos) com a sensibilidade humana (capaz de lidar com uma pequena multidão de pessoas, certamente nem todas de trato fácil...). É necessário alguém com a generosidade de John Fauvel.

Carlos Sá
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Trabalhar com John Fauvel

Eduardo Veloso

Em 1992 o International Congress on Mathematics Education (ICME) realizou-se em Quebec. Como é habitual, houve imediatamente antes, perto de Quebec (concretamente em Toronto), um encontro satélite do International Study Group do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) sobre as relações entre História e Pedagogia da Matemática (HPM). Eu estava inscrito neste encontro, mas apenas "para assistir"... No entanto, um colega português que ia fazer uma comunicação não pôde participar e a organização perguntou-me se eu — que passava a ser o único português presente! —, não quereria fazer uma comunicação em sua substituição.

Enchi-me de coragem e lá fui mostrar uns acetatos com a navegação astronómica dos descobrimentos portugueses, respectivos instrumentos, e possível utilização no ensino elementar da matemática. No fim da sessão, John Fauvel, que eu apenas conhecia de nome como *chairman* do HPM, veio ter comigo e disse que tinha uma proposta a fazer-me: o próximo ICME, em 1996, ia ser em Sevilha, e ele tinha pensado que o encontro satélite do HPM poderia ser em Portugal... estaria eu disposto a liderar uma comissão organizadora local?

Noutras circunstâncias, dada a minha completa inexperiência na organização de encontros internacionais e o meu imenso amadorismo nas questões da História da Matemática, a recusa seria imediata. Mas quem tenha trabalhado com o John sabe como ao lado dele nos sentíamos capazes de tudo, e aceitei. Ainda por cima faltavam quatro anos... Da mesma forma, no ano seguinte, durante a Universidade de Verão Europeia sobre História e Epistemologia e da Matemática (uma organização dos IREM franceses) em Montpellier, aceitámos — eu, a Fernanda Estrada e outros colegas da APM, nessa altura já em nome do GTHEM —, a proposta de Evelyne Barbin e John Fauvel no sentido do encontro em Portugal de 1996 ser uma realização conjunta HPM e Universidade de Verão Europeia.

Nos três anos seguintes, até ao encontro História e Educação Matemática, que se realizou em Braga no verão de 1996, trabalhei intensamente com John Fauvel. Foram três anos inesquecíveis e extremamente ricos em aprendizagens de muitos tipos. Pelos outros testemunhos destas páginas (de alguns colegas que também participaram na organização do encontro) pode perceber-se o papel decisivo que John teve na defesa da integração da história da matemática no seu ensino, e como esse papel era reforçado pelas suas qualidades humanas, sobretudo pelo ambiente único que estabelecia nas relações de trabalho. Gostaria apenas de salientar um aspecto a que já aludi de passagem.

Tem-se tornado quase um lugar comum dizer que um professor deve desenvolver a auto–estima nos seus alunos. Que isso é uma condição essencial para o sucesso da aprendizagem. No entanto, muitas vezes, quando vemos professores a actuar de acordo com esta recomendação *pedagógica*, temos a sensação de que o professor está a representar, apenas *finge acreditar* nas capacidades dos seus alunos *mais fracos*. Mas que importa, dirão alguns, tratando-se de uma *estratégia pedagógica*, isso não chegará?

John Fauvel foi das poucas pessoas que conheci, em toda a minha vida, que realmente acreditava nas possibilidades *infinitas* do desenvolvimento de qualquer ser humano. Isso transparece em alguns dos seus escritos, mas sobretudo era claro no modo como se relacionava com todos os que tiveram a felicidade de trabalhar com ele. É por essa razão que a leitura de todos os testemunhos que foram publicados, na rede Internet e na Newsletter especial do HPM, é tão estimulante. E nos deixa convictos de que a acção de John não terminou com a sua morte física, mas ficará presente e viva através de todos os que com ele colaboraram e conviveram. Que melhor se pode esperar de uma vida humana?

Eduardo Veloso

The History of Mathematics — a reader

Uma obra essencial da História da Matemática

A obra *The History of Mathematics — a reader*, editada por John Fauvel e Jeremy Gray, foi imprimida pela primeira vez em 1987 pela Macmillan Press e reimpressa sucessivamente em 88, 91, 92 e 93 pela mesma editora em colaboração com a Open University. John Fauvel foi responsável pela edição dos capítulos 1–5, 9 e 19, Jeremy Gray pelos capítulos 10–18 e os dois editores e Cynthia Hay pelos capítulos 6–8.

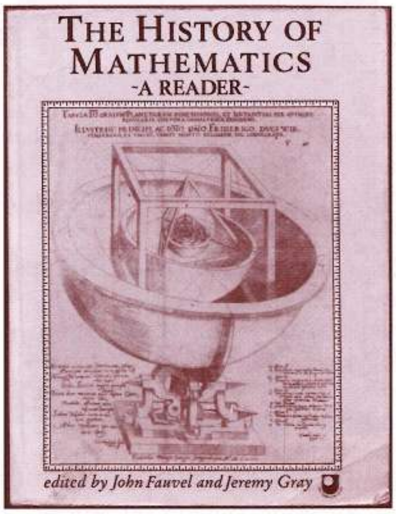
A colecção constituída por um extenso volume, o *reader*, e por 17 unidades, apresentadas em fascículos, foi concebida como um conjunto de leituras para os estudantes de um curso da Open University — Tópicos da História da Matemática. No entanto, na introdução, os editores manifestam-se esperançados de que outros estudantes de matemática ou de história possam ter interesse nos textos e os possam utilizar.

Cada unidade é dedicada a um época ou a um tema, e o *reader* está dividido em capítulos. No entanto, as divisões não coincidem, já que existem quatro blocos nas unidades e os capítulos do livro são dezanove. No caso deste trata-se de uma selecção de textos originais enquanto que os fascículos são como *guias de estudo* a partir dos quais o leitor é encaminhado, quando necessário, para a leitura de textos incluídos na selecção.

Seguidamente, será apresentada uma listagem dos capítulos do *reader* e dos títulos das unidades, a qual proporcionará uma visão geral do conteúdo e da estrutura, facilitando um conhecimento inicial da obra. Serão apresentados posteriormente alguns comentários por alguém que, com o objectivo de aprender História da Matemática, utilizou *The History of Mathematics — a reader*. Saliente-se que o presente texto não pretende ser uma recensão crítica já que tal tarefa implicaria, pela extensão e conteúdo da obra, conhecimentos muito mais profundos sobre História da Matemática do que aqueles que possui a autora destas linhas.

Capítulos do *reader*

Cap. 1 — Origens
Cap. 2 — A Matemática na Grécia Clássica
Cap. 3 — Os Elementos de Euclides
Cap. 4 — Arquimedes e Apolónio
Cap. 5 — As tradições matemáticas na Idade Helénica
Cap. 6 — A Matemática Islâmica
Cap. 7 — A Matemática na Europa Medieval
Cap. 8 — A Matemática europeia do século XVI
Cap. 9 — As Ciências Matemáticas na Inglaterra dos Tudor e dos Stuart



The History of Mathematics — a reader
Editores: John Fauvel e Jeremy Gray
Editora: The Open University
1993 628 pp.

Cap. 10 — A Matemática e a Revolução Científica
Cap. 11 — Descartes, Fermat e os seus contemporâneos
Cap. 12 — Isaac Newton
Cap. 13 — Leibniz e os seus seguidores
Cap. 14 — Euler e os seus contemporâneos
Cap. 15 — Gauss e as origens da Álgebra Estrutural
Cap. 16 — A Geometria não-Euclideana
Cap. 17 — A Geometria Projectiva no século XIX
Cap. 18 — The rigorization of the Calculus (O aumento do rigor no Cálculo)
Cap. 19 — A mecanização dos cálculos

Títulos das unidades

Bloco 1 — A Matemática no mundo antigo: Unidade 1 — As primeiras matemáticas; Unidade 2 – A Matemática no mundo grego; Unidade 3 – O conceito grego de prova; Unidade 4 – O estudo das curvas na Grécia

Bloco 2 – Da Idade Média ao século XVII: Unidade 5 – Da Grécia ao Renascimento; Unidade 6 – O renascimento das ciências matemáticas na Grã-Bretanha; Unidade 7 – A Matemática europeia no início do século XVII; Unidade 8 – Descartes: Álgebra e Geometria

Bloco 3 – Os séculos XVII e XVIII: Unidade 9 – A rota do cálculo; Unidade 10 – O desenvolvimento do cálculo; Unidade 11 – The mathematical physics and the system of the world (A física-matemática e o sistema planetário); Unidade 12 – Estilo e formalismo no século XVIII

Bloco 4 – Tópicos sobre a Matemática do século XIX: Unidade 13 – A Geometria não-Euclideana; Unidade 14 – A Álgebra e a profissão de Matemático; Unidade 15 – A Geometria Projectiva e a Axiomatização da Matemática; Unidade 16 – Fundamentos; Unidade 17 – Tópicos sobre a história da Computação.

Para além de um enorme trabalho de recolha, selecção, organização e, até, de tradução dos textos para inglês, há que salientar a preocupação dos autores em incluir estudos históricos, comentários e argumentos independentemente de com eles concordarem ou não; a selecção teve como critério a importância que lhes atribuíam na construção de uma visão multifacetada do percurso das matemáticas ao longo dos tempos. Para que fosse facilmente perceptível a ligação entre os excertos originais incluídos em cada subcapítulo, consta no início de cada um deles uma pequena introdução. Esses pequenos textos são sintéticos, simples e claros constituindo uma mais-valia do *reader*.

Fauvel e Gray proporcionam-nos uma visita guiada desde as reproduções do denominado Papiro de Rhind em exposição no British Museum — datado de aproximadamente 1650 a.C., mas que se supõe ser a cópia de um texto escrito dois séculos antes — até aos textos finais de autores contemporâneos acerca da prova do Teorema das Quatro Cores — demonstração assistida por computador anunciada pelo Professor Wolfgang Haken em 1976 e que tantas dúvidas matemáticas e epistemológicas colocou. A forma como foram elaboradas as unidades, tanto pelos comentários apresentados pelos autores como pelas questões que encerram cada tópico e que direccionam a pesquisa no *reader*, permite uma visita que é facilmente participada pelo leitor, tornando-se um excelente veículo de estudo da História da Matemática.

É deveras interessante o reparo incluído na Introdução acerca da expressão História da Matemática, a qual é, segundo os dois historiadores, *uma frase ambígua*. Em sua opinião, o leitor ao ler um tal título poderia esperar encontrar trabalhos matemáticos escritos no passado ou estudos actuais realizados por historiadores da matemática. E, de facto, encontra também, mas não apenas, estes dois tipos de materiais.

Parece adequado terminar este pequeno comentário analisando a posição de John Fauvel e Jeremy Gray face ao momento que a História da Matemática atravessava em meados da década de 80: "... uma selecção de leituras realizada numa época em que a história da matemática, enquanto disciplina histórica, está mais viva e vigorosa do que nunca, ...". Quinze anos depois da primeira edição da obra, a História da Matemática terá conseguido manter-se viva e vigorosa? Enquanto *disciplina histórica* parece poder responder-se afirmativamente. O mesmo talvez não se possa dizer quando pensada como factor cultural da Matemática na sociedade, como contribuição inexplorada na formação dos que a ensinam e aprendem e, finalmente, como vector decisivo numa reflexão epistemológica necessária a todas as comunidades envolvidas com a Matemática.

Isabel Cristina Dias
Esc. Sec. José Cardoso Pires
St°. António dos Cavaleiros

Formação Profissional de Professores no Ensino Superior

A obra referenciada consta, além de uma nota de apresentação da autoria do organizador, Bártolo Paiva Campos, de quatro textos:

(i) A formação como projecto, de Maria do Céu Roldão (ESE de Santarém);
(ii) Professor- investigador, de Isabel Alarcão (Universidade de Aveiro);
(iii) A prática profissional na formação de professores, de Rui Canário (Universidade de Lisboa);
(iv) A formação prática de professores, de João Formosinho (Universidade do Minho).

Os quatro textos resultam de quatro conferências que tiveram lugar em Novembro de 2000 na Universidade de Aveiro, proferidas por especialistas bem conhecidos, num colóquio organizado pelo INAFOP, no âmbito da Formação Profissional de Professores no Ensino Superior.

Os quatro textos são norteados por uma problemática comum — a formação de professores em contexto de ensino superior. Embora cada um aborde diferentes perspectivas constituindo, assim, textos autónomos, todas as intervenções contribuem para a questão já referida.

Condicionada pelo espaço disponível e respeitando a sequência dos textos, seguirei esta estimulante viagem-reflexão desde a concepção do currículo de formação nas instituições de formação até à prática (investigação, revalorização e desempenho) em contexto profissional. Uma leitura mais aprofundada do livro mostrará que esta opção é arbitrária e que é possível uma viagem de ida e volta.

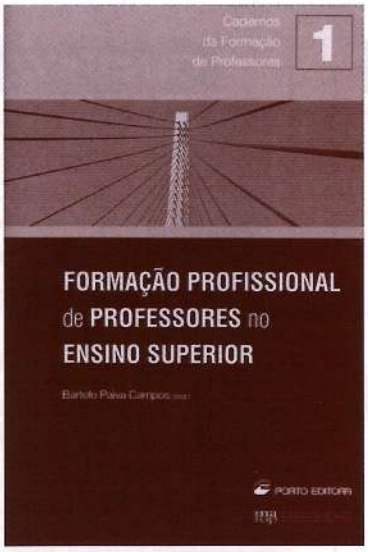
Maria do Céu Roldão (MCR) identifica uma questão de grande actualidade, a de "profissionalidade docente", ou seja da constituição e transferência para os professores da noção de "profissional", já relativamente consensual em outras áreas profissionais. Partindo do princípio que a identificação e caracterização de um perfil de profissional terá de implicar a identificação de elementos que caracterizem essa especificidade, MCR aponta alguns "princípios norteadores das estratégias de formação" que deverão orientar o trabalho das instituições de formação de professores e que permitirão apetrechar os professores com (i) saberes de referência sólidos no plano científico–profissional, (ii) competências para ensinar, (iii) competências de produção articulada de conhecimento profissional gerado na acção e na reflexão sobre a acção (p.13).

Uma análise dos diferentes modelos de formação com que as instituições de ensino superior operam mostra pouca ou nenhuma articulação entre as diferentes componentes do currículo, configurando um tipo de currículo a que MCR chama um currículo mosaico, regido "por uma lógica curricular predominantemente aditiva" (p 14).

O que a autora propõe, como melhor resposta é um currículo a que chama currículo projecto, fundamentado em diferentes correntes epistemológicas e modelos organizativos. Num quadro síntese são comparados, a vários níveis, os dois tipos de currículo em análise: o Plano - mosaico de formação e o Projecto de formação.

Isabel Alarcão (IA) centra o seu discurso no conceito de professor - investigador e, em síntese, apresenta-nos dois princípios: (i) todo o professor é um investigador cuja investigação está relacionada com a sua função de professor e (ii) a formação de professores deverá incluir competências que permitam aos futuros professores investigar sobre a sua prática e partilhar resultados e processos com outros, nomeadamente os colegas. Um conjunto de competências organizado em quatro categorias (atitudinais, de acção, metodológicas e de comunicação) permitem-nos pensar num plano de formação cuja concepção e implementação pode ser realizada em dois cenários: através de uma disciplina de Investigação em Educação ou articulando a formação para a investigação com outras componentes curriculares. Considerando que os dois cenários não são exclusivos e defendendo IA, como diz, " a formação em ambiente de investigação" (p.39), naturalmente que o segundo cenário nos parece ser o mais apropriado para dar continuidade à proposta de MCR: um currículo Projecto de formação.

O texto de Rui Canário (RC) é centrado naquilo a que chama "a revalorização epistemológica da experiência". Quando, referindo o modo de funcionamento das instituições de formação, RC nos fala da "justaposição hierarquizada de saberes científicos, mais saberes pedagógicos, mais momentos de prática" (p.32) , novamente vemos reforçado o que MCR diz a propósito do currículo- mosaico. RC recusa que o contexto de prática- a escola- seja local de "aplicação" e "transferência" de aprendizagens proporcionadas pela formação teórica, defendendo para a escola "o lugar onde os professores aprendem "(p.38), justificando, assim, o verdadeiro sentido da formação em alternância. Regressamos portanto ao currículo que, na opinião do autor, deverá ser estruturado " a partir da articulação interactiva entre situações de informação, situações de interacção e situações de produção" (p. 42).



Formação Profissional de Professores no Ensino Superior

Autor: Bártolo Paiva Campos (org.)

Editora: INAFOP

2001 64 pp.

Preço:/€ 3,99

Continuando a reflexão sobre a Prática, o texto de João Formosinho (JF) é centrado na temática da formação prática dos professores. JF defende que a especificidade do ofício do professor se constitui em três etapas: (i) a própria vivência discente sendo " representada pelo desempenho de ofício de aluno", (ii) "a prática docente dos seus formadores no curso de formação inicial", um modelo importante na aprendizagem da profissão e uma espécie de "currículo oculto", e (iii) a prática pedagógica assumida e concretizada. Estas etapas são analisadas em diferentes perspectivas, referindo o caso português o que permite uma reflexão interessante para quem trabalha em formação de professores. Também JF se refere às instituições de ensino superior quando diz que " tendem a apresentar uma visão reducionista da docência como uma actividade predominantemente intelectual, através do currículo de conteúdos, do currículo de processos e das próprias práticas institucionais. Essa visão reducionista não representa a visão profissional da docência que é mais complexa e mais multifacetada" (p. 62).

A leitura dos quatro textos parece-me muito oportuna, pertinente e de grande interesse numa altura em que as instituições se debatem com os novos processos de acreditação de cursos.

A questão que ocorre é a seguinte: terão as escolas disponibilidade para debater as questões que estes textos levantam? Ou limitar-se-ão a preencher os múltiplos formulários que o processo de acreditação exige?

Luísa Solla
Departamento de Línguas
Escolas Superior de Educação
de Setúbal

Interacções em Matemática
Resolução de problemas a pares

Maria Eugénia de Jesus

A resolução de problemas, pela diversidade de actividades de ensino que proporciona, pela troca de experiências que facilita, pela representação de ideias que concretiza, pelos conceitos e noções que permite construir é uma actividade indispensável no processo de aprendizagem dos alunos.

Após a frequência, no Centro de Formação de Faro, de um Curso de Formação da responsabilidade do Departamento do Ensino Básico (DEB) e da Associação de Professores de Matemática (APM), surgiu a ideia da candidatura a um projecto ligado à área da Matemática, no âmbito dos projectos do Instituto de Inovação Educacional (IIE). Assim surge, no ano de 98/99, o projecto Interacções em Matemática, construído por um grupo heterogéneo de professores que leccionam o 2° ano de escolaridade (professores de apoio, professores do ensino oficial, professores de uma escola inglesa, etc.) e coordenado pela professora Maria Eugénia de Jesus.

O trabalho que se vai relatar insere-se no desenvolvimento do referido projecto.

Durante esse ano lectivo o grupo reuniu, quinzenalmente, na escola onde a maioria leccionava - Escola Básica do 1° ciclo do Alto de Rodes, em Faro - em grupo de cooperação educativa e, mensalmente, com a consultora do projecto, Helena Marques.

Sendo o grupo constituído por professores do Movimento da Escola Moderna (MEM), existiu desde logo a consciencialização da necessidade urgente de reflectir/pesquisar/inovar/diferenciar também nesta área.

As reuniões tinham sempre uma ordem de trabalhos, partindo de um primeiro momento, de trocas de materiais/instrumentos, numa perspectiva de partilha de informação, seguida da reflexão sobre a prática pedagógica. Havia lugar para se aferir os trabalhos realizados na área da matemática, numa perspectiva de auto formação.

A agenda das reuniões com a consultora, bem como os temas a reflectir, foram sempre acordados com o grupo de trabalho. Os textos a analisar foram da responsabilidade da consultora e/ou coordenadora. Recorreu-se algumas vezes a publicações da Revista de APM, Cadernos do PEPT (Programa de Educação para Todos) e Revista do MEM.

Pretendia-se, conforme está expresso no Formulário do Projecto, atingir os seguintes objectivos:

- reflectir as práticas pedagógicas no ensino/aprendizagem da Matemática analisando papéis e funções;
- confrontar práticas e projectos para um desenvolvimento de atitudes saudáveis de integração dos saberes que as crianças têm;
- realizar actividades experimentais e utilizar tecnologias na resolução de situações/problemas;
- fazer registos continuados/relatos de interacções professor-aluno; aluno-aluno; aluno-professor;
- fazer o levantamento das concepções que os alunos e professores têm acerca da matemática;
- produzir documentos significativos no âmbito da recolha e sistematização de dados e resultados, recolha de bibliografia;
- acompanhar projectos na sala de aula.

Na continuidade de muitos trabalhos realizados no ano lectivo anterior, a resolução de problemas foi uma das estratégias utilizadas.

Começámos pelos problemas do quotidiano da sala de aula ou da escola, pelos problemas de resolução não-numérica (centrados na prática do Conselho de Cooperação Educativa) e só mais tarde trabalhámos outros.

A resolução de problemas, pela diversidade de actividades de ensino que proporciona, pela troca de experiências que facilita, pela representação de ideias que concretiza, pelos conceitos e noções que permite construir é uma actividade indispensável no processo de aprendizagem dos alunos.

Além de um objectivo do programa, a resolução de problemas deve constituir um momento especial de interacções e de diálogo.

Este ano e no contexto que referíamos em todas as turmas (e são 7 as envolvidas directamente no Projecto) foi proposta a resolução do seguinte problema, *Os primos da Clara*.

Estratégias utilizadas e respostas dos alunos

Foram diversas as formas como as diferentes professoras apresentaram o problema e o trabalharam bem como as conclusões a que os alunos chegaram.

De seguida, apresenta-se, para cada turma, a forma como o problema foi introduzido por cada professora, bem como o modo de resolução do mesmo por parte dos alunos.

Turma A

No contexto de um trabalho de rotina de Matemática, foi dado a cada par de alunos o problema. A professora leu e propôs que cada par registasse a forma como tinha chegado ao resultado. Não houve qualquer preparação prévia dos alunos. As estratégias utilizadas para a resolução do problema foram as que se apresentam, esquematicamente na tabela I, da página seguinte. Ninguém chegou ao resultado certo. Após a discussão das hipóteses levantadas, registaram nos cadernos a solução do problema.

Turma B

No plano do dia, para a matemática, incluíam-se temas como: relações familiares; resolução de problemas a pares; conversa sobre relações familiares; construção, no quadro, dos laços de parentesco (árvore). A professora leu o problema *Os primos da Clara*, fez a proposta de resolução a pares e clarificou o objectivo: que escrevessem como pensaram a resolução do problema.

Dos 6 alunos, 2 conseguiram chegar ao resultado certo, porém, não conseguiram explicar como. O João foi o único que chegou à resposta correcta. Para perceber é necessário salientar que a família do João é numerosa, sendo o número dos seus familiares parecido com o número de familiares no problema apresentado.

Depois da resolução do problema, os alunos fizeram auto-avaliação, apresentaram o trabalho de pares, discutiram colectivamente, chegaram a conclusões e enviaram a proposta de trabalho para os correspondentes.

Turma C

Nesta turma, a apresentação do problema foi feita da seguinte forma:

O texto foi lido e discutido em conjunto. A turma foi dividida em pares e os pares trabalharam com vista à resolução do problema. Foi ainda sugerido que usassem diferentes estratégias.

É de referir que todos os pares usaram o desenho para a resolução. No final apresentaram os resultados à turma e discutiram as diferentes respostas. Nenhum dos pares chegou à solução. O problema foi, em seguida, resolvido em conjunto.

Turma D

O problema foi lido e discutido em colectivo. Depois, a pares, resolveram o problema.

A maior parte dos alunos usou o esquema ou o desenho, para tentar chegar ao resultado, mas apenas um par o conseguiu.

Turma E

Os alunos resolveram a pares o problema num momento de Plano Individual de Trabalho.

Observou-se que os alunos utilizaram diferentes estratégias de resolução sendo o desenho a opção da maioria. No entanto, houve quem quisesse resolver o problema através de uma operação o que complicou a situação.

Turma F

A professora desta turma, uma vez que não foi professora dos alunos no ano anterior, achou melhor fazer alguns trabalhos que conduziram a uma melhor percepção do sentido de problema/relações familiares. Assim,

Figura 1. Do livro *Enigmas com números*, Editora Gradiva.

construiu, registou e resolveu com os alunos algumas situações problemáticas tendo em conta situações familiares reais dos alunos da referida turma.

É de registar que alguns meninos chegaram ao resultado correcto.

Turma G

Nesta turma, o problema foi resolvido num momento de estudo em que as actividades matemáticas entraram em discussão. A maioria das crianças tinha uma realidade familiar muito diferente da apresentada no problema e este facto dificultou a sua resolução.

O problema foi resolvido a pares e ninguém chegou ao resultado correcto (tabela 2). Aqueles que somaram os números, não conseguiram concretizar. Os alunos que fizeram os desenhos não separaram o sexo dos filhos dos respectivos avós.

Após uma fase de discussão e reflexão sobre as estratégias utilizadas, conclui-se da sua adequação, tendo em conta os seguintes aspectos:

- a discussão como momento importante na valorização das produções comunicadas;
- a riqueza das interacções e discussões e o confronto de pontos de vista;
- o papel dos pares na resolução dos problemas;
- o levantamento de hipóteses e a defesa das mesmas;
- a participação na crítica dos resultados;
- a avaliação do percurso e do processo.

Em relação ao problema *Os primos da Clara*, reflectimos ainda sobre:

- a dificuldade do tratamento das relações parentais, sobretudo quando a realidade de alguns alunos não é a de terem tios e primos.
- dificuldade no registo do que era pedido, isto é, explicitar o tipo de pensamento matemático/ estratégias utilizadas para chegar ao resultado.

Considerou-se ainda que é urgente facilitar diferentes trabalhos a pares e em grupo de forma a que as interacções positivas se vão sobrepondo aos "ruídos" das outras interacções.

Pares de alunos	Resposta dos alunos	Estratégia utilizada pelos alunos
Joana e Carol	8 primos	Contámos e fizémos uma conta
Marisa e Liane	10 primos	Lemos o problema e contámos na imagem
Daniel e João Carlos	9 primos	Contámos na imagem
Susana e João Nuno	8 primos	Lemos e pensámos
Pedro e Patrícia	8 primos	Lemos e contámos
Nuno e João Pedro	10 primos	Contámos pelo desenho
Ana e Carolina	8 primos	Pensámos
David e Hugo	8 primos	Fizemos um esquema
Melissa e Alexandra	10 primos	Contámos no desenho
Maria e Ivo	8 primos	Lemos, desenhámos e contámos

Tabela 1.

Pares de alunos	Resposta dos alunos	Estratégia utilizada
João Miguel e Matthew	7 primos	Somaram os elementos da família
Joana e Demi	8 primos	Fizeram bonecos sem relacionar os sexos
Mª Celeste e Soraia	18 primos	Somaram os números
Sara e Clife	16 primos	Somaram os números
Sasannah e Catarina	8 primos	Somaram os números
Carolina e Miguel	12 primos	Somaram os números
Sonke e Hugo	10 primos	Somaram os números
Rafael e Diogo	18 primos	Somaram os números
João Fern. e Amaury	8 primos	Somaram os números
André e Liliana	12 primos	Fizeram bonecos sem relacionar os sexos
Paulo e Zé Luís	7 primos	Fizeram bonecos sem relacionar os sexos
João Pedro e Diogo	—	Fizeram bonecos sem relacionar os sexos

Tabela 2.

Avaliação do Projecto

Em relação aos objectivos do Projecto e do Programa Curricular, que estavam em sintonia, crê-se que foram atingidos. A meio do ano lectivo, a coordenadora do projecto elaborou um questionário para ser preenchido por todos os elementos da equipa, tendo em vista o registo da avaliação intermédia. O que então se pretendia era a avaliação e gestão do projecto. O tratamento dos dados recolhidos foi importante porque deu possibilidade de reflectir e mesmo de reformular algumas das estratégias utilizadas no grupo.

No final do ano, o grupo de trabalho fez com a consultora uma avaliação que foi fundamental para a construção, por todo o grupo, do relatório final.

Para terminar, salienta-se que o envolvimento das escolas em projectos é estimulante para professores, pais e alunos, permitindo não só o desenvolvimento pessoal, social e profissional do grupo de professores envolvidos, como ajudando os alunos a crescer no sentido da construção de aprendizagens, para além de poder contribuir para que as escolas passem a dispôr de uma maior diversidade de materiais.

Coordenadora do Projecto: Maria Eugénia de Jesus; *Grupo de Trabalho:* Odete Xarepe, Ana Isabel Ferreira, Marília Margarida Cavaco, Isabel Campos, Fernando Sancho, Isabel Neto, Vanda Dias, Célia Santana, Helena Neto

Pedro Nunes Matemático e Cosmógrafo

Elisa Figueira

Pedro Nunes (1502-1578) nasceu em Alcácer do Sal, viveu em pleno apogeu dos Descobrimentos Portugueses e foi uma referência na Europa como matemático e homem de ciência. Na sua obra, reflexo da época histórica em que viveu, desenvolveu soluções para diversos problemas inerentes à Arte de Navegar, tendo dado um valioso contributo para a Náutica Astronómica, facto reconhecido mesmo pelos seus críticos.

Em 1529 foi nomeado, por D. João III, cosmógrafo do reino e em 1547 cosmógrafo-mor do reino. De 1530 a 1533 ensinou, na Universidade de Lisboa, disciplinas como Filosofia, Lógica e Medicina, mas cedo abandonou estas disciplinas para se dedicar à Matemática, Física e Náutica. Foi professor de Matemática na Universidade de Coimbra, instituição que desfrutava de uma boa reputação na Europa e aí ministrou ensinamentos de Elementos de Geometria de Euclides, Aritmética, Cosmografia, Mecânica de Aristóteles e parte da obra *Almajesto* de Ptolomeu.

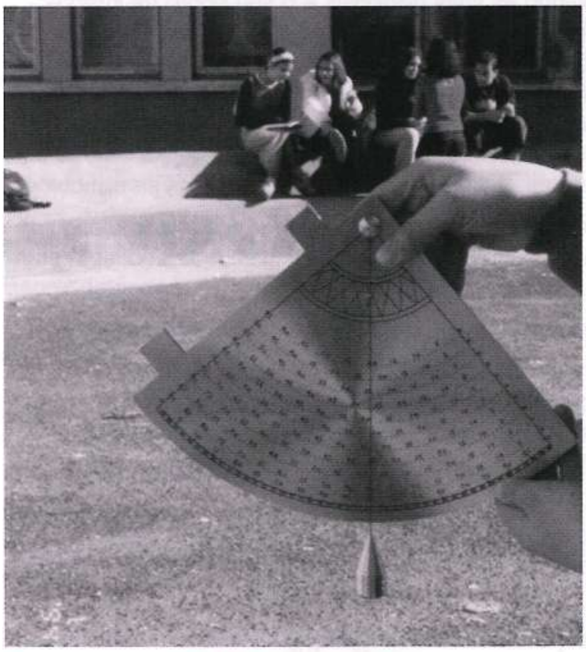


Figura 1. Alunos da E. S. D. Luísa de Gusmão a utilizar o nónio.

A obra de Pedro Nunes é composta por traduções anotadas e textos originais.

Em 1537, publica a importante obra *Tratado da Sphera*, que integrava três obras traduzidas do latim:

- *Tratado da Esfera* do monge inglês Sacrobosco
- *Teoria do Sol e da Lua* de Purbachio
- *Livro I da Geografia* de Ptolomeu

que enriqueceu com observações da sua autoria e duas obras originais:

- *Tratado em defensam da carta de marear*, onde Pedro Nunes definiu condições para a construção de mapas, apresentou o processo para determinar a declinação magnética, apoiado em observações solares, bastante utilizado na navegação do séc. XVI, e o processo para determinação de latitudes baseado nas alturas extrameridianas do Sol.
- *Tratado sobre certas dúvidas de navegação* que contém respostas dadas a dúvidas colocadas por Martim Afonso de Sousa, em 1533, aquando do seu regresso de uma viagem ao Brasil. Pedro Nunes ocupa-se das célebres linhas de rumo, loxodromias, que vieram a ter grande reflexo na Cartografia.

Dos originais destacamos:

- *De Crepusculis*, considerada a sua obra-prima, foi publicada em 1542 e é um tratado de astronomia esférica. Estuda o problema da variação da duração do crepúsculo em função da latitude do lugar e da declinação do Sol. Numa época em que a análise matemática era desconhecida, Pedro Nunes resolve o problema do menor crepúsculo por processos engenhosos. É neste livro que Pedro Nunes descreve o Nónio.
- *Libro de Algebra en Aritmetica y Geometria*, publicado em 1567, onde trata com rigor assuntos exclusivamente dedicados à Álgebra - resolução de equações do 1° e 2° grau, redução ao 2° grau de equações de grau superior, operações com polinómios, etc.

Pedro Nunes trabalhou de uma forma muito estreita com os navegadores e pilotos, preocupado que estava em resolver problemas que estes sentiam na navegação, sugeriu-lhes técnicas de observação, criou instrumentos de medição da altura de astros ou de medição da declinação magnética. No entanto, foi alvo de severas críticas por parte de alguns deles. Segundo Pedro Nunes os marinheiros não lhe perdoavam o facto de, sem nunca ter navegado, intervir nos problemas da náutica, reformulando as soluções por eles protagonizadas, interrogando-se sobre a validade das práticas seguidas.

A sua vasta formação teórica e preocupação com o rigor das medições incentivaram-no a inventar vários instrumentos astronómicos e métodos gráficos para resolução de alguns problemas. Realçamos o anel náutico, o instrumento jacente no plano (mais tarde designado por instrumento de sombras por D. João de Castro), o nónio e a determinação gráfica da declinação do Sol. Os dois primeiros, conforme o sentido da graduação, permitiam determinar a altura ou a distância zenital do Sol ou de outras estrelas, o terceiro, quando adaptado ao astrolábio ou quadrante, permitia medir fracções do grau e dava com maior rigor a altura de uma estrela, e o quarto permitia conhecer a declinação do Sol ao longo do ano sem recorrer às tábuas solares.

Alguns destes instrumentos foram experimentados com êxito por D. João de Castro nas suas viagens a Goa e ao Mar Vermelho que, perante resultados tão satisfatórios, não se cansou de elogiar o mestre segundo descreve na sua obra *Roteiro de Lisboa a Goa*. D. João de Castro deu aí notícia da utilização de dois instrumentos de sombra com diferentes finalidades: um deles permitia calcular a declinação da agulha magnética e o outro permitia medir a *altura do Sol a toda a hora*.

As dificuldades sentidas na época pelo atraso da técnica levavam a que a menor divisão na graduação dos instrumentos náuticos não fosse para além de um grau, ou excepcionalmente, de meio grau. Assim, os cálculos eram feitos por estimativa o que tornava a navegação incerta (muitos foram os naufrágios), pois cometiam-se erros na determinação da latitude que produziam erros de dezenas de quilómetros nas distâncias a percorrer. Não consideramos aqui os erros de navegação resultantes do cálculo da longitude uma vez que o problema de determinação desta coordenada geográfica persistiu até ao séc. XVIII, quando John Harrison, já na segunda metade deste século, construiu um relógio náutico cujas oscilações, por dia, eram da ordem de alguns segundos.

Com a criação do nónio, Pedro Nunes permitiu que se abandonasse a leitura por estimativa cujo resultado dependia do critério do medidor e fosse possível fazer leituras precisas de fracção do grau. Pedro Nunes refere o nónio na Proposição III do seu livro De Crepusculis, em 1542, de enunciado: *um instrumento que seja muito apropriado às observações dos astros, e com o qual se possam determinar rigorosamente as respectivas alturas*.

O nónio por ele concebido foi adaptado e utilizado na construção de dois grandes quadrantes pelo astrónomo Tycho Brahe (1546-1601) que tinha uma grande preocupação em fazer observações astronómicas sistemáticas e com muito rigor. Tycho Brahe convidou Kepler (1571-1630) para trabalhar com ele e legou-lhe o seu património. Deste modo, Kepler pôde analisar as divergências entre as posições observadas e as previsões teóricas, o que lhe permitiu, em 1604, publicar as duas primeiras leis referentes ao movimento dos planetas. Ultrapassado que estava o problema da medição rigorosa de grandezas e do seu registo sistemático, foi possível o aparecimento de novas leis e dar um novo rumo à Ciência.

Pedro Nunes foi um homem que interligou a observação e a teoria, a ciência e a técnica e, neste ano de 2002 em que se comemora o V centenário do seu nascimento, a melhor homenagem que lhe podemos prestar é divulgar a sua obra científica, é estudar e discutir problemas teóricos que ocuparam a sua mente, é aprender a construir e a manusear os instrumentos por ele inventados.

Instrumento de Sombras

O instrumento de sombras é simples e muito engenhoso, pois consegue medir a altura angular do Sol no plano horizontal, através da sombra de um dos catetos de um triângulo rectângulo isósceles projectada sobre uma recta.

A construção deste instrumento coloca problemas de rigor ao nível da medição de comprimentos de segmentos e de amplitude de ângulos, ao nível da noção de paralelismo e perpendicularidade e do reconhecimento de polígonos. A importância da sua construção por parte dos alunos é bastante formativa e o seu manuseamento permite-lhes desenvolver o espírito de observação, a capacidade de organizar registos de dados e procurar respostas para fenómenos observados.

Para construir o instrumento de sombras basta ter alguns instrumentos de medição (transferidor, régua e compasso), um rectângulo de madeira e um triângulo rectângulo isósceles, em madeira ou metal.

A construção faz-se a partir do rectângulo de madeira assinalando as suas diagonais e o seu ponto de intersecção. Traça-se uma circunferência com centro neste ponto, de raio igual ao comprimento dos catetos do triângulo rectângulo. Traça-se uma tangente à circunferência e que seja paralela aos lados menores do rectângulo. Com o auxílio do transferidor procede-se à graduação, de 0° a 90°, dos dois quadrantes que constituem um dos semicírculos.

Finalmente, faz-se um sulco de modo a cravar o triângulo rectângulo, garantindo a perpendicularidade, à base rectangular.

A figura 2 é uma estilização do referido instrumento.

O triângulo isósceles $[BSD]$ é rectângulo em B. O raio da circunferência tem um comprimento igual ao cateto. O segmento TT'é tangente à circunferência no ponto B. O arco AB é graduado de 0° a 90°, o mesmo acontecendo ao arco CB.

Provada a igualdade dos triângulos $[EBS]$ e $[EBD]$ resulta que a altura angular do Sol, que é dada pelo ângulo $[SEB]$, é igual à medida do arco AE'.

Para se poder efectuar a medição referida é necessário orientar o instrumento. Para tal, tem que se colocar a tábua

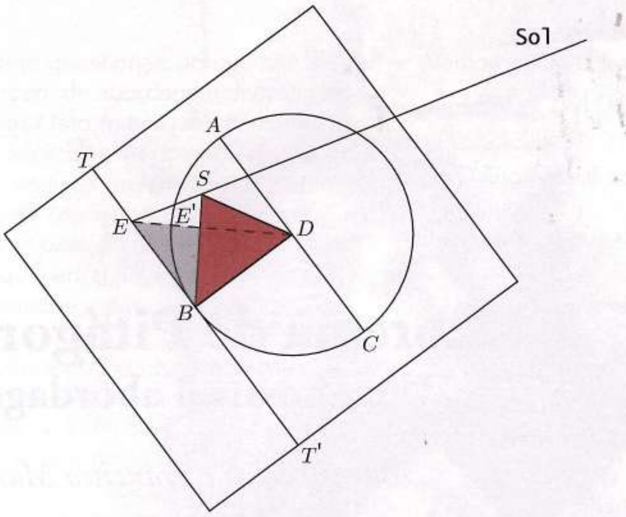


Figura 2. Estilização do instrumento de sombras.

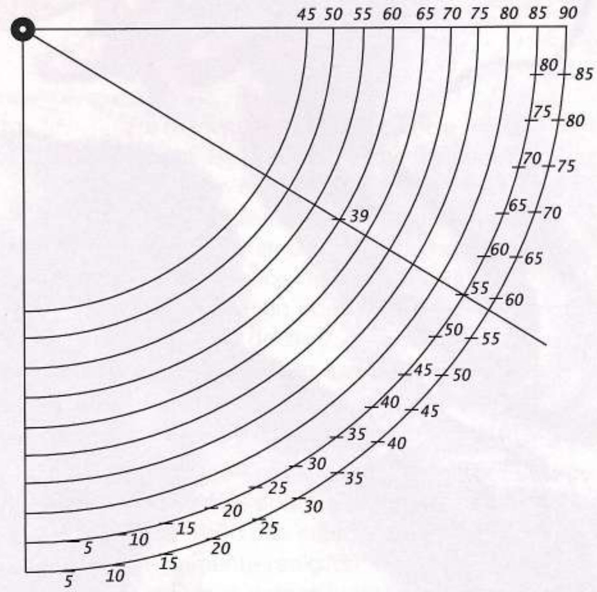


Figura 3. Quadrante.

na posição horizontal e rodar a peça até que a sombra do cateto $[SB]$ coincida com a tangente TT'. Nessa altura, regista-se o valor do ângulo ADE' (em que E' é o ponto onde a sombra DE intersecta o quadrante). Esse é o valor da altura angular do Sol.

O Nónio

O nónio foi desenvolvido por Pedro Nunes para que, adaptado a um astrolábio, pudesse determinar a altura angular de estrela com aproximação ao segundo. O processo de construção que Pedro Nunes concebeu para o Nónio, adaptado a um astrolábio, foi dividir um dos seus quadrante, graduado de 0° a 90°, em 44 quadrantes interiores e concêntricos. A escala exterior era dividida em 90 partes iguais, a escala que se segue em 89 partes, a seguinte em 88 e assim sucessivamente até que a última escala foi dividida em 46 partes. O número de ordem (89, 88, 87, ...) foi escrito lateralmente.

As partes em que cada escala foi dividida foram assinaladas e foi marcada a numeração apenas de 10 em 10 (ou de 5 em 5) divisões.

Para simplificar a construção, o quadrante representado foi dividido em apenas 10 escalas concêntricas (90, 85, 80, ..., 45) e em cada uma destas escalas foi marcada a numeração de 5 em 5 divisões, conforme a figura 3.

Representando por:

n — número de partes em que foi dividido o quadrante (em que n é maior ou igual a 45 e menor ou igual a 90);

p — número de divisões inteiras por onde passa o fio de prumo do quadrante (medeclina no caso do astrolábio);

A — ângulo referente à altura da estrela que se pretende observar.

Atendendo à proporcionalidade existente podemos dizer que:

$$\frac{A}{90} = \frac{p}{n}$$

Exemplo:

Vamos medir a altura angular de uma estrela. Ao fazermos a pontaria com o instrumento para essa estrela verificamos que o fio de prumo do quadrante passa pela 39ª divisão da escala que tem 60 por número de ordem. Estabelecendo a proporção:

$$\frac{A}{90} = \frac{39}{60} \Leftrightarrow A = \frac{90 \times 39}{60} \Leftrightarrow A = 58.5$$

podemos dizer que o valor da altura da estrela é 58° 30'.

Bibliografia

Albuquerque, Luís de, "Instrumentos de Navegação", Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, Lisboa, 1988.

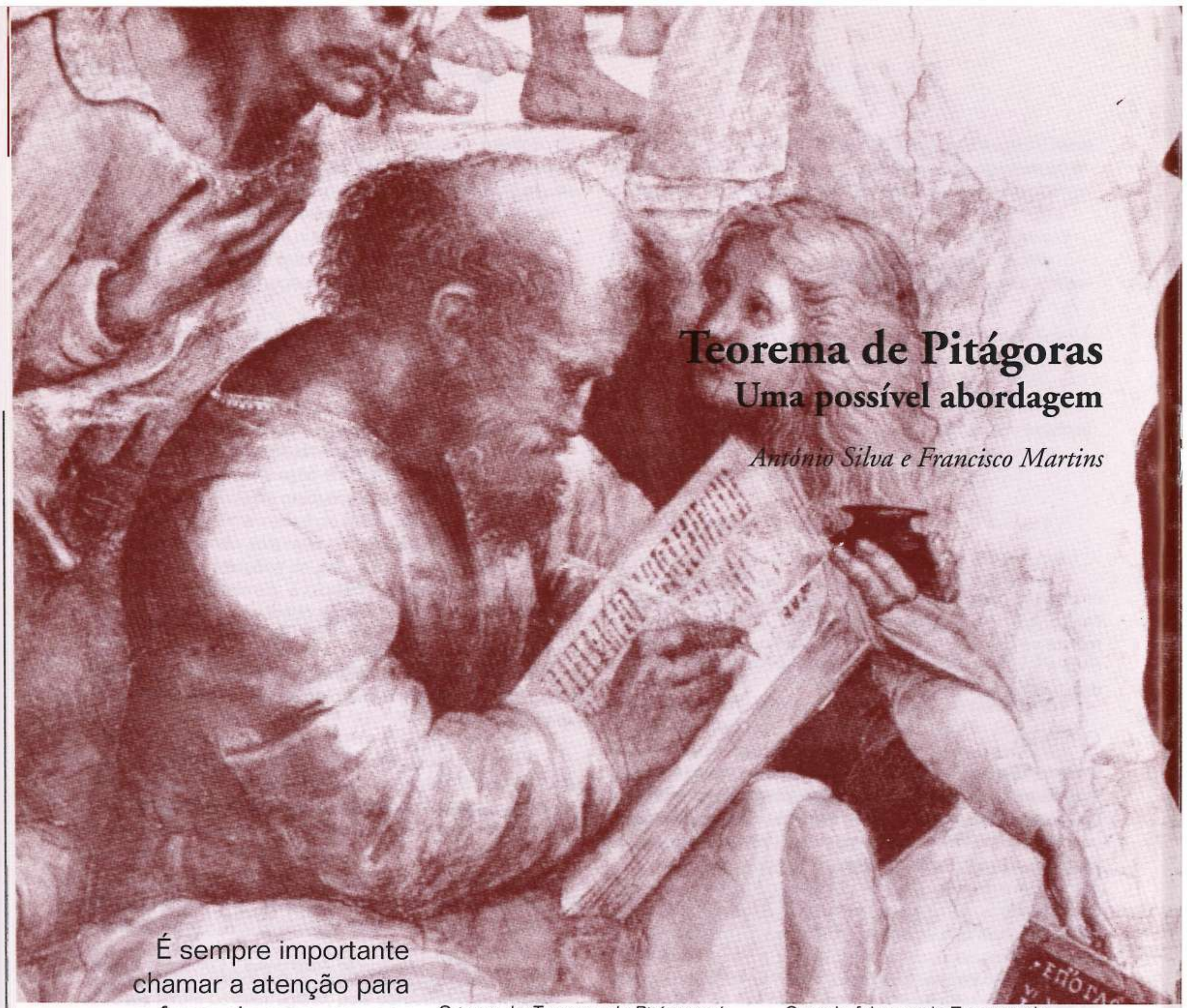
Albuquerque, Luís de, "Navegação Astronómica", Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, Lisboa, 1988.

Albuquerque, Luís de, "A Náutica e a Ciência em Portugal", Gradiva, Lisboa, 1989.

Reis, António Estácio dos, "Medir Estrelas", CTT Correios de Portugal, 1997.

Teixeira, Francisco Gomes, "História das Matemáticas em Portugal", Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1934

Elisa Figueira
Esc. Sec. Luísa de Gusmão



Teorema de Pitágoras
Uma possível abordagem

António Silva e Francisco Martins

É sempre importante chamar a atenção para o facto de que, apesar de um problema estar resolvido, isso não significar que se tenha fechado uma porta. Pode ser sempre aliciante procurar novas portas de entrada para o conhecimento de uma situação se, para tanto, entendermos esse facto como um desafio, um prazer ou uma actividade onde a imaginação e a criatividade são as suas chaves mestras.

O tema do *Teorema de Pitágoras* é abordado no 8° ano do 3° ciclo do Ensino Básico. É curioso observar que, em todos os manuais existentes actualmente no mercado editorial, encontramos sempre o mesmo tipo de abordagem de demonstração deste Teorema: *a decomposição de um quadrado em quadrados e triângulos*. Esta abordagem faz todo o sentido na continuidade da exploração da decomposição de figuras. Mas... surge então naturalmente a pergunta: porque não complementar este estudo com outras abordagens demonstrativas do Teorema que façam uso dos conhecimentos adquiridos pelos alunos em anteriores anos de escolaridade, nomeadamente sobre semelhanças de triângulos (7° ano) e sobre áreas de triângulos e quadrados (6° e 7° anos)?

Quando falamos do Teorema de Pitágoras falamos igualmente de dois conceitos fundamentais que lhe estão intimamente associados: o conceito de área e o conceito de semelhança de triângulos. De modo evidente ou dissimulado, estes dois conceitos estão sempre presentes em qualquer tipo de raciocínio que se possa elaborar para demonstrar este teorema. No entanto, nos manuais que consultámos, este facto parece ter sido totalmente esquecido.

Observando um pouco mais detalhadamente esta questão, podemos verificar que o Teorema de Pitágoras é abordado imediatamente a seguir ao estudo da decomposição de figuras, mas completamente desligado do estudo mais aprofundado das semelhanças de triângulos, que tem lugar numa fase posterior. Daí que seja pertinente questionar: porque não alterar a ordem de abordagem destes conceitos? Isto é, porque não começar por abordar a Decomposição de Figuras, seguida do estudo das Semelhanças de Triângulos (analisando aqui a decomposição de um triângulo rectângulo em triângulos semelhantes) e finalmente, como síntese lógica da análise dos dois temas anteriores, a temática do Teorema de Pitágoras? A relação existente entre as noções de razão de semelhança entre dois polígonos e a razão das suas áreas é essencial para a compreensão integral das questões que estão envolvidas na demonstração do Teorema de Pitágoras.

Vejamos então como poderia ser abordado este tema, neste novo contexto, após uma primeira abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras usando a decomposição de figuras.

Tomemos um triângulo, rectângulo em A, como o da figura 1.

Vamos começar por traçar uma perpendicular à hipotenusa a partir do vértice do ângulo recto. Ficamos assim com o nosso triângulo rectângulo dividido em dois triângulos rectângulos *mais pequenos*.

Comecemos por observar que:
$AC \perp AB$ e $AD \perp BC$.

É fácil verificar que qualquer um dos triângulos rectângulos mais pequenos é semelhante ao triângulo rectângulo grande. (Porquê?... pode ser a pergunta, já que este tipo de análise do problema é do conhecimento dos alunos desde o ano lectivo anterior).

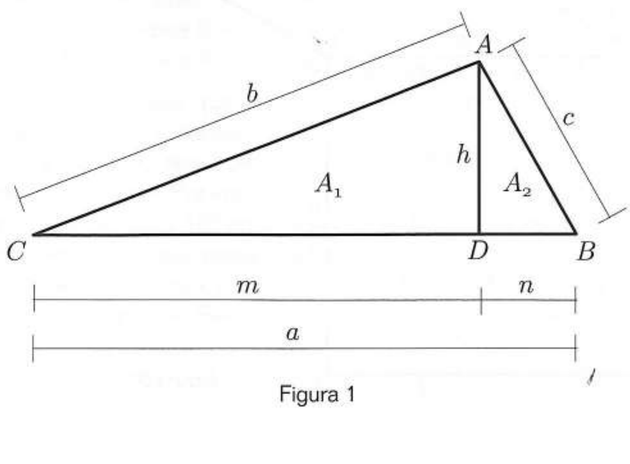


Figura 1

Vamos então provar este facto:

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$, porque têm dois ângulos iguais:

- O ângulo B é comum aos dois triângulos;
- Os ângulos BAC e ADB são rectos.
- Neste caso a razão de semelhança vai ser: $R = c/a$

$\triangle ABC \sim \triangle ADC$, porque têm dois ângulos iguais:

- O ângulo C é comum aos dois triângulos;
- Os ângulos BAC e ADC são rectos.
- Neste caso a razão de semelhança vai ser: $R = b/a$

Consideremos agora que A, A_1 e A_2 são, respectivamente, as áreas de $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$. Podemos então afirmar que: $A = A_1 + A_2$

Mas, vimos já anteriormente que existe uma proporcionalidade directa entre as áreas de duas figuras semelhantes. No nosso caso isto significa que podemos obter a área do *triângulo menor* multiplicando pelo quadrado da razão de semelhança a área do *triângulo grande*. Isto é:
$A_1 = (c/a)^2 \times A$ e $A_2 = (b/a)^2 \times A$

Logo:

$A = (c/a)^2 \times A + (b/a)^2 \times A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = A \times (c^2/a^2 + b^2/a^2) \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow 1 = c^2/a^2 + b^2/a^2 \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2$

Esta abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras tem algumas fragilidades. Como explicar aos alunos a manipulação algébrica nela envolvida? Se bem que as passagens (*) possam ser naturalmente aceites, elas pressupõem o conhecimento do facto de que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os seus membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial. Esta propriedade pode ser aqui recordada, mas está obviamente fora de contexto.

A relação entre a razão de semelhança de dois triângulos rectângulos e a razão das suas áreas é aqui perfeitamente realçada, com uma simplicidade e clareza extraordinárias.

Claro está que existem modos mais simples de abordar este tema, mas onde a relação entre a razão de semelhança de dois triângulos rectângulos e as suas áreas se esbate de modo significativo. Vejamos o exemplo seguinte, consideremos novamente um triângulo rectângulo como o da figura 1.

Tracemos novamente uma perpendicular à hipotenusa a partir do vértice do ângulo recto. Ficamos assim com o nosso triângulo rectângulo novamente dividido em dois triângulos rectângulos mais pequenos. Vamos separar os nossos três triângulos para podermos visualizar melhor o que eles têm em comum (Figura 2).

Novamente, qualquer um dos *triângulos rectângulos mais pequenos* é semelhante ao *triângulo rectângulo grande*, facto este que já foi provado anteriormente.

Então, sendo semelhantes, os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais. Podemos assim escrever as igualdades seguintes:
$a/b = b/m$; Logo $a \times m = b \times b$ ou seja $a \times m = b^2$. (i)

(i) Podemos chamar aqui a atenção para o facto de $a \times m = b^2$ mais não ser do que uma igualdade de áreas, a área de um rectângulo e a área de um quadrado, como podemos facilmente observar na Figura 3.

Temos

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n};$$

Logo $a \times n = c \times c$ ou seja
$a \times n = c^2$ (ii)

(ii) Podemos chamar aqui novamente

a atenção para o facto de $a \times n = c^2$ mais não ser do que uma igualdade de áreas, a área de um rectângulo e a área de um quadrado, como podemos novamente observar na Figura 3.

Vejamos agora o que obtemos quando adicionamos b^2 e c^2:

$$b^2 + c^2 = (a \times m) + (a \times n)$$

$$b^2 + c^2 = a \times (m + n)$$

Mas, $m + n = a$. Logo:

$$b^2 + c^2 = a \times a = a^2$$

Vamos finalmente obter:

$$b^2 + c^2 = a^{2\,\text{(iii)}}$$

(iii) A ideia de adicionar b^2 e c^2 permite resolver a questão mas não deixa de ser um *coelho tirado da cartola*. Como justificar, neste passo, a opção de adicionar b^2 e c^2 sem ter já presente o conhecimento prévio do resultado a que queremos chegar? Constata-se que ela conduz ao resultado pretendido, mas de um modo não natural, isto é, não estamos perante um procedimento que se afigure como continuação lógica da análise da situação.

Claro está que, dado o nível etário e os pré-requisitos dos alunos a que nos estamos a dirigir, esta demonstração será provavelmente mais facilmente aceite por estes. No entanto, toda a riqueza matemática dos assuntos abordados perde-se irremediavelmente, quando a comparamos com a demonstração anterior. Não deixa, todavia, de ser uma boa demonstração, ao fazer apelo às Semelhanças de Triângulos.

Sugestão de actividade

Na abordagem das *Semelhanças de Triângulos* é referido o facto de que: "Todos os triângulos rectângulos se podem decompor em dois triângulos semelhantes". Porque não ir um pouco mais longe e propor a seguinte actividade exploratória: "Quais são os triângulos que se podem decompor em dois triângulos semelhantes?". Com esta investigação, os alunos poderiam concluir não só o resultado anterior, mas igualmente o facto de que *essa propriedade é exclusiva dos triângulos rectângulos*.

Estes exemplos de demonstração do

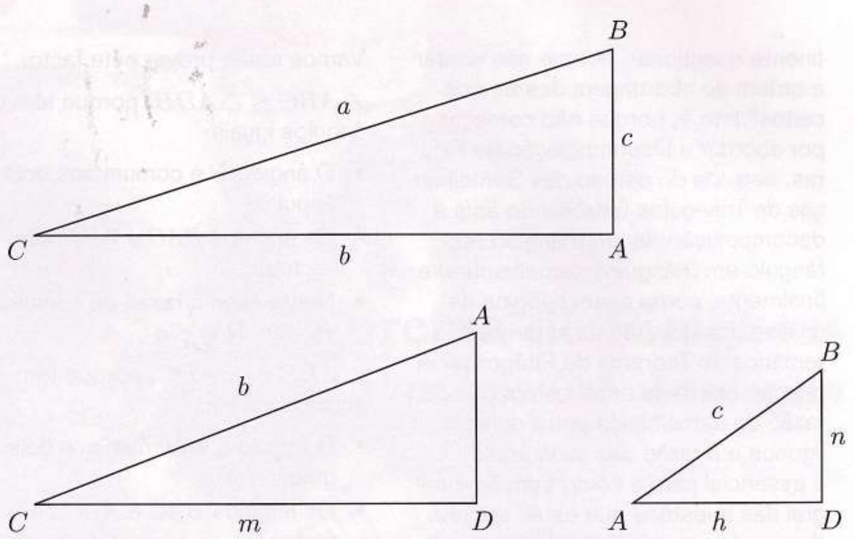


Figura 2

Teorema de Pitágoras podem igualmente ser introduzidos com um pouco de História da Matemática, chamando a atenção para o facto de existirem para cima de 300 demonstrações deste Teorema. É sempre importante chamar a atenção para o facto de que, apesar de um problema estar resolvido, isso não significar que se tenha fechado uma porta. Pode ser sempre aliciante procurar novas portas de entrada para o conhecimento de uma situação se, para tanto, entendermos esse facto como um desafio, um prazer ou uma actividade onde a imaginação e a criatividade são as suas chaves mestras.

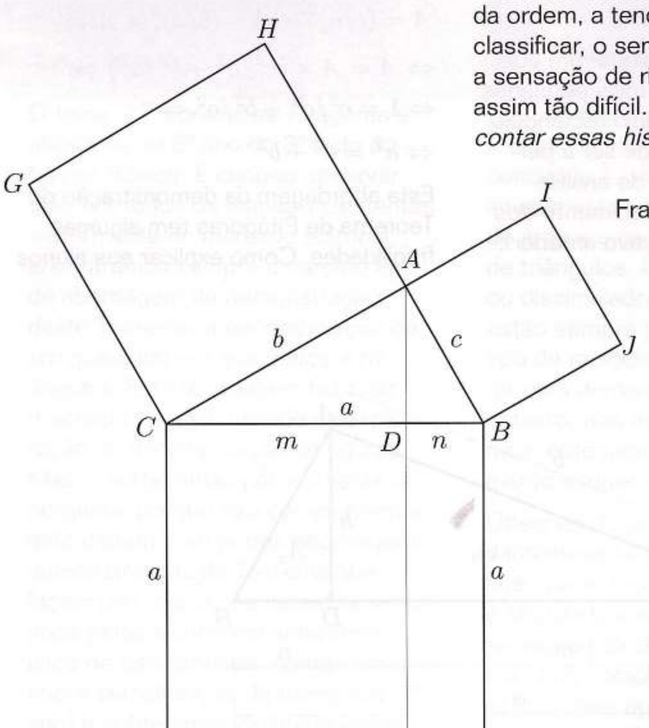


Figura 3

Simplicidade, clareza, perceptividade e riqueza matemática devem ser os lemas de toda e qualquer abordagem temática em Ensino da Matemática.

Como afirma Ian Stewart, no prefácio da sua obra *Deus joga aos dados*: "É esta a razão pela qual é possível divulgar a Matemática. Há milhões de histórias para contar, muitas delas fascinantes. E, como a Matemática a sério faz apelo a algumas características muito profundas da natureza humana — o amor pelos padrões, a procura da ordem, a tendência para unificar e classificar, o sentido visual da beleza, a sensação de ritmo —, isso não é assim tão difícil. *Apenas temos de contar essas histórias*".

António Manuel Silva
Francisco Romão Martins
Escola Secundária
Fernão Mendes Pinto

Círculo de Estudos:

Matemática B – 10º ano
Janeiro a Março de 2002
Reflexão critica Individual sobre Actividades Desenvolvidas

Tenho acompanhado com bastante interesse as indecisões, avanços e recuos sobre a Nova Reforma do Ensino Secundário. Participei até agora num círculo de estudos sobre a Matemática B, onde elaborei uma reflexão crítica que gostava de partilhar e obter feed-back através de outras opiniões.

Os objectivos do círculo de estudos foram:

1. Conhecer o Programa de Matemática B;
2. Ter desenvolvido propostas de metodologias de ensino adequadas ao 10º ano do referido programa;
3. Ter desenvolvido propostas de metodologias de avaliação adequadas ao 10º ano no referido programa.

A participação num círculo de estudos como este proporciona dois tipos de experiência: o conhecimento das transformações a implementar na nova reforma do Ensino Secundário e as implicações que a mesma traz para a disciplina de Matemática em particular. Começando este círculo de estudos com uma visão global do Programa de Matemática B permitiu contextualizar a disciplina no currículo da Nova Reforma e perceber qual o papel particular da Matemática B em comparação com a Matemática A.

Ainda se pode constatar qual o percurso matemático dos alunos vindos do 3º ciclo e ao longo dos 3 anos de Ensino Secundário. Foi importante enquadrar os alunos no 10º ano e perceber os conhecimentos, capacidades e atitudes que os mesmos possuem na entrada para o Ensino Secundário. Pensar no 10º ano só por si não é possível, o módulo inicial é um motor de arranque para um percurso de três anos que conduzirá os alunos ao mundo do trabalho ou não. É aqui que poderei dizer que gostava de ver entrar esta Reforma com o esclarecimento sobre a permeabilidade de cursos e sobre a realização de exames em Matemática B. Pois é muito diferente preparar um aluno para o acesso ao ensino superior, que na minha opinião deve passar sempre pela realização de uma avaliação aferida a nível nacional, e preparar o mesmo aluno para a realização de tarefas específicas num contexto de trabalho.

As tarefas de planificação, concepção e execução de actividades enquadradas no âmbito da Matemática B permitiram o contacto com as indicações metodológicas do novo programa e o seu desenvolvimento curricular. Foi fundamental perceber o contexto e os objectivos da disciplina nesta versão B para se poder instrumentalizar os conteúdos a explorar através de propostas a colocar aos alunos. As actividades que nos foram colocadas suscitaram interesse pela sua pertinência e adequação ao círculo em causa, mas necessitam de adequação e orientação no que se refere ao seu transporte para os alunos. É este um factor muito importante neste círculo de estudos – a troca de experiências aliada à discussão sobre as actividades a propor e a desenvolver com os alunos. Cada professor participante pode intervir numa discussão em que partilha a sua vivência e com isso permite um crescimento e um envolvimento dos seus pares. Perante esta partilha pode-se comparar os tipos de ensinos feitos com alunos dos actuais CSPOVA e assim tentar definir uma linha de orientação para a Matemática B. Sendo diferente em muitos aspectos e principalmente pelo enquadramento dado, curso tecnológico versus curso geral, a experiência anterior pode nos possibilitar a conclusão não pacífica de que a Matemática de alunos que não pretendem prosseguir estudos no ensino superior tem de ser diferente.

No que diz respeito ao desenvolvimento de instrumentos de avaliação, este círculo de estudos dissimulou-os através das tarefas realizadas e sempre num enquadramento de actividades dentro de um tema programático, geometria, funções e estatística. A elaboração de uma ficha de exploração de conteúdos e o seu enquadramento no programa de Matemática B obrigou-nos a pensar a avaliação. É muito difícil estabelecer os limites desta avaliação e o que se pretende com a mesma, existem factores em causa muito dispares que podem passar por conhecimentos, capacidades e atitudes. Até onde ir em cada uma destas divisões? É a questão fundamental sobre a qual teremos de refletir mais para poder estabelecer uma linha orientadora e congruente a todos os agentes educativos. A avaliação e o seu desenvolvimento metodológico não pode passar só pela disciplina em causa ou pela sua versão B. Teremos de saber concretamente o que vai acontecer a estes alunos ao longo do seu percurso no Ensino Secundário, onde não pode ser esquecida a importância atribuída à Matemática na futura profissão. Não se pode usar os mesmo parâmetros avaliativos para alunos diferentes de cursos diferentes para profissões diferentes. Se a Matemática foi separada por versões, então vamos dar uma identidade própria a cada curso e vamos desenvolver as capacidades e conhecimentos de cada aluno, dentro desse curso e não conotar a disciplina como um pilar de travamento a tal percurso, vamos dar-lhe o estatuto essencial e importante.

Paulo Jorge Ribeiro Dias
Escola Secundária da Moita

Iniciativas dos Núcleos Regionais da APM

Na sequência da divulgação que temos vindo a fazer, noticiamos neste número da revista o modo como algumas ideias sobre Matemática e Profissões estão a ser desenvolvidas pelos Núcleos Regionais da APM.

Em Almada-Seixal estão a ser organizadas visitas aos núcleos do Ecomuseu Municipal do Seixal, umas destinadas exclusivamente a professores de Matemática e a técnicos do Museu, outras destinadas também a alunos.

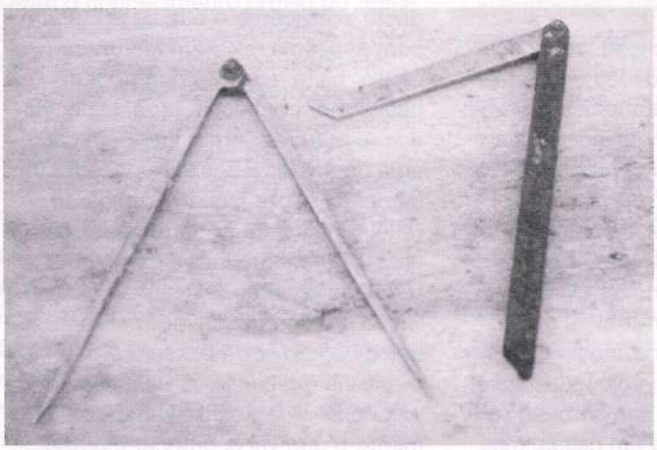


Figura 1. Compasso e Suta

Numa dessas visitas — que tinha como objectivo conhecer as Profissões e a Matemática envolvidas num estaleiro naval onde ainda se trabalha em barcos de madeira — foi observado como os profissionais da construção e recuperação destes barcos trabalham com os comprimentos e os ângulos das pequenas peças de madeira. Em vez da sua medição (o que pressupõe a comparação com uma unidade tomada como padrão), cada comprimento e cada ângulo é corporizado num instrumento específico, respectivamente o *compasso* e a *suta* (Figura 1), através do qual é transportado e marcado noutra peça.

Também em Almada-Seixal, foi iniciado um levantamento fotográfico de situações em que Matemática está envolvida. A primeira fonte usada para este levantamento foi o painel de azulejos intitulado A Cova da Piedade e o Tejo, da autoria de José António Silva e Carlos Ganhão, que a Junta de Freguesia da Cova da Piedade colocou junto a uma paragem de transportes públicos. Muitos dos motivos aí representados estão fortemente associados a Profissões e à Matemática (Figura 2).

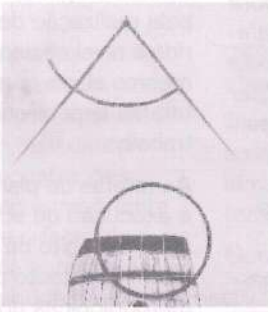


Figura 2. Painel de azulejos

Em Maio, este Núcleo Regional realizará a 2ª edição do Interescolas Matemática e Realidade, um concurso entre equipas de alunos, organizado por fases, e que assume em cada ano lectivo o tema anual escolhido pela APM. A edição deste ano terá como tema a Matemática envolvida nas Profissões que trabalham com a cortiça e a sua fase presencial será realizada no dia 8 de Maio, no núcleo do Ecomuseu Municipal do Seixal situado na antiga fábrica da Mundet.

Não será difícil organizar iniciativas semelhantes a esta noutras regiões. Quem o quiser fazer pode contactar Almada-Seixal via almada@apm.pt ou 212 500 985.

Para apoiar todo este trabalho, continuar a desenvolver os temas de anos anteriores e antecipar ideias para os futuros temas, existe em Almada-Seixal o Grupo de Trabalho sobre Matemática e Realidade, constituído por alguns professores leccionando em escolas desta região mas aberto a professores doutras regiões. Para os colegas que o quiserem contactar, podem fazê-lo via pcest@netcabo.pt, almada@apm.pt ou 212 539 468.

O Núcleo Regional de Coimbra regulamentou o seu concurso FotoMat de modo a acompanhar o tema anual escolhido pela APM. Em 2001 o tema foi sobre Matemática e Natureza, este ano é sobre Matemática e Profissões. Quem quiser participar ou saber como está a decorrer a VI edição deste concurso, pode procurar mais informações em alcinosimoes@yahoo.com.

Pedro Esteves
Esc. Sec. José Afonso — Seixal

Matemática! Para quê?

Adelina Gouveia e Fátima Alves

Para o ano de 2002 foi proposta, pela APM, a temática de trabalho *A Matemática e as profissões*. Curiosamente, desde Novembro de 1999 temos promovido sessões de sensibilização para este tema, na Escola Básica e Secundária de Machico, através do clube de Matemática.

Sentindo a responsabilidade de corresponder a uma necessidade dos nossos alunos, muitas vezes expressa pela eterna questão: *Matemática, para quê?*, organizámos um conjunto de sessões, nas quais seria feita a articulação da Matemática com uma área profissional seleccionada.

Este artigo sumariza a primeira das referidas sessões: *A Matemática e os Recursos Pesqueiros* tendo como orientadora de trabalhos Adriana Alves, Bióloga Marinha da Direcção de Serviços de Investigação das Pescas — Direcção Regional de Pescas da Madeira.

Os participantes foram alunos do 12º ano, mediante inscrição prévia, pois assim permitia controlar o número de participantes e combater o incumprimento do horário escolar.

No início da sessão começou-se por descrever a profissão, o que logo despoletou diversas questões de ordem académica, desde: *O que fazer para tirar o curso ?*, *Onde existia?*, até se : *É preciso saber nadar ?*, ...

Antes de chegar aos modelos matemáticos utilizados foi esclarecida a importância, a nível prático, deste estudo que permite regular o tamanho dos peixes a pescar, da malha da rede a utilizar e das áreas de interdição de pesca para protecção da desova e/ou de exemplares juvenis e a sua influência a nível de legislação, da economia e do ambiente.

Seguiu-se a apresentação de vários modelos matemáticos desde os de produção, que estudam a estrutura do stock como um todo e os efeitos da pesca, aos estruturais que consideram a estrutura do stock por idades e a sua evolução com o tempo. Foi um destes últimos modelos que foi apresentado aos alunos para o estudo do patudo (atum), que relaciona o crescimento do peixe com a sua idade.

Equação de Bertalanffy (1938)

$$L_t = L_\infty\left(1 - e^{k(t-t_0)}\right),$$

sendo

L_t — Comprimento médio do indivíduo (cm) à idade t

L_∞ — Comprimento assimptótico (cm), i.e , o comprimento a que corresponde uma taxa de crescimento igual a zero.

k — coeficiente de crescimento (ano^{-1})

t — idade do indivíduo em anos.

t_0 — idade teórica do indivíduo que corresponde ao comprimento $L = 0$.

A estimação destes parâmetros baseia-se na leitura directa de peças ósseas: otólitos, espinhos, vértebras, escamas,... que os alunos tiveram oportunidade de analisar. A recolha destas peças centra-se na pesca comercial, na amostragem biológica das capturas e dos dados ambientais, situações com que os alunos tiveram contacto através da amostra de um vídeo. Os alunos demonstraram interesse imediato ao tentar perceber como se faz a recolha da idade nos otólitos (tinham que contar as curvas existentes) isto após a cozedura do peixe e limpeza minuciosa do material em estudo, sendo necessária perícia e muita paciência. Verificaram que primeiro tinham que medir o peixe, com fita e tudo!

O modelo anteriormente referido foi demonstrado o que suscitou um pouco de perplexidade nos alunos com a complexidade dos parâmetros.

Afinal isto de ir para a universidade não é brincadeira!!!

$$\left(\frac{dL_t}{dt}????\right)$$

Mas, adiante!

Após a recolha dos dados foi proposto aos alunos um exercício:

Temos a equação de crescimento de von Bertalanffy para o patudo (atum):

$$L_t = 264.3\left(1 - e^{-0.14(t+1.05)}\right),$$

com a ajuda da calculadora gráfica determinar o comprimento do peixe aos 2 anos e aos 8 anos.

Para alunos deste nível a tarefa foi facilmente realizada tendo uns optado pelo estudo do gráfico e outros pela tabela (figuras 1 e 2).

Mas de uma forma ou de outra conseguiram chegar à resposta.

"Este peixe cresce muito!!".

Com a análise deste modelo foi explicado aos alunos a sua importância desde a sua utilização como forma de traduzir a realidade e como possibilidade de análise de diferentes situações e cenários, até à sua aplicação na prática , não esquecendo a possibilidade de aperfeiçoamento.

Finalizada a sessão verificámos que o objectivo de dar a conhecer uma profissão e da importância da Matemática na mesma tinha sido alcançado, o que foi demonstrado pelo entusiasmo e participação activa dos alunos que assistiram à sessão.

Adelina Gouveia e Fátima Alves
E.B.S. Machico

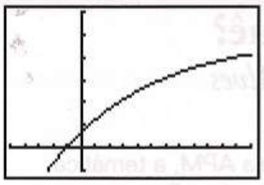


Figura 1

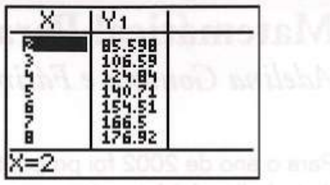


Figura 2

Matemática e as profissões no Dia Aberto da E.S.T.G.

Nuno Dias

Nos passados dias 5 e 6 de Março de 2002 a Escola Superior de Tecnologia e Gestão (E.S.T.G.) do Instituto Politécnico de Leiria "abriu as suas portas" ao público em geral, mas especialmente às escolas do 3º ciclo e secundário deste distrito, para mais um Dia Aberto. E foi grande a afluência dos alunos, principalmente do ensino secundário, nestes dois dias de exposições permanentes.

O objectivo principal deste acontecimento anual é dar a conhecer, aos alunos que visitam a escola, os diversos cursos ministrados pela E.S.T.G. e as suas potencialidades. Mas outro objectivo importante é mostrar a Ciência e o Saber de forma mais prática que expositiva, logo mais cativante! Pretende-se mostrar o melhor que esta escola faz e que o faz bem.

Este ano, a exposição do Departamento de Matemática intitulou-se "A Matemática e as Profissões", tema proposto pela APM para o ano 2002. Neste sentido, foi essencial dar a conhecer a aplicação de diversas áreas matemáticas nas mais distintas actividades profissionais. Assim, a visualização prática desta ciência foi mais atractiva para os alunos, uma vez que puderam verificar a aplicação prática da Matemática nas actividades de um operador de caixa até ao especulador de bolsa, passando pelo engenheiro ou médico.

Foi agradável assistir à mudança de atitude de alunos que entravam na exposição com afirmações do género: "Baah! Matemática! Podemos passar à frente?"... Depois de ouvirem as várias explicações, saíam, não com veneração à Matemática (esse não era o nosso propósito essencial) mas com a ideia de que a Matemática se aplica afinal todos os dias e nas diversas profissões(!): "Afinal a ciência que parece um amontoado de Teoremas, Funções ou Exercícios (enfadonhos na opinião de alguns) e onde se aprendem números e cálculos, é peça indispensável de tudo o resto! Consegue explicar o funcionamento dos códigos de barras ou do meu autoclismo!".

Mas o que puderam ver os visitantes na exposição?

A visita começava pela ligação entre as Leis de Mendel, as transmissões de genes e as probabilidades. Estudou-se, como caso particular, a cor dos olhos; de entre os casos possíveis, cada pessoa podia verificar em qual se enquadrava. Esclarecia-se também que, apesar da probabilidade ser menor, há possibilidade de se ter olhos azuis sem o pai ou a mãe terem olhos dessa cor. A profissão associada foi, portanto, a de médico.

De seguida, os visitantes podiam "descobrir" qual o melhor tipo de juros a aplicar ao seu dinheiro. Eram comparadas taxas de juro simples ou compostas e, estas últimas, com pagamentos semestrais, mensais ou, no caso extremo, juros compostos continuamente. Pretendia-se mostrar a familiarização que um economista deve ter com a função exponencial e com os diferentes tipos de crescimento.

Esclarecia-se depois, o motivo do comprimento da fronteira entre Portugal e Espanha ser diferente da cartografia portuguesa para a espanhola. De facto, a nossa medida oficial é vinte por cento maior que a espanhola! Tal facto pode ser justificado através das definições base de fractais. Este conceito, relativamente novo na Matemática, permitia também justificar o comportamento das Bolsas de Valores. Estavam também em exposição nesta área quatro trabalhos sobre fractais desenvolvidos em computador por alunos de Engenharia Informática, no âmbito da disciplina de Matemática Computacional.

O próximo desafio para os visitantes era descobrir como "enganar" o Carlos Cruz no concurso 1–2–3. O truque (!) era explicado pelas probabilidades condicionadas.

Mantendo o espírito do jogo, explicava-se em seguida a relação do máximo divisor comum (m.d.c.) com o Snooker: quantas tabelas são necessárias para que uma bola atirada de um dos cantos, com um ângulo de 45°, atinja um outro canto. Mas também se relacionava o m.d.c. com Coxins (trabalhos da Arte de Marinheiro aplicados na construção de redes de pesca) e Acolchoados (costura de blusões, sacos-cama ou colchas), ambos simétricos em relação a um ponto ou eixo.

Apesar de não ser novidade, um dos ex-libris da exposição foi o esclarecimento aos alunos do que representa, afinal, o número à direita do B.I.. Não, não representa o número de pessoas com o mesmo nome; é sim o algarismo de controlo para verificar se o número está ou não correcto.

O funcionamento do algoritmo utilizado neste processo de controlo foi atentamente ouvido e foi possível também verificar a autenticidade de alguns dos B.I.'s dos visitantes. Era permitido também aos alunos, dado um número do B.I. simulado pelo computador, descobrir o seu algarismo de controlo.

As congruências, presentes também no sistema de controlo do B.I., estão igualmente relacionadas com os códigos de barras, na profissão do operador de caixa. Aqui, os alunos tinham à sua disposição um leitor de códigos de barras e um computador que fazia a leitura dos códigos, simulando uma situação de erro: "Como sabe o computador que, ao digitar o número de referência de um código de barras, o operador se enganou?"; a resposta é simples: através de um sistema de controlo, que recorre igualmente a um dígito, que controla se o referido número foi introduzido correctamente.

Depois, ilustrou-se, com placas de acrílico e um pequeno tanque com água e sabão, o problema de Steiner: encontrar redes de comprimento mínimo que liguem um número finito de pontos. A interrogação mais frequente, por parte dos visitantes, era: "como é que o sabão sabe que esta solução representa a rede minimal?", à qual, na brincadeira, respondíamos que era um sabão inteligente (!); obviamente que, de seguida, explicávamos que eram apenas as moléculas de sabão que procuravam a posição mais estável. Tal solução pode aplicar-se a problemas como a construção de redes de estradas, condutas de gás ou água ou ao cálculo de tarifas telefónicas de chamadas de longa distância.

A aplicação das fracções esteve patente na sua aplicação a roldanas, correias de transmissão e rodas dentadas sendo este tema particularmente interessante para alunos da área de mecânica, mas também para qualquer curioso. Estava em exposição, como exemplo visual de tal aplicação, uma caixa de velocidades cortada, de forma a serem visíveis as rodas dentadas e um esmagador de uvas.

De seguida, entrou-se no campo da Topologia: mostrou-se que fazer um simples nó de gravata pode ser uma atitude matemática. Considerando o comprimento da gravata e critérios estéticos, o número de nós possível é finito. Os alunos podiam tentar reproduzir qualquer um destes nós em frente a um espelho.

Depois eram relacionadas as fracções com a música; da composição dos acordes, à frequência das notas, passando pela explicação de que a cauda de um piano reflecte a forma de uma curva exponencial na sua estrutura.

Os alunos eram então convidados a participar em três actividades com dois aparelhos que já começam a conhecer cada vez mais: a calculadora gráfica e o C.B.L.. As actividades propostas eram analisar a intensidade do som produzido por um diapasão (e não só, uma vez que não foi só o som do diapasão a ser analisado!), analisar a intensidade da luz de uma lâmpada e a relação entre a pressão e o volume de ar contido numa seringa fechada. O resultado destas experiências eram projectados através de um View Screen.

A "jóia da coroa" vinha exposta de seguida. Relacionava a profissão de canalizador com as equações diferenciais, tendo como objecto em estudo o autoclismo montado na sala. Explicou-se o funcionamento de um sistema de controlo de malha fechada, e como este permite ao utilizador ir embora descansado depois de puxar o autoclismo! Foi uma das áreas de maior atracção nesta exposição, uma vez que não seria de esperar a presença de tal objecto na sala! (Figura 1.)

Depois relacionaram-se os retratos de fase com a Biologia, na análise de taxas de variação da população de uma espécie predadora e respectiva presa.

Explicava-se em seguida de que forma a função exponencial se relaciona com a Arqueologia na datação de fósseis: método de datação por Carbono 14, que implica a familiarização com o comportamento da função exponencial e com as equações diferenciais.

No final da exposição, encontravam-se imagens de esculturas e construções arquitectónicas nas quais a Matemática

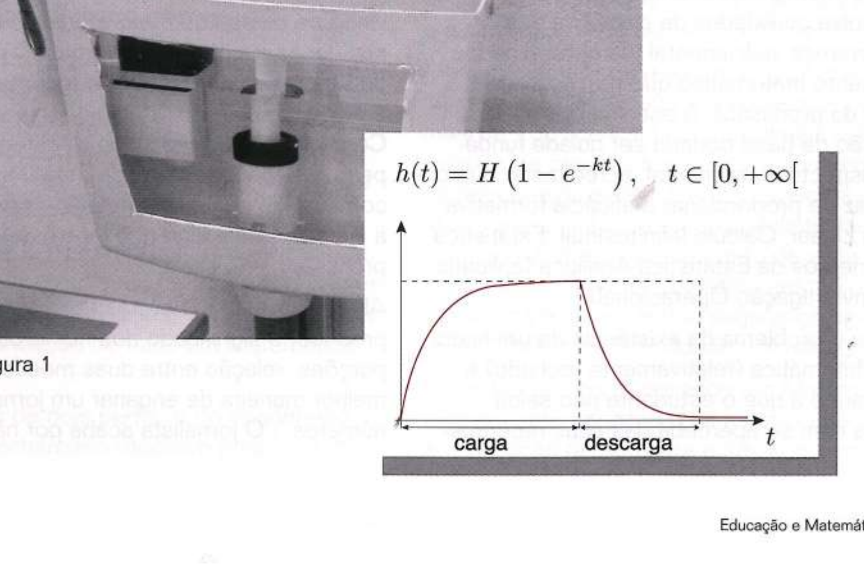


Figura 1

era visível e peça essencial, quer de construção, quer de beleza. Eram disso exemplo as imagens de esculturas como *Dependent Beings*, *Eternity*, *Music of the Spheres*, *Gordian Knot*, ou *Rhythm of Live*, e na arquitectura a Golden Gate Bridge, a Catedral de Milão, Brasília ou de Santa Maria, o Parténon e mesmo o tecto parabólico do Capitólio.

Existia ainda um jogo instalado em quatro computadores, a funcionar permanentemente, apenas com perguntas matemáticas que incidiam sobre algumas matérias apenas abordadas no ensino superior; este teve grande adesão, não tanto pelos alunos do secundário, mas principalmente pelos alunos da E.S.T.G..

Em conclusão, os alunos puderam sentir com estes pequenos exemplos que a Matemática permite analisar não só questões científicas profundas, mas também assuntos mais banais do nosso dia-a-dia.

E assim a exposição atingiu o seu fim: mostrar a relação entre a Matemática e o Mundo, dando a conhecer, de relance algumas das imagens desta ciência, nas múltiplas facetas da nossa vida.

Nuno Dias
Departamento de Matemática
da Escola Superior de Tecnologia e Gestão
do Instituto Politécnico de Leiria

O papel da Educação Matemática nas várias profissões

Luís Reis

No passado dia 8 de Fevereiro teve lugar um painel com o título acima. Dada a temática que a APM privilegia em 2002, achei de todo o interesse assistir. O painel foi organizado pela Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática e inserido no Encontro Nacional promovido por esta Sociedade. A Presidente da SPM, Anabela Cruzeiro e o moderador do painel, José Francisco Rodrigues receberam-me com muita simpatia.

Os membros da mesa foram: Mariano Gago (ministro da Ciência e da Tecnologia), José Manuel Fernandes (director do Público), Manuel Ricou (Alcatel Portugal e professor no IST), Francisco Sousa Soares (bastonário da Ordem dos Engenheiros), Nuno Valério (representante do bastonário da Ordem dos Economistas), Paulo Trincão (director do Museu Nacional da Ciência e da Técnica) e Pedro Freitas (vice-presidente da SPM e professor no IST).

O moderador começou por explicar que o painel tentou reunir um conjunto de profissões onde a Matemática é importante na vida prática, económica e social. Inevitavelmente, ficaram de fora outras profissões (relacionadas, por exemplo com o Direito, a Saúde e as Artes).

Nuno Valério apontou duas justificações tradicionais pelas quais os economistas e gestores devem aprender Matemática: a natureza formativa (supostamente, o estudo da Matemática desenvolve qualidades de disciplina e rigor de raciocínio) e a natureza instrumental (há determinados ramos do conhecimento matemático que têm aplicação directa no exercício da profissão). A escolha dos tópicos a ensinar na formação de base poderia ser guiada fundamentalmente pelo aspecto instrumental, acreditando que o seu estudo era capaz de proporcionar a eficácia formativa pretendida: Álgebra Linear, Cálculo Infinitesimal, Estatística Descritiva e Fundamentos da Estatística Analítica (aplicada à Econometria e à Investigação Operacional).

Em seguida levantou o problema da existência de um hiato entre o ensino da Matemática (relativamente fechado) e a sua aplicação, levando a que o estudante não saiba apreciar Matemática nem se aperceba das suas repercussões no exercício profissional. Advogou que o estudo da Matemática não deve ser mero estudo de fórmulas para aplicar, antes a compreensão de métodos para chegar a resultados. Colocou a questão da reorganização do ensino da Matemática num contexto de desenvolvimento de métodos e instrumentos de trabalho proporcionados pela Informática, não só pela necessidade de atingir os objectivos formativos e instrumentais, mas também para ensinar o futuro economista a adaptar-se a esse progresso tecnológico.

NV disse não ser de admirar que o português adulto médio saiba pouco de tudo, inclusivamente de Matemática: segundo os dados do Censos 1991, frequentou a escola durante 6 anos (1 ano em 1950). "Há um problema quantitativo básico."

Também classificou de péssimas as avaliações que visam a ordenação, apontando quem são os melhores ou piores: "faz com que quem fica em primeiro lugar seja bom e quem fica em último seja mau, mesmo que a diferença entre eles não seja muita". Defendeu as avaliações qualitativas, que apontem os pontos fortes e os pontos fracos.

José Manuel Fernandes começou por dizer que a maior parte dos jornalistas procurou fugir o mais depressa possível à Matemática. Da sua geração ainda há quem tenha vindo de cursos de áreas científicas (Engenharia, Medicina...) mas a maior parte vem de Direito, História e cursos de Letras. Na geração mais recente, é muito difícil aceder à profissão de jornalista se não se vier de um curso de Comunicação Social, onde a Matemática surge como um peso: as "cadeirazitas" de Estatística são dadas à pressa, com grande esforço e resistência dos alunos, que têm a ideia de que é algo que lhes é desnecessário para a profissão.

Afirmou que os jornalistas têm dificuldade em lidar e compreender o significado dos números mais simples: proporções, relação entre duas moedas, percentagens. "A melhor maneira de enganar um jornalista é atirar-lhe com números"..O jornalista acaba por não cumprir o seu papel crítico e não é capaz de questionar. No entanto, entendeu ser crucial para o jornalista ter a capacidade de ler e interpretar números, olhar para um problema e saber resolvê-lo.

Referiu a dificuldade sistemática de colocar estagiários na secção de Economia e contou um exemplo passado no jornal: no fim do ano em que se fez um contrato com uma empresa de estatística desportiva para os jogos de futebol, havia um jogador do Benfica que aparecia em primeiro lugar nas estatísticas de recuperação de bolas; foi dessa maneira que se deu destaque a um jogador que dava pouco nas vistas, mas que agora é o mais internacional no futebol português, Paulo Sousa.

Sobre as provas de aferição do 4° e 6° anos, leu o relatório do Ministério e viu os enunciados. Algumas das questões pareceram-lhe tão intuitivas que ficou surpreendido com os resultado, achando que, em parte, é porque desde o princípio há "alguns métodos que não são seguidos, alguma exigência que não é tida e alguma incapacidade de motivar as pessoas para o concreto". Colocou a questão da tabuada, a "ginástica inicial dos músculos" e as consequências da máquina de calcular: o aluno não compreende a necessidade de se esforçar e, à medida que a Matemática se complica, foge dela o mais possível.

Segundo JMF, a comunicação social em geral é feita por quem tem aversão aos números, tornando pior o serviço prestado aos cidadãos. Isso só se modificará quando se conseguir alterar a má relação que existe entre a generalidade da população portuguesa e a Matemática, "um dos dramas nacionais e um dos factores do nosso atraso". Defendeu no jornalismo pessoas com outra formação (por exemplo, um bacharelato numa área científica seguido de uma preparação específica), porque "a técnica jornalística aprende-se depressa".

Francisco Sousa Soares enfatizou o empenho da Ordem dos Engenheiros na Educação (incluindo a ligação às escolas secundárias, para ajudar a criar vocações tecnológicas) e descreveu o sistema de acreditação, pela Ordem, dos cursos de ensino da Engenharia. Para este ensino, apontou como factores-chave de sucesso a sólida preparação em Matemática e Física, a filosofia de banda larga, a existência de laboratórios próprios para a realização de trabalhos experimentais pelos alunos, o desenvolvimento de um projecto com trabalho de concepção, a investigação científica pelos docentes e a ligação ao tecido empresarial.

Abordou a formação de base que é essencial para a formação e desempenho profissional de um engenheiro. Nesse aspecto a Matemática é decisiva, porque "estrutura o raciocínio (obriga a pensar de forma lógica), permite a construção de modelos quantitativos, permite a simulação da realidade e apoia a criatividade".

Referiu a necessidade de baixar as taxas "dramáticas" de retenção e de abandono (exemplo: no IST, 33% dos alunos inscritos não conclui o curso) e de aumentar os candidatos com vocação. "A boa formação de base em Matemática pode ajudar".

Defendeu a manutenção de dois perfis: o do engenheiro técnico, resultante do bacharelato (decisivo para o sector

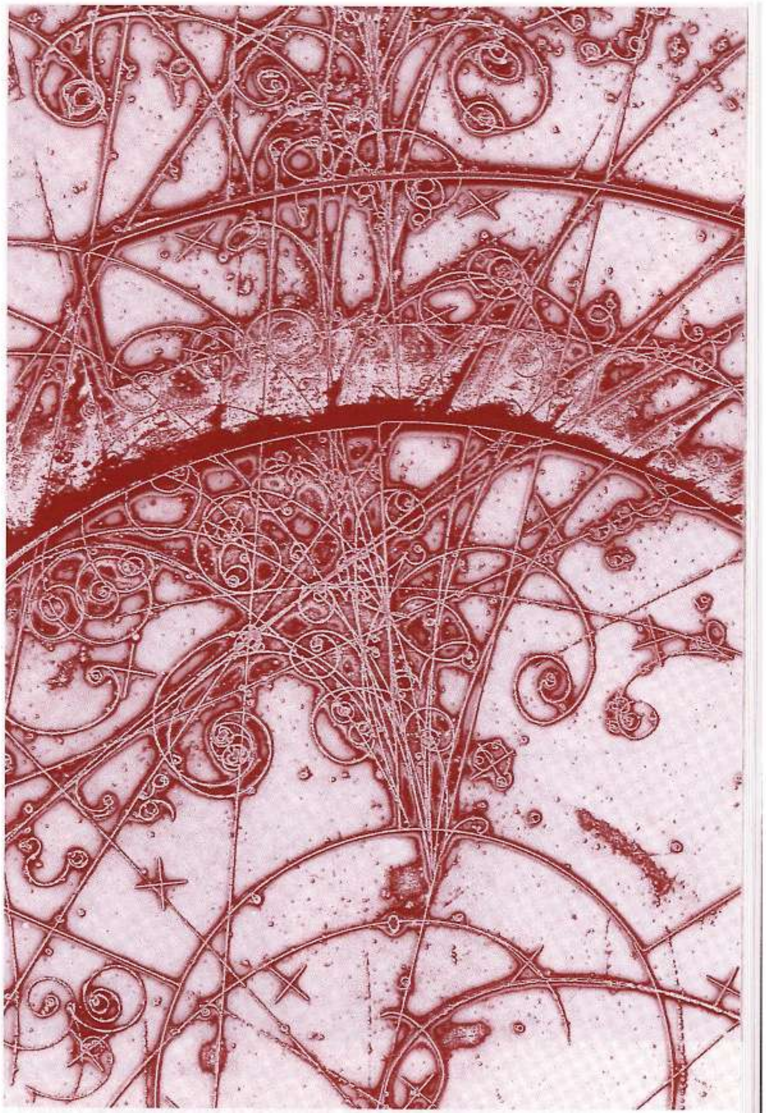


Figura 1. Trajectória de partículas subatómicas após uma colisão de grande nível energético observada numa câmara de bolha.

das indústrias e da construção) e o do engenheiro licenciado (com sólida formação de base em Matemática e Física, que permita uma aplicação das Ciências da Engenharia, com a elaboração de projectos com base em modelos e uma interface com outras especialidades e profissões).

Terminou com a apresentação dos objectivos a que a Engenharia deve habilitar e qual o contributo desta para a cidadania: o desenvolvimento sustentável do território e ambiente, a boa aplicação das tecnologias - novas energias, novos alimentos, novos materiais e nova informação - e a salvaguarda da segurança de pessoas e bens.

Manuel Ricou formou-se em Engenharia e doutorou-se em Matemática. Na Alcatel é responsável por um grupo com mais de 100 licenciados que trabalha sobretudo em actividades de desenvolvimento e manutenção de software de telecomunicações. Certos aspectos deste trabalho têm uma componente matemática sofisticada, sem a qual não seria possível estudar do ponto de vista teórico problemas de dimensionamento de redes, gestão de tráfego, fiabilidade dos equipamentos, segurança das comunicações, inviolabilidade da informação, robustez face aos erros.

Entendeu que os licenciados em Matemática são os que se revelam mais capazes para a concepção, desenvolvimento e verificação de software e justificou: conceber um sistema

Figura 2. Cristais de sal.

ou um programa de computador, entender quais são os pontos que o tornam forte ou fraco, entender como é que o programa pode ser verificado a posteriori, trata-se de um exercício intelectual que segue de muito perto um raciocínio matemático standard que se aplica, por exemplo, quando estamos a construir ou a tentar entender uma demonstração (temos de ter ideia onde queremos chegar, o que nos ajuda a explorar e a ter mecanismos internos de validação do resultado, quando lá chegamos). Assim, no desenvolvimento de software, a formação básica na Matemática fornece esquemas mentais particularmente úteis, e cada vez mais necessários para a resolução de problemas sofisticados, que o crescimento espantoso da velocidade de processamento coloca.

Confessou-se um apaixonado incondicional da Matemática - peça fundamental da cultura humana - irritando-se com a discussão sobre a sua utilidade prática. A Matemática ensina a pensar e a falar com rigor e clareza, ensina o que é um raciocínio, ensina sobretudo uma velha diferença, entre a força da razão e a razão da força; é uma ferramenta indispensável para construir teorias científicas (é com Matemática que se constroem naves espaciais, redes de telecomunicações, computadores, etc.).

Mostrou a convicção de que uma sociedade que não domine e cultive a Matemática está condenada a uma posição de vassalagem, sendo mera consumidora da riqueza que outros produzem, e que lançar no mercado de trabalho uma pessoa que não tenha conhecimentos matemáticos básicos é a mesma coisa que lançá-la na miséria.

Considerou pernicioso reduzir o ensino da Matemática à mera aprendizagem de métodos e fórmulas: parte da ideia é precisamente perceber o mundo maravilhoso do edifício lógico-dedutivo que se constrói de acordo com certas regras. Afirmou sentir-se bastante inquieto com a situação actual do ensino da Matemática: "se calhar, somos colectivamente adversos a este esforço de rigor e exactidão que está por detrás da Matemática".

Relativamente aos resultados de avaliações, choca-o que não surjam manifestações colectivas de preocupação (nomeadamente por parte das próprias universidades) e defendeu o conhecimento público dos estudos sobre os resultados dos estudantes: donde vêm as boas notas? quais são as escolas que formam melhor os alunos? são realmente escolas privadas ou públicas? qual é o papel dos professores?

"A única coisa de que tenho a certeza é que se não formos capazes de nos organizar, de melhorar significativamente o ensino das Ciências, em particular da Matemática, de melhorar a nossa capacidade científica, então a situação geral do país só pode piorar. O valor acrescentado da actividade industrial, no mundo de hoje, baseia-se, antes de mais, em conhecimentos técnicos. Se nós não formos capazes de os adquirir ou de os dominar estamos condenados à degradação das nossas condições."

Paulo Trincão começou por dizer que detestava Matemática, facto que relacionou com a formação ministrada na sua licenciatura em Geologia (o seu olhar sobre a natureza não é o dos números...).

Na sua opinião, uma das razões do insucesso na Matemática passa pela excessiva penalização para o nível de erro, por exemplo na resolução de uma equação ("com pequenos erros as coisas já não cortam, o resultado não dá certo, o nervosismo ataca e ...mais um zero!"). As penalizações na correcção dos exercícios de matemática não têm paralelo, na sua perspectiva, com outros ramos da ciência. Afirmou não pretender o abrandamento do rigor, mas sobretudo que se encontre uma maneira de não desanimar o estudante que comete infracções logo de início.

Chamou a atenção para a importância da medição, tarefa muito prática e vital, e para as particularidades do cálculo em Geologia, dada a ordem de grandeza dos valores (a idade de uma rocha é de 300 milhões de anos mais ou menos 10 milhões): está implícito o conceito de erro, necessário para aumentar o rigor da descrição.

Salientou a importância de mostrar aos estudantes a relação dos conhecimentos adquiridos na formação (universitária) com a actividade prática futura, exemplificando com a Geologia (calcular jazidas minerais, distâncias, orçamentos...).

Preconizou que a Matemática aparecesse como centro de actividade museológica, uma forma de desmistificar a dificuldade de aprender esta ciência e de promover a sua estética. Nas experiências interactivas pode-se experimentar sem punição pelo erro, contribuindo para a "reconciliação" do estudante com a Matemática.

Pedro Freitas (licenciado em Engenharia e doutorado em Matemática) referiu que é preciso ter a noção que a grande maioria dos alunos dos diversos cursos (engenharia, gestão, etc) não vai utilizar directamente a Matemática na vida profissional. Esta serve antes um propósito estruturante do modo de pensar de um indivíduo, não só na sua profissão mas em geral. Em particular, a Matemática ajuda a desenvolver a capacidade de olhar para diferentes soluções de um modo sistemático, identificando os pontos fortes e os pontos fracos, padrões, etc. Considerou importante a criatividade na resolução de problemas, entendendo que as ideias criativas em Matemática pressupõem a sujeição a um conjunto de regras, não se podendo raciocionar no vazio.

Referiu que, para que seja possível um ensino da Matemática de qualidade em todos os níveis de ensino, é necessário que a imagem da Matemática na sociedade seja positiva. Obviamente que, para além de todo o trabalho que deve ser feito pelos professores com esta finalidade, é talvez ainda mais importante que os diferentes sectores da sociedade - comunicação social, Ordens profissionais, classes empregadoras - transmitam ao público que consideram a Matemática como um aspecto fundamental da formação de cada um.

Mariano Gago recordou que o mito dos níveis decrescentes de educação (cada geração é menos educada do que a anterior) está documentado desde sempre na História da Educação e afirmou que não pretende uma escola para 5% da população, como aconteceu no passado. "Portugal não pode dar-se ao luxo de deixar de fora os 60% de fracos e tornar-se um país de indicadores de 4 milhões, sem assumir o falhanço colectivo". Referiu a importância de estudar como é que aqueles que estavam condenados ao insucesso passaram a ter sucesso e a necessidade de multiplicar oportunidades. "A selecção traduz-se na eliminação. Não pode haver selecção antecipada!". Lançou o problema da formação dos 3 milhões de portugueses da população activa e que vão continuar mais 20 anos na vida activa, com os níveis mais baixos de formação.

Considerou que a educação é, em média, melhor agora do que era e tomou como exemplo o seu Departamento na Universidade: os currículos científicos são melhores, a produção científica é maior. Face ao "pessimismo da razão" que toma para referenciais os outros países, sem os conseguir nomear, perguntou se havia "optimismo na acção" e "convicção para agir, independentemente de ver resultados imediatos".

MG lembrou que a Matemática, sendo uma linguagem formal, tem uma longa história como instrumento de selecção social, nomeadamente quando os sistemas de educação se abrem. É um problema de que somos herdeiros e que tem consequências, até no modo como são formados os professores. Referiu que a socialização para a Matemática cabe à escola, tal como lhe cabem outro tipo de socializações, acreditando que o interesse não está nas coisas fáceis, mas nos desafios difíceis e interessantes. Lembrou a existência de uma Matemática popular (jogos, adivinhas) e da Informática.

Quanto à socialização para as Ciências da Natureza em geral, que conhece melhor, MG lembrou que a história dos países nórdicos e anglo-saxónicos diz que ela tinha de passar explicitamente para os grupos sociais novos essencialmente pela socialização do trabalho prático, das equipas de projecto e da experimentação: "a experimentação é o elemento crítico de qualquer país que tenha tido sucesso na integração e na apropriação de todas as camadas sociais para as ciências, em geral".

Assim, os países que têm medo de retornar ao estado, antigo de pobreza, à qual está associado o trabalho manual (caso de Portugal e não só) têm mais dificuldade em socializar através da experimentação; quando muito, consideram-na uma técnica.

MG lançou 2 questões aos que trabalham na Matemática e no ensino:

- Qual deve ser o eixo condutor e a estratégia eficaz de maior socialização que permita a participação (melhores professores, melhores alunos, etc.) para a ciência?

- Nas ciências em geral e sobretudo nas ciências físicas, químicas e biológicas, a aliança entre os cientistas e os bons professores é um elemento central e catalítico para modificar a escola. A entrada de um cientista numa escola, com a possibilidade de haver uma relação directa, faz uma mudança radical na imagem da ciência e na motivação. Qual é o estado prático da possibilidade de construir organizadamente uma aliança entre os matemáticos e os professores de Matemática do ensino básico e secundário?

Quanto a avaliações e exames MG considerou ser um problema crítico, não das ciências, mas da sociedade portuguesa, aliás, das sociedades que tiveram durante muitos anos regras obscuras de definição do estatuto social e de acesso às profissões das classes superiores: no momento em que está em causa a possibilidade de haver uma maior mobilidade social baseada na educação, há movimento de grande resistência de grupos sociais a essa transparência, porque ela é um elemento de democratização da tese da igualdade de oportunidades. Se o sistema científico interiorizar e praticar uma cultura de avaliação é o sistema mais organizado na sociedade portuguesa que pode garantir a possibilidade de uma cultura de avaliação independente.

Considerou muito importante o debate sobre a interpretação dos dados dos testes internacionais em Matemática e Ciências. Quanto ao relatório de avaliação do estudo PISA 2000, que leu "um tanto à pressa", pareceu-lhe que os alunos de 15 anos que estavam no nível de escolaridade certo (9º ou 10º anos) produziram resultados praticamente iguais em todos os países, encontrando-se a grande diferença nos alunos que ainda estavam no 8º, 7º e 6º anos, cuja proporção é maior em Portugal do que em outros países. "A ser verdade isto, o problema não é da Matemática nem das Ciências, é muito mais global", sendo importante ter a certeza da resposta a esta questão.

Preconizou que a formação para o ensino (exemplo: Matemática, Química e Biologia) fossem pós-graduações e que o ensino de Matemática na Universidade estivesse imbuído do mundo físico ("nem todos os licenciados vão ser matemáticos"). Entendeu que estamos convencidos que o insucesso é um problema individual e não um problema colectivo, para o qual precisamos de nos mobilizar. Terminou parodiando um senhor de barbas brancas: "Matemáticos e professores de Matemática: uni-vos!"

Agradecimento: à Branca Silveira e Maria José Costa, pelos seus apontamentos imprescindíveis.

Luís Reis
Centro de Competência Nónio ESB–UCP

Recursos bibliográficos — Sugestões Comentadas

- Abreu, Guida d' (1995). A Matemática na vida versus na Escola: Uma questão de cognição ou de Identidades Sociais. Em *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 11(2), pp. 85-93.

  Relato de uma investigação comparativa das aprendizagens matemáticas na escola e no quotidiano (inclui situações profissionais e ajuda a compreender o que ocorre nas Profissões).
- Bolt, Brian (1994). *Matemáquinas*. Lisboa: Gradiva.

  Extenso e interessante estudo das máquinas elementares, sob o ponto de vista da Matemática.
- Davis, Philip e Hersh, Reuben (1997) *O sonho de Descartes. O Mundo segundo a Matemática*. Lisboa: Difusão Cultural.

  A Matemática encarada do ponto de vista dos seus utilizadores.
- Esteves, Pedro (2001). Os omnipresentes códigos de barras. Em *Educação e Matemática*, 65, pp. 11-13.

  A leitura óptica das bandas de barras verticais os produtos que alguém pretende adquirir permite, por via informática, realizar rapidamente diversas operações: associar a cada produto o seu preço actualizado; imprimir o talão de venda; dar baixa, no armazém, dos produtos vendidos.
- Farias, Carlos e Saraiva, Manuel (1999). *Os números e as mensagens secretas*. Lisboa: A.P.M.

  Depois de uma preparação matemática genérica, os autores apresentam o criptosistema RSA, desenvolvido por Rivest, Shamir e Adleman, em 1978, tão utilizado hoje nas questões privadas e profissionais.
- Paulos, John Allen (1991). *Inumerismo. O analfabetismo matemático e as suas consequências*. Mem Martins: Publicações Europa-América.

  Apesar de não estar estruturado explicitamente em relação às Profissões nem se restringir a estas, a análise arguta e bem humorada torna este livro agradável e interessante.

Materiais para a aula de Matemática

Eleições para a presidência da República — 1986

A actividade apresentada faz parte do conjunto de materiais utilizados nos Círculos de Estudo que se estão a realizar nos Centros de Formação de Benfica e Oeiras, no âmbito do Acompanhamento do Programa Ajustado de Matemática do Ensino Secundário, para apoiar a implementação do programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Foi construída a partir de dados recolhidos no site http://www.stape.pt e utilizada na sessão dedicada ao tema do programa – Teoria das Eleições - como uma actividade possível de ser trabalhada em sala de aula. A acompanhá-la foi fornecida a legislação referente à eleição do Presidente da República que pode ser fotocopiada directamente do Dicionário de legislação eleitoral da Comissão Nacional de Eleições (CNE) ou do site desta comissão http://www.cne.pt. Esta actividade está formulada para alunos, mas não foi utilizada ainda em sala de aula pois o programa só entrará em vigor para o próximo ano lectivo, pensamos nós...

Ana Vieira Lopes, Célia Eusébio, José J. Borges, Luísa Carvalho, MªOtília Moreirinha

Escola..

Ano/Turma......................... Data.................... Aluno(a)..........................

Eleições para a Presidência da República – 1986

Presidência da República — 26/01/1986 **Informação Detalhada Nacional**				
Resultados Nacionais				
	Votantes	Abstenções	Brancos	Nulos
Inscritos	Total	Total	Total	Total
7590367	5739798	1850569	18037	47018
Votação por Partido — Resultados Nacionais				
	Freitas Amaral	Mário Soares	Salgado Zenha	L. Pintassilgo
Total	2628178	1443027	1185338	418200

Presidência da República — 16/02/1986 **Informação Detalhada Nacional**				
Resultados Nacionais				
	Votantes	Abstenções	Brancos	Nulos
Inscritos	Total	Total	Total	Total
7586961	5935294	1651667	20487	34729
Votação por Partido — Resultados Nacionais				
	Mário Soares		Freitas do Amaral	
Total	3015350		2864728	

1.1. Com base na legislação, justifica porque foi necessária a "segunda volta".

1.2. Nem em todos os actos eleitorais está prevista uma "segunda volta"; que argumentos poderão justificar a sua existência?

1.3. Se variar a legislação o cenário que se coloca é outro. Imagina um outro cenário.

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Cristina Roque

Sendo Professora há seis anos e exercendo quase exclusivamente a profissão no terceiro ciclo, a Revisão Curricular do secundário era apenas um assunto que me despertava alguma curiosidade mas não era um ponto muito prioritário para a minha agenda profissional.

Perante as transformações que se anunciavam, a minha primeira preocupação foi esclarecer o meu papel enquanto futura docente de Matemática perante a Gestão Flexível do Currículo — conceito de competência matemática e competência essencial — bem como reflectir sobre os temas de forma a desenvolver e proporcionar experiências de aprendizagem de diversos tipos.

Quis, no entanto, ter conhecimento do que seria "necessário" aos futuros alunos do terceiro ciclo em termos globais, relativamente às aprendizagens matemáticas, perante as suas possíveis escolhas no ensino secundário. Para isso, fiz uma primeira leitura dos Novos Programas de Matemática do Ensino Secundário, tendo-me despertado especial interesse o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais[1] (MACS) dada a novidade dos temas/conteúdos:

- Modelos de apoio à decisão:
  Teoria Matemática das Eleições
  Teoria da Partilha Equilibrada
- Modelos Matemáticos:
  Modelos Financeiros
  Modelos de Grafos
  Modelos populacionais

Tendo em conta em especial o primeiro tema (Modelos de apoio à decisão) bem como as vantagens indicadas no programa relativas ao facto de se trabalhar o mesmo, comecei por me questionar sobre o que "seria" teoria matemática das eleições. E teoria da partilha equilibrada? Que actividades seriam interessantes realizar? Que fontes de materiais existiam sobre o tema? Será que esta primeira interpretação do programa ia de encontro ao que realmente estava subjacente à sua construção? Embora o programa indicasse algumas referências bibliográficas sobre o tema optei por "dar algum tempo" a estas primeiras preocupações e dedicar-me a um tema que me era bastante mais familiar: "Modelos de grafos" (os conteúdos da cadeira de Tópicos de Matemática Finita afinal iam ver a luz do dia). Com o material obtido no site indicado no programa http://membros.aveiro-digital.net/adam/grafos/ e o caderno amarelecido da cadeira de TMF, um grupo de professores da Escola Sec. de Ferreira Dias participantes na Oficina da Matemática[2] que se iniciou em Outubro (no qual me incluo) começou por analisar e interpretar o que era referido no programa, esclarecendo dúvidas que iam surgindo sobre o tema, o modo de o trabalhar, como o avaliar, etc.

O problema da ponte de Köningsberg pareceu-nos um bom ponto de partida para introduzir o conceito de grafo. Elaborámos uma ficha (fig.1) que pretende colocar os alunos perante o desafio da resolução do problema. Sugere-se que, à semelhança de

Tendo em conta em especial o primeiro tema (Modelos de apoio à decisão) bem como as vantagens indicadas no programa relativas ao facto de se trabalhar o mesmo, comecei por me questionar sobre o que "seria" teoria matemática das eleições. E teoria da partilha equilibrada? Que actividades seriam interessantes realizar?

Conceito de grafo

Em 1736, o matemática Euler foi convidado pela Academia de S. Petersburgo a resolver o seguinte problema:

Poderiam os cidadãos fazer um passeio pela cidade, a começar e a acabar num mesmo ponto, passando por todas as partes da cidade de Köningsberg (cidade da Prússia) e atravessando todas as pontes uma só vez?

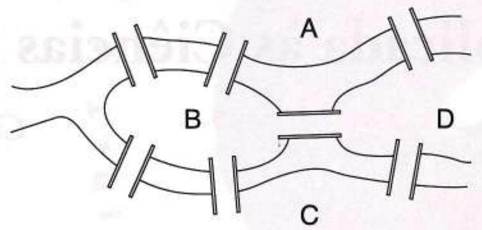


Figura 1. Ficha de trabalho

Euler, os alunos construam um esquema em que as ilhas e outras partes da cidade sejam representadas por pontos (A, B, C e D) e as pontes sejam representadas por linhas que unem esses pontos (fig. 2).

Propõe-se que, com apoio nas figuras construídas, estudem a situção, tentem encontrar um percurso satisfazendo as condições do problema e que tirem conclusões. A ficha coloca ainda os alunos perante a discussão de uma nova situação:

Desde então, já foram construídas mais duas pontes em Köningsberg; uma dessas pontes une as duas margens do rio (partes A e C). Se a decisão de construção da outra ponte te coubesse, onde a mandarias construír? O novo número de pontes construídas permite encontrar um percurso nas condições iniciais?

Esta actividade, apoiada num problema histórico, permite a introdução do conceito de grafo e pode servir como ponto de partida para o desenvolvimento de outras que requerem a modelação por grafos e nas quais também já estamos a trabalhar.

Como o tempo não pára, o final do primeiro período bate à porta pelo que inicio a minha "terapia de leitura", e qual não é a minha admiração quando ao ler *O mistério do Bilhete de identidade e outras histórias...* de Jorge Buescu, mais precisamente a história: "Viva o festival da Canção", pp. 85-88, começo a esclarecer o que devo entender por Teoria das Eleições, bem como o que os autores do programa pretendem ao definir os seguintes objectivos:

- Estudar algumas situações paradoxais;
- Analisar algumas condições para ter um sistema adequado;
- Perceber que há limitações na melhoria dos sistemas.

Ressurge assim de novo a curiosidade e a vontade de me dedicar à descoberta do módulo inicial (Modelos de apoio à decisão) do programa de MACS, pelo que li *O Homem que sabia contar*, de Malba Taham (pseudónimo de Júlio César de Mello e Sousa), familiarizando-me com o conceito de partilha equilibrada (caso discreto) e percebendo então como seria possível "alcançar" os objectivos indicados no programa para este tema/ conteúdo.

O facto de estar a trabalhar com base no programa e ainda não existir um conjunto de interpretações deste, ou seja, manuais escolares, tem sido uma das razões por que tenho apreciado esta experiência;

O facto de também frequentar a acção que decorre na Escola Sec. José Gomes Ferreira (inserida no plano de actividades de formação no âmbito da Revisão Curricular) está em grande parte a contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos científicos, para uma melhor capacidade de exploração pedagógica dos mesmos e tem permitido também que se analisem e discutam possíveis instrumentos de avaliação para conteúdos, que são inéditos no nosso ensino secundário.

Notas

1 Curso Gerral de Ciências Sociais e Humanas (10° ano e 11° ano) – 3 aulas de 90 minutos por semana
Curso Tecnológico de Ornamento do Território (10°, 11°e 12° ano) – 2 aulas de 90 minutos por semana

2 Modalidade de formação pela qual o grupo da Escola optou

Cristina Roque
Esc. Sec. de Ferreira Dias — Cacém

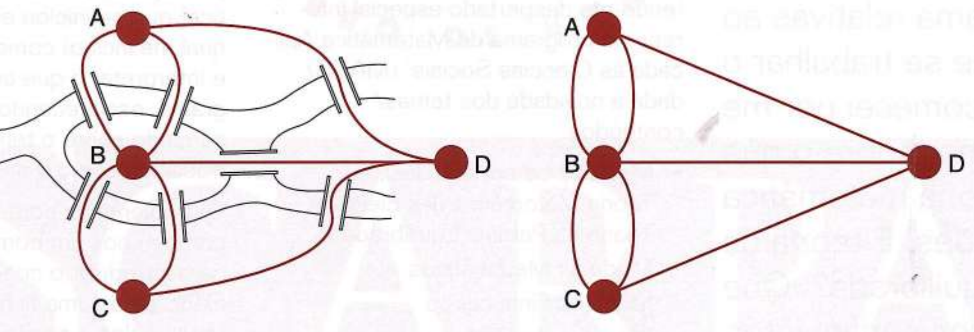


Figura 2. Modelo de Euler

Actualidades

E se o método fosse outro, qual seria o vencedor?

Recentemente passámos por um período de eleições: Autárquicas, em Dezembro de 2001 e Legislativas em Março de 2002. Vimos (ou não) como por poucos votos se podia ganhar uma Câmara. Ouvimos, com mais ou menos atenção, como foram disputados os 230 lugares da Assembleia da República e a importância que cada partido político dava à eleição de mais um deputado em determinado distrito. Não há muito tempo acompanhámos (ao longo de vários dias…) a dificuldade que Bush teve em ser eleito Presidente dos EUA.

Com frequência nas nossas escolas, elegemos os colegas do Conselho Executivo, o coordenador de Departamento, o coordenador dos Directores de Turma. Incentivamos os nossos alunos a escolher os seus representantes (de Turma ou aqueles que integram a Associação de Estudantes) de uma forma consciente e responsável. Enfim, nada disto é estranho, afinal de contas vivemos num país com um regime democrático!

Sabemos (vagamente?) que o método utilizado em Portugal em eleições nacionais é o método de Hondt. Em que consiste esse método? Porquê esse e não outro? Quem é que ele favorece? E já agora, por que é que a nossa Assembleia tem 230 deputados? Com que critério se fez a distribuição do número de deputados por distrito?

Será mesmo justo que aquele aluno que teve apenas 3 ou 4 votos passe a ser o representante da sua turma só porque a maioria dispersou os seus votos pelos outros "candidatos"?

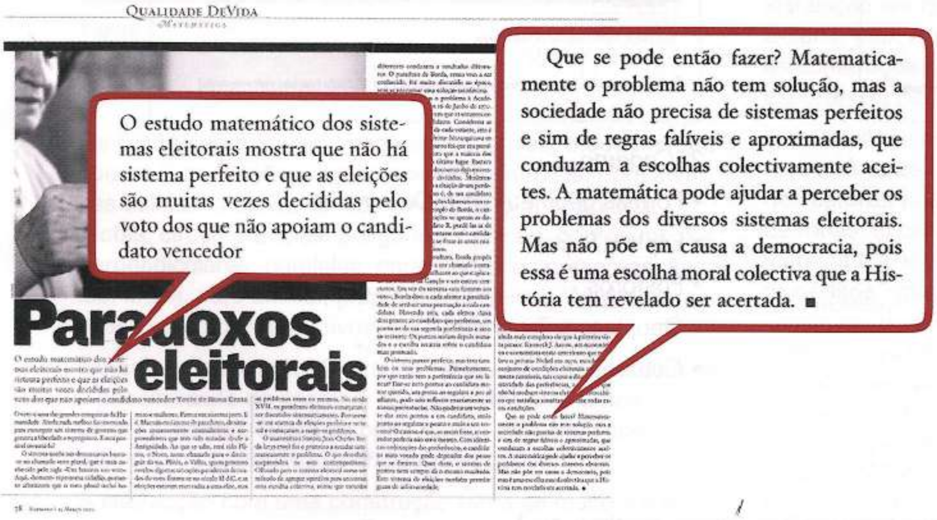
São muitas as questões que se levantam sobre o apuramento dos vencedores em eleições e é exactamente sobre esse assunto que Nuno Crato nos fala no seu artigo da Revista do Expresso de 15/03/2002. Nele são abordados diferentes critérios possíveis em eleições em que vários candidatos são votados de uma forma hierarquizada, e em como esses diversos métodos podem conduzir a resultados paradoxais. A título de exemplo reproduzimos aqui o paradoxo de Borda, a que Nuno Crato faz referência. Cada perfil de preferências corresponde a uma coluna, que tem o número de votantes indicado. Assim, por exemplo, apenas uma pessoa coloca o candidato A em primeiro lugar, seguido do B e, depois, do C. Neste exemplo de Borda, o candidato mais votado segundo o sistema plural (um homem um voto) é A, com 8 votos a favor, contra 7 em B e 6 em C. No entanto, esse é o candidato mais detestado pela maioria do eleitorado, uma vez que 13 votantes em 21 o colocam em último lugar.

Preferências	1 votante	7 votantes	7 votantes	6 votantes
1ª escolha	A	A	B	C
2ª escolha	B	C	C	B
3ª escolha	C	B	A	A

Como se sabe a Teoria Matemática das Eleições nunca integrou, até agora, os nossos programas de ensino. Na Revisão Curricular que estava prevista para entrar em vigor no ano de 2002/2003 existe a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais para o Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas e para o Curso Tecnológico de Ordenamento do Território. Essa nova disciplina tem como tema inicial Métodos de Apoio à Decisão que inclui Teoria Matemática das Eleições e Teoria da Partilha Equilibrada e no seu programa sugere-se que sejam estudadas situações como aquelas que se discutem neste artigo.

Pensamos que o conhecimento das questões que se colocam com os sistemas eleitorais deverão fazer parte da cultura democrática de qualquer cidadão. Nesse sentido, parece-nos que esta disciplina poderá constituir um importante contributo para essa formação, já que o seu currículo tem, obviamente, um objectivo muito mais geral que é o "propósito de Educação para a cidadania e o papel importante assumido pela Escola, para esse fim."

Ministério da Educação, Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, 2001, p.1.



In *Revista do Expresso*, 15 de Março de 2002.

Lina Brunheira
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Paula Espinha
Escola Secundária de Linda-a-Velha

APM — Publicações novas

Materiais para o 1º Ciclo [versão reformulada]

PVP: € 25,00

Sócio: € 12,50

Dois cadernos com actividades para a sala de aula no 1º ciclo, utilizando materiais manipuláveis (tangram, cubos, geoplano, lápis, fósforos, entre outros), bem como a calculadora. Estes cadernos constituem uma reformulação das pastas de actividades para o 1º ciclo I e II.

1º Caderno

- Padrões
- Calculadora
- Estimação de Medidas
- Problemas

2º Caderno

- Formas geométricas e Cuisenaire
- Lápis e Papel
- Fósforos
- Geoplano e Tangram
- Cubos

Nota: a pasta contém ainda folhas de apoio às actividades (grelhas, tabelas, geoplano, etc.)

Cinderella

Jorge Nuno Silva

Cinderella é um programa de Geometria Dinâmica da autoria de J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp. Como programa destinado a fazer geometria no computador, *Cinderella* constitui um utensílio para investigar construções geométricas de grande qualidade. O utilizador só tem de manejar o rato para interagir com o programa, que apresenta o seguinte aspecto nos primeiros momentos de utilização.

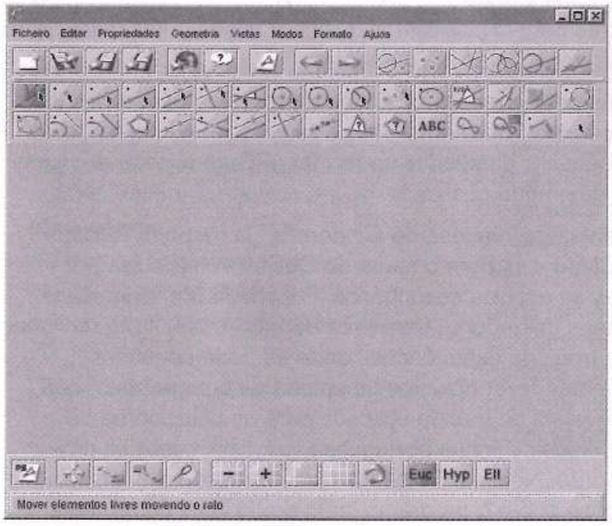


Figura 1

Os botões apresentam imagens sugestivas, o que permite que as suas funções sejam facilmente intuídas. Para além das utilidades habituais, há botões para criar pontos, rectas, circunferências, polígonos, cónicas, pontos médios, perpendiculares, paralelas, para medir comprimentos, ângulos, áreas, para animar, para exportar para a WWW, para criar exercícios interactivos, para usar o compasso, etc.

No Editor de Aspecto (no menu Propriedades) encontra-se a possibilidade de escolher as cores dos elementos (pontos, rectas, fundo da construção, etc), bem como os respectivos tamanhos, entre outras opções.

A interacção com uma construção torna-se muito agradável.

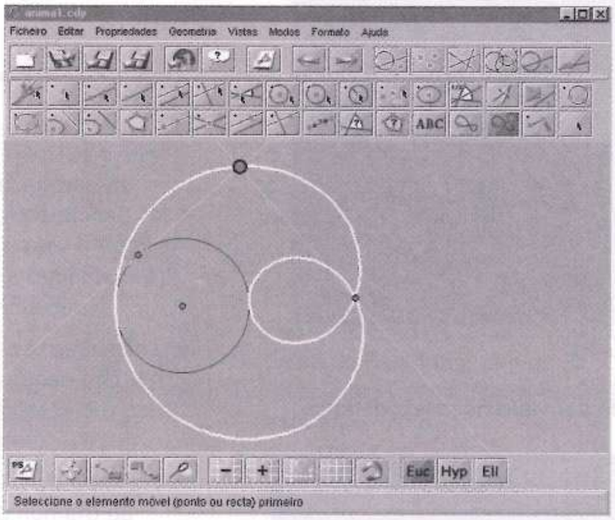


Figura 2

A Ajuda contém todo o manual, em formato HTML, o que permite uma navegação cómoda e adequada às necessidades de cada utilizador.

Este programa foi totalmente escrito na linguagem Java, o que justifica duas das suas mais agradáveis características. O mesmo CD em que é distribuído permite a sua instalação em qualquer plataforma (Windows, Mac, Linux, Solaris, etc). A sua compatibilidade com a WWW é total, as construções, animações e exercícios interactivos são exportáveis para a Internet com um simples clique do rato.

A matemática em que o *Cinderella* se baseia foi, em parte, especialmente desenvolvida na sua criação. O esforço dos autores neste sentido foi compensado com o facto de todas as construções terem garantida total correcção matemática, e as animações estarem livres dos "problemas dos saltos" que afligiam outros programas similares. O *Cinderella* dispõe ainda de capacidade de "reconhecer teoremas", que consiste em assinalar fenómenos geométricos não casuais, sempre que estes ocorram. Uma outra aplicação desta capacidade consiste no reconhecimento da correcção das resoluções dos exercícios exportados para a WWW. Se um aluno construir a solução correcta de um problema, o *Cinderella* reconhece-o imediatamente, independentemente do método de resolução.

O *Cinderella* dispõe de capacidade de abordar a geometria euclidiana habitual, mas também as geometrias hiperbólica e esférica.

Um triângulo com as suas alturas em geometria euclidiana,

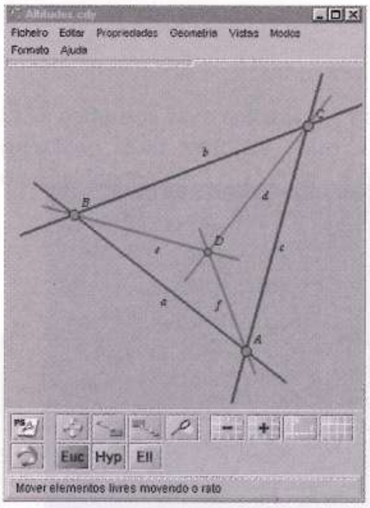


Figura 3

pode ser visto na janela esférica,

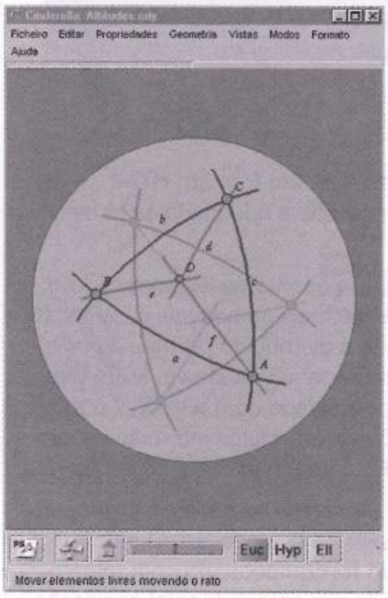


Figura 4

ou na hiperbólica.

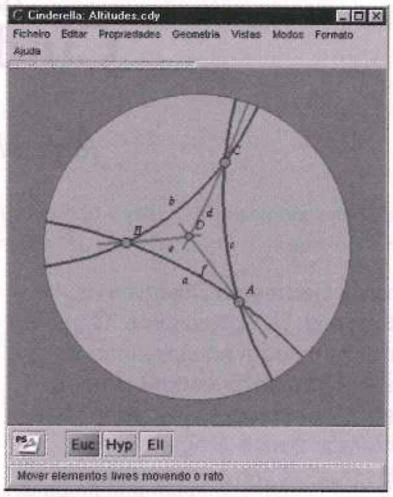


Figura 5

As três podem coexistir, e qualquer acção numa delas sofre actualização imediata nas outras.

Todas as imagens criadas neste programa podem ser inseridas em documentos, exportadas para a Internet, e também ser guardadas no formato PS, destinado a impressão de grande qualidade.

A versão portuguesa do *Cinderella*, da responsabilidade do CMAF-UL, com o apoio do DES, foi distribuída por todas as escolas secundárias. Foi criado um fórum para os seus utilizadores (http://cinderella.lmc.fc.ul.pt), um local para troca de experiências, onde se pode consultar, comentar, fazer download e upload de construções, que se revelará de grande utilidade para os utilizadores do *Cinderella* de língua portuguesa, principalmente os professores. Nesse URL podem também encontrar-se informações sobre o programa, bem como links para outras páginas dedicadas ao *Cinderella*.

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@netcabo.pt

Nota

Conforme indicado no número anterior da revista (em que foi incluído um artigo sobre o *Geometer's Sketchpad*), publicamos agora um artigo sobre o *Cinderella*, da autoria de Jorge Nuno Silva. Contamos como previsto incluir no próximo número um texto de Branca Silveira sobre o *Cabri*, completando assim uma ronda do software disponível para geometria dinâmica.

José Paulo Viana

Caixas & Caixinhas

Temos 11 caixas grandes. Algumas estão vazias, outras têm cada uma 8 caixas médias lá dentro.

Das caixas médias, algumas estão vazias mas outras têm 7 caixinhas cada uma.

Há 102 caixas vazias.

Quantas caixas temos no total?

Respostas até 15 de Junho

O número da minha casa

O problema proposto no nº 63 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Se o número da minha casa for múltiplo de 3, então trata-se de um número compreendido entre 50 e 59, inclusive.

Se o número da minha casa não for múltiplo de 4, então trata-se de um número compreendido entre 60 e 69, inclusive.

Se o número da minha casa não for múltiplo de 6, então trata-se de um número compreendido entre 70 e 79, inclusive.

Qual é o número da minha casa?

Chegaram-nos 22 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Ana Amaral, Célia Lobo (Guimarães), Darcília Machado & Judite Lima (Oliveira de Frades), Ana Eliete Reis (Loures), Aparecida Santos (via Internet), António Costa (Portalegre), Augusto Taveira (Faro), Conceição Martinho (Castanheira), Cristina Ortins (Ponta Delgada), Cristina Rodrigues (Porto), Domingos Rijo (Castelo Branco), Graça Lopes & Armando Fernandes, Luísa Andrade (Angra do Heroísmo), Mª do Rosário Luís (Torres Novas), Mário Roque (Guimarães), Miguel Jaime Valverde (Santa Cruz - Madeira), Nuno Cardoso (Coimbra), Paulo Correia (Alcácer do Sal), Sílvia Carvalho (Felgueiras), Vidal Minga (Carcavelos), Vitaline Ferreira (Faro) e ainda um grupo de seis educadoras de infância: Ana Bento (Alpedrinha), Mª de Jesus Miranda (Várzea) e Adelina Ribeiro, Cruz [ilegível], Eugénia Salvado e Hélia Santos (Fundão).

Os vários processos de resolução que apareceram seguiam quase todos a via da eliminação de números a partir das condições impostas.

Quer a Sílvia, quer o Paulo começam por demonstrar que o número da porta tem de estar situado entre 50 e 79:

> Se o número não pertencer a este intervalo terá de ser, pela terceira condição, múltiplo de 6. Mas, pela primeira condição, não pode ser múltiplo de 3. Impossível, porque todos os múltiplos de 6 são múltiplos de 3.

No entanto, pode haver outros pontos de partida. Por exemplo, fazer a lista dos números entre 50 e 79 e ir eliminando os que não cumpriam as condições.

Já o Alberto Canelas começou por verificar se o número seria ou não múltiplo de 6 (chegando à conclusão que não). E depois continuou por eliminação, de acordo com as condições.

Mas, ainda mais simples, é verificar se o número é ou não múltiplo de 3. Foi o que fizeram o Augusto, a Conceição, a Cristina Rodrigues, o Domingos e o Mário. De forma esquemática será:

- Se for múltiplo de 3, estará entre 50 e 59. Só pode ser 51, 54 e 57. Mas a segunda condição obrigaria a que fosse múltiplo de 4. Ora nenhum destes números o é.

Logo, não é múltiplo de 3.

- Mas se não é múltiplo de 3 também não é múltiplo de 6 (todos os múltiplos de 6 são também de 3). Conclusão (pela terceira condição): está entre 70 e 79.
- Entre 70 e 79, pela segunda condição, tem de ser múltiplo de 4. Servem o 72 e o 76.
- Como não pode ser múltiplo de 3, das duas possibilidades anteriores temos de eliminar o 72.
- Conclusão: o número da porta é o 76.

Finalmente, gostávamos de chamar a atenção para uma resolução interactiva muito interessante proposta pelo Paulo Correia. Pode ser vista no endereço: www.esasmat.cjb.net na secção "Recursos", em "Problemas resolvidos".

Vão até lá que vão gostar!

Simetria — Jogos de espelhos

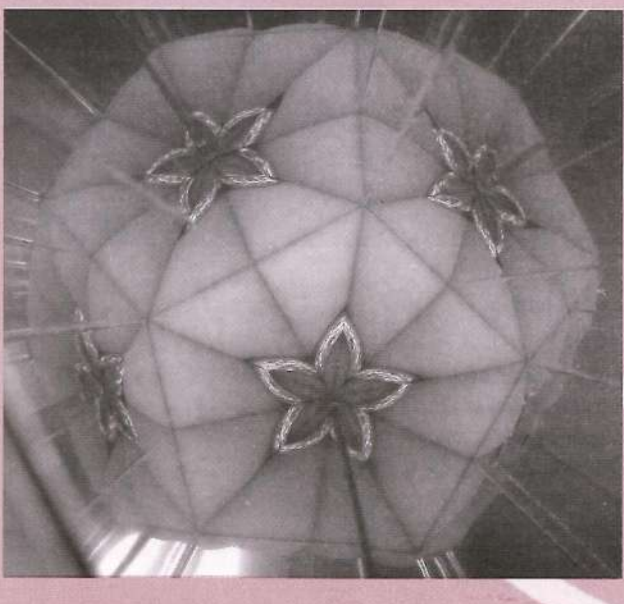
Cristina Loureiro

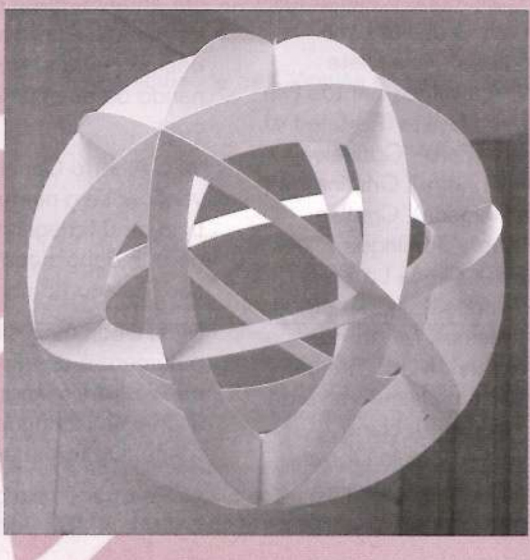
A partir de agora os professores de Matemática têm mais uma exposição interactiva à sua disposição. Professores, alunos, pais, e todas as pessoas curiosas pela matemática, porque estas coisas de exposições são um excelente veículo para conhecer, experimentar, pensar em aspectos da matemática desafiantes e muitas vezes inesperados tornados acessíveis por quem melhor sabe deste ofício.

A exposição *Simetria – Jogos de espelhos* é uma versão ligeiramente ampliada da exposição permanente, existente no Departmento de Matemática "F. Enriques", em Milão. A tradução e adaptação desta exposição italiana é da responsabilidade da Associação Atractor. Esta exposição integrará com carácter permanente o futuro Centro de Ciência Viva de Ovar. Uma versão itinerante permitirá levar a exposição a vários pontos do país. Está já prevista a sua apresentação no Profmat 2002.

Até Junho estará aberta nas novas instalações dos Departamentos de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto, ao Campo Alegre. Inicialmente, estará aberta das 15h às 18h30 de 2ª a 5ªfeira. O horário pode vir a ser alterado (e alargado). Para mais informações e detalhes, relativamente quer ao conteúdo, quer ao horário de abertura, quer ainda a visitas guiadas para professores e visitas de grupos de alunos (com horário diferente, por reserva), consultar a página do Atractor http://www.fc.up.pt/atractor .

> "É surpreendente o facto que, na imensa variedade quer dos motivos ornamentais produzidos pelo homem quer das formas presentes na natureza, haja na realidade só um número limitado e relativamente pequeno de "esquemas" (melhor dizendo de diversos tipos de simetria) que se repetem.
> É ainda mais surpreendente o facto de artistas de todas as partes do mundo terem chegado, mesmo sem uma análise sistemática, a criar exemplos de todos os casos possíveis, muito antes de uma formalização matemática do resultado.
> A exposição, a partir da observação das simetrias presentes em alguns desenhos ou poliedros, ilustra de modo interactivo o problema da classificação das figuras com base no seu tipo de simetria."
>
> (retirado do folheto de divulgação da exposição)





Quota 2002

No ano de 2002 o valor da quota é de €42.00 [8.420$00] para professores, €30.00 [6.015$00] para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e €46.00 [9.222$00] para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA **MasterCard** ☐ MasterCard

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ______________________________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Nome: ______________________________ Sócio nº: ____________

Morada: ______________________________

Código Postal: ____________ Distrito: ____________

Telefone: ____________ Email: ____________

Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: ____________

Nº do B.I. ____________ Arquivo: ____________ Data de emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: ____________ Nível de ensino: ____________

Categoria profissional: ____________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: ____________ Email: ____________

Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até €12.47 [2.500$00] — 20%; de €12.47 [2.501$00] a €24.94 [5.000$00] — 15%; mais de €24.94 [5.000$00] — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: apm@netcabo.pt

Índice