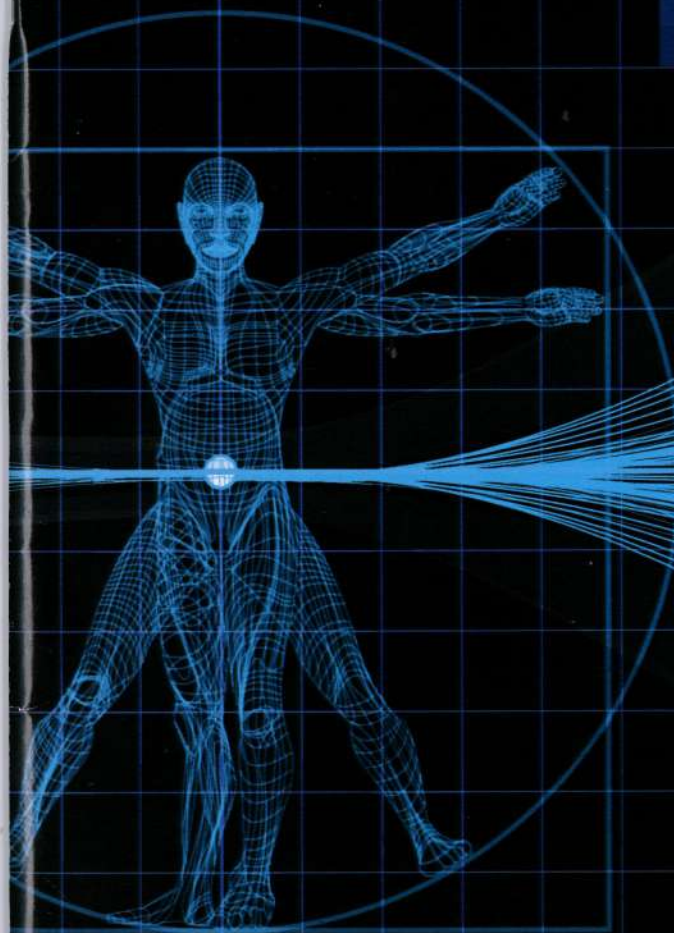


Educação \surd Matemática

N.º 64

Setembro/Outubro de 2001



Preço: 1200\$60

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

A capa pretende traduzir a dicotomia entre o mundo natural e a concepção humana desse mesmo mundo. O Homem surge como pólo dessa articulação de coisas distintas mas surpreendentemente compatíveis. No meio de objectos naturais como a Terra e a Lua, surge a representação matemática da expansão do Universo depois do *Big Bang* (o ponto branco, ao centro).

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado à *Matemática e Natureza*, o tema proposto pela APM para trabalho nas escolas durante este ano. Convidámos para editor o António Bernardes por sabermos do seu gosto em relacionar a Matemática com a realidade e com as outras ciências.

O António foi um colaborador a tempo inteiro, integrando desde o primeiro ao último momento a equipa que pensou e deu forma a este número, participando energética e convictamente em todo o processo da sua preparação.

Alterações na Redacção

Os colegas Henrique Guimarães, Ana Vieira e Fernanda Perez deixaram de pertencer à redacção de *Educação e Matemática*. Aos três agradecemos o empenhamento que sempre dedicaram à Revista. Recordamos que o Henrique Guimarães foi redactor de *Educação e Matemática* desde o seu primeiro número, para ele um agradecimento muito especial.

Neste número também colaboraram

Ana Costa, Ana Maria, António Pedro, Cândida Rosa, Carlos Braumann, Cristina Loureiro, Catarina Leal, Daniela Pires, Fernando Nunes, Helena Sá, Hugo Samuel, Isabel Catalão, João Caraça, João Carneiro, João Jorge Henriques, João Paixão, José Filipe, José Manuel Duarte, Lúcia Rodrigues, Luís Reis, Manuel Beirão dos Reis, Margarida Raimundo, Maria João, Maria José Costa, Mercês Ramos, Paulo Almeida, Pedro Esteves, Rosário Selada, Sousa Ramos, Telma Sofia, Teresa Tudela, Tina Gregório.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 2001.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27 — A, 1500-236 Lisboa
Tel.: (351) 21 7163690
Fax: (351) 21 7166424
E-mail: apm@netcabo.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

nº 64
Setembro/
Outubro
de 2001



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora interina
Ana Paula Canavarro

Redacção
Adelina Precatado
António Fernandes
Fátima Guimarães
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Editor convidado deste número
António Bernardes

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira

Matemática

Eduardo Veloso

"Tecnologias na Educação Matemática"

José Paulo Viana

"O problema deste número"

Lurdes Serrazina

A matemática nos primeiros anos

Maria José Costa

História e Ensino da Matemática

Rui Canário

Educação

Composição e Paginação

António Fernandes

e João Loureiro

Entidade Proprietária
**Associação de Professores
de Matemática**

Tiragem

5200 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun,

Set/Out e Nov/Dez

Montagem, fotolito e impressão

Scarpa impressores

N.º de Registo: 112807

N.º de Depósito Legal: 72011/93

Notícias Matemáticas da Natureza

António Bernardes

De há cerca de dez anos para cá tenho o hábito de guardar artigos de jornais e revistas que compro regularmente. Colecciono notícias sobre Matemática e o seu ensino e notícias sobre todos os assuntos em que a matemática é usada para modelar situações, organizar e comunicar dados e ilustrar ideias. Nestas férias, ao organizar os recortes de 2001, o número e a natureza das notícias sobre o ambiente, em parte devido ao rigor do Inverno e às cimeiras sobre o Ambiente, deixou-me mais uma vez a pensar sobre os problemas de relacionamento do *Homem* com a *Natureza*, sobre a forma como lidamos com as questões ambientais e na forma como continuamos a contemplar, indignadamente parados, a incapacidade política na sua resolução. Aqui ficam alguns apontamentos dos jornais dos primeiros meses do século XXI:

"O aquecimento que os cientistas observaram nos últimos cem anos foi de 0,6 graus Celsius. Mas ao longo do século que agora começa, o termómetro deverá subir muito mais — e este é outro dado importante do relatório do IPCC (Painel Intergovernamental para as Alterações Climáticas). Em 1995, calculava-se que, até 2100, a temperatura subiria entre 1,0 e 3,5 graus Celsius. Agora, os cálculos apontam para um intervalo entre 1,4 e 5,8 graus."

In Mais pessimismo sobre o clima, Público, 23 de Janeiro de 2001

"Em Novembro passado, ainda durante a administração Clinton, o confronto de posições entre os Estados Unidos e a União Europeia condenaram ao fracasso a definição das regras para a aplicação do Protocolo de Quioto — segundo o qual os países desenvolvidos se comprometem a reduzir as suas emissões em 5,2 por cento. Agora, porém, é o protocolo como um todo que os Estados Unidos estão a deitar para a lata do lixo, depois de o terem assinado à quatro anos."

In Bush subverte negociações, Público, 30 de Março de 2001

"88 cm: É a subida máxima do nível do mar, nos próximos 100 anos, prevista pelo IPCC."

In Futuro do Protocolo de Quioto decide-se até domingo, Público, 19 de Julho de 2001

No plano local as notícias não são melhores:

"Ao longo do século XX, o território português registou um aumento das temperaturas superior a 100% do valor do aquecimento registado à escala planetária pela Organização Mundial de Meteorologia, de acordo com cálculos baseados num estudo do Expresso em colaboração com o Instituto de Meteorologia."

In Ardente século XX, Expresso, 20 de Janeiro de 2001

Sobre a forma como nós encaramos os problemas ambientais os resultados do "II Inquérito Nacional Os Portugueses e o Ambiente/Observa", publicado no Público de 8 de Maio de 2001 revelam que:

- 47 % dos portugueses acha que Portugal é tanto ou mais poluído que os outros países europeus;
- 45 % dos portugueses gostariam de viver num espaço diferente daquele em que vivem;
- 67 % gostaria de ter mais natureza à volta de sua casa;
- 61 % considera-se pouco ou nada informado sobre o ambiente.

Sobre a síndrome NIMBY ("Not in My Back Yard") que traduzido à letra significará qualquer coisa como "Não no meu quintal", dos inquiridos:

- 5 % não tem problemas em aceitar uma central de tratamento de resíduos industriais na sua freguesia;
- 30 % exigem uma comissão de acompanhamento independente;
- 29 % dizem que centrais do género devem ser implantadas nos concelhos que mais produzem resíduos;
- 9 % concordam com a central, mas em outro concelho ou distrito.

Ainda sobre a mesma temática, o Expresso de 28 de Julho de 2001 revela que:

"58 % dos portugueses não identificam de forma correcta a causa do aquecimento global — a libertação de dióxido de carbono e gases com características semelhantes. Quase 40 % pensam que está relacionado com o buraco do ozono e 4% apontam o excesso de estufas."

Sobre aspectos mais específicos como o da energia e da qualidade da água que bebemos:

"Actualmente, existem perto de 220 mil metros quadrados de colectores solares instalados. Um número irrisório quando comparado com os quase 3 milhões de metros quadrados da Grécia — país com a mesma radiação solar que Portugal."

In *Portugal sem estratégia para as renováveis*, Público, 31 de Março de 2001

"Concelhos onde foram detectadas as situações mais críticas — com teores máximos de organoclorados superiores a 100 microgramas por litro de água: Évora (224), Castelo Branco (154), Loures (153) e Mortágua (114,5)."

In *Torneiras cancerígenas*, Expresso, 3 de Fevereiro de 2001

Muitas destas notícias têm um carácter periódico, quase perigosamente rotineiras. Todos os verões aparecem notícias sobre as secas, os fogos e a qualidade das águas e todos os invernos se escreve sobre a chuva a mais ou a menos e que tende a desviar-se cada vez mais da média. As notícias sobre catástrofes naturais já não alar-

mam, tornam-se habituais e inspiram filmes recheados de efeitos especiais. É um facto que existem cada vez mais associações e movimentos que alertam a sociedade para os problemas ambientais e que a reciclagem e o tratamento dos lixos tem avançado nos últimos anos. Existe também uma crescente consciência ecológica, nomeadamente nas faixas etárias mais jovens, fruto, em parte, do trabalho que a escola tem desenvolvido nesta área. Mas não consigo deixar de estar apreensivo em relação ao futuro e, mesmo descontando o sensacionalismo de certos títulos dos jornais, considero que as notícias não são muito animadoras.

E continuo a pensar que, de um ponto vista educativo, não estamos a fazer tudo o que é possível. As escolas e todas as áreas disciplinares têm responsabilidade na discussão das questões ambientais. A Matemática procura incorporar no seu ensino o estudo de aspectos diversificados da Natureza. Desde os movimentos planetários às estruturas fractais existe um vasto conjunto de fenómenos e entidades naturais que são usados para ensinar conteúdos curricularmente interessantes. Existem, no entanto, várias razões que me ocorrem para alargar o estudo da Natureza à vertente ambiental.

Em primeiro lugar a Matemática enquanto disciplina tem, tal como as outras, um papel a desempenhar na formação global do aluno enquanto cidadão atento, crítico e interveniente, como tal deve fomentar a discussão de questões que, a par com a formação científica, sejam relevantes para a compreensão do mundo em que vive e contribuam para agir e decidir sobre o futuro em que quer viver. Em segundo lugar, muitas destas questões são realmente significativas para os alunos; eles encontram-se na faixa etária mais desperta para as questões ambientais e tem genuíno interesse em as discutir. Terceiro, muitos dos estudos citados, e de outros que facilmente encontramos na *Internet*, são susceptíveis de ser tratados de um ponto de vista matemático, na disciplina ou em projectos integrados que envolvam outras áreas curriculares. Quarto, a Matemática enquanto ciência tem uma participação activa na compreensão dos fenómenos globais e locais relacionados com o ambiente. Essa intervenção pode e deve ser discutida de acordo com o nível e a formação dos alunos.

O ensino da matemática não pode apenas olhar a *Natureza* de forma contemplativa, como se fosse algo que está e se manterá imutável. Por este andar, daqui a uns anos, os professores de matemática arriscam-se a ter que rever os seus exemplos e ser obrigados a ensinar a sucessão de *Fibonacci* com coelhos clonados.

Já depois de ter escrito este editorial fui ver o filme *Os respigadores e a respigadora*, no original *Les glaneurs et la glaneuse*. Recomendo-o vivamente, acho que tem a ver com tudo isto que acabei de escrever...

António Bernardes
Escola Secundária de Gil Vicente

Les Glaneuses, Jean-François Millet (1814 — 1875)



A imagem da Natureza na matemática de sempre

Paulo Almeida

Figura 1. "Naturezas" do Brasil

Muitos foram os livros e textos vários dedicados à ideia de Natureza; a título de exemplo podem ver-se algumas referências no final. De grande interesse é ainda um pequeno livro intitulado *A imagem da Natureza na física moderna*, escrito por Werner Heisenberg, um dos fundadores da mecânica quântica e "prêmio Nobel" da Física em 1932; ao deliberadamente glosar este título pretendemos, de entrada, sugerir o carácter estável do mundo das ideias matemáticas, contrastando com o carácter mais mutável do mundo das ideias físicas.

Os comentários que seguem não se pretendem porém eruditos resultando antes da própria vivência da experiência.

Mas afinal o que é afinal a Natureza? Teremos todos a mesma ideia do que seja a Natureza?

O campo natural

Ao falarmos de paisagem natural apontamos para uma ideia de *totalidade* que associamos à Natureza e ao evocarmos o mundo natural imediatamente intuimos que ele se organiza e gera segundo certas regras, princípios ou *leis*, também indissociáveis da ideia que temos de Natureza e que dela nos dão a imagem de um imenso organismo vivo. Empregavam portanto um termo cheio de sentido os cronistas de viagem, quando referiam a forma generosa como índios e índias do Brasil expunham as suas "natu-

rezas", geradoras de vida e reduto essencial da criação.

Todos temos a ideia de que ao falar do que é alcançável pelos nossos sentidos estamos a falar da Natureza e certamente que continuaremos a incluir na Natureza o que possa ser alcançado com as extensões dos nossos sentidos a que a técnica nos habituou, como seja um microscópio, um telescópio ou um espectroscópio. Limitar porém a Natureza a uma tal colecção de coisas heteróclitas mais parece confundi-la com uma imensa arca de Noé, onde entre as galinhas e os elefantes também aconchegássemos espectros e galáxias.

Uma tal arca de Noé, uma espécie de jardim zoológico de tudo quanto existe seria porém apenas uma forma primitiva de conceber a Natureza. Numa tal concepção, em que a Natureza fosse por assim dizer, tudo quanto existe, só nela não se incluiria uma hidra de sete cabeças por ser ela apenas figurável através da nossa imaginação.

De modo algum, porém, devemos ater-nos a figuras que só visualmente sejam percebidas; acaso não é um texto uma figura que se lê e através da qual reconstituímos todo o mundo?

O mundo das ideias matemáticas, com as suas leis e a sua vida própria imita maravilhosamente o mundo natural: tal é a imagem forte da Natureza na Matemática de sempre.

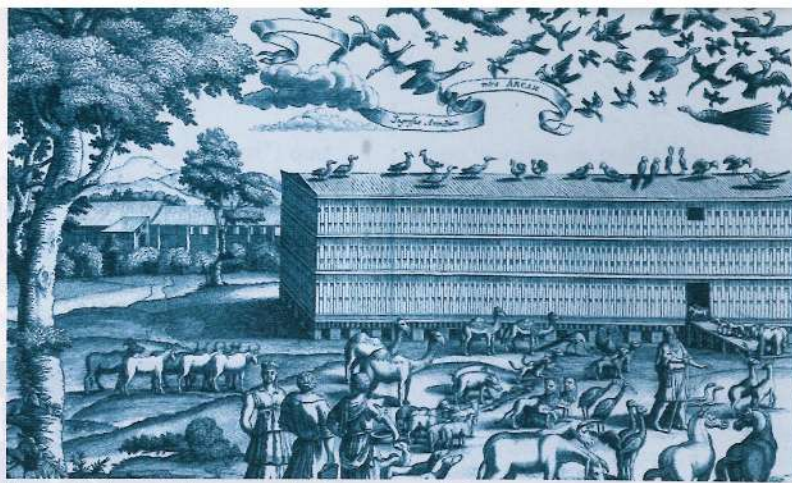


Figura 2. Arca de Noé segundo Athanasius Kircher

Porém nem todo o desenho, nem todo o texto, é figura, representando algo distinto de si mesmo: são bem conhecidas as “figuras impossíveis” de Mauritus Escher, que só se representam a si próprias, ou os “textos absurdos” de Eugène Ionesco; ou a hidra de sete cabeças.

Mas se não cabe na Natureza tudo o que se imagina ou prefigura, quais são afinal os limites do campo natural?

A lei natural

A ciência moderna, nascida por assim dizer com Galileu, e ainda não superada na sua essência, ensinou-nos a ver além das aparências: o movimento diurno do Sol afinal é uma ilusão e o movimento invisível de rotação da Terra é que afinal é real; o movimento diurno do Sol, tal como a imagem do espectro do ferro permitem-nos aceder *indirectamente* ao mundo real perscrutando *indirectamente* as suas leis. O próprio da ciência moderna é “não ver tudo o que se vê e ver além daquilo que se vê”. O acesso indirecto ao mundo real — de que o mundo revelado pelos sentidos é apenas o reflexo através de um espelho de feira que distorce — faz-se em geral recorrendo a outras extensões dos nossos sentidos, distintas de microscópios e outra aparelhagem; recorre-se naturalmente ao raciocínio abstracto próprio da matemática. Desde Galileu que a ciência moderna matematiza o real, substituindo-o mesmo na sua inquirição, por um mundo ideal de natureza matemática; ou seja que as leis matemáticas passam por assim dizer a ser as “naturezas” geradoras do imenso

organismo vivo que é a Natureza. Não se matematiza porém a partir do que se imagina, mas a partir daquilo a que os nossos sentidos e todas as suas extensões nos permitem aceder. Só por isso não se debruçam os cientistas modernos no estudo da hidra de sete cabeças. A hidra é convencional, como convencional é todo o mito.

Os modelos mais primários para “explicar” o mundo são precisamente os mitos, e os mitos suportam-se em representações simbólicas cuja manipulação conduz a ritos de que a forma mais primitiva é a magia. A ideia de magia, amplamente aceite 4000 anos antes de Cristo¹, está associada à importante ideia de dominar a Natureza, procurando ir portanto além da sua mera descrição.

Exemplificando: manipulando um simples cabelo de alguém — seja quem-mando-o ou perfumando-o — pensava-se lograr um efeito, agir, sobre esse alguém; alguém de quem o cabelo seria um símbolo, ou seja, afinal, um modelo simplificado, preservando o símbolo uma relação orgânica com o simbolizado. Subjacente à magia primitiva está a ideia não só de que o mundo é compreensível mas de que é possível agir nele em nosso proveito, tanto mais quanto mais se conheçam alguns dos seus mecanismos. Foi assim sob a forma de magia que nasceram as primeiras teorias, atestando o elemento linguístico “teo” a crença numa racionalidade superior. “O mistério eterno do mundo é a sua compreensibilidade”, disse Einstein em 1936 e já o poderiam ter dito os primeiros inventores de verdadeiras teorias: os Gregos.



Figura 3. Ferro segundo espectroscópio.

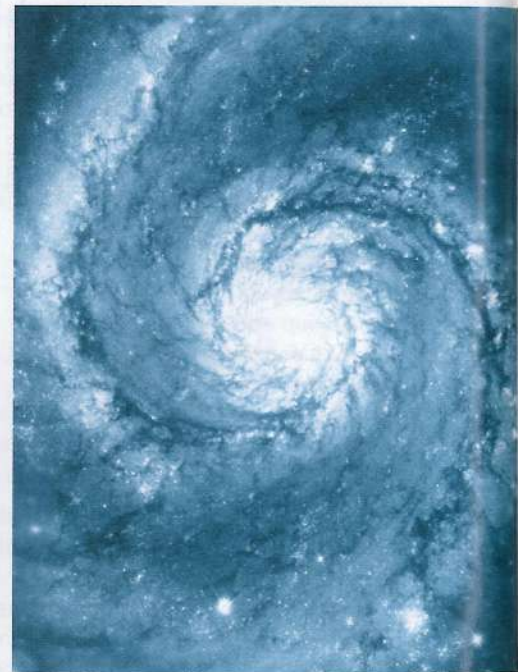


Figura 4. Galáxia segundo telescópio.

Uma teoria é afinal um modelo simplificado de uma parcela do mundo, modelo em que se manipulam símbolos, tal como num ritual, preservando porém esse ritual uma relação orgânica com o que a teoria modela, espezinhando em particular, as regularidades e as relações de causalidade manifestas no mundo real.

É importante assinalar que, ao simbolizar e ao teorizar reduz-se numa primeira fase a complexidade do mundo real, simplificando-o numa versão imaginária e substitui-se então esse mundo por um mundo simbólico; este é mais facilmente manipulável, permitindo, além disso, atingir sentidos inacessíveis de outra forma, sendo depois possível testar no mundo real as articulações simbólicas, interpretadas estas em termos de articulações reais. O simbólico situa-se pois entre o imaginário e o real e a sublimação da magia em teoria, constitui um momento notável e surpreendente na evolução humana, interligando esses três termos: imaginário, simbólico, real. Num postal endereçado a um amigo que se admirava de não ter a ciência tradicional chinesa ido além de uma versão descritiva e empírica do mundo, dizia Einstein:

"o desenvolvimento da ciência ocidental apoiou-se em dois grandes resultados: a invenção do sistema lógico formal (na geometria euclidiana) pelos filósofos gregos e a descoberta da possibilidade de achar relações causais mediante experiências sistemáticas (no Renascimento). Na minha opinião não há que admirar-se pelo facto de os sábios chineses não terem dado estes passos. O surpreendente é que alguém tenha levado a cabo estas descobertas."

Tais são os pilares da ciência ocidental: a matematização e a experimentação, aspectos complementares de todas as grandes teorias.

$$F = ma$$

Figura 5. A Lei de Newton



Figura 6. Hidra de sete cabeças

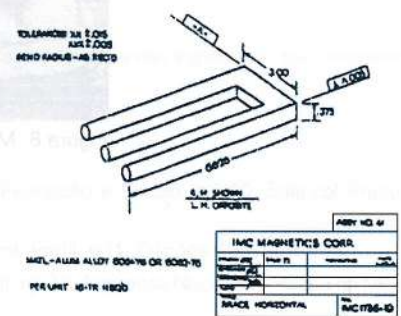


Figura 7. Projecto industrial de uma peça impossível

A matematização do real, de que é paradigma a lei de Newton — relacionando a força F que age num corpo de massa m , com a aceleração a que lhe imprime — permite uma manipulação mais cómoda do real, permitindo mesmo fazer previsões determinísticas, pois sendo uma lei matemática, reflecte uma lei natural.

O jogo natural

O mundo simbólico da matemática, não sendo uma mera imagem especular, evoca o ausente, sem o reproduzir integralmente, não apenas o ausente simbolizado, mas também o ausente imaginado e possível. Configura-se assim um espaço de liberdade apenas sujeito às regras internas de certas estruturas; quanta margem de manobra, quanta liberdade ao evocar! Não por acaso dizia o matemático Georg Cantor que a "essência da matemática é a liberdade"; ou não fosse ela o paradigma de todos os mundos simbólicos, onde os símbolos têm um poder eminentemente evocador devido ao grande grau de abstracção dos conceitos que simbolizam, tornando-os muito abrangentes na medida em que são simples. Todos os conceitos matemáticos são feitos a partir de conceitos simples e abrangentes, como abrangente e simples deverá ser uma parábola eficaz.

Os símbolos, por outro lado só valem quando no jogo de uns com os outros; a relação dinâmica entre os símbolos é mais importante que os próprios símbolos, libertando-os do que possam ter de mais convencional. Os símbolos em movimento têm de adquirir novas qualidades; as palavras — que são símbolos de conceitos e de sentimentos — só através do discurso fazem brilhar os seus múltiplos sentidos, fazendo circular as ideias; o ouro — que é um símbolo venal, isto é representa valores que se podem vender — só através do mercado ganha sentido, fazendo circular os valores económicos: como dizia Marx, "o ouro [...] apenas representa o encadeamento das metamorfoses das mercadorias".

Tal como a vida resulta de um fluxo permanente e intenso de energia e matéria — atravessando os seres vivos, neles entrando ou saindo — assim sucede com o "espírito matemático". Pensando bem trata-se do que em termodinâmica se chama uma estrutura dissipativa; exactamente como o é o sistema de películas que se forma numa garrafa de cerveja ao esvaziá-la energicamente; insista-se na necessidade desta energia, pois vertendo o líquido muito suavemente nada se formará no interior da garrafa, que ficará apenas vazia e sem vida no interior.

E o mesmo se passa com outros domínios: sem um forte fluxo de informação



Figura 8. Matematizando o mundo real: perspectiva (A. Dürer)

(veiculada por palavras) não há pensamento vivo, sem um forte fluxo de valores económicos (veiculados pelo ouro) não há vida económica, sem um fluxo dialéctico permanente entre os símbolos matemáticos e o que eles representam não há actividade matemática possível.

Vimos que a vida dos símbolos tem que estar ligada à liberdade e à dinâmica. Mas donde vem a força do jogo dos símbolos matemáticos? Precisamente do elemento criador que deles emana, garantida essa liberdade e essa dinâmica. São estes os elementos que lhes dão vida e que lhes conferem a possibilidade de ir além do que se vê, mesmo se eliminando muito do que se vê. Dizia o matemático Bertrand Russell, prémio Nobel da Paz e da Literatura, que "a matemática pode ser definida como o assunto em que nunca sabemos o que falamos, nem se o que dizemos é verdade"; nem podia deixar de ser assim, visto que ela é por excelência um exercício num mundo inteiramente simbólico. Mas então como podem ser justíssimas estas palavras de Eugene Wigner, um outro prémio Nobel, desta feita da Física?: "a linguagem da matemática revela-se efectiva para além do razoável nas ciências da natureza"; como é possível a incrível harmonia entre as ideias simbólicas da matemática e o mundo real, conferindo-lhe uma eficiência no concreto além do razoável? Todos os matemáticos conhecem a resposta: o real é apenas uma parcela do possível mas não todo o possível; ora sendo criativo, o exercício simbólico conduz a novos possíveis no mundo simbólico, para além do real e do ideal, e a relação orgânica com o real que esse exercício pressupõe conduz a novos possíveis não já no mundo simbólico mas no mundo real. É por isso que nunca se pode prever para que serve uma teoria. Em 1791, o primeiro ministro inglês visitou o laboratório do físico Faraday, e ao ver todos aqueles fios, pilhas, bobines, condensadores, que nada lhe diziam, perguntou: e para que serve tudo isto? ao que Faraday respondeu: "para que serve um bebé quando nasce?". Como poderia o grande físico imaginar que o fenómeno da indução magnética, que estava tratando de compreender, viria a tornar possível no mundo real, o motor eléctrico, o gerador de electricidade, a transmissão por rádio, a televisão, o computador? Faraday estava apenas a mostrar que havia uma parcela de possível que, chegado o dia, poderia ser hipostasiada num concreto útil. A Natureza é afinal o porto de partida e o porto de chegada da actividade matemática.

Que dá crédito a um conceito científico? Que dá crédito ao ouro? Que dá crédito à palavra? Que dá crédito ao símbolo? Um conceito científico, o ouro, a palavra, o símbolo, só pode ser algo de real se for algo de possível; o dinheiro só será um bem real se for um bem possível. Naturalmente que ser simbolicamente possível não significa ser imediatamente possível na realidade. Os números complexos, inventados no séc. XVI num exercício livre no quadro do simbolismo matemático, só vêm encontrar uma aplicação no mundo real quando a eles se recorreu nas transmissões de electricidade; a primeira aplicação da relatividade geral, proposta por Einstein no princípio do século XX, foi o chamado sistema GPS (Geographical Positioning System) concebido há poucos anos para as comunicações por satélite usadas nos telemóveis; a força dos símbolos vivos pode ser tal que, por exemplo, hoje em dia, os militares sabem ser mais temível e incontrolável a força da vida dos símbolos 0 e 1, utilizados nos códigos, do que a potência dos mísseis de uma esquadra naval.

A força do exercício matemático — que pode ser imensa — não há que procurá-la portanto, em geral, numa adequação prematura ao real; há que

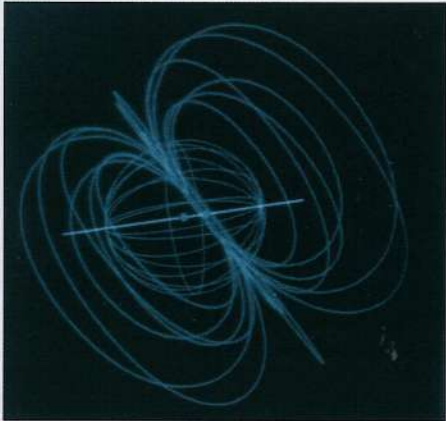


Figura 9. Um campo magnético

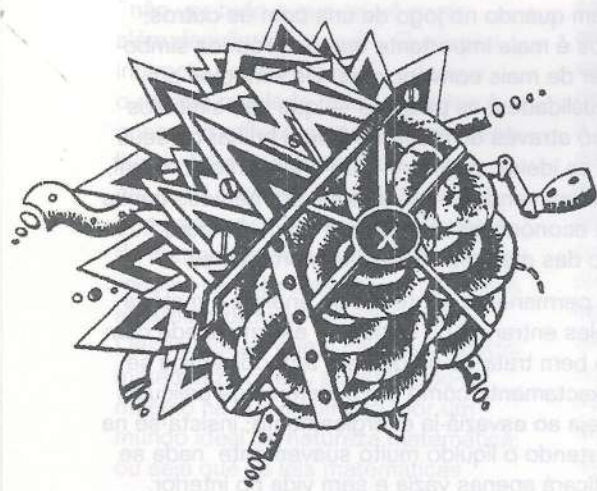


Figura 10. O que é natural? (J. Estrela)

procurá-la sim na coerência interna, de ordem lógica racional ou de ordem intuitiva, em ambos os casos havendo fatalmente uma coerência vital; o discurso simbólico livre e dinâmico só será credível se adquirir uma vida própria, mas vida, mesmo se apenas simbólica. Em todo o caso, o exercício simbólico só conduzirá ao possível real, se for possível, *tout court*, se for uma abstracção hipostasiável, e só o será se tiver vida.

A confiança na adequação do jogo matemático ao mundo real fez dizer ao físico Dirac — outro “prémio Nobel” pioneiro da mecânica quântica — estas palavras fortes em que o itálico é do próprio Dirac”:

O mais poderoso método para progredir sugerido pelo presente consiste em empregar todos os recursos da matemática para tentando aperfeiçoar e generalizar o formalismo matemático que forma a base existente da física depois de cada êxito nessa direcção, tentar interpretar as características matemáticas em termos das entidades físicas²

O exercício matemático assemelha-se a um jogo de coerência vital, cujas regras próprias se vão afinal conhecendo pouco a pouco à medida que se vai jogando. Seria incorrecto ver porém no exercício matemático um jogo de regras conhecidas a priori, o que não significa que a pouco e pouco as regras do jogo não possam vir a ser progressivamente codificadas. O mundo das ideias matemáticas, com as suas leis e a sua vida própria imita maravilhosamente o mundo natural: tal é a imagem forte da Natureza na Matemática de sempre.



A música não é mais que uma aritmética inconsciente
Gottfried Leibniz

Notas

1 A astrologia é um ramo da magia e como é bem sabido muitos não superaram, na compreensão do mundo, o nível de há 4000 anos.

2 Proc. Roy. Soc. (Londón) 133 (1931), pp. 60-72.

Referências

Collingwood, R. G.: *A ideia da Natureza*, Col. Divulgação e Ensaio, n.º 20, Editorial Presença (s.d.).

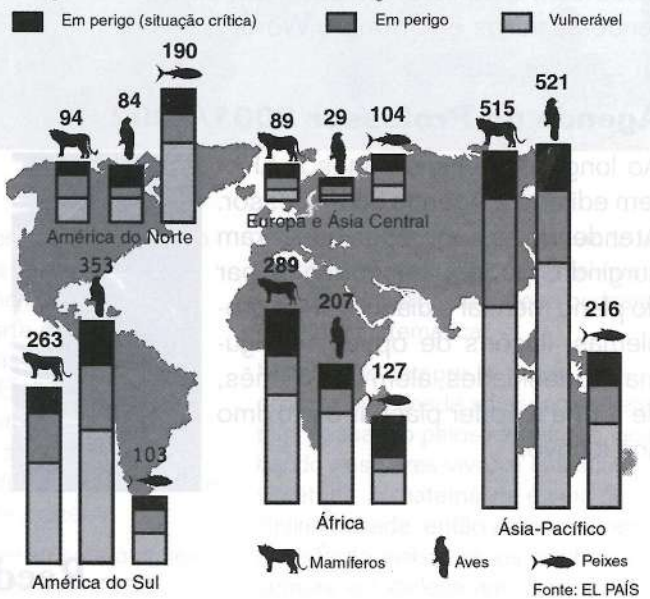
Lenoble, Robert; *História da Ideia de Natureza*, Col. Perfil, n.º1, Edições 70, 1969.

Michelli, Gianni; *Natureza*, em Enciclopédia Einaudi, n.º. 18, Imprensa Nacional — Casa da Moeda, 1997.

Heisenberg, Werner; *A Imagem da Natureza na Física Moderna*, LBL Enciclopédia, n.º. 20, Livros do Brasil (s.d.).

Paulo Almeida
Instituto Superior Técnico

Espécies animais ameaçadas

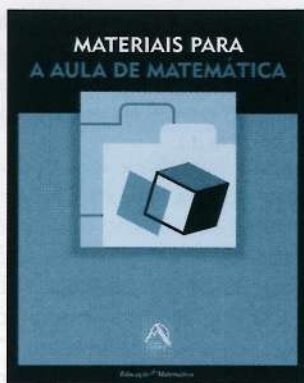


in *Público*, 3 Janeiro 2000

— Novas Publicações —

Materiais para a aula de Matemática

Ao longo de 13 anos a revista *Educação e Matemática* tem editado fichas de trabalho na sua secção *Materiais para a aula de Matemática*. Chegou a altura de reunir estes materiais e respectivos comentários e sugestões relativos à sua exploração e utilização na sala de aula. De forma a tornar a utilização das fichas mais directa, é distribuído com este livro um CD-ROM contendo as fichas em formato Word.



Adenda do 4º ano

Completa a colecção de adendas para cada um dos primeiros seis anos de escolaridade. Apresenta a mesma organização e concepção semelhante aos outros volumes da colecção, com sugestões de actividades para serem realizadas em sala de aula e abrangendo um leque alargado de conteúdos temáticos.

Agenda do Professor 2001/2002

Ao longo dos últimos anos a APM tem editado a Agenda do Professor. Atendendo às sugestões que foram surgindo, poderá encontrar, a par do plano mensal e diário, vários problemas, ilusões de óptica e algumas curiosidades, além do 13º mês, de forma a poder planear o próximo ano lectivo.



Geometria nos 2º e 3º ciclos

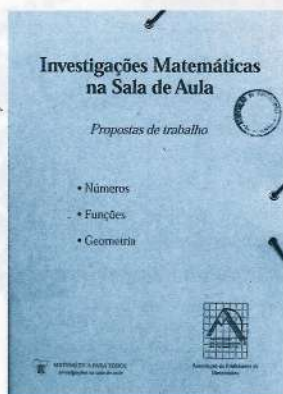
Lidar com dados e probabilidades

Mais dois volumes temáticos que são traduções das adendas do NCTM para os anos de escolaridade 5 a 8. Respeitando os temas referidos no título, são apresentadas propostas para serem realizadas em aula, devidamente comentadas e com sugestões de exploração.

— Reedições —

Investigações na sala de aula de Matemática

Segunda edição da obra editada em 1998 que é uma colecção de propostas de investigação já experimentadas na sala de aula. Surge com nova apresentação, de modo a melhorar a sua consulta e utilização.



Geometria com o Cabri-Géomètre

Reedição deste título, primeiramente editada em 1999. Elaborado no âmbito do projecto T³, a obra é uma colecção de propostas que podem ser realizadas na aula, acompanhadas por comentários e resoluções.





Depoimento

Matemática e Natureza: O que pensam os alunos

Questionarmo-nos se existe algo que ligue matemática e natureza é o mesmo que procurar semelhanças entre um sonho e um pensamento, ou entre a razão e os sentidos. Com isto defendo que o único facto partilhado por estes dois empecilhos ideológicos é o de serem pólos opostos da mesma mente humana. É claro que não existe nada que os relacione! E é inútil que os tentemos relacionar, criando ciências de monstruosa imperfeição como as físicas ou as biológicas. Pois estas são como órfãos sem valores, prontas a tudo para enquadrar a arte divina em cubículos matemáticos. Consola-me o facto de que nunca conseguirão e que, por mais que sejam as suas tentativas para romper o véu da arquitectura universal. Hão-de sempre cair no lodo religioso no qual todos aqueles que não encontrem respostas (porque não existem) procuram abrigo.

Mas minto quando digo que não existe relação; a relação está aqui mesmo, somos nós próprios. Somos, de facto, um vil ser que (raros são os que não o fazem) procura o prazer em todas as suas actividades. Chamem a esta

atitude o que quiserem; para mim não passa de arte; uma arte que vem alimentando o homem desde o seu nascimento; uma arte sempre rejeitada pela frente mas adorada religiosamente por trás. Então, se é de arte que é o Homem feito, porque não abandonar todos os devaneios científico-filosóficos e admitir, humildemente essa nossa sede de prazer.

Dediquem-se religiosamente à agricultura e à arte pois são tudo o que alguma vez precisarão num mundo que nunca vos dará respostas.

João Paixão (11º ano)



A Matemática é uma ciência pura, a essência da vida, tudo neste planeta gira em torno da matemática, nada se pode fazer sem ela!

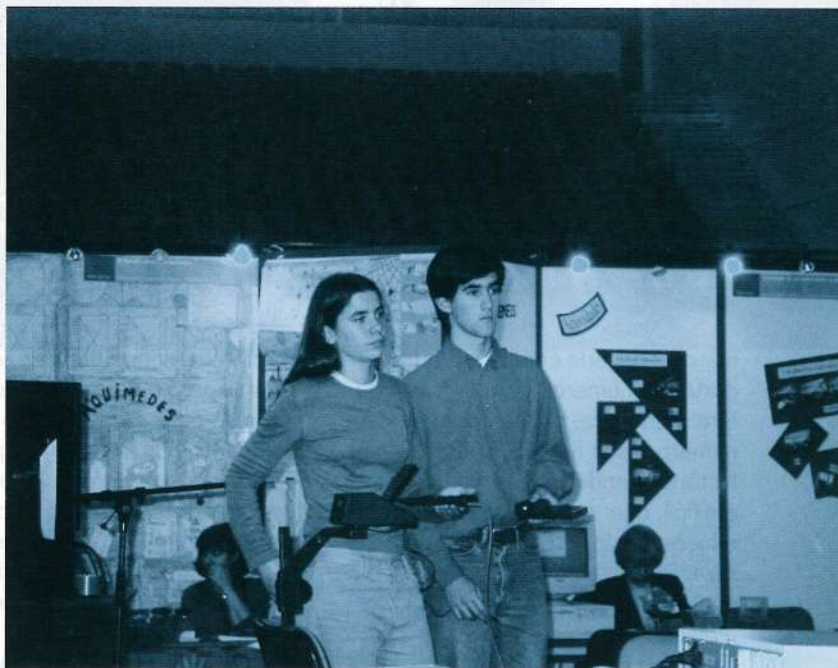
Para mim a matemática tem um significado muito importante porque apesar de ser a pior aluna da turma a matemática, reconheço que esta disciplina é essencial para o nosso futuro.


Na natureza podemos encontrar muitas forma geométricas e durante

o ano essa comparação tem vindo a acentuar-se, pois nunca pensei que uma simples alga na parede pudesse ter tanta matemática.

Mas desde sempre se notou essa proximidade desde as espécies vegetais, passando pelos elementos, acabando nos seres vivos e nas suas simetrias. A matemática é uma disciplina pesada, então para tornarem esse fardo mais leve, os cientistas sempre estabeleceram comparação entre a matemática e algo tão agradável e pacífico como a natureza. É bom falar de Matemática quando ouvimos correr a água das fontes cristalinas e acabamos por pensar em coisas matemáticas tais como: a velocidade da queda da água, a profundidade do charco, a temperatura a que se encontra, enfim para tudo é preciso matemática excepto para uma coisa — a minha felicidade, pois à conta desta disciplina, desta natureza, estou mesmo à beira de chumbar!

Catarina Leal (11º ano)






A Matemática sendo um dos percursos ramos da ciência, sempre teve um bonito compromisso com a Natureza. Já os matemáticos gregos se inspiravam no mundo natural para descobrir relações entre ângulos, números irracionais,...


A relação existente entre a Matemática e a Natureza não se confina a um mundo de formas e números. O que está para além disso é um extenso universo de poesia, arte e humanidade. O principal objectivo dos matemáticos deveria consistir em transportar os números para uma atmosfera metafísica, quase como se cada número, cada função, contasse uma história. Sendo este tema tão vasto é difícil, num texto, divagar sobre as relações entre a Matemática e Natureza. Partindo do princípio que a matemática é uma ciência perfeita (o que é discutível), pois está assente em verdades inquestionáveis, esta não consegue representar a Natureza tal como ela é, imperfeita. Mas o papel que a Matemática desempenha é fundamental na aproximação entre o espírito/matéria.

João Carneiro (11º ano)



Claro que a Matemática tem uma relação com a Natureza e com o nosso mundo. É a matemática a base da ciência que por sua vez tenta explicar o mundo. Numa árvore vemos um gráfico, num pássaro uma equação. Em cada pedaço de natureza pode haver um estudo de matemática e é muitas vezes a natureza que inspira os matemáticos a criarem um novo teorema. E há uma expressão que identifica a natureza $N = \infty$.


José Filipe (11º ano)



A Matemática é um modelo científico que tenta aproximar-se o mais possível do mundo. Mais do que uma ferramenta imaginária é importante para o desenvolvimento das outras ciências que se queiram aproximar da verdade. A matemática, sendo percursora do

infinito não tem limite, o que permite sempre o seu desenvolvimento (como uma ferramenta que se molda perante o problema). Um exemplo do infinito em matemática reflecte-se na "ciência dos fractais" que hoje em dia se pensa ligada à própria natureza.


Hugo Samuel (11º ano)



A natureza tem um ritmo próprio, uma sucessão de acontecimentos, mais ou menos previsíveis, mas sempre (ou quase sempre) explicáveis através de um fenómeno físico. A regularidade dos fenómenos naturais, a previsão (a curto prazo) de outros acontecimentos da natureza, o estudo do comportamento dos seres vivos podem ser estudados matematicamente. A meteorologia é a previsão do comportamento do Tempo, sendo estudado através da matemática. Ao perguntarmo-nos porque é que determinado animal (ou qualquer outro ser vivo) optou por determinado comportamento, isso concerteza resultará de uma adaptação para melhorar a capacidade de sobrevivência, o que poderá ter como base um fenómeno físico possível de ser estudado matematicamente (como por exemplo, a actividade dos corvos).

O tal ritmo próprio da natureza é também visível na forma das coisas, certos elementos naturais têm formas que podem ser reproduzidas por complexas equações matemáticas. Onde começam e acabam os países? Que dimensão podemos atribuir ao relevo de uma montanha? Provavelmente a matemática sozinha não conseguirá responder exactamente a estas questões, pois existem múltiplos factores que influenciam os fenómenos naturais (a imprevisibilidade da natureza), mas pelo menos permitir-nos-á ver uma ordem na natureza (considerando os tais factores) revelar um ritmo mais regular e compassado que a tornará ainda mais bela e mágica.


Lígia Rodrigues (11º ano)



Tudo na natureza tem Matemática. Desde a mais pequena célula que se multiplica para dar outras células até

às algas num laboratório que crescem com a aparência de fractal. Quando se estuda a quantidade de água no solo fazem-se contas para chegar a uma conclusão. Quando vamos às compras fazemos contas para saber quanto temos de pagar e quanto receberemos de troco. Tudo na vida nasce a uma certa hora, cresce até certos metros, vive segundo uma certa monotonia, desenvolve-se segundo determinadas sucessões e morre passado x tempo. Bem vistas as coisas a Matemática é *os primeiros tijolos* para a compreensão de todo o resto.

Ana Maria (11º ano)



Acho que matemática e natureza estão intimamente relacionadas. A Matemática é uma criação do homem e o homem é parte integrante da natureza.

Na minha opinião a matemática é como um instrumento criado pelo homem com o objectivo de compreender a natureza. Senão vejamos o exemplo do comportamento dos corvos — compreendemos o seu comportamento recorrendo à Matemática. A Matemática é completamente indispensável, não consigo imaginar um mundo sem ela. Num mundo em constante mudança e quando digo isto penso no mundo natural, onde nada é constante, tudo é mutável, onde nada é óbvio por mais simples que seja. Para compreender o mundo, na minha opinião, o homem teve desde sempre necessidades, talvez não só necessidades mas era-lhe indispensável criar um outro mundo, o mundo matemático para compreender o primeiro e poder viver nele. Pois como poderíamos viver num mundo que não fizesse qualquer sentido, numa confusão geral, sem termos pelo menos algumas verdades relativas onde nos apoiarmos para seguirmos a nossa caminhada?

A matemática é intrínseca ao próprio homem, pois ser-nos-ia impossível viver sem ela. Assim na minha opinião o homem criou um mundo, numa esfera superior, que visa compreender o real onde se possam atingir verdades absolutas e se pode demons-

trar, atingindo uma certa estabilidade normal indispensável. A imagem de que a matemática é um mundo onde se pode atingir um certo grau de estabilidade é porque através dela se pode compreender o mundo natural, mas a própria matemática é também ela um mundo instável, em constante mutação e que não tem apenas este papel mas adquire características próprias também elas muito complexas e inexplicáveis.

Daniela Pires (11º ano)



Não sei se haverá alguma relação entre a Natureza e a Matemática mas até pode ser que sim. Acredito que se possa relacionar porque existem muitas coisas da natureza que têm a forma de sólidos geométricos. E muitos problemas do quotidiano são resolvidos com exercícios de matemática, de resto não vejo qualquer relação entre elas.

Telma Sofia (10º ano)



Eu acho que a matemática e a natureza têm muito pouca coisa a ver além de algumas formas que algo da natureza possa ter parecido com as formas de Matemática.

António Pedro (10º ano)



A Matemática é uma natureza abstracta, logo cada um pode chegar a uma conclusão por vários caminhos.

Maria João (10º ano)



Nenhuma investigação pode ser considerada verdadeiramente ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.

Leonardo da Vinci



Portugal sem estratégia para as renováveis

A ENERGIA SOLAR TÉRMICA EM PORTUGAL E NA EUROPA

Pais	Radiação solar anual média (MJ/m ² /dia)	Total instalado até 1999 (m ²)	Total instalado em 2000 (m ²)	Estimativas para 2001 (m ²)
Alemanha	9,7	2 290 000	510 000	660 000
Áustria	10,8	1 476 000	170 000	190 000
Dinamarca	9,7	282 000	15 000	20 000
Espanha	16,3	313 000	40 000	40 000
França	10,2	296 000	7 000	11 000
Grécia	16,6	2 645 000	170 000	200 000
Itália	14,7	244 000	27 000	30 000
Portugal	16,6	219 000	*	*
Suécia	9,1	157 000	15 000	16 000

FONTE: ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DA INDÚSTRIA SOLAR * NÃO EXISTEM DADOS PARA PORTUGAL

in Público, 31 Março 2001



E agora?

O mês de Agosto e o início de Setembro foram férteis em artigos de opinião sobre a divulgação dos dados referentes às classificações dos alunos do 12º ano. Para este número da revista escolhemos o artigo de Joaquim Fidalgo com o título *Enfim "a lista". E agora?...* porque, quanto a nós, levanta um conjunto de questões às quais vale a pena reflectir, independentemente da posição que cada um tenha sobre os rankings.

Curiosamente, o artigo começa com uma imagem que muitos de nós conhecemos e utilizamos no ensino da Estatística:

A caricatura é velha e revelha, mas nem por isso deixa de nos alertar sobre os limites da estatística apressada: se eu comi um frango e tu não comeste frango nenhum, cada um de nós comeu, em média meio frango. Estatisticamente claro.

No seguimento desta ideia aponta algumas razões que podem justificar as reservas à divulgação destes dados:

Um ponto parece hoje mais claro: quem, ao longo dos tempos foi manifestando reservas à divulgação pública destes dados não o terá feito por ser contra a transparência da administração pública, mas por recear leituras apressadas e consequências perversas do tratamento meramente quantitativo e bipolar — a lógica dos *melhores* e dos *piores*, envolta numa capa de aparente objectividade (...).

Mais à frente alerta para a imagem que pode ter passado para a opinião pública face às diversas listas divulgadas pelos *media* e aos destaques dados aos *melhores* e aos *piores*:

Na cabeça de muita gente, a única coisa que terá ficado é que *a escola do meu filho é melhor que a tua ou a escola da tua terra é pior que a da minha*.

Depois de analisar a forma como as estatísticas foram realizadas, apontando outros critérios quantitativos que poderiam ter sido utilizados e que certamente originariam outras ordenações, enumera uma série de aspectos que dificilmente podem ser mensuráveis, nomeadamente através de exames nacionais:

E, esgotados todos estes *quês* de uma visão (hoje tão na moda..) apenas quantitativa, estatística, mensurável, seguem-se os *comos* e *porquês* de uma análise qualitativa, mais cuidada, que leve em conta as realidades sociais, económicas, geográficas, culturais, uma série de variáveis que ajudam a fazer justiça às escolas concretas, e que não lançam sobre esta ou aquela o precipitado estigma de *mediocre* ou *mau*.

Segundo o jornalista, é positiva a diversidade das contribuições, até como forma de inibir aproveitamentos perversos:

(...) já há escolas a dizer que, sendo assim, sabem muito bem que expectantes usar para fazer subir a sua posição em *rankings* futuros.



in *Público*, 2 de Setembro de 2001

Nós acrescentaríamos algumas interrogações às de Joaquim Fidalgo:

- O papel do Ministério da Educação poderá limitar-se à divulgação de uma base de dados sem quaisquer preocupações analíticas?
- Que repercussões podem ser esperadas dentro e fora das escolas?
- Que iniciativas devem tomar professores e escolas para promover uma avaliação contextualizada do seu trabalho?
- Que iniciativas devem ser desenvolvidas pela APM?

É importante avaliar o sistema educativo mas, na nossa opinião, ela não se pode reduzir a um qualquer tratamento estatístico. Corremos o risco de ficarmos todos razoavelmente confortáveis (estatisticamente) sendo que uns estão com a cabeça no frigorífico e outros com os pés dentro do forno.

Adelina Precatado
Esc. Sec. de Camões

António Bernardes
Esc. Sec. de Gil Vicente

Bento de Jesus Caraça A Matemática da Natureza

João Caraça

Muito poucos universitários e cientistas portugueses terão dado na primeira metade do século XX um contributo tão decisivo e tão apaixonado à unidade do saber científico e à sua subsunção no campo da cultura como Bento de Jesus Caraça.

como "um grande capítulo da vida humana social".

Igualmente, nesse maravilhoso Prefácio de escassa página e meia — mas que tanto diz, a relação da matemática com as outras ciências aparece liminarmente equacionada:

A noção de que as disciplinas científicas, e a matemática em particular, se articulam e interagem entre si, provocando-se mutuamente transformações radicais (ao assimilarem ideias e modelos originados noutros campos) e fecundando novas zonas até aí desconhecidas, perpassa toda a sua obra de professor e de lutador pela ciência e pela cultura. E o seu apelo constante ao uso do conhecimento sobre a história da ciência é sem dúvida o melhor método que encontrou para o fazer sentir e para o transmitir.

Desde logo, no prefácio aos *Conceitos Fundamentais da Matemática*, nos adverte que a atitude que toma em face da ciência é a de quem "procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada" vendo "toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da ciência".

Bento de Jesus Caraça entendia a ciência como "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação". Claramente,

A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.

Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de qualquer outro ramo da ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre.

Mesmo quanto aos seus problemas próprios, raramente acontece, se eles são de facto daqueles grandes problemas que põem em jogo a sua essência e o seu desenvolvimento, que eles não interessem também, e profundamente, a corrente geral das ideias.

E qual é essa madre, da qual Bento de Jesus Caraça vê entroncar os fundamentos das disciplinas científicas? Inegavelmente, a natureza.

Bento de Jesus Caraça entendia a ciência como "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação".



A Fogueira — fotografia da autoria de Bento de Jesus Caraça (1936)

É a natureza, ao meio exterior às sociedades humanas, que ele vai buscar as origens e as motivações para a sobrevivência e para a transformação constante de que as sociedades são palco — o aparecimento dos problemas da contagem, da medida, do movimento, da mudança social, da incerteza, da complexidade.

Num laborioso processo evolutivo, o homem foi "tornando a sua vida cada vez mais segura e isso só foi possível por virtude do seu conhecimento cada vez maior do mundo em que vive.

A experiência mostrou-lhe então que só um caminho havia para assegurar com êxito a sua conservação — o conhecer quanto mais perfeitamente melhor", disse Bento de Jesus Caraça numa conferência realizada na Universidade Popular de Setúbal, em Março de 1931.

E continua, nesse texto pleno de maturidade, que prenuncia o ciclo

de grandes conferências que proferiu durante as alturas "inquietas e fecundas" dos anos 1930: "Mas nem só estas necessidades de ordem material impulsionaram sempre o homem; desde que a sua existência se encontrou suficientemente assegurada para lhe não ser necessário dedicar-lhe todos os seus momentos de atenção, o homem virou-se para a contemplação da natureza e dessa contemplação nasceu no seu espírito o sentimento do belo, origem de todas as suas manifestações artísticas."

Como se vê, uma natureza concebida como uma madre fecunda: dos saberes úteis à economia, às ciências que interpretam a verdade experimental; do sentimento do belo, às artes que suscitam a experiencição estética.

E muitos, muitos outros exemplos encontramos ao longo da sua obra que nos mostram a profunda convicção que nutria pelas capacidades



Bento de Jesus Caraça com João Caraça ao colo (1946)

da conjugação harmoniosa do génio humano com a natureza — gostaria de mencionar, a este respeito, a prodigiosa síntese que, no final do seu luminoso *Galileo Galilei*, nos fornece sobre as origens do pensamento científico moderno.

De facto, a Bento de Jesus Caraça adaptam-se como uma luva as frases que escreveu sobre Galileo: "teve tudo contra si — uma época mais turva de transformação, uma estratificação social menos definida, uma enorme dose de rotina e incompreensão contra que lutar"... mas "o homem-em-si não existe. Só tem realidade o homem em acção com o meio".

Por estes motivos, pelo seu amor pela ciência, pelo conhecimento e pela cultura, pela sua crença profunda no aperfeiçoamento do ser humano, pela sua devoção ao desenvolvimento do espírito de solidariedade, pela sua batalha sem tréguas pela liberdade e pela educação para todos, ele foi, verdadeiramente, "o herói dum grande drama que nos entenece" e que, ao mesmo tempo, nos garante que é possível construir um século XXI. Basta não deixar de o querer.

João Caraça
Fundação Calouste Gulbenkian
Instituto Superior
de Economia e Gestão

A Matemática e a Natureza

A Forma e o Ritmo

Mercês Ramos
Sousa Ramos



Figura 1. Stonehenge

Os ritmos da natureza só começam a ser estudados, descritos e explicados quando à observação rigorosa se alia o rigor da descrição matemática, da medida e da experimentação.

Em resumo

Na *Matemática* o homem busca a forma, a ideia e joga com ela; no estudo da *Natureza* o homem sente o seu ritmo e procura apropriar-se da sua música, da sua dinâmica, do seu caos.

Assim, vemos surgir a Geometria com os Gregos e a Dinâmica com Galileu e Newton. A busca da forma perfeita, do movimento regular e estável tornam-se o paradigma da Ciência.

Os conjuntos de Cantor (fractal) e os pontos homoclínicos (caos) de Poincaré, no final do século XIX levam à mudança de paradigma. Durante todo o século XX prepara-se essa mudança, mas só no final do século a Geometria Fractal e a Teoria do Caos se impõem como áreas científicas; será preciso percorrer o novo século para que a busca da forma fractal e do comportamento caótico se tornem dominantes na actividade científica.

Quanto à síntese entre a forma e o ritmo, entre o fractal e o caos, entre a Matemática e a Natureza só se tornará possível pela força das tecno-

logias. Assim, o caminho tecnológico na direcção do digital, do DNA e da dominação da informática leva-nos a perceber a Matemática e a Natureza através do computador, processamentos ultra-rápidos de sucessões de 0 e 1 ou de A, C, G e T que modelam a realidade em fluxos de palavras binárias ou de 4 letras e impõem-nos uma Matemática e Natureza discreta e finita.

Em mais detalhe (mas realçando apenas aspectos mais relevantes)

É da observação da Natureza, mas sobretudo das necessidades sentidas quer para controlar os fenómenos naturais quer para prover à organização social cada vez mais complexa, que vão emergindo as formas (ou objectos) matemáticos.

As primeiras concepções de número e forma datam de tempos remotos como o começo do Paleolítico. A representação de "objectos" foi talvez a primeira actividade humana de natureza matemática. As pinturas em cavernas, com mais de 15 000 anos, revelam uma notável compreensão da forma, isto é, uma compreensão da descrição bidimensional dos objectos no espaço. A ideia de número, uma das ideias mais abstractas produzidas pelo pensamento humano, foi elaborado lentamente, tendo tido uma origem qualitativa (começa com a distinção entre um, dois e muitos).

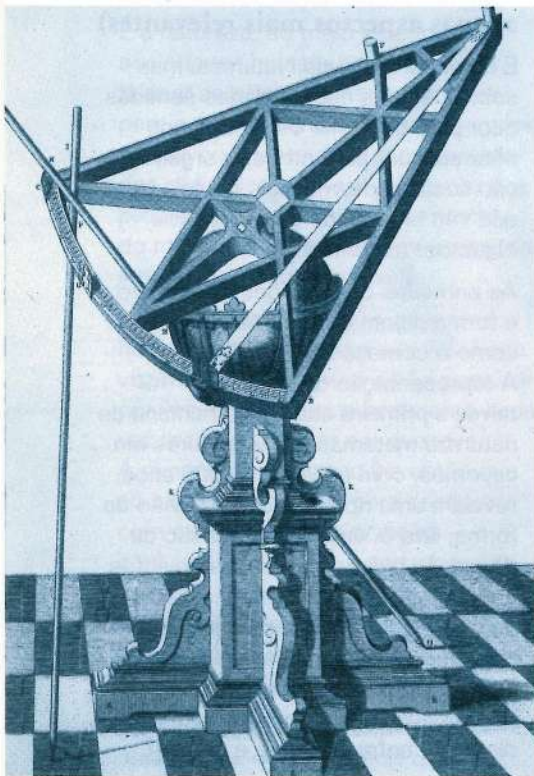


Figura 2. Pitágoras

Enquanto a ideia de número evolui tornando-se uma quantidade, desenvolve-se também a simbologia, permitindo a representação e operações entre os números. Quando passou de nómada para agricultor, o Homem, teve necessidade de dividir terrenos e construir casas. É sobretudo nas comunidades neolíticas, que se fixam ao longo dos grandes rios da África e Ásia, nas regiões tropicais ou próximo delas que as ideias matemáticas mais se desenvolvem. As terras situadas ao longo desses rios produziam colheitas abundantes desde que as cheias fossem devidamente controladas e os pântanos drenados. No decurso dos séculos estes problemas foram sendo resolvidos pela construção de diques, canais e represas. A irrigação exigiu a coordenação de actividades entre localidades muito distantes. A medida do tempo passou a ter enorme importância e os ritmos do movimento do Sol e da Lua, associados às estações do ano forneceram o fundamento para essa medida; para a construção de calendários e para fazer previsões permitindo-lhe proceder às sementeiras de modo mais seguro. A melhoria da agricultura conduziu a uma produção excedentária, melhorando os padrões de vida das populações e ao aparecimento de uma aristocracia urbana. A administração das obras era feita por um grupo conhecedor do ciclo das estações do ano, do movimento dos astros, da arte de dividir os campos, do armazenamento de alimentos e do estabelecimento de impostos. A ênfase inicial é dada, naturalmente, à aritmética prática e à medição. Porém, os detentores do conhecimento, adquirido durante séculos, não têm como tarefa apenas aplicar mas também ensinar os seus segredos. Isso leva ao desenvolvimento da tendência para a abstracção: gradualmente a aritmética transforma-se em álgebra, não só porque possibilita melhores cálculos práticos mas também como resultado do conhecimento cultivado e desenvolvido nas escolas dos escribas; a medição dá origem ao começo (apenas começo) da geo-

metria teórica. A matemática mesopotâmica atinge um desenvolvimento relativamente elevado. Os textos mais antigos (3º milénio) revelam uma grande capacidade para calcular, contém tábuas de multiplicação e o sistema sexagesimal sobrepõe-se ao sistema decimal. Mas a característica mais relevante é a de que, no sistema de numeração, o mesmo símbolo indica o seu valor pela posição, tal como no actual, e parece ter resultado de problemas da administração, nomeadamente os relacionados com a distribuição de gado e sementes e com as operações aritméticas resultantes dessas transacções. Ulteriormente apareceu um símbolo para representar o zero. A divisão actual da hora em 60 minutos e 3600 segundos e do círculo em 360 graus, cada grau em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos é herança dos sumérios. Os textos datados de 1750 a.C. mostram que já havia a técnica para manipular as equações quadráticas e lineares com duas variáveis e mesmo problemas que envolviam equações cúbicas e biquadráticas. Tal como no Egipto a geometria proveio da fundamentação de problemas práticos relacionados com a medição. Na geometria babilónica existem fórmulas para áreas de figuras simples e para volumes de sólidos simples e é conhecido com toda a generalidade a relação numérica entre lados de triângulos rectângulos (teorema de Pitágoras). Contudo, a característica principal desta geometria, como a de outras civilizações, é o seu suporte algébrico. Os textos deste último período estão fortemente influenciados pela astronomia, a qual atinge um considerável desenvolvimento. A matemática tornou-se mais perfeita na sua técnica de cálculo e procurou resolver problemas por meio de equações que requeriam uma certa habilidade numérica. As operações numéricas complicadas já não estão directamente relacionadas com problemas dos impostos ou de medições mas com problemas de astronomia ou com o puro prazer do cálculo.

Figura 3. Sextante utilizado por Tycho Brahe



Apesar das diferenças entre as matemáticas egípcia, mesopotâmica, chinesa e indiana, na generalidade a sua natureza aritmético — algébrica é idêntica, não parecendo ter-se emancipado da influência milenar dos problemas técnicos e administrativos, para os quais fora inventada e não se encontram tentativas daquilo que denominamos por demonstração. Quer a matemática, quer a astronomia constituem-se como "ciências" muito ligadas a fins utilitários.

É na Grécia antiga que o conhecimento científico sofreu um outro impulso: procurou-se uma compreensão racional do mundo natural. Os primeiros estudos de matemática na Grécia tinham como objectivo principal compreender o lugar do homem no universo utilizando um esquema racional. O conhecimento da natureza é uma parte do conhecimento geral e consoante a escola assim um aspecto ou outro da filosofia da natureza é realçado. A matemática ajudava a ordenar as ideias de forma lógica, a encontrar princípios fundamentais. É claro que ela não surge do nada, é herdeira das antigas civilizações orientais devido ao contacto entre os povos que habitaram a Grécia e essas civilizações; Tales de Mileto, considerado o pai da matemática grega, é um mercador. É na Grécia que surge pela primeira vez um grupo de homens (os sofistas) que abordam problemas de

natureza matemática como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e desenvolvem uma matemática que visa a compreensão e não a utilidade. Além dos sofistas que davam ênfase à realidade da mudança (em especial os atomistas como Leucipo e Demócrito), havia a escola pitagórica fundada pelo mítico Pitágoras. Esta escola procura os elementos imutáveis na natureza e na sociedade. Ao procurarem as leis eternas do universo estudam a geometria, a aritmética, a astronomia e a música. Obtém alguns resultados interessantes como os números "triangulares" (representam uma ligação entre a geometria e a aritmética). É de salientar que, o conhecimento do teorema de Pitágoras na Babilónia, resulta de medições, enquanto na Grécia foi concebido como um teorema geométrico abstracto; a demonstração geral, provavelmente, foi feita por Pitágoras. O resultado mais importante que lhe é atribuído é o dos números irracionais. Ao estudar a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, descobriu que não podia ser dada por números inteiros ou fraccionários — incomensurabilidade de segmentos de recta. Os *Elementos* de Euclides (~300 a.C.) demonstram a existência de um sistema ordenado da geometria no plano.

Embora com os gregos a matemática se desligue totalmente dos aspectos utilitários e da medição, a observação,

além da reflexão, continua a interessá-los levando-os a interrogar-se sobre o universo em que vivem. Certamente foram as observações aliadas à reflexão que conduziram Pitágoras a considerar a Terra esférica, contrariamente a concepções anteriores em que esta era vista como plana. Com base em observações cuidadosas e nos conhecimentos de geometria disponíveis Eratóstenes (275–193 a.C.) calcula o perímetro da Terra e Hiparco (séc. II a.C.) durante um eclipse solar — total em Helesponto e 80% em Alexandria, conhecendo as latitudes das duas cidades, por considerações geométricas determinou a distância da Terra à Lua e, posteriormente, a distância da Lua ao Sol.

Assim, os primeiros desenvolvimentos matemáticos são relativos à forma. A representação do ritmo mais evidente na Natureza, o definido pelo movimento dos astros fez desenvolver a geometria plana e esférica e principalmente a trigonometria que, de início, não se distingue da astronomia (essa distinção é feita primeiro por Nasir, 1201–74, e posteriormente por Regiomontano em 1464). Contudo, mesmo as descrições dos ritmos são enquadradas na das formas: a descrição do movimento aparente dos astros é associada ao círculo e a composições de círculos; a dos movimentos dos corpos terrestres, incluída na Mecânica, as primeiras de que

Figura 4. *Mysterium Cosmographicum* de Kepler

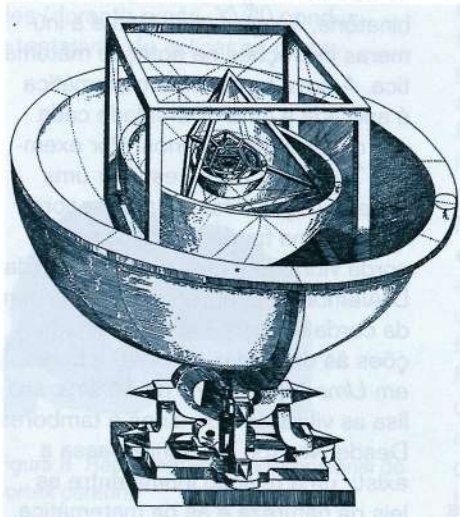


Figura 5. Agrupamentos de estrelas segundo Thomas Wright (1711–1786)

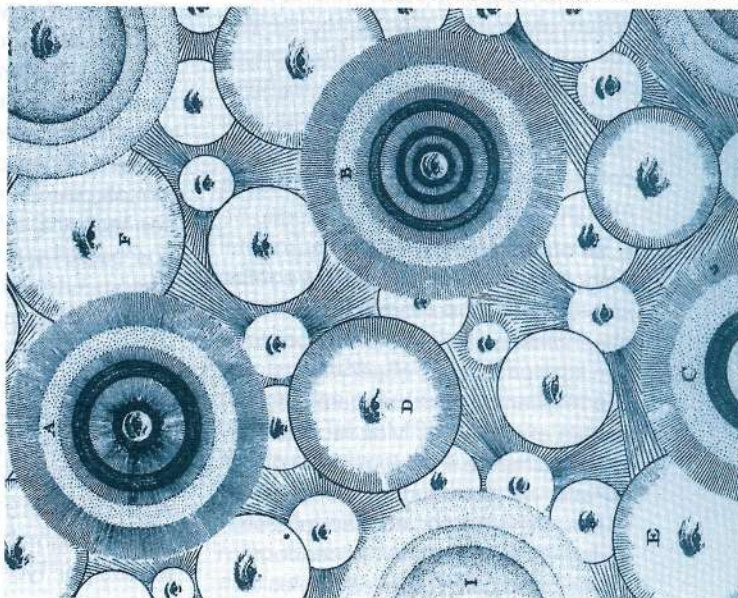




Figura 6. *Homem olhando o infinito* (Camille Flammarion, séc. XIX)

há registos, ligam-se ao estudo das condições de equilíbrio da alavanca — quando a alavanca roda, a “velocidade do peso” é proporcional ao comprimento do braço que o suporta e as potências opostas cancelam-se; a alavanca é associada a uma das propriedades mágicas do círculo e muitos dos movimentos na mecânica são relacionados com propriedades da alavanca.

Apesar de todo o desenvolvimento da geometria grega, é uma geometria no plano. Mas a Terra e a esfera celeste são esféricas, sobretudo os árabes desenvolvem uma trigonometria esférica e surgem geometrias em espaços não planos. Mas quer as geometrias no plano, quer em superfícies curvas quer em espaços superiores a dois descrevem formas regulares, é a geometria do regular.

E, as outras ciências? Claro que os gregos dados à contemplação e reflexão, também observam a Natureza, observam-na mesmo muito e procuram ligar entre si as observações que realizam, fazem comparações e tentam explicações. Mas recorrem essencialmente à analogia, acreditam no valor do testemunho, procedem essencialmente por indução, não sentindo necessidade de verificar com novos factos a lei geral estabelecida.

Na Física de Aristóteles, expoente da física grega, há essencialmente descrição, julgamento, avaliação vaga deste ou daquele aspecto mas não há medição — os gregos observam mas não experimentam. A matemática tão elegantemente desenvolvida não é ligada directamente às observações do mundo natural, além da astronomia. Arquimedes deve ter sido a excepção ao interessar-se quer pela matemática quer por aplicações práticas de mecânica. Um dos contributos mais importantes está relacionado com teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos, situando-se num campo que hoje denominamos por cálculo integral, de importância fundamental em desenvolvimentos posteriores da Física e Engenharia. Para além de muitos outros contributos citamos o seu teorema sobre o peso aparente dos corpos quando mergulhados num líquido — teorema de Arquimedes.

Os ritmos da natureza só começam a ser estudados, descritos e explicados quando à observação rigorosa se alia o rigor da descrição matemática, da medida e da experimentação. Esse impulso emerge na astronomia com Kepler (1571–1630) baseado nos registos rigorosos de medições realizadas por Tycho Brahe e por ele

próprio, enuncia as três leis para o movimento dos planetas. No entanto, é Galileu (1564–1642) quem perspectiva a relação intrínseca entre a física e a matemática: a matemática passa a ser a expressão simbolizada da realidade que a física pretende descrever. Poder-se-á perguntar, foi Galileu o principal iniciador da medida? Vimos que, no início das civilizações, a medida deu origem à geometria e contribuiu para o conceito de número; nunca deixou de ser utilizada para fins práticos e do séc. XIII a XVI é utilizada na actividade técnica na construção de inúmeros engenhos. O que Galileu fez foi recolocar a importância da medida das grandezas para encontrar relações entre elas através da matemática. Apesar da perspectiva revolucionária de Galileu ao delinear as características do que hoje denominamos “ciência”, a formulação matemática da sua física é pobre, não dispunha da “ferramenta” adequada. Essa ferramenta (método das fluxões) é inventada por Newton (1642–1727) ao procurar descrever os ritmos observados na Natureza, constituindo hoje o cálculo diferencial e integral. Ao fazê-lo não só impulsiona a física de um modo nunca antes conseguido como fez nascer um novo ramo da matemática, a análise matemática. Do mesmo modo, Leibniz (1646-1716) ao procurar compreender a unidade essencial do universo, busca um método geral através de uma linguagem universal para a mudança e o movimento, sendo levado a criações matemáticas: ao cálculo integral e diferencial, à combinatória, à lógica simbólica e a inúmeras inovações na notação matemática. A nova ferramenta matemática é aplicada a uma diversidade cada vez maior de fenómenos, Por exemplo, Taylor (1713) ao estudar uma dada equação diferencial descobre que a forma fundamental de uma corda vibrante é uma curva sinusoidal, D’Alembert desenvolve a análise geral da corda vibrante (introduz as equações às derivadas parciais) e Euler, em *Uma Nova Teoria da Música*, analisa as vibrações de sinos e tambores. Desde Newton e Leibniz passa a existir uma relação íntima entre as leis da natureza e as da matemática. Assim, na física são utilizados conceitos que mais tarde a matemática tor-

ará precisos, é o caso dos conceitos velocidade, força aceleração,, os quais contém implícito, o conceito de vector, no entanto, o cálculo vectorial só se desenvolverá na segunda metade do séc. XIX. É de notar que muitos cientistas (entre outros, Poisson, Fourier e Cauchy) são conduzidos a produções poderosas na matemática movidos pelo seu interesse profundo por questões da mecânica e da física. Por outro lado, há desenvolvimentos autónomos da matemática para os quais não era previsível a sua aplicação na física ou noutras ciências. Estão nesse caso a teoria dos grupos, as geometrias não euclidianas, a teoria das probabilidades e a teoria dos conjuntos.

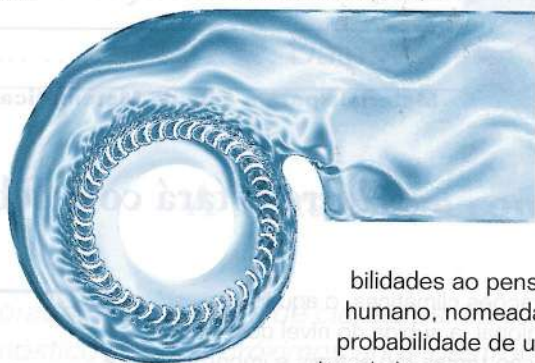
A relatividade de Einstein veio mostrar que o desenvolvimento das geometrias não euclidianas tinham sentido no mundo físico. A teoria dos grupos desenvolvida por Galois, Lie e Klein, e a análise em variedades por Weyl e Cartan desempenham um papel importante na descrição geométrica da física quântica.

A teoria das probabilidades surgiu devido a questões de seguros e desenvolveu-se para os jogos de azar (Fermat e Pascal séc. XVII). O desenvolvimento da teoria das probabilidades (durante o séc. XVIII) conduz a tentativas de aplicar as proba-



Figura 8. Representação tridimensional do córtex cerebral

Figura 7. Representação computacional da dinâmica de um gás



bilidades ao pensamento humano, nomeadamente a probabilidade de um tribunal chegar a veredictos verdadeiros (séc. XIX). Mas a teoria das probabilidades, sobretudo o seu ramo mais prático, a estatística, foi aplicada, com bastante extensão, em diversas ciências. Nas ciências sociais (recém emergentes) foi aplicada a noção de *distribuição normal* a inúmeras situações, desde as medidas do corpo humano, ao crime, casamento, suicídios e Quetelet em *Mecânica Social* (um ensaio sobre física social, 1835) introduz o conceito de homem médio; em Biologia, Galton (1822-1911), aplica a curva de distribuição dos erros quetelet-gaussiana, especialmente na genética, onde recolhe numerosos dados e introduz os conceitos de correlação e de regressão, mas também na psicologia devido à ideia de que tudo é quantificável — deu origem à criação do primeiro laboratório de psicologia experimental em Leipzig (1879). Pearson, desenvolve os fundamentos matemáticos para a estatística do séc. XX especialmente a aplicada a questões biológicas. É curioso que os físicos considerem os sucessos dos processos probabilísticos nas ciências sociais para a aplicação a processos físicos, emergindo por vezes uma analogia vaga entre indivíduos de uma população e moléculas de um gás. Na mão de físicos como Boltzmann e Maxwell, a estatística desabrocha e a teoria cinética dos gases assume um papel importante na evolução da física, conduzindo ao aparecimento da física estatística a qual se aplica em domínios como: a termodinâmica, a mecânica quântica, a astronomia e outros. Markov, na continuação dos trabalhos desenvolvidos pela escola russa, para o estudo de funções com variáveis aleatórias introduz o que hoje

denominamos "cadeias de Markov" (de 1886 a 1922) que se aplicam à física estatística, à genética e à economia.

Assim, no final do séc. XIX e durante o séc. XX há duas modelações matemáticas possíveis para os fenómenos observáveis (directa ou indirectamente). Um, o mais antigo resultava da aplicação das equações diferenciais. Teoricamente permitia a determinação com rigor da evolução de qualquer sistema, em particular do universo, na prática só aplicável a problemas relativamente simples. O outro, mais recente, resultava da análise estatística de quantidades médias características dos sistemas de um grande número de constituintes, por isso traduzia uma representação grosseira da evolução dos sistemas complexos — eram as leis dos grandes números.

Não só a ciência, também a indústria, em franco progresso a partir do séc. XVIII, se alia irreversível e reciprocamente à matemática — as técnicas vão dando lugar às tecnologias.

Mas, tal como as formas, todos os ritmos da natureza estudados (e os dos artefactos criados pelo homem a partir das leis da natureza) são do tipo regular (periódico) ou possível de tal ser considerado como aproximação. A mudança começa a preparar-se com Cantor (1883) ao introduzir conjuntos com a cardinalidade do contínuo, mas totalmente desconexos. São estes conjuntos que permitem, pela primeira vez descrever formas não regulares. Com Peano (1890) e Van Koch (1904) surgem as curvas contínuas designadas por fractais depois de Mandelbrot (1955). Em simultâneo, Poincaré (1882), tentando resolver um problema antigo (é o sistema solar estável?), mostra que é irresolúvel no quadro do cálculo diferencial e integral, devido ao aparecimento de pontos homoclínicos (intersecção das variedades estáveis e instáveis de pontos selas) levando ao aparecimento de soluções — mais tarde designadas por atractores estranhos (Ruelle e Taken, 1971) — que traduzem a existência de comportamento caótico. Embora Poincaré não resolvesse o problema, desenvolveu um ramo da matemática a que chamou *analisi situs*, mais tarde denominada

topologia, e introduziu técnicas novas no estudo da dinâmica — dinâmica topológica, permitindo o estudo dos sistemas dinâmicos complexos. A associação destas técnicas à codificação simbólica conduz à dinâmica simbólica começando a tornar possível o estudo de sistemas de que à partida não se conhecem as equações diferenciais como é o caso de sistemas meteorológicos, biológicos, económicos, psicológicos, sociológicos ou outros. É de salientar que durante o séc. XX houve mais publicações de matemática e desenvolveram-se mais áreas do que em toda a história anterior. É oportuno interrogarmo-nos se essa produção imensa se traduziu numa maior eficácia no conhecimento e compreensão da Natureza? Apesar da quantidade de conhecimento produzido acerca do universo em que vive, o homem actual só compreende e descreve uma pequena parte dos fenómenos que nela se produzem, os regulares. E, do mesmo modo que na antiguidade o homem procurou compreender a regularidade dos fenómenos naturais, também agora está perante o enorme desafio de compreender em profundidade e dominar fenómenos como: o clima, a codificação do DNA, os mercados, as interacções sociais, a aprendizagem, o processamento da informação no cérebro,.... Isto é, fenómenos cuja forma ou ritmo já não são mais da classe do regular. É nossa opinião que, no séc. XXI, os fractais e o caos definirão o paradigma dominante da actividade do matemático no seu desejo de compreender as formas e os ritmos da Natureza.

Mercês Ramos
ESE de Lisboa

Sousa Ramos
Instituto Superior Técnico



Não existe nenhum ramo da matemática, por mais abstracto que seja, que não possa algum dia ser aplicado a fenómenos do mundo real

Nikolay Lobachevsky



Materiais para a aula de Matemática

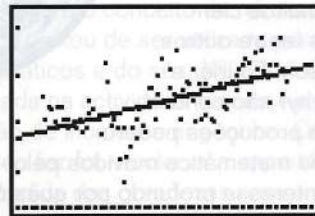
A Terra estará com febre?

As alterações climáticas, o aquecimento global, a subida do nível do mar, ... são temas tão actuais e importantes, que mobilizam os jovens, e que por outro lado lhes permitem apreciar a ligação da Matemática à realidade e perceber a sua importância no mundo actual.

Esta tarefa foi pensada de modo que a primeira página se destine a alunos do 2º ou 3º ciclos enquanto a actividade na totalidade (1ª e 2ª páginas) se dirige a alunos do ensino secundário.

De facto os dados das temperaturas médias em Lisboa não apresentam uma tendência muito diferente do que se passa com as temperaturas globais:

Esta actividade tanto pode ser uma simples tarefa para a sala de aula como um ponto de partida para um projecto mais prolongado ou até para a Área de Projecto.



Há alguns locais na Internet onde é possível encontrar dados relativos ao clima, destacamos o do Instituto de Meteorologia de Portugal — <http://www.meteo.pt>, um local na Nasa de onde tirámos os dados usados e onde é possível encontrar muitos outros — http://www.giss.nasa.gov/data/update/csci/world_and_us_maps/index.html e um local que permite a quem estiver interessado, participar num projecto colectivo de estudo do clima, em casa, a partir do seu computador pessoal — <http://www.climate-dynamics.rl.ac.uk/>.

Adelina Precatado

Escola.....
Ano/Turma..... Data..... Aluno(a).....

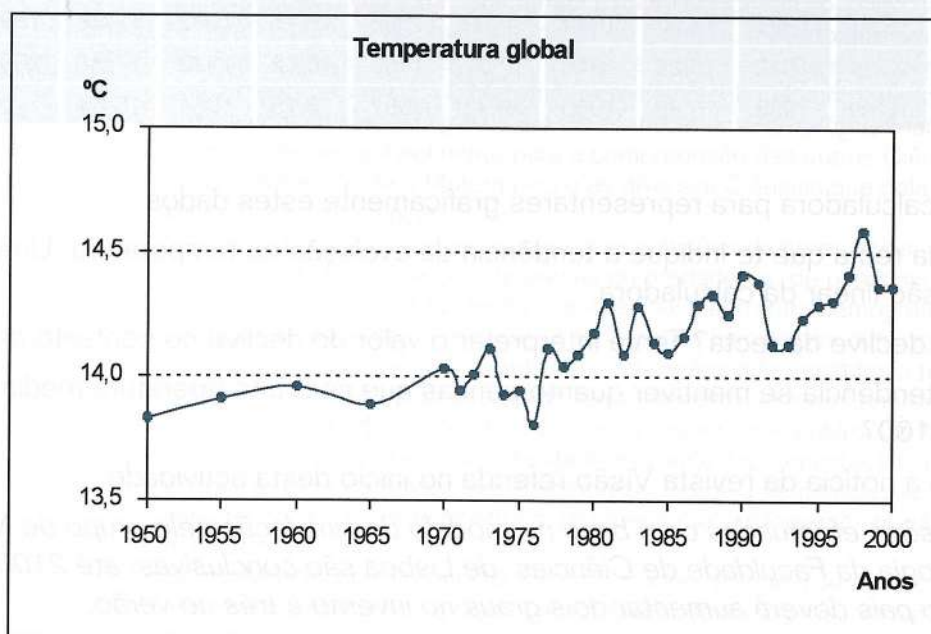
A Terra estará com febre?

O relatório elaborado por centenas de cientistas, de todo o mundo, é bem claro: o clima está a mudar e o prognóstico para os próximos anos destrói qualquer sinal de optimismo. Aumentos de temperatura que podem ir até aos seis graus e subidas do nível do mar de um metro. Tempestades secas e uma acentuação dos fenómenos extremos são também previsões climáticas para os tempos que se aproximam...

revista Visão, Maio de 2001

De facto há muito que os cientistas têm vindo a alertar para o aquecimento global do nosso planeta e para as consequências que daí resultam.

O gráfico traduz a temperatura média anual à superfície da terra no período de 1950 a 2000.



1. Analisa o gráfico e descreve a evolução da temperatura ao longo dos anos. Tem aumentado ou diminuído? Em que ano foi mais alta? Notas alguma tendência?
2. Se se mantiver esta tendência o que te parece que irá acontecer nos próximos anos? Qual pensas que será a temperatura média global em 2005? E em 2100?
3. Que razões estarão na origem do aquecimento da Terra?

4. O que se passará em Portugal? A temperatura também estará a aumentar?
5. A tabela apresenta dados relativos às temperaturas médias em Lisboa no período de 1900 a 2000.

Ano	T(°C)	Ano	T(°C)	Ano	T(°C)	Ano	T(°C)	Ano	T(°C)	Ano	T(°C)
1900	16,56	1917	15,83	1934	14,78	1951	16,34	1968	16,39	1985	17,29
1901	16,07	1918	15,92	1935	15,30	1952	16,74	1969	16,10	1986	16,87
1902	15,80	1919	16,47	1936	15,51	1953	17,12	1970	16,73	1987	17,48
1903	16,37	1920	16,22	1937	15,88	1954	16,58	1971	16,05	1988	17,16
1904	16,31	1921	16,31	1938	16,07	1955	17,51	1972	15,86	1989	17,51
1905	16,02	1922	16,11	1939	15,73	1956	16,12	1973	16,80	1990	17,75
1906	16,35	1923	16,07	1940	16,30	1957	16,53	1974	16,32	1991	17,07
1907	15,98	1924	15,76	1941	15,96	1958	16,66	1975	16,51	1992	16,94
1908	16,36	1925	15,76	1942	15,86	1959	16,88	1976	16,26	1993	16,41
1909	16,12	1926	17,23	1943	16,74	1960	16,81	1977	16,50	1994	17,21
1910	16,09	1927	16,09	1944	16,39	1961	17,12	1978	16,86	1995	17,68
1911	15,88	1928	15,97	1945	16,74	1962	16,50	1979	16,66	1996	17,21
1912	15,97	1929	16,16	1946	16,12	1963	16,01	1980	16,99	1997	17,79
1913	15,93	1930	16,12	1947	16,60	1964	16,78	1981	17,13	1998	17,15
1914	15,91	1931	15,90	1948	16,99	1965	16,11	1982	17,22	1999	16,61
1915	16,04	1932	15,26	1949	17,31	1966	16,82	1983	17,31	2000	16,88
1916	16,09	1933	15,88	1950	16,43	1967	16,15	1984	16,63		

6. Utiliza a calculadora para representares graficamente estes dados.
7. Traça uma recta que te indique a tendência da evolução da temperatura. Uma forma é usares a regressão linear da calculadora.
8. Qual é o declive da recta? Tenta interpretar o valor do declive no contexto da situação.
9. Se esta tendência se mantiver quanto pensas que será a temperatura média em Lisboa no ano 2100?
10. Segundo a notícia da revista Visão referida no início desta actividade:

As previsões efectuadas com base no modelo de simulação pelo grupo de Meteorologia e Climatologia da Faculdade de Ciências de Lisboa são conclusivas: até 2100 a temperatura média do país deverá aumentar dois graus no inverno e três no verão.

Compara estas previsões com as conclusões a que chegaste, para Lisboa, a partir do teu estudo.



A Matemática e a Vida

Carlos Braumann



Introdução

O Homem é um voraz perguntador, a sede do conhecimento faz parte da sua natureza. Essa curiosidade produz conhecimentos que podem ser aplicados em proveito próprio. Mas o inverso também é verdadeiro, a necessidade de aplicação leva à procura do indispensável conhecimento. Este círculo virtuoso ajuda a compreender como esta característica foi seleccionada ao longo da evolução (natural) e como o sucesso e a marca do Homem, mais do que em qualquer outra espécie, estão indissociavelmente ligados a esse espírito inquiridor e à inteligência que lhe está associada. A Matemática evoluiu (culturalmente) de forma semelhante, alimentada pela sede de conhecimento da própria Matemática e pela utilidade desse conhecimento para a compreensão das outras Ciências. Há uma clara simbiose entre a Matemática e as diversas Ciências que dela fazem uso. A Biologia não é excepção.

Desde como crescem e se extinguem populações de seres vivos, interagindo entre si e com outras populações de presas ou predadores, de parasitas ou simbiotes, como se propaga uma epidemia, como evolui a estrutura demográfica e genética de uma população, como decorrem os fenómenos fisiológicos num organismo, como se desenvolve um ser vivo complexo com órgãos diferenciados a partir de uma única célula inicial até ao estudo do funcionamento de redes neuronais ou mais ambiciosamente de um cérebro, tudo isso requer hoje a utilização de modelos e métodos matemáticos. Como também a própria experimentação científica e a pesquisa sobre os fenómenos da natureza, desde a sequenciação do ADN à caracterização de um ecossistema, requerem metodologias matemáticas e estatísticas.

Sem a Matemática, o conhecimento do mundo biológico seria hoje muito limitado e importantes aplicações desse conhecimento, desde a preservação e conservação de espécies e ecossistemas, à exploração racional dos recursos naturais, à organização dos sistemas escolares e de segurança social (tendo em conta a evolução demográfica das populações humanas), à prevenção e combate a doenças e a epidemias, estariam fora do nosso alcance.

Reciprocamente, a Biologia tem sido o impulso motivador do desenvolvimento de vários métodos e teorias matemáticas. Considero que é útil que quem estuda ou ensina Matemática conheça, para além dos tradicionais exemplos de aplicação em Física ou em Economia, um pouco das aplicações biológicas da Matemática, tanto mais que estas tiveram um extraordinário desenvolvimento no século recentemente terminado e tê-lo-ão ainda mais no que ora se iniciou, com proveito para a Biologia e para a Matemática e outras Ciências e com utilidade para a melhoria da qualidade de vida.

Num pequeno artigo como este não seria obviamente possível senão falar de algumas das aplicações mais simples. Para o leitor interessado, a pequena

Há uma clara
simbiose entre a
Matemática
e as diversas
Ciências que dela
fazem uso.
A Biologia não é
excepção

4. O que se passará em
5. A tabela apresenta dados a 2000.

bibliografia apresentada será um ponto de partida para a exploração deste vasto campo de aplicação da Matemática, hoje objecto de uma imensa bibliografia e muito activo em termos de investigação.

Crescimento populacional

O exemplo mais simples seria o de uma população de seres vivos crescendo sem limitações alimentares ou territoriais num ambiente constante e sem migrações. Seja $N(t)$ o tamanho da população no instante t . O tamanho pode ser medido pelo número de indivíduos, pela biomassa ou pela densidade da população, conforme seja mais conveniente.

Suponhamos que a reprodução pode ocorrer continuamente no tempo. Cada indivíduo, num pequeno intervalo de tempo Δt , tem uma prole média de aproximadamente $f\Delta t$ indivíduos, onde f é a taxa de natalidade (número médio de filhos de um indivíduo por unidade de tempo). Há que ter cuidado nas contas quando a reprodução é sexual, pois, por cada descendente que um indivíduo tenha, só metade lhe deve ser atribuída, devendo a outra metade ser atribuída ao outro progenitor. Naquele intervalo, nascerão em média aproximadamente $f\Delta tN(t)$ indivíduos.

No mesmo intervalo de tempo, a probabilidade de um indivíduo morrer será aproximadamente $m\Delta t$, onde m é a taxa de mortalidade, pelo que morrerão em média aproximadamente $m\Delta tN(t)$ indivíduos. A população no instante $t + \Delta t$, $N(t + \Delta t)$, será então aproximadamente

$$N(t) + f\Delta tN(t) - m\Delta tN(t) = ((1+r)\Delta t)N(t),$$

com $r = f - m$ (taxa de crescimento), isto é, obtém-se do valor no instante t multiplicando-o por uma constante. É a tradução matemática do ditame "Crescei e multiplicai-vos". Se $r > 0$, a população cresce, se $r < 0$, a população decresce e, se $r = 0$, a população mantém-se.

A taxa média de crescimento da população no intervalo $]t, t + \Delta t[$, $(N(t + \Delta t) - N(t))/\Delta t$ será aproximadamente $rN(t)$. Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a derivada $dN(t)/dt = rN(t)$, que diz que a taxa instantânea de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população, sendo r a constante de proporcionalidade. Pode obter-se a solução desta equação diferencial. Usando a nova variável $Y(t) = \ln(N(t)/N(0))$ e as regras de derivação da função composta, vemos que $dY(t)/dt = (dN(t)/dt)/N(t) = r$, isto é, a constante r é a taxa instantânea de crescimento *per capita* (taxa instantânea de crescimento da população dividida pelo tamanho da população). Daqui resulta que $Y(t) = rt + \text{constante}$. Como $Y(0) = 0$, a constante é nula, pelo que $Y(t) = rt$, donde se conclui que o crescimento da população é exponencial ou malthusiano $N(t) = N(0)e^{rt}$ (se discretizarmos o tempo, temos uma progressão geométrica para o crescimento da população, conforme Malthus indicava).

Se bem que trivial para o Professor de Matemática, este exemplo de aplicação do conceito de derivada e das regras de derivação poderá não ser propriamente tão trivial para o aluno, mas, rodeado das devidas cautelas, permitirá ao aluno ver a construção de um modelo matemático e a sua utilização para efeitos de previsão. O mesmo modelo matemático se aplica exactamente a um capital sujeito continuamente a juros compostos, com a diferença que $N(t)$ representa o capital no instante t , f é a taxa instantânea de juro e $m = 0$. Não confundir f com as taxas de juros publicitadas de depósitos, que são compostos discretamente e não continuamente no tempo, embora, se o prazo de depósito for curto, os valores pouco difiram. Já agora, como exemplo, qual será melhor para um depósito a prazo, um depósito a um ano com taxa de juro de 6,1% ao ano ou um depósito a um mês com taxa de juro de 6% ao ano? Devido à retenção de 20% dos juros para IRS, a taxa de juro líquida é de $(6,1\% \text{ ao ano}) \times 0,8 = 4,88\% \text{ ao ano}$ e de $(6\% \text{ ao ano}) \times 0,8 = 4,8\% \text{ ao ano}$, respectivamente. Ao fim de um ano, o capital do primeiro é $N(1) = N(0) \times (1 + 0.0488/1)^1 = 1.0488N(0)$ e o do segundo é $N(1) = N(0) \times (1 + 0.048/12)^{12} \approx 1,0491N(0)$. Nem sempre o que parece é. Se o juro fosse composto continuamente com taxa instantânea (líquida de IRS) de 4,8% ao ano, o capital ao fim de um ano seria $N(0)e^{0.048 \times 1} \approx 1.0492N(0)$.

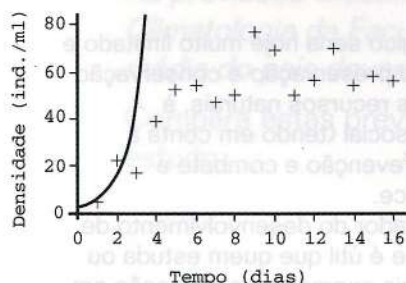


Figura 1. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento do modelo $N(t) = N(0)e^{rt}$ com $r = 1.04/\text{dia}$ e $N(0) = 2 \text{ ind./ml}$

Na Figura 1 apresentamos a evolução ao longo do tempo da densidade (por mililitro de cultura) de uma população de *Paramecium Caudatum* em meio de cultura se o modelo de crescimento fosse malthusiano e a taxa instantânea de crescimento fosse $r = 1.04/\text{dia}$, indicando ainda os valores observados nas experiências de Gause (1934).

Claramente, se o ajustamento é razoável para os primeiros dias, é óbvio que o crescimento deixou, a partir daí, de ser exponencial, possivelmente pela carência de alimento suficiente no meio de cultura para sustentar tal aumento de população. O modelo logístico considera que a taxa de crescimento *per capita*, em lugar de ser constante como no modelo malthusiano, diminui linearmente com o aumento da população atendendo à competição por alimento ou território, a qual provoca a redução da taxa de natalidade e/ou o aumento da taxa de mortalidade. Isto é, supõe-se que

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{\left(\frac{dN(t)}{dt}\right)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

com $K > 0$. Vamos supor que $r > 0$. Repare-se que, se a população $N(t)$ é pequena, obtém-se aproximadamente o valor r anterior, a chamada taxa intrínseca de crescimento (a taxa potencial se não houvesse limitações alimentares ou territoriais).

À medida que a população aumenta, a taxa de crescimento *per capita* diminui, tornando-se nula quando a população atinge o tamanho K . Quando tal sucede, a população não tende nem a crescer nem a decrescer, estando em equilíbrio. Para tamanhos da população maiores que K a taxa é negativa, pelo que a população diminui, aproximando-se de K . Para tamanhos da população menores que K a taxa é positiva, pelo que a população aumenta, aproximando-se de K . Este valor de equilíbrio K para o qual o tamanho da população converge é a chamada capacidade de sustento do meio.

A Figura 2 compara a taxa de crescimento *per capita* dos modelos malthusiano e logístico. A Figura 3 apresenta o ajustamento do modelo logístico aos dados de Gause referidos atrás. Para tal foi preciso resolver a equação diferencial $dN(t)/dt = rN(t)(1 - N(t)/K)$. Note-se que, pondo $Z(t) = e^{rt}K/N(t)$, vem $dZ(t)/dt = re^{rt}$, donde $Z(t) = e^{rt} + \text{constante}$ e, como $Z(0) = K/N(0)$, a constante é $K/N(0) - 1$ e $Z(t) = e^{rt} + K/N(0) - 1$. Logo

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N(0) - 1)e^{-rt}}.$$

Claro que a realidade e o modelo (mera aproximação da realidade) não coincidem; há oscilações um tanto ou quanto aleatórias que o modelo não contempla. A natureza é um pouco mais complexa que os modelos relativamente simples que utilizámos.

Pesca

Consideremos uma população crescendo de acordo com o modelo logístico

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

com $r > 0$ e $K > 0$. Se estiver sujeita a pesca com regras fixas e uma frota de pesca com tamanho e características fixas, pesca-se tanto mais por unidade de tempo quanto mais peixe houver, isto é, a taxa de capturas será proporcional ao tamanho da população. Obtemos então o modelo

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t),$$

onde a constante de proporcionalidade $E > 0$ (esforço "líquido" de pesca) depende do tamanho e características da frota e das regras. A taxa de crescimento da população dN/dt é, como função do tamanho da população N , a diferença entre a

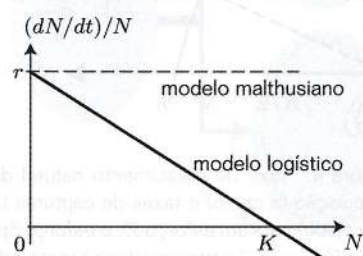


Figura 2. Comparação da taxa de crescimento *per capita* entre os modelos malthusiano e logístico.

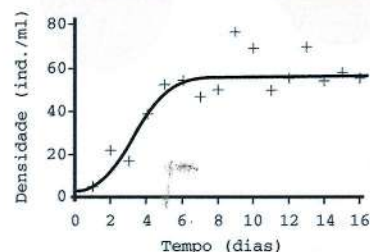


Figura 3. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento do modelo logístico com $r = 1.04/\text{dia}$, $K = 56.5 \text{ ind./ml}$ e $N(0) = 2 \text{ ind./ml}$

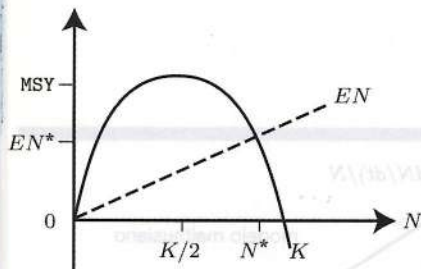


Figura 4. Taxa de crescimento natural da população (a cheio) e taxas de capturas (a tracejado) para um esforço E ; o esforço óptimo $E_{\text{opt}} = r/2$ corresponderia à recta (não desenhada) que passa pela origem e pelo pico da curva a cheio (ponto de coordenadas $(K/2, MSY)$)

taxa natural de crescimento $rN(1 - N/K)$ (a cheio na Figura 4) e a taxa de capturas EN (a tracejado na Figura 4). Se o esforço E for superior ou igual à taxa intrínseca de crescimento r , vê-se que a recta da taxa de capturas está, em $N = 0$, por cima da tangente à curva da taxa natural de crescimento, pelo que a taxa de capturas excede sempre a taxa natural de crescimento; daí resulta que a taxa de crescimento da população dN/dt é sempre negativa e a população irá decrescer até se extinguir. Admitamos pois que o esforço de pesca E é inferior a r . Temos um ponto de equilíbrio N^* , onde a taxa de crescimento natural e a taxa de capturas são iguais. É fácil ver que esse equilíbrio é estável (usamos aqui o termo no sentido mais estrito de assintoticamente estável), isto é, qualquer pequena perturbação que desvie o tamanho da população do valor de equilíbrio, é seguida de um movimento de retorno com convergência para o valor de equilíbrio. Com efeito, se a perturbação tornar a população ligeiramente maior que N^* , verificamos que a taxa de crescimento da população se torna negativa (a taxa de crescimento natural é menor que a taxa de capturas) e a população decresce até voltar a atingir o equilíbrio N^* . Se a perturbação tornar o tamanho da população menor que N^* , a taxa de crescimento da população torna-se positiva e a população irá crescer até retomar o valor de equilíbrio N^* . O leitor pode constatar que há ainda outro ponto de equilíbrio correspondente à extinção da população (tamanho da população igual a zero), mas não é estável (qualquer pequeno desvio, devido, por exemplo, à chegada de alguns imigrantes, será seguido de crescimento da população e afastamento desse equilíbrio). A estabilidade do equilíbrio é importante porque há sempre pequenas perturbações na natureza e, conseqüentemente, os únicos equilíbrios duradouros são os estáveis.

Com esta política de pesca, obtemos uma população de equilíbrio estável $N^* = K(1 - E/r)$. A taxa de capturas (por unidade de tempo) em situação de equilíbrio é então $EN^* = EK(1 - E/r)$. Como podemos tornar máxima esta taxa de capturas? Notemos que, em equilíbrio, a taxa de capturas tem de ser igual à taxa de crescimento natural, pelo que basta ver onde esta é máxima. A taxa de crescimento natural $rN(1 - N/K)$ é uma parábola e toma o seu valor máximo (conhecido por *maximum sustainable yield* ou *MSY* na literatura sobre pescas) $MSY = rK/4$ quando a população tem o tamanho $N = K/2$. Logo, o valor óptimo da taxa de capturas em equilíbrio é $MSY = rK/4$ e a correspondente população de equilíbrio é $N_{\text{opt}}^* = K/2$; como $N^* = K(1 - E/r)$, para conseguir a situação óptima, temos de escolher um esforço $E_{\text{opt}} = r/2$, isto é escolher para recta que descreve a taxa de capturas aquela que passa pelo pico da curva que descreve a taxa de crescimento natural.

Aqui estamos apenas a otimizar a quantidade pescada por unidade de tempo, isto é, a receita. Mas há também a despesa, que é, grosso modo, proporcional ao esforço E . Se quisermos otimizar o lucro em vez da receita, os resultados serão obviamente diferentes dos anteriores.

Um outro problema interessante a estudar é o da política de pesca de quota constante, em que se estabelece uma taxa fixa de capturas C por unidade de tempo. O modelo é então

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) - C.$$

Genética de populações e equilíbrio de Hardy-Weinberg

Na luta dos seres vivos pela sobrevivência e pela reprodução, certos genótipos são, pelas características físicas, fisiológicas ou comportamentais que conferem aos que os possuem, mais aptos do que outros, pelo que a sua representação na geração seguinte tenderá, em termos proporcionais, a ser maior. É este o processo de selecção natural que Darwin e Wallace utilizaram na sua teoria da evolução das espécies. Mas outros agentes evolucionários, como mutações, migrações e recombinações durante a meiose, concorrem com a selecção para alterar a composição genética das populações, isto é, a proporção dos diversos tipos de genes na população. É o estudo destas alterações que constitui o objecto da Genética de Populações, cujo grande surto ocorreu entre as duas guerras

mundiais com Ronald Fisher (também grande nome da Estatística, particularmente da Estatística Agrícola), J. B. S. Haldane e Sewall Wright. Ao contrário de Darwin e Wallace, em cuja teoria se inspiraram, eles conheciam já as leis de Mendel (durante muito tempo ignoradas mas entretanto redescobertas). Isso era suficiente para a quantificação da genética de populações, apesar de ainda não se saber o que eram os genes nem como se segregavam antes de passar aos descendentes.

Vamos considerar o caso de uma população diplóide (isto é, em que, no estado adulto, os cromossomas aparecem aos pares, salvo os cromossomas sexuais). Para simplificar, vamos considerar apenas um *locus*, isto é, uma posição num par de cromossomas não sexual e, nesse *locus*, vamos supor que há apenas dois possíveis alelos (duas variantes do gene lá localizado). Designemos esses alelos por A e a , com frequências na população p e $q = 1 - p$, respectivamente. Claro que $0 < p < 1$ e que p se obtém dividindo o número de alelos A existentes na população pelo número total de alelos dos dois tipos.

Começemos pelo caso mais simples de uma população muito grande, onde o acasalamento seja aleatório e onde não haja selecção, migração ou mutação. Ante a ausência de agentes de evolução, é válida a lei de Hardy-Weinberg (H-W), que diz que a composição génica não se altera ao longo das gerações.

Para o provar, repare que os indivíduos têm necessariamente um de três possíveis genótipos: AA , Aa (ou aA , pois a ordem dos cromossomas é irrelevante) e aa . Sejam P_0 , Q_0 e R_0 as respectivas frequências na população nesta geração inicial (geração zero). Claro que as frequências dos alelos A e a são, nesta geração inicial, respectivamente, $p = p_0 = P_0 + Q_0/2$ e $q = q_0 = Q_0/2 + R_0$.

Os gâmetas (óvulos ou espermatozóides, conforme o sexo do indivíduo) que se formam após a meiose e que só têm um dos cromossomas do par, têm todos o alelo A se o indivíduo tem genótipo AA e têm todos o alelo a se o indivíduo tem genótipo aa . Se o indivíduo tem genótipo Aa , cada gâmeta tem probabilidade $1/2$ de ser A e probabilidade $1/2$ de ser a , pelo que, numa população muito grande, cerca de metade dos gâmetas de indivíduos com genótipo AA serão A e a outra metade serão a .

A frequência de gâmetas A será então (com excelente aproximação)

$P_0 + Q_0/2 = p$ e a frequência de gâmetas a será $Q_0/2 + R_0 = q$ isto tanto entre a população masculina como entre a população feminina.

Supondo o acasalamento aleatório (isto é, independente dos genótipos dos indivíduos que acasalam), cada indivíduo da geração seguinte resulta da união de um gâmeta *escolhido ao acaso* de entre os produzidos pela população feminina e um outro *escolhido ao acaso* de entre os produzidos pela população masculina. A probabilidade de se juntarem dois gâmetas A , formando assim um indivíduo da nova geração (geração um) com genótipo AA , é então (dada a independência) o produto $P_1 = p \times p = p^2$. Semelhantemente, a probabilidade de se formar um indivíduo aa será $R_1 = q \times q = q^2$. Um indivíduo Aa pode formar-se de duas maneiras, quer juntando um gâmeta feminino A com um gâmeta masculino a , o que tem probabilidade de ocorrer $p \times q$, quer reciprocamente, o que tem a mesma probabilidade de ocorrer; logo, a probabilidade de se formar um indivíduo Aa é $Q_1 = 2pq$.

Admitindo uma população muito grande, as proporções na geração 1 dos três genótipos AA , Aa e aa , serão, com excelente aproximação, p^2 , $2pq$ e q^2 (o chamado equilíbrio de Hardy-Weinberg, cujos termos se podem obter do desenvolvimento do binómio $(p + q)^2$). Nesta geração 1, a frequência do alelo A será então

$$p_1 = P_1 + Q_1/2 = p^2 + 2pq/2 = p(p + q) = p \times 1 = p$$

e, semelhantemente, a frequência do alelo a será $q_1 = q$. Daqui se deduz que na geração 2 voltaremos a ter frequências dos genótipos p^2 , $2pq$, e q^2 , isto é, o equilíbrio das frequências dos genótipos atinge-se ao fim de uma geração para não mais se alterar. Quanto às frequências dos alelos, elas não sofrem alteração em relação aos valores iniciais, (embora este equilíbrio seja neutral, isto é, se alguma perturbação provocar um pequeno desvio, a frequência dos alelos manter-se-á nos novos valores).

Podemos, pois, por comodidade, trabalhar apenas com as frequências dos alelos

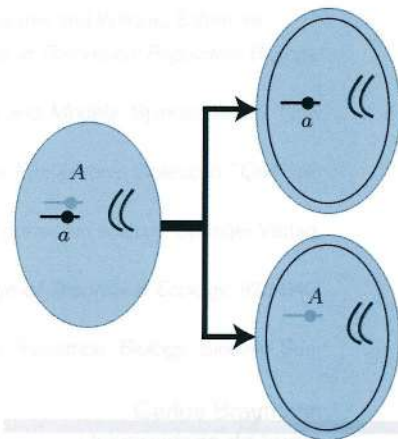


Figura 5. Comportamento de um *locus* na meiose, exemplificando com o genótipo Aa . À esquerda está uma célula com o seu núcleo e à direita estão gâmetas após meiose (de facto, cada célula dá 4 gâmetas)

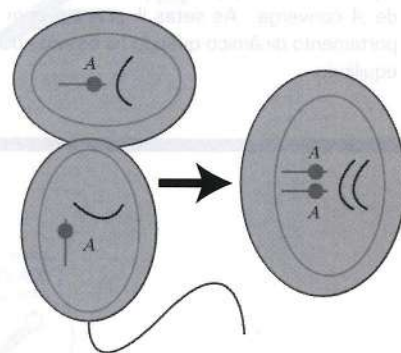


Figura 6. Comportamento de um *locus* na união de um óvulo e de um espermatozóide para formar um ovo, exemplificando com o caso de ambos os gâmetas serem A

pois, a partir delas (pelo equilíbrio de H-W), podemos obter as frequências dos genótipos, senão imediatamente, pelo menos ao fim de uma só geração. Como só há dois alelos, a frequência p do alelo A determina a do outro.

Como vimos, se não actuarem quaisquer agentes de evolução, as frequências dos alelos não se alteram ao longo das gerações, isto é, não há evolução. Vejamos agora o efeito da mutação sobre essas frequências.

Mutação

Considere o caso de haver mutação do alelo A para o alelo a com taxa de mutação $\mu > 0$ (valores típicos de μ são da ordem de 10^{-5} a 10^{-10}). Seja $p = p_0$ a frequência na geração inicial do alelo A . De uma geração para a seguinte, há uma proporção μp de alelos A que passam a ser a , isto é, na geração seguinte, as proporções dos alelos são $p_1 = p - \mu p = p(1 - \mu)$ e $q_1 = q + \mu p$. Claro que, na geração a seguir a esta, a frequência do alelo a será $p_2 = p_1(1 - \mu) = p(1 - \mu)^2$. Por indução, pode facilmente mostrar-se que, na geração n , vem $p_n = p(1 - \mu)^n$, donde, quando $n \rightarrow \infty$, vem $p_n \rightarrow 0$ (e, portanto, $q_n = 1 - p_n \rightarrow 1$). Isto é, o alelo A aproxima-se progressivamente da extinção, pelo que o resultado da evolução será, neste caso, uma população homocigótica inteiramente constituída por indivíduos com genótipo aa .

Que sucede se, além de haver mutação de A para a com taxa $\mu > 0$, houver também mutação de a para A com taxa $\nu > 0$?

Tem-se

$$p_1 = p - \mu p + \nu q = p - \mu p + \nu(1 - p) = \nu + p(1 - \mu - \nu),$$

sendo a alteração $\Delta p = p_1 - p = \nu - p(\mu + \nu)$. Qual será o valor de equilíbrio, isto é o valor de p que não se altera de uma geração para a seguinte, ou seja, o valor de p que coincide com p_1 ? Será a solução da equação às diferenças $\Delta p = 0$, isto é, $\hat{p} = \nu / (\mu + \nu)$ (usamos o "chapéu" para indicar que é o valor de equilíbrio). Este equilíbrio é estável, como vamos ver. É fácil verificar que, se a frequência do alelo A se desviar de \hat{p} , a alteração Δp na geração seguinte será negativa ou positiva conforme o desvio seja para cima ou para baixo, isto é, tenderá a "corrigir" o desvio. Isto só por si não prova a estabilidade porque a "correção" poderia ser excessiva e verificar-se uma sequência de valores de p que, em vez de convergir para \hat{p} , oscilasse em torno de \hat{p} com oscilações crescentes. Mas, da expressão de p_1 , pode mostrar-se por indução que

$$p_n = \frac{\nu}{\mu + \nu} (1 - (1 - \mu - \nu)^n) + p(1 - \mu - \nu)^n$$

(é interessante "intuir" a expressão por iteração e aplicação da fórmula da soma de termos de uma progressão geométrica e, depois, demonstrá-la rigorosamente pelo método de indução). Logo, como podemos supor $\mu + \nu < 1$, $p_n \rightarrow \nu / (\mu + \nu) = \hat{p}$. Ao contrário do caso anterior de mutação num só sentido, o equilíbrio estável que será atingido é polimórfico, isto é, coexistem na população os dois alelos A e a e os três genótipos AA , Aa e aa .

Conclusão

Apresentámos, em forma de esboço (dadas as limitações de espaço) alguns exemplos muito simples de aplicação útil de modelos matemáticos no estudo de crescimento de populações, em pescas e em genética de populações. Do ponto de vista didáctico, esses exemplos permitem ilustrar (naturalmente com um cuidado e um desenvolvimento que não foram possíveis aqui) a construção de modelos matemáticos aplicados à descrição e análise de fenómenos naturais, bem como exercitar a utilização de conceitos e propriedades matemáticos (conceito de derivada e seu significado, regras de derivação, soma de termos de progressão geométrica, limites, ideias elementares de probabilidade, etc.). O uso de notações variadas na sala de aula, como " $N(t)$ " em lugar de usar sempre o tradicional " $f(x)$ ", evita estereótipos e desenvolve a maleabilidade mental para aplicar as mesmas ideias e automatismos adquiridos em situações aparentemente diferentes. Deixaremos para outra oportunidade o interessantíssimo estudo do efeito da selecção natural (ou artificial) em que a regra da sobrevivência dos genótipos mais

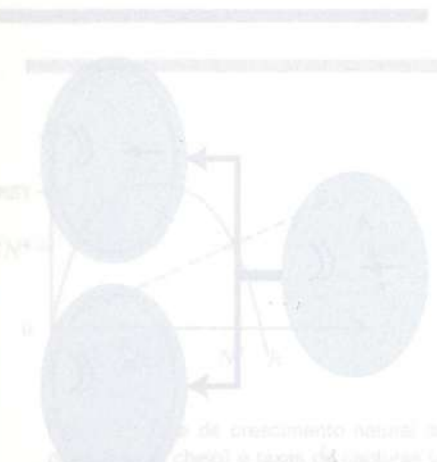


Figura 7. Mutação de A para a com taxa μ e de a para A com taxa ν . Há um ponto de equilíbrio estável \hat{p} para o qual a frequência de A converge. As setas ilustram o comportamento dinâmico quando há desvios do equilíbrio

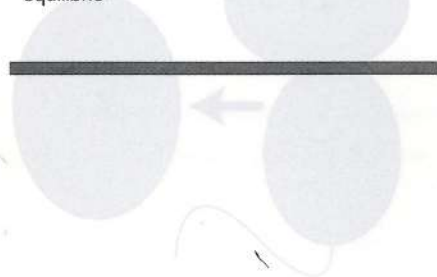


Figura 8. Comportamento de um locus em um sistema dinâmico de um sistema de dois pontos de equilíbrio estável. As setas indicam o comportamento dinâmico quando há desvios do equilíbrio

aptos, afinal, admite excepções, uma delas surpreendente. Enquanto o comportamento qualitativo no caso da mutação era intuitivamente previsível, servindo o modelo matemático para o corroborar, a *excepção surpreendente* da selecção dificilmente se revelaria sem ser através do modelo matemático. Deixaremos também para outra oportunidade o efeito sobre as populações da "lotaria" dos nascimentos e mortes, onde o efeito do acaso, que está sempre presente, pode ser ignorado em populações grandes (que pouco são afectadas) mas pode ser considerável em populações pequenas. Essa aleatoriedade poderá ter sido um poderoso agente de evolução das espécies, cujo efeito pode ser estudado matematicamente.

Os processos de selecção natural, mutação e recombinação têm permitido a evolução de características genéticas favoráveis à adaptação de populações ao seu meio, podendo considerar-se um mecanismo de optimização num número elevado de dimensões (dada a enorme quantidade de genes envolvidos). Alguém pensou: porque não simular em computador um processo semelhante para tentar resolver problemas de optimização envolvendo um elevado número de dimensões que se colocam em diversas aplicações da Matemática e para os quais os algoritmos de optimização tradicionais são ineficazes? De facto, casos há em que os algoritmos tradicionais levariam milhões de anos nos melhores computadores, quando a evolução levou o mesmo tempo mas usando o mecanismo incomparavelmente mais lento da transferência de genes de uma geração para a seguinte, o qual pode ser imitado na simulação em computador, com a diferença de num só segundo simularmos muitas gerações. Surgiram os chamados algoritmos genéticos, que têm hoje inúmeras aplicações. Há, porém, que saber *traduzir* o problema matemático para um problema genético equivalente. Se a Matemática foi extremamente importante para o desenvolvimento da Genética de Populações, os algoritmos genéticos mostram que também o recíproco é hoje verdadeiro. É um bom exemplo das virtudes da interdisciplinaridade. Gostaríamos também de, numa outra oportunidade, apresentar alguns

modelos matemáticos de interacção de populações (relações presa-predador, espécies em competição, etc.) ou de epidemias, em que há resultados curiosos muito importantes. Um deles o de, para certo tipo de epidemias, bastar vacinar uma parte da população susceptível para que seja afastado o risco de epidemia.

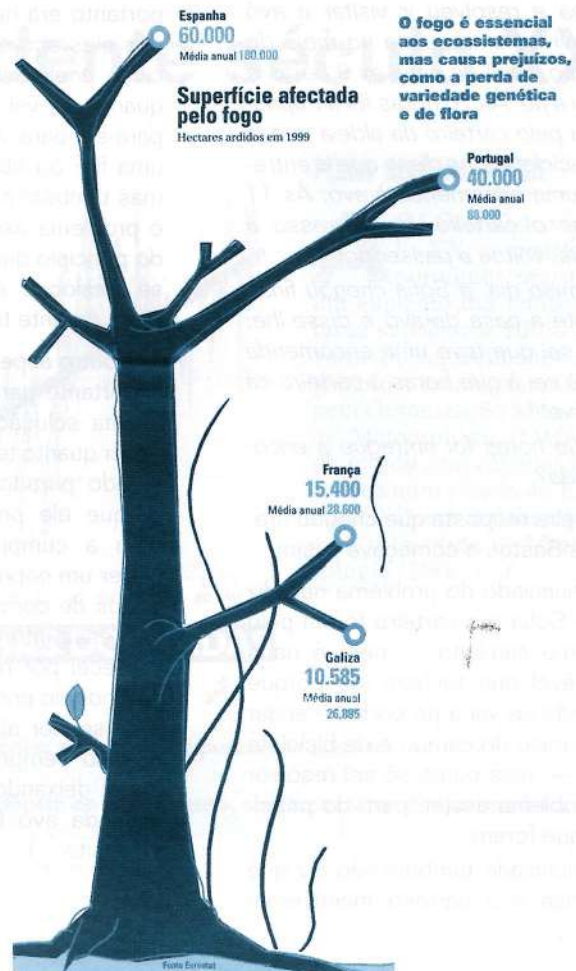
Por ora, ficamos por aqui.

Referências

- Hoppensteadt, F. (1995). Getting started in Mathematical Biology, *Notices of the American Mathematical Society*, 42 (9): 969-975.
- Gause, G. F. (1934). *The Struggle for Existence*. Williams and Wilkins, Baltimore.
- Ginzburg, L. R. e Golenberg, E. M. (1985). *Lectures in Theoretical Population Biology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Hastings, A. (1997). *Population Biology, Concepts and Models*. Springer-Verlag, New York.
- Hillion, H. (1986). *Les Théories Mathématiques des Populations*. Colecção "Que sais je?", Presses Universitaires de France, Paris.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology (second corrected edition)*. Springer Verlag, Berlin.
- Scudo, F. M. e Ziegler, J. R. (1978). *The Golden Age of Theoretical Ecology*: 923-940. Springer-Verlag, Berlin.
- Wilson, E. O. e Bossert, W. H. (1971). *A Primer of Population Biology*. Sinauer, Sunderland.

Carlos Braumann
Universidade de Évora

in natura — suplemento especial: Público, 15 Abril 2001





Miss Simpatia

No baile de finalistas da escola realizou-se a eleição para Miss Simpatia.

As pessoas votaram em três candidatas, pela ordem que as preferiam.

A vencedora foi a Inês com 113 pontos, correspondentes a 10 primeiros lugares, 15 segundos e 8 terceiros.

Em cada voto, quantos pontos valia o primeiro lugar? E o segundo? E o terceiro?

Respostas até 31 de Novembro

A Sofia, a Avó e o Carteiro

O problema proposto no nº 62 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Sofia estava a passar férias na aldeia e resolveu ir visitar a avó que vive numa quinta no meio do campo. Saiu de casa às 9 horas e lá foi a pé. Às 10 horas foi ultrapassada pelo carteiro da aldeia que ia de bicicleta e lhe disse que ia entregar uma encomenda à avó. Às 11 horas o carteiro, de regresso à aldeia, voltou a passar por ela.

Ao meio dia, a Sofia chegou finalmente a casa da avó e disse-lhe: "Já sei que teve uma encomenda e até sei a que horas o carteiro cá esteve!"

A que horas foi entregue a encomenda?

A primeira resposta que chegou era da Rita Bastos e começava assim:

O enunciado do problema não diz se a Sofia e o carteiro foram pelo mesmo caminho — nem é nada provável que tenham ido porque quando se vai a pé pode-se andar pelo meio do campo e de bicicleta não —, mas como só sei resolver o problema assim, parti do princípio que foram.

O enunciado também não diz que a Sofia e o carteiro mantiveram

sempre a mesma velocidade cada um, em todo o percurso, o que nem é nada provável que aconteça porque nos caminhos do campo costuma haver subidas e descidas, portanto era natural que nas subidas eles abrandassem e nas descidas acelerassem, e além disso quando se vai a passear às vezes para-se para descansar, apanhar uma flor ou observar a paisagem, mas também não consigo resolver o problema assim. Por isso parto do princípio que cada um dos dois se deslocou a velocidade constante durante todo o percurso.

Um outro aspecto que poderia ser importante para conseguir chegar a uma solução mais realista, era saber quanto tempo o carteiro teria estado parado em casa da avó, porque ele provavelmente parou para a cumprimentar, se calhar beber um copo de água e dar dois dedos de conversa. Mas não nos dão essa informação, por isso eu comecei por resolver o problema partindo do princípio que o carteiro nem sequer abrandou — mudou o sentido sempre à mesma velocidade, deixando a encomenda em casa da avó (isto é um bocado esquisito....).

Depois destas considerações todas, é fácil resolver o problema (apesar de não ficar nada convencida que a solução tenha alguma coisa a ver com a realidade!).

Estas considerações da Rita levantam uma série de questões interessantes sobre os problemas de Matemática que pretendem retratar uma situação real. No enunciado destes problemas assumem-se, implícita ou explicitamente, várias simplificações que irão permitir resolver o problema mas que farão com que a solução não corresponda ao que efectivamente poderá (ou poderia) ter acontecido.

O que acontece é que muitos destes problemas de Matemática não pretendem realmente retratar uma situação verdadeira. São apresentados num "invólucro de realidade" mas o seu objectivo fundamental não é perceber e interpretar essa "realidade" (quase sempre fictícia) mas sim testar as capacidades de raciocínio e de utilização de instrumentos matemáticos.

Outras vezes, o problema é real mas só as simplificações assumidas irão permitir que o problema seja resolvido. Neste caso, temos de estar cientes que a solução encontrada não corresponde ao que realmente poderá ter acontecido. Em princípio, quanto maiores forem as simplificações mais

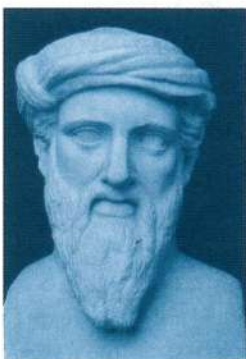


nos estaremos a afastar da realidade. Aliás, sempre que tentamos perceber um fenómeno real, começamos por fazer simplificações e procuramos um modelo matemático que nos pareça adequado. Escolhido o modelo, temos de testá-lo em várias situações do fenómeno que estamos a estudar. Se os desvios forem "suficientemente pequenos", o modelo encontrado serve. Caso contrário, é preciso procurar novo modelo, provavelmente diminuindo as simplificações iniciais.

No que se refere ao problema proposto na revista 62, chegaram ainda mais 16 respostas, enviadas por Andrea Feijó (Viana do Castelo), Augusto Taveira (Faro), Domingos Rijo (Castelo Branco), Fausto Quintas (Felgueiras), Helena Perpétua (Setúbal), João M^o Oliveira (e-mail), João Pedro Faria (Guimarães), José Miguel Abreu (Guimarães), Luísa Andrade (Angra do Heroísmo), Miguel Valverde (e-mail), Nuno Cardoso (Coimbra), Nuno Rodrigues (Guimarães), Paula Gomes (Nogueiró), Paulo Carvalho (Coimbra), Tiago Estêvão (Lisboa) e Vera Velosa (Caniço).

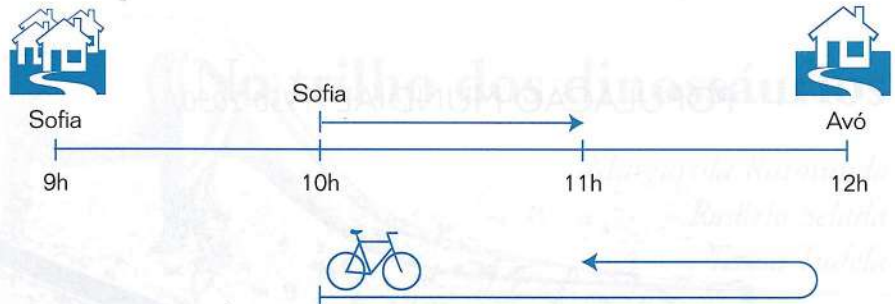
Os métodos de resolução foram variados, desde os puramente analíticos até aos geométricos, com ajuda do *Cabri II* ou do *GSP*.

Mas a resolução mais simples foi a mais utilizada.



Os números governam o universo
Pitágoras

Façamos um esquema.



Das 10h às 11h, o carteiro anda o triplo da distância da Sofia, logo a sua velocidade é 3 vezes maior.

Como, desde o momento em que se cruzaram pela primeira vez, a Sofia demorou 2 horas a chegar a casa da avó, o carteiro demorou um terço desse tempo, ou seja, 40 minutos.

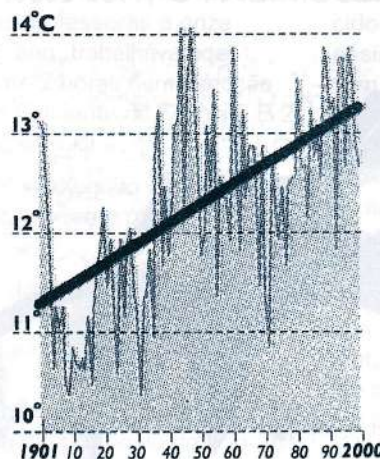
Logo, a encomenda foi entregue às 10h 40m.

O Nuno Cardoso acrescenta ainda:

Como os carteiros gostam muito de conversar, por cada minuto que o carteiro esteve em amena cavaqueira com a avó da Sofia, a hora de entrega da encomenda deve ser antecipada em 20 segundos.

A Helena Perpétua admite que o carteiro demorou 3 minutos em casa da avó e, nesse caso, chegou lá às 10h 38m.

Ardente século XX



PENHAS DOURADAS

Médias anuais da temperatura máxima

Tendência de crescimento, com base numa equação estatística

in *Expresso*, 20 Janeiro 2001

PEDRO ALMEIDA VIEIRA

A O LONGO do século XX, o território português registou um aumento das temperaturas superior a 100% do valor do aquecimento registado à escala planetária pela Organização Mundial de Meteorologia (OMM), de acordo com cálculos baseados num estudo do *EX-PRESSO* em colaboração com o Instituto de Meteorologia (IM).

O problema deste número

O tempo dos últimos homens

POPULAÇÃO MUNDIAL (1950-2050)

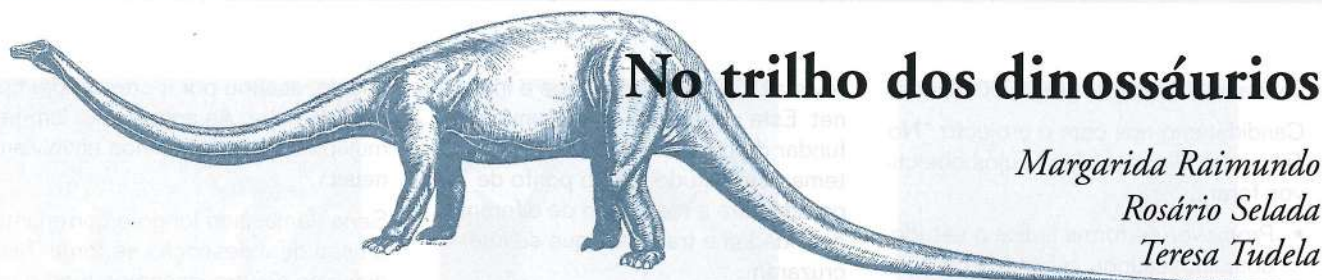
Milhares de milhões de pessoas



TAXA DE CRESCIMENTO (1950-2050)



in Expresso, 7 Julho 2001



No trilho dos dinossáurios

*Margarida Raimundo
Rosário Selada
Teresa Tudela*

Ao pensarmos neste projecto, não pensámos em Matemática. A abordagem de conceitos matemáticos não foi, à partida, um objectivo. No entanto a Matemática foi aparecendo, naturalmente, ao longo das actividades desenvolvidas. Foi surgindo porque está ligada à vida, faz parte da natureza humana e, como tal, surgirá sempre, naturalmente, em qualquer projecto multidisciplinar.

Mas, comecemos pelo início...

Estávamos no ano lectivo de 1998/99, éramos duas professoras e onze alunos do 8º ano, trabalhávamos semanalmente 2 horas numa secção do Clube do Ambiente da Escola E.B 2 e 3 D. Dinis, em Leiria.

A Internet tinha chegado à escola, era uma novidade aliciante que queríamos explorar.

Discutíamos hipóteses de trabalho quando nos chegou um Formulário de Candidatura ao programa Rede de Escolas dos Amigos dos Dinossáurios. Este programa, promovido no âmbito de um protocolo de cooperação estabelecido entre o Ministério da Educação, o Ministério do Ambiente (através do IPAMB — Instituto de Promoção Ambiental) e a Associação para o Desenvolvimento das Serras de Aire e Candeeiros, visava dar a conhecer o valor do património paleontológico existente no Monumento Natural das Pegadas de Dinossáurios das Serras de Aire e

Candeeiros e alertar para a sua preservação e valorização.

O projecto agradou-nos, discutimos o assunto e pensámos apresentar a nossa candidatura.

Mas..., éramos poucos! Era necessário encontrar outras pessoas interessadas em trabalhar connosco. Uma turma de 7º ano entusiasmou-se pelo projecto e propôs-se trabalhá-lo em Área Escola. O número aumentava, já éramos bastantes, mas o nosso trabalho seria, certamente, enriquecido se agregássemos outro nível de ensino. Como na altura se começavam a pensar os agrupamentos verticais e a escola nº 7 do 1º Ciclo, Escola dos Capuchos, devido à sua proximidade, poderia vir a pertencer ao agrupamento da Escola D. Dinis, pensámos que a candidatura conjunta ao programa, Rede de Escolas dos Amigos dos Dinossáurios, seria uma boa maneira de nos conhecermos mutuamente e de iniciarmos um trabalho comum, que até poderia vir a ser um primeiro pilar para o futuro.

O contacto foi feito e o entusiasmo imediato. O interesse por dinossáurios era enorme na turma do 4ª ano daquela escola. Havia ainda um aluno do 3º ano, com grande paixão por dinossáurios que, logicamente, se juntou ao grupo e trouxe consigo a professora do Ensino Especial que o apoiava.

A Matemática foi aparecendo, naturalmente, ao longo das actividades desenvolvidas. Foi surgindo porque está ligada à vida, faz parte da natureza humana e, como tal, surgirá sempre, naturalmente, em qualquer projecto multidisciplinar.



Já éramos 6 professores e 60 alunos! Candidatámo-nos com o projecto "No Trilho dos Dinossáurios" cujos objectivos foram:

- Promover de forma lúdica o estudo dos dinossáurios, a história da Terra e dos seres vivos;
- Proporcionar aos alunos o conhecimento do Monumento Natural das Pegadas de Dinossáurios das Serras de Aire e Candeeiros;
- Reconhecer e valorizar o património ambiental, desenvolvendo atitudes críticas de intervenção;
- Promover uma abordagem multidisciplinar das problemáticas ambientais associadas ao tema do projecto.

A candidatura foi aceite e o projecto financiado.

O trabalho foi organizado segundo duas vertentes:

- Uma parte do trabalho foi autónomo, em que cada um dos três grupos formados, alunos do Clube do Ambiente, do 7º ano e do 4º ano, desenvolveu um trabalho independente de pesquisa, utilizando fontes de informação diversificadas, livros, nomeadamente na Biblioteca Afonso Lopes Vieira,

revistas, CD ROMs, Vídeos e Internet. Esta pesquisa permitiu um aprofundar de conhecimentos sobre os temas em estudo e foi o ponto de partida para a realização de diferentes actividades e trabalhos que se inter-cruzaram.

- Outra parte foi a de actividades conjuntas que permitiram o contacto e um intercâmbio de ideias entre os vários alunos/professores envolvidos, nomeadamente:

Visita de estudo ao Museu da Lourinhã;

Visita de estudo ao Monumento Natural das Pegadas de Dinossáurios das Serras de Aire e Candeeiros;

Mini-palestra sobre "Astronomia e Dinossáurios" e sessão de observação astronómica realizadas no recinto do Monumento Natural e abertas à população local.

Visita dos alunos do 1º ciclo à Escola D. Dinis;

Visita dos alunos da Escola D. Dinis à Escola do 1º Ciclo.

Aquilo que começou por ser uma *brincadeira* de um clube que queria explorar a Internet, acabou por chegar à

escola, acabou por ir crescendo, tipo bola de neve. As actividades iam-se multiplicando e todos nos envolvíamos nelas...

Seria demasiado longo e correríamos o risco de a descrição se tornar fastidiosa se descrevessemos tudo o que foi realizado. Decidimos então que, sendo este o ano da *Matemática e Natureza*, iríamos relatar com mais pormenor "o lado Matemático" deste projecto.

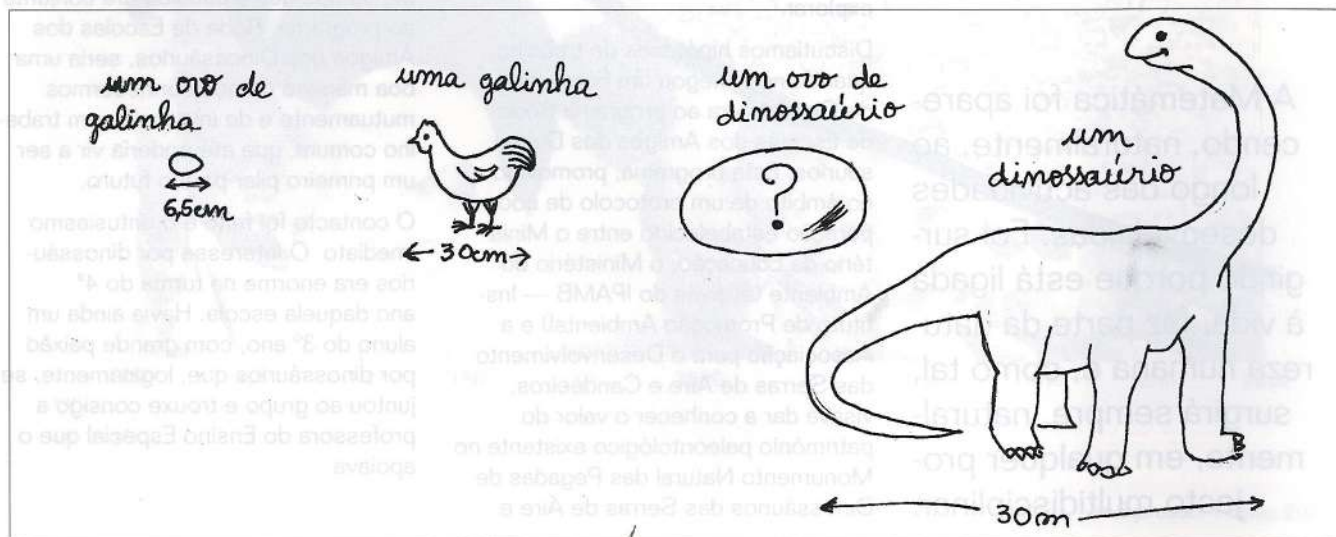
E, a Matemática foi surgindo em diversas situações.

Ovos de dinossáurios e ovos de galinha...

No Museu da Lourinhã, com um importante espólio de ovos e embriões de Terópodes, com cerca de 70 milhões de anos, ao vermos os ovos de dinossáurios, ficámos admirados.

- São *pouco maiores* do que ovos de galinha!
- Como é possível que os ovos dos dinossáurios sejam tão pequenos?

A pergunta foi feita a um dos responsáveis do Museu que explicou que,

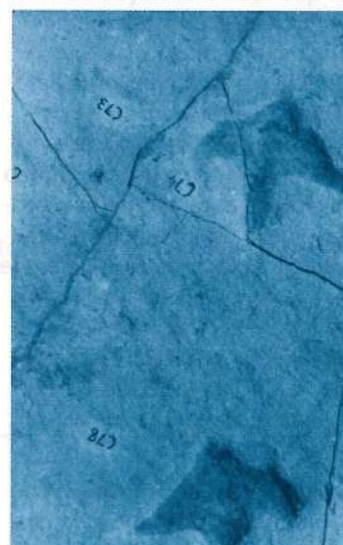




Vamos estimar as dimensões dos dinossaúros!



Pegadas de dinossaúrios



se os ovos fossem muito grandes, as suas paredes teriam de ser muito grossas para que não se partissem com facilidade. Tal espessura dificultaria a entrada do ar necessário ao desenvolvimento dos embriões e os ovos seriam muito difíceis de partir na altura da eclosão. Assim, a Natureza tinha resolvido este problema diminuindo o tamanho dos ovos.

Um dos alunos observou:

Então qual seria o tamanho de um ovo de Saurópode se existisse proporcionalidade directa entre cada ovo e o seu progenitor?

Eis uma boa questão para irmos investigar!

Mais tarde os alunos recolheram os dados necessários e concluíram que um Saurópode com 30 metros de comprimento poria ovos com cerca de 6 metros de comprimento — verdadeiramente colossal, principalmente se pensarmos que o maior ovo de saurópode encontrado mede cerca de 30 cm.

Pegadas e mais pegadas...

No Monumento Natural das Pegadas de Dinossaúrios foi pedido aos alunos que fizessem um esquema das pegadas dianteira e traseira de um Saurópode, indicando as respectivas medidas, o comprimento e a largura. Podiam utilizar uma régua, o palmo, o pé ou qualquer outra unidade que melhor resolvesse o problema. Foi interessante verificar o apoio que os alunos mais velhos davam aos mais novos.

Muuuuito... Muito tempo e... um friso cronológico...

Um dos pontos *altos* deste projecto foi a preparação da visita dos alunos do 4º ano à Escola D. Dinis. Foram os onze alunos do 8º ano que ficaram com esta tarefa. Era necessário preparar diferentes actividades que, de forma agradável, ocupassem os alunos mais novos. Pensámos que seria mais fácil dividir os meninos do 4º ano em pequenos grupos que, ao longo da tarde, realizariam diferentes actividades orientados pelos alunos mais velhos.

Era necessário pensar as actividades.

Conversámos, discutimos e acordámos que se formariam quatro grupos. Um deles exploraria sites da Internet com informação sobre dinossaúros — na escola do 1º ciclo não havia Internet — seria certamente uma actividade aliciante. Fariámos passatempos e fichas lúdicas que seriam apresentadas por um grupo e corrigidas por outro. Outro grupo exploraria um pequeno vídeo, *Cinco mil milhões de anos*, sobre a origem da Terra e da vida na Terra.

Foi a exploração deste vídeo que mais puxou pela nossa imaginação...

Foi na água, há cerca de três mil e quinhentos milhões de anos, que surgiram as primeiras formas de vida, seres unicelulares, muito simples...

Só dois mil e quatrocentos milhões de anos depois aparecem os seres pluricelulares.... Informações deste tipo apareciam ao longo do filme.

Como é que nós vamos conseguir dar

uma ideia de períodos de tempo tão vastos, quando nós próprios ficamos confusos com eles? Interrogavam-se os alunos e nós próprias, as professoras.

Puxámos pela cabeça, socorremo-nos de alguma bibliografia e encontramos num livro¹ uma sugestão interessante. Imaginar que toda a evolução da vida na Terra de dava apenas num ano. Mas seria um ano muito especial, cada dia desse ano corresponderia a dez milhões de anos da história da Terra. A partir desta ideia fizemos um quadro e um friso cronológico. O friso era em cartolina azul, enquanto a evolução da vida se dava na água e passava a laranja a partir da altura em que os seres vivos conquistaram a terra. Representaram-se vários seres vivos em cartolina, característicos desta evolução, que foram colados no friso, na época em que apareceram na Terra.

Ficámos satisfeitos com o resultado do nosso trabalho. O nosso friso cronológico facilitava esta exploração do tempo e os mais pequenos tiveram uma participação muito activa.

A “brincar” também se aprende

Os alunos do 8º ano fizeram algumas fichas para apresentar aos meninos do 1º Ciclo quando estes visitaram a Escola D. Dinis. Uma dessas fichas Estimar dimensões dos dinossáurios é a actividade para a sala de aula da página seguinte.

Explorando e aprendendo, no 4º ano...

Este projecto, devido às características da monodocência no 1º ciclo, teve um cariz predominantemente interdisciplinar, nomeadamente a nível da área escola, acabando por envolver outros elementos da comunidade educativa.

Várias foram as actividades desenvolvidas. A nível da estatística, elaborámos um inquérito que foi respondido pelos alunos do 1º ciclo da escola do Bairro (Serra de Aire). Lendo e interpretando a informação recolhida, foi feito o tratamento de dados, tendo ainda sido feita a tradução do real e da linguagem comum para a linguagem simbólica da matemática.



À descoberta das pegadas

A nível da geometria, no Monumento Natural, explorámos as pegadas de dinossáurios. Os alunos recorreram a um esquema indicando a largura e comprimento da pegada dianteira e traseira de um saurópode, recorrendo a diferentes tipos de representações, efectuaram medições com o palmo, o pé... Fizeram estimativas, comparando e confrontando os seus resultados com os dos colegas, descrevendo os processos que utilizaram na realização desta actividade.

Também foram exploradas, de uma forma lúdica, diversas fichas de trabalho que implicavam a resolução de problemas e exigiam a aplicação de conhecimentos e a utilização de técnicas diversificadas. As crianças reagiram de uma forma dinâmica e participada, uma vez que estávamos a ir ao encontro dos seus interesses e curiosidades.

A matemática tornou-se assim aliante para as crianças, tornando-as mais activas, intervenientes e criativas.

Neste projecto estabeleceu-se um intercâmbio participado e responsável entre alunos e professores dos diferentes níveis de ensino. Explorámos a Matemática, as Ciências, o Ambiente e a sua preservação, mas acima de tudo conseguimos trabalhar *brincando* e aprender *ensinando*.

Nota

1 *A vida na Terra* de David Attenborough

Teresa Tudela
Escola do 1º Ciclo dos Capuchos
Margarida Raimundo
Rosário Selada
Escola EB 2,3 D. Dinis Leiria

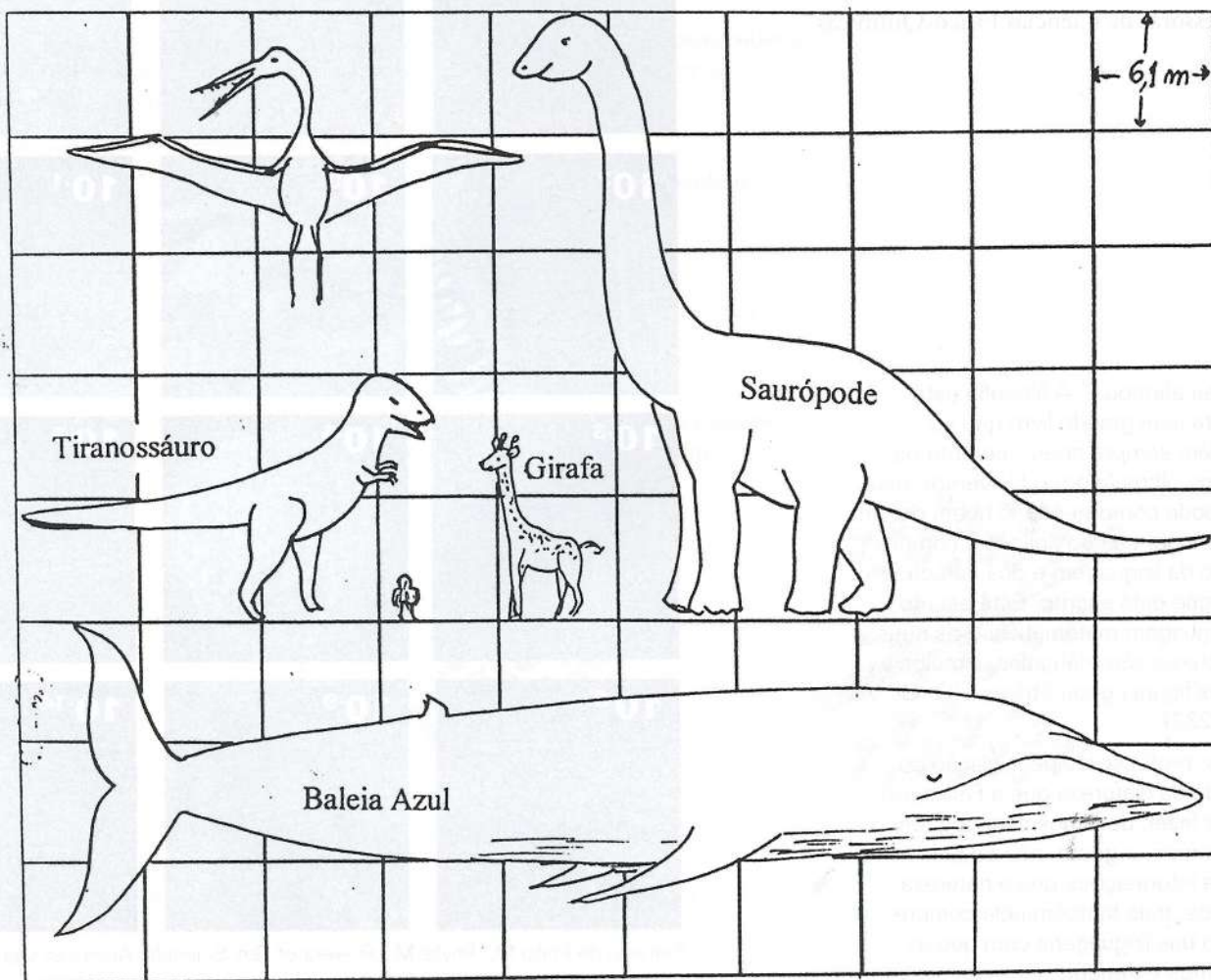
Escola.....

Ano/Turma..... Data..... Aluno(a).....

Vamos estimar as dimensões dos dinossáurios?

Observa a figura com muita atenção e indica:

- O comprimento da baleia azul _____
- A altura do saurópode _____
- O animal cujo comprimento é cerca do triplo do comprimento do tiranossáuro _____
- O comprimento da cauda do tiranossáuro _____





Depoimento

A Natureza e as suas linguagens: A natureza e a linguagem matemática

Cândida Rosa

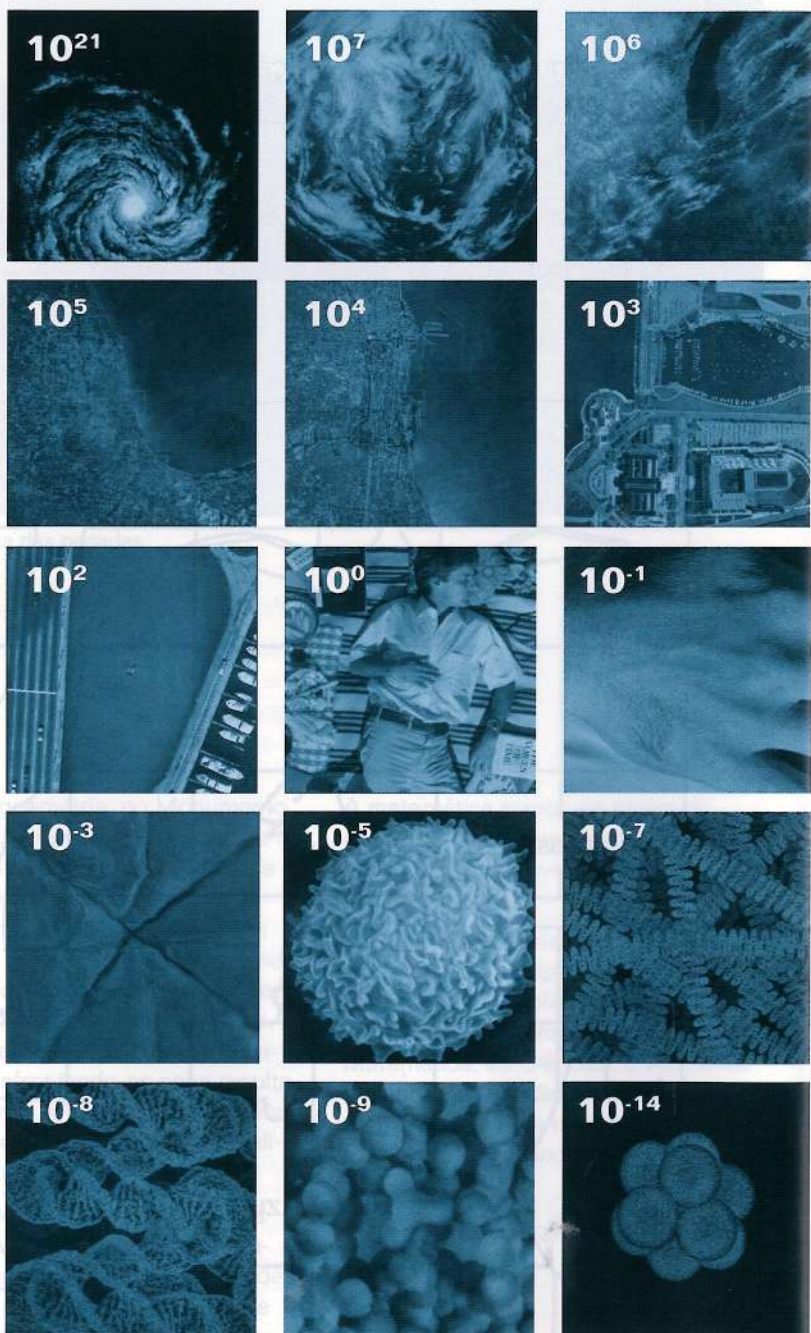
Helena Sá

Professoras de Ciências Físico-Químicas

Galileu afirmou: " A filosofia está escrita num grande livro que se mantém sempre aberto perante os nossos olhos (digo: o Universo), mas não pode compreendê-lo quem em primeiro lugar se não aplique à compreensão da linguagem e dos caracteres com que está escrito. Está escrito na linguagem matemática, e os seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas" (O. Gl.,VI, pág. 232).

E nós, professores de iniciação ao estudo da Natureza que a Física pretende fazer, devemos criar, a quem ensinamos, o gosto, não só pela escolha de informações que a natureza oferece, mas também pela compreensão das linguagens com que as podemos entender.

Como entender a Natureza sem, por exemplo, os números, as expressões matemáticas, a geometria?



Extraído de Philip M., Phylis M.; *Powers of Ten*, Scientific American Library (1982).

1. Os números, o Universo e o tempo

ORDEM DE GRANDEZA		ORDEM DE GRANDEZA	
Distância à mais longínqua galáxia observada	10^{26} metros	Idade do Universo	10^{17} segundos
Distância à galáxia mais próxima	10^{22}	Precessão do eixo terrestre	10^{12}
Distância à estrela mais próxima	10^{17}	Vida humana	10^9
Distância ao Sol	10^{11}	Um ano	10^7
Diâmetro da Terra	10^7	Um dia	10^5
Um quilómetro	10^3	Tempo que a luz leva do Sol à Terra	10^3
A altura humana	10^0	Tempo entre dois batimentos de coração	10^0
A espessura de um dedo	10^{-2}	Um batimento da asa de uma mosca	10^{-3}
A espessura de uma folha de papel	10^{-4}	Acendimento de uma lâmpada estroboscópica	10^{-5}
Uma bactéria grande	10^{-5}	Duração do impulso de um "laser"	10^{-9}
Um pequeno vírus	10^{-8}	Tempo que a luz leva a atravessar um átomo	10^{-18}
Diâmetro do átomo	10^{-10}	Mais curta vida de uma partícula subatômica	10^{-23}
Diâmetro do núcleo	10^{-14}		

in *Projecto de Física*

Se não soubéssemos escrever os números desta forma como nos aperceberíamos do *tão grande* e do *tão pequeno* da Natureza? E como poderíamos comparar esses valores?

2. As leis e a sua expressão matemática

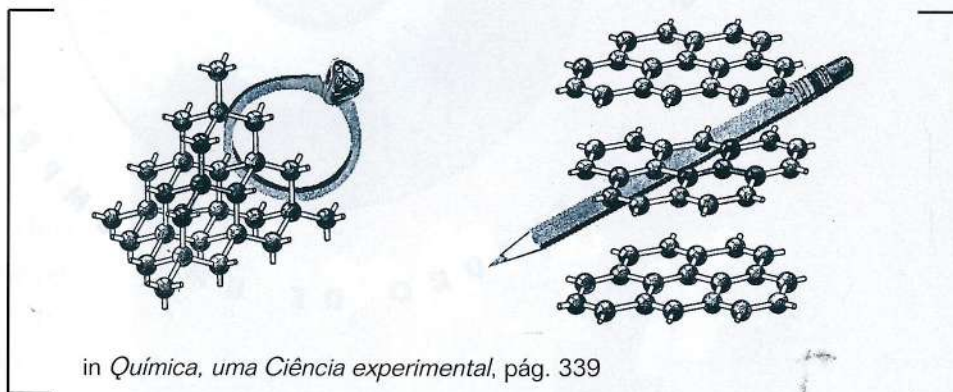
A genial lei da gravitação universal de Newton exprime-se simplesmente por

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

Quantas vezes paramos para pensar e admirar *a magia do Universo versus a magia da Matemática*?

3. A geometria e a propriedade das substâncias

Como as estruturas tetraédrica e hexagonal das redes cristalinas do carbono explicam propriedades tão diferentes como as do diamante e da grafite!



Apresentámos alguns, muito poucos, exemplos em que pretendemos mostrar como a linguagem matemática ocupa, no entendimento da Natureza, um papel crucial.

Como ler a Natureza sem nos *aplicarmos à compreensão da sua linguagem*?

Cândida Rosa

Helena Sá

Esc. Sec. Camões

A SOLIDEZ E A EXPERIÊNCIA, DE UM PASSADO DE 78 ANOS.



OS MEIOS TÉCNICOS E A VISÃO DE FUTURO DE UMA EMPRESA DO XIX. SÉCULO XXI.



SCARPA
impressores desde 1922

Aventura na Lousã

João Jorge Henriques

Todos os anos, no mês de Fevereiro, sessenta alunos do ensino secundário e muitos dos seus professores vivem durante quatro dias num campo de férias, partilhando o quotidiano em cooperação, aperfeiçoando-se em matérias da Educação Física, nomeadamente as Actividades de Exploração da Natureza, a Dança e os Jogos Tradicionais e realizando aprendizagens na área das Ciências, das Línguas Estrangeiras, do Português, da Geografia e da Matemática.

Aventura na Lousã é, hoje, um projecto multidisciplinar, cujas actividades representam, simultaneamente, duas grandes oportunidades:

- para os alunos, a oportunidade de

viverem um conjunto de experiências que possibilitem, no contacto directo com a natureza, aprendizagens únicas durante o percurso escolar;

- para os professores de diferentes disciplinas, a oportunidade de se *acertarem* para benefício dos alunos, trabalhando colectivamente e em cooperação na promoção da integração curricular tão necessária a um ensino que se quer menos *espartilhado*.

A Lousã, tem sido a zona eleita para o desenvolvimento deste projecto, pelas condições de apoio, naturais, culturais e de desafio que oferece, únicas no contexto nacional:

Os passos dados na promoção da interdisciplinaridade e da colaboração entre professores de diferentes áreas disciplinares têm-se constituído como *sementes* de um *terreno fértil* para que a Matemática, área com características transdisciplinares, possa ser uma matéria *apetecível* no currículo dos alunos



- Condições de apoio. Extraordinariamente favoráveis ao desígnio das actividades, porque as instalações sediadas no campo de férias (casas, balneários, refeitório e campos polivalentes), o espaço envolvente e os materiais disponíveis adequam-se à adopção de estratégias que promovam as relações interpessoais e à prática de actividades de exploração da natureza.
- Condições culturais. Em plena serra encontram-se as *aldeias perdidas* do Talasnal, Casal Novo, Vaqueirinho, Catarredor, etc., que foram repovoadas, reconstruídas e revitalizadas, numa afirmação exemplar do respeito e preservação do património cultural e paisagístico onde se inserem. Ao contrário de outras regiões do país, aqui é possível a afirmação e o desenvolvimento de atitudes ecológicas que façam o apelo da vida ao ar livre e da preservação do ambiente natural sem deixar de o utilizar.
- Condições naturais e de desafio. A serra, as aldeias e os rios permitem situações privilegiadas para o desenvolvimento das Actividades de Exploração da Natureza, mas

não só. Assim, ao desafio que é praticar actividades como Canoagem, BTT, Escalada, Rapel e Orientação pode-se juntar o desafio da História, Ciências, Geografia ou Matemática.

Desde a primeira *Aventura na Lousã*, em 1995, o grupo de Educação Física percebeu que este envolvimento, oferecendo possibilidades ao desenvolvimento das Actividades de Exploração da Natureza e ao reforço das aprendizagens em matérias do currículo da Educação Física como a Dança e os Jogos Tradicionais (Malha e Jogo do Pau Português), oferecia também possibilidades para se constituir como extensão e contraste da sala de aula e representar para as outras disciplinas do currículo a oportunidade de aplicar, em situações reais de contacto com a natureza, aprendizagens realizadas na sala de aula.

Neste quadro, promoveu-se o trabalho colectivo entre professores de diferentes departamentos, e como resultado, vários professores, a título individual ou organizados em consequência do trabalho no respectivo grupo disciplinar, começaram a participar na *Aventura na Lousã*.

Passados seis anos, para além do grupo de Educação Física, os grupos de Matemática, Inglês/Alemão e Ciências Naturais fazem constar a *Aventura na Lousã* do seu plano anual de actividades.

Também os orientadores de estágio fazem desta actividade um momento muito especial na formação dos professores estagiários. Organizadamente, os vários núcleos de estágio orientam alguns *ateliers* temáticos, utilizando estratégias que aproveitam o contacto directo com a natureza para potenciar aprendizagens das suas disciplinas. O contacto permanente com os alunos 24 horas sobre 24 horas é, também, um campo riquíssimo para o desenvolvimento das relações interpessoais e para refazer, quando necessário, a própria relação pedagógica.

Particularmente, no que à Matemática diz respeito, os seus professores têm perseguido dois grandes objectivos:

- Elevar a cultura matemática dos nossos alunos, através da aplicação em situações reais da Matemática aprendida na sala de aula.
- Envolver os alunos das *Humanidades*, tradicionalmente menos motivados, em actividades matemáticas.



Dos vários exemplos práticos da participação da Matemática na *Aventura na Lousã*, podemos destacar:

- Provas de Orientação ou Provas Combinadas com Multiac-
tividades. Os professores de Matemática asseguram postos
de controlo onde os alunos têm de realizar um conjunto de
tarefas, nomeadamente, a resolução de problemas a partir de
conhecimentos sobre a semelhança de triângulos. Por exemplo,
como medir a altura de uma montanha com um mapa e uma
régua, ou como medir a altura de uma árvore comparando
a respectiva sombra com a sombra de uma vara com altura
conhecida.
- Canoagem. Enquanto se desenrola a actividade, grupos de
alunos resolvem problemas que utilizam determinadas carac-
terísticas do meio envolvente. Por exemplo, medir a largura
do rio e a altura de uma árvore na outra margem, utilizando
um quadrante e conhecimentos sobre trigonometria, ou medir a
largura do rio, utilizando conhecimentos sobre a semelhança de
triângulos.
- Bicicletas Todo Terreno. Os alunos anotam os tempos de pas-
sagem nos vários pontos intermédios e as distâncias entre
os vários pontos de paragem. Com estes dados realizam trata-
mento estatístico no final da actividade.
- Tiro com Arco. Os alunos anotam as pontuações que são deter-
minadas em função das várias zonas do alvo. Posteriormente,
também com estes dados, realizam tratamento estatístico.
- *Atelier* da Matemática. Enquanto decorrem outros *ateliers* com
actividades físicas, como por exemplo, a Dança, o Jogo do Pau
ou o Basebol, no *atelier* da Matemática os alunos resolvem
problemas, realizam *puzzles* ou jogam Xadrez.

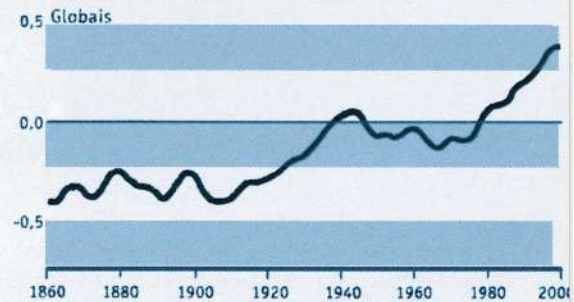
Em conclusão: A promoção de estilos de vida saudáveis em que a
prática de actividades físicas, particularmente as de exploração da
natureza, desempenham um papel relevante e os passos dados na
promoção da interdisciplinaridade e da colaboração entre profes-
sores de diferentes áreas disciplinares têm-se constituído como
sementes de um *terreno fértil* para que a Matemática, área com
características transdisciplinares, possa ser uma matéria *apetecível*
no currículo dos alunos da Escola Secundária Dona Luísa de
Gusmão.

Coordenador do Projecto *Aventura na Lousã*
João Jorge Henriques
Esc. Sec. D. Luísa de Gusmão

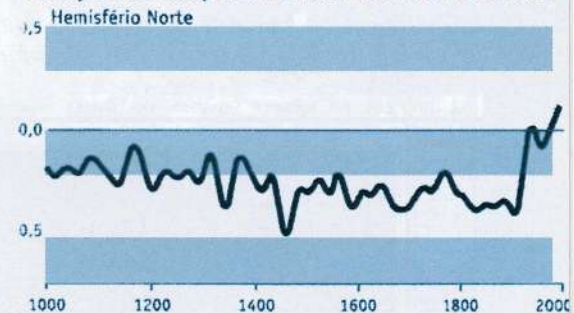
Aquecimento Global

O planeta está a aquecer mais depressa do que se esperava
e as provas acumulam-se: o grande culpado é o homem.

Variação das temperaturas nos últimos 140 anos



Variação das temperaturas nos últimos 1000 anos

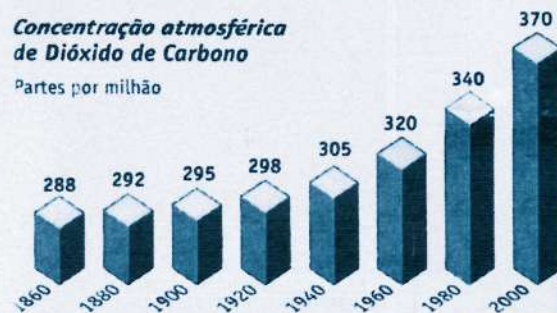


Gases com efeito de estufa

	Aumento por ano (%)	Duração (anos)
Dióxido de carbono	0,4	50-200
Metano	0,6	12
Óxido nítrico	0,25	120
CFC-12	0,0	50
HCFC-22	5,0	12
Perfluorometano	2,0	50.000
Hexafluoreto de enxofre	5,0	3.200

Concentração atmosférica de Dióxido de Carbono

Partes por milhão



REUTERS/PUBLIC

in *Público*, 23 Janeiro 2001

Eu não acredito nas ciências naturais

Kurt Gödel



Eu não acredito na matemática

Albert Einstein



Matemática e universo...

Neste número temático dedicado à "matemática e natureza", resolvemos deixar em paz as plantas e os animais e olhar para a natureza por excelência... o Universo! O mundo da astronomia e da astronomia e matemática é imenso. Tudo o que diz respeito ao conhecimento e exploração do universo é apaixonante e tem muitas conexões históricas e actuais com a matemática. É reconhecidamente um tema que entusiasma os jovens, e que poderia ser uma via para a compreensão da relevância da matemática na história das civilizações antigas e da nossa própria sociedade. Iremos apenas apresentar um bom programa de astronomia, alguns sítios na rede sobre astronomia e matemática e alguns livros fundamentais.



Um programa de computador *Starry Night Pro* — O universo ao seu alcance!

Se decidir ter um programa de computador para astronomia, neste momento não deve haver melhor escolha do que esta. Neste instantâneo do meu monitor, pode ver que em Lisboa, no dia 26 de Setembro passado, às 9 horas, 26 minutos e 25 segundos, se houvesse um "apagão" e pudesse ver as estrelas (ou se fosse, por exemplo, com o seu portátil, até ao Guincho ou ao cabo Espichel), olhando para sul poderia ver a Lua junto à constelação

Capricórnio. Para a direita, junto à constelação Sagitário, estava o planeta Marte. Ainda mais para a direita, para sudoeste, via-se já a desaparecer no horizonte a constelação Escorpião, reconhecível ainda pela lindíssima Antares e pelo par de estrelas, um pouco para a esquerda, da sua característica cauda. Se com a lupa clicasse repetidamente em Marte, veria a partir de certa ampliação aparecer a própria fotografia (sim, a fotografia!) do planeta. O que será o ponto à direita?





Fomos ver, clicando em cima. Deimos? O que é Deimos? Clicámos duas vezes e apareceu uma janela com as características de Deimos. É uma das "luas" de Marte (não sabia que Marte tinha "luas"!)...

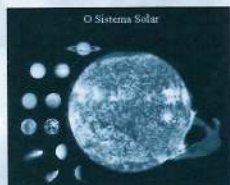
Aparece um *link* para o site <http://www.space.com>. Mais um clique. Afinal Marte tem pelo menos duas

"luas": Phobos e Deimos. Mais *links*... e aí estão fotografias de Deimos tiradas da sonda Viking II a 1400 km de distância. A sensação que se tem é que este programa é inesgotável e nenhuma informação sobre o universo conhecido nos é inacessível a partir de agora.

Não se assuste com a maçã que aparece no canto superior esquerdo da figura... Se ainda não fez o upgrade para o Macintosh, pode mesmo assim usar o *Starry Night Pro* com o PC e o Windows, pois o CD do programa vem com o programa para os dois sistemas operativos. Para mais informações vá ao *site* <http://www.starrynight.com>. Pode ser adquirido em Portugal (vá ao *site* <http://www.gem51.com/>). Existe uma versão menos avançada que a Pro, o *Starry Night Backyard*.

Sites na World Wide Web

Dois sítios portugueses



Astrosoft

Astrosoft é uma página sobre astronomia realizada na Universidade de Coimbra. Faz parte do projecto *Soft Ciências* criado em 1991 pelas Sociedades Portuguesas de Física, Química e Matemática e que tem

o apoio do Ministérios da Educação e da Ciência e Tecnologia. A página *Astrosoft*, cujo endereço é <http://nautilus.fis.uc.pt/astro/> contém extensa informação sobre:

- Sistema Solar: Uma pequena viagem pelo nosso Sistema Solar.
- Catálogo Messier: Galáxias, nebulosas, e muito mais.
- O Homem e o Universo: Realizado por alunos do ITAP.
- Luna: A Lua, o nosso satélite.
- O Céu do Crato: Artigos de Nuno Crato, com o apoio do jornal Expresso.



ANOA

Este sítio é da responsabilidade da Associação Nacional de Observação Astronómica, que tem a sua sede no Observatório Astronómico Pinhal do Rei, em S. Pedro de Moel, na Marinha Grande. O site da ANOA dá conta de numerosas iniciativas que se realizam já em Portugal relativas a astro-

nomia (apoiadas pelo Ministério da Ciência e Tecnologia), como a Astrofesta, que ocorre todos os anos no verão. O *site* dá diariamente notícias actualizadas de eventos astronómicos e é um excelente ponto de partida para aceder a informações do tipo mais variado sobre astronomia.

Dois sites em língua inglesa



Astronomiae Historia / History of Astronomy

Este é um magnífico site para quem gosta de astronomia, de história e de matemática. É mantido pela União Astronómica Internacional, o que assegura a qualidade dos conteúdos relativamente aos documentos internos. Contém numerosos *links* para documentos externos, albergados em outros sites. O endereço é <http://www.astro.uni-bonn.de/~pbrosche/astoria.html> Escolhemos alguns exemplos que mostram o interesse deste sítio para o ensino da matemática.

Aristarco de Samos (c.310-230 a.C.)

Aristarco foi um precursor na teoria heliocêntrica (a Terra gira em torno do Sol). Além disso, antecedendo também Copérnico, explica que não vemos as estrelas mover-se – devido ao movimento da Terra – porque o raio da órbita da Terra é tão pequeno comparado com a distância às estrelas que esse movimento das estrelas era muito pequeno para ser detectado. Aristarco mostrou correctamente como podemos comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.



Quando a Lua está em quarto crescente. O ângulo *TLS* é 90° e medindo o ângulo *LTS* conhece-se a forma do triângulo e portanto pode fazer-se essa comparação.



Na prática o ângulo *LTS* é difícil de medir e os valores obtidos por Aristarco muito diferentes dos reais. Mas a ideia de utilizar a geometria para começar a medir o Universo é que foi importante. Pode ler um texto de Kristen Riley sobre Aristarco no endereço <http://www.perseus.tufts.edu/GreekScience/Students/Kristen/Aristarchus.html>

Johannes Kepler (1571-1630)

Kepler pode servir de inspiração para a introdução da história no ensino da matemática, e também para as relações da matemática com a astronomia. Pode ver um artigo interessante e informativo sobre Kepler no endereço

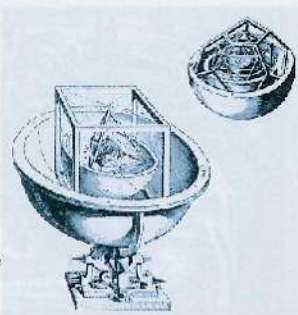
<http://www.phys.virginia.edu/classes/109N/1995/lectures/kepler.html>

Este *site* é sobretudo um ponto de partida para encontrar informação sobre temas de astronomia e história da astronomia (que coincide em parte, em certos períodos, com a história da matemática). A melhor maneira de encontrar esses temas é através dos nomes dos matemáticos, no sub-endereço

http://www.astro.uni-bonn.de/~pbrosche/hist_astr/ha_pers.html

ou por tópicos, no sub-endereço

http://www.astro.uni-bonn.de/~pbrosche/hist_astr/ha_items.html



Um sítio da NASA para a educação

Um conjunto extenso de páginas da Nasa dedicadas às conexões entre a exploração

do espaço e a educação, em particular a matemática. Endereço:

<http://spacelink.nasa.gov/>

Apenas dois exemplos do que pode encontrar aqui:

From Stargazers to Starships

(dos observadores das estrelas às naves espaciais)

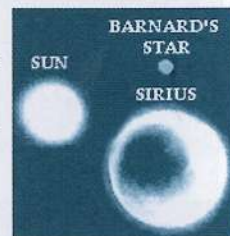
Este conjunto de páginas constitui um verdadeiro livro *online* sobre o movimento da Terra, a mecânica de Newton, o Sol e a exploração do espaço. Glossário, cronologias, problemas, perguntas e respostas, tudo escrito de modo acessível e directo, profusamente ilustrado. Endereço:

<http://www-spcf.gsfc.nasa.gov/stargaze/Sintro.htm>

De que tamanho é aquela estrela?

Um plano completo de um conjunto de aulas para o terceiro ciclo do ensino básico sobre os processos de comparar a dimensão das estrelas, envolvendo matemática, física, astronomia. Talvez inspire um bom projecto para a nova área do Ensino Básico. Endereço:

http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/teachers/lessons/star_size/star_size.html



Livros sobre astronomia

Em português



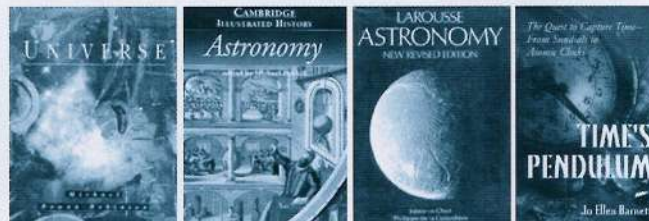
Na Gradiva (pode adquirir online: <http://www.gradiva.pt/>)

- *O meu Primeiro Livro de Astronomia*, Jamie Jobb
- *Guia prático de Astronomia*, Denis Berthier e Jean Lacroux
- *Zodiaco*, Nuno Crato
- *Eclipses*, António Magalhães, António Cidadão, Pedro Ré, Nuno Crato

Na Escolar Editora (pode adquirir online: <http://www.livraria-escolar-editora.pt/>)

- *Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas*, Máximo Ferreira

Em inglês



- *Universe*, Michael Rowan-Robinson. Harlow: Longman Group UK Limited, 1990
- *The Cambridge Illustrated History of Astronomy*, org. por Michael Hoskin. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- *Larousse Astronomy*, org. por Philippe de la Cotardière, Nova edição revista. Twickenham, Middlesex: Hamlyn Publishing Group, 1987.
- *Time's Pendulum*, Jo Ellen Barnett. New York: Plenum Trade, 1998.

Pode adquirir o 2º e o 4º *online* em www.amazon.co.uk. Quase esgotados o 1º e 3º em www.barnesandnoble.com.

O que já não tenho dúvidas é de que não é nada fácil descrever matematicamente os fenómenos da natureza, mesmo aqueles que nos parecem evidentes. Quase sempre a natureza acaba por não se adaptar completamente aos nossos *brilhantes* raciocínios e às nossas *conjecturas perfeitas*.

Sempre gostei dos fenómenos naturais e portanto de meteorologia (mas, confesso já, os meus conhecimentos sobre o assunto são bastante limitados). Tenho vários instrumentos em casa e o meu preferido é um termómetro que dá a temperatura no interior e no exterior, podendo também mostrar as máximas e mínimas desde o momento por nós escolhido. Por isso, quase todos os dias vou ver quais foram as temperaturas extremas.

No entanto, há já algum tempo que me interrogava como evoluiria a temperatura do ar ao longo de um dia *normal*. O sentido que dou a normal é um dia calmo, sem alterações súbitas do tempo. Tinha feito algumas conjecturas: haveria um máximo a meio da tarde, um mínimo a meio da noite, seriam praticamente iguais as temperaturas às 0 horas e à mesma hora do dia seguinte e, se não houvesse súbita mudança meteorológica, no dia seguinte a situação repetir-se-ia quase sem alterações.

A função tempo/temperatura teria portanto de ser cíclica. Uma boa hipótese era uma função sinusoidal. Certa vez, quando discuti esta questão com o Hélder Martins, ele também sugeriu logo uma função deste tipo.

Ao trabalho

Um destes dias resolvi tirar isto a limpo. Actualmente, não há qualquer dificuldade mesmo para quem não tenha grandes instrumentos meteorológicos. O CBL2 e uma calculadora TI-83 são suficientes.

Natureza Difícil

José Paulo Viana

Preparei então o material. Liguei a TI-83 ao CBL2 e coloquei um sensor de temperatura no canal 1 do CBL2. Na calculadora fui à tecla APPS buscar a aplicação CBL/CBR que serve para trabalhar com os instrumentos de recolha de dados e, no menu principal, escolhi a opção DATA LOGGER (registo de dados).

```
APPS
1: Finance...
2: CBL/CBR
3: Interact
4: Organize
5: Periodic
6: Portug
```

```
CBL/CBR APP:
1: GAUGE
2: DATA LOGGER
3: RANGER
4: QUIT
```

Agora era preciso dar as instruções para a experiência pretendida. Escolhi fazer registos de quarto em quarto de hora (900 segundos), o que significava 97 registos (4 x 24 mais um para comparar a temperatura às 0 horas do dia escolhido com a temperatura às 0 horas do dia seguinte).

Activei então o sensor de temperatura; número de registos: 97; intervalo entre registos: 900; unidade: grau celsius; gráfico: em tempo real (para se ir vendo o que acontecia ao longo do dia).


```

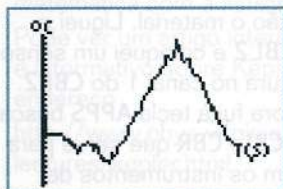
PROBE: Light
Volt Sonic
#SAMPLES: 97
INTRVL(SEC): 900
UNITS: °F
PLOT: Realtime End
DIRECTNS: Off
GO...

```

Consultada a previsão meteorológica, vi que o dia 9 de Setembro de 2001 estava de acordo com o pretendido: céu limpo, sem alteração prevista das temperaturas extremas.

Exactamente às 0 horas desse dia carreguei na instrução GO... e a máquina iniciou os registos.

Precisamente às 24 horas o programa terminou e pude ver o gráfico.



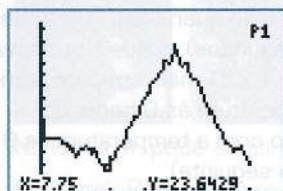
As temperaturas estavam na lista TEMP e os tempos em TTEMP. Como a unidade usada para o tempo era o segundo e dá muito mais jeito trabalhar em horas, criei a lista HORAS, dividindo a lista original TTEMP por 3600.

```

LTTEMP/3600 -> LHOR
AS

```

Com a nova lista fiz outro gráfico e usando TRACE fui à procura das temperaturas extremas e respectivas horas.

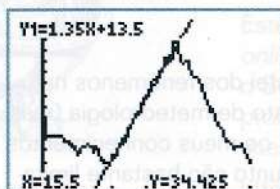


9.Set

A mínima foi de 23,6° às 7h45 e a máxima 34,7° às 15h30. Começavam as surpresas. Se a máxima era à hora esperada (a meio da tarde), já a mínima não correspondia de modo nenhum à previsão de ser a meio da noite. Fui ao jornal e vi que o nascer

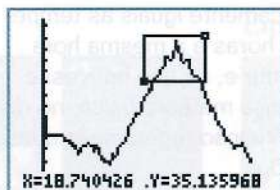
do sol tinha sido às 7h13. A temperatura tinha descido, com algumas oscilações, até um pouco depois do sol aparecer. E agora o intervalo de tempo entre o mínimo e o máximo da função era 15h30 - 7h45 = 7h45 horas e portanto muito longe das 12 horas que tinha previsto.

Pior ainda, observando o gráfico vemos que a partir das 7h45 a temperatura cresce quase uniformemente. O gráfico confunde-se com uma recta. Com alguns cálculos simples encontra-se uma recta que se ajusta quase perfeitamente



A temperatura cresce cerca de 1,35° por hora. Atingido o máximo, decresce também quase uniformemente até às 22 horas, bastante depois do pôr do sol (que foi às 19h55). Ou seja, das 7h45 às 22h, a função é constituída por dois ramos cujos gráficos são rectas. Durante a noite, embora com algumas oscilações, a temperatura vai decrescendo lentamente.

E já agora reparemos numa curiosidade. Na zona superior do gráfico há umas imperfeições quase simétricas. Fazamos um ZOOM para ver melhor.



Que terá acontecido? Passaram umas nuvens?

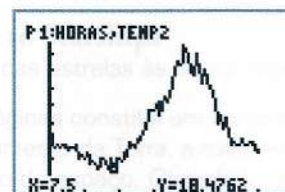
Bem, voltemos ao essencial. Estamos então muito longe de um gráfico sinusoidal. Será sempre assim ou isto foi excepcional?

Mais trabalho

O melhor era avançar com novas experiências.

Foi o que fiz a 11 de Setembro (o dia em que o mundo mudou, segundo a primeira página do jornal *Público*) e depois a 14 de Setembro.

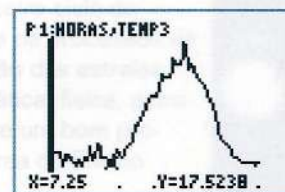
O dia 11 foi um pouco diferente. O céu esteve nublado quase toda a manhã e houve nuvens dispersas durante a tarde.



11.Set

A temperatura começou a subir às 7h30 e a máxima 25,4° foi novamente às 15h30.

O dia 14 foi um dia limpo e quente.



14.Set

A temperatura começou a subir às 7h15, atingindo um máximo de 27,7° às 15h30.

As semelhanças entre os gráficos dos três dias são muitas. Subida quase uniforme desde o nascer do sol até às 15h30; descida a partir daí, também bastante regular, até cerca de duas horas depois do sol se pôr; ligeira descida da temperatura durante a noite, com o mínimo perto do nascer do sol.

Fiquei desgostoso: a minha bela conjectura tinha ido por água abaixo. O modelo não poderia ser de modo nenhum uma senoide. E para o descobrir precisava de fazer mais experiências. Vai ser preciso prolongar a investigação por muito mais tempo.

A duração do dia

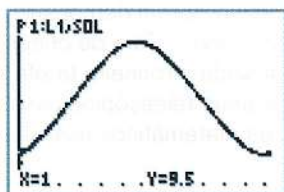
Fiquei com vontade de encontrar algum fenómeno natural que fosse sinusoidal.

Lembrei-me de um problema, proposto na 1ª chamada da 1ª fase do exame de 12º ano de 2000, onde aparecia uma função que dava, para Lisboa, a duração do dia (entre o nascer e o pôr do sol) ao longo do ano.

Por sorte, aqui há uns meses o Sérgio Valente, que sabe do meu gosto por estes fenómenos, tinha-me oferecido um exemplar dos "Dados Astronómicos para Almanagues de 2000", editado pelo Observatório Astronómico de Lisboa. É um livrinho interessantíssimo, com imensas informações: constantes astronómicas, calendários católico, israelita e islâmico, entrada do sol nos signos de zodiaco, fases da lua, enxames de meteoróides, eclipses, nascimento e ocaso da lua em Lisboa e, felizmente, as horas, com aproximação ao minuto, de nascimento e ocaso do sol em sete cidades portuguesas, entre as quais Lisboa.

Com um pouco de trabalho (mas tinha de ser...), fiz as subtrações entre os instantes de nascer e pôr do sol e converti os minutos em horas para obter a tabela com a duração dos 366 dias de 2000. Esses dados foram colocados na calculadora na lista SOL.

Construí em L1 uma lista com os números de 1 a 366, correspondente aos dias do ano. O gráfico obtido foi este.



Que bela sinusóide!

Agora era preciso encontrar uma função que se adaptasse a estes dados. A função seria do tipo

$$f(x) = A + K \sin [B(x - D)]$$

Claro que poderia tentar usar a regressão sinusoidal da calculadora para chegar à função, mas pareceu-me mais interessante pensar um bocado e descobrir os parâmetros através do que eles representariam. Nota: descobri mais tarde que a calculadora, por motivos que ainda não averigui, não conseguia fazer a regressão sinusoidal...

Como o seno varia entre -1 e 1 , a função vai variar entre $A - K$ e $A + K$, logo A representa a duração média dos dias em Lisboa.

Pedindo os cálculos estatísticos da lista SOL, vem:

```
1-Var Stats
x=12.19043716
Σx=4461.7
Σx²=55664.0033
Sx=1.86821273
σx=1.865658781
n=366
```

```
1-Var Stats
n=366
minX=9.45
Q1=10.36666667
Med=12.2166667
Q3=14.01666667
MaxX=14.883333
```

O dia mais curto tem 9,45 horas, o mais longo 14,88 e o dia médio 12,19 horas.

Logo, $A = 12,19$.

O parâmetro K está relacionado com a latitude do lugar. Quanto maior for a latitude, maior será o valor de K . Mas K tem também a ver com os dias mais curto e mais longo do ano, ou seja, com os extremos da função. Com efeito, o máximo será $A + K$ e o mínimo $A - K$. Então:

$$2K = 14,883 - 9,45$$

Logo, $K \approx 2,72$

Quanto ao parâmetro B , sabemos que tem a ver com o período. Uma função do tipo $\sin(Bx)$ tem período $2\pi/B$. A função que procuramos tem período 366. Bem, na realidade, tem período aproximadamente igual a 365,24 mas simplifiquemos.

$$\text{Logo, } B = 2\pi/366 \approx 0,0172.$$

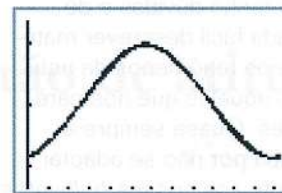
Finalmente, falta o parâmetro D , que provoca o deslocamento horizontal do gráfico. Para o encontrar, lembremos que o dia médio, que ocorre quando $\sin[B(x - D)] = 0$, deve corresponder ao equinócio da Primavera que, em 2000, ocorreu no dia 20 de Março. Este dia é o 80º dia do ano.

Logo, $D = 80$.

Vejamos se funciona...

Quase perfeito! Fiquei satisfeitíssimo.

```
Plot2 Plot3
Y1=12.19+2.72sin
n(0.0172(X-80))
V2=
V3=
V4=
V5=
V6=
```



Voltam as dúvidas

Passado pouco tempo, ao analisar com mais detalhe os valores obtidos, comecei a descobrir vários aspectos estranhos.

O dia médio (12,19) era diferente do dia mediano (12,22), diferente do dia do equinócio da Primavera (12,15) e do dia do equinócio de Outono (12,13). Ora, julgava eu, estes valores deveriam ser todos iguais...

Por outro lado, tinha aprendido nas minhas aulas de Geografia que o dia médio, em qualquer parte do mundo, é de 12 horas. Ora, o valor obtido (12,19) excede o previsto em mais de 11 minutos.

Fiquei intrigado e preocupado. O que seria o dia médio? Em que momentos começa e acaba um dia? Quando o centro do sol toca a linha do horizonte?

Fui consultar melhor os dados astronómicos. O que estava lá escrito era "Nascimento e ocaso do Sol (bordo superior)". Afinal não era o centro do sol que contava, era o bordo superior. Mas pareceu-me que isso não alterava nada.

Umas horas depois, fez-se luz (do sol?) no meu espírito. O bordo superior do sol no nascimento não corresponde ao bordo superior no ocaso. Então, à duração média prevista de 12 horas torna-se necessário acrescentar o tempo que, por exemplo, no ocaso ocorre entre o momento em que o bordo inferior toca na linha do horizonte até ao momento em que o bordo superior desaparece.

Alegrei-me. Mas por pouco tempo. É que me lembrei que o intervalo de tempo em que o sol se está a pôr

é muito inferior a 11 minutos (pelo menos do que eu me lembro...).

Infelizmente, ainda não tive oportunidade de ir ver um pôr do sol junto ao mar, munido de um cronómetro, para confirmar isto tudo.

O que já não tenho dúvidas é de que não é nada fácil descrever matematicamente os fenómenos da natureza, mesmo aqueles que nos parecem evidentes. Quase sempre a natureza acaba por não se adaptar completamente aos nossos *brilhantes* raciocínios e às nossas *conjecturas perfeitas*. Cada investigação que fazemos obriga-nos a ir ainda mais longe, se queremos entender com profundidade aquilo que se passa à nossa volta. Mas, é claro, são estes desafios constantes que fazem da investigação uma actividade tão estimulante.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Vergílio Ferreira



A matemática não só é real como é a única realidade. Isto é, todo o universo é obviamente constituído de matéria. A matéria é constituída por partículas. Estas são constituídas por electrões, neutrões e protões, logo todo o universo é constituído por partículas. E agora, de que serão feitas as partículas? Não, não surgem do nada. A única coisa que podemos realmente dizer sobre um electrão é a que decorre da enumeração das suas propriedades matemáticas. Em certo sentido podemos dizer que a matéria se dissolve, restando apenas a sua estrutura matemática.

Martin Gardner



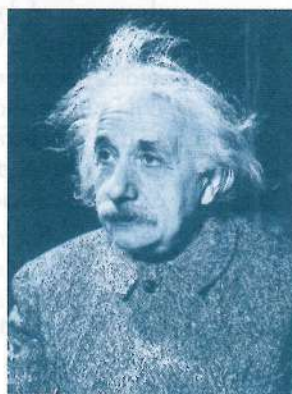
Onde existe matéria
existe geometria

Johannes Kepler



A descoberta do planeta Neptuno em 1846 foi resultado espectacular e excitante da astronomia matemática. A própria existência deste novo membro do sistema solar e a sua localização exacta, foram demonstradas com papel e lápis. Para os observadores foi deixada a rotineira tarefa de apontar os seus telescópios para o ponto que os matemáticos assinalaram

James R. Neumann



Quanto mais as leis matemáticas se referem à realidade menos certas são, quanto mais certas são menos se referem à realidade.

Albert Einstein

Ciência na escola — uma questão de atitude(s)

Cristina Loureiro

O grande valor da teoria heliocêntrica dos tempos modernos foi a contribuição que deu na batalha pela liberdade de pensamento e de expressão.

Kline, 1987, p. 147

Comecei por designar este trabalho por *Matemática e Ciências da Natureza — ligações possíveis e desejáveis*, mas à medida que a minha reflexão sobre esta problemática tem avançado tenho vindo a perceber que esta ligação está realmente na forma de encarar o ensino da ciência, em que a matemática necessariamente se tem de incluir, e o seu papel na educação. Embora eu tenho optado por um título em que refiro apenas atitudes, é evidente que estas não estão desligadas dos conhecimentos e das capacidades, e só faz sentido encarar todas elas numa perspectiva articulada e integrada no sentido das competências das actuais orientações curriculares. Porém parece-me importante focar a atenção em aspectos particulares para melhor os compreender, conhecer e caracterizar, e daí a minha intenção de centrar agora a atenção nas atitudes.

As recentes orientações curriculares para o ensino básico, que explicitam muitas das ideias que sobre a educação básica já são veiculadas há algum tempo, reforçam a afirmação fundamental de que a aprendizagem não pode ser um conjunto de compartimentos estanques e desligados da realidade. A Matemática é, em minha opinião, a disciplina que mais isolada tem estado na escola e por isso

há muito caminho a percorrer. O novo documento sobre o currículo do ensino básico afirma que

É importante sublinhar que, na escola básica e em qualquer dos ciclos, a Matemática não pode e não deve ser trabalhada de forma isolada, nem isso está na sua natureza. Pelos instrumentos que proporciona e pelos seus aspectos específicos relativos ao raciocínio, à organização, à comunicação e à resolução de problemas, a matemática constitui uma área de saber plena de potencialidades para a realização de projectos transdisciplinares e de actividades interdisciplinares dos mais diversos tipos. ([9], p. 59)

Penso que a relação privilegiada tem de ser com as ciências físico naturais e é isso que vou procurar defender tomando como objecto de estudo a área curricular de Matemática e Ciências da Natureza no 2º ciclo, com extensões naturais para os 1º e 3º ciclos. Há vários tipos de razões para estabelecer fortes ligações entre estas duas disciplinas dando assim fundamentação científica, cultural, pedagógica e didáctica à existência desta área curricular. Aliás, a única situação em que a disciplina de Matemática está formalmente associada a outra disciplina escolar. Em minha opinião, qualquer reformulação curricular deverá encarar frontalmente esta situação e estabelecer explicitamente exemplos de ligações para que esta área curricular não fique apenas no papel.

Há fortes razões e de natureza diversa para considerar uma área disciplinar de Ciências da Natureza e Matemática. Estas razões são de natureza científica, onde se inclui a dimensão cultural, e pedagógico-didáctica.

Penso também que a formação inicial de professores do ensino básico deve dar muita atenção a este facto assumindo uma formação científica e cultural dos futuros responsáveis pela iniciação científica das crianças. Infelizmente a história da ciência, campo privilegiado de ideias para compreender a natureza e a evolução das ciências físico naturais e da matemática, bem como as ligações entre estas ciências, é uma falha muito grande na formação de professores e não tem sido objecto de reflexão frequente entre nós, daí a necessidade de estudar, escrever e discutir mais sobre este assunto.

Também o desenvolvimento de competências de natureza cultural exigem conhecimentos e reflexões sobre a história da ciência. É difícil valorizar e respeitar o que se desconhece ou que nem sequer se sonha como aconteceu.

Porquê ligar Matemática e Ciências da Natureza?

Às vezes veicula-se a ideia que na educação há modas, agora vale esta ideia orientadora, depois vale outra, como se se tratasse apenas de uma intenção frívola de variar. Há fortes razões e de natureza diversa para considerar uma área disciplinar de Ciências da Natureza e Matemática. Estas razões são de natureza científica, onde se inclui a dimensão cultural, e pedagógico-didáctica.

Do ponto de vista científico a articulação de ideias, de métodos, de processos, de instrumentos é inerente ao próprio conhecimento científico e ao seu desenvolvimento.

Como afirma João Caraça ([3], p. 62) *não é por sermos "moderníssimos", não é por moda (por distinção), que cultivamos a interdisciplinaridade. A necessidade de tratar questões de natureza interdisciplinar ou multidisciplinar vem das próprias questões: e tal pode significar uma transformação do modo de estar no mundo, assinalando a vantagem de se congeminar uma nova visão, mais bem adaptada à situação que vivemos.*

Este investigador refere também haver necessidade de que surja uma visão do universo diferente da que nos guiou nos últimos séculos. Esta

emergente *nova relação temporal dos homens com a natureza e o universo* terá de acolher plenamente a complexidade, o florescimento e a articulação dos saberes que para ela concorrem. E acrescenta ainda que *nada é permanentemente adquirido, nem eternamente consolidado — a não ser a urgência de conhecer e de aprender.* ([3], p. 62)

Destaco esta perspectiva de construção de *uma relação temporal dos homens com a natureza e o universo*, que se liga à *urgência de conhecer e de aprender*, e que aponta para a necessidade da escola se aproximar dos métodos científicos. Esta intenção está bastante vulgarizada no ensino das ciências físico naturais, mas na matemática continua a haver grandes dificuldades em integrar esta orientação com características de uma ciência experimental. A matemática é também uma forma de pensar a natureza, mas porque é diferente das ciências físico naturais precisa de ser tratada em conjunto, para que se estabeleçam analogias e diferenças e se compreenda melhor a natureza de cada uma delas. Um dos matemáticos que mais se tem dedicado à divulgação de uma perspectiva naturalista da matemática é Ian Stewart. Duas referências suas, que a seguir apresento, registam a forma como ele considera que a matemática pode partir da natureza e se liberta dela.

Estes sinais que a natureza nos dá são outras tantas belezas para descobrir, e para isso não é necessária qualquer formação matemática. E há também beleza na narrativa matemática que, partindo destes sinais, deduz regras escondidas e regularidades, mas esta beleza é de natureza diferente, ela reside nas ideias mais do que nos próprios objectos. ([11], p. 12)

Sejam quais forem as razões, a matemática é sem contestação um meio útil de pensar a natureza. Que queremos fazer dos motivos que observamos? Muitas respostas são possíveis. Queremos compreender como se produzem; por que se produzem, o que é diferente; queremos organizar os motivos e periodicidades da maneira mais satisfatória possível; prever

o modo como a natureza se comporta; controlar a natureza para nosso uso; e utilizar o que aprendemos sobre o mundo que nos rodeia. A matemática ajuda-nos em cada uma destas coisas e revela-se muitas vezes indispensável. ([11], p. 28)

Em meu entender há convergências e divergências entre os modos como a matemática e as ciências físico naturais olham e pensam a natureza. A percepção de analogias e diferenças é uma necessidade no desenvolvimento de uma atitude científica perante a natureza e o universo.

O que considero interessante é que estas razões de natureza científica acabam por ser também razões pedagógico didácticas. Perspectivar a relação científica com a natureza é pensar num ensino científico activo, construtivo, contextualizado, integrado e com significado.

Ligações possíveis e desejáveis

A breve reflexão deste texto não pretende ser mais do que o registo de algumas ideias teóricas importantes, mas ficaria incompleta se não fossem avançadas, de forma sustentada, algumas sugestões concretas de actividades a realizar com os alunos.

Nos últimos anos têm sido realizados alguns projectos de ligação entre a matemática e as ciências da natureza ao nível do ensino básico. Quando estes trabalhos forem mais divulgados não será certamente difícil aceder a um conjunto muito alargado de propostas de trabalho que facilitem a inovação curricular.

Por uma questão de simplificação as sugestões e propostas que apresento estão organizadas em itens, de natureza diversa e que, como não poderia deixar de ser, não são estanques. Episódios da história da ciência, meios de comunicação e ciência, simetria, números e medições, relações numéricas e funções, utilização e construção de instrumentos são as pontes que criei para ilustrar ligações possíveis e desejáveis.

Episódios da história da ciência

A história da ciência é fundamental para compreender o papel da matemá-

tica no desenvolvimento científico e para valorizar este tipo de actividades no trabalho com os alunos. Para além dessas actividades, estes podem realizar trabalhos sobre a própria história da ciência que permitem fazer articulações muito interessantes com outras áreas disciplinares.



Galileu Galilei

Quando se pensa na história da ciência, um dos cientistas que interessa referir é Galileu (1564-1642), que entre muitos outros trabalhos realizados foi o inventor do telescópio. Na matemática geralmente não falamos dele, mas há aspectos do seu trabalho que são fundamentais para esta discussão.

Segundo Kline ([5], pp. 213-216),

A mais artística e frutífera criação da multifacetada mente de Galileu foi um grande plano para ler o livro da natureza. Em essência ele oferece um conceito totalmente novo dos objectivos científicos e do papel da matemática para atingi-los.[...]

O segredo do sucesso da ciência moderna foi a selecção de um novo objectivo para a actividade científica. O novo objectivo, estabelecido por Galileu e perseguido pelos seus sucessores, consiste na obtenção de descrições quantitativas dos fenómenos científicos independentemente de qualquer explicação física. O carácter revolucionário deste novo conceito de ciência será tanto mais apreciado se for comparado com a actividade científica das épocas anteriores. [...]

Galileu foi o primeiro homem a compreender que as especulações sobre as causas e razões dos fenómenos não tinham feito avançar muito o conhecimento e não tinham dado ao homem assim tanto poder para prever e controlar os acontecimentos da natureza. Por estas

razões propôs-se substituí-las pelas descrições quantitativas dos fenómenos. A sua proposta pode ser clarificada com um exemplo. Na simples situação de lançar uma bola podemos especular indefinidamente porque é que a bola cai. Galileu faz-nos pensar de outro modo. A distância do ponto de partida a que a bola se encontra aumenta à medida que o tempo passa a partir do instante de lançamento. Em linguagem matemática a distância a que a bola cai e o tempo que demora a cair são variáveis porque ambas variam com a queda da bola. Procuremos, disse Galileu, alguma relação matemática entre estas duas variáveis. A resposta que Galileu encontrou escreve-se nos dias de hoje por esta fórmula científica tão simples que é $d = 5t^2$. [...] Fórmula esta que nada diz acerca das razões porque a bola cai ou sempre tem caído no passado e continuará a cair no futuro. E mesmo pensando que estas fórmulas são usadas para relacionar variáveis que o cientista suspeita que estão relacionadas é verdade que ele não tem que investigar, ou compreender, a relação causal para tratar a situação com sucesso. É este facto que Galileu viu claramente ao enfatizar a descrição matemática em detrimento de uma investigação qualitativa e causal da natureza menos bem sucedida.

Para Kline, o que este e muitos outros exemplos simples ilustram é como *o matemático pode ficar sentado na sua cadeira e obter dúzias de significativas leis da natureza.*

Esta perspectiva do trabalho de Galileu valoriza o interesse do trabalho didáctico de procurar e registar valores, construir tabelas, procurar relações numéricas, simplesmente, sem a ambição de explicar e compreender os fenómenos a que esses valores estão ligados. O facto desta procura ser feita a partir de situações e fenómenos naturais pode ser uma forma de contribuir para uma observação mais atenta, focada e completa da natureza e do meio envolvente. De certo modo muito do trabalho experimental da matemática é um trabalho

de articulação com as ciências físico naturais.



Johann Kepler

Um outro episódio da história da ciência que prossegue esta orientação de exploração quantitativa é o trabalho de Johann Kepler (1571-1630).

Kepler foi assistente do famoso observador dos céus Tycho Brahe e sabe-se que, influenciado pelas harmoniosas relações do sistema copernicano, ele se decidiu a explorar os inúmeros dados astronómicos, recolhidos por Tycho Brahe em toda a sua vida de observador, para procurar novas e harmoniosas relações matemáticas que relacionassem os fenómenos naturais entre si. O que sempre me fascinou neste episódio foi a persistência de Tycho Brahe, que dedicou a sua vida a observar, medir e registar milhares de dados numéricos sem saber se alguma outra coisa daí poderia advir, e a intuição e imaginação de Kepler que pegou nesses dados e nas ideias de Copérnico e inventou uma série de relações e modelos matemáticos. Trabalharam separadamente, e tinham até ideias diferentes sobre a teoria heliocêntrica, mas isso não invalida a atitude cooperativa que está presente neste trabalho e que é inerente à construção do conhecimento científico.

Vale a pena conhecer melhor este episódio e perceber como a religião, a física, a astronomia, e o senso comum se submeteram à matemática por ordem de Copérnico e Kepler, ([5], pp. 133-149). Kline afirma mesmo que estes dois cientistas, ao formularem a teoria heliocêntrica e as suas leis, estabeleceram as orientações da ciência moderna nomeadamente no aspecto de que a razão e a matemática são mais importantes para compreender e interpretar o universo que a evidência dos sentidos.

Ian Stewart afirma que *Kepler estava fascinado pela presença de padrões*

matemáticos na natureza, e consagraram uma grande parte da sua vida a procurá-los nos fenómenos planetários. Kepler estendeu também este seu interesse por padrões a outros fenómenos e situações. Ele foi o primeiro europeu a reconhecer a simetria hexagonal dos flocos de neve.

É possível continuar a pensar em muitos outros episódios e referir muitos outros nomes marcantes neste tipo de articulações entre a matemática e as ciências físico naturais, como Eratóstenes, Arquimedes, Leonardo da Vinci, Pedro Nunes, Leibniz, Newton, os irmãos Bernoulli, Euler, Fourier, e muitos mais. Fica a porta aberta.

Não posso deixar de referir que nesta reflexão sobre atitudes científicas faz todo o sentido estabelecer também fortes ligações com as ciências sociais, mas foi minha opção não explorar agora também essa ponte.

Meios de comunicação e ciência

Os meios de comunicação são uma fonte útil e inesgotável de ideias e pontos de partida para a realização de actividades de articulação entre a matemática e as ciências naturais. Programas educativos, que infelizmente escasseiam em Portugal, artigos de jornais ou de revistas, informações breves de telejornal e até anúncios podem ser o início de muitos trabalhos a realizar com os alunos. Estas fontes poderão ser muitas vezes uma motivação para estudar novos aspectos da matemática e das ciências naturais e aprender como estas estão presentes e são utilizadas, para o bem e para o mal, no mundo que nos rodeia. Para além das potencialidades educativas de conteúdo científico que estes materiais apresentam há a considerar o aspecto do desenvolvimento da atenção ao que se está a passar à nossa volta e de uma atitude crítica face à informação que estes meios de comunicação veiculam. A matemática tem naturalmente um papel relevante em toda esta informação e muitas vezes é usada de uma forma incompleta ou incorrecta que permite as mais perigosas distorções. A estes aspectos podemos acrescentar a actualidade, a versatilidade do conteúdo, a adequação do formato e a

facilidade de acesso. Numa das actividades apresentadas nesta revista é dado um exemplo de uma actividade que tem por base um artigo de jornal.

Há vários livros em que pode ser obtido material interessante para este tipo de trabalho com os alunos e para a formação de professores. John Allen Paulos em *As Notícias e a Matemática*, pp. 240-242, defende que

O conjunto de perguntas padrão que os jornalista fazem e os leitores querem ver respondidas deveria ser alargado. Além do Quem, do Quê, do Onde, do Quando, do Porquê e do Como, deveria também incluir-se o Quantos?, Com que probabilidade? Que proporção? A que conclusão chegamos quando comparamos esta quantidade com outras? Qual a sua taxa de crescimento e que resultados obtemos ao comparar essa taxa com outras taxas de crescimento? [...]

E continua com outros exemplos de questões pertinentes numa perspectiva matemática correcta para concluir mais à frente que

Imersos nesta rede fervilhante de informação, chegamos por vezes à conclusão de que as respostas que mais buscamos permanecem para além dos nossos horizontes de complexidade. As bolas de cristal estão todas baças ou, no caso dos jornais, borradas de tinta. Apesar da promessa (ou ameaça) de profecias matemáticas sobre o futuro, temos muitas vezes de nos contentar com as manchetes do presente. Por esta razão, os jornais serão sempre novos e neles haverá sempre um elemento de romance. Compre um jornal e descubra isto mesmo.

Segundo Cano e Romero, ([12], p. 225), no que respeita à exploração matemática, a informação veiculada nos meios de comunicação pode ser trabalhada nas seguintes perspectivas: interpretar dados, relações e resultados; estimar e aproximar resultados e valores; empregar métodos de tentativa e erro; simplificar tarefas difíceis; procurar padrões e modelos; fazer conjecturas e comprovar hipóteses; demonstrar e refutar.

Quando temos em atenção que a participação na vida cívica de forma livre, responsável, solidária e crítica é um dos princípios e valores orientadores do currículo ([9], p. 15), não podemos de deixar de dar muita atenção à multiplicidade de documentos, escritos, orais ou visuais que são produzidos pelos meios de comunicação para procurar encará-los com atitudes científicas.

Simetria

A simetria apela tanto ao artista como ao cientista; ela está intimamente associada com a inata capacidade humana de apreciar padrões. A simetria está ligada a muitos dos mais profundos padrões da Natureza, e hoje é fundamental para a nossa compreensão científica do universo. ([12], p. 26)

O conceito de simetria é muito antigo, mas tem evoluído muito também. Ian Stewart considera que levou mais de dois mil e quinhentos anos para que o conceito de simetria tenha evoluído de modo que os cientistas e os matemáticos o possam usar mais do que admirar.

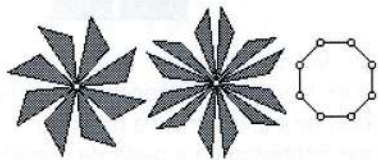
O aspecto mais importante a fixar sobre este conceito é que uma simetria de um objecto é qualquer transformação que o deixa aparentemente invariante. Outro é que a simetria é um instrumento de descrição qualitativa e quantitativa dos objectos e dos fenómenos. Os fenómenos periódicos podem ser estudados do ponto de vista da simetria, e isso é útil para a sua compreensão e formalização matemática. A caracterização e a comparação de simetrias são por isso mesmo ideias poderosas que se articulam com muitas outras ideias e conceitos matemáticos.



Star of Bethlehem

Só um olhar matemático permite encarar flores, jantes de automóveis e logotipos para descobrir aspectos comuns entre eles. Esse olhar está carregado de simetria.

Recolher imagens de flores, jantes e logotipos, classificá-las de maneiras diversas, caracterizar cada classificação, criar novos elementos para as categorias criadas, reclassificar quando se acrescentam outros objectos são actividades matemáticas por excelência acessíveis às crianças desde muito pequenas e fundamentais no desenvolvimento de atitudes científicas. Para além da multiplicidade de imagens que é possível encontrar à nossa volta para fazer este trabalho, qualquer programa de geometria dinâmica permite criar uma fábrica inesgotável de rosáceas, figuras com simetria de rotação.



Da simetria de reflexão das 2500 espécies diferentes de orquídeas, passando pelas folhas de muitas plantas e por muitos animais são inúmeras as possibilidades de encontrar e explorar este tipo de simetria. Uma das ideias mais interessante será sempre analisar se existe ou não simetria de reflexão e, no caso de não existir, quais são os elementos que a quebram.

Partindo de situações naturais são inúmeras as possibilidades de observação, caracterização, organização e classificação. A simples observação e classificação de muito do que nos rodeia passa pela utilização de instrumentos matemáticos. E mesmo que nos fiquemos pela caracterização há muitas possibilidades interessantes. Do ponto de vista da convergência entre ciências físico naturais e matemática, estas duas capacidades são fundamentais para a interpretação do mundo natural.

A interpretação do mundo natural vai variando, como a própria história do homem e do pensamento; os modos de ordenar, classificar, designar e, em definitivo, explicar a Natureza, estão profundamente imersos nas diferentes formas de compreender a realidade do mundo e o que desta podemos conhecer. ([1], p. 7)

Do ponto de vista da divergência da matemática relativamente às ciências físico naturais, que se traduz na criação matemática sem limites e sem fronteiras, é importante citar Kline que reconhece nas civilizações dispostas a aliar-se com a natureza e o universo e, ao mesmo tempo, abertas à liberdade e à capacidade infinitas do pensamento, independentemente das promessas de solução imediata para os problemas do homem e do universo, um melhor florescimento da matemática ([5], p. 120).

Números e medições

Uma das preocupações fundamentais quando se inicia e desenvolve o trabalho com números é a construção do sentido numérico, sentido este que é indissociável dos inúmeros contextos em que os números são utilizados.

Vem a propósito uma breve reflexão sobre o que se pode entender por contexto e qual o seu papel na aprendizagem. Segundo Borasi, citado por Meyer ([8], p. 522), o contexto é a situação em que o problema está encaixado. É o contexto que funciona como motivação dos alunos para explorarem matemática, que proporciona oportunidades para aplicar a matemática, que serve como fonte de nova matemática, que sugere fontes para as estratégias de resolução do problema e que proporciona uma âncora para a compreensão matemática.

Meyer ([8], pp. 523-527) sustenta que o contexto atrai os alunos para a situação problemática, desperta a sua curiosidade e pode levá-los a explorar a matemática necessária para responder às questões que são colocadas. Estes objectivos são bastantes para que se procure um contexto, e certamente que muitos contextos o conseguem melhor do que outros. Também é importante notar que quando pensamos no contexto como elemento motivador, temos de reconhecer que um contexto interesse mais um aluno do que outro, ou até que não tenha qualquer interesse para outro aluno.

A natureza e o universo, pela sua riqueza e diversidade, oferecem con-

textos que podem ser motivadores para todos os alunos, contextos estes que, pelas suas características podemos considerar como de grande qualidade atendendo à caracterização de Meyer. Os contextos oferecidos pela natureza são suporte de matemática, mas não a submergem, são reais e bem próximos ou conhecidos dos alunos, são variados e não precisam de se repetir, originam problemas reais que podem ser resolvidos, oferecem aos alunos a possibilidade de construir modelos matemáticos.



É comum considerar que os Pitagóricos encontraram a essência da natureza nos números e nas relações numéricas e que os números foram o primeiro princípio de explicação da natureza e a substância e a forma do Universo, ([5], pp. 97-99)

E também é fundamental notar que a medição é responsável pela ampliação do conceito de número, nomeadamente ao nível dos números racionais, decimais e fraccionários não decimais, e ao nível dos irracionais.

Podemos falar de medições directas e de medições indirectas. Nestas se incluem naturalmente o cálculo de áreas e volumes através de fórmulas. Fórmulas estas que são muito antigas e que se devem aos matemáticos de Alexandria. E aqui fica mais uma ligação com os episódios da história da ciência, porque estes matemáticos também inventaram processos para medir o raio da Terra, os diâmetros da Lua e do Sol, as distâncias da Lua, do Sol, dos planetas, e das estrelas. Para Kline ([5], pp. 87-88), é quase inacreditável que estes sábios tenham conseguido medir distâncias inacessíveis com tão grande precisão e com métodos tão simples e seguros como os que utilizaram.

Ao longo dos tempos os cientistas foram desenvolvendo a tese dos Pitagóricos de que a natureza deve ser estudada quantitativamente, o que justifica o grande papel que os números e as medições, bem como as relações numéricas e as funções, desempenham nesta ligação da matemática com as ciências físico naturais.

Relações numéricas e funções

Os números são o instrumento por excelência para fazer comparações. Porém uma comparação feita com base exclusiva em números obtidos de forma independente pode ser pobre e até enganadora. Os próprios números podem representar relações e encarados desta forma é o conceito de número que se amplia e enriquece. O simples facto de escolher uma unidade e fazer uma medição é já uma relação numérica que está ser estabelecida, mas nem sempre os professores terão consciência de que este aspecto está em jogo quando se trabalham números decimais e fracções. As relações numéricas mais simples são expressas através de fracções e de números decimais. Depois seguem-se as percentagens e muitas vezes serão estas apenas as relações numéricas que são trabalhadas com os alunos.

Se pensarmos que nas ciências físico naturais estes tipos de números têm uma utilização permanente podemos perceber as potencialidades de trabalhar relações numéricas no contexto destas ciências.

O estudo de crescimento de uma planta durante algumas semanas registando em gráfico a relação tempo/altura é um exemplo rico e interessante. Ele exige a decisão dos momentos de registo (diário, semanal, mensal ou outro) para ser possível fazer um gráfico, bem como o cuidado e rigor na recolha de dados. Permite fazer a previsão do crescimento posterior com discussão da possibilidade ou impossibilidade de prolongamento do modelo de crescimento. Um crescimento proporcional, que poderá dar-se durante algum período de tempo, é impensável que continue indefinidamente. Um crescimento logístico já poderá ser admissível embora este tipo de curva não seja muito acessível a uma exploração elementar. A influência de variáveis como a humidade e a luz nestas experiências oferecem aspectos fundamentais para estes estudos.

O estudo da relação entre a área do pé e o peso suportado apresenta vários aspectos interessantes: a necessidade de encontrar um pro-

cesso de medição da área do pé, a quantificação da relação peso/área, a comparação destes valores, a discussão das características e das condições físicas do corpo humano e os limites para as dimensões dos seres vivos. Aqui está um indicador de uma outra ponte interessante a estabelecer sobre a temática forma de dimensão que, apesar ricas potencialidades que oferece, não será abordada neste texto.

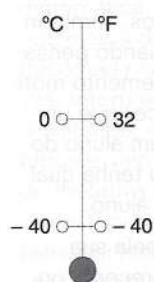
Um outro exemplo interessante é apresentado por Meyer ([8], p. 523) sobre a relação entre o comprimento do salto e o comprimento do corpo de alguns animais e foi adaptado numa das actividades propostas nesta revista.

Nestas sugestões sobre relações numéricas e funções está prevista a recolha de dados para construção de modelos de interpretação de fenómenos e situações. É uma perspectiva bastante diferente da recolha, tratamento e apresentação de dados em abordagens descritivas, inerente à estatística, e que não abordarei agora, embora permita múltiplas e diversificadas hipóteses de exploração na articulação com as ciências físicas e naturais.

Utilização e construção de instrumentos

A utilização de instrumentos proporciona também muitas e variadas actividades em que conceitos matemáticos e das ciências físico naturais podem ser explorados de forma contextualizada. A régua, a fita métrica, a balança e o relógio são os instrumentos mais simples com que os nossos alunos aprendem a trabalhar, mas a lista pode ser grande e diversificada.

Pensemos nas possibilidades de utilização de um termómetro com duas escalas diferentes.



Os termómetros com duas escalas, centígrada e Fahrenheit, são bastante acessíveis nomeadamente para fazer medições ambientais. A sua utilização tem várias possibilidades interessantes de exploração: Observação e compa-

°C	°F	°C	°F
-40	-40	-40	-40
-30		-30	
-20		-20	
-10		-10	
0	32	0	
10		10	
20		20	
30		30	
40		40	
50		50	
60		60	
		70	
		80	
		90	
		100	

ração das duas escalas; Leitura e registo de valores; Preenchimento de tabelas de equivalência a partir da escala centígrada e a partir da escala Fahrenheit e que vai exigir o recurso a valores decimais sendo alguns deles aproximados; Registo de temperaturas em situações familiares aos alunos (corpo humano e temperaturas atmosféricas nas duas escalas; Utilização da fórmula $F = 5/9 C + 32$ para fazer conversões; Conhecimento sobre os países em que se utiliza uma e outra escala e porquê.

Uma experiência interessante pode ser a construção de um termómetro, embora não seja muito simples pode ser um pequeno projecto a desenvolver pelos alunos. Do ponto de vista das ciências físico naturais permite o trabalho e a discussão sempre interessantes sobre as mudanças de estado e sobre o que significa o zero e o cem da escala centígrada. Do ponto de vista matemático permite trabalhar a obtenção e utilização de uma escala numérica. Poucas vezes os alunos têm oportunidades para serem eles próprios a construir uma escala, tomando todas as decisões que são inerentes à resolução deste problema.

Temos muitas vezes a ideia de que um instrumento é um objecto sofisticado do ponto de vista tecnológico que exige muitos conhecimentos, trabalho, técnica e recursos, porém um instrumento pode ser uma coisa muito simples. E mais, muitas vezes quanto mais simples for do ponto de vista

técnico mas sofisticado é do ponto de vista matemático. Entre estes estão os instrumentos de contagem e de medição de alturas inacessíveis.

Um quadrado com 1 dm^2 recortado num quadrado de cartão um pouco maior é um rudimentar instrumento de contagem. A ideia matemática subjacente a este rudimentar instrumento é a de que se forem conhecidas características quantitativas de uma parte de um todo, e se fôr conhecida também a relação entre a parte e o todo, podem ser obtidas as características do todo. Este tipo de instrumento pode ser usado, por exemplo, para contar o número de pés de relva que existem num campo ou jardim. Coloca-se o quadrado recortado sobre a relva e conta-se o número aproximado de pés que cabem nesse quadrado. Depois basta obter a área do campo ou jardim e estimar o número total de pés. Quadrados deste tipo, com área conhecida, que não precisa de ser uma unidade *standartizada*, podem ser usados para outros tipos de contagem e também para medição de pequenos animais ([14]).

Nestes casos, e visto que se está a trabalhar com valores aproximados, obtidos por estimação, é natural que cada aluno obtenha o seu. Desta multiplicidade de valores há várias questões e decisões do ponto de vista estatístico que podem ser exploradas.

Quanto aos instrumentos de medição de alturas inacessíveis são bastantes conhecidas as suas possibilidades e tem havido vários exemplos de divulgação da sua utilização nas aulas de matemática em publicações, cursos e encontros.

Há também a referir a utilização de instrumentos náuticos e que também já tem sido objecto de vários tipos de divulgação ([13]). Sobre este assunto há várias publicações de consulta da autoria de Luís Albuquerque e editadas pela Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimientos Portugueses.

Algumas conclusões e um poema

Como ficou bem patente estas frentes de trabalho não são independen-

tes e há muitas ligações entre elas. A ideia de apresentá-las separadamente serviu, apenas, para procurar iluminar e organizar um pouco o muito trabalho que pode ser feito na ligação da Matemática com o Estudo do Meio no 1º Ciclo, na área da Matemática e Ciências da Natureza no 2º Ciclo e continuando depois pelo 3º Ciclo, não deixando de pensar no papel que a matemática deve ter nas novas áreas curriculares de estudo acompanhado e de projecto.

A curiosidade, que se revela no querer conhecer, querer saber, querer compreender. A tendência para observar, para dar atenção ao que se passa à nossa volta. A tendência para observar, caracterizar, organizar e classificar. A tendência ou hábito de procurar padrões, analogias, regularidades. A tendência para a procurar obter descrições quantitativas dos fenómenos científicos, independentemente de qualquer explicação física. A valorização do uso da intuição e o gosto pela imaginação. A valorização do uso da razão e da matemática para compreender e interpretar o universo, muitas vezes contra a evidência dos sentidos. A tendência para apreciar criticamente fenómenos, situações, informações, documentos, recorrendo a instrumentos e conhecimentos científicos. A aptidão para defender as suas ideias e argumentar, mas também para aceitar as ideias dos outros e as tornar suas. A valorização do rigor e o apreço pela qualidade. A aptidão para

*Penso na repetição que
se verifica no movimento das marés
e das luas. Existem
ciclos, como círculos, que
são previsíveis e perfeitos. Mas,
apesar disso, têm
um mistério que nem os iniciados
resolvem. Por que terá tudo de ser
assim, desde a origem até ao
fim dos tempos? Não me respondes; nem
eu esperava que tivesse resposta,
enquanto enchias um copo,
de acordo com a lei da gravidade.*

Nuno Júdice, 1999,
Meditação sobre ruínas

trabalhar em grupo, para saber usar os dados recolhidos por outros, para saber colocar os dados recolhidos por si à disposição de outros, para saber articular as ideias de outros com as suas próprias ideias, em suma, a valorização e o respeito por atitudes cooperativas. O respeito e a tolerância. O esforço, a persistência e a dedicação. São características da formação de um espírito científico, em que o espírito matemático está integrado, que considero responsabilidade do ensino básico e a que a(s) ciência(s) na escola devem responder.

Referências

- [1] Bueno, Antonio González. 1998. *Historia de la Ciencia y de la Técnica*, tomo 26. Madrid: Ediciones Akal.
- [2] Cano, António Fernández e Romero, Luís Rico. 1992. *Prensa y Educación Matemática*. Madrid: Editorial Síntesis.
- [3] Caraça, João. 1997. *Ciência*. Lisboa: Difusão Cultural.
- [4] Derry, Gregory N..1999. *What science is and how it works*. New Jersey: Princeton University Press.
- [5] Kline, Morris. 1987. *Mathematics in Western Culture*. England: Peregrine Books.
- [6] Laubenbacher, Reinhard e Pengelley, David. 1999. *Mathematical Expeditions*. New York: Springer Verlag.
- [7] Little, Catherine. 1999. Counting grass. *Teaching Mathematics in the Middle School*, vol. 5, Nº 1, pp. 7-9. Reston: NCTM.
- [8] Meyer, Margaret R., Dekker, Truus, e Querelle, Nanda. 2001. Context in Mathematics Curricula. *Teaching Mathematics in the Middle School*, vol. 6, Nº 9, pp. 522-525. Reston: NCTM.
- [9] Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica (ed.). 2001. *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- [10] Paulos, John Allen. 1995. *As Notícias e a Matemática*. Lisboa: Europa-América.
- [11] Stewart, Ian. 1995. *La Nature et les Nombres*. France: Hachette.
- [12] Stewart, Ian e Golubitsky, Martin. 1993. *Fearful Symmetry – Is God a geometer?*. England: Penguin Books.
- [13] Vieira, Ana, Veloso, Eduardo et al.. 1996. *Os instrumentos náuticos na época dos Descobrimientos*. (Trabalho não publicado).
- [14] Wandersee, James H.. 1986. Estimating the size of "little animals". *Estimation and Mental Computation*, 1986 Yearbook, pp. 220-222. Reston: NCTM.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Escola.....

Ano/Turma..... Data..... Aluno(a).....

Cabo Verde é o berço africano das tartarugas comuns

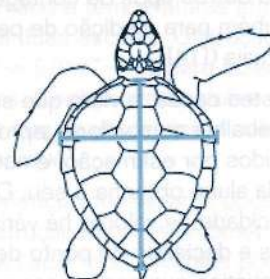
Em toda a costa africana, 80 a 90 por cento das tartarugas *Caretta caretta* reproduzem-se em Cabo Verde. É por isso que os biólogos das Canárias e de Cabo Verde, com o apoio da União Europeia, uniram esforços para preservar o réptil ameaçado.

As tartarugas que se deslocam às praias das ilhas caboverdianas da Boavista, Maio e Sal para reprodução têm no mínimo 20 anos, medem 75 centímetros de comprimento e 60 de largura, variando o seu peso entre 60 e 70 quilogramas.

Num Verão, a fêmea de *Caretta caretta* põe aproximadamente 400 ovos, em quatro vezes, saindo do mar em direcção a terra de quinze em quinze dias, sempre à noite. A postura de 70 a 100 ovos demora uns 30 minutos, logo a seguir a tartaruga tapa-os com areia, com movimentos cuidadosos das membranas posteriores, e inicia o regresso ao mar. De cada ninho nascem em média 50 crias, das quais apenas uma em mil atinge a idade da reprodução.

Extractos de uma notícia sobre tartarugas do jornal *Público*

1. Em papel quadriculado contorna um quadrado com 100 quadrículas. Este quadrado representa o número total de tartarugas *Caretta caretta* que existem na costa africana. Pinta de azul o número de quadrículas que representam as tartarugas desta espécie que se reproduzem em Cabo Verde. Pinta de amarelo o restante.
2. Em papel quadriculado com 1 centímetro de lado faz um desenho à escala natural de uma tartaruga desta espécie. Se precisares junta com fita cola mais do que uma folha de de papel.
3. Em papel quadriculado normal faz um novo desenho de uma tartaruga desta espécie. Usa exactamente o mesmo processo que usaste na questão anterior. Compara os dois desenhos. Achas que este desenho está à escala natural? Porquê?
4. Nas duas questões anteriores fizeste desenhos semelhantes mas com tamanhos diferentes que representam sempre a tartaruga *Caretta caretta*. És capaz agora de fazer um desenho de uma tartaruga destas mas que caiba numa única folha de papel? Explica como fizeste. Compara o teu desenho com o de colegas teus.
5. Faz um desenho ainda mais pequeno mas seguindo sempre o mesmo processo para que fique semelhante aos anteriores?
6. Com todas estas informações sobre a tartaruga *Caretta caretta* faz um cartaz de apelo à preservação desta espécie. Podes obter mais informações sobre estas e outras tartarugas marinhas visitando os seguintes *sites*:
 - www.projetotamar.com.br
 - www.uma.pt/Investigacao/Tartaruga/html/body_p14-medi.htm
 - www.uma.pt/Investigacao/Tartaruga

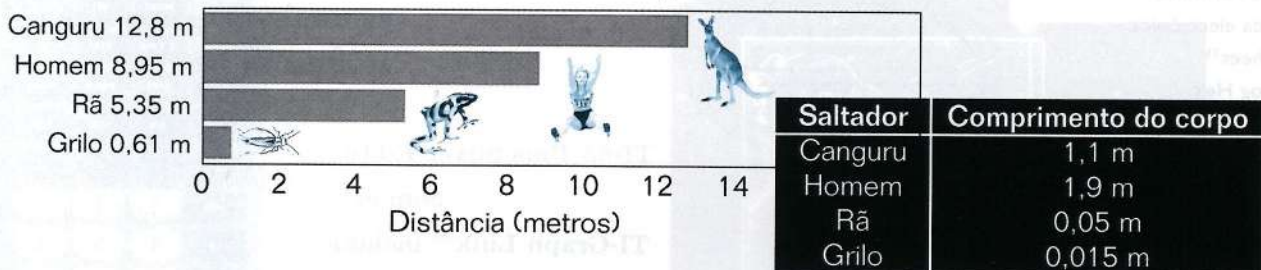


Escola.....
 Ano/Turma..... Data..... Aluno(a).....

Recordes de saltos em comprimento

Lê a tabela e o gráfico para veres como é o recorde do mundo de salto em comprimento do homem comparado com os recordes de outros animais.

Recordes de saltos em comprimento



Pensa e responde:

- Qual dos quatro animais dá o salto maior?
- Qual dos quatro animais consegue saltar mais de 10 vezes o comprimento do seu corpo? E mais de 100 vezes?
- Achas que é justo comparar a capacidade de salto olhando apenas para o comprimento do salto? Explica a tua resposta.
- Para cada um dos quatro animais, divide o comprimento do salto pelo comprimento do corpo. Este quociente é uma razão que ficou escrita como um número decimal. Preenche a tabela com os valores obtidos.

Saltador	Comprimento do salto (em metros)	Comprimento do corpo (em metros)	Razão
Canguru			
Homem			
Rã			
Grilo			

- Descreve como é que uma razão pode ser usada para identificar qual é o saltador que dá o maior salto relativamente ao seu tamanho.
- Investiga outras características quantitativas e qualitativas destes animais.

Adaptado de Meyer, Margaret R., Dekker, Truus, e Querelle, Nanda. 2001. Context in Mathematics Curricula. *Teaching Mathematics in the Middle School*, Vol. 6, Nº 9, pp. 522-525. Reston: NCTM.

Nova Calculadora Gráfica

TI-83 Plus Silver Edition !

TEXAS INSTRUMENTS

education.ti.com/portugal

Com mais de 1.5 megabytes de Flash ROM disponível e 24K de RAM disponível, a TI-83 Plus Silver Edition armazena até 94 APPS.

Agora é ainda mais fácil efectuar o download e partilhar APPS, já que o TI-GRAPH LINK™ for Windows® vem incluído com a TI-83 Plus Silver Edition.

A acrescida capacidade e velocidade, também ajuda os utilizadores a retirar o máximo de utilidade nas centenas de programas existentes, escritos para a TI-83 Plus.

A TI-83 Plus Silver Edition vem com algumas aplicações de software incluídas:

- Tabela Periódica
- Agenda electrónica
- CellSheet™
- Catalog Help
- Personalização do Start-Up
- CBL™/CBR™
- Puzzle Pack
- Simulação de Probabilidade
- Fichas de Trabalho



TI-83 Plus Silver Edition
com cabo
TI-Graph Link™ incluído



APOIO PROGRAMA EDUCACIONAL

Revista TI-CIÊNCIAS! Receba os newsletters TI-Produtos e TI-Ciências já! - CONTACTE-NOS...

Programa de Empréstimo de Calculadoras - Acções de Formação | Bibliografia de Apoio à Calculadora ...

* Programa Educacional

Rua 25, 177
4500-281 Espinho
Tel. 707 200 109 (chamada local)
Fax. 22 763 38 22
e-mail. x0amaral@ti.com
education.ti.com/portugal

Texas Instruments CSC (Centro de Suporte ao Cliente)
C/o Sitel Belgium
Woluvelaan 158
1831 Diegem - Bélgica
Tel. 800 832 627 (chamada gratuita)
Fax. 21 42 45 130
e-mail. ti-cares@ti.com ou ti-loan@ti.com

Visite-nos! Faça o download em:
<http://education.ti.com/product/tech/83p/apps/html>

Novo Cd de Actividades para o Professor !

Encomende já Gratuitamente, o seu Cd Preenchendo o Seguinte Formulário:

Nome

Morada

Localidade / C. Postal

Telefone / Telemóvel

E - mail

Escola

Morada

Localidade / C. Postal

Telefone

Preencha e envie num envelope para a morada do Programa Educacional*



Matemática e Natureza: Notas a partir de algumas leituras filosóficas

Manuel Beirão dos Reis
Professor de Filosofia



1. No livro de Benoît Mandelbrot, *Objectos Fractais*¹, aparece um extracto do *Ensaizador* de Galileu que se liga directamente ao tema que estamos a tratar:

A filosofia está escrita nesse grande livro — estou a falar do universo — que nos é constantemente oferecido à nossa contemplação, mas que apenas pode ser lido depois de se aprender a linguagem e se estar familiarizado com os caracteres na qual está escrita. Está escrita na linguagem da matemática, onde os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem as quais se erra em vão através de um labirinto sombrio.

A ideia de que a matemática é a linguagem da ciência (ou da filosofia) natural é antiga mas foi claramente

explicitada e desenvolvida por vários autores dos séculos XVI e XVII entre os quais, além de Galileu, importa destacar Copérnico, Kepler e Newton. O extracto apresentado surge no contexto da contraposição que Galileu faz do discurso científico ao discurso literário e do critério lógico-racional ao critério da autoridade ou da tradição no estabelecimento de verdades naturais. Diz ele antecedendo aquela passagem²:

Parece-me distinguir em Sarsi (um filósofo aristotélico) a firme crença de que no filosofar é necessário apoiar-se nas opiniões de algum autor célebre, como se a nossa mente, quando não adopta o discurso de outrém, tivesse por isso de permanecer estéril e infecunda; e pensa talvez que a filosofia é um livro e uma fantasia de um homem,

como a *Iliada* e a *Odisseia*, livros em que a coisa menos importante é que o que está escrito seja verdadeiro.

Constatamos que a valorização da matemática surge associada ao conhecimento da Natureza e à aplicação de métodos lógico-dedutivos e experimentais de investigação.

2. A contraposição do discurso científico ao discurso literário com a valorização do primeiro constitui a base das interpretações positivista e neopositivistas dos séculos XIX e XX. Características desse espírito são, assim, o matematismo, o determinismo, o mecanicismo, o racionalismo, o experimentalismo e o pragmatismo. O objectivo deste *espírito científico* foi definido claramente por Descartes no século XVII: *Conhecer e dominar a Natureza*³. A crítica destas caracterís-

ticas foi feita em nome dos valores da imaginação, do sentimento e da liberdade individual. Entre outros autores que a fizeram contam-se Antero de Quental e Nietzsche. Os efeitos negativos das aplicações técnico-militares que se fizeram sentir nas últimas décadas concorreram para sublinhar os riscos e o poder da cultura científico-tecnológica e levou certas pessoas a recusar qualquer valor à investigação científica e às suas aplicações.

3. Já há várias décadas se sabe que também os fenómenos sociais são matematizáveis e que só a sua matematização permite continuar a *conhecer e dominar* a realidade social. Portanto, como dizia, entre outros, o matemático Bento de Jesus Caraça (1901–1948), não tem grande sentido a oposição entre as ciências naturais e sociais; o importante é o desenvolvimento do espírito científico associado ao espírito crítico e aos valores cívicos e morais.

4. Einstein admirava-se da adequação, da harmonia entre a Matemática e a Natureza tendo em conta, dizia ele, que a primeira é uma criação livre do espírito humano. Uma objecção a esta admiração pode resumir-se no seguinte raciocínio:

Todas as criações do Espírito Humano são naturais

A Matemática é uma criação do Espírito Humano

Logo a Matemática é natural.

Este silogismo não acrescenta nada nem ao conhecimento da matemática nem ao da natureza; mas pode constituir o ponto de partida da firme convicção de que a boa *atitude face à ciência* é a que nos dá uma imagem da ciência que tenha em conta a ligação do conhecimento às situações concretas, *naturais* do mundo e da vida e, portanto, ao contexto em que uma ideia ou teoria foi descoberta ou construída⁴. Esta convicção tende a traduzir-se em vários tipos de actividades: estudo de problemas decorrentes da vida quotidiana ou dela emergentes, invenção e utilização de novos métodos de transmissão de conhecimentos, realização de trabalhos individuais ou de grupo sobre História da Ciência, etc.

5. Finalmente convém não esquecer que nem a Natureza está *inteiramente acabada* nem a Matemática está *integralmente feita*; por conseguinte, a originalidade e a descoberta continuarão a ser possíveis...

Notas

1. Edição Gradiva, Lisboa, 1998.
2. Citado in *Filosofia/Epistemologia*, Artur Morão e outros, Livraria Popular Francisco Franco, Lisboa, 1980.
3. *Discurso do Método*, Sexta parte, ed. Sá da Costa, Lisboa, 1948.
4. Ver Bento de Jesus Caraça, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, ed. Gradiva, 1998.

Manuel Beirão dos Reis
Escola Secundária Camões

Comunidade internacional protesta contra decisão do Presidente norte-americano, que reduziu a uma hipótese meramente teórica a possibilidade de ratificação de acordo para reduzir os gases de efeito estufa

O QUE É O PROTOCOLO DE QUIOTO

O Protocolo de Quioto foi assinado em 1997, no contexto da Convenção Quadro das Alterações Climáticas (1992). Os países desenvolvidos comprometeram-se a reduzir, até 2008-2012, as emissões dos gases de efeito de estufa em 5,2 por cento (em relação aos níveis de 1990). Para entrar em vigor, o Protocolo tem de ser ratificado por 55 nações, incluindo países desenvolvidos que somem 55 por cento das emissões de 1990.

Cenários de ratificação sem os EUA

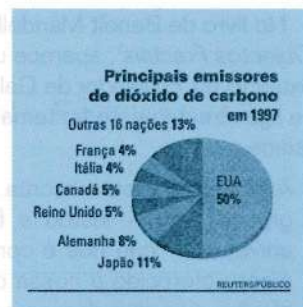
(soma das emissões)



O EFEITO DE ESTUFA

- 1 Dióxido de carbono libertado pelas fábricas, queima de combustíveis fósseis e escapes dos automóveis
- 2 Radiação solar (calor) absorvida pela superfície que, depois, volta a enviar calor para a atmosfera
- 3 O calor fica preso pelo excesso de dióxido de carbono

Fonte: Greenpeace



in *Público*, 21 Abril 2001

in *Público*, 31 Março 2001

A presença da Natureza na Matemática: algumas notas resultantes de uma consulta ao passado

Maria José Costa

Kepler acreditava que a proporção geométrica teria inspirado ao Criador a geração contínua de objectos similares a partir de objectos similares; mas quem terá inspirado o Homem para criar ou nomear as figuras geométricas?

Desde longa data — ou desde sempre? — que o homem é sensível à natureza. Bastará percorrer os achados arqueológicos encontrados em Portugal, e não só, para aceitar esta asserção; e se neles poderão existir registos mais latos, abundam representações de plantas e de animais, por certo, as imagens que mais chamaram a atenção dos seus autores (por exemplo, nas gravuras descobertas há alguns anos no Vale do Côa e mais recentemente no Sabor, estas datadas de 20 mil anos, há cavalos e auroques). Posteriormente, terá surgido a interpretação matemática da natureza, da qual a mais falada será, talvez, a que incidiu sobre o universo: numa pesquisa permanente através dos tempos, levada a cabo por nomes de vulto como Aristarco, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, foi evoluindo a dúvida desde *como se move o Sol?* até *como se movem os planetas?* E Kepler não traduziu matematicamente as leis do movimento planetário? E Newton não definiu matematicamente a atracção universal entre dois corpos? E Eratóstenes não determinou o comprimento do raio da Terra? Não foi, porém, o universo o único segmento da natureza a despertar a atenção dos matemáticos. Chegaram até aos nossos dias estudos matemáticos que, apesar de não terem qualquer relação com folhas, trevos, rosas, gotas de água, corações, rins, borboletas, caracóis, serpentes, feijões, amendoins, pérolas, pêras, enfim! definem figuras que têm essas formas e, conseqüentemente, foram-lhes associados esses nomes.

Além das leis que regem os movimentos planetários, também se conhecem aplicações da matemática à Biologia, leis que quantificam o efeito de substâncias químicas no organismo humano, que justificam as variações da dimensão de uma população num micro-sistema, que quantificam o desenvolvimento de um ser orgânico...

Um estudo matemático de curvas não poderá prescindir da classificação das mesmas, do modo como lhes é atribuído o nome, da relação de umas com as outras, da listagem de algumas das suas propriedades; contudo, nenhum destes aspectos é primordial neste texto, no qual apenas se pretende evidenciar as ligações já estabelecidas entre a Matemática e a Natureza.

Respiguemos algumas delas, não sem antes alertar para o facto de existirem curvas com o mesmo nome de proveniências diferentes, assim como casos particulares de algumas famílias que pertencem a outras famílias. Nestes casos, independentemente da equivalência da definição aplicada, há que verificar se as curvas obtidas apresentam as mesmas propriedades ou se, relativamente a um mesmo referencial, as definições analíticas coincidem.

Kepler acreditava que a proporção geométrica teria inspirado ao Criador a geração contínua de objectos similares a partir de objectos similares; mas quem terá inspirado o Homem para criar ou nomear as figuras geométricas?

Folium e quadrifolium

A palavra *folium* significa em forma de pétala e a palavra *quadrifolium* é, por vezes, substituída por *trevo* (de quatro folhas, subentende-se!).

À partida, seria de esperar que, a existirem curvas com estes nomes, elas estivessem algebricamente relacionadas. Contudo, apresentam entre elas diferenças significativas: enquanto que a primeira, em coordenadas cartesianas, é definida por uma equação do quarto grau, a segunda é traduzida por uma do sexto grau; em coordenadas polares, coordenadas que nestes assuntos simplificam um pouco mais a escrita matemática, são definidas, respectivamente, por

$$r = -4a\cos^3(\theta) \text{ e } r = a\sin(2\theta).$$

Também seria de esperar que o homem tivesse atribuído os nomes de *bifolium* e *trifolium*. E assim aconteceu: trata-se de linhas cuja definição analítica é do tipo da primeira, fazendo com ela uma família assim definida:

$$r = -b\cos(\theta) + 4a\cos(\theta)\sin^2(\theta).$$

Fazendo $b = 4a$ ou $b = 0$ ou $b = a$, teremos os três citados membros da família, respectivamente. Estas curvas têm, também, definições geométricas. Vejamos a do *bifolium*, por exemplo. Seja P um ponto da circunferência (c) de diâmetro $[OA]$, sendo O a origem do referencial e A um ponto do eixo das abcissas; seja p a recta paralela ao eixo das ordenadas tirada pelo ponto P e M e M' os pontos de intersecção dessa recta com a circunferência de centro P e raio $[OP]$. A linha descrita pelos pontos M e M' quando P descreve a circunferência (c), é o *bifolium*. Se de entre todas as curvas que usam a palavra *folium* no seu nome uma mereceu mais relevo do que as outras, o *folium* de Descartes, um dos *quadrifolium*, foi também eternizado mas por Grandi.

O folium de Descartes

Descartes (1596—1650) não interpretou correctamente o texto sobre a determinação da tangente a uma curva que Fermat (1601—1665), talvez o maior matemático amador de todos os tempos, apresentou por carta ao monge Francês Mersenne (1588—1648). No sentido de comunicar a sua própria reflexão, provocada pela carta, criou uma curva a que mais tarde o matemático Francês Roberval (1602—1675), um dos poucos matemáticos não amadores que pertencia ao círculo de Mersenne, denominou *folium de Descartes*. Vejamos o que a história conta. Fermat determinava extremos de uma curva do tipo $y = f(x)$ por um método, reconhecido hoje como muito engenhoso, que consistia em identificar dois originais, muito próximos um do outro, com a mesma imagem. Para isso, começava com o cálculo daquilo a que hoje chamamos a razão incremental de uma função num ponto:

- considerava a imagem da função em dois pontos próximos, um de abscissa x e outro de abscissa $x + E$;
- calculava a diferença entre essas imagens;
- dividia essa diferença por E ;
- igualava E a zero.

Este mesmo processo aplicado a um ponto qualquer, de abscissa a , no qual se pretende definir analiticamente a tangente, incide, agora, na determinação do declive da tangente nesse ponto. Em ambos os casos, seja na determinação de um extremo, seja na determinação da tangente, e em linguagem actual, Fermat propunha a determinação do limite da razão incremental da função num intervalo quando a amplitude deste intervalo tendia para zero: propunha, portanto, a passagem ao limite da dita razão incremental no intervalo de amplitude E , num caso definido a partir de x , e, no outro a partir de uma constante a .

Recebida a carta de Fermat, Mersenne terá feito o mesmo que em outras situações, nessa sua actividade que hoje é conhecida como a *república das cartas*: tê-la-á copiado o número de vezes necessário para a fazer chegar à comunidade matemática; e assim, a descrição do processo criado por Fermat para determinar tangentes a curvas terá chegado ao conhecimento de Descartes. Por dificuldade de explicação por parte de Fermat ou por dificuldade voluntária ou involuntária de compreensão por parte de Descartes, o certo é que houve dificuldade de comunicação entre estes dois matemáticos. A resposta não se fez esperar: Descartes desafiou Fermat a aplicar o seu método, que classificou de não geral, a uma curva definida em termos actuais por $x^3 + y^3 = 3axy$.

Com tal disputa a humanidade ganhou o *folium de Descartes*. Esta curva admite a bissetriz dos quadrantes ímpares como eixo de simetria e passa duas vezes na origem, embora em situações diferentes, como facilmente se conclui recorrendo à definição em coordenadas paramétricas, $x = 3at/(1+t^3)$ e $y = 3at^2/(1+t^3)$: uma quando $t = 0$, outra quando t tende para infinito.

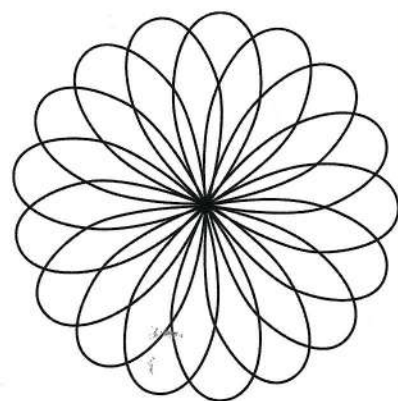
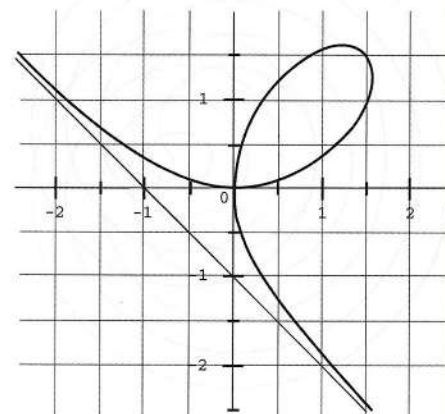
Perante o desafio de determinar a tangente a tal curva, Roberval supôs que ela se desenvolvia igualmente pelos quatro quadrantes, aliás, como Descartes supunha inicialmente, ou seja, que ela teria a forma *flor de jasmim*, nome esse que perdurou durante algum tempo. Menos poético, mas talvez mais prático, é o outro nome pelo qual tal figura é conhecida: nó de fita.

Mais tarde, em 1692, o matemático holandês Huygens (1629—1695) reconheceu a natureza assintótica dos seus ramos, não confirmando, por isso, a hipótese admitida por Roberval. Hoje também se sabe que a área da *pétala* é igual à área do domínio situado entre os ramos infinitos da curva e a sua assíntota (a recta definida analiticamente por $x + y = a$), medindo qualquer uma delas $3a^2/2$. Recorde-se que na época em que ocorreu este episódio, 1638, ainda não se conheciam coordenadas negativas, pelo que se tem de ver esta curva apenas representada no primeiro quadrante, tal como Descartes e Roberval a estudaram.

A Rhodonea e as Rosáceas de Grandi

Grandi (1671—1742) foi um monge italiano que iniciou as suas actividades docentes em Florença, ensinando filosofia e teologia no mosteiro dos Camáldulos, uma facção dissidente da ordem dos Beneditinos. Posteriormente, exerceu a mesma actividade em mosteiros da mesma congregação, primeiro em Roma e depois, em Pisa, aonde chegou em 1700. Foi, então, mostrando cada vez maior interesse pela Matemática. Em 1707 tornou-se matemático de Cosme III de Médicis, Grão Duque da Toscana (provavelmente descendente do outro Grão Duque do século XVI, Cosme I, cujo nome ficou associado a um problema da história das probabilidades) e, volvidos outros sete anos era professor de Matemática na universidade de Pisa. Em 1728 publicou o trabalho *Flores geométricas*, que dedicou à condessa Clelia Borromeo, no qual define a *curva clélia*, que não é mais do que uma espiral esférica; em termos matemáticos, é a curva descrita por um ponto M de um meridiano de uma esfera quando ela se desloca à velocidade constante nv sobre esse meridiano e a esfera gira em torno do seu eixo à velocidade constante w ; em termos intuitivos, é a curva que se obtém quando se descasca uma laranja... Para trás ficaram cinco anos de estudo, sobretudo de curvas a que deu o nome de *Rhodonea*, por serem parecidas com rosas; por vezes, são referidas como *Rosáceas de Grandi*. Estas *rosas* são definidas em coordenadas polares por $r = a \sin(k\theta)$: apresentam um número infinito de pétalas se k é um número irracional, k ou $2k$ pétalas, consoante k é ímpar ou par e são a projecção no plano xOy de curvas clélias. A sobreposição de algumas dessas rosáceas produz efeitos visuais de extrema beleza. É para $k = 2$ que a *Rhodonea*, merece a classificação de *quadrifolium* e para $k = 3$, de *trifolium*.

Ainda que aparentemente fora do contexto, cabe aqui referir que Grandi, em 1701, também estudou uma outra curva, a loxodrómica cónica, curva que corta as geratrizes de um cone de revolução segundo o mesmo ângulo. Esta referência tem alguma pertinência, uma vez que cerca de duzentos anos antes, Pedro Nunes (cosmógrafo real desde 1529) e, posteriormente professor de matemática na Universidade de Coimbra, apesar de bacharel em Filosofia e Medicina) tinha



apresentado pela primeira vez a ideia de curvas loxodrómicas, no pequeno tratado intitulado *Tratado em defesa da Carta de Marear*, incluído na tradução do *Tratado da esfera* de autoria de João Sacrobosco, obra essa impressa em 1537. Um bom dicionário informará que loxodromia é, enquanto termo náutico, a curva descrita por um navio que segue constantemente o mesmo rumo do vento, isto é, *cortando todos os meridianos sob um ângulo constante*; mas enquanto termo de Geometria, já se refere à curva traçada sobre uma esfera, de maneira a cortar segundo o mesmo ângulo todos os meridianos. Resta, agora, conferir as duas definições e averiguar se, eventualmete, as clélias criadas por Grandi não são mais do que curvas loxodrómicas definidas por Pedro Nunes.

As trocóides

A palavra trocóide deriva de um vocábulo grego que significa rolar. Desse ponto de vista, e apesar de Blaise Pascal (1623—1662) a ter usado para denominar a curva que conhecemos como *ciclóide* (curva descrita por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar mantendo-se tangente a uma recta), serão trocóides todas as curvas que se obtêm como lugares geométricos de pontos que se mantêm ligados rigidamente ao centro de uma circunferência enquanto esta rola mantendo-se tangente a rectas ou curvas sem deslizar, curvas abertas ou fechadas, por dentro ou por fora dessas curvas. Esta família admite duas sub-famílias, consoante a circunferência que rola se encontra no exterior ou no interior da circunferência fixa: a epitrocóide e a hipotrocóide. As curvas geradas por pontos da circunferência que se deslocam nas condições descritas para as trocóides, chamam-se epicyclóides ou hypociclóides, consoante a circunferência roda no plano exterior da circunferência fixa, ou no seu interior. Daí a designação de epicyclóide alongada ou epicyclóide encurtada para as epitrocóides geradas por pontos cuja distância ao centro da circunferência móvel é maior ou menor que o raio, respectivamente. Idêntica discussão merecerá o par hipotrocóide/hypociclóide: dispensamo-nos de a apresentar.

As coordenadas paramétricas de um ponto da epitrocóide gerada pelo movimento de um ponto à distância $d = |k|r$ do centro da circunferência que rola, de raio r , apoiada numa circunferência, de raio R , na hipótese de $R = nr$, são dadas por

$$\begin{aligned}x &= r(n+1)\cos(t) - k\cos[(n+1)t] \\y &= r(n+1)\sin(t) - k\sin[(n+1)t]\end{aligned}$$

com $|k| < r$: positivo para epicyclóide encurtada e negativo para epicyclóide alongada. Para obter as coordenadas de um ponto da hipotrocóide gerada pelo movimento de um ponto à distância $d = kr$ do centro da circunferência que rola, de raio r , apoiada numa circunferência fixa, de raio R , na hipótese de $R = nr$, recorremos a

$$\begin{aligned}x &= r(n-1)\cos(t) - k\cos[(n-1)t] \\y &= r(n-1)\sin(t) - k\sin[(n-1)t]\end{aligned}$$

com $k < 1$ para a hypociclóide encurtada e $k > 1$ para a hypociclóide alongada.

Epitrocóides e aranhas

Dürer (1471—1528) era ainda muito jovem quando aprendeu com o seu pai a arte de ourivesaria e joelheria, a par da sua escolarização. Aos quinze anos começou a trabalhar como aprendiz de pintura e gravação em madeira com um famoso artista (Michael Wolgemut) que produzia peças para altares. Depois de uma longa digressão, de resto recomendada pelo seu professor para adquirir a experiência em contacto com outros artistas, Dürer regressou em 1495 à sua cidade natal, Nuremberga, acabando por ali tomar conhecimento do interesse que os trabalhos matemáticos de Paccioli e Leonardo da Vinci tinham para a arte. Inicia, a partir desta data, os seus estudos matemáticos; o seu particular interesse na teoria da proporção, viria a reflectir-se nos seus trabalhos artísticos a partir de 1500, a ponto de estudar com régua e compasso a construção de figuras antes de proceder à sua gravação.



Além das obras de arte produzidas, Dürer escreveu, também, livros de matemática, deixando um deles ainda em fase de provas, o *Tratado das proporções*, e que é hoje considerado o mais importante de todos os que escreveu. Num outro, publicado em 1525 e intitulado *Instrução em medições com compasso e régua*, descreve a construção de várias curvas, nomeadamente a *muschellini*, à qual nos referiremos adiante e uma outra, hoje conhecida por *aranha de Dürer*. Para construir a sua *aranha*, Dürer procedeu do seguinte modo:

- dividiu a circunferência em 12 partes geometricamente iguais, numerando-as no sentido horário;
- no extremo desses 12 raios traçou segmentos de recta geometricamente iguais de modo que, em cada ponto de divisão, o segmento de recta ficasse paralelo ao raio cujo ponto de divisão era o dobro daquele em que esse raio estava a ser traçado (ou seja: no pontos 1, o segmento era paralelo ao raio 2, no ponto 2, ao 4, no ponto 3 ao 6, no ponto 4 ao 8, ...).

O conjunto dos extremos dos segmentos de recta assim construídos é a dita curva. Ora uma epiciclóide alongada gerada na condição de ambas as circunferências — a móvel e a fixa — serem geometricamente iguais apresenta as mesmas características da aranha de Dürer; escolhendo adequadamente as constantes exigidas em ambas as construções, obtêm-se curvas geometricamente iguais.

Na figura junta estão representadas várias *aranhas* — a cada cor corresponde uma *aranha de Dürer* — todas elas geradas a partir do mesmo par de circunferências mas por pontos situados a diferentes distâncias do centro da circunferência móvel ou usando uma só circunferência e diversos valores para a constante, consoante o processo adoptado para a sua construção. Dürer é considerado um dos precursores do estudo dos movimentos do plano sobre o plano, atribuído a Besant e datado de 1869. Acresce dizer que, para valores adequados das três constantes requeridas para a construção de uma epitrocóide — raio da circunferência fixa, raio da circunferência móvel e distância do ponto ao centro desta — resulta uma rosácea de Grandi.

Epiciclóides, cardióides e nefróides

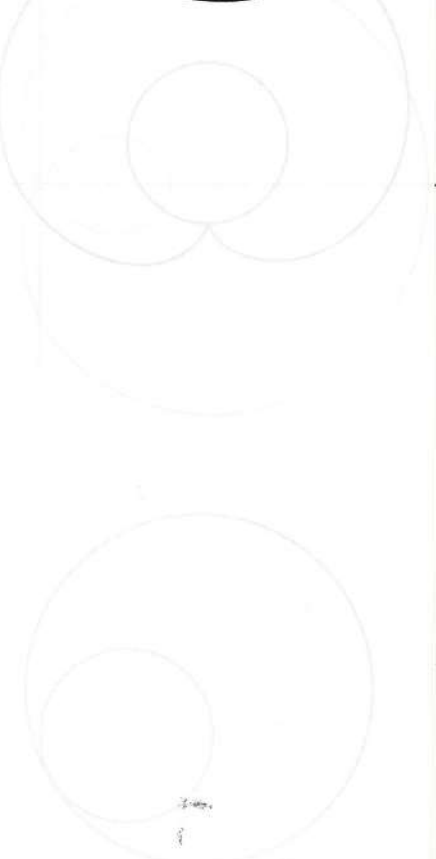
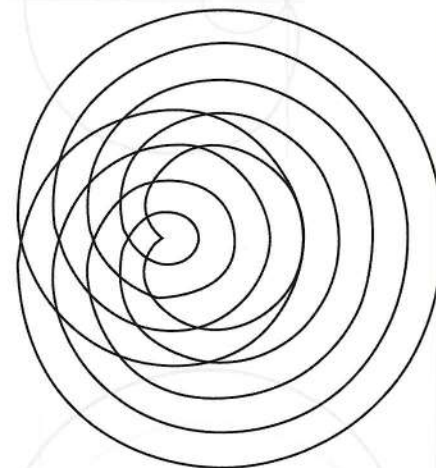
Interpretado à letra, epiciclóide significa *em forma de epiciclo*. O dicionário recentemente publicado pela Academia das Ciências de Lisboa, dá o seguinte significado de "epiciclo": *Círculo imaginário que, nos sistemas cosmológicos de Ptolomeu, se julgava descrito por um planeta, enquanto o centro deste círculo descrevia um outro em torno da Terra*. Contudo, Thomas Heath afirma que Ptolomeu (c.85?—c. 165?) se baseia *largamente* em Hiparco (180—125 a.C.) e da lista de pontos de contacto entre ambas as obras, consta, por exemplo, a teoria dos epiciclos: somos, assim, levados a concluir que já antes da era cristã os astrónomos se preocupavam com *figuras* a que davam o nome de *epiciclos* e com grande ligação à natureza — o movimento dos planetas.

As epiciclóides não são mais do que curvas planas descritas por um ponto da circunferência quando esta rola, externamente e sem deslizar, sobre uma outra circunferência fixa, de modo que ambas as circunferências se encontrem no mesmo plano e se mantenham constantemente tangentes. Embora o enunciado pareça ligeiramente diferente do anterior, temos definições equivalentes: se na definição do tempo de Ptolomeu subtrairmos o raio do epiciclo ao raio do *círculo deferente*, isto é, aquele que é descrito pelo centro do epiciclo, temos o raio da circunferência fixa da segunda definição.

Fazendo $k = r$ na definição paramétrica da epitrocóide e utilizando os códigos aí estipulados, as coordenadas paramétricas de um ponto da epiciclóide, são dados por

$$\begin{aligned}x &= r(n+1)\cos(t) - r\cos[(n+1)t] \\y &= r(n+1)\sin(t) - r\sin[(n+1)t]\end{aligned}$$

Como se pode verificar, se n é um número irracional, teremos uma epiciclóide aberta, ao contrário do que se passa quando n é um número racional não inteiro:



independentemente do número de voltas que a circunferência móvel tenha que dar, obtém-se uma epicycloide fechada. Dentro das que fecham, há belas rosáceas.

Quando o raio da circunferência fixa é duplo do raio da circunferência móvel, a epicycloide gerada chama-se nefróide, palavra que significa em forma de rim. A nefróide tem para comprimento $24r$ (representando, ainda, por r o comprimento do raio da circunferência móvel) e limita uma área de $12\pi r^2$. Huygens (1629—1695), em 1690, e o matemático e astrónomo inglês Airy (1801—1892), em 1838, apresentaram resultados relacionados com a nefróide; contudo, o seu nome data de 1878 e é da responsabilidade do matemático britânico Proctor (1837—1888).

Recorrendo a circunferências geometricamente iguais, a figura descrita pelo ponto da circunferência que rola sem deslizar chama-se *cardióide*.

O nome de cardióide, que provém do grego *kardia* e significa *em forma de coração*, surgiu pela primeira vez em 1741, num artigo publicado em *Philosophical Transactions of the Royal Society* e assinado por Castillon (1704—1791), um matemático e astrónomo nascido em Itália, onde estudou antes de partir para a Suíça e, depois, para a Alemanha, onde veio a falecer. Na sua carreira constam os cargos de reitor da Universidade de Utrecht (1755) e de Astrónomo Real no Observatório de Berlim (1765).

A cardióide já tinha motivado alguns estudos anteriormente a esta data. Vaumesle comunicou a Huygens os resultados das suas pesquisas efectuadas em 1678 sobre o comprimento da cardióide e a área limitada por ela. Em 1708, Phillippe de La Hire (1640—1718) identificou-a como um caso particular do caracol de Pascal e atribuiu-lhe um comprimento igual a 16 vezes o comprimento do raio da circunferência, relação hoje confirmada. Porém, o primeiro estudo sobre esta curva poderá ter sido levado a cabo pelo astrónomo Ole Romer, em 1674, motivado pelo interesse em melhorar as formas utilizadas nas rodas dentadas, provavelmente com vista a uma optimização das engrenagens de que o seu trabalho dependia. Hoje sabe-se, também, que a cardióide delimita uma área equivalente a 6 círculos base. Este e outros resultados constam de uma tese publicada em 1900, por M. Archibal: *A cardióide e algumas curvas relacionadas com ela*. A cardióide é a curva que pertence a mais famílias; a seguir, vem a *lemniscata de Bernoulli*.

Hipociclóides e a Mosca de La Hire

Philippe de La Hire (1640—1718), arquitecto, astrónomo e pintor, nascido em França, deixou entre outros, um trabalho sobre epicycloides (1694) e outro sobre concóides (1708); além disso, mostrou a utilidade das concóides em engrenagens e na transmissão de movimento.

Associado ao seu nome, temos um resultado conhecido como *Mosca de La Hire*: todo o ponto (uma mosca, por exemplo) de uma circunferência de raio r que role sem deslizar no interior de uma outra circunferência de raio $2r$, mantendo-se-lhe tangente, descreve um diâmetro desta.

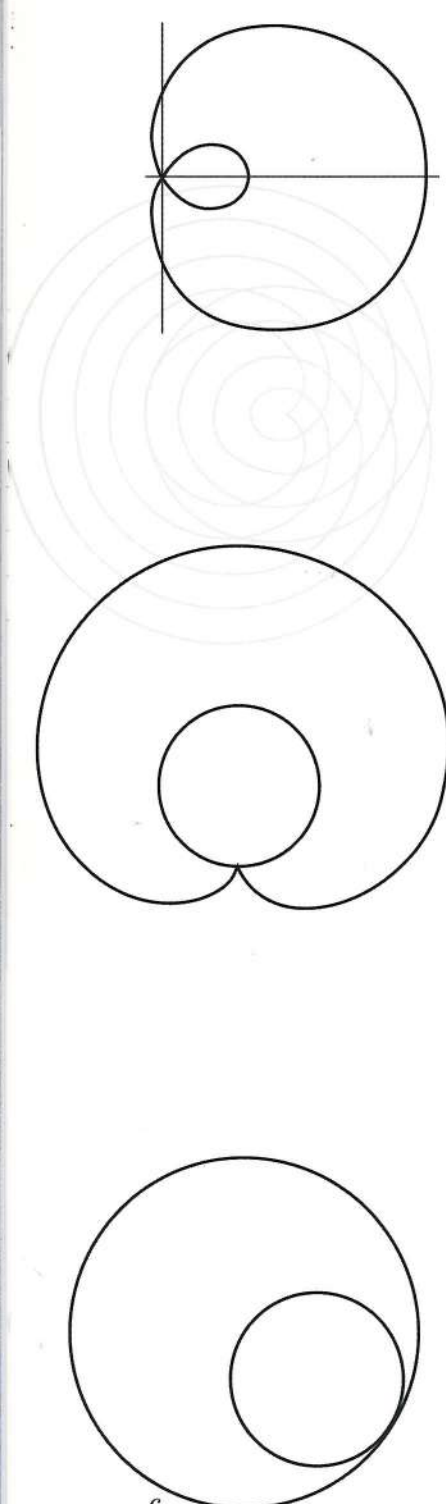
As condições de movimento agora descritas diferem das que definem a epicycloide apenas na posição relativa das duas circunferências — antes eram tangentes exteriores, agora pretendem-se tangentes interiores; antes tínhamos uma epicycloide, agora temos uma hipociclóide.

Ora no caso particular da relação estabelecida entre ambos os raios, um o dobro do outro, temos uma recta, a tal que suporta a trajectória da *mosca de La Hire*, que mais não é do que uma hipociclóide degenerada. De resto, qualquer que seja a distância do ponto gerador da curva ao centro da circunferência móvel, desde que a relação entre os raios das circunferências seja o estipulado, a figura descrita é uma elipse.

La Hire valeu-se da natureza, não para nomear um resultado como é visível noutras secções, mas para esclarecer ou dar aplicabilidade ao seu modelo.

As concóides e o caracol de Pascal

As concóides são curvas com dois ramos, geradas a partir de uma linha qualquer, c , de uma constante k e de um ponto, O . Seja P um ponto da linha c e Q o ponto



marcado na recta OP à distância dada, k , desse ponto P : o conjunto dos pontos Q , obtidos à medida que P se desloca na linha, chama-se concóide da linha c de pólo O e constante k . Como em cada recta existem dois pontos igualmente afastados de um outro ponto dessa mesma recta, esta definição dá, de facto, origem a uma curva com dois ramos. Em coordenadas polares, as concóides da recta têm para definição $r = k + a/\cos(\theta)$, onde a representa a distância do pólo à recta.

A palavra concóide significa em forma de concha. Nicomedes, matemático grego (c. 280—c. 210 a.C.) ficou com o seu nome associado a uma concóide, conhecida também por concóide da recta, talvez a mais antiga de todas as que chegaram aos nossos dias. Para a obter, e tal como o nome indica, recorreu a uma recta — que é a assíntota a ambos os ramos da concóide — e um ponto exterior a essa recta. Com essa concóide pretendeu resolver dois dos mais importantes problemas da antiguidade: a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

Utilizando uma circunferência e um ponto sobre ela, e procedendo como indicado anteriormente, obteremos a concóide da circunferência, assim designada na antiguidade, hoje conhecida por *caracol de Pascal*. Foi Roberval quem, em 1650, propôs que o nome de Étienne Pascal (1588—1651), pai de Blaise Pascal, ficasse eternamente ligado a esta curva, homenageando desse modo aquele que a tinha estudado de um modo tão exaustivo. Há autores que identificam a curva designada por *caracol de Pascal* com a *aranha de Dürer*. O tratamento em coordenadas paramétricas da linha obtida pelo processo de Dürer, permite concluir que, utilizando uma circunferência de raio k e constante igual a $a/2$, se obtém a relação

$$r = k + a\cos(\theta)$$

precisamente a relação que resulta quando se trata de igual modo analítico à linha gerada pelo processo da concóide à custa de uma circunferência de diâmetro a e da constante k . Philippe de La Hire reconheceu que a concóide gerada quando $k = a$, é uma cardióide; isto equivale a definir a cardióide como um caracol de Pascal no qual a constante é a medida do raio da circunferência.

Independentemente da construção utilizada, Pascal e Nicomedes não foram os únicos a estudar concóides e nem só de rectas ou de circunferências se definem concóides: existem, por exemplo, concóides de rosáceas.

René de Sluze (1622—1685) nasceu na Bélgica e frequentou a Universidade de Lovaina durante quatro anos; já graduado em leis, estudou línguas, matemática e astronomia em Roma. Depois de ser ordenado sacerdote, atingiu o cargo de conselheiro do Bispo de Liège; aos 44 anos, foi nomeado abade de Amay. Entre os muitos trabalhos de matemática que produziu, construiu em 1662 uma curva denominada *concóide de Sluze*.

Cabe aqui, completar uma referência a Dürer: a sua *muschellini*. Ela é gerada pelos extremos de um segmento de recta que se desloca de modo a que dois determinados pontos se mantenham sobre os eixos coordenados.

As ovais

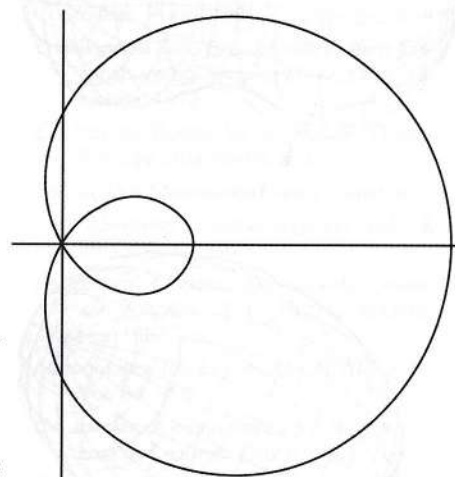
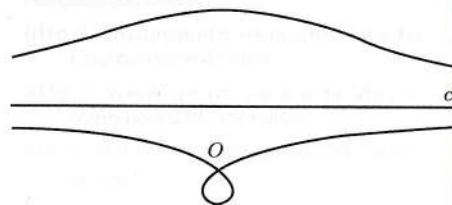
As ovais são curvas descritas por pontos cuja posição está relacionada com dois pontos fixos. Ao longo de vários anos, embora variando a perspectiva, todos os planos curriculares desenhados em Portugal incluíam, na disciplina de Matemática, o estudo de uma delas, a elipse. Porém, fixadas outras exigências sobre a distância a dois pontos fixos, nasce uma família à qual a elipse pertence.

Ovais de Descartes

Representando por r e r' a distância de um ponto P a dois pontos fixos, e por a e b dois números reais não nulos, e por k uma constante, a oval da Descartes será constituída pelos pontos do plano cujas distâncias cumprem a seguinte relação:

$$ar + br' = k.$$

Estas curvas foram introduzidas por Descartes numa das obras — *Dioptrique* — na qual ocupam um lugar de relevo. Escolhendo na definição $r = r'$, reconhecemos de



imediatamente a condição definidora da elipse para a qual apenas falta relacionar a soma constante com a distância entre os pontos fixos; e tomando r e r' simétricos um do outro, e igual precaução, já se obtém a definição usual da hipérbole.

Matematicamente, podemos procurar transformar a expressão geral definidora destas curvas. Tomando para centro o ponto O , ponto médio do segmento de recta definido pelos dois pontos fixos, para eixo a semi recta de origem em O que passa num desses pontos e para unidade de medida metade da distância entre esses pontos fixos, no sistema de coordenadas polares assim caracterizado, a definição bipolar dada converte-se em

$$(r')^2 = r^2 + 4 - 4r \cos(\theta)$$

Fácil é verificar que, escolhidos adequadamente os valores de r e de r' , desta relação saem as definições usuais da elipse e da hipérbole: basta escolher $r + r' = 3$ e $r - r' = 1$, respectivamente. Curiosamente, além de uma curva fechada e de uma curva aberta, também é possível obter a partir destas ovais uma curva fechada com dois ramos: fazendo $2r + r' = 4$ obtém-se, precisamente, um caracol de Pascal.

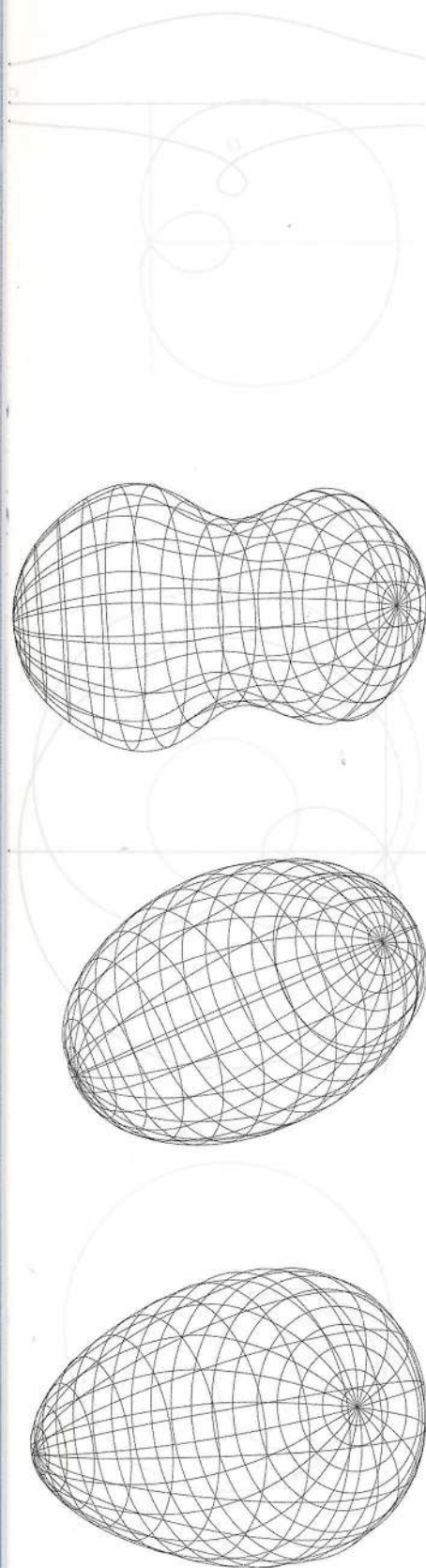
Ovais, ovos, amendoins, melões

Notícias recentes, informavam sobre as tempestades de Júpiter filmadas pela sonda de Cassini. À imagem e semelhança da designação de uma outra sonda, sonda de Galileu, também Cassini é um nome ligado à Astronomia, em particular ao movimento dos astros, e diz respeito a dois astrónomos, pai e filho, Jean Dominique (1625—1712) e Jacques (1677—1756), respectivamente. Jean Dominique, natural de Itália, onde estudou, viria a falecer em Paris, já naturalizado francês, para onde se tinha deslocado aos 44 anos a convite do rei Luís XIV. Ainda em Itália, foi professor de Astronomia na universidade de Bolonha e há conhecimento de uma publicação sobre a observação de um cometa, efectuada no observatório de Panzano. Já em França, foi director do Observatório de Paris, tendo sido o primeiro astrónomo a observar as quatro luas de Saturno.

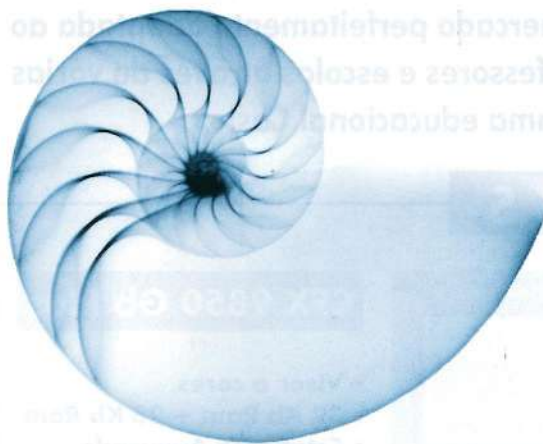
Adepto da teoria geocêntrica, Jean Dominique Cassini pensava que o Sol se deslocava descrevendo uma oval da qual a Terra ocupava um dos focos. Essa oval, hoje conhecida como *oval de Cassini*, é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos têm produto constante. O facto desta definição se obter da definição de elipse apenas por substituição de "soma" por "produto", justifica que também seja conhecida, também, por *elipse de Cassini*. Designando por $2a$ a distância entre os dois pontos de referência e por k^2 a constante, a equação cartesiana da oval de Cassini é

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - k^4 = 0.$$

Consoante a relação de grandeza entre a e k , estas curvas são formadas por um só arco ($a < k$) ou por dois arcos afastados ($a > k$) ou com um ponto comum ($a = k$). Neste último caso, tem a forma conhecida como *Lemniscata de Bernoulli*, curva que Jacob Bernoulli (1654—1705), matemático suíço de uma família com numerosos matemáticos, deu a conhecer em 1694 num artigo publicado em *Acta Eruditorum*, sem que tivesse feito qualquer ligação aos trabalhos de Cassini; como tinha a forma de um oito ou de um laço feito com uma fita, atribuiu-lhe o nome latino de *Lemniscus*. A relação entre as duas curvas levou 100 anos a ser estabelecida e para ela terão contribuído os trabalhos de Giovanni Fangano (em 1750) e de Euler (em 1751). Esta família de curvas pode ser obtida por secções planas do toro: um plano paralelo ao eixo do toro que se desloque a partir do centro do mesmo, vai dando, sucessivamente, os três membros desta família. Quando Cassini estudou estas curvas, por certo não imaginaria que elas algum dia viessem a ser associadas a melões, amendoins e ovos. Mas assim aconteceu: as figuras que se obtém por rotação, em torno do seu eixo, das *ovais de Cassini* definidas quando $a < k$, $a = k$ e $a > k$ foram baptizadas respectivamente como *melão*, *amendoim* e *ovo*.



Náutilo



Amonite fóssil

As espirais e a concha do Nautilus

Em termos não específicos, podemos afirmar que uma espiral é uma curva que *enrola e foge*: o ponto que a descreve roda em volta de um outro ponto, O , afastando-se simultaneamente desse ponto. Matematicamente, são curvas planas cuja definição analítica em coordenadas polares é do tipo $r = f(t)$, em que f é uma função estritamente monótona. Entre os vários matemáticos que as estudaram encontram-se Arquimedes (287—212 a.C.), Pierre de Fermat, Jacob Bernoulli e Pierre Varignon (1654—1722). As espirais estudadas por estes quatro matemáticos são definidas por funções de tipos diferentes, conseqüentemente, com características diferentes: a primeira é dita uma espiral linear ($r = at$, $a \neq 0$, $a \neq 1$), a segunda, parabólica ($r^2 = at$, $a \neq 0$, $t \geq 0$), a terceira, logarítmica ($r = a^t$, $a > 0$, $a \neq 1$), e a quarta, hiperbólica ($r = a/t$, $a \neq 0$).

Frequentemente se tem associado a *espiral de Benoulli* à concha de um cefalópode existente a cerca de 100 metros de profundidade na zona indo-pacífica (onde desce a grandes profundidades), aliás a única espécie dessa família que ainda não se libertou da concha. Há também quem a associe a um outro cefalópode, o amonite, que, ao contrário do que acontece com o náutilo, se dá como desaparecido desde o período Cretácio superior, mas cuja concha ainda é observável através de belos fósseis (este cefalópode terá surgido no período Devónico inferior, o que significa que existiu durante cerca de 350 milhões de anos e atravessou duas eras geológicas). Segundo alguns biólogos, a ordem a que pertencem os amonites, a Amonóidea, diverge da ordem hoje representada pelo náutilo, a Nautilóidea (que apareceu no período Câmbrico, portanto cerca de 570 milhões de anos a.C.), o que justifica não só as analogias como eventuais diferenças resultantes, também, da evolução animal. Em ambos os casos, as conchas depois de seccionadas, apresentam esta particularidade: estão divididas em compartimentos cujas divisórias seguem uma espiral de Bernoulli.

PS1: Os exemplos apresentados pretendem ilustrar a ajuda que a natureza tem dado aos matemáticos, por vezes apenas para nomear ou ajudar a comunicar resultados. Entretanto no campo da modelação, encontraremos outro tipo de relação: estaremos no espaço em que a Matemática poderá ajudar a interpretar funcional e quantitativamente a Natureza; então, será aí que o Homem poderá retribuir à Natureza a ajuda prestada até agora, fornecendo resultados que bem interpretados e melhor aplicados contribuirão para a sua protecção e conservação.

PS2: A inclusão de leis matemáticas é intencional. Uma simples calculadora gráfica permite facilmente visualizar as curvas referidas tomando a variável diferentes intervalos e constatar as conseqüências desses ensaios (daí, também, a ausência de domínio na maioria delas!). Por seu lado, aplicações de Geometria Dinâmica, nomeadamente *The Geometer's Sketchpad* ou o *Cabri*, permitem a geração das curvas a partir das definições de carácter geométrico dadas, a verificação das medidas fornecidas ou o estudo das suas propriedades.

Referências/Online

- <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/Courbes/indexC.html>
<http://www.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/>
<http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/curves/>
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>
<http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/courbes2d/courbes2d.shtml>
http://www.xahlee.org/SpecialPlanesCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Outras referências

- A terra: O Planeta desconhecido*. Círculo de Leitores. Lisboa, 1987.
 Boyer, Carl. *História da Matemática*. S. Paulo, 1974
 Dedron, Pierre, Itard, Jean. *Mathématiques et Mathématiciens*
Dicionário da História de Portugal, vol IV. Direcção de Joel Serrão. Livraria Figueirinhas. Porto, 1981.
Enciclopédia Luso Brasileira de Cultura. Editorial Verbo. Volumes 1, 2, 3 e 13. Lisboa, 1972
Enciclopédia Combi Visual, Vol. 6. Grolier Portugal Ltda. Sintra, s/d.
Educação e Matemática (vários números).
Lello Universal. Volume segundo. Lello & Irmão. Porto, 1973.
Lexicoteca: Moderna Enciclopédia Universal. Volumes 1 e 13. Círculo de Leitores, 1987.
Mathematics Teacher, Reston, NCTM, 2001 Vol. 94, nº 5.
Os animais: A maravilha da adaptação. Círculo de Leitores. Lisboa, 1987.
 Sedgwick, W.T., Tyler, H.W., Bigelow, R. P. *História da Ciência*. Editora Glóbo.
 Teixeira, Gomes. *Obras sobre Mathematica*, Volume sétimo. Coimbra, 1915
The New Caxton Encyclopedia. Vol. 1, 14. Caxton Publications Limited. London, 1979
The New Junior World Encyclopedia. Vol. 12, London & Sydne, Bay Books, 1979.
 Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais: materiais para professores*. Lisboa, IIE. 1998

Maria José Costa
 Esc. Sec. Augusto Gomes

A Casio possui a linha mais completa e acessível do mercado perfeitamente adaptada ao ensino em Portugal. Prestamos apoio constante a professores e escolas através de várias acções técnicas e pedagógicas do programa educacional Casio.

GRÁFICAS



FX 7450 G

- 20 Kb Ram
- Estatística Avançada
- Ligação a PC e Analisador de dados
- Versão para Retroprojector
- Visor Gráfico 6 Linhas por 13 Colunas
- Até 10 Gráficos no Visor
- Simplifica fracções
- Inequações • Tabelas
- Regressão • Zoom
- Modelo acessível



CFX 9850 Gb Plus

- Visor a cores
- 32 Kb Ram + 28 Kb Rom
- Estatística Avançada
- Cálculo Financeiro
- Matrizes • Complexos
- Raízes Reais e Complexos
- Derivados • Cónicas
- 10 Modelos de Regressão
- Biblioteca Incorporada
- Ligação a PC, Analisador de Dados, e Vídeo/TV
- Modelo com painel para Retroprojector

e ainda: FX 9750 G, CFX 9950 Gb Plus, Álgebra FX 2.0

ACESSÓRIOS P/ GRÁFICAS

FX - INTERFACE

Ligação a PC das gráficas CASIO

TV/VÍDEO - Vi 9850 G

Ligação a TV e Vídeo projector da CASIO CFX 9850 Gb Plus

KITS PARA RETROPROJECTOR

Conjunto Máquina + Data Display + cartão emulador

ANALISADOR DE DADOS

Recolha de Dados vários com sondas incluídas e ligação das gráficas CASIO

CIENTÍFICAS



FX 82 W/TL

FX 570 W

Científicas de alto nível, Simples, Económicas, Poderosas

- Visor com 2 linhas

ELEMENTARES



HS 8 ER

HL 820 ER

SL 450

- Robustas
- Económicas
- Modelos ER com cálculo de EUROS

P.E.C. Programa Educacional CASIO

Apoio Técnico e Pedagógico - Programa de Empréstimos - Cursos de Formação

O PEC - Programa Educacional CASIO, numa das suas várias vertentes, desenvolve cursos de formação (gratuitos), tendo como objectivo familiarizar a classe docente com a tecnologia das calculadoras gráficas e a sua aplicação aos novos programas de matemática.

O programa de cursos de formação desenvolvido pela CASIO, conta com o apoio de uma Equipa de Professores de Matemática a nível nacional, que não só realizarão os cursos como também responderão a qualquer solicitação técnica e/ou pedagógica.

CONTACTOS

TELEFONES: LISBOA: 213 122 869 FAX: 213 122 929
 PORTO: 222 073 512 FAX: 222 000 717

APOIO PEDAGÓGICO POR TELEFONE: 212 060 877

/E-MAIL: jpfiipe@hotmail.com

CASIO Japão: **ATIVIDADES DOWNLOADS**

www.casio.co.jp/edu_e/



**BELTRÃO
COELHO**

Lisboa, Porto, Braga, Aveiro,
 Coimbra, Santarém, Setúbal, Faro,
 Funchal e Sintra
www.beltraoc.pt

Cristalografia

A classificação matemática da Natureza

António Marques Fernandes

A cristalografia é um desses campos onde a interacção entre a matemática e o mundo real é grande. Não só (...) a matemática fornece uma ferramenta de classificação, também os exemplos de cristais, não só os naturais como os que se vão gerando artificialmente, geram situações que podem fornecer critérios de classificação dos grupos de isometrias.

Introdução

Charles S. Pierce (1839 — 1914), lógico e filósofo proeminente, considerou a classificação periódica dos elementos químicos (a tabela periódica), da autoria do químico russo Dmitrii I. Mendeleev (1834 — 1907), um dos factos científicos mais relevantes. Essa classificação revela que, não obstante a variedade de elementos químicos (mais de uma centena), as suas propriedades químicas podem ser classificadas de acordo com cerca de uma dezena de *categorias*. Esta relativamente restrita variedade combinatória foi igualmente notada por Poincaré (1854 — 1912), outro grande vulto científico. Para ele, esta característica é absolutamente essencial para que a ciência seja possível e útil. Na sua própria argumentação, se cada substância fosse essencialmente diferente de todas as outras, então o conhecimento científico seria inútil, na medida em que, de cada vez que contemplássemos um determinado objecto, a probabilidade de ele se encontrar já estudado seria ínfima.

De facto várias e úteis classificações tomam possível a ciência e, de algum modo, constituem uma evidência de que afinal a compreensão do Universo pode não estar vedada ao espírito humano.

Uma dessas classificações que, de resto, constitui o tema deste pequeno artigo, levou à fundação de um ramo da ciência conhecido por *Cristalografia*, que deve a sua existência ao reconhecimento de que certas propriedades dos materiais podem ser classificadas de acordo com a sua estrutura atómica ou molecular interna, mais propriamente de acordo com a *simetria* desse tipo de estrutura.

A noção de “grupo”

O conceito de simetria desempenha pois um papel fundamental na classificação dos sistemas cristalinos. Para descrever matematicamente a simetria de um objecto, ou para decidir se um determinado objecto é *mais simétrico*



Figura 1. C. S. Pierce



Figura 2. D. Mendeleev

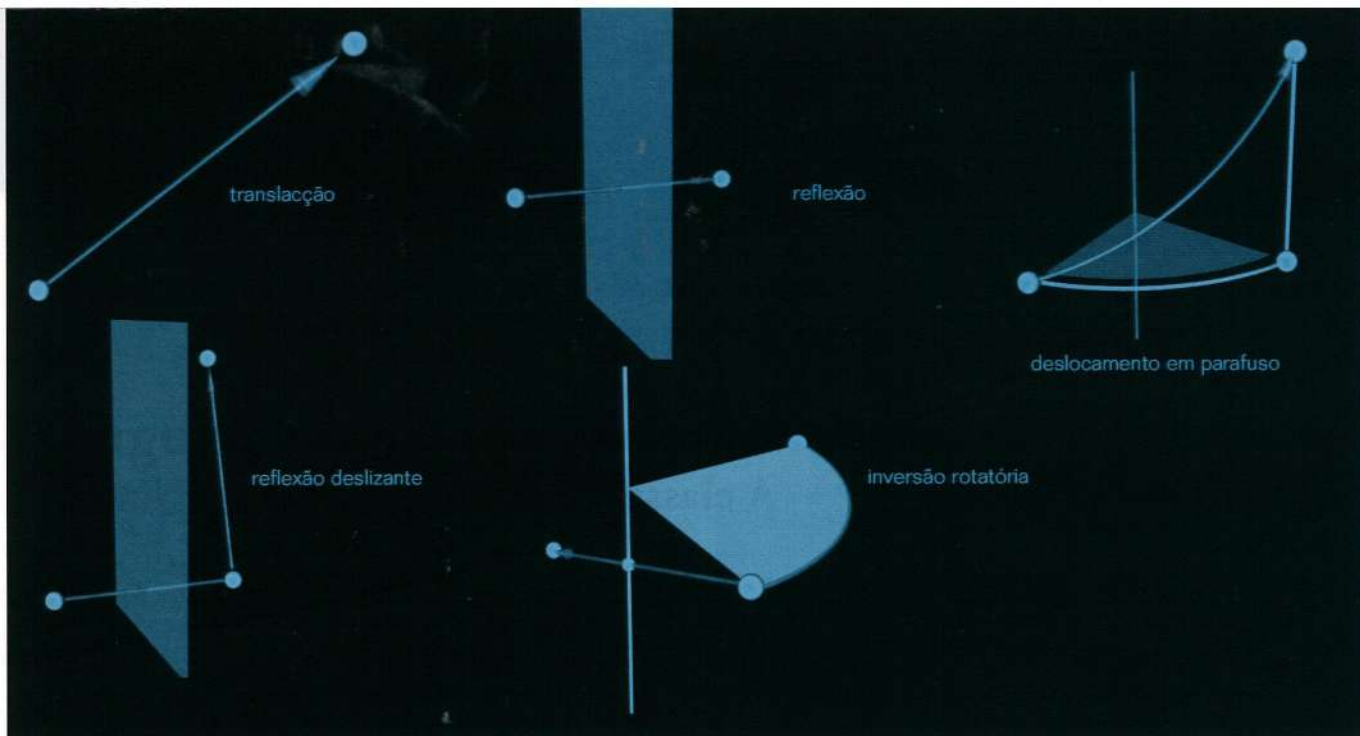


Figura 3. Os diferentes tipos de isometrias do espaço

que outro, ou se ambos têm a mesma simetria, devemos considerar um outro conceito matemático fundamental — o de *grupo*. Muito sucintamente um grupo consiste de um conjunto G equipado com uma operação binária " $*$ ", de tal modo que a operação é associativa, *i.e.*, dados quaisquer $x, y, z \in G$, tem-se $(x * y) * z = x * (y * z)$; existe $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$, para qualquer $g \in G$ (este e diz-se o *elemento neutro* do grupo) e, dado $g \in G$ existe $g' \in G$, tal que $g * g' = g' * g = e$ (este elemento g' diz-se o *inverso* de g). Como exemplo refira-se o conjunto dos inteiros relativos $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ equipado com a operação usual de adição. Neste exemplo "0" é o elemento neutro e o inverso de cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$ é o respectivo simétrico " $-n$ ". Outros exemplos notáveis, e muito mais interessantes para nós, obtêm-se considerando as transformações do espaço que preservam a forma e o tamanho — as *isometrias*. Matematicamente, uma isometria do espaço, é uma aplicação T que leva pontos do espaço X noutros, $T(X)$, de tal modo que a distância entre X e Y é igual à distância entre $T(X)$ e $T(Y)$. Pode verificar-se que o conjunto de todas as isometrias com a operação de composição constitui um grupo. Outros grupos (mais pequenos) obtêm-se quando consideramos as isometrias que deixam globalmente invariante uma determinada figura regular.

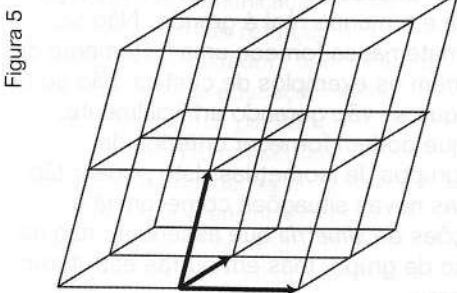
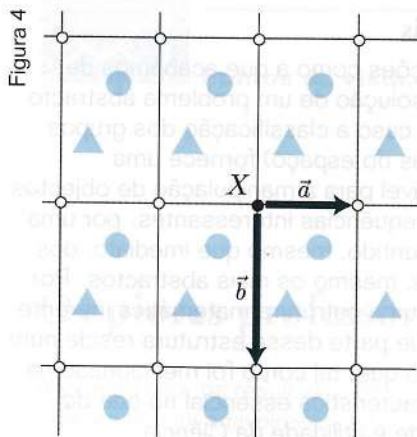
Um resultado notável estabelece que existem apenas cinco tipos de isometrias do espaço: as *translações*, as *rotações*, os *deslocamentos em parafuso*, as *reflexões rotatórias* e as *reflexões deslizantes*. A figura 3 ilustra cada um destes tipos. A cristalografia, pretende pois classificar os diferentes grupos de isometrias que deixam globalmente invariante as diferentes estruturas de

cristais. Uma vez que existem certos condicionamentos físicos em torno de uma estrutura deste tipo é de esperar que nem todo o grupo de isometrias do espaço corresponda ao grupo de simetria de um sistema cristalino.

Como veremos neste artigo, a matemática conseguiu responder à questão de saber que tipos de grupos de isometrias correspondem a isometrias de estruturas cristalinas.

A estrutura cristalina

De modo muito abreviado, pode dizer-se que o *estado cristalino* se caracteriza pelo facto de uma determinada unidade estrutural, a *base da estrutura cristalina*, se repetir num arranjo tridimensional que preenche o espaço. Além disso, essa repetição determina uma malha que se designa por *reticulado da estrutura cristalina*. Observe-se a figura 4. Sobre o padrão representado foi colocado (de modo arbitrário) um ponto X . A partir desse ponto é possível definir uma malha que é determinada pelos pontos do plano que são *equivalentes* a X . Não querendo entrar em especificações que não teriam aqui cabimento, dir-se-á que dois pontos são equivalentes se ocupam a mesma posição relativamente ao padrão representado. Continuando a observar a figura 4, pode observar-se que partindo de um ponto desse reticulado, se pode chegar a qualquer outro justapondo um certo número de vectores (as "setas" na figura). Cada um desses vectores determina, do ponto de vista das isometrias do plano aquilo que se denomina uma *translação*. Deste novo ponto de vista, se denotarmos por $T_{\vec{a}}$ e $T_{\vec{b}}$ as translações determinadas pelos vectores \vec{a} e \vec{b} , então, qualquer ponto



do reticulado é imagem de qualquer outro através de uma composição de translações do tipo:

$$T = \underbrace{T_{\vec{a}} \circ \dots \circ T_{\vec{a}}}_{n \text{ vezes}} \circ \underbrace{T_{\vec{b}} \circ \dots \circ T_{\vec{b}}}_{m \text{ vezes}}$$

Acrescente-se a estes factos que o reticulado fica determinado pelos comprimentos de \vec{a} e \vec{b} e pelo ângulo α entre \vec{a} e \vec{b} .

No espaço, em três dimensões, a situação é análoga. Nesse caso, o reticulado tridimensional, associado a um determinado padrão no espaço, fica caracterizado pelos comprimentos de três vectores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , e pelos ângulos α , β e γ que fazem entre si, tomados dois-a-dois (veja-se a figura 5). Dado um destes reticulados tridimensionais podemos considerar aquilo que se designa por *célula unitária* desse reticulado. Uma célula unitária, pode dizer-se, é uma parte representativa desse reticulado. Usando cópias dessa célula, podemos preencher todo o espaço, obtendo o reticulado referido. Em geral, é possível escolher células unitárias diferentes. Um dos critérios possíveis consiste em escolher uma célula unitária contendo um único ponto do

reticulado, neste caso obtém-se aquilo que se designa por uma *célula unitária primitiva*. Outra possibilidade reside na escolha de uma célula unitária cuja simetria seja a simetria da própria malha. De modo a poderem preencher o espaço sem deixar espaços vazios e sem que ocorram sobreposições, não existem muitas hipóteses para as células unitárias. De facto, existem exactamente 14 possibilidades, que são descritas na figura 6.

Embora uma componente essencial na descrição das estruturas cristalinas, os reticulados e as células unitárias não são suficientes para classificar a estrutura cristalina. Muitas substâncias com este tipo de estrutura, com propriedades físicas completamente diferentes, determinam o mesmo reticulado e as mesmas células unitárias. A chave para essa distinção e, consequentemente, para a obtenção de uma classificação útil, em termos práticos, reside na descrição da simetria interna da própria célula unitária. A ferramenta para produzir essa descrição é fornecida por um tipo especial de grupos de isometrias os chamados *grupos cristalográficos pontuais*.

Um *grupo cristalográfico pontual* é, por definição um grupo de isometrias do espaço que deixa globalmente invariante uma determinada malha tridimensional e um dos seus pontos. O simples facto de um destes grupos ter que fixar um ponto do espaço permite estabelecer que é necessariamente finito. Um facto bastante mais simples de estabelecer é que um tal grupo não pode conter translações, nem reflexões deslizantes ou deslocamentos em parafuso, já que estas não têm pontos fixos. Mais difícil, mas não menos interessante é o resultado conhecido pela designação de *restrição cristalográfica*:

Restrição cristalográfica. Se R é uma rotação num grupo cristalográfico pontual, então a ordem de R só pode ser 2, 3, 4 ou 6.

Para podermos apreciar a força deste resultado importa esclarecer o que

se entende por *ordem* de uma rotação. Dizemos que uma rotação tem ordem $n \in \mathbb{N}$ se o ângulo que lhe está associado é da forma $2\pi/n$. Claro que existem rotações de todas as ordens e até rotações em que os ângulos não são da forma $2\pi/n$ assim, o que a *restrição cristalográfica* estabelece é que apenas um tipo muito restrito de rotações pode integrar um grupo cristalográfico pontual. Atendendo a estas restrições severas, não espanta que seja possível *classificar* estes grupos. De facto, existem 32 grupos cristalográficos, que determinam as propriedades macroscópicas dos cristais, como por exemplo o posicionamento relativo dos planos de clivagem e as propriedades ópticas de cada cristal.



Figura 6

Como se referiu, existem 32 grupos de isometrias que preservam globalmente uma determinada malha tridimensional e deixam fixo um dos seus pontos. Mas, se considerarmos cada uma das malhas tridimensionais possíveis, observamos que mais do que um desses grupos cristalográficos pontuais a preserva. Assim, obtém-se uma outra classificação interessante se considerarmos para cada malha tridimensional, o maior (no sentido da inclusão) grupo cristalográfico pontual que a preserva globalmente. Obtém-se sete classes ou *sistemas cristalinos*, que se designam de *sistema cúbico*, *tetragonal*, *trigonal*, *ortorrômbico*, *monoclínico* e *triclínico*.

Antes de concluir esta descrição dos grupos cristalográficos, importa fazer um esclarecimento para aqueles que se interessam mais por estas questões algébrico-geométricas. Ao longo deste artigo utilizou-se frequentemente uma afirmação do tipo *existem apenas n grupos do tipo...*, essas frases podem levar o leitor a pensar que estamos a referir-nos à existência de *n* grupos a menos de um isomorfismo (ou seja que qualquer grupo daquele tipo terá a mesma estrutura algébrica de um dos *n* referidos). Não é assim! O que se pretende dizer é que cada grupo daquele tipo é *semelhante* a um dos *n* mencionados. Dois grupos semelhantes são isomorfos, conseqüentemente têm a mesma estrutura algébrica, mas a noção de semelhança é mais rica em conteúdo geométrico que a de isomorfismo (dois grupos podem ser isomorfos e um deles conter isometrias que não preservam a orientação e isso não acontecer com o outro).

Considerações finais

A ocorrência de situações como a que acabámos de descrever, em que a solução de um problema abstracto de matemática (neste caso a classificação dos grupos discretos de isometrias do espaço) fornece uma ferramenta indispensável para a manipulação de objectos físicos tem duas conseqüências interessantes: por uma lado a utilidade num sentido, mesmo que imediato, dos objectos matemáticos, mesmo os mais abstractos. Por outro lado que existe uma estrutura matemática inerente ao mundo natural e que parte dessa estrutura reside num processo classificativo que, tal como foi mencionado na introdução, é uma característica essencial no que diz respeito à possibilidade e utilidade da Ciência.

A cristalografia é um desses campos onde a interacção entre a matemática e o mundo real é grande. Não só, como já se viu, a matemática fornece uma ferramenta de classificação, também os exemplos de cristais, não só os naturais como os que se vão gerando artificialmente, geram situações que podem fornecer critérios de classificação dos grupos de isometrias. Isto pode ir tão longe quanto, essas novas situações começam já a motivar novas noções de *simetria* que assentam, não no tradicional conceito de grupo, mas em outras estruturas algébricas mais gerais.

Finalmente, para dar apenas uma ideia da importância deste problema da classificação das isometrias, deve dizer-se que este mesmo problema generalizado a *n* dimensões aparece na famosa lista de problemas (problema 18), proposta por David Hilbert, em 1900.

Referências

- Yale, P. B.; *Geometry and Symmetry*, Dover, 1968
 Hilbert, D.; *Mathematical problems*, Bull. Am. Math. Soc., 50, Jan 1953.
 Weyl, H.; *Symmetry*, Princeton University Press, 1952

António Marques Fernandes
 Instituto Superior Técnico

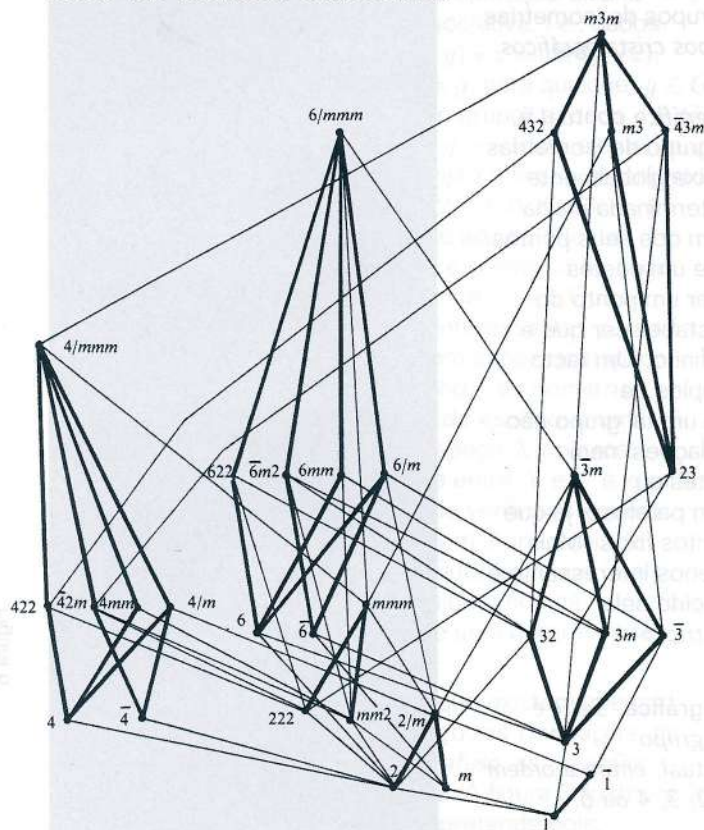


Figura 7. Relações entre os 32 grupos cristalográficos pontuais. A cheio encontram-se os sete sistemas cristalinos.



Os piores professores

Ano após ano, os resultados dos exames têm invariavelmente uma consequência, que os *analistas* que escrevem na comunicação social não se cansam de reforçar: a estafada e devastadora conclusão de que o estado da educação neste *jardim à beira-mar plantado* é miserável. Alguns não conseguem mesmo esconder as saudades do passado. Dantes é que o ensino era bom, dantes é que se aprendia. Hoje só produzimos empregadas ignorantes, que se arrepiam perante a perspectiva de fazer contas de papel e lápis e se sentem indefesas perante a ausência de uma calculadora; hoje, assiste-se ao desconhecimento vergonhoso do sublime algoritmo da divisão (já nem falo da raiz quadrada!) pela generalidade dos cidadãos (alegadamente até por professores de Matemática). É o habitual embarque em explicações superficiais, em detrimento de análises mais rigorosas que confrontem diferentes tipos de dados, nomeadamente os de âmbito social, cultural e económico.

Inspirado pelas discussões estivais, decidi criar o meu próprio sistema de ordenação, através de um algoritmo muito mais simples e compreensível do que os rebuscados métodos dos jornais: ordenar os professores pelas médias nos exames nacionais de 12º ano. Entram todos, qualquer que seja o número de alunos examinados na respectiva disciplina. Nem preciso de recorrer à Provedoria da Justiça, pois os dados que pretendo são fornecidos voluntariamente pelo Ministério. Lamento muito, caras e caros colegas, o teorema é trágico e doloroso mas a demonstração é trivial: os professores de Matemática são os piores professores do país! Pela parte que me toca, já há muito tempo que o

presentia, mas bem hajam os jornais por me terem fornecido os axiomas de uma nova teoria que iluminou o meu raciocínio dedutivo e da qual me confesso já um fervoroso adepto. A lógica demonstrada na criação de *A Lista* foi um acto de inspiração superior. Depois desta criação temos de reconhecer que se entrou numa nova era: a Era da Lista.

Já agora, como ainda não foi possível determinar um método para avaliar o desempenho dos professores, quero, desde já, antecipar uma proposta relativa aos professores do ensino secundário: o seu desempenho deve ser classificado pelo lugar obtido na lista formada pela média que os seus alunos obtiveram no exame de 12º ano. Proponho até que todos os anos se forme um quadro de honra. E também seria de louvar que a própria Presidência da República instituisse o prémio de melhor professor do ano. Estes resultados deveriam ser determinantes para a progressão na carreira: os professores com médias negativas não mudariam de escalão. Era muito bem feito (que se mudem para as melhores escolas do país!). E mais: os salários deveriam ser indicados de acordo com as ditas médias. Quanto mais alta a média, maior o salário. A minha conjectura é de que se acabava com o insucesso. Ficava toda a gente contente. Excepto os jornais, claro, que perdiam alguns pitéus para as suas páginas... E, já agora, quando alguém vos perguntar "Quais as razões do insucesso e que medidas para o combater?" — esta é a pergunta preferida dos jornalistas, deve fazer parte dos manuais do curso de jornalismo — estejam à vontade para reproduzir estas minhas humildes sugestões. Sobretudo insistam na necessidade de listas. Como em qualquer facto da vida, descubro méritos neste episódio relacionado com as listas de escolas ordenadas em

função de médias de classificações de exames. Por um lado, fornece um bom exemplo para discutir com os alunos a organização e a interpretação (e a manipulação) de dados estatísticos: quem sabe não o poderemos vir a aproveitar para as aulas de Matemática (em particular para a Matemática Aplicada às Ciências Sociais) ou para a Área de Projecto? Por outro lado, coloca de novo a necessidade de discutir qual deve ser o quadro de referência para a avaliação do sistema de ensino não superior.

Luís Reis
Esc. Sec. de Augusto Gomes

Exames, Classificações e Rankings

Recentemente, e pela primeira vez, o Ministério da Educação tornou públicos os resultados dos exames nacionais do 12º ano dos alunos de cada escola. Publicados pela imprensa, logo alguns diários cuidaram de elaborar uma classificação relativa das escolas, um *ranking*.

O conhecimento dos resultados era até aqui possível em cada escola, que não deixava certamente de os analisar, mas agora as classificações de todas as escolas estão ao dispor de professores, alunos, pais, políticos, jornalistas, comentadores, cidadãos em geral. Nada consigo encontrar de negativo em tal conhecimento, bem pelo contrário. Não sendo, a meu ver, os resultados dos exames (dos alunos internos), ao contrário do que pretende certa corrente político-ideológica, o critério único e indiscutível de qualidade das aprendizagens dos alunos e, em geral, da qualidade



do desempenho de uma escola, creio que os profissionais da educação mal andariam se, como também outros nos aconselham, ignorassem os exames e os seus resultados, eles que para a grande maioria dos alunos, emocionalmente estáveis, dão de alguma maneira conta, com uma certa objectividade, do valor de um conjunto importante das suas aprendizagens.

A útil reflexão em cada escola sobre os resultados do exame de Matemática e das outras disciplinas deve evidentemente ir a par com uma rejeição serena de uma eventual atitude de excomunhão das *más* escolas por parte da opinião pública ou da administração educativa, atitude que de momento não vislumbro: na verdade, muitas mais, e muito mais ricas e difíceis tarefas e projectos enformam a vida e o trabalho numa escola do que o simples resultado dos exames. Discutir a melhoria da educação olhando só para os resultados dos exames faz lembrar aquele *maduro* que se recusou a ver o Benfica-Porto e só quis saber que o resultado fora 0-0 ...

José Manuel Duarte
Esc. Sec. Fernando Lopes Graça,
Parede

Ranking das Escolas

Nos últimos tempos têm sido publicadas diversas informações sobre as escolas, de todos os níveis (incluindo portanto as escolas superiores). No inevitável debate havido (que não acompanhei muito bem), parece-me ter-se evidenciado uma preocupação central, e que por essa razão se impôs como justificativo publicamente partilhado para a existência daquelas informações: é necessário pensarmos conjuntamente o que é educar e como cada uma das escolas o está a fazer.

O chamado ranking das escolas foi o último deste tipo de documentos a ser publicado. Creio que muitos professores terão, numa primeira reacção,

procurado um pouco de conforto na posição da sua escola, o que só veio a ser possível para uns tantos, ficando os outros com a amargura. Numa segunda reacção, penso que quase todos se aperceberam do erro que é comparar o que não pode ser comparado (tal como as pessoas, também as escolas são diferentes). O que me está a preocupar agora é a travagem do efeito de reflexão: estamos a começar as aulas, mais do que nunca temos desafios novos a enfrentar (sim, é isso que eu sinto e é isso que eu oiço outros colegas desabafarem), nos quais precisamos de mergulhar, e as preocupações com a análise um pouco distanciada do que temos feito e vamos fazer ficam impossibilitadas — até mesmo esquecidas.

Na minha opinião, o êxito de qualquer transformação educativa depende principalmente das condições para que uma reflexão distanciada possa ser feita, permanentemente. A minha experiência como membro de uma Assembleia de Escola, e também como membro do Conselho Nacional da APM, avisa-me de que essas condições não estão no terreno.

Gostaria, para terminar, de enunciar o mais difícil dos meus dilemas profissionais, que sei ser partilhado por outros professores e que tem muito a ver com o ranking das escolas: como organizar (nas turmas, nas escolas, nos currículos) o trabalho com alunos opostamente interessados pela Matemática?

Note-se: não escrevi *opostamente preparados para a Matemática*, mas sei que também é preciso pensar nisso.

Pedro Esteves
Esc. Sec. José Afonso, Seixal

A matemática num jornal em tempo estival

O interesse societário que tem sido visível sobre alguns aspectos relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática trouxe mais uma vez o assunto a meios de comunicação social de grande divulgação.

Quem perdeu a recente polémica, num dos jornais portugueses de maior tiragem, pode inteirar-se de todos os *capítulos* nas páginas da APM (www.apm.pt) e acho que não se arrepende. Além de ser um tema de interesse evidente para um professor de matemática, sou capaz de arriscar que encontrará afirmações com as quais concordará totalmente, outras que lhe provocarão uma discordância profunda e, principalmente, pontos que convidam a uma reflexão. Por mim, pretendia partilhar algumas elucubrações que vou tentar resumir.

Fortifiquei a minha crença sobre a enorme complexidade do tema em discussão. Apesar de ter sido um assunto específico — as notas de exames escritos, para não variar muito — que despoletou o processo, cedo se verificou a ligação a assuntos bem mais abrangentes e diversificados, demonstrando a dita complexidade. Claro que estou convencido do valor de todos os que escreveram para o jornal e viram publicadas as suas intervenções. Fiquei com a sensação de que é muito difícil que haja um debate esclarecedor, se for esta a forma utilizada.

Mais uma vez me pareceu que é necessário entrar em conta com o grau de envolvimento que os intervenientes têm em relação ao tema em discussão e, portanto, o nível de profundidade que justifica e suporta as suas opiniões. Tenho verificado que a tese de Oscar Wilde sobre o bom gosto — é o que está mais bem distribuído pela raça humana, pois todos pensam que têm muito — pode ser extrapolada e adaptada para os assuntos educativos: um dos assuntos mais



bem conhecidos neste mundo, pois muita gente acha que percebe muito. Devo confessar que desconfio desse manancial de conhecimento alargado, sabendo da tal complexidade e da enorme quantidade de perspectivas diferentes que existem. Como não me parece justo dizer à partida que há intervenientes espertos e outros que o não são, devo ver as participações de acordo com o que transparece como produto de reflexões cuidadas e da situação da pessoa que intervém em relação ao assunto, neste caso o ensino secundário. Por que razão um especialista em marketing me deve merecer o mesmo crédito que um jogador de futebol, quando se trata de discutir a angústia do marcador de um pénalti?

Finalmente, não posso deixar de assinalar algo que me parece altamente contraditório em várias posições dos que defendem o ensino rotineiro de procedimentos matemáticos — os *alicerces*, segundo um dos intervenientes. Se pegarmos nos dados disponíveis sobre a realidade do ensino da matemática no ensino secundário, nomeadamente a nível da sala de aula, em Portugal, o que transparece (ver por exemplo o relatório final do projecto da APM, Matemática 2001) é que o ensino ainda está muito apoiado em aspectos tradicionais, como por exemplo a resolução de exercícios, o trabalho eminentemente individual, a utilização estreita de recursos, com o manual escolar a dominar, a avaliação muito baseada em resultados de testes escritos de tempo limitado, etc. Assim sendo, quem critica os resultados obtidos pelos alunos, devia levar em consideração que eles também são fruto do tipo de ensino que defendem e que de facto não pode ser caracterizado pelas inovações de que discordam. É como se a inovação fosse morta antes de existir!

Fernando Nunes
Escola EB 2,3 Marquesa de Alorna

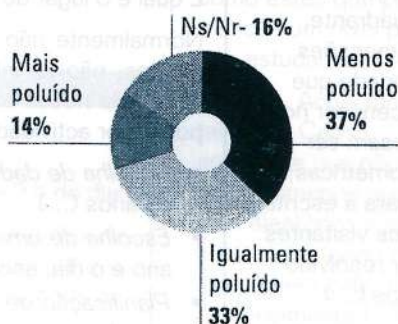


A poluição dos rios, com a consequente mortandade de peixes, é o problema ambiental que mais choca os portugueses

O QUE PENSAM OS PORTUGUESES SOBRE O AMBIENTE

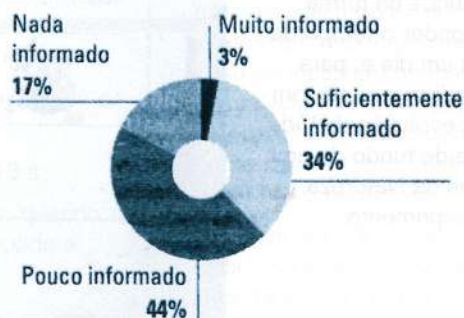
► PROBLEMAS AMBIENTAIS

Portugal é mais ou menos poluído do que outros países europeus?



► INFORMAÇÃO

Considera-se bem informado sobre o ambiente?



in Público, 8 Maio 2001



Notícias das escolas

O tema *Matemática e Natureza* foi a proposta da APM para ser trabalhado nas escolas em 2000/2001. Alguns colegas tomaram a iniciativa de nos enviarem relatos dos trabalhos realizados. Na impossibilidade de os publicarmos integralmente reproduzimos alguns excertos.

Almada-Seixal

(...) Ocorreram dois tipos de iniciativas: nas escolas, pelos professores e o 1º Interescolas sobre *Matemática e Realidade*.

Este foi uma iniciativa do Núcleo de Almada e Seixal da APM (...) Foram colocados às equipas três desafios: medir, com um instrumento previamente construído (ou o Quadrante, ou o Baculum), uma das dimensões do monumento em ferro forjado que se encontra no Parque; recensear no Parque elementos que possam ser descritos como figuras geométricas; colocar um problema útil para a escrita de um folheto destinado aos visitantes do Parque e que possa ser resolvido mais tarde por outros alunos.(...)

O projecto sugerido às escolas pode ser consultado na página da internet do núcleo de Almada-Seixal.

Na Escola Básica 2+3 Pedro Eanes Lobato da Amora, a professora Cristina Lima e os alunos da turma 7º F fizeram corresponder o tempo de existência da Terra a um dia e, para pintar um histograma (horizontal) com as diversas fases da evolução da Vida, escolheram a parede de fundo de uma das salas de Ciências da Natureza, com 6 metros de comprimento.

Projecto «Há quanto tempo existimos?!»

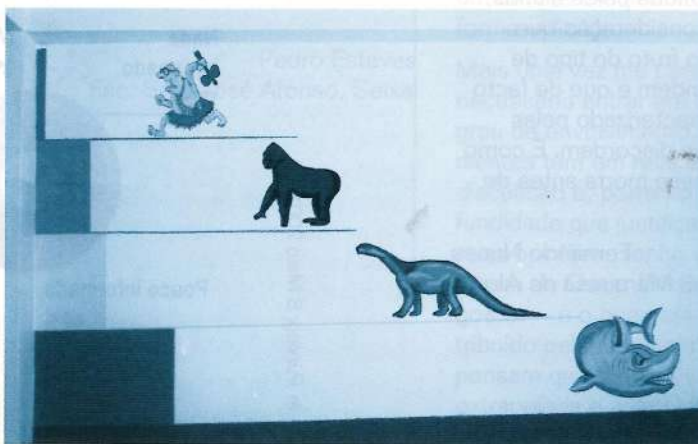
Por vezes acontece-nos falar do tempo de vida do Universo, ou do tempo em que os dinossáurios reinavam sobre a vida então existente na Terra ...

Mas há quanto tempo foi isso? Há quanto tempo existem o Universo e a Terra, durante quanto tempo existiram os dinossáurios, há quanto tempo existimos nós mesmos?

E qual é o lugar do nosso tempo nesse tempo todo?

Normalmente não sabemos responder a estas perguntas. Para ter algumas noções, não só informativas, também estimativas, sobre qual a estrutura do tempo da nossa existência, pode ser realizado nas escolas um projecto composto por actividades como as seguintes:

- *Recolha de dados*, por exemplo, a idade da Terra ronda os 4, 6 mil milhões de anos (...)
- *Escolha de uma dimensão temporal de referência*, as mais habituais são o ano e o dia; escolhendo o dia, a idade da Terra corresponde a 24 horas (...)
- *Planificação de uma gravura para a Escola*, o mais simples é escolher uma parede ou um pátio para realizar uma pintura (...)
- *Execução da gravura* (...)
- *Comunicação da iniciativa* (...)





Se os períodos temporais da Vida na Terra tivessem sido os que figuram na sugestão de projecto transcrita, os cálculos para a sua redução a um dia andariam muito próximos do que se mostra a seguir (ver destaque).

Na Escola Secundária José Afonso (Seixal) a professora Isilda Polónio e os seus alunos da turma 9º A escolheram uma redução ao ângulo giro de um círculo de madeira com quase 1 metro de diâmetro, no qual os diferentes períodos da Vida na Terra surgem representados como fatias de um gráfico circular.

Pedro Esteves



Escola Secundária Quinta do Marquês, Oeiras

Quando lancei o desafio os alunos ficaram um tanto desconfiados pois não estavam nada a ver como poderiam explorar o tema. Eu indiquei alguns sites e fiquei expectante....

Passado uma semana começaram a aparecer os planos dos trabalhos e também algum entusiasmo com o que iam descobrindo nas suas pesquisas. Para certos grupos foi muito desafiante pois tentaram explorar temas complicados como *Fractais* e *Teoria do Caos*.

Os temas mais trabalhados foram muito de acordo com a sua área vocacional e os formatos foram variados: cartaz, livro, apresentação em *Powerpoint*, e até em vídeo. (...)

Sobre os trabalhos escreveram os alunos:

"O trabalho (...) ajudou a compreender até que ponto esta relação se manifesta na realidade. São trabalhos como estes que nos abrem uma nova perspectiva sobre a matemática e as teorias matemáticas aplicadas à realidade, que nos dão a vontade de estudar e compreender a Matemática. São trabalhos como estes que poderão colocar a Matemática num nível privilegiado na mentalidade dos estudantes." — José Miguel, 11ºB

"Hum.... Achei fantástica a aventura dos fractais e do Caos; (...) deu-me asas para pensar em factos que não me passariam pela cabeça, em fenómenos que aparentemente me parecem aleatórios e que afinal têm por trás cálculos (...) pretendo continuar a investigar e mais tarde quem sabe fazer parte dos Amigos do Conhecimento (...). Gostei desta proposta de trabalho." — Tânia Trindade, 11ºA

"Hoje em dia a tendência para gostar cada vez menos de Matemática é geral. (...) na minha opinião, é com este tipo de trabalhos que podemos a pouco e pouco olhar para esta disciplina de modo diferente. Para nós jovens, é muito importante relacionar, neste caso conhecimentos matemáticos, com a nossa vida (dia a dia, acontecimentos, fenómenos, etc). Todos queremos viver a vida... Então vamos tornar a Matemática um pouco dela!" — Inês Antunes, 11ºA

"(...) Em jeito de conclusão sobre este trabalho, notei que matemática é muito mais importante para a nossa vida do que aquilo que podemos imaginar." — Bruno Pais, 11ºB

Ana Costa

Redução da vida da Terra a 24 horas

Um dia = 24 h x 60 min x 60 s = 86 400 segundos.

Idade da Terra ≈ 4, 6 mil milhões de anos. Corresponde às 0 h do dia.

Início da existência de Vida no nosso planeta ≈ há 4 mil milhões de anos, portanto, quando a Terra tinha, aproximadamente, 600 milhões de anos. Através da regra de três simples esta idade corresponde a:

$$\begin{array}{l} 86\,400 \text{ segundos} \text{ ————— } 4\,600 \text{ milhões de anos} \\ x \text{ segundos} \text{ ————— } 600 \text{ milhões de anos} \end{array}$$

$$x = 86\,400 \times 600 \div 4\,600 \approx 11\,270 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 7 \text{ min } 49 \text{ s.}$$

Explosão e início da diversificação de formas de vida ≈ há 570 milhões de anos. A Terra já tinha a avançada idade de 4 030 milhões de anos, ou seja, a $86\,400 \times 4\,030 \div 4\,600 \approx 75\,694 \text{ s} \approx 21 \text{ h } 1 \text{ min } 34 \text{ s}!!$

Início do tempo dos dinossáurios ≈ há 245 milhões de anos. Idade da Terra: 4 355 milhões de anos. Esta idade corresponde a

$$86\,400 \times 4\,355 \div 4\,600 \approx 81\,798 \text{ s} \approx 22 \text{ h } 43 \text{ min } 18 \text{ s.}$$

Fim do tempo dos dinossáurios ≈ há 65 milhões de anos, quando a Terra tinha 4 535 milhões de anos de idade, o que corresponde a

$$86\,400 \times 65 \div 4\,600 \approx 1\,200 \text{ s} \approx 20 \text{ min } 0 \text{ s.}$$

Início da existência do Homo Sapiens ≈ há 2 milhões de anos, ou seja, aos 4 598 anos de idade da Terra, correspondendo tal a

$$86\,400 \times 2 \div 4\,600 \approx 372 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 12 \text{ s}!!$$



Escola E.B. 2. 3 Quinta de Marrocos

No âmbito da *Matemática e Natureza* foram realizadas actividades sobre a Sequência de Fibonacci e Fractais por alunos do 8º ano.

Durante o 2º período, a propósito da Sequência de Fibonacci, os alunos fizeram diversas pesquisas, tendo daí resultado os seguintes trabalhos: Os coelhos de Fibonacci, As abelhas e a sequência de Fibonacci, As folhas de Fibonacci, Os ramos de Fibonacci, As espirais de Fibonacci — as flores, As espirais de Fibonacci — as pinhas, Pétalas e flores e os números de Fibonacci, Frutos e vegetais e os números de Fibonacci, Os rectângulos de Fibonacci, as espirais e o Nautilus, O que é o número de ouro?, A sequência de Fibonacci — algumas propriedades.

Também relacionaram a sequência com o triângulo de Pascal e escreveram uma pequena biografia sobre Fibonacci.

Quanto aos Fractais, resolveram uma *WebQuest* por mim concebida e construída, o que lhes permitiu relacionar Matemática, Arte e Natureza e, simultaneamente, rever diversos conteúdos programáticos.

Isabel Catalão



Escola C+S de Irene Lisboa

No jornal da Escola, *o Irineu*, foram publicadas ideias sobre as relações entre a Matemática e a Natureza:

O corpo humano, e o de muitos outros animais têm metades aproximadas, dispõe de uma simetria bilateral (...)

Muitas plantas, flores e animais simples podem ter um tipo diferente de simetria, com as suas formas baseadas na existência de um ponto central: é o caso da estrela do mar, cujos cinco braços radiam do centro. Diz-se que estas formas têm uma simetria radiada.

As sementes são transportadas pelo vento. Os desígnios da natureza permitem que o máximo possível de sementes radie de um ponto central.

A semente é um bom exemplo de simetria radiada.

Não é apenas nos seres vivos que podemos observar simetria. A molécula de benzeno (produto químico que entra na preparação de corantes e outros produtos (...)) é constituída por seis átomos de carbono, dispostos num anel de seis lados hexagonais; esta forma hexagonal é também a dos flocos de neve e dos favos construídos pelas abelhas para armazenar o mel.

Note-se que as formas simétricas definem-se muitas vezes sem linhas rectas: a ondulação provocada pela queda de uma pedra na água de um lago é simétrica e tem forma circular (...)

Tina Gregório





Para este número seleccionámos

Conexões entre as Ciências e a Matemática Escolares

Donna F. Berlin

Arthur L. White

A problemática da ligação entre o ensino da Matemática e das Ciências não é nova nem sequer recente. Sobre ela há já muito trabalho realizado em outros países, embora entre nós haja ainda muito caminho a percorrer e muito pouca discussão sobre o assunto. Como um contributo para esta reflexão, indispensável para a reorganização curricular, seleccionámos um texto de Donna F. Berlin e Arthur L. White, no original «Connecting School Science and Mathematics», integrado no 1996 Yearbook, Connecting Mathematics across the Curriculum, House, P. A. & Coxford, A. F. (Eds.) e publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics.

A integração das ciências e da matemática na escola tem sido objecto de muita atenção nos actuais documentos da reforma educativa, como um meio para melhorar o desempenho e a compreensão dos alunos, e para desenvolver atitudes positivas e realísticas em relação à ciência e à matemática. Na literatura, encontramos uma abundante quantidade de termos que se referem à ideia de "integração", como por exemplo, *conexões, cooperação, coordenação, correlação, cruzamento-disciplinar, fusão, interações, interdependência, interdisciplinaridade, inter-relação, elo de ligação, multidisciplinaridade, transdisciplinaridade, e unificação* (Berlin 1991). Em toda a literatura, existe um sentimento geral de que integração é uma coisa "boa". Contudo, muito pouco tem sido escrito sobre o que realmente significa integrar ciências e matemática, e ainda menos investigação tem sido feita no que respeita a explorar benefícios e dificuldades (Berlin 1991). Se bem que muitos estejam de acordo com a afirmação "integra a forma de ensinar antes de te preocupares muito em integrar aquilo que ensinas" (Steen 1994), outros advogam a inclusão de "métodos matemáticos nas ciências e de métodos científicos na matemática, de forma que tudo fique indistinguível tanto para a matemática como para as

ciências" (Berlin and White 1992, p. 341). Tudo isto aponta para a necessidade crítica de desenvolver uma linguagem comum a partir da elaboração de um modelo para a integração escolar das ciências e da matemática.

Modelo de Integração

A integração escolar das ciências e da matemática precisa de ter em conta um leque alargado de aspectos para orientar de forma eficaz as práticas educativas e a investigação. O modelo *Integrated Science and Mathematic de Berlin-White* (BWISM) identifica os seis seguintes aspectos: (1) aprendizagem, (2) formas de conhecimento, (3) processos e capacidades de raciocínio, (4) conhecimento conceptual, (5) atitudes e percepções, e (6) ensino. Não é nossa intenção considerar estes aspectos como isolados ou exclusivos entre si. A identificação e desenvolvimento de cada um destes aspectos isoladamente são feitas de forma a proporcionar alguma clarificação sobre as suas características que se encontram em confronto permanente quando procuramos definir, implementar e avaliar a integração. Estes aspectos, em várias combinações, podem servir de base para obter definições operacionais e investigações comparáveis.

Aprendizagem

A integração pode ser encarada na perspectiva do aluno e no modo como são desenvolvidos e organizados conceitos científicos e matemáticos, processos, destrezas e atitudes na sua estrutura cognitiva. Tanto os professores de ciências como os de matemática valorizam uma perspectiva construtivista da aprendizagem (Piaget 1970; Vygostsky 1978) e a necessidade da construção significativa do conhecimento (Ausubel 1963; Novak e Gowin 1993). Na base da investigação cognitiva, as seguintes afirmações gerais podem servir como infraestrutura para o desenvolvimento integrado das ciências e da matemática na escola:

- O conhecimento é construído a partir de conhecimento prévio.
- O conhecimento é organizado em torno de grandes ideias, conceitos, ou temas.
- O conhecimento envolve a interrelação de conceitos e de processos.
- O conhecimento é situado ou contextualizado.
- O conhecimento progride através do discurso social.
- O conhecimento é socialmente construído ao longo do tempo.

Estes princípios construtivistas manifestam-se em todos os seis aspectos do modelo BWISM.

Descobertas recentes na área da neuropsicologia, que envolvem processamento paralelo no cérebro, podem vir a acrescentar uma nova e intrigante dimensão à integração, encarada na perspectiva da aprendizagem. Para além das várias capacidades de processamento de informação em série, os seres humanos têm a capacidade de processar informação e acontecimentos, paralela ou simultaneamente, de que resulta a habilidade única de fazer previsões. As observações e experiências de indivíduos e os modelos, tanto qualitativos como quantitativos, que descrevem estes acontecimentos podem ser assimiladas de forma mais eficiente quando experimentados simultaneamente (Anderson 1992). Se desde pequenas as crianças experimentarem modelos qualitativos e quantitativos, apropriados a vários níveis de abstracção, desenvolvem a capacidade para relacionar esses modelos e para fazer previsões.

Formas de Conhecimento

A ciência procura desenvolver o conhecimento através da observação e da manipulação dos fenómenos de forma a explorar a natureza do meio ambiente e da existência humana nesse mesmo meio. A ciência procura modelos consistentes e verificáveis para poder construir um conhecimento de base e explicar o mundo real. Esta forma de conhecimento pode ser caracterizada como *indutiva*, uma vez que o modelo ou generalização emerge ou é revelado a partir de dados.

Na matemática, a procura do conhecimento envolve frequentemente modelação e pesquisa de padrões e relações que não são limitadas pelo mundo observável. Um fenómeno pode não ser facilmente observável ou encarável por causa de condições extremas como o tamanho (i.e., muito pequeno ou muito grande), o tempo (i.e., passado ou futuro), ou o grau de abstracção. Muitas vezes, a matemática envolve modelação e o uso da lógica, sistemas simbólicos que descrevem padrões e relações. Estes

símbolos podem ser manipulados sem os contrangimentos da realidade ou a necessidade de representações concretas.

são refutadas, os resultados poderão ser reconsiderados matematicamente levando à construção de um modelo reformulado.

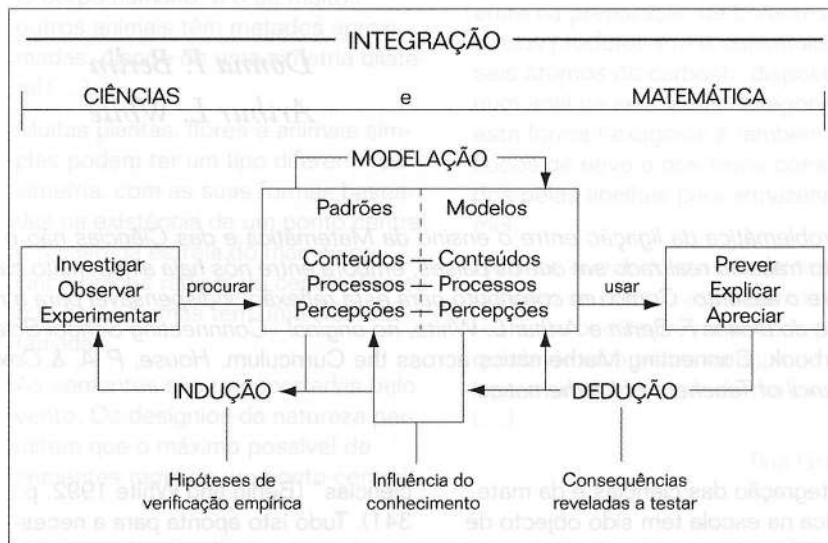


Fig 1. Formas de conhecimento: indução e dedução (reprodução de Barnes et al. [1992], com autorização do *National Center for Science Teaching and Learning*).

A figura 1 ilustra como os processos de indução e dedução se interrelacionam ciclicamente. A observação do meio, a recolha de dados, e a procura de relações (indução) podem constituir a base da descrição quantitativa. A matemática pode ser usada para expressar e comunicar as relações dos dados através de modelos (gráfico, simbólico, numérico, geométrico, ou funcional). Estes modelos podem ser sujeitos a transformações matemáticas que por seu lado podem ser usadas para fazer previsões (dedução). Frequentemente, os modelos matemáticos permitem prever fenómenos do mundo real que ainda não foram estudados ou sequer observados. Por exemplo, um modelo matemático permite prever a existência de planetas ou de partículas subatómicas no sistema solar que ainda não foram descobertos. Estas previsões podem orientar futuras explorações no sistema sobre o qual foram feitas, conduzindo a observações adicionais e a manipulações para verificar ou refutar as previsões. Se as previsões são verificadas, podem resultar novos conhecimentos e novas teorias. Se

A característica mais significativa deste ciclo sobre "formas de conhecimento" pode ser a importância desta relação simbiótica entre os processos indutivos e dedutivos. É um objectivo razoável proporcionar a todos os alunos amplas oportunidades de adquirirem uma compreensão das conexões entre estas duas formas de conhecimento. Considerando que os alunos devem beneficiar da relação simbiótica e do poder destas formas de conhecimento, são recomendados o aumento do uso da modelação matemática nas aulas de ciências e o uso de dados científicos obtidos pelos alunos nas aulas de matemática. Deve ser dada atenção a este ciclo de "formas de conhecimento" que articula os processos de indução e dedução para promover uma visão da construção do conhecimento integrada e holística.

Capacidades de Investigação e de Raciocínio

A integração pode ser encarada através da perspectiva dos processos e das capacidades de raciocínio válidos tanto para as ciências como



para a matemática. Embora os termos possam diferir, as normas para o currículo de matemática reconhecem a resolução de problemas (investigação), o raciocínio, a comunicação e as conexões (integração) como processos centrais nas ciências e na matemática (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] 1989; National Research Council 1993b, 1993c).

A revisão de literatura revela o aumento de apoio à inclusão das capacidades de investigação nos currículos das ciências. A ciência é dinâmica, é feita de avanços, está sempre em constante procura, e as capacidades de investigação reflectem a natureza da ciência e a actividade típica dos cientistas; elas são prontamente transferidas para outras situações problemáticas, e aplicadas a problemas da vida real (American Association for the Advancement of Science 1963; National Research Council 1993b, 1993c; Padilla 1986). A *National Science Teachers Association* e numerosos especialistas curriculares, individuais ou de organizações, têm realçado as capacidades de investigação como específicas e resultantes dos objectivos dos programas de ciências.

O desenvolvimento de capacidades básicas e integradas de investigação tem sido a grande ênfase dos programas de educação científica desde da década de cinquenta (Tobin e Capie 1980). As capacidades básicas de investigação incluem observação, inferência, medição, comunicação, classificação, e previsão. As capacidades integradas de investigação incluem controlo de variáveis, definição de operacionalidade, formulação de hipóteses, interpretação de dados, experimentação, e construção de modelos. (Ver Padilla [1986] para definição destas capacidades.) Estas mesmas capacidades de investigação científica são integrantes do desenvolvimento das competências de resolução de problemas, que têm sido fortemente apontadas como sendo o principal objectivo da matemática escolar (NCTM 1980, 1989).

Champagne (1992) desenvolveu uma taxonomia compreensiva das capacidades de pensamento das ciências e da matemática que inclui raciocínio, metacognição, manipulação de informação, gestão de informação, raciocínio formal, e capacidades de representação simbólica. As actividades integradas de ciências e de matemática têm a potencialidade de envolver os alunos em tarefas de resolução de problemas desafiantes, autênticas e relevantes que fornecem a aplicação e a prática das capacidades de raciocínio de ordem superior

Conhecimento Conceptual

A integração pode ser vista através da perspectiva de sobreposição do conhecimento conceptual das ciências e da matemática. Isto requer uma análise dos conceitos, princípios, e teorias das ciências e da matemática para determinar quais são as ideias exclusivas das ciências ou da matemática e quais são aquelas que se sobrepõem. Uma análise de documentos actuais (NCTM 1989; Rutherford e Ahlgren 1990) e emergentes (National Research Council 1993b, 1993c) sobre normas curriculares revela um compromisso partilhado para o desenvolvimento de um número limitado de conceitos fundamentais. Tópicos comuns a ambos os currículos de ciências e matemática incluem o estudo da medição, padrões e relações, probabilidades e estatística, relações espaciais e variáveis e funções. Exemplos de formas de inter-relacionar os conceitos de ciências e de matemática podem incluir (a) selecção natural com amostragem, métodos aleatórios, probabilidades, razões, proporcionalidade e área; (b) energia de activação e taxas de reacção com a área subtensa a curvas de distribuição; (c) crescimento da população e genética com amostras e probabilidades; (d) reflexão e refacção com geometria angular.

Muitas vezes conceitos previamente identificados com "ciências" ou "matemática" podem ser relacionados através de analogias. Por exemplo, as variáveis que descrevem as proprieda-

des de uma alavanca e aquelas que descrevem as características de uma distribuição de frequências são análogos e podem ligar as ciências e a matemática escolar. O ponto de equilíbrio de uma alavanca é o fulcro. Este é ponto em que a resultante dos momentos é nula, ou em que a alavanca está em equilíbrio. Analogamente, a média aritmética de uma distribuição de frequências é o ponto em que os desvios positivo e negativo são iguais o que resulta num ponto "equilibrado" para a distribuição. Há momentos em que os conceitos de ciências e os conceitos de matemática têm muito em comum. Ligar a aprendizagem desses conceitos torna-os mais significativos para o aluno e mais eficaz a sua aprendizagem (Penafiel e White 1989; White e Berlin 1989).

Atitudes e Percepções

A integração pode ser vista através da perspectiva das atitudes e percepções relativas ao desenvolvimento da literacia científica e matemática. As convicções e as crenças que temos sobre as ciências e a matemática como disciplinas podem ser consideradas semelhantes. Finalmente, a criação de um meio favorável, que proporcione oportunidades para aumentar a eficácia científica e matemática pode servir como uma outra ligação afectiva.

Os actuais documentos das reformas educativas de ciências e matemática são bastante explícitos sobre as atitudes valorizadas, a nível das ciências e da matemática (NCTM 1989; National Research Council 1993b, 1993c). A seguinte lista (Loucks-Horsley et al. 1990, p. 41) foi alterada para incorporar atitudes partilhadas:

- Desejar conhecer: ver as ciências [e a matemática] como uma forma de conhecimento e de compreensão;
- Ser crítico: reconhecer o tempo e altura apropriados para questionar afirmações autoritárias e "verdades auto-evidentes";
- Confiar nos dados: explicar ocorrências naturais recolhendo e organizando informação, testando ideias



e respeitando os factos que são revelados;

- Aceitar ambiguidades: reconhecer que os dados raramente são claros e conclusivos, e valorizar as novas questões e problemas que possam surgir;
- Estar disposto a alterar explicações: ver novas possibilidades nos dados;
- Cooperar nas respostas às questões e na resolução de problemas: trabalhar em conjunto para reunir ideias, explicações e soluções;
- Respeitar o raciocínio: valorizar modelos de pensamento que partam dos dados, conduzam às conclusões e, eventualmente, à construção de teorias;
- Ser honesto: ver a informação objectivamente, sem preconceitos.

Os hábitos de pensamento e as disposições específicas dos actuais currículos de ensino e da avaliação, tanto de ciências como de matemática, incluem curiosidade, criatividade, imaginação, liderança, organização, persistência, engenho, correr riscos, auto-confiança, autonomia, reflexão e perfeição (NCTM 1989; National Research Council 1993b, 1993c; Rutherford e Ahlgren 1990; Stenmark 1991).

Outra consideração afectiva partilhada é a promoção das ciências e da matemática como empreendimentos humanos. Como tal, elas são aproximações da verdade sujeitas a mudanças. As experiências integradas de ciências e matemática podem servir para dissipar a ideia que estes assuntos são inalteráveis, irrefutáveis, corpos de conhecimento provado que podem fornecer respostas correctas a todas as questões.

As experiências integradas de ciências e matemática baseadas em questões e interesses pessoais e sociais podem motivar os alunos para o sucesso. As oportunidades de serem bem sucedidos ajudam a encorajar, apoiar, e alimentar a confiança dos alunos nas suas capacidades para fazer ciências e matemática. A promoção da eficácia científica e mate-

mática pode servir para contrariar a ideia de que as ciências e a matemática são difíceis, acessíveis apenas a um grupo restrito de indivíduos (por exemplo, homens brancos), e que não são essenciais para a generalidade da população.

Ensino

A integração pode ser vista através da perspectiva dos métodos e estratégias comuns de ensino das ciências e da matemática e que se apoiam uns nos outros. Ensinar, relacionando a integração escolar das ciências e da matemática, inclui quatro dimensões: a estrutura e a organização do ambiente de aprendizagem, estratégias de ensino, avaliação, e a mudança do papel do professor. O objectivo de integrar o ensino das ciências e da matemática é o de proporcionar aos alunos a "aquisição de um conhecimento científico [e matemático] do mundo e ao mesmo tempo hábitos científicos [e matemáticos] de pensamento" (Rutherford and Ahlgren 1990, p. 190). Um ambiente assim incluirá um amplo espectro de conteúdos, dando tempo para uma aprendizagem baseada em investigações, um discurso de estímulos e apoio, proporcionando oportunidades para o uso de instrumentos de laboratório e outras ferramentas, possibilitando o uso frequente de tecnologia apropriada, encorajando o recurso a procedimentos alternativos de avaliação maximizando oportunidades para a realização de experiências bem sucedidas. As experiências de aprendizagem deverão conduzir os alunos a estabelecer ligações qualitativas e quantitativas nas descrições do seu mundo. Ferramentas de modelação como o *STELLA* poderão ajudar os alunos a estabelecer conexões (Linn 1986).

As estratégias integradas de ensino devem ser baseadas na investigação cognitiva sobre como os alunos aprendem no geral e como aprendem ciências e matemática, em particular.

As actividades iniciais deverão incidir sobre fenómenos interessantes, decorrentes e aplicados a situações

do mundo real. Deverão existir amplas oportunidades para desenvolver o pensamento e as capacidades de raciocínio, capacidades de investigação tanto básicas como integradas e capacidades de resolução de problemas, de tomada de decisões e de comunicação. As actividades deverão envolver os alunos no *fazer*, *analisar*, e *reflectir* sobre ciências e matemática e em adquirir poder científico e matemático. Deve estar disponível uma vasta variedade de recursos educativos, escolares e da comunidade, envolvendo múltiplos modos sensoriais (tacto, auditivo, e visual). São recomendadas estratégias cooperativas de aprendizagem para reforçar a natureza colaborativa dos empreendimentos científicos e matemáticos.

Fogarty (1991a, p. xv; 1991b, p. 63) propõe uma variedade de estratégias úteis para integrar disciplinas:

- Sequencial: os tópicos ou unidades de estudo são rearrumados e sequenciados para coincidir uns com os outros. Ideias semelhantes são ensinadas consertadamente embora permanecendo em temas separados.
- Partilhada: o planeamento e o ensino são partilhados e acontecem em duas disciplinas em que a sobreposição de conceitos e ideias emergem como elementos organizadores.
- Em rede: um tema rico é ligado aos conteúdos do currículo e às disciplinas; os assuntos recorrem ao tema para fazer uma selecção de conceitos, tópicos e ideias apropriados.
- Transversal: a abordagem curricular combina capacidades de pensamento, capacidades sociais, inteligências múltiplas, tecnologia, e capacidades de estudo através das várias disciplinas.
- Integrado: esta aproximação interdisciplinar combina temas que se sobrepõem em tópicos e conceitos, em ensino colaborativo, formando um autêntico modelo integrado.

São também sugeridos procedimentos alternativos e autênticos de avaliação para que haja uma ligação



Quota 2001

plena, significativa e integrada do currículo, do ensino e da avaliação em ciências e matemática. As avaliações integradas poderão incluir avaliações de desempenho, projectos, e portfólios. Há um número significativo de publicações actuais, relativas à avaliação alternativa em ciências (Hein 1990; Kulm e Malcolm 1991; Ostlund 1992; Raizen et al. 1989, 1990) e em matemática (Kulm 1991; Lesh e Lamont 1992; NCTM 1993; National Research Council 1993a; Romberg 1992; Stenmark 1989, 1991) que estão disponíveis para ajudar os professores a planear de forma apropriada experiências com significado, com vista a estabelecer o que os alunos sabem e a melhorar o ensino.

Para o ensino integrado das ciências e da matemática é fundamental a mudança do papel do professor. Professores e alunos tornam-se parceiros naturais na resolução de problemas e no desenvolvimento das suas próprias capacidades para aprender ao longo da vida. (NCTM 1989). O professor poderá ser visto como uma espécie de instrutor intelectual assumindo vários papéis como o de actor, consultor, moderador, interlocutor, e aquele que questiona (National Research Council 1991). Os professores como especialistas e as equipas de professores ganham relevo nesta abordagem integrada.

Um exemplo: "Basta deixar cair!"

Nesta investigação, os alunos vão comparar as alturas dos ressaltos que resultam de deixar cair diferentes tipos de bolas de diferentes alturas. Também podem ser comparados os ressaltos resultantes da queda de bolas em diferentes tipos de superfícies. A partir dos dados obtidos, pode ser obtida uma fórmula que relaciona a altura do ressalto com a altura da queda. Usando a fórmula, os alunos serão capazes de prever a que altura ressalta uma bola que cai de uma dada altura.

Esta actividade de *Math + Science: A Solution* (Wiebe e Ecklund 1987)

ilustra a interdependência dos aspectos do modelo integrado de ciências e matemática. As crianças são envolvidas na observação, experimentação, medição, registo de dados, procura de modelos, interpretação, aplicação, previsão e generalização. Os conceitos e princípios das ciências e da matemática desenvolvidos na actividade incluem médias, coeficientes, conservação, constantes, elasticidade, equações, fricção, gráficos, modelação matemática, razão e declive.

A investigação pode encorajar e apoiar métodos de ensino valorizados tanto na educação científica como na educação matemática. Sugere-se que as crianças trabalhem cooperativamente em grupos de dois até quatro elementos e se envolvam em actividades de investigação e de resolução de problemas. Esta metodologia pode promover o desenvolvimento de atitudes científicas e matemáticas válidas, bem como de hábitos de pensamento e motivações positivas. Outros valiosos métodos de ensino incorporados nesta actividade incluem manipulação; modos de representação variados (p.e., desenhos, diagramas, gráficos, fórmulas); construção baseada em experiências anteriores; personalização da aprendizagem; uso de recursos familiares e disponíveis (p.e., bolas de ténis, golf, basquetebol, basebal, futebol, bilhar, etc.); diferentes níveis de questionamento (variando desde os que requerem níveis de pensamento de ordem inferior até aos que requerem níveis de processamento cognitivo de ordem superior); uso de uma calculadora elementar de quatro operações para calcular a média dos dados; e o uso de uma calculadora gráfica para tabulação e modelação dos dados. De modo consistente com o modelo apresentado, esta actividade fornece numerosas possibilidades para fazer ligações apropriadas e efectivas entre o ensino e a aprendizagem das ciências e da matemática.

Recursos

Desde os anos setenta têm sido produzidos um grande número de

recursos e programas curriculares notáveis. Entre eles estão o *Minnesota Mathematics and Science Teaching Project* (MINNEAST); os materiais do MINNEAST não estão editados, mas podem ser obtidos a partir do *ERIC Document Reproduction Service; Unified Science and Mathematics for Elementary Schools* (USMES – Educational Development Center); os materiais do USMES não estão editados mas podem ser obtidos a partir do *ERIC Document Reproduction Service; Activities Integrating Math and Science* (AIMS – AIMS Educational Foundation); *Great Explorations in Math and Science* (GEMS – Lawrence Hall of Science); *The Jasper Series* (Optical Data Corporation); *Teaching Integrated Mathematics and Science* (TIMS – University of Illinois at Chicago); *The Voyage of the Mimi and The Second Voyage of the Mimi* (Sunburst/Wings); e *School Science and Mathematics Integrated Lessons* (SSMILES – School Science and Mathematics Association). Dois documentos que serão publicados pelo *National Center for Science Teaching and Learning* estarão em breve à disposição como recurso para professores interessados em realizar actividades integradoras de conceitos, capacidades e processos de ciências e de matemática. Os documentos incluem uma base de dados com aproximadamente trezentas actividades integradoras de ciências e de matemática (Berlin 1994) e uma compilação do SSMILES (*School Science and Mathematics Integrated Lessons*) já publicada na revista *School Science and Mathematics* (no prelo). Os materiais relacionados com a educação do consumidor, educação ambiental, educação para a saúde e segurança, educação tecnológica e educação vocacional são áreas ricas para concepção e elaboração de actividades de ciências e de matemática.

Conclusão

Para que a implementação da integração escolar das ciências e da matemática ocorra de uma forma racional e realista, é crucial que haja professores envolvidos na exploração



e relacionamento dos seis aspectos do modelo apresentado, assim como interessados em recolher informação sobre os efeitos da integração. O modelo descrito neste artigo pode servir para orientar educadores, responsáveis da administração, políticos, e investigadores no desenvolvimento, implementação e avaliação dos programas e das actividades para a integração escolar das ciências e matemática.

Referências

- American Association for the Advancement of Science. *Science — a Process Approach*. Washington, D.C.: The Association, 1963.
- Anderson, O. Roger. "Some Interrelationships between Constructivist Models of Learning and Current Neurobiological Theory, with Implications for Science Education." *Journal of Research in Science Teaching* 29 (December 1992): 1037-58.
- Ausubel, David P. *The Psychology of Meaningful Learning*. New York: Grune & Stratton, 1963.
- Barnes, Marianne, Francis Conway, Lynn Narasimhan, Richard Shumway, e Arthur White. "Ways of Knowing: Induction — Deduction." In *Proceedings of the Integration Conceptualization and Writers Conference*, editado por Donna F. Berlin. Columbus, Ohio: National Center of Science Teaching and Learning, 1992.
- Berlin, Donna F. *Integrating Science and Mathematics in Teaching and Learning: A Bibliography*. School Science and Mathematics Association Topics for Teachers Series, Nº. 6. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1991.
- . ed. *Database of Integrated Science and Mathematics Instructional Activities*. Columbus, Ohio: National Center for Science Teaching and Learning, 1994.
- . *School Science and Mathematics Integrated Lessons (SSMILES)*. School Science and Mathematics Association Classroom Activities Monograph Series. Columbus, Ohio: National Center for Science Teaching and Learning, no prelo.
- Berlin, Donna F., e Arthur L. White. "Report from three NSF/SSMA Wingspread Conference: A Network for Integrated Science and Mathematics Teaching and Learning". *School Science and Mathematics* 92 (October 1992): 340-42.
- Champagne, audrey B. "Cognitive Research on Thinking in Academic Science and Maathematics: Implications for Practice and Policy." In *Enhancing Thinking Skills in the Sciences and Mathematics*, editado por Diane F. Halpern, pp. 117-33. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.
- Fogarty, Robin. *The Mindful School: How to Integrate the Curricula*. Palatine, Ill.: Skylight Publishing, 1991a.
- . "Ten Ways to Integrate Curriculum." *Educational Leadership* 49 (October 1991b): 61-65.
- Hein, George, ed. *The Assessment of Hands-on Elementary Science Programs*. Grand Forks, N. Dak.: University of North Dakota Press, 1990.
- Kulm, Gerald, ed. *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1991.
- Kulm, Gerald, e Shirley M. Malcom, eds. *Science Assessment in the Service of Reform*. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1991.
- Lesh, Richard, and Susan J. Lamon, eds. *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1992.
- Linn, Marcia C. *Education and the Challenge of Thecnology: Proceedings of a Conference on Thecnology and Teacher Education*. Cupertino, Calif.: Apple Computer, 1986.
- Loucks-Horsley, Susan, Roxanne Kapitan, Maura D. Carlson, Paul J. Kuerbis, Richard C. Clark, G. Marge Melle, Thomas P. Sachse, e Emma Walton. *Elementary School Science for the '90s*. Andover, Mass.: NETWORK, 1990.
- National Council of Teachers of Mathematics. *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics for the 1980s*. Reston, Va.: The Council, 1980.
- . *Assessment in Mathematics Classroom*. 1993 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Norman L. Webb. Reston, Va.: The Council, 1993.
- . *Curriculum and Evaluation Standards fro School Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1989.
- National Research Council. *Counting on You: Actions Supporting Mathematics Teaching Standards*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1991.
- . *Measuring Up: prototypes for Mathematics Assessment*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1993a.
- . *National Science Education Standards: An Enhanced Sampler*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1993b.
- . *National Science Education Standards: July '93 Progress Report*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1993c.
- Novak, Joseph D., e D. Bob Gowin. *Learning How to Learn*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- Ostlund, Karen L. *Science Process Skills: Assessing Hands-on Student Performance*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1992.
- Padilla, Michael J. *The Science Process Skills: Research Matters ... to the Science Teacher*. Calgary, Alta.: National Association for Research in Science Teaching, 1986. (ERIC Document service Nº ED 266961.)
- Penafiel, Alfinio F. and Arthur L. White. "SSMILES: Exploration of the Mean as a Balance Point." *School Science and Mathematics* 89 (March 1989): 251-58.
- Piaget, Jean. "Piaget's Theory." In *Carmichael's Manual of Child Psychology*, editado por Paul H. Mussen. New York: Jhon Wiley & Sons, 1970.
- Raizen, Senta A., Joan B. Baron, Audrey B. Champagne, Edward Haertel, Ina V. S. Mullis, e Jeannie Oakes. *Assessment in Elementary School Science Education*. Andover, Mass.: NETWORK, 1989.
- . *Assessment in Science Education: The Middle Years*. Andover, Mass.: NETWORK, 1990.
- Romberg, Thomas A., ed. *Mathematics Assessment and Evaluation*. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1992.
- Rutherford, F. James e Andrew Ahlgren. *Science for All Americans*. New York: Oxford University Press, 1990.
- Steen, Lynn Arthur. "Integrating School Science and Mathematics: Fad or Folly?" In *NSF/SSMA Wingspread Conference: A Network for Integrated Science and Mathematics Teaching and Learning — Conference Plenary Papers*, editado por Donna F. Berlin., pp. 7-12. Columbus, Ohio: National Center for Science Teaching and Learning, 1994.
- Stenmark, Jean K., ed. *Assessment Alternatives in Mathematics: An Overview of Assessment Techniques That Promote Learning*. Berkeley, Calif.: EQUALS, 1989.
- . *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.
- Tobin, Kenneth G., e William Capie. "Teaching Process Skills in the Middle School." *School Science and Mathematics* 80 (November 1980): 590-600.
- Vygotsky, Lev S. "Mind in Society." In *The Development of Higher Psychological Process*, editado por Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, e Ellen Souberman. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- White, Arthur L., e Donna F. Berlin. "SSMILES— Fulcrum and Mean: Concepts of Balance." *School Science and Mathematics* 89 (April 1989): 335-42.
- Wiebe, Arthur, e Larry Ecklund. *Math + Science: A Solution*. Fresno, Calif.: AIMS Education Foundation, 1987.

Tradução Cristina Loureiro

N.T.

Este texto é traduzido e publicado com a autorização do NCTM.

Índice

- 1 **Notícias Matemáticas da Natureza**
António Bernardes
- 3 **A imagem da Natureza na matemática de sempre**
Paulo Almeida
- 9 Depoimento
Matemática e Natureza: o que pensam os alunos
- 12 Actualidades
E agora?, *Adelina Precatado e António Bernardes*
- 13 **Bento de Jesus Caração: A Matemática da Natureza**
João Caração
- 15 **A Matemática e a Natureza: A Forma e o Ritmo**
Mercês Ramos e Sousa Ramos
- 21 Materiais para a aula de Matemática
A Terra estará com febre
- 23 **A Matemática e a Vida**
Carlos Braumann
- 30 O problema deste número
Miss Simpatia
- 33 **No trilho dos dinossáurios**
Margarida Raimundo, Rosário Selada e Teresa Tudela
- 37 Materiais para a aula de Matemática
Vamos estimar as dimensões dos dinossáurios?
- 38 Depoimento
A Natureza e as suas linguagens: A natureza e a linguagem matemática, *Cândida Rosa e Helena Sá*
- 41 **Aventura na Lousã**
João Jorge Henriques
- 44 Tecnologias na educação matemática
Matemática e universo...
- 47 **Natureza Difícil**
José Paulo Viana
- 51 **Ciência na escola — uma questão de atitude(s)**
Cristina Loureiro
- 58 Materiais para a aula de Matemática
Cabo Verde é o berço africano das tartarugas comuns
- 59 Materiais para a aula de Matemática
Recordes de saltos em comprimento
- 61 Depoimento
Matemática e Natureza: Notas a partir de algumas leituras filosóficas, *Manuel Beirão dos Reis*
- 63 **A presença da Natureza na Matemática: algumas notas resultantes de uma consulta ao passado**
Maria José Costa
- 73 **Cristalografia: A classificação matemática da Natureza**
António Marques Fernandes
- 77 Pontos de vista, reacções e ideias...
Os piores professores, *Luís Reis*
Exames, Classificações e Rankings, *José Manuel Duarte*
Rankings das Escolas, *Pedro Esteves*
A matemática num jornal em tempo estival, *Fernando Nunes*
- 80 Matemática e Natureza
Notícias das escolas
- 83 Para este número seleccionámos
Conexões entre as Ciência e a Matemática Escolares, *Donna F. Berlin e Arthur L. White*

