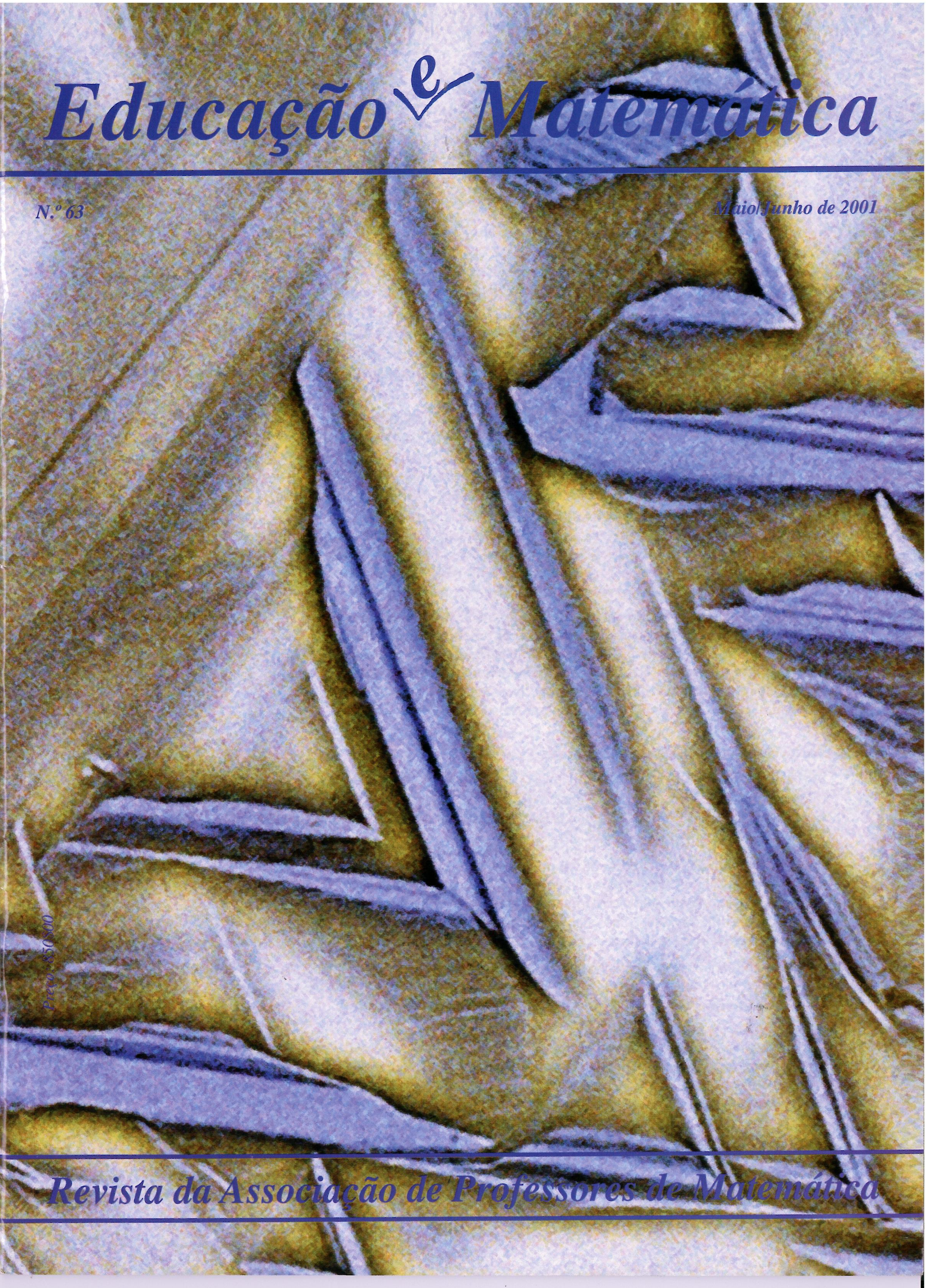


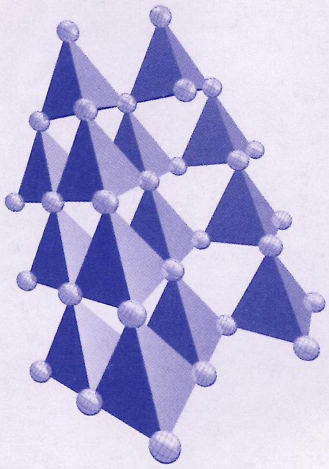
# Educação e Matemática

N.º 63

Maio/Junho de 2001

Preço: 850$00

Revista da Associação de Professores de Matemática



## Sobre a capa

A capa tem por base uma microfotografia electrónica de um diamante. Pode observar-se a presença de várias estruturas triangulares. Estas são consequência da distribuição regular dos átomos de carbono, que se encontram dispostos de modo a formar uma malha tridimensional em que os elementos básicos são tetraedros (veja-se a figura ao lado).

## Alterações na Redacção

Ana Vieira acaba de cumprir o seu mandato de três anos como directora da Revista Educação e Matemática. Estamos-lhe por isso muito gratos, bem como por todo o seu desempenho e contribuição durante estes anos na coordenação dos trabalhos da Redacção. Por dificuldades de diversa natureza, não foi possível eleger nesta altura um director para a revista. Para ultrapassar esta situação, este cargo foi ocupado, a título interino, pela Ana Paula Canavarro, o que desde já lhe agradecemos.

## Neste número também colaboraram

Alexandre Pais, Ana Maria Boavida, Anabela Gaio, Carlos Ribeiro, Cristina Loureiro, Eurico Nogueira, Fernando Martins, Florinda Costa, Grupo de Trabalho das Publicações, Helder Vilarinho, Isabel Viana, Lúcia Borrões, Lurdes Serrazina, Margarida Marques, Margarida Silva, Maria José Costa, Michael D. de Villiers, Niza Figueiredo, Sónia Gamito, Susana Barroso, Teresa Batista.

## Capa

A capa foi composta por António Marques Fernandes.


## Data da publicação

Este número foi publicado em Junho de 2001.


## Correspondência


Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27 - A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 217163690
Fax: (351) 217166424
e-mail: apm@netcabo.pt


## Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

nº 63
Maio/
Junho
de 2001

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

*Directora interina*
**Ana Paula Canavarro**

*Redacção*
**Adelina Precatado**
**Ana Vieira**
**António Fernandes**
**Fátima Guimarães**
**Fernanda Perez**
**Helena Amaral**
**Helena Fonseca**
**Helena Rocha**
**Henrique M. Guimarães**
**Lina Brunheira**
**Maria José Boia**
**Paula Espinha**
**Paulo Abrantes**

*Colaboradores permanentes*
**A. J. Franco de Oliveira**
*Matemática*
**Eduardo Veloso**
*"Tecnologias na Educação Matemática"*
**José Paulo Viana**
*"O problema deste número"*
**Lurdes Serrazina**
*A matemática nos primeiros anos*
**Maria José Costa**
*História e Ensino da Matemática*
**Rui Canário**
*Educação*

*Composição e paginação*
**João Loureiro e Manuel Abrantes**

*Entidade Proprietária*
**Associação de Professores de Matemática**

*Tiragem*
**5200 exemplares**

*Periodicidade*
**Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez**

*Montagem, fotolito e impressão*
**Scarpa**

**Nº de Registo: 112807**

**Nº de Depósito Legal: 72011/93**

# Aferir para reflectir?!

*Lurdes Serrazina*

A avaliação aferida foi criada pelo despacho normativo 98-A/92, tendo sido pela primeira vez posta em prática, a nível nacional, em 1999/2000. Neste despacho afirma-se que:

> a avaliação aferida é utilizada no momento em que se pretende avaliar o sistema de ensino, a nível nacional, regional ou local, visando, em especial, os respectivos resultados curriculares e procedimentos adoptados, segundo padrões comuns, no domínio dos saberes e aptidões.

Pelo segundo ano consecutivo, os nossos alunos do 4° ano de escolaridade realizaram provas de aferição em Língua Portuguesa e Matemática no final do passado mês de Maio, a que se juntaram este ano os alunos do 6° ano. Está previsto que no próximo ano lectivo estas provas sejam também realizadas pelos alunos do 9° ano de escolaridade.

Para além da polémica causada pelo texto inserido na prova de Língua Portuguesa do 6° ano, discutido em outro espaço desta revista, que parece ser mais um sintoma revelador de uma certa atitude relativamente à Matemática que episódios como este não ajudam nada a alterar, não foram ouvidas muitas referências relativamente ao conteúdo das provas de Matemática aplicadas, ao contrário do que aconteceu no ano transacto.

Recordo que no ano anterior o tipo de questões da prova do 4° ano de Matemática suscitou alguma controvérsia, sobretudo entre os professores, por aquelas não corresponderem à "leitura" do programa oficial feita por muitos dos autores dos manuais adoptados nas nossas escolas. Algumas editoras apressaram-se então a fazer edições de cadernos que designaram como de "provas de aferição"!

Relativamente à realização das provas de aferição, colocam-se várias questões. Uma delas passa pela necessidade, ou não, de as provas serem realizadas em anos consecutivos por todos os alunos a frequentar esse ano de escolaridade, como aconteceu agora com os alunos do 4° ano. Sabemos que um dos objectivos é o de avaliar o sistema. Relativamente à prova de Matemática, os resultados do ano anterior confirmaram aquilo que avaliações internacionais já nos tinham revelado: os nossos alunos são razoáveis nos procedimentos, têm dificuldades na resolução de problemas e na geometria. A análise das respostas dos itens correspondentes à resolução de problemas veio evidenciar que os nossos alunos não estão habituados a tentar resolver problemas, utilizando estratégias exploratórias de tentativa e erro, parecendo ter uma ideia da Matemática como ciência do certo e do errado.

O que é que foi feito com estes dados, para além da devolução às escolas com algumas recomendações para a sua análise e reflexão?

Em algumas escolas, os resultados das provas anteriores devolvidos pelo DEB (Departamento de Educação Básica) foram analisados com detalhe, discutidos entre os docentes e, a partir daí, inventariados e pensados meios de ultrapassar as deficiências detectadas, nomeadamente através de oficinas de formação e círculos de estudo, envolvendo os professores da escola e recorrendo pontualmente a formadores externos.

Em muitas escolas os resultados foram recebidos e para além de constatarem alguma dificuldade na interpretação dos mesmos, nada mais foi feito.

*(continua na página seguinte)*

Outras houve em que, no Conselho Escolar, a Directora informou que os resultados eram maus e este ano tinham de ser melhores, responsabilizando por isso as professoras do 4° ano. Uma das estratégias para remediação baseou-se na ideia de que basta, nas semanas que antecedem a prova, resolver situações do mesmo tipo para que os resultados melhorem. Esta ideia é contrariada pelos resultados da investigação, que mostram que não é por se treinarem à exaustão os alunos que estes aprendem a resolver problemas ou adquirem hábitos de pensamento em Matemática.

Uma prova escrita do tipo das aplicadas, realizada individualmente, é necessariamente limitada e não pode abarcar os diferentes aspectos preconizados no despacho que criou a avaliação aferida. Apesar disso, pode fazer sentido aplicá-la, mas penso que só o fará se os seus resultados servirem para o próprio sistema — escolas e autoridades educativas — se questionar e procurar formas que conduzam a um melhor ensino da Matemática para os nossos alunos.

Parece-me pouco devolver os resultados às escolas para reflectirem. Por exemplo, para quando uma avaliação dos manuais escolares? Todos sabemos que muitos dos manuais de Matemática, nomeadamente do 1° ciclo, não reflectem as recomendações do programa em vigor.

E para quando o envolvimento nesta reflexão das instituições de formação de professores, quer as responsáveis pela formação inicial públicas e privadas), quer as que têm a seu cargo a formação contínua, nomeadamente os centros de formação das associações de escola?

Reflectir é, sem dúvida, muito importante. Mas não chega.

Lurdes Serrazina
ESE de Lisboa

## ProfMat2001

O ProfMat deste ano realizar-se-á em Vila Real, na Escola Secundária São Pedro, entre os dias 27 a 30 de Outubro. Como habitualmente, nos dois dias que antecedem o encontro, terão lugar os cursos que funcionarão em simultâneo com o Seminário de Investigação em Educação Matemática.

Para informações sobre datas, alojamentos, programa, etc. visite a página http://www.apm.pt/profmat2001/
Contactos: Associação de Professores de Matemática — Núcleo de Vila Real
Telefones: 259338057(8)(9)
E-mail: vreal@apm.pt

## XII Seminário de Investigação em Educação Matemática

O XII Seminário de Investigação em Educação Matemática realiza-se nos dias 25 e 26 de Outubro de 2001, na Escola Secundária de São Pedro, em Vila Real e está integrado no Plano de Actividades do Grupo de Trabalho de Investigação da APM.

Para mais informações visite a página http://www.apm.pt/siemxii/
Contactos: Helena Monteiro e/ou Maria Cecília Costa
Telefones: 259350324; 259350319; 259350302
Fax: 259350480
E-mail: hmonteir@utad.pt ou mccosta@utad.pt

# Mudam-se as vontades, mudam-se os tempos

*Lúcia Borrões*

> Já não se pretende que os alunos aprendam o que nós aprendemos nem como nós aprendemos, logo também não se pode ensinar da forma como fomos ensinados. Hoje a escola é para todos, por isso a escola selectiva de então, deu lugar à escola formativa de agora. Os 90 minutos não só possibilitam como incentivam a mudança das práticas, para que os alunos aprendam mais e de forma mais significativa.

## Quase uma (a)ventura

O projecto de Gestão Flexível do Currículo teve início na Escola B. 2,3 de Santa Clara no ano lectivo de 1997/98 com apenas duas turmas do 5º ano de escolaridade, mas só no ano seguinte, com a generalização da experiência a todo o 5ºano, me envolvi directamente nesta (a)ventura.

Foi também nesse ano que ficou definitivamente institucionalizada na escola a continuidade pedagógica, condição tida como imprescindível para levar o projecto a bom termo. Com esta garantia, as turmas passaram a ser consideradas como um grupo de alunos com quem iríamos trabalhar durante dois anos e todo o trabalho do Conselho de Turma foi planificado em função deste período.

Assim que foi possível fazer a caracterização das turmas (2ª quinzena de Outubro) identificámos os pontos fracos e os pontos fortes e, consequentemente, as competências a privilegiar. Definimos as finalidades das Novas Áreas Curriculares (Estudo Acompanhado, Área de Projecto e Formação Cívica), seleccionámos conteúdos, estratégias, materiais, etc.. Em suma, todo um trabalho que, embora não constituindo em si nada de inteiramente novo, passava a assumir um carácter de imprescindibilidade. E assim continuámos por todo aquele ano lectivo fazendo e refazendo o nosso trabalho.

Durante esse ano e o seguinte os tempos lectivos mantiveram-se, ainda, com a clássica duração dos 50 minutos, mas como gozava da vantagem de ter apenas uma turma (pertencia ao órgão de gestão da escola), mediante uma troca, consegui dispor, semanalmente de dois tempos seguidos. Apesar de separados pelo intervalo de dez minutos, (que muitas vezes nem era utilizado por parte dos alunos) esta situação foi, no meu caso, precursora dos actuais tempos de 90 minutos. Nesse dia era sempre possível concretizar e tirar partido duma série de actividades (de descoberta-iniciação, ou de jogos-consolidação) que teriam perdido toda a eficácia e todo o sentido se tivessem tido que ser interrompidas, ou adiada a sua conclusão para a aula seguinte.

A adopção de metodologias activas não se compadece com a exiguidade dos 50 minutos e o que acontecia, normalmente, era fazer-se o desenvolvimento das actividades de descoberta e manipulação numa aula e remeter a reflexão sobre a actividade e as conclusões para a aula seguinte, com todas as desvantagens e perdas de tempo inerentes a este corte obrigatório, quando a aula estava no auge de rendimento.

Já não se pretende que os alunos aprendam o que nós aprendemos nem como nós aprendemos, logo também não se pode ensinar da forma como fomos ensinados. Hoje a escola é para todos, por isso a escola selectiva de então, deu lugar à escola formativa de agora. Os 90 minutos não só possibilitam como incentivam a mudança das práticas, para que os alunos aprendam mais e de forma mais significativa.

É evidente que nada é totalmente bom ou mau (por exemplo, uma falta ou um feriado significam logo meia semana perdida em termos de aulas) não considero ser esta a panaceia para todos os males, contudo arrisco a dizer que os tempos de 90 minutos não vão certamente resolver todos os problemas de todos os alunos, mas podem contribuir para resolver alguns problemas de bastantes alunos.

## Uma entre outras...

Quase todas as aulas, durante este ano lectivo, integraram uma actividade (sempre que possível de manipulação), uma reflexão sobre a actividade e respectivo registo das conclusões e ainda resolução de problemas e/ou exercícios e/ou jogos.

Sem pretensões de servir de modelo, apenas a título de exemplo, para melhor clarificar, segue-se o desenvolvimento de uma aula de 90 minutos — 5º ano — sobre a construção, elementos e propriedades dos poliedros.

## A turma

A turma em causa, em termos cognitivos, tem um rendimento médio baixo com a grande maioria dos alunos demonstrando não possuir os pré-requisitos tidos como necessários e manifestando uma baixa auto-estima relativamente ao seu desempenho matemático.

Através da avaliação diagnóstica constatara-se que a maior parte dos alunos apenas conhecia razoavelmente bem o cubo (ao qual alguns chamavam "quadrado") e, menos bem, o paralelepípedo.

A turma é constituída por 27 alunos, que, nas aulas de Matemática, trabalham em pares ou, mais frequentemente, em seis grupos.

## As competências

Nesta aula pretendeu-se contribuir para o desenvolvimento da competência matemática nos seguintes aspectos:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, recorrendo a materiais manipuláveis;
- o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, designadamente, na comunicação e a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real;
- a predisposição para identificar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, em sólidos geométricos, bem como para justificar e comunicar os seus raciocínios;
- a aptidão para realizar construções geométricas, assim como para descrever figuras geométricas.

## Os objectivos

Para esta aula definiram-se os seguintes objectivos específicos:

- constrói modelos de poliedros, partindo da planificação;
- constrói estruturas de poliedros;
- identifica os elementos dum poliedro;
- indica o número de faces arestas e vértices dos prismas e das pirâmides;
- estabelece a relação entre o polígono da base e o número de faces arestas e vértices de prismas e de pirâmides;
- verifica, na prática, a identidade de Euler.

## A actividade

Material: palhinhas de refresco, plasticina, tesoura, fita-cola, planificações de poliedros, caixa dos sólidos geométricos, ficha de trabalho.

A primeira parte da actividade consistiu na construção, em grupo, das estruturas de seis poliedros:

- cubo,
- paralelepípedo,
- pirâmide triangular,
- pirâmide pentagonal,
- prisma quadrangular,
- prisma hexagonal.

Para isso os alunos cortaram as palhinhas, que usaram como arestas e bolinhas de plasticina que serviram de vértices. Podiam retirar da caixa dos sólidos qualquer poliedro que necessitassem de observar.

Construídas as estruturas, compararam-nas, dentro do grupo, descobrindo as semelhanças e diferenças entre si.

A seguir recortaram as planificações, respeitantes aos mesmos sólidos geométricos, e fizeram a respectiva construção.

Na segunda parte foi distribuída uma ficha de trabalho na qual se solicitava a cada grupo:

1. A descrição completa de cada um dos poliedros construídos.
2. O preenchimento de um quadro no qual deveriam registar o número de faces, vértices e arestas e a sua relação com o polígono da base de cada um dos modelos construídos.
3. A verificação da identidade de Euler, através do completamento de frases cujos elementos eram retirados do quadro anterior.

## Reflexão e conclusões

Cada grupo, através do seu porta-voz, comunicou aos outros a descrição de um dos seis poliedros. Sempre que esteve incompleta, os outros alunos completaram-na. Ao mesmo tempo, eram registadas no quadro, as principais características que iam sendo referidas.

O mesmo procedimento foi adoptado relativamente ao quadro referente à observação do número de faces, vértices e arestas, cuja correcção foi sendo feita num acetato.

A verificação da identidade de Euler foi alargada à observação de outros poliedros, para além dos construídos e despertou, provavelmente pela novidade, grande curiosidade entre os alunos.

No final da aula foi comunicado que na aula seguinte iriam jogar o *Jogo dos Poliedros* (Sá, António, *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*, 1997), para o qual era muito importante o conhecimento das propriedades e as planificações dos poliedros em geral.

O facto da aula ser de 90 minutos não só possibilitou a realização da actividade nas duas vertentes— construção da estrutura e construção do modelo de sólido geométrico, usando a respectiva planificação —(o que, apesar da divisão de tarefas no grupo, com alunos deste nível etário, demora sempre bastante) como, sobretudo, permitiu a reflexão a partir do material construído pelos próprios alunos, o que, dando mais significado à aprendizagem, favorece a sua interiorização.

### Nota final

Uma última palavra me ocorre dirigir aos colegas que vão agora iniciar esta experiência da Gestão Flexível do Currículo: SERENIDADE. Para sentirmos alguma segurança temos que caminhar lentamente, é preferível ir contando que um dia virá atrás do outro, do que irmos à procura dessa segurança no ponto de onde partimos.

É bom lembrarmo-nos de que se pretendemos desenvolver competências também nós teremos que ser competentes, também nós teremos que ser capazes de mobilizar e transferir os nossos conhecimentos e as nossas capacidades pondo-os ao serviço nos novos desafios que estamos permanentemente a enfrentar: os nossos alunos.

Será oportuno lembrar aqui um antigo *tesouro* da sabedoria oriental:

> Quando sopram ventos de mudança, há quem erga muros e barreiras e há quem construa moinhos de vento...

Lúcia Borrões
E. B. 2,3 de Santa Clara, Évora


# Depoimentos

*Publicamos neste número três testemunhos de professoras do 2º e 3º ciclos do Ensino Básico, que responderam aos pedidos que temos vindo a fazer de depoimentos sobre a reorganização curricular em curso.*

## Gestão Flexível do Currículo: relato de uma experiência

Estando praticamente a terminar o segundo ano da nossa experiência e a recomeçar um período de avaliação de todo o processo relacionado com a G.F.C., salientamos alguns dos aspectos mais significativos:

- Gostámos das aulas de dois tempos lectivos (no nosso caso de cem minutos), pois possibilitam um tipo de trabalho mais cooperativo (quem consegue fazer um trabalho de laboratório numa aula de cinquenta minutos?), da organização das disciplinas em áreas disciplinares, e da continuidade pedagógica do Conselho de Turma nos dois anos do ciclo de escolaridade.
- Constatámos que estar mais tempo na sala de aula com os mesmos alunos (em vez de termos cinco turmas, temos duas turmas e leccionamos Matemática, Ciências da Natureza, Estudo Acompanhado e Educação para a Cidadania), e trabalhar articuladamente perspectivas tão diversas propicia uma variedade de experiências educativas aos alunos, capaz de mobilizar melhor os conhecimentos e de promover uma atitude mais construtora face à própria aprendizagem.
- Considerámos essencialmente positivo no 2º ciclo, a redução do número de docentes no Conselho de Turma, a relação afectiva que é criada entre os professores e os alunos de uma mesma turma, dado o tempo que passam juntos, assim como a multiplicidade de experiências educativas que se vivenciam e que são fruto do trabalho nas diferentes áreas curriculares.

No entanto, estamos conscientes que à medida que formos avançando, mais descobriremos para fazer, aperfeiçoar ou modificar e que só em equipa poderemos avançar.

Margarida Marques
Margarida Nunes e Silva
Teresa Maria Santos Batista
E.B. 2,3 de Pinhal de Frades

# A Reorganização Curricular… uma oportunidade!

Tenho, acerca da escola, um sonho lindo.

Sonho com uma escola para todas as crianças. Todas mesmo! Uma escola que as valorize e as ajude a descobrir o mundo, os outros e a si próprias. Uma escola onde seja bom viver e crescer, ou seja, aprender. É claro que nessa escola andam meninos que 'estão mal preparados', que 'têm mau ambiente em casa', que 'não se interessam por nada', que 'só gostam de futebol e de ver televisão', que 'se portam mal', que 'não têm hábitos de trabalho, nem sabem estudar'… Mas o que é realmente diferente nessa escola é a forma como os professores estão organizados. É que nessa escola os professores dos mesmos meninos trabalham em conjunto! Esforçam-se para aprenderem juntos a ser professor dos tais alunos, dos que não gostam da escola (e dos quais a escola também não tem gostado) mas também dos que gostam, dos que não sabem nem querem estudar, mas também dos que sabem e dos que querem. Conversam sobre o que acontece nas suas aulas, discutem sobre cada um dos seus alunos e o que devem fazer para os animar e incentivar, estabelecem metas para os seus alunos e para si próprios, esforçam-se por fazer o que ensinam (cooperam, são solidários, apreciam as diferenças, reflectem sobre o seu próprio trabalho, aprendem ao longo da vida, …). Entusiasmam-se, discutem, zangam-se, cansam-se, desanimam, encorajam-se, experimentam, recuam, enfim, importam-se e por isso aprendem. Aprendem uns com os outros e com os alunos, com as dificuldades e com os êxitos, com as teorias e com as suas práticas. É assim o meu sonho lindo!

Ser feliz é como que uma obrigação, um dever! Um dever cultural, social, biológico, ético. Ser professor é só apoiar os outros a cumprirem esse dever! Na escola, a criança passa a ser quem importa.

É neste sentido que considero a Reorganização Curricular… uma oportunidade para os professores cumprirem o seu dever.

Florinda Costa
EB 2,3 do Monte de Caparica

# Uma mais valia

A Gestão Flexível do Currículo, apesar de ser um tema bastante debatido na nossa escola, sempre nos pareceu algo bastante irreal. Esta impressão desapareceu no momento em que iniciámos o nosso estágio na Escola Básica 2,3 de Pinhal de Frades, onde este tipo de gestão era uma realidade concreta. Decidimos, portanto, reflectir nos aspectos positivos que este tipo de gestão pode trazer para o ensino/aprendizagem da Matemática.

O primeiro contacto que tivemos com a Escola foi estabelecido por intermédio da análise da planificação a longo prazo da disciplina de Matemática, a partir desta constatámos que tinham sido incluídos no programa de 6° ano alguns conteúdos de 5°. Ficámos intrigadas com este facto, e decidimos procurar respostas. Ao interrogarmos a professora cooperante, esta explicou-nos que no ano lectivo anterior, os alunos tinham demonstrado dificuldades na aprendizagem de alguns conteúdos e que tinha sido decidido que estes seriam abordados, novamente, no 6° ano. Verificámos que a escola tem a possibilidade de gerir e organizar autonomamente, dentro de limites do currículo nacional o programa de Matemática.

Como professoras estagiárias numa escola em que a gestão flexível do currículo é uma realidade, tivemos oportunidade de assistir e participar nas áreas disciplinares não curriculares. Na nossa opinião, julgamos que a implementação destas áreas, especialmente, o Projecto Interdisciplinar e o Estudo Acompanhado, trazem benefícios para o ensino/aprendizagem da matemática.

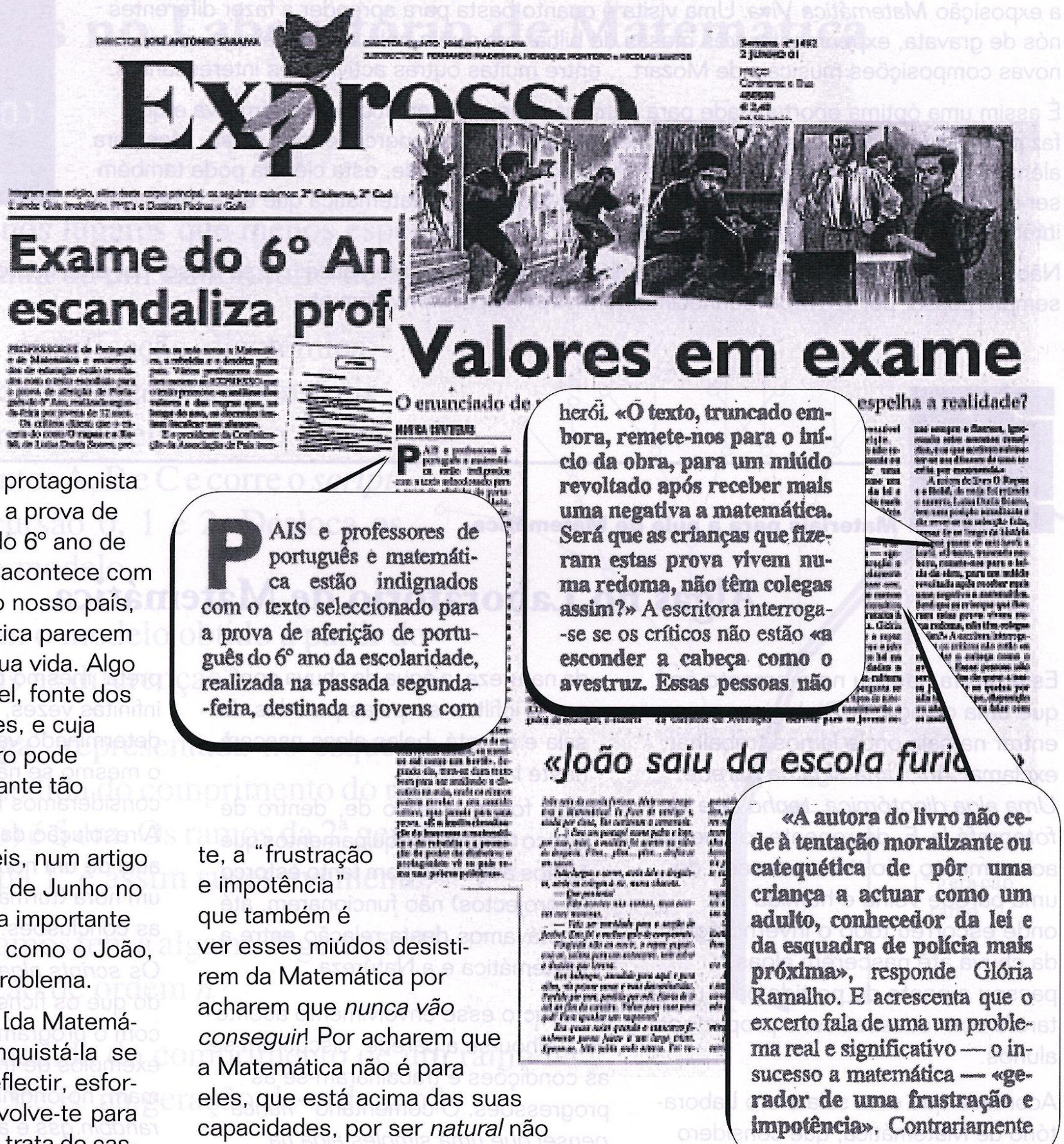
O Estudo Acompanhado tem como objectivo ajudar os alunos na aquisição de métodos de trabalho e de estudo, que são imprescindíveis para a Matemática. É também um momento que serve para a superação de necessidades dos alunos, identificadas durante as aulas. Uma vez que verificámos que os alunos sentiam dificuldades na interpretação e organização dos dados e na escolha adequada da estratégia a cada problema, decidimos colaborar nestas aulas, elaborando um *dossier* sobre a resolução de problemas.

O Projecto Interdisciplinar é um espaço que articula vários saberes dos alunos, onde os discentes idealizam, constroem e implementam vários projectos. É um espaço ideal para o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas disciplinares e entre a Matemática e o mundo real. É também uma boa oportunidade para os alunos constatarem a utilidade da matemática na sua vida quotidiana.

Na nossa opinião, a Gestão Flexível do Currículo é uma mais valia para o processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Ao reflectirmos sobre esta experiência, concluímos que foi bastante gratificante trabalhar numa escola em que tudo é pensado em função dos alunos e em função da melhoria da qualidade do ensino.

Sónia Ganito
Susana Barroso
Núcleo de estágio da E.B. 2,3 de Pinhal de Frades

# Pertinência ou exagero?




*Não sabia quanto dinheiro tinha. Mas era milionário pela certa.*

*A cabeça quase lhe andava à roda de fome e entusiasmo. Podia comprar uma quinta, um carro, um cavalo, tudo o que desejasse. Só não podia livrar-se da Matemática.*

Assim pensava João, o protagonista do texto escolhido para a prova de aferição de Português do 6º ano de escolaridade. Tal como acontece com muitos outros jovens no nosso país, as negativas a Matemática parecem ser uma constante na sua vida. Algo inevitável e incontornável, fonte dos mais diversos dissabores, e cuja resolução nem o dinheiro pode comprar! Que fazer perante tão grande fatalidade?

O nosso colega Luís Reis, num artigo de opinião publicado a 1 de Junho no jornal PÚBLICO, dá uma importante achega aos jovens que, como o João, se deparam com este problema.

> (...) Não te livras dela [da Matemática] mas podes conquistá-la se quiseres: pára para reflectir, esforça-te por cumprir, envolve-te para descobrir. (...) Não se trata de castigo, trata-se da necessidade de teres um objectivo.

Mas... e aos responsáveis pela selecção deste texto? Quem pode ajudar a compreender a infelicidade da escolha?

Efectivamente, "o excerto fala de um problema real e significativo — o insucesso a Matemática". E, sem dúvida alguma, todos nós conhecemos "miúdos revoltados" por receberem frequentemente "negativa a Matemática". Mas também conhecemos, por viver o problema diariamente, a "frustração e impotência" que também é ver esses miúdos desistirem da Matemática por acharem que *nunca vão conseguir*! Por acharem que a Matemática não é para eles, que está acima das suas capacidades, por ser *natural* não conseguir. Tão *natural* que até surge como dado adquirido num texto de uma prova nacional, sem qualquer cuidado com a delicadeza e a gravidade do problema.

Enfrentar com seriedade e coragem — e não de cabeça escondida "como a avestruz" — este problema efectivamente "real e significativo" é promover a reflexão e o debate em torno dele. É desmistificá-lo, analisá-lo, compreendê-lo. Não é expondo-o como se de uma banalidade sem importância se tratasse que ajudamos a resolvê-lo.

Não deve ser difícil entender que não é o livro de onde foi retirado o excerto, o excerto, ou sequer o tema em si, que estão em causa. É sim o ter sido seleccionado para uma prova de aferição a nível nacional.

Afinal, educar é também saber escolher o momento e a forma certa e... dar o exemplo!

Fernanda Perez, Esc. Sec. de Amora
Helena Amaral, EB1 nº1 de Vialonga

# Matemática Viva

O Pavilhão do Conhecimento, no Parque das Nações, é um museu interactivo de ciência e tecnologia que pretende contribuir para aproximar os cidadãos da ciência, bem como para incentivar a exploração e a experimentação.

É precisamente neste pavilhão/museu que se encontra presentemente patente ao público a exposição *Matemática Viva*. Uma visita é quanto basta para aprender a fazer diferentes nós de gravata, experimentar três mesas de bilhar em que a bola acerta sempre, ouvir novas composições musicais de Mozart... entre muitas outras actividades interessantes.

É assim uma óptima oportunidade para perceber que a matemática está bem viva e que faz parte da vida de todos nós, apesar de nem sempre nos apercebermos disso. Mas para além de ser uma presença constante e da sua grande utilidade, esta ciência pode também ser divertida. São precisamente estas diversas facetas da Matemática que esta exposição interactiva nos pretende dar a conhecer.

Não perca esta oportunidade para mergulhar no mundo da matemática... e se quiser dar uma espreitadela prévia, pode sempre passar por www.pavconhecimento.mct.pt ou por www.apm.pt.

PAVILHÃO DO CONHECIMENTO
CIÊNCIA VIVA

**Materiais para a aula de Matemática**

# Algas no Laboratório de Matemática

Esta tarefa nasceu no momento em que uma colega de Biologia, ao entrar na sala onde íamos trabalhar, exclama: *Ah!, uma alga na parede. Uma alga dicotómica, tenho que vir fotografá-la.* E, de repente, o que até ao momento não tinha passado de uma parede velha e húmida por onde escorreu todo o inverno água da chuva até nascerem algas, passou a ponto de partida para uma tarefa com sucessões, a propor aos alunos.

Acontece que esta sala era o Laboratório de Matemática, que considero razoavelmente bem equipado apesar das condições do edifício, e onde os alunos têm tido afinal as aulas que eles referem sempre como as que gostam mais — aulas de Laboratório — como lhe chamam.

A introdução da ficha não era bem a que agora se publica, pretendia que os alunos se envolvessem com a tarefa proposta. Era esta:

É verdade, esta alga nasceu no Laboratório de Matemática. O processo foi espontâneo. Com a ajuda da natureza, a água da chuva continua a infiltrar-se pelas paredes da sala e aí está, belas algas nascem neste laboratório!

Não fosse o facto de, dentro de pouco tempo, os equipamentos que temos adquirido com tanto esforço (e projectos) não funcionarem, até gostávamos desta relação entre a Matemática e a Natureza.

E de facto esse envolvimento aconteceu, olhou-se a parede, discutiram-se as condições e trabalharam-se as progressões. O comentário "*nunca pensei que uma simples alga na parede tivesse tanta matemática*", apresentado por uma aluna quando fazia o balanço do trabalho do ano, é significativo do envolvimento dos alunos com a tarefa.

A ficha foi apresentada aos alunos quando estudávamos as progressões geométricas, no 11° ano. A questão, 3.4. conduziu ao estudo intuitivo dos limites das sucessões em causa, com auxílio da calculadora, e gerou uma interessante discussão sobre o facto de o comprimento da ramificação preta, mesmo continuando a crescer infinitas vezes, nunca ultrapassar um determinado valor (cinco unidades) e o mesmo se não passar quando consideramos todas as ramificações.

A resolução da actividade requer uma aula de um hora (desdobrada) e mais um hora (turma) para acabar e discutir as conclusões.

Os *scripts alga* e *alga1* não são mais do que os ficheiros *script* que vêm com o programa *Sketchpad* como exemplos de fractais e que se chamam, no original, *bintree.gss* e *randbin.gss* e a sua utilização pressupõe que os alunos estão familiarizados com este programa.

Espero que não haja muitas algas nos Laboratórios de Matemática, mas esta actividade fez-me pensar que a sempre importante mas difícil tarefa de levar a realidade para dentro da sala de aula de Matemática às vezes depende de pequenas "coisas", mesmo à vista. O problema é darmos conta delas.

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões

Escola ..........................................................................................................................

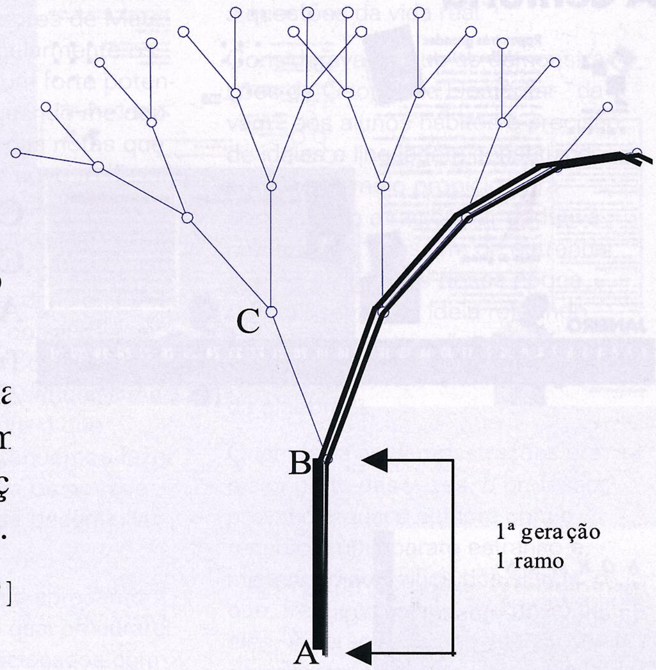
Ano/Turma.................... Data....................... Aluno(a)..........................................................

# Algas no Laboratório de Matemática

As algas nascem nos lugares que menos esperamos; por exemplo esta, imaginem, nasceu numa parede húmida de um Laboratório de Matemática de uma escola secundária.

1. Esta alga tem ramificação dicotómica. Vamos, com a ajuda do *Sketchpad*, construir um modelo geométrico dela. Usa o *script alga*. Marca os pontos A, B e C e corre o *script* com graus de recursão 0, 1 e 2. Desloca os pontos e analisa o modelo.

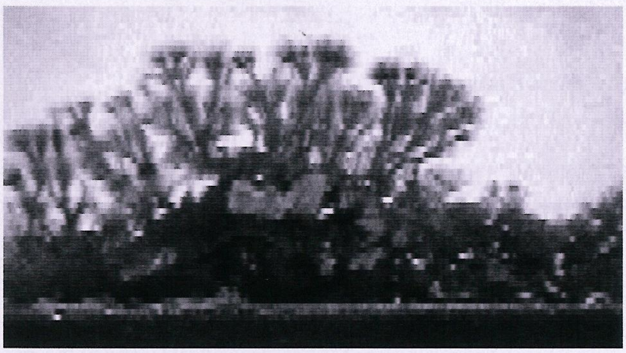
2. Analisa também o modelo obtido a partir do script *alga1*. Quais as diferenças?




3. Observa a "alga" representada no esquema
Considera que a medida do comprimento do ram
inicial (1ª geração) é 5 cm. Os ramos da 2ª geraç
medem 80% dos da 1ª e assim sucessivamente.

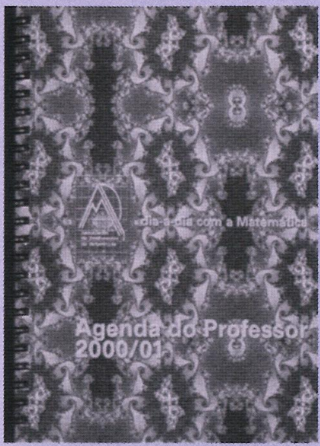
3.1. Quantos ramos tem a alga na 2ª geração? E 3ª ? E na geração de ordem *n*?

3.2. Qual é a medida do comprimento de um ramo na 2ª geração? E na 3ª? E na geração de ordem n?



3.3. Qual é o comprimento de todos os ramos até à 3ª geração? E até à vigésima geração?

3.4. Se a alga continuasse a crescer indefinidamente, qual te parece ser o comprimento de uma "ramificação" do tipo assinalado a preto? E o de todos os ramos?

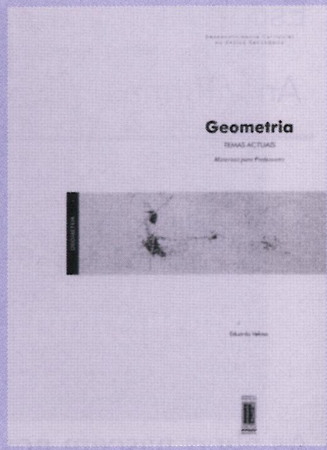



## Agenda do Professor 2000/2001

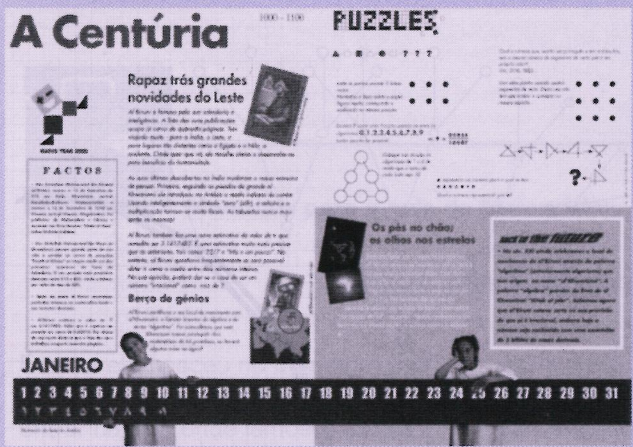
APM, 2000
1000$00

## Geometria Temas Actuais

Eduardo Veloso, 1998
4250$00

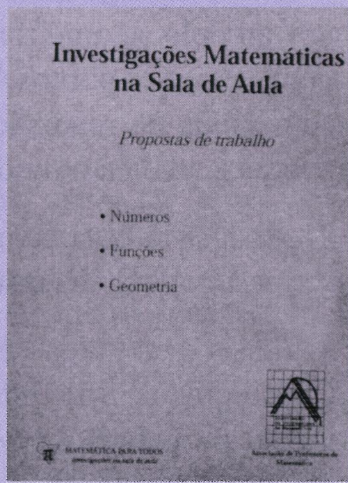



Reimpressão
Publicação do IIE, à venda na APM



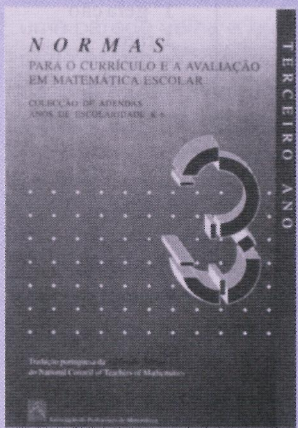

## Calendários Comemorativos do AMM

Tradução APM
2500$00




## Investigações Matemáticas na Sala de Aula: propostas de trabalho

APM, 2000
1500$00

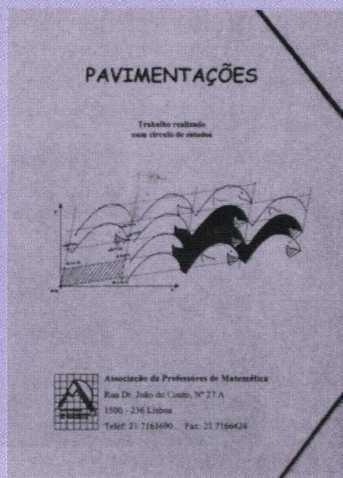



## Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar

Colecção de Adendas
Anos de escolaridade K-6
tradução portuguesa da *Addenda Series* do NCTM
500$00

## Pavimentações

**Trabalho realizado num círculo de estudos**
APM, 2000
3500$00



# Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática

*Ana Maria Boavida*

Uma boa demonstração é aquela que, para lá de convencer, explica e faz avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático, é aquela que clarifica porque é que uma relação funciona ou não. Mais importante do que o formato final de uma demonstração é a actividade de a produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correcta das ideias matemáticas que estão em jogo.

Nota introdutória

Enquanto elaboro estas notas sobre o ensino da demonstração vem-me à mente uma ideia que, há alguns anos, incluí num pequeno texto publicado na *Educação e Matemática* a propósito de contextos não formais de formação. Defendia, na altura, que os Encontros de Professores de Matemática, e muito particularmente os ProfMat, podiam ter um forte potencial formativo. Hoje quando me dou conta que na origem das notas que apresento esteve, de novo, o desafio de participar no painel *Demonstração no ensino da Matemática* realizado no ProfMat 2000[1], reforça-se, em mim, a ideia que defendi há uns anos atrás e reafirma-se a convicção de que o intercâmbio de pontos de vista, a partilha de experiências e a reflexão conjunta sobre o que fazemos e o que pretendemos fazer são fundamentais para os nossos próprios processos de desenvolvimento profissional.

É com este espírito que apresento este texto através do qual procurarei abordar aspectos relacionados com alguns dos caminhos percorridos pelo ensino da demonstração em Matemática e reflectir sobre possíveis caminhos a percorrer tendo em conta actuais orientações para o ensino desta disciplina.

## 1. Tradição no ensino da demonstração

Ainda não há muito tempo que, em Portugal, o ensino da demonstração se encontrava, fundamentalmente, ligado ao ensino da Geometria e, no que respeita aos números, ao da Aritmética Racional. Tipicamente iniciava-se no correspondente ao actual 3º ciclo do ensino básico — período em que os alunos atingem, seguindo Piaget, o estádio das operações formais — e o que estava em causa era a aprendizagem do raciocínio lógico-dedutivo que, pensava-se, uma vez aprendido em Matemática poderia ser aplicado com êxito "não só a outras ciências como a questões da vida real"[2].

Considerava-se que as demonstrações de Geometria Elementar "davam" aos alunos hábitos e precisão de ideias e linguagem constituindo, por isso, o meio propício para aprenderem a raciocinar dedutivamente. Não é, assim, de estranhar que os programas dessa época reflectissem esta ideia referindo explicitamente que "o papel formativo da geometria supera, e muito, o da álgebra"[2].

Quem fazia as demonstrações era, a maior parte das vezes, o professor provando, quase sempre com o recurso a um aparato estranho e misterioso aos olhos dos alunos, o que, frequentemente, era óbvio para eles. A veracidade dos enunciados a demonstrar não era posta em causa e raramente os alunos sentiam a necessidade de demonstrar as proposições que se enunciavam ou viam a demonstração como um meio de progredir na compreensão de um problema.

Aos alunos competia seguir as demonstrações apresentadas pelo professor, ou incluídas no manual, e ser capaz de as reproduzir, se necessário. As demonstrações que os alunos faziam/reproduziam constituíam, antes de mais, uma prova do seu saber e não a prova da veracidade dos enunciados matemáticos com que lidavam pois esta estava já estabelecida. Na prática os aspectos ligados à observação, experimentação e formulação de conjecturas eram, na grande maioria dos casos, inexistentes.

Tudo se passava como se não houvesse génese da demonstração, como se de repente, por volta dos treze anos, se revelasse aos alunos que só a demonstração, em matemática, é portadora de certezas e se obrigassem a entrar num novo jogo de que tinham que aceitar as regras e onde os critérios de verdade e validade eram diferentes dos que tinham utilizado até aí. Era como se os alunos tivessem que se submeter a uma racionalidade nova virando as costas à racionalidade que até aí lhes tinha sido útil e lhes tinha permitido lidar com a Matemática. Assim sendo, não é de estranhar que para muitos a aprendizagem da demonstração tenha constituído (e continue a constituir) uma fonte importante de insucesso e uma actividade em que não encontravam grande sentido.

Embora encontremos ainda hoje, nas práticas escolares, muitos traços desta herança, presentemente as actuais orientações curriculares procuram questionar esta situação e apontar caminhos diferentes para o ensino e aprendizagem da demonstração.

Pretendo, neste texto, debruçar-me um pouco sobre estas orientações o que me leva, antes de mais, a procurar explicitar o significado que atribuo ao conceito de demonstração. De facto, este conceito não tem um significado consensual nem muito claro. Aparece, frequentemente, entrelaçado com outras noções que com ele se relacionam, entre as quais se incluem as noções de prova e argumentação, não havendo mesmo unanimidade na distinção que é feita entre todas estas ideias.

Para clarificar o significado que atribuo a demonstração começo por socorrer-me de dois episódios de sala de aula, um passado em Portugal e outro que tem por contexto a realidade americana. O primeiro constitui a adaptação de uma descrição feita por E. Veloso (1998), o segundo foi elaborado a partir do relato de uma experiência de sala de aula apresentada por Prince (1998). Em ambos os casos, bem como na sua análise, considerarei um duplo sentido no conceito de demonstração: a actividade de demonstrar, considerada enquanto processo, e o produto resultante desta mesma actividade.

## 2. Demonstração: que significado?

### Episódio 1: Pirâmides, vértices e faces

Num teste do 7° ano de escolaridade foi colocada a questão:

Diz se é verdadeira ou falsa a afirmação: numa pirâmide, o número de vértices é igual ao número de faces. Justifica a tua resposta.

Alguns alunos responderam que a afirmação era verdadeira justificando a resposta apresentada através da análise de certos casos particulares de pirâmides.

No entanto a Raquel, embora apoiando-se também em casos particulares (pirâmides de bases triangular, quadrangular e pentagonal), apresentou uma justificação que ia para lá deles, pois

> associava a cada face lateral um vértice da base, e depois acabava associando a base ao vértice da pirâmide. Embora sem o dizer desta maneira (...) a sua argumentação consistia em descrever uma correspondência biunívoca entre as faces e os vértices em cada um daqueles tipos de pirâmides. O modo como o fazia mostrava que embora apenas referisse tipos particulares de pirâmides, estava consciente de que aquela correspondência era válida para qualquer tipo de pirâmide. (Veloso, 1998, p. 371)

### Episódio 2: A conjectura de Chuk

Depois da turma (alunos de 8°/9° ano) ter realizado tarefas de identificação e exploração de padrões e de ter trabalhado com o crivo de Eratóstenes para encontrar números primos inferiores a 100, um aluno (Chuk) reparou que todos os números primos maiores do que 5, terminavam em 1, 3, 7 ou 9. Na sequência desta afirmação a professora pediu-lhe para pensar se esta observação feita se manteria para qualquer número primo.

No dia seguinte começou a lição apresentando a conjectura de Chuk:

> Todos os números primos, excepto 2 e 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9.

A professora, após ter discutido com a turma os significados de conjectura e teorema, desafiou os alunos a provar a conjectura de Chuk. Inicialmente estes começaram por examinar casos particulares de números primos usando o crivo de Eratóstenes e concluiram que a conjectura era válida para todos os primos observados. Não tardou muito que suspeitassem que ela se mantinha para todos os números primos, independentemente de os terem observado ou não. Mas interrogavam-se sobre porque é que era válida e como poderiam ter a certeza que era, de facto, válida.

Nessa altura a professora escreveu no quadro os números de 0 a 9 e assinalou 1,3,7 e 9. Imediatamente um aluno observou que um número primo maior do que 5 nunca poderia terminar em 0 ou 5, porque se tal acontecesse seria múltiplo de 5 e por isso não primo. Assim, sugeriu que os números 0 e 5 fossem riscados.

Um outro aluno referiu que um número primo maior do que dois não pode ser par, porque todos os números pares são múltiplos de 2. Assim, riscaram-se os números 2,4, 6 e 8. Os alunos notaram, então, que as únicas possibilidades deixadas para os algarismos das unidades dos números primos eram, de facto, 1,3, 7 ou 9 e consideraram que a conjectura de Chuk estava demonstrada, facto que foi aceite pela professora.

Na sequência de toda esta discussão um aluno reparou que nem todos os números que terminavam em 1,3, 7 ou 9 eram primos e deu como exemplo o caso do 21, dizendo: "21 termina em 1 e, no entanto, não é primo". Esta oportunidade foi aproveitada pela professora para clarificar alguns aspectos relacionados com a precisão da linguagem matemática.

Em particular analisou a diferença entre dizer que "todos os números que terminam em 1, 3, 7 ou 9 são primos" e dizer que "todos os números primos (maiores do que 5) terminam em 1, 3, 7 ou 9".

### Uma questão, para começar

A análise dos episódios 1 e 2 evidencia que os alunos apresentaram justificações variadas para apoiarem as suas conclusões. Poder-se-á considerar que todos apresentaram demonstrações?

A esta questão podemos dar diversas respostas.

Uma resposta possível é que todos os alunos fizeram demonstrações, embora com níveis de sofisticação diferentes. Esta posição não me parece sustentável pois uma das questões com que a demonstração lida é com a questão da generalidade (o que se passa em todos os casos?). Não é por, experimentalmente, se verificar que uma propriedade é válida para um certo número de casos que se pode afirmar que ela é válida para todos. São conhecidas as partidas que, por vezes, nos prega o raciocínio indutivo. A apresentação de muitos exemplos não constitui uma demonstração. Assim sendo, os alunos que no primeiro episódio justificaram que a afirmação é verdadeira analisando apenas um certo número de casos particulares, não apresentaram nenhuma demonstração. Isto não significa uma desvalorização das justificações que enunciaram. É precisamente na atitude de procurar justificações para as afirmações que se fazem e os resultados que apresentam que se pode enraizar e ganhar sentido a actividade de demonstrar.

Uma outra maneira de responder à questão levantada é situarmo-nos numa posição diametralmente oposta à anterior e afirmar que nenhum dos dois episódios revela a apresentação de demonstração alguma. Argumentos a favor desta segunda posição podem enraizar-se na constatação de que nem mesmo a justificação apresentada por Raquel, ao ter por referência casos particulares de pirâmides, foi suficientemente geral. Quanto à turma de Chuk, a defesa desta última resposta pode apoiar-se no facto da argumentação apresentada não ter o formalismo e o rigor matemático necessários, nomeadamente ao nível da forma e da linguagem utilizadas.

Porém, considerar que ninguém apresentou uma demonstração não me parece ser também uma posição sustentável. A Raquel, como faz notar Eduardo Veloso, não fez mais do que recorrer a "um processo de demonstração que ilustres matemáticos ainda usavam no século XVII" (1998, p. 371). Nas suas demonstrações estes matemáticos usavam o "*exemplo generalizável* que consiste em demonstrar uma afirmação para um caso particular, mas de tal modo que o leitor ficará convencido que essa prova será válida no caso geral" (Veloso, 1998, p. 371). Assim, se aceitarmos que uma "demonstração matemática é o que no passado e hoje é reconhecido como tal pelas pessoas que trabalham no campo da matemática" (Douek, 1998), Raquel fez, de facto, uma demonstração.

No caso da turma de Chuk, o que foi colectivamente produzido para a conjectura formulada constitui, também, uma demonstração válida naquele contexto. Embora não tenha sido utilizada linguagem matemática simbólica, nem se tenha organizado o raciocínio num formato em que explicitamente se usam os termos hipótese, tese, e demonstração, o que é um facto é que os alunos não afirmaram que a conjectura era verdadeira só porque a verificaram para alguns casos, tendo lidado com a questão da generalidade. Ao fazê-lo apresentaram argumentos, matematicamente válidos, para cada uma das afirmações que enunciaram, usaram factos conhecidos e anteriormente aceites como verdadeiros para bases das suas justificações (por exemplo, todos os números pares são divisíveis por 2), encadearam os argumentos uns nos outros de tal modo que uma ideia fluía da anterior sem deixarem "pontas soltas" ou contradições e deduziram, logicamente, uma conclusão. Assim, podemos considerar que a turma de Chuk demonstrou, colectivamente, a conjectura que este aluno tinha formulado.

## 3. Demonstração no currículo: um meio e não um fim

Continuando a ter por referência o segundo episódio constatamos que os alunos, devido às suas experiências com a exploração de padrões, estavam sensibilizados para a procura de regularidades (por exemplo notaram que os números primos que conheciam maiores que 5 terminavam em 1,3, 7 ou 9), formularam uma conjectura plausível (a enunciada por Chuk), testaram essa conjectura observando outros números primos, interrogaram-se sobre porque é que essa conjectura seria válida e desenvolveram um argumento convincente e logicamente correcto que mostrava a sua validade para todos os números primos.

A actividade de demonstrar apareceu, assim, associada à actividade de produção e validação de uma conjectura cuja veracidade não era, de imediato, óbvia. O que constituiu o motivo e o motor da demonstração que a turma apresentou foi, por um lado, a necessidade de garantir a validade da conjectura formulada e, por outro lado, o desejo de entender o porquê desta validade. Deste modo a demonstração surgiu como um instrumento que serviu, não só, para os alunos se convencerem da veracidade da conjectura produzida, mas também como um meio de progredir na compreensão da tarefa que tinham em mãos.

É este duplo papel da demonstração que hoje se valoriza. Uma boa demonstração é aquela que, para lá de convencer, explica e faz avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático, que clarifica porque é que uma relação funciona ou não.

Quando consideramos a demonstração de um ponto de vista educativo talvez o seu papel fundamental seja precisamente, como defendem diversos autores, o de promover a compreensão. Neste âmbito, mais importante do que o formato final de uma demonstração é a actividade de a produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correcta das ideias matemáticas que estão em jogo.

O formato de uma demonstração deve subordinar-se à possibilidade de compreensão e, por isso, ser adequado ao nível de escolaridade e contexto de ensino. Poderá ser "um cálculo, uma demonstração visual, uma discussão guiada observando regras de argumentação aceites, uma demonstração pré-formal ou informal, ou mesmo uma demonstração que esteja conforme as regras de rigor restritas" (Hanna & Niels Jahnke, 1996, p. 903). O que é fundamental é que ela constitua, para o aluno, não um objecto matemático a estudar mas um instrumento que ele pode usar para fazer matemática.

## 4. Conjecturar e demonstrar: actividades entrelaçadas

Se, como foi realçado pela análise do episódio 2, a demonstração ganha sentido e relevância quando os alunos sentem necessidade de a fazer, analisar o ensino da demonstração conduz-nos a dedicar uma atenção especial a outras actividades matemáticas que estão intimamente relacionadas com a actividade de demonstrar. Entre estas estão o explorar, investigar, generalizar, conjecturar e argumentar.

Diferentemente do que acontecia há alguns anos atrás, estas actividades, intrinsecamente ligadas aos contextos e processos de criação e invenção matemáticas e à vertente experimental desta ciência, são hoje valorizadas nos currículos de Matemática. A ênfase que lhes é dada bem como ao raciocínio indutivo que lhes está associado não significa, contudo, uma diminuição da importância da outra faceta fundamental da actividade matemática, a actividade de demonstrar.

O que presentemente se defende é a importância dos alunos, na escola, experienciarem, de forma articulada, actividades de experimentação, investigação, formulação de conjecturas, argumentação e demonstração. Com efeito, vários educadores matemáticos salientam que há fortes ligações entre todas estas actividades (por exemplo, Boero, 1999; Bussi, 2000; Douek, 1998). Ou seja, o trabalho que o aluno desenvolve nas fases de formulação e exploração de uma conjectura e seu teste é frequentemente inspirador dos argumentos a encadear lógica e dedutivamente para produzir a demonstração dessa conjectura.

Neste contexto, um grande desafio que se coloca aos professores é o de aproveitarem o entusiasmo proporcionado pela exploração de uma tarefa para motivarem os alunos a apresentarem uma demonstração ou, pelo menos, para procurarem compreender a demonstração que lhes é apresentada pelo professor. Isto não significa, contudo, que a actividade de formulação de conjecturas deva estar subordinada à possibilidade de apresentação demonstrativa. Pode acontecer que os alunos formulem conjecturas que não são capazes de demonstrar com os conhecimentos matemáticos que possuem no momento. Este facto tem, em si mesmo, valor educativo, além de poder proporcionar boas oportunidades para os alunos aprofundarem, um pouco mais, a sua compreensão sobre o trabalho dos matemáticos onde a formulação de conjecturas e a sua demonstração não anda, frequentemente, a par e passo[3].

## 5. Aprendizagem da demonstração: um percurso

Os episódios que apresentei foram, deliberadamente, escolhidos por diversas razões entre as quais destaco as duas que considero mais relevantes. Por um lado, têm por pano de fundo temas matemáticos diferentes: um diz respeito à Geometria e outro ao Número. Por outro lado, os protagonistas são, em ambos os casos, alunos do ensino básico.

A primeira opção está relacionada com uma orientação que, actualmente, se defende para o ensino da demonstração. Diferentemente do que acontecia há uns anos atrás, em que a demonstração era reservada a momentos e conteúdos especiais do currículo, nomeadamente às aulas de Geometria, propõe-se hoje que as actividades de argumentar e demonstrar, adaptadas à maturidade intelectual e matemática dos alunos, façam parte natural das discussões na sala de aula, seja qual for o tópico em estudo.

A segunda opção prende-se com outra ideia que me parece importante salientar. Muito frequentemente, ainda hoje, a aprendizagem da demonstração aparece, exclusivamente, associada ao ensino secundário ou, na melhor das hipóteses, aos finais do 3º ciclo do ensino básico. Tal como acontecia há uns anos atrás, é ainda comum considerar-se, actualmente, que esta aprendizagem se pode iniciar, de repente, como uma nova forma de racionalidade que apenas é acessível a alunos, mais velhos, que já adquiram a maturidade lógica necessária para compreenderem definições abstractas, usarem o simbolismo matemático, distinguirem condições necessárias de condições suficientes ou hipótese de tese, axioma, teorema ou corolário. Não me parece que esta seja a via mais adequada para que todos os alunos possam aprender a demonstrar e sintam necessidade e gosto por esta actividade.

A construção, pelos alunos, de uma ideia, cada vez mais correcta do que é uma demonstração, desenvolve-se ao longo dos anos de escolaridade, "através da prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" (Veloso, 1998, p. 374). Assim, a aprendizagem da demonstração vai sendo feita por etapas ao longo de um percurso que deve ser equacionado de modo a facilitar e a possibilitar o encontro de sentido nesta aprendizagem. Exemplos de actividades valiosas que poderão ajudar o aluno a percorrer, com sucesso, essas etapas, são, em particular, a realização de experiências e a análise de casos particulares, a procura de invariantes com vista à generalização, a formulação e exploração de conjecturas, a compreensão de que não basta que um resultado seja válido para alguns casos para que se considere válido para todos, a análise de exemplos e contra-exemplos, a re-visitação de conjecturas formuladas para analisar se se mantêm noutros contextos e as tentativas de avaliação e validação das conjecturas que se produzem.

O que importa, no que se prende com o ensino da demonstração, não é, pois, submeter os alunos a uma racionalidade nova — numa etapa do seu percurso escolar que se considera adequada para o efeito — mas, antes, ir criando, ao longo dos vários anos de escolaridade, condições para que a racionalidade própria de cada um vá evoluindo no sentido de haver a apropriação, cada vez maior, de um sistema de validação particular característico da matemática.

## 6. Génese da aprendizagem da demonstração: os primeiros anos de escolaridade

Há estudos que mostram que os alunos, mesmo quando o seu pensamento se situa ainda ao nível das operações concretas, são capazes de realizar acções encadeadas com objectos manipuláveis de modo a provar uma proposição, tendo por pano de fundo o raciocínio dedutivo. Há, também, amplas evidências de que em ambientes adequados, as crianças, desde os primeiros anos de escolaridade, são capazes de tornar explícito o conhecimento que usam quando apresentam argumentos e justificações, são capazes de reflectir sobre a natureza de um argumento, são capazes de elaborar juízos acerca do poder explicativo de argumentos apresentados pelos seus pares e são capazes de aplicar resultados gerais a que chegam a exemplos mais específicos.

Deste modo, a génese da aprendizagem da demonstração matemática, ao enraizar-se na compreensão de que as asserções matemáticas têm sempre razões, na capacidade de produzir e avaliar justificações, no entendimento da necessidade destas justificações e na compreensão do que constitui, na aula de Matemática, um argumento aceitável e adequado, situa-se no ensino básico e, em particular, nos primeiros anos de escolaridade.

Aceitar que a aprendizagem da actividade de demonstrar se deve iniciar muito cedo remete para a importância de dedicar, desde os primeiros anos, uma atenção especial à selecção de tarefas que ajudem os alunos a criarem, descreverem e examinarem padrões para detectarem regularidades, a formularem conjecturas, a explorarem estas conjecturas e a produzirem argumentos para as validarem ou rejeitarem baseados no trabalho que desenvolvem. Neste âmbito, as tarefas de investigação parecem ser particularmente prometedoras.

Remete, igualmente, para a necessidade de criar na sala de aula uma cultura que veicule a ideia de que a matemática é uma actividade de construção de sentido, onde sejam estimuladas e valorizadas as tentativas de justificação, explicação e argumentação feitas pelos alunos e em que a validade de uma justificação não se baseie numa autoridade exterior, seja ela a do professor ou a do manual, mas na consistência lógica da argumentação apresentada. Com efeito, "enquanto os alunos esperarem que seja o professor a decidir sobre a validade de um resultado da sua actividade, a palavra 'prova' não fará sentido para eles tal como esperamos que faça" (Balacheff, 1991, p. 179).

Nesta comunidade é fundamental que o professor torne todos os alunos responsáveis tanto por articularem o seu raciocínio como por procurarem compreender o raciocínio dos colegas. Igualmente importante é que o professor crie oportunidades frequentes para que os alunos se envolvam em discussões genuínas de ideias matemáticas e que fomente a apresentação de modos de justificação que estejam ao alcance destes mas que os apoie de modo a que vão, gradualmente, incorporando nessas justificações, propriedades e relações matemáticas.

Criar esta cultura de sala de aula não é tarefa fácil e cria muitos dilemas ao professor. Mas é, seguramente um desafio quando se pretende que os alunos desenvolvam a capacidade de demonstrar e sintam prazer nesta actividade.

### Referências


Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. Em A. Bishop & S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer.

Boero, P. (1999). Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, *produttiva e inevitable nella matemattica e nella didattica della matematica*: http://www-cabri.imag.fr/preuve

Bussi, M. G. B. (2000). *Early approach to mathematical ideas related to proof making.* (Contribution to Paolo Boero, G. Harel, C. Mather, M. Miyazaki (organizers) *Proof and Proving in Mathematics Education*, ICME9, TSG 12. Tokyo/Makuhari, Japan.): http://www-cabri.imag.fr/preuve

Delahaye, J.-P. (2000). *Raccouris dans les démonstrations*: http://www-cabri.imag.fr/preuve.

Douek, N. (1998). *Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications.* Texto apresentado em CERME-I Conference, Osnabrueck. http://www-cabri.imag.fr/preuve

Hanna, G., & Niels Jahnke, H. (1996). Proof and proving. Em A. Bishop & K. Clements & C. Keitel & J. Kilpatrick & C. Laborde. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877 - 908). London: Kluwer Academic Publishers.

Prince, A. (1998). Prove it! *Mathematics Teacher, 91*(8), 726 - 728.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.


### Notas

[1] Painel moderado por Cristina Loureiro. A maior parte das ideias que incluo neste texto foram, por mim, apresentadas nesse painel.

[2] Programa do Ensino Liceal, 1954, 2º ciclo. O 2º ciclo da época corresponde aos actuais 7º, 8º e 9º anos.

[3] Veja-se, por exemplo, o caso da conjectura das quatro cores e da conjectura de Fermat que só muito recentemente foram consideradas teoremas apesar de terem sido enunciadas há já muito tempo. Um outro resultado que ainda hoje resiste às tentativas de demonstração, apesar de ter sido já enunciado há cerca de vinte séculos, é o que afirma que um número perfeito (número igual à soma dos seus divisores diferentes de si próprio: por exemplo 6) não pode ser ímpar (Delahaye, 2000).


Ana Maria Roque Boavida
ESE de Setúbal

# Uma aula diferente

Todas as pessoas devem estar cientes que o uso do computador pode ser uma forma de melhorar a interacção entre professor e alunos. Consideramos que o ideal seria as escolas estarem equipadas com material informático disponível e em número suficiente. Assim, os professores poderiam leccionar recorrendo ao computador e os alunos poderiam explorar todas as suas potencialidades.

A nossa escola, Escola Básica Integrada de S. Domingos — Covilhã, não está (por enquanto…) equipada como nós desejaríamos, e, para usarmos o computador na aula de Matemática, tivemos de criar alternativas: demos uma aula utilizando um projector de vídeo ligado a um computador portátil.

O projector de vídeo é um aparelho dispendioso e, porque não existia na escola, foi necessário recorrer à nossa entidade formadora (Universidade da Beira Interior), que o disponibilizou.

O portátil era nosso. Utilizámos este material numa aula do 8° ano que tinha por objectivo resolver problemas envolvendo funções.

Em casa, preparámos meticulosamente todos os passos e pormenores para que a aula fosse realmente diferente e aliciante. Na aula, utilizámos o *Grafmath* (um *software* sobre funções) e o *Microsoft PowerPoint*.

No início os alunos estavam muito entusiasmados e expectantes. Foram-lhes colocados problemas que eles iam resolvendo, colectivamente, e o professor acompanhava resolvendo no computador. Recorrendo às potencialidades do *Microsoft PowerPoint* conjugámos sons e imagens para formar autênticos *clips* de resolução de problemas. As imagens desfilavam e ilustravam o desenrolar do raciocínio. Quando as etapas eram superadas emergiam palmas do computador que, no final, já eram antecipadas pelos dos alunos.

A aula terminou com uma síntese do que foi abordado à qual se seguiu, em tons de cinema, a apresentação do genérico ao som de *Another Brick in the Wall - part II*, dos Pink Floyd.

Apesar de toda a interactividade que criámos, os alunos lamentaram não haver computadores para eles próprios trabalharem e executarem o programa *Grafmath* (que estava ligado ao *Microsoft PowerPoint*) e que lhes permitiria ter traçado gráficos e mostrado as tabelas de valores das funções. Pensámos que este foi um aspecto fulcral pois reparámos que, de facto, o entusiasmo demonstrado inicialmente foi-se desvanecendo com o aproximar do final da aula.

Foi a nossa primeira experiência no ensino, utilizando as novas tecnologias e, como professores, pensamos que ela foi positiva para todas as partes envolvidas pois, apesar do muito tempo dispendido na preparação desta aula e das dificuldades encontradas para obter o material necessário, sentimos o enorme interesse e fascínio dos alunos que agora nos perguntam, frequentemente, quando será a próxima aula com o computador.

Vamos continuar a utilizar as novas tecnologias no ensino e não será pela escassez de material que deixaremos de leccionar utilizando o computador. É necessário que não sejamos reticentes em relação às novas experiências! E, por outro lado, julgamos que a utilização do computador pode ser uma mais-valia na aprendizagem dos conteúdos matemáticos e pode proporcionar novos e atractivos ambientes de trabalho.

Esperamos que esta nossa experiência seja útil a outros professores e que desfrutem dessas aulas tanto como nós.

Carlos Miguel Ribeiro
Fernando Manuel Martins
Hélder Soares Vilarinho
Esc. Bás. Integrada de S. Domingos

# A minha formação como professor de Matemática

Sou professor recém-licenciado em ensino da matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e venho por este meio manifestar-me contra a inadequada formação que me foi dada durante a frequência deste curso.

O meu curso teve a duração de quatro anos mais um de estágio. Os primeiros desses três anos foram ocupados com cadeiras de matemática pura onde se aprende a estabelecer analogias e a detectar padrões entre vários entes matemáticos, enfim, a efectuar actividade matemática. Confesso que possuo bons conhecimentos matemáticos. No entanto, constato com tristeza que, no desempenho da minha profissão de pouco me servem e sinto que irão cair no esquecimento se não forem "revisitados" (coisa a que a minha profissão não obriga). Hoje pergunto-me: para que preciso de saber tanta matemática se não a utilizo e se, como já disse, será esquecida? É triste, mas sinto que me deram um canhão para matar uma mosca, se me permitem a analogia.

Dir-me-ão talvez os mais "puristas": mas o estudo que fizeste de toda essa matemática foi essencial na aquisição de um raciocínio matemático imprescindível para a prática lectiva. É verdade, mas acho muito pobre se foi só por isso que me ensinaram tanta matemática. Pergunto: não seria muito mais proveitoso se em vez de tanta matemática pura me tivessem ensinado outras coisas mais importantes para o desempenho da minha profissão? Por exemplo, acreditam se vos disser que cheguei ao 4° ano da licenciatura sem saber trabalhar com uma calculadora gráfica, a pensar que modelação tinha a ver com o mundo da moda (pasme-se!), com muito poucos conhecimentos de história da matemática, sem nunca ter reflectido sobre a natureza da matemática e as várias concepções que a procuram explicar. Além disso, é preciso ter consciência de que muitos dos nossos alunos não gostam de matemática, e a nossa função é precisamente ensinar-lhes a gostar. Como? Através de exemplos e situações que os cativem. Nós não precisamos dessas situações, mas nós gostamos de matemática, o mesmo não se passa com grande parte dos nossos alunos. Em que cadeira nos ensinam esses exemplos, esses elos de ligação da matemática com o mundo real, essas situações em que a matemática pode ser mais facilmente perceptível para os alunos? Eu estive lá e não sei. Não nos podemos esquecer que nós, em princípio, gostamos e entendemos matemática pura, mas os nossos alunos podem não gostar e então é nossa função encontrar exemplos em que a matemática lhes seja mais facilmente perceptível, em particular articulações entre conteúdos matemáticos e situações familiares aos alunos. Isto não nos ensinam.

Não quero que entendam com isto que defendo uma desvalorização da componente matemática no curso. O que sugiro é uma diferenciação e especialização da matemática que é ensinada a alunos do ramo de matemática pura e a alunos do ramos educacional. O que é natural pois são profissionais que vão desempenhar funções diferentes e precisam, portanto, de uma formação diferenciada. Ao professor de matemática não interessa saber muita matemática, interessa sim saber ensiná-la bem. Perante isto, continuo sem entender como é que ao fim de tantos anos ainda não há uma diferenciação de raiz entre os dois cursos.

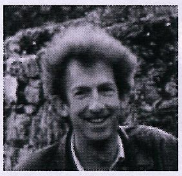
Além dos exemplos já referidos respeitantes às lacunas existentes no curso, existe, a meu ver, ainda outro que tem a ver com o nosso papel como educadores, que só não é pior pois o 4° ano do curso é muito rico e diversificado. Hoje em dia a função de um professor deixou de ser somente ensinar, é também educar e, muitas vezes, controlar. Como se controla uma turma? Tenho consciência de que esta pergunta não tem resposta devido ao seu carácter relativo, e que não pode haver uma cadeira onde se ensine a controlar uma turma. Mas isso não impede que nos confrontem com situações de indisciplina, nos alertem para determinados casos, que partilhem connosco experiências. Tenho a ideia de que não o fazem porque perderam um pouco a noção do papel do professor nos nossos dias e, mais grave ainda, do papel que os alunos adoptaram.

Referi a importância de educar. O professor é um educador e, como tal, tem que ter um leque de conhecimentos diversificado e que vai muito para além da sua área do saber. Onde estão as cadeiras de Biologia, de Química, de Informática, de Arte, de Filosofia, etc. que dariam ao professor uma muito maior desenvoltura noutras áreas do saber. Porque é que nos primeiros três anos do curso só aprendemos matemática quando dois, três anos depois será esquecida e o que mais precisamos é de outros conhecimentos que nos tornem bons educadores? Como pode um professor articular os conhecimentos de matemática que possui com a arte se não sabe nada de arte, com a Economia se não sabe nada de Economia ou, e lembrando o ProfMat, com a natureza? Com a obrigatoriedade da Educação Sexual nas escolas e o modo transversal como vai ser leccionada em todas as disciplinas, que conhecimentos fornece um curso de ensino da matemática aos seus alunos para o futuro esclarecimento de dúvidas de educação sexual quando professor? E isto para não falar da grave lacuna que todos os licenciados em ensino da matemática pela FCUL possuem em termos de gestão escolar.

No decorrer deste ano cheguei à conclusão que o curso que tirei com muito gosto e sacrifício é um curso hermético e subaproveitado, onde se salvam o 4° ano e o ano de estágio. Sabe-se muito de matemática e quase nada do resto, inclusive de como ensiná-la tendo em conta o contexto geracional em que os alunos de hoje vivem.

Alexandre José Santos Pais
E. B. 2,3 D. João I, Baixa da Banheira

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições no espaço disponível na revista.



## John Fauvel
## 1947-2001

A morte de John Fauvel, ocorrida em 12 de Maio deste ano, representa uma grande perda para a educação matemática, nomeadamente para a luta em prol da integração da história da matemática no seu ensino. Foi sentida com grande pesar por muitos colegas e amigos em todo o mundo, e também em Portugal. John visitou várias vezes Portugal, e muitos de nós, em particular na APM, trabalhámos com ele e dele ficámos amigos.

Em contactos havidos, tomámos a resolução de publicar, num dos próximos números da revista, um artigo colectivo em memória de John Fauvel. Por ocasião do seu enterro, enviámos a seguinte mensagem:

*The Portuguese friends of John Fauvel will remember him as a wonderful and kind person that helped them not only to understand better what could be the value of history in mathematics education but, in a more relevant and lasting way, how, even if you are more advanced and informed in a certain subject, you could work with others in a way that really everybody is growing and learning from each other.*

*We have decided to try to convey this and other memories of our work with John in a colective article in a next issue of the journal of the Portuguese Association of Teachers of Mathematics.*

Esta e outras mensagens podem ser lidas no *site* da *British Society for the History of Mathematics*, no endereço http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/Fauvel.html

Para sugestões e contribuições relativas ao projectado artigo colectivo, contactar por favor
eduardoveloso@netcabo.pt

# Exploração do Poly — algumas ideias

*Cristina Loureiro*

Poly é um programa muito simples que pode ser obtido através da *Internet*: é uma excelente base de dados de poliedros, permite olhar para estes objectos matemáticos, relacioná-los, integrá-los, desmontá-los e constituir deste modo um ponto de partida essencial para propostas de investigação a realizar pelos alunos.

Entre 30 de Novembro e 7 de Dezembro de 2000, a APM organizou no Visionarium uma grande exposição chamada *Poliedros e outras matemáticas*. Este artigo é uma homenagem aos milhares de poliedros que as escolas apresentaram nesta grande exposição, bem como aos milhares de alunos e centenas de professores que a visitaram.

*Poly* é um programa sobre poliedros que pode ser obtido através da internet no *poly site*, www.peda.com. A versão 1.0 deste programa foi divulgada em 1999. Neste momento vai já na versão 1.08 de 2000. Este programa é produção da *Pedagoguery Software Inc*, de origem canadiana.

É um programa extremamente simples que não é mais do que uma excelente base de dados de poliedros. Estes estão organizados por famílias: *platónicos, arquimedianos, poliedros de Johnson, poliedros de Catalan, prismas e antiprismas, deltaedros (deltahedra), bipirâmides e deltoedros (deltohedra), geodésicas e domos.*

No próprio programa o menu do *Help* dá acesso à caracterização de cada uma destas categorias de poliedros.

Na opção de preferências do Poly temos acesso a alterar:

- as categorias, ou famílias, de poliedros que o programa apresenta, no total de oito nesta versão do programa;
- os modos de ver os poliedros que o programa apresenta, no total de onze, nesta versão do programa;
- as condições para exportar as figuras para outros programas, de texto, de desenho ou de paginação, por exemplo;
- a língua de trabalho do programa (inglês canadiano ou inglês US).

## Poliedros

O trabalho com estas figuras é uma forma de enriquecer o nosso imaginário sobre poliedros. Vem a propósito recordar algumas ideias breves do livro *Polyhedra*, de Peter R. Cromwell:

> Não há problema mais desafiante do que escrever um livro sobre a história dos poliedros e isso é decidir o que se entende pelo termo "poliedro". Um olhar de relance sobre as figuras deste livro dará uma ideia da variedade de objectos que têm sido descritos como poliedros. Procurar uma definição que os abarcasse a todos é impossível pois diferentes autores aplicaram o termo a muitas ideias diferentes, algumas delas até contraditórias. Ao nível mais elementar podemos perguntar se um poliedro é um objecto sólido ou uma superfície limitada. As respostas a esta questão dependem em larga medida do período em que os geómetras viveram e dos problemas que estudaram. Para um geómetra grego clássico um poliedro era um sólido. Nos últimos 200 anos, tornou-se mais conveniente pensar nos poliedros como superfícies. Hoje, alguns matemáticos olham para os poliedros como estruturas.
>
> Há quem diga que a única coisa que os poliedros têm em comum é o nome. Mas isso não é um chão muito seguro. Os poliedros das ilustrações claramente partilham algumas características. A sua propriedade mais óbvia é que todos eles são formados (ou limitados) por polígonos. Esta propriedade fundamental constituiu a definição de poliedro durante muitos séculos, mesmo não tendo sido explicitamente estabelecida. Como veremos, uma definição tão aberta pode

ser interpretada de muitas maneiras. Não é necessária nenhuma restrição ao modo como os polígonos são associados e que tipos de polígonos podem ser utilizados. Esta ambiguidade tem sido extremamente frutuosa, permitindo a esta designação evoluir em diferentes direcções e conduzindo ao estudo de diferentes tipos de objectos poliédricos. Por isso mesmo, deixaremos poliedro como este termo tão vagamente definido. Ao longo do livro veremos como o seu significado foi refinado e alterado ao longo dos tempos.
(adaptado de *Cromwell*, 1997, pp. 12-14)

Cada poliedro desta base de dados pode ser visto em perspectiva, oco ou compacto, só com arestas e vértices, em planificação, no modo de grafo, e ainda em mais algumas versões destas modalidades referidas. Em todos os modos de visualização o poliedro pode ser animado manualmente ou automaticamente, bem como reduzido e aumentado. Qualquer figura pode ser facilmente importada para outro programa de desenho, processamento de texto ou paginação.

Se olharmos os poliedros como objectos matemáticos que podem ser classificados, relacionados, interligados, desmontados, ..., esta base de dados é um excelente ponto de partida para propostas de investigações a realizar pelos alunos.

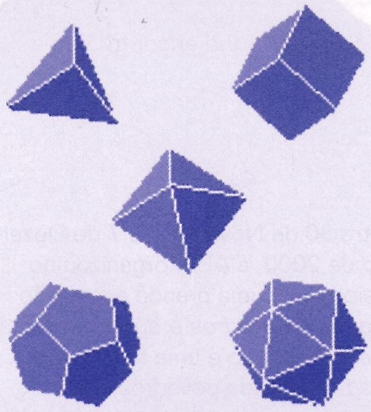
## Classificação de poliedros

Uma família de poliedros acaba por ser um conjunto de poliedros organizados pelas suas características.

A discussão das características de cada família pode ser feita rapidamente, por observação, com a possibilidade de comparação rápida de elementos de famílias diferentes e com a obtenção de contra exemplos.

Experimentemos uma classificação de exigência crescente:

- Poliedros com faces todas congruentes: platónicos, de Catalan, alguns de Johnson.
- Poliedros com as faces todas congruentes e todas polígonos regulares: platónicos e alguns de Johnson.
- Poliedros com as faces todas congruentes, as faces todas polígonos regulares, com todas as arestas congruentes e com todos os vértices congruentes: platónicos.



O que caracteriza então os poliedros platónicos? Porque há só 5 poliedros que verificam estas condições?

Poliedros com mais do que um tipo de faces, todas elas polígonos regulares: arquimedianos, prismas e antiprismas, poliedros de Johnson.

Poliedros com mais do que um tipo de faces, todas elas polígonos regulares, com todas as arestas congruentes e com todos os vértices congruentes: arquimedianos.

O que caracteriza então os poliedros arquimedianos? Porque é que só há 13 poliedros que verificam estas condições?

A observação dos poliedros arquimedianos permite introduzir um tipo de notação simples e interessante para caracterizar cada poliedro.

Esta notação indica o número de lados dos polígonos regulares das faces e a forma como estas se dispõem num vértice:

3.6.6 — triângulo, hexágono, hexágono,

3.4.3.4 — triângulo, quadrado, triângulo, quadrado,

e assim por diante.

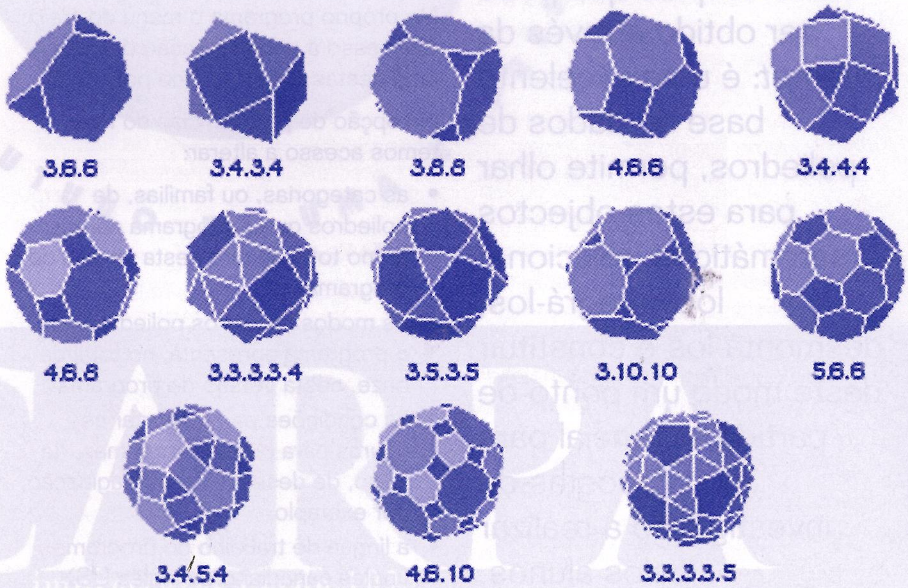
Os deltaedros convexos são os poliedros que se obtêm com faces triângulos equiláteros. É uma família muito interessante por ter um número finito de elementos e uma regularidade de construção com uma falha totalmente inesperada.

## Dualidade entre poliedros

Considera-se que o primeiro estudo sistemático sobre a dualidade dos poliedros se deve a E. C. Catalan, por isso não é de estranhar que se procurarmos o dual de cada um dos poliedros arquimedianos obtenhamos uma nova família que tem precisamente o nome deste matemático: os poliedros de Catalan.

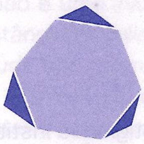
Uma forma de obter o poliedro dual de um poliedro arquimediano, ou de um poliedro platónico, é considerar o centro de cada uma das faces e uni-lo, por arestas, aos centros das faces que lhe são adjacentes. O novo poliedro obtido é o dual do anterior.

A tarefa de encontrar o dual de cada poliedro arquimediano é um excelente exercício de visualização e de estabelecimento de relações.

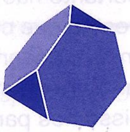


Pensando, por exemplo, no tetraedro truncado, podemos registar que o seu dual deverá ter 8 vértices que não poderão ser todos congruentes.

Haverá 4 vértices de cada um dos quais saem 6 arestas.



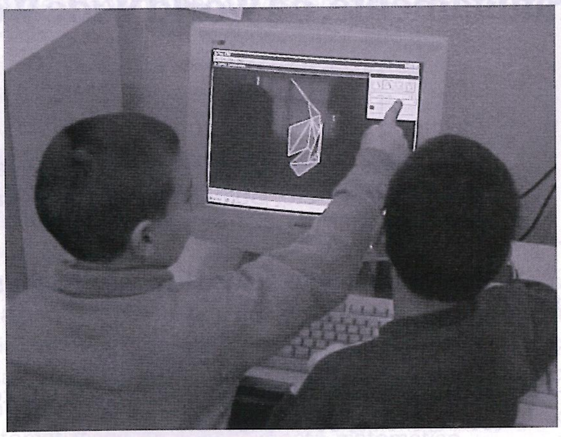
E haverá 4 vértices de cada um dos quais saem 3 arestas.



Isto acontece porque no tetraedro truncado há faces que são hexágonos e há faces que são triângulos.

Outra característica do dual do tetraedro truncado é que todas as suas faces deverão ser triângulos congruentes que são triângulos isósceles. Isto acontece porque o tetraedro truncado tem todos os vértices congruentes do tipo 3.6.6. O dual do tetraedro truncado é o *triakis tetrahedron*.

Tudo isto é muito estático aqui no texto, mas com as possibilidades de manipulação dos poliedros no Poly a visualização torna-se muito mais acessível.



## Poliedros e planificações

Exemplo das excelentes potencialidades de visualização deste programa é uma actividade realizada por uma professora do 1° ciclo com os seus alunos do 3° ano. Conta-nos:

Na 3ª sessão com este programa pedi aos alunos que, em grupos de dois, abrissem o programa Poly e procurassem poliedros:

- só com faces triangulares;
- só com faces quadrangulares.

Pedi a cada grupo que imprimisse o poliedro que encontrou de duas maneiras:

- o poliedro construído na posição que achassem que melhor mostrava as faces;
- o poliedro planificado.

Posteriormente reuni todos os alunos em volta de uma grande mesa, pedi-lhes as folhas impressas e em volta deste material iniciámos um debate. Eu colocava as perguntas e cada grupo (par) respondia.

Comecei por dar a um grupo um poliedro impresso por outro grupo e pedir-lhe para contar o número de faces desse poliedro.

Nos casos em que me pareceu possível, pedi-lhes que contassem quantas eram as faces à vista e quantas estavam escondidas. De seguida pedi aos alunos que explicassem à turma a forma como tinham contado e como explicavam o número de faces escondidas que tinham indicado.

Depois pedi-lhes que descobrissem entre todas as páginas que eu possuía, qual a que continha a planificação daquele poliedro.

Fiz isto com vários grupos, em relação a vários poliedros, o que acabou por proporcionar um momento bastante rico, durante o qual pude sistematizar a noção de face, de vértice e de aresta. Em simultâneo verifiquei que muitos alunos tinham tido enormes necessidades de imaginar o poliedro (partir para a abstracção) e que o fizeram desenvolvendo algum esforço, mas demonstrando bastante entusiasmo.

(Excerto do relato de uma professora do 1° ciclo, trabalho não publicado.)

## Contagens em poliedros

As actividades de contagem são das mais interessantes de realizar com este programa. Os diversos modos de ver o poliedro permitem uma contagem segura dos seus elementos:

- o tipo de faces e o número de cada uma delas podem ser muito bem vistos na planificação;
- o número de vértices pode ser totalmente visto na modalidade de grafo (*two-dimensional Schhlegel diagram*), uma das opções de apresentação do poliedro e de que ainda não tinhamos falado.
- o número de arestas pode ser obtido pela Igualdade de Euler $(F+V = A+2)$

### Referências


Cromwell, Peter R.. 1997. *Polyhedra.* Cambridge University Press, UK.

Veloso, Eduardo. 1998. *Geometria — Temas Actuais.* IIE, Lisboa.



Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Eduardo Veloso

# Como vamos de tecnologias no ensino superior de matemática?

Não vamos responder a esta questão neste número da revista, isso não é possível, obviamente. Mas gostaríamos ao menos de a colocar diante dos olhos dos nossos leitores. Julgamos que a tentativa que se faz nesta secção de promover uma "boa" utilização das tecnologias na educação matemática, tem que ter em conta a situação dessa utilização nos cursos de formação inicial de professores. Ora sobre isso pouco sabemos. A situação é certamente diferente de universidade para universidade. Tentaremos nos próximos tempos, obter informações sobre o que se passa em diversas universidades portuguesas a este respeito.

Surge esta questão a propósito da iniciativa do Massachussets Institute of Technology (MIT) que noticiámos no número anterior da revista e que consistiu em lançar um projecto para disponibilizar gratuitamente, na Internet, a maior parte dos seus cursos (notas e textos dos professores, trabalhos de projecto, bibliografia, testes, etc).

Tratando-se de uma das mais prestigiadas instituições de investigação e ensino superior dos Estados Unidos, esta iniciativa teve grande repercussão, dado ir claramente contra o uso corrente de adoptar, também nos assuntos da educação, a chamada "filosofia de mercado". Embora esta iniciativa seja de carácter geral, e portanto não esteja directamente relacionada com a questão que colocámos atrás, mostra no entanto a importância crescente que o uso das tecnologias, e em particular da rede Internet, está a ter no domínio da educação. Por isso nos pareceu pertinente traduzir para este número informações sobre esta importante e significativa iniciativa. Como disse Paul Brest, presidente da Fundação Hewlett, um dos financiadores do projecto do MIT, "a nossa esperança é que este projecto inspire semelhantes esforços em outras instituições e reforce o conceito de que as ideias devem ser vistas como propriedade comum de todos nós, e não como produtos cuja propriedade está destinada a gerar lucros".

MIT OPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# O MIT vai disponibilizar os seus cursos, gratuitamente, na World Wide Web[1]

## "O que é o MIT OpenCourseWare?

A ideia atrás do MIT OpenCourseWare (MIT OCW) é tornar os materiais dos cursos do MIT, que são utilizados no ensino de todos os assuntos das licenciaturas e das pós-graduações, disponíveis na rede, gratuitamente, para qualquer utilizador em qualquer parte do mundo. MIT OCW alterará radicalmente o tipo de educação apoiada na tecnologia que é feita no MIT, e servirá como modelo para a disseminação universitária do conhecimento nesta era da Internet. Este projecto... conduzirá a profundas mudanças no modo como as instituições de ensino superior utilizam a rede como veículo para a educação.

## Que materiais estarão disponíveis no OpenCourseWare?

MIT OCW disponibilizará os materiais centrais usados nas aulas do MIT. Dependendo da cadeira específica ou do estilo em que é conduzida, isto poderá significar notas dos professores, descrições dos cursos, bibliografias, propostas de trabalho, etc. Conteúdos mais sofisticados serão encorajados.

## Em que formato serão disponibilizados os materiais na rede?

O site do MITOCW terá um *design* coerente mas suficientemente flexível para acomodar tipos diferentes de cursos, conferências, seminários, etc.

## Em que difere o OCW de outros tipos de ensino baseados na rede, incluindo o ensino à distância?

Muitos professores do MIT e de outras universidades já usam amplamente a rede para disponibilizar os materiais dos cursos aos seus alunos. Algumas instituições de ensino superior estão a seguir a norma de ter um website para cada cadeira, mas, em larga medida, estes websites são projectados apenas para dar acesso aos estudantes dessas instituições.

MIT OCW é um empreendimento sem precedentes de uma amplitude muito maior, dado que o objectivo é disponibilizar os materiais aberta e gratuitamente a todos. Nada nesta escala foi tentado até agora.

MIT OCW não é uma iniciativa de ensino à distância. O ensino à distância envolve a interacção activa entre professores e estudantes, com o objectivo de obter um certo tipo de créditos. De forma crescente, o ensino à distância está também limitado aos que querem e podem pagar os materiais ou os cursos.

MIT OCW não se destina a substituir certificados de ensino superior. Em vez disso, o objectivo é disponibilizar os conteúdos que podem apoiar uma educação.

### Qual é o prazo previsto para este projecto?

Se conseguirmos obter fundos[2], começaremos um programa piloto no Outono de 2001, com o objectivo de colocarmos 500 cursos na *World Wide Web* nos próximos dois anos e meio. Na próxima década, o projecto espera disponibilizar 2000 cursos do currículo total do MIT – em arquitectura e planeamento, engenharia, humanidades, arte, ciências sociais, gestão e ciência."

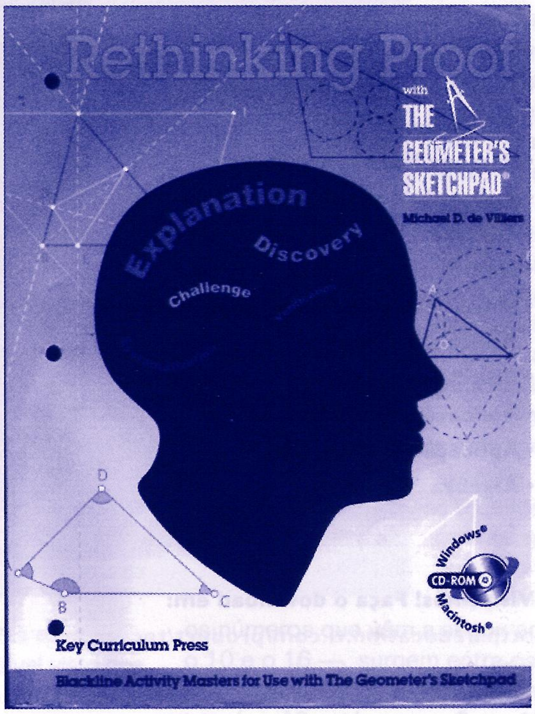
1. Traduzimos parte de uma folha de informação do projecto MIT OCW incluída no site do MIT, http://www.mit.edu.

2. Em 18 de Junho duas fundações anunciaram um financiamento de dois mil milhões de dólares para o projecto piloto.

---

*Um livro indispensável de Michael D. de Villiers*

# Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad




Foi publicado pela Key Curriculum Press em 1999 este livro extremamente interessante e útil, que aborda de uma maneira muito esclarecedora as questões ligadas com a demonstração na matemática e no ensino da Matemática.

Para dar uma ideia do conteúdo do livro, nada melhor do que traduzir parte da Introdução.

> Duas ideias importantes [...] são, em primeiro lugar, que as demonstrações são uma parte indispensável do conhecimento matemático e, em segundo lugar, que o seu valor vai muito para além da mera verificação de resultados. A primeira ideia foi, obviamente, um factor principal que motivou este livro, em particular devido ao possível mal-entendido de que a existência de novas e poderosas ferramentas computacionais como o *Sketchpad* tornam a demonstração obsoleta. Embora tais ferramentas nos habilitem a adquirir convicção através da visualização e das medições empíricas, as demonstrações são tão importantes agora como no passado. Como referido na segunda ideia acima, as demonstrações são extremamente valiosas porque podem fornecer uma percepção mais clara da situação, conduzir a novas descobertas ou ajudar na sistematização do conhecimento matemático. Estes múltiplos papéis da demonstração são as principais ideias em torno das quais foi organizado este livro. Em muitos aspectos, este livro representa uma abordagem radicalmente diferente das tradicionais, que se centravam quase exclusivamente na função de verificação da demonstração. Em lugar disso, a demonstração é introduzida no capítulo 1 como um processo de explicação de resultados já verificados experimentalmente no Sketchpad. Nos capítulos seguintes, é dado destaque às funções de descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização da demonstração. Estas funções da demonstração são discutidas mais detalhadamente na secção do livro intitulada *O papel e as funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad.*

Pode ler nesta revista— na secção *Para este número seleccionámos* —a tradução do texto a que se refere o autor na citação precedente.

O livro contém, no estilo habitual das edições da Key Curriculum Press, numerosas propostas de actividades própria para utilização do programa *Sketchpad* (ou qualquer outro programa de geometria dinâmica).

Poderá encontrar outros textos deste autor, bem como propostas de actividades, investigações, etc. com o *Sketchpad* na *homepage* de Michael de Villiers:

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html

# Sequências que olham para si próprias

*Eurico Nogueira*

A matemática encontra-se cheia de sequências numéricas: a dos inteiros, dos números pares, dos primos... Para muitas se se pretende conhecer o *n*-ésimo termo não há necessidade de saber quais foram os termos que o precederam; mas para outras esse conhecimento é imprescindível visto que a construção da sequência se baseia exactamente nesse facto. Outras há, ainda mais estranhas, que, num certo sentido, "olham" para si próprias. Vamos ver alguns exemplos. Começamos pelo quadro de Wythoff (ver figura), que é construído da seguinte forma:

i) A primeira coluna é a sequência dos números naturais, começando em 0.

ii) A segunda coluna é dada pela característica (parte inteira) de $(n+1)\varphi$ onde $\varphi = (1+\sqrt{5}) / 2$ é o número de ouro.

iii) Cada linha é gerada pela sucessiva adição de cada par de elementos consecutivos dessa mesma linha.

É um quadro muito interessante. Mas para que serve?

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |
| 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | 199 | 322 | 521 |
| 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 | 110 | 178 | 288 | 466 | 754 |
| 3 | 6 | 9 | 15 | 24 | 39 | 63 | 102 | 165 | 267 | 432 | 699 | 1131 |
| 4 | 8 | 12 | 20 | 32 | 52 | 84 | 136 | 220 | 356 | 576 | 932 | 1508 |
| 5 | 9 | 14 | 23 | 37 | 60 | 97 | 157 | 254 | 411 | 665 | 1076 | 1741 |
| 6 | 11 | 17 | 28 | 45 | 73 | 118 | 191 | 309 | 500 | 809 | 1309 | 2118 |
| 7 | 12 | 19 | 31 | 50 | 81 | 131 | 212 | 343 | 555 | 898 | 1453 | 2351 |
| 8 | 14 | 22 | 36 | 58 | 94 | 152 | 246 | 398 | 644 | 1042 | 1686 | 2728 |
| 9 | 16 | 25 | 41 | 66 | 107 | 173 | 280 | 453 | 733 | 1186 | 1919 | ... |
| 10 | 17 | 27 | 44 | 71 | 115 | 186 | 301 | 487 | 788 | 1275 | | ... |
| 11 | 19 | 30 | 49 | 79 | 128 | 207 | 335 | 542 | 877 | | ... | |
| 12 | 21 | 33 | 54 | 87 | 141 | 228 | 369 | 597 | | ... | | |
| 13 | 22 | 35 | 57 | 92 | 149 | 241 | 390 | | ... | | | |
| ... | ... | ... | | ... | | ... | | ... | | | | |

No que se segue vamo-nos restringir apenas aos números situados à direita do traço vertical: podemos reparar que em cada linha o primeiro elemento é sempre o menor elemento que ainda não havia aparecido nas linhas anteriores; todas as linhas e colunas são estritamente crescentes; se um número de uma linha surgir entre dois números consecutivos de alguma outra linha, a alternância entre estas linhas mantém-se indefinidamente (por exemplo, como o 6 da terceira linha surge "entre" o 5 e o 8 da primeira, os números que vêm a seguir ao 6 — o 10 e o 16 — surgem entre os que vêm a seguir ao 8 da primeira linha, isto é, o 10 está entre o 8 e o 13 e o 16 está entre o 13 e o 21)... e qualquer número natural, a partir do 1, aparece neste quadro.

Note-se, como curiosidade, que no topo deste quadro surgem algumas sequências linearmente recorrentes muito conhecidas: a de Fibonacci — 0,1,1,2,3,5,8, ... e a de Lucas — 1,3,4,7,11,18, ....

Baseados neste quadro podemos construir a sequência chamada para-Fibonacci, que nos diz qual o índice da linha deste quadro em que aparece o número *n*. Vejamos: o 1 está na linha 0, o 2 está na linha 0, o 3 está na linha 0, o 4 está na linha 1, o 5 está na linha

Se soubermos olhar para as sequências, vamos descobrir que, muitas vezes, incluem por entre os seus termos uma cópia de si próprias: são as sequências auto-referentes. E esta auto-referência pode ocorrer de múltiplas formas, consoante se trate de uma sequência fractal, *olha e conta* ou *olha e diz*.

0, o 6 está na linha 2, o 7 está na linha 1, o 8 está na linha 0, o 9 está na linha 3, etc. Portanto a sequência começa assim:

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

Repare-se que se eliminarmos nesta sequência a primeira ocorrência de cada número

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

obtém-se:

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

isto é, de novo, a mesma sequência.

Quando isto sucede diz-se que estamos perante uma sequência fractal. Uma outra sequência fractal é dada por:

1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5, 10, 3, 11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8,...

em que o segundo 1 surge uma casa depois do primeiro, o terceiro duas casas depois do segundo e, genericamente, o n-ésimo surge $2^{n-2}$ casas depois do ($n$-1)-ésimo. Quanto aos outros números: o 2 ocupa a primeira casa vaga e o $n$-ésimo dois aparece $3\text{x}2^{n-2}$ casas depois do ($n$-1)-ésimo, o 3 ocupa a primeira casa que ainda está vaga e o n-ésimo três aparece $5\text{x}2^{n-2}$ casas depois do ($n$-1)-ésimo. Genericamente o número k ocupa a primeira casa ainda vaga e o $n$-ésimo k aparece $(2k-1)\text{x}2^{n-2}$ casas depois do ($n$-1)-ésimo. E é claro que se retirarmos a primeira ocorrência de cada número obtemos ainda a mesma sequência.

Um outro exemplo de sequência fractal é dado pela "assinatura de um número", desde que este seja positivo e irracional. Seja R esse elemento e consideremos todos os números da forma $i$+$j$R onde $i,j$ são números naturais. Se os ordenarmos por ordem crescente a sequência dos $i$ é fractal. Consideremos por exemplo o número $\sqrt{2}$ que é, aproximadamente, 1,41421.

Sabe-se que os menores elementos desta sequência são os seguintes:

$$1+\sqrt{2}\approx 2{,}41421 < 2+\sqrt{2}\approx 3{,}41421 < 1+2\sqrt{2}\approx 3{,}82842 < 3+\sqrt{2}\approx 4{,}41421 <$$
$$2+2\sqrt{2}\approx 4{,}82842 < 1+3\sqrt{2}\approx 5{,}24264 < 4+\sqrt{2}\approx 5{,}41421 < 3+2\sqrt{2}\approx 5{,}82842 <$$
$$2+3\sqrt{2}\approx 6{,}24264 < 5+\sqrt{2}\approx 6{,}41421 < 1+4\sqrt{2}\approx 6{,}65685 < 4+2\sqrt{2}\approx 6{,}82842 < \ldots$$

Portanto a "assinatura" de $\sqrt{2}$ corresponde à sequência fractal:

1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 3, 6, 9, 2, 5, 8, ...

Se retirarmos a primeira aparição de cada número obtemos ainda a mesma sequência!

Reparemos agora na sequência "Olha e diz" de John Horton Conway. Suponhamos que o termo inicial da sequência é o número 4. Então os seguintes serão:

14, 1114, 3114, 132114, 1113122114, 311311222114, 13211321322114, 1113122113121113222114, ...

em que cada novo termo é construído "lendo", ou se preferirem, fazendo o "comentário" do anterior. Assim quando se lê o 14 obtemos "um" 1 e "um" 4 que, escrito, fica 1114. Analogamente 3114 é lido: "um" 3, "dois" 1 e "um" 4, donde o 132114. Conway apercebeu-se que, à excepção da sequência formada pelo 22, todas as sequências construídas desta forma possuem elementos cujo número de dígitos cresce a cada passo, aproximadamente, 30%. À medida que aumenta, o comprimento dos elementos destas sequências comporta-se cada vez mais como uma função do tipo $C\lambda^n$, onde C é uma constante e $\lambda$=1,303577269034296... é a chamada constante de Conway. Esta corresponde à maior raiz de um polinómio de grau 71, que se encontra intimamente relacionado com estas sequências.

Conway também notou que todas estas sequências são construídas com base em 92 "tijolos", isto é, elementos básicos. Por analogia com a tabela periódica atribuiu a cada um desses elementos um símbolo químico e um número atómico. Assim o elemento correspondente ao número 3, por ser o menos frequente, recebeu o número "químico" 92 e passou a ser designado como sendo o "urânio"; o elemento 22 — o único estacionário (verifiquem porquê) — corresponde ao "hidrogénio". A classificação destes 92 elementos distintos recebeu o título pomposo de "Teorema cosmológico".

Baseados nesta sequência é possível criar uma sequência *Olha e conta* semelhante à anterior, mas com a diferença de que, em vez de "lermos" o anterior elemento da sequência, "contamos" os seus algarismos a começar pelo mais baixo. Suponhamos que o termo inicial da sequência é, de novo, o número 4. Então os seguintes serão:

4, 14, 1114, 3114, 211314, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, ...

Vejamos, como exemplo, o que se passa com o 211314; como neste número há "três" 1, "um" 2, "um" 3 e "um" 4 o número seguinte é, logicamente, o 31121314. Repare-se agora que a sequência, ao atingir o 21322314, entra num ciclo. O número 21322314 é assim um ponto fixo desta sequência dado que se lê a si próprio!

Para os números de 1 a 50, que não incluem zeros, obtivemos os seguintes resultados:

| Números | Ciclo que atingem |
|---|---|
| d, 1d, 3d (d=1, ..., 4), 21, 23, 41, 43 | 21.32.23.14 |
| d, 1d, 3d (d=5, ..., 9), 4d (d=5, 6) | 31.22.33.14.1d |
| 22 | 22 |
| 2d (d=4, ..., 9) | 31.12.33.1d |
| 42, 44 | 31.12.33.14 |
| 4d (d =7, 8, 9) | (41.22.23.24.15.1d, 31.42.13.24.15.1d) |

Quando se atinge um único número diz-se que se atingiu um número que se descreve a si próprio, ou se preferirem "auto-referente". Nesta tabela foi visto que os números 47, 48 e 49 atingem um ciclo formado por dois elementos. Isso não é uma situação excepcional; bem pelo contrário, é extremamente frequente. Por exemplo, o 2029 após 18 entra no ciclo:

(10.81.22.13.24.15.16.27.18.19,
10.71.42.13.14.15.16.17.28.19).

Haverá ciclos formados por mais que dois elementos? Sim! Por exemplo:

(10.51.22.23.14.25.16,
10.41.42.14.14.25.16,
10.51.22.13.34.15.16).

Prova-se que, por este processo, todos os números vão sempre atingir algum ciclo e que não existem ciclos de comprimento superior a três.

Olhando para estes exemplos poder-se-ia pensar que todos os números que integram um ciclo de auto-referência têm um número par de algarismos. Mas isso é falso! Basta verificar que:

10.111.22.13.14.15.16.17.18.19
e 111.12.13.14.15.16.17.18.19

são auto-referenciais com, respectivamente, 21 e 19 algarismos.

Não é este o único exemplo de sequências que gera o seguinte elemento lendo o anterior. Um outro é dado por:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, ...

O primeiro número indica o número de "uns" presentes na sequência (apenas um) e escrevemos 1; o segundo indica o número de "dois" presentes na sequência (são dois) e escrevemos 2, 2; o terceiro indica o número de "três" presentes na sequência (são dois) e escrevemos 3, 3; o quarto indica o número de "quatros" presentes na sequência (são três) e escrevemos 4, 4, 4, ... E assim por diante!

Ainda outra sequência que se comporta desta forma é a de Lionel Levine:

11, 12, 112, 1123, 1112234,
11112223344567,

111111122222233333444455556
6677788991010111121314,

... ... ...

que se lê, olhando, por exemplo, para o quarto termo da série (o 1123):

Como 3 é o algarismo das unidades o próximo número começa por três 1; como 2 é o algarismo das dezenas o próximo número tem dois 2 a seguir aos uns; como 1 é o algarismo das centenas o próximo número tem um 1 a seguir aos uns e dois; como 1 é o algarismo dos milhares o próximo número tem um 1 a seguir aos uns, dois e três.

Voltemos à auto-referência: uma curiosa sequência auto-referente é a de Aronson.

Originalmente escrita em inglês pode ser traduzida para português da seguinte forma: "e é a primeira, segunda, oitava, décima-terceira, vigésima-sexta, trigésima-segunda, trigésima-quinta, quadragésima-segunda, quadragésima-oitava, ..., letra desta frase." Isto é, ao lermos o início da frase "e é a..." apercebemo-nos de que a letra e é a primeira e a segunda letra da frase, o que nos permite continuá-la e escrever "e é a primeira, segunda, ...". Nas palavras "primeira" e "segunda" encontramos outros "e" os quais correspondem à oitava e à décima-terceira letras da frase; isto permite-nos continuar a frase: "e é a primeira, segunda, oitava, décima-terceira, ..." E o processo continua, em princípio, indefinidamente dado que, mais para a frente, surgem palavras como "centésima", "milésima", "milionésima", etc., que incluem a letra "e" !

A sequência pretendida é dada por 1, 2, 8, 13, 26, 32, 35, 42, 48, ...

Relacionado com este assunto encontramos a sequência de Kolakoski que começa assim:

1221121221221121122121121221121121221221121...

e que tem a particularidade de "ler" o seu próprio "comprimento". Vejamos o que isto quer dizer: a sua primeira subsequência (formada por uns) tem 1 elemento, a segunda subsequência (formada só por dois) tem 2 elementos, a terceira subsequência (formada por uns) tem 2 elementos, a quarta subsequência (formada por dois) tem 1 elemento, a quinta subsequência (formada por uns) tem 1 elemento, etc. E esta sequência de comprimentos 12211... está a reproduzir a sequência de Kolakoski!

E para acabar, desafio os leitores a resolver os seguintes problemas de auto-referência:

1) Qual é o número cujo primeiro algarismo indica o número de zeros presentes no número, o segundo algarismo o número de uns presentes no número, etc.?

2) Que números temos de colocar nos espaços em branco para que as afirmações deste cartão sejam verdadeiras?

Linha 1. O algarismo 0 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 2. O algarismo 1 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 3. O algarismo 2 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 4. O algarismo 3 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 5. O algarismo 4 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 6. O algarismo 5 surge ___ vezes neste cartão.

(in *Público*, 19-IX-1999, José Paulo Viana).

Nota

[1] Esta designação foi atribuída por analogia com as imagens fractais, as quais têm a particularidade de, a vários níveis de *profundidade*, repetir infinitas vezes sempre o mesmo padrão.


Bibliografia

*Internet:*

*Hot sequences* — http:/www.research.att.com~njas/sequences/shot.html

*Puzzle sequences* — http:/www.research.att.com/~njas/sequences/Spuzzle.html

*Interspersions and dispersions* —http://www.cedar.evansville.edu/~ck6/integer/intersp.html

*Fractal sequences* — http://www.cedar.evansville.edu/~ck6/integer/fractals.html

Livros:

CONWAY, John e GUY, Richard, *O Livro dos Números*, Editora Gradiva, 1999.

WEISSTEIN, *Eric CRC Encyclopedia*, 1999.


Soluções:

1) É o número 6210001000.

2) Há duas soluções que são dadas por:

Linha 1. O algarismo 0 surge 1 vezes neste cartão.
Lª 2. O algarismo 1 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 3. O algarismo 2 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 4. O algarismo 3 surge 4 vezes neste cartão.
Lª 5. O algarismo 4 surge 4 vezes neste cartão.
Lª 6. O algarismo 5 surge 2 vezes neste cartão.

Linha 1. O algarismo 0 surge 1 vezes neste cartão.
Lª 2. O algarismo 1 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 3. O algarismo 2 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 4. O algarismo 3 surge 5 vezes neste cartão.
Lª 5. O algarismo 4 surge 2 vezes neste cartão.
Lª 6. O algarismo 5 surge 3 vezes neste cartão.


Eurico Nogueira
Universidade Nova de Lisboa

# A Matemática é de todos

## materiais para trabalhar com alunos de todas as idades

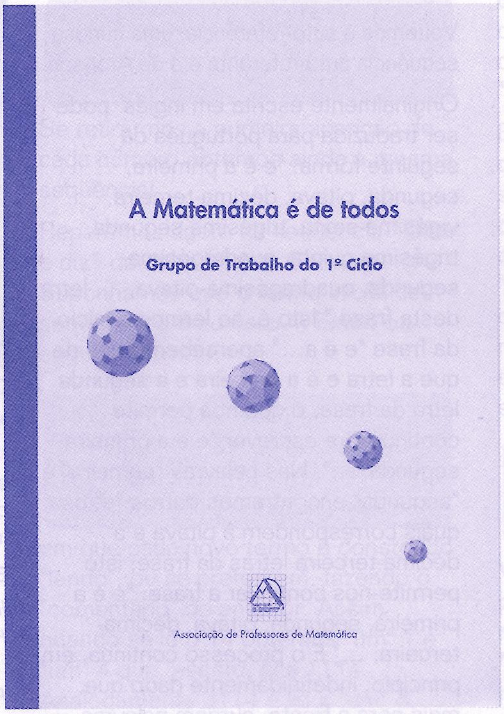
A pasta de materiais *A Matemática é de todos*, edição da APM, resultou do trabalho do GT do 1° ciclo para a preparação da exposição itinerante com o mesmo nome que este grupo concebeu e realizou.

Embora esta exposição tenha sido construída com vista a ser explorada por alunos do 1° ciclo, as actividades propostas são também interessantes para alunos do 2° e 3° ciclos.

Esta pasta inclui uma brochura e trinta e duas fichas de actividades. Estas fichas são coloridas e estão organizadas em dois níveis: azul, mais simples; laranja, mais difícil.

As fichas são exactamente iguais às que acompanham os dezassete painéis da exposição:

- Descobrir com Espelhos
- A Magia dos Caleidoscópios
- Dominós, combinar, pensar e jogar
- Os dados têm muita pinta
- Ver, jogar e aprender com fósforos
- Ver, manipular e aprender com o Tangram
- Um truque matemático: adivinhar idades e números
- Maneiras especiais de apresentar objectos e não só
- Maneiras especiais de organizar objectos
- Contar depressa e bem
- Poliedros, poliedros e mais poliedros: experimenta
- Construir poliedros famosos
- Há poliedros famosos por todo o lado
- Muitos poliedros só com triângulos
- Não há só pirâmides no Egipto
- Caixas, caixinhas e caixotes
- Pavimentações: maneiras especiais de cobrir o plano




A brochura apresenta alguns comentários sobre as fichas, notas sobre a exploração ou sobre o material utilizado, como ilustra o breve excerto seguinte:

> Um caleidoscópio é construído com espelhos que criam a ilusão de que os objectos se repetem muitas vezes. A beleza dada pelo caleidoscópio consiste no aproveitamento do efeito óptico criado por espelhos que formam um ângulo determinado. Há caleidoscópios de dois espelhos e caleidoscópios de três espelhos. Os de dois criam um efeito de rosácea, os de três criam o efeito de repetição infinita.
>
> A origem da palavra caleidoscópio é grega: *Kalos* quer dizer belo, *eidos* quer dizer figura. Este instrumento foi inventado por Brewster de Edimburgo em 1814.

*As tarefas propostas nas fichas de actividades são muito diversificadas e estão associadas à utilização de material também muito diverso: espelhos, caleidoscópios, dominós, dados, fósforos, Tangram,* Polydron, *polígonos para pavimentar.*

Como é natural, todo este material não está incluído na pasta.

De uma maneira geral é material muito acessível e que já existe em muitas escolas. Os polígonos para pavimentar são também edição da APM: são nove placas diferentes com polígonos regulares com 3,5 cm de lado, de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 lados. Os polígonos de 3 e 11 vão na mesma placa.

Estas placas podem ser adquiridas à unidade, o conjunto completo ou associadas com esta pasta.

O Grupo de Trabalho das Publicações

| Designação | Referência | Preço sócio | Preço não sócio |
|---|---|---|---|
| Pasta *A Matemática é de todos* | PM 01069 | 2 100$00 | 2 415$00 |
| Placa de polígonos (3 e 11; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12) | PM 08016 | 1 100$00 | 1 265$00 |
| Conjunto de 9 placas | PM 08017 | 8 000$00 | 8 120$00 |
| Conjunto de 9 Placas e Pasta *A Matemática é de todos* | PM 08020 | 10 100$00 | 11 615$00 |

# Secundário e Superior: um divórcio inevitável?

*Maria José Costa*

Impõe-se com urgência um entendimento entre o Secundário e o Superior. Como vamos inverter o rumo das coisas? Da participação recente em debates relacionados com o ensino da Matemática fica-nos a certeza de que no Ensino Superior continua a grassar um desconhecimento profundo sobre as inovações curriculares no Ensino Secundário.

E o Superior, Senhor,
Por que nos dá tanta dor?!...
Por que nos olha assim?!...

Nos últimos anos, muitas foram as alterações introduzidas no ensino da Matemática do Ensino Secundário. Ultrapassada a fase bourbakista, e ao longo de diferentes reformas, a disciplina de Matemática no Ensino Secundário sofreu alterações a nível dos conteúdos, da metodologia e dos auxiliares educativos; algumas destas mudanças, diga-se de passagem, foram exigências das próprias revisões curriculares, mas outras foram apenas revisões na disciplina. Em todas elas a APM esteve presente, divulgando experiências esclarecedoras e proporcionando espaços de discussão ou de aprendizagem compatíveis com essas mesmas alterações. E aí estão os cursos, as publicações, as acções de formação, os debates, os projectos desenvolvidos, enfim! Arrisco mesmo a afirmação: do ponto de vista metodológico, algumas alterações hoje contempladas nos diplomas oficiais partiram de ensaios, estudos, experiências e análises levadas a cabo por sócios da APM, por vezes, desenvolvidas em projectos subsidiados em nome da APM!

Em todos esses momentos, a preocupação da APM foi a renovação das práticas pedagógicas atendendo, também, a resultados de estudos, uns nacionais outros internacionais, que apontavam claramente para um tipo de ensino activo, centrado no aluno, ou seja, um ensino que permitisse ao aluno a aprendizagem de conceitos baseada na realização de actividades. Esta metodologia, talvez considerada nova por muitos, era afinal enaltecida por Albert Einstein em 1936:

> O método educacional mais importante é aquele em que o aluno é transportado para uma actividade real.

A preocupação de aproximar da Matemática os alunos do Ensino Secundário tem sido um ponto de honra de alguns (muitos!) docentes mas é bastante mal compreendida por outros. É reconhecido que o ensino da Matemática não tem de seguir a metodologia da Ciência de igual nome. Conscientes de que a capacidade de abstracção, bem como outras capacidades, se desenvolve ao longo da vida, e que a própria linguagem matemática, tal como a linguagem materna, vai adquirindo rigor ao longo dos anos, reconhecemos que aprendizagem matemática poderá ser mais significativa quando partindo do concreto para o abstracto. Assume-se, assim, que o ensino da Matemática não seja obrigatoriamente hipotético-dedutivo, a comunicação não seja em linguagem simbólica e os raciocínios não tenham de ser todos abstractos. Pelo contrário: admite-se que o ensino da Matemática seja menos formal, que a aprendizagem parta da realização de experiências, que se faça apelo a situações já vividas pelo aluno dentro e fora da disciplina de Matemática. E por que não tirar partido das tecnologias e levá-las a todos os alunos, se elas são preciosos auxiliares, seja na simulação de situações reais seja na confirmação ou na infirmação de conjecturas?

A entrega dos alunos a tarefas de índole experimental e o modo como agarram os desafios que essas tarefas constituem mostram que os alunos do Ensino Secundário não estão de costas viradas para a Matemática. Estudos feitos sobre o modo como se desenrola a aprendizagem matemática mostram que os alunos recorrem frequentemente a uma linguagem simples, natural, para exprimir os conteúdos matemáticos adquiridos; e, quando confrontados mais insistentemente com as respostas dadas, estes mesmos alunos se agarram a experiências efectuadas ou situações observadas para melhor exprimir aquilo em que estão a pensar, então faz todo o sentido aceitar uma linguagem matemática menos formal e defender que o ensino da disciplina de Matemática passe por uma ambiente experimental. Nada disto significa que se defenda um ensino com falta de rigor ou que não se pretenda desenvolver a capacidade de abstracção: significa, isso sim, praticar uma educação matemática que facilite a aproximação dos alunos da matemática, aproximação essa que o vai permitir atingir as categorias seguintes.

Mas qual é a imagem do ensino da Matemática no ensino Secundário que circula na sociedade, em particular em alguns sectores?

Centremo-nos no Ensino Superior: que imagem têm os professores deste nível de ensino do trabalho desenvolvido no Ensino Secundário? Acreditamos que alguns terão um conhecimento mais ou menos actualizado do que compete ao Ensino Secundário e do modo como se têm operado as mudanças na última década. Contudo, da participação recente em debates relacionados com o ensino da disciplina de Matemática, um focado no insucesso outro nos programas do Ensino Secundário, nos quais ambos os níveis de ensino estiveram representados, fica-nos a certeza que no Ensino Superior continua a grassar um desconhecimento profundo sobre o modo como as inovações curriculares do Ensino Secundário têm sido ou podem ser implementadas. Um ensino da Matemática dito experimental, que recorra à tecnologia (calculadora ou computador), que use o método da descoberta, que implique laboratórios (de matemática, já se vê), é rejeitado.

Os programas, enquanto diplomas oficiais, também não foram bem aceites. Os conteúdos programáticos, se não reúnem o consenso entre os discentes das escolas do Ensino Secundário, estão muito mais longe disso entre os docentes do Ensino Superior; é notória a insatisfação pelas reduções efectuadas desde a criação do 12° ano até aos dias de hoje.

As recomendações metodológicas e utilização de tecnologia também são criticadas. As palavras são perigosas: métodos activos, actividades experimentais, método da descoberta, são, enfim, expressões que muitos lêem à imagem e semelhança das suas experiências e intenções. Aqui se criam fundamentalmente dois mundos: os dos actores e o dos observadores. Se estas expressões não são de um significado único entre os primeiros, é, provavelmente, entre os segundos que vamos encontrar interpretações mais divergentes do que elas significam e implicam para muitos de nós.

Vejamos que se trata de uma reacção compreensível. Se já são doutores, por certo que deixaram a escola secundária há cerca de 10 anos, o que significa que a frequentaram antes da reforma iniciada no ministério do Doutor Roberto Carneiro, numa época em que a sociedade era menos permissiva do que actualmente, quando lhes estava vedado o uso da tecnologia, com programas formais e centrados nos conteúdos e que raramente eram dados na íntegra; os alunos não eram submetidos a exame, a menos que pretendessem frequentar o ensino superior. Estas condições estão hoje completamente alteradas.

Actualmente, e enquanto docentes de cadeiras de Matemática ou de cadeiras que exigem conhecimentos de Matemática, deparam-se com jovens recém saídos do ensino secundário, nem sempre portadores da bagagem científica que gostariam que eles exibissem. Eventualmente, ouvem referências, comentários, desabafos em ambiente social ou familiar, embora uns com cargas mais significativas do que outros, de acontecimentos ocorridos nas salas de aula da disciplina de Matemática.

Corremos o risco de que a imagem que um docente do Ensino Superior tem do Ensino Secundário seja a amálgama destas experiências, umas mais esfumadas pelas brumas da memória, outras mais presentes pela correcção de exames ou pelo teste da Matemática que o filho trouxe para casa.

As divergências entre as leituras e actuações dos dois níveis de ensino são, por vezes, referidas como se de um divórcio se tratasse.

Não creio que o divórcio entre o Ensino Secundário e o Ensino Superior seja inevitável e impõe-se com alguma urgência um entendimento entre estes os dois níveis de ensino. Como vamos inverter o rumo das coisas?

Aberturas à população, semanas abertas nas escolas, participação em oficinas de Ciência, de nada valem. Papéis, por muito bem escritos que estejam, são óptimos divulgadores estáticos de informações mesmo quando dizem respeito às actividades mais dinâmicas; por mais frios e secos que pareçam, nunca evitam uma leitura enformada pelos pressupostos dos leitores. Discussões, por mais envolventes que sejam de toda a assistência, mas sem espaço para o diálogo ou vontade para se ouvirem, não favorecem a interiorização da informação divulgada.

Como vamos mostrar que a escola hoje poderá ser diferente daquela que qualquer cidadão com mais de 27 anos frequentou? Como vamos convencer alguém que a escola hoje, tal como em qualquer outra época, poderá não coincidir com um testemunho isolado? Não será a Educação Matemática uma das vertentes da educação a que todos os portugueses têm direito pelo 3° parágrafo do artigo 73° da Constituição da República Portuguesa? Como vamos, então, convencer que a Educação Matemática é um dos direitos constitucionais que assiste aos nossos jovens adolescentes?

Com a revisão curricular anunciada, vêm mais mudanças para o ensino da Matemática. Mas, salvo alguma alteração de última hora, não será ainda esta a revisão que porá em causa a Educação Matemática, muito pelo contrário: tudo aponta para que esta continue a ser o motor dos programas da disciplina de Matemática do Ensino Secundário. Por isso, essa facção do direito constitucional citado estará consignada. Caberá a todos nós, professores de Matemática, mostrar a imprescindibilidade de tal Educação, tornando visíveis os seus efeitos.

Entre tantos desafios lançados pela APM, porque não mais este?

Nota

A paródia ao poema "Balada da neve", de Augusto Gil, pretende ser uma homenagem a um poeta português tão sensível a problemas sociais como este poema expressa. De resto, poderá ser um pretexto a para uma actividade de interdisciplinaridade com a disciplina de Português ou de Dimensão Social e Pessoal.

Mª José Costa
Esc. Sec. Augusto Gomes

*Michael D. de Villiers é professor associado de educação matemática na Universidade de Durban-Westville, na África do Sul. Os temas principais do seu trabalho são a geometria, modelação e aplicações, e história e filosofia da matemática. Tem escrito numerosos livros e artigos, em particular sobre geometria dinâmica. Do seu último livro, "Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad", editado em 1999 pela Key Curriculum Press, extraímos para este número o texto intitulado "The Role and Function of Proof with Sketchpad". Trata-se de uma apresentação clara da importância e do carácter indispensável da demonstração no conhecimento matemático, e das várias funções que assume, nomeadamente em presença de programas de geometria dinâmica como o Sketchpad.*

# Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*

*Michael D. de Villiers*

A dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade da demonstração é bem conhecido dos professores do ensino secundário e é identificada em toda a investigação em educação, sem excepção, como um dos maiores problemas no ensino da demonstração. Quem não experimentou já uma sensação de frustração quando confrontado com a pergunta "Porque é que temos que demonstrar isto?". A seguinte conclusão de Gonobolin (1954, p. 61) exemplifica o problema:

> ...os alunos... não... reconhecem a necessidade de demonstração lógica dos teoremas da geometria, especialmente quando estas demonstrações têm visualmente um carácter óbvio ou podem ser feitas empiricamente.

De acordo com Afanasjewa (Freudenthal, 1958, p. 29) o problema dos alunos com a demonstração não deve ser apenas atribuído a um desenvolvimento cognitivo lento (por exemplo, a uma falta de competência no raciocínio lógico) mas também a que os alunos não compreendem a função (significado, objectivo e utilidade) da demonstração. De facto, alguns estudos recentes, que contradizem Piaget, mostram que crianças muito novas são inteiramente capazes de fazer raciocínios lógicos em situações reais e com significado para elas (Wason e Johnson-Laird, 1972; Wallington, 1974; Hewson, 1977; Donaldson, 1979). Além disso, tentativas de investigadores para ensinar lógica a alunos não conduziram com frequência a diferenças estatisticamente significativas no que diz respeito à capacidade de demonstrar ou à atitude perante a demonstração (Deer, 1974; Walter, 1972; Mueller, 1975). Mais do que tudo o resto, parece que o principal problema em jogo é a motivação que as várias funções da demonstração assumem para os alunos.

A questão que se coloca é, contudo, "Que funções tem a demonstração na própria matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?". O objectivo deste texto é descrever algumas funções importantes da demonstração e discutir brevemente algumas implicações para o ensino da demonstração.

## As funções da demonstração em matemática

Tradicionalmente, a função da demonstração foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correcção das afirmações matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de cépticos, uma ideia que dominou unilateralmente a prática de ensino e a maior parte das discussões ou da investigação relativa ao ensino da demonstração. Por exemplo, de acordo com Kline (1944, p. 318):

> Uma demonstração apenas tem significado quando responde às **dúvidas** dos alunos, quando prova o que não é óbvio. (*bold* acrescentado) Kline (1973, p.151)

> A necessidade, a funcionalidade, da demonstração pode apenas emergir em situações em que os alunos têm **incertezas** quanto à verdade das proposições matemáticas. (*bold* acrescentado) Alibert (1988, p.31)

Hanna (1989) e Volmink (1990) também parecem definir demonstração em termos da sua função de verificação, tendo em conta o seguinte:

> Uma demonstração é um argumento necessário para **validar** uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente. (*bold* acrescentado) Hanna (1989, p. 20).

> Porque é que nos preocupamos em demonstrar teoremas? Defendo aqui que a resposta é: para que possamos **convencer** pessoas (incluindo nós próprios) ... podemos encarar **a demonstração como um argumento suficiente para convencer um céptico razoável**. (*bold* acrescentado) Volmink (1990:p. 8, p. 10).

Embora muitos autores (por exemplo, Van Dormolen (1977), Van Hiele (1973) e Freudenthal (1973) e outros) tenham argumentado que a necessidade do rigor dedutivo pode sofrer mudanças e tornar-se mais sofisticada com a passagem do tempo, isto também é defendido a partir do ponto de vista que a função principal da demonstração é a de verificação. Por exemplo:

> ... para haver progresso no rigor, o primeiro passo é **duvidar** do rigor em que se acredita naquele momento. Sem esta **dúvida** nada haveria que levasse outras pessoas a prescrever para si próprias novos critérios de rigor. (*bold* acrescentado) Freudenthal (1973, p.151).

Muitos autores têm também proposto estados específicos no desenvolvimento do rigor. Por exemplo, Tall (1989, p. 30) propõe três estados na construção de um argumento convincente, nomeadamente o convencer-se a si próprio, o convencer um amigo e o convencer um inimigo. Embora sejam distinções extremamente úteis, apenas consideram a função de verificação da demonstração.

Contudo, como foi sublinhado por Bell (1976, p. 24), este ponto de vista da verificação/convencimento como a principal função da demonstração "passa ao lado da consideração da natureza real da demonstração", pois a convicção em matemática é muitas vezes "inteiramente obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica". Portanto a prática real da investigação moderna em matemática requere uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração. Embora eu não o defenda nem como completo nem como único, ao longo da minha investigação nos últimos anos tenho considerado útil o seguinte modelo relativo à função da demonstração. É uma ampliação ligeira da distinção original de Bell (1976) entre as funções de verificação, iluminação e sistematização. O modelo é apresentado em seguida (sem que a ordem signifique ordem de importância) e discutido mais à frente:

- *verificação* (dizendo respeito à verdade da afirmação)
- *explicação* (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira)
- *sistematização* (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)
- *descoberta* (descoberta ou invenção de novos resultados)
- *comunicação* (a transmissão do conhecimento matemático)
- desafio intelectual (a *realização pessoal/gratificação* resultantes da construção de uma demonstração).

## A demonstração como processo de verificação/convencimento

Com raras excepções, os professores de Matemática parecem acreditar que apenas a demonstração fornece a certeza para o matemático e que é a única autoridade para estabelecimento da validade de uma conjectura. Contudo, a demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração. (Por que esquisita e obscura razão gastaríamos por vezes meses a tentar provar certas conjecturas, se não estivéssemos já convencidos da sua verdade?)

O bem conhecido George Polya (1954, p. 83-84) escreve:

> ...tendo verificado o teorema em muitos casos particulares, obtivemos uma forte evidência indutiva a seu respeito. A fase indutiva venceu a nossa suspeita inicial e deu-nos uma forte **confiança** no teorema. Sem tal **confiança** dificilmente teríamos encontrado coragem para empreender a sua demonstração que não parece de modo algum uma tarefa rotineira. Quanto se está convencido que o teorema é **verdadeiro**, começamos a **demonstrá-lo**. (*bold* acrescentado).

Em situações como a anterior, em que a convicção anterior à demonstração fornece a motivação para a demonstração, a função da demonstração deve claramente ser qualquer coisa diferente da verificação/convencimento.

Na investigação matemática real, a convicção pessoal depende habitualmente de uma combinação de intuição, verificação quase-empírica e da existência de uma demonstração lógica (mas não necessariamente rigorosa). De facto, um alto grau de convicção pode ser algumas vezes atingido mesmo na ausência de uma demonstração. Por exemplo, na sua discussão da "evidência heurística" que suporta o teorema dos primos gémeos, ainda por demonstrar, e da famosa Hipótese de Riemann, Davis e Hersh (1983, p. 369) concluem que esta evidência "é tão forte que resulta em convicção mesmo na ausência de uma demonstração rigorosa".

Que a convicção para os matemáticos não é alcançada somente pela demonstração é também claramente indicada pela observação feita por um ex-editor das *Mathematical Reviews*, ao referir que aproximadamente metade das demonstrações aí publicadas estavam incompletas e/ou continham erros, embora os teoremas que pretendiam demonstrar fossem essencialmente verdadeiros (Hanna, 1983, p. 71). Os investigadores matemáticos, por exemplo, raramente examinam em detalhe as demonstrações publicadas, mas confiam em vez disso na autoridade reconhecida do autor, na verificação em certos casos especiais e numa avaliação informal, onde procuram ver se "os métodos e os resultados se ajustam, parecem aceitáveis..." (Davis e Hersh, 1986, p. 67). Também, de acordo com Hanna (1989), a razoabilidade dos resultados é considerada muitas vezes em primeiro lugar relativamente à existência de uma prova completamente rigorosa.

Normalmente, os matemáticos, quando estão a investigar a validade de uma nova conjectura, não observam apenas as demonstrações, mas tentam ao mesmo tempo encontrar contra-exemplos por meio de testes quase-empíricos, dado que tais testes podem revelar contradições encobertas, erros ou hipóteses não assumidas. Deste modo podem ser criados contra-exemplos, obrigando os matemáticos a reconstruir demonstrações anteriores ou a construir novas demonstrações.

A falta de êxito na rejeição empírica de conjecturas desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva. Tudo leva a crer que existe uma dimensão lógica, a par de uma psicológica, na obtenção da certeza. Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva.

Sem dúvida, dadas as limitações próprias bem conhecidas da intuição e dos métodos quase-empíricos, a argumentação precedente não significa de modo algum ignorar a importância da demonstração como um meio indispensável de verificação, especialmente no caso de resultados duvidosos ou surpreendentes, por não serem intuitivos. Pretende sim colocar a demonstração numa perspectiva mais apropriada em oposição a uma idealização distorcida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convicção.

## A demonstração como processo de explicação

Embora por meio de verificações quase-empíricas (por exemplo, construções e medições rigorosas, substituições numéricas, e outras) seja possível atingir de facto um alto nível de confiança na validade de uma conjectura, estes processos não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira. Apenas confirmam que é verdadeira, e embora a consideração de mais e mais exemplos possa aumentar ainda mais a nossa confiança, não obtemos uma sensação psicológica satisfatória de esclarecimento – a compreensão ou percepção de como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos. Por exemplo, apesar da convincente evidência heurística em apoio da já mencionada Hipótese de Riemann, ainda existe necessidade premente de uma explicação, como escrevem Davis e Hersh (1982, p. 368):

> É interessante perguntar, num contexto como este, porque sentimos ainda a necessidade de uma demonstração... Parece claro que desejamos uma demonstração porque... se algo é verdadeiro e não conseguimos demonstrá-lo, este é um sinal de falta de compreensão da nossa parte. Por outras palavras, acreditamos que uma demonstração seria um modo de compreendermos porque razão a conjectura de Riemann é verdadeira, o que é algo mais do que sabermos através de um raciocínio heurístico convincente que é verdadeira.

Gale (1990, p. 4) também salienta, no texto seguinte, em referência às descobertas experimentais de Feigenbaum em geometria fractal, que a função das posteriores demonstrações foi a de explicação e não, de modo algum, de verificação:

> Lanford e outros matemáticos não estavam a tentar validar os resultados de Feigenbaum mais do que, digamos, Newton estava a tentar **validar** as descobertas de Kepler sobre as órbitas dos planetas. Em ambos os casos a validade dos resultados nunca esteve em questão. O que faltava era uma **explicação**. Porque eram elípticas as órbitas? Porque satisfazem certas relações particulares?... há um mundo de diferença entre validação e explicação. (*bold* acrescentado)

Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação (ou outras funções da demonstração descritas a seguir).

De facto, para muitos matemáticos o aspecto de clarificação/explicação de uma demonstração tem mais importância que o de verificação. Por exemplo, o bem conhecido Paul Halmos afirmou há algum tempo que embora a demonstração assistida por computador do teorema das quatro cores, por Appel e Haken, o convencesse que era verdadeiro, pessoalmente preferiria uma demonstração que também fornecesse uma "compreensão" (Albers, 1982, pp. 239-240). Manin (1981, p. 107) e Bell (1976, p. 24) também acreditam que a explicação é um bom critério para definir o que é uma "boa" demonstração, afirmando respectivamente que é "aquela que nos torna mais inteligentes" e aquela que esperamos "transmita uma percepção da razão porque a proposição é verdadeira".

## A demonstração como processo de descoberta

Diz-se frequentemente que os teoremas são a maior parte das vezes descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações. Contudo, existem numerosos exemplos, na história da matemática, de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (como por exemplo as geometrias não-euclidianas) pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição e/ou pela utilização de métodos quase-empíricos. Mesmo no contexto de processos dedutivos formais como a axiomatização ou a criação de novas definições, a demonstração pode frequentemente levar a novos resultados. Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (comparar Schoenfeld, 1986 e De Jager, 1990).

Consideremos o seguinte exemplo. Suponhamos que construímos um papagaio dinâmico com o *Sketchpad*

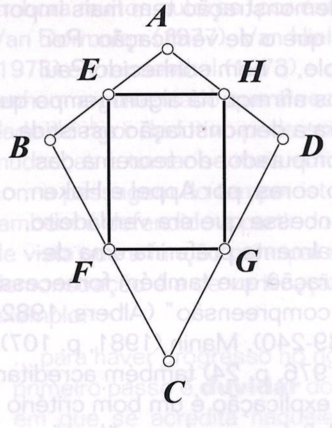



Figura 1

e unimos os pontos médios dos lados formando o quadrilátero *EFGH*, como se mostra na figura 1.

Visualmente, *EFGH* parece um rectângulo, o que pode ser confirmado facilmente medindo os ângulos. Arrastemos um dos vértices do papagaio *ABCD* para uma nova posição.

Podemos verificar que *EFGH* se mantém rectângulo. Podemos arrastar o vértice *A* na direcção de *C* até que *ABCD* se torne côncavo e verificar assim que *EFGH* é ainda um rectângulo nestas condições. Embora este tipo de variação contínua nos possa convencer facilmente, não fornece uma explicação satisfatória da razão pela qual o quadrilátero definido pelos pontos médios dos lados de um papagaio é um rectângulo. Contudo, se fizermos uma demonstração dedutiva desta conjectura, notamos imediatamente que a perpendicularidade das diagonais é a característica essencial de que depende a conjectura, e que a propriedade da igualdade dos lados adjacentes não é requerida. (A demonstração é deixada ao cuidado do leitor).

Por outras palavras, podemos imediatamente generalizar o resultado para qualquer quadrilátero com diagonais perpendiculares (um *quadrilátero perpendicular*), como mostra a figura 2). Isto contrasta com o facto do resultado geral não ser de forma alguma sugerido pela verificação puramente empírica da hipótese original. Mesmo uma investigação empírica sistemática dos vários tipos de quadriláteros não ajudaria provavelmente a descobrir o caso geral, dado que o mais normal seria que restringíssemos a nossa investigação aos quadriláteros mais familiares, como os paralelogramos, os rectângulos, os losangos, os quadrados e os trapézios isósceles.

O teorema de Ceva (1678) foi descoberto provavelmente num processo dedutivo semelhante a partir da generalização da demonstração da concorrência das medianas de um triângulo, e não através de construções e medições concretas (ver De Villiers, 1988). Contudo, novos resultados podem também ser descobertos *a priori*, simplesmente analisando dedutivamente as propriedades de objectos dados. Por exemplo, sem recorrer a qualquer construção e medição concreta, é possível deduzir rapidamente que $AB + CD = BC + DA$ para o quadrilátero *ABCD* circunscrito em torno de uma circunferência (figura 3), usando o teorema da igualdade das tangentes tiradas a uma circunferência a partir de um ponto exterior ($AS = AP$, $DS = DR$, etc.).

## A demonstração como processo de sistematização

A demonstração revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que nenhum número de testes quase-empíricos ou a intuição pura seriam capazes de realizar. A demonstração é assim uma ferramenta indispensável para transformar num

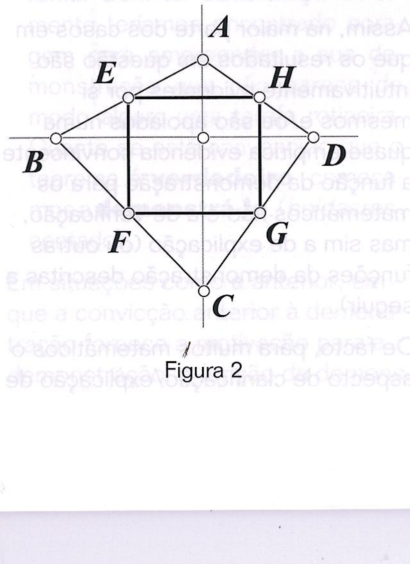



Figura 2

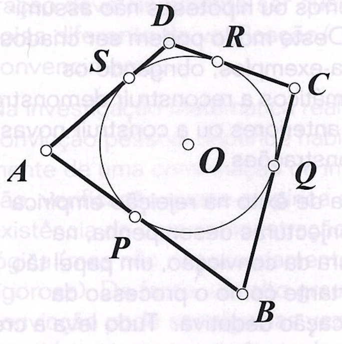



Figura 3

sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, um conjunto de resultados conhecidos. Algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva de resultados conhecidos são assim apresentadas por De Villiers (1986):

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas.
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação económica dos resultados.
- Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas.
- Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições.
- Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais económicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Embora alguns elementos de verificação estejam obviamente presentes aqui, o principal objectivo não é claramente "verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras" mas organizar afirmações isoladas e não relacionadas logicamente, que já se sabem ser verdadeiras, *num todo unificado e coerente*. Devido à perspectiva global resultante de tal simplificação e unificação, também está presente certamente um claro elemento de explicação quando a demonstração é utilizada como processo de sistematização. Neste caso, contudo, o ponto de incidência dirige-se a uma explicação global e não local.

Assim, é realmente falso dizer na escola, quando se demonstram afirmações evidentes por si próprias, tais como a igualdade dos ângulos verticalmente opostos, que estamos a "adquirir a certeza". Os matemáticos estão muito menos preocupados com a verdade desses teoremas do que com a sua sistematização no seio de um sistema dedutivo.

## A demonstração como meio de comunicação

Alguns autores têm salientado a importância da função comunicativa da demonstração, como por exemplo:

> ...parece que a demonstração é uma forma de **discurso**, um meio de comunicação entre pessoas fazendo matemática. (*bold* acrescentado) Volmink (1990, p. 8)

> ... reconhecemos que o argumento matemático é dirigido a uma audiência humana, que possui um conhecimento subjacente que lhe permite compreender as intenções do orador ou do autor. Ao declarar que o argumento matemático não é mecânico ou formal, declarámos também implicitamente o que ele é... nomeadamente, uma **interacção humana** baseada em significados partilhados, nem todos de carácter verbal ou dizendo respeito a fórmulas. (*bold* acrescentado) Davis e Hersh (1986, p. 73)

De modo semelhante, Davis (1976) também enunciou que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para debate crítico. De acordo com este ponto de vista, a demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes. A tónica é colocada portanto no processo social de comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade. A demonstração, como forma de interacção social, também envolve portanto uma negociação subjectiva não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável. Por sua vez, a filtragem social de uma demonstração através destas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como por vezes para a sua rejeição devido à descoberta de um contra-exemplo.

## A demonstração como desafio intelectual

Para os matemáticos, a demonstração é um desafio intelectual que acham tão apelativo como outras pessoas podem achar os *puzzles* ou outras ocupações ou projectos criativos. Muitas pessoas têm experiência suficiente, quanto mais não seja nas suas tentativas de resolução de palavras cruzadas ou de *puzzles*, para compreender o que se diz da exuberância com que Pitágoras ou Arquimedes celebraram a descoberta das suas demonstrações. Fazer demonstrações pode também ser comparado com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, e a satisfação que daí resulta. Neste sentido, a demonstração cumpre uma função *gratificante e de realização própria*. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático (ver Davis e Hersh, 1983, p. 369). Parafraseando o comentário famoso de Mallory sobre os seus motivos para subir ao Monte Evereste: *Demonstramos os nossos resultados porque eles estão diante de nós*. Levando esta analogia ainda mais longe: muitas vezes não é a existência da montanha que está em dúvida (a verdade do resultado), mas se (e como) seremos capazes de conquistá-la (demonstrá-la)!

Finalmente, embora as seis anteriores funções da demonstração tenham características que as distinguem, muitas vezes estão todas misturadas em casos específicos. Em alguns casos certas funções predominam sobre outras, enquanto noutros casos certas funções não estão mesmo presentes. Além disso, esta lista de funções não é de forma alguma completa. Por exemplo, poderíamos facilmente juntar uma função estética ou uma de *memorização*, ou ainda de desenvolvimento algorítmico (Renz, 1981 e Van Asch, 1993).

## Ensino da demonstração com o *Sketchpad*

Quando os alunos já investigaram com cuidado uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, com um *software* como o *Sketchpad*, têm pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder à sua verificação. Portanto, a verificação não serve ou serve de pouca motivação para fazer uma demonstração. Contudo, constatei que é relativamente fácil suscitar nova curiosidade ao perguntar porque razão pensam que um resultado específico é verdadeiro; ou seja, desafiá-los a


Figura 4

tentar *explicá-lo*. Os alunos admitem rapidamente que a verificação indutiva apenas confirma o resultado; não dá nenhuma percepção satisfatória, ou compreensão sobre a forma como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos. Por este motivo, aos olhos dos alunos, é perfeitamente compreensível encarar um argumento dedutivo como uma tentativa de explicação, e não de verificação.

Também é aconselhável introduzir cedo a função de descoberta da demonstração e dar atenção aos aspectos relativos à comunicação, negociando e clarificando com os alunos os critérios para a evidência aceitável, a heurística subjacente e a lógica da demonstração. A função de verificação deve ficar reservada apenas para os resultados em relação aos quais os alunos mostrem de modo genuíno ter dúvidas. Embora alguns alunos possam não sentir a demonstração como um desafio intelectual, são capazes de apreciar que assim seja para outros. Além disso, na matemática real, como qualquer pessoa com um pouco de experiência pode testemunhar, a função pura de sistematização apenas se torna presente num estádio avançado da prática da demonstração, pelo que deve ser evitada num curso introdutório sobre a demonstração. Parece fazer sentido iniciar os alunos nas várias funções da demonstração numa sequência como a indicada na figura 4, embora não de uma maneira estritamente linear, mas numa espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas. Os capítulos deste livro estão organizados de acordo com esta sequência, e algumas indicações sobre este modo de proceder são sugeridas na respectiva Introdução.

## Referências


Albers, D. J. 1982. Paul Halmos: Maverick Mathologist. *The Two-year College Mathematics Journal*, 13(4), 234-241.

Albert, D. 1988. Towards new Customs in the Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31-32;43.

Bell, A.W. 1976. A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Davis, P.J. 1976. The nature of proof. In Carss, M. (Ed). *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education*, Boston: Birkhauser.

Davis, P.J. e R. Hersh. 1983. *The Mathematical Experience*. Great Britain: Pelikan Books.

Davis, P.J. e R. Hersh. 1986. *Descartes' Dream*. New York: HBJ Publishers.

Deer, G.W. (1969). The effects of teaching an explicit unit in logic on students' ability to prove theorems in geometry. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. Dissertation Abstracts International. 30, 387-399.

De Jager, C.J. 1990. When should we use pattern? *Pythagoras*, 23, 11-14.

De Villiers, M.D. 1986. *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. RUMEUS Studies in mathematics education No. 2. University of Stellenbosch.

De Villiers, M.D. 1988. What happens if? Why? *Pythagoras*, 18, 45-47.

Donaldson, M. 1979. *Children's Minds*. New York: W. W. Norton.

Fischbein, E. 1982. Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18.

Freudenthal, H. (Ed). 1958. *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen: Wolters.

Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Gale, D. 1990. Proof as explanation. *The Mathematical Intelligencer*, 12(1), 4.

Gonobolin, F.N. 1954. Pupils's Comprehension of Geometric proofs. In Wilson, J.W. (Ed). 1975. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. Vol. XII, Problems of Instruction. Chicago: University of Chicago.

Hanna, G. 1983. *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.

Hanna, G. 1989. More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Hewson, S.N.P. 1977. Inferential problem solving in young children. Unpublished doctoral dissertation: Oxford University.

Human, P.G. 1978. Wiskundige werkwyses in Wiskunde-onderwys. Unpublished doctoral dissertation: University of Stellenbosch.

Kline, M. 1973. *Why Johnny can't add: the failure of the new math*. New York: St. martin's Press.

Krygowska, A.Z. 1971. Treatment of the Axiomatic method in Class. In Servais, W. e Varga, T. *Teaching school mathematics*. Penguin-Unesco, London, 124-150.

Manin, Y.I. 1981. A Digression on Proof. *The Two-year college Mathematics Journal*, 12(2), 104-107.

Mueller, D.J. 1975. Logic and the ability to prove theorems in geometry. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. Dissertation Abstracts International, 36, 851A.

Polya, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Renz, P. 1981. Mathematical Proof: What it is and what it ought to be. *The Two-year College Mathematics Journal*, 12(2), 83-103.

Schoenfeld, A.H. 1986. On Having and Using geometric Knowledge. In Hiebert, J. (Ed). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. 1989. The Nature of Mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, June, 28-32.

Van Asch, A.G. 1993. To prove, why and how? *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 24(2), 301-313.

Van Dormolen, J. 1997. Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

Van Hiele, P.M. 1973. *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.

Volmink, J.D. 1990. The Nature and Role of Proof in Mathematics Education. *Pythagoras*, 23, 7-10.

Wallington, B.A. 1974. Some aspects of the development of reasoning in preschool children. Unpublished doctoral dissertation: University of Edinburgh.

Wason, P.C. e P.N. Johnson-Laird, 1972. *Psychology of reasoning: Structure and Content*. London: Batsford.

Walter, R.L. 1972. The effect of knowledge of logic in proving mathematical theorems in the context of mathematical induction. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University,. Dissertation Abstracts International, 33, 262A.

Wilder, R.L. 1994. The nature of mathematical proof. *American mathematical Monthly*, 51, 309-323.



Michael D. de Villiers
University of Durban-Westville
South Africa
profmd@mweb.co.za
http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html


*Tradução*
Eduardo Veloso

N. T.

Este texto é traduzido e publicado com a autorização do autor. É uma versão revista do artigo "The role and function of proof in mathematics", *Pythagoras*, Nov. 1990, 24, 17-24.

José Paulo Viana



# Sempre 100

O Augusto resolveu construir uma sequência de números naturais. Escreve o primeiro número e, a partir daí, a soma de qualquer número com o dobro do anterior é sempre igual a 100.

Por que número deve começar o Augusto para obter a sequência mais comprida?

*(Respostas até 15 de Setembro)*

## Quem perde, divide o que tem

O problema proposto no nº 61 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Célia, a Edite e o Mário puseram o dinheiro que tinham em cima da mesa e começaram um jogo em que, quem perde, divide o dinheiro que tem em partes iguais pelos outros dois.

Fizeram 6 jogos e no fim a Célia ficou com 11 euros, a Edite com 3 e o Mário sem nada.

Ninguém perdeu dois jogos seguidos.

Quantos euros tinha cada um no início?

Chegaram-nos 15 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Ana Martinho (Guimarães), Armando Fernandes (Aveiro), Augusto Taveira (Faro), Carlos Andrade (Sintra), Conceição Martinho (Castanheira), David Castro (Guimarães), Domingos Rijo (Castelo Branco), Eduarda Santos (Tavira), Fátima Veiga (Castelo Branco), Helga Correia (Lisboa), Mário Roque (Guimarães), Rita Cadima (Leiria), Sandra Oliveira (Barcelos) e Sérgio Peixoto.

Infelizmente, algures no processo de elaboração da revista, desapareceu a linha do enunciado do problema, que dizia "Ninguém perdeu dois jogos seguidos". Mas, felizmente, quase todos os participantes salientaram que, para o problema ter algum interesse, era necessário impor essa condição…

Do enunciado do problema, há três conclusões que se podem tirar e que serão úteis na resolução. A Ana, o Alberto, o Armando e a Rita explicitaram-nas:

1. Há sempre 14 euros em cima da mesa.
2. Em cada momento, quem tem zero perdeu o último jogo.
3. Dos outros dois, quem tem menos perdeu o penúltimo jogo.

"Este é um problema que é aconselhável resolver do fim para o princípio", salienta o Augusto. E foi o que todos fizeram.

Após a 6ª jogada:

Célia 11, Edite 3, Mário 0.

Foi o Mário que perdeu a última jogada. Quem perdeu a penúltima foi a Edite e portanto tinha 0 antes do 5º jogo. Então, o Mário deu 3 à Edite e outros 3 à Célia. Conclusão:

Após a 5ª jogada:

Célia 8, Edite 0, Mário 6.

Prosseguindo por este processo, temos:

Após a 4ª jogada:

Célia 2, Edite 12, Mário 0.

Após a 3ª jogada:

Célia 0, Edite 10, Mário 4.

Após a 2ª jogada:

Célia 8, Edite 6, Mário 0.

Após a 1ª jogada:

Célia 2, Edite 0, Mário 12.

Aqui temos de parar. Sabemos que no início ninguém tinha 0 euros, porque não só o enunciado diz que eles "puseram o dinheiro que tinham em cima da mesa" como também não seria credível que aceitassem começar um jogo com alguém sem dinheiro.

Foi a Edite que perdeu o primeiro jogo, mas a Célia não tinha 0 no início. A única hipótese, admitindo que todos tinham um número inteiro de euros, é:

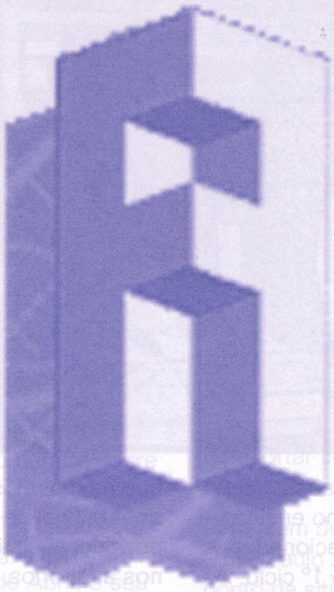
A Célia começou com 1 euro, a Edite com 2 e o Mário com 11.

Finalmente, uma nota do Domingos Rijo:

> No dia 13 de Dezembro houve um encontro de professores de Matemática. Um dos organizadores, João Ascensão Barata, "provocou" os participantes com o tema "Resolução de Problemas", mostrando que, na prática, em média apenas 0,3% dos sócios da APM se interessava por este assunto respondendo ao "Problema deste número" da revista.

Bem, vamos lá tentar melhorar esta percentagem!

# A propósito de um encontro



Nos dias 1, 2 e 3 do passado mês de Novembro teve lugar na Holanda a 19ª *Panama Najaars-conferentie*, uma conferência anual organizada pelo Projecto Panama do Instituto Freudenthal, sob o auspício da Associação Holandesa para o Desenvolvimento da Educação Matemática.

Esta conferência, que contou este ano com cerca de 180 participantes, é especialmente organizada para todos aqueles ligados ao ensino da Matemática do Pré-escolar ao 2º ciclo do Ensino Básico, quer sejam eles investigadores, professores, formadores ou editoras de livros escolares.

Este ano o tema foi a qualidade de ensino das Grandezas e Medida, vindo assim ao encontro do tema do ano passado, onde foram discutidos os resultados da terceira prova aferida de Matemática do fim da Escola Primária (final do nosso 2º ciclo) *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau* e onde os resultados nesta área foram piores do que o esperado.

Assim, foi com o objectivo de procurar caminhos para um ensino de qualidade das Grandezas e Medidas que se desenrolaram três sessões plenárias, quatro sessões paralelas, um sessão de trabalho pratico, dezanove *worshops* e as sessões paralelas específicas de cada categoria (professores, formadores e investigadores) desta conferência.

Dos assuntos mais discutidos, o conceito de área foi um dos que mais me interessou particular-mente. Como poderemos definir o conceito de área da perspectiva das crianças no final do 2º ciclo? Eis a questão inicial da sessão prática e que originou uma interessante discussão sobre algo que muitos de nós nunca tinha pensado antes. Muitos foram os que afirmaram prontamente que para muitos alunos deste nível de escolaridade a área era a conhecida fórmula *lado x lado*. De facto, as áreas com que as crianças mais lidam no ensino são as áreas de superfícies rectangulares. Não será isto também responsável por essa concepção? Pensarão esse alunos então que, por exemplo, um ovo não tem área? Mas afinal a que é que nos referimos quando falamos, por exemplo, da área de um armário? Falamos da sua superfície exterior, da superfície interior, ou será que nos referimos à sua projecção no chão?

A área é o tamanho de uma superfície, foi o que me ocorreu na altura. Assim, medir uma área não é mais do que comparar o tamanho dessa superfície com o tamanho da superfície da unidade de medida escolhida. Mas depois há a questão da unidade de medida de área. Que concepção têm os alunos por exemplo do metro quadrado? "É um quadrado com um metro de lado", dirão muitos alunos.

Estas e muitas outras questões foram surgindo, o que nos fez aperceber daquilo que Freudenthal já tinha referido, que a área é um conceito complexo que quanto mais se pensa sobre ele, mais nos apercebemos da sua complexidade.

Terminava esta nota com algumas observações que surgiram nesta conferência, e que me parece importante deixar aos colegas para reflexão:

- Actividades de medida à volta do nosso próprio corpo constituem um bom começo de aprendizagem das Grandezas e Medidas, uma vez que contribuem para uma maior ligação emocional com a aprendizagem.
  A propósito de medidas humanas, fiquei a saber da sessão plenária de J. Menne e E. De Moor do Instituto Freudenthal que, relativamente ao peso da idade adulta, uma rapariga atinge aos oito anos a mesma fracção um rapaz aos nove. Outra curiosidade interessante, possível de explorar no 1º ciclo, é que o perímetro das duas mãos com os dedos afastados coincide com a altura de uma pessoa. Se não acredita, experimente!
- Porque será que um jornal noticia uma passadeira para peões com 100 m e não 1 hm? Umas vezes fala-se em 1 km, outras vezes em 1000 m. O que é que determina afinal a unidade de medida que se usa?
- Aprender a lidar com a medida parece ser fundamentalmente uma questão de fazer, mas também de reflexão e comparação. É importante que as crianças tenham oportunidade de realizar muitas experiências significativas de medida, mas também que possam reflectir sobre os argumentos e soluções dos colegas, comparando-os com os seus.

Nisa Figueiredo
ESE de Coimbra

# Mostra de Ideias e Materiais

Nos dias 4, 5 e 6 de Junho realizou-se, na FIL, um encontro denominado *Mostra de Ideias e Materiais — Mudança Curricular nos Ensinos Básico e Secundário*, promovido pelo Instituto de Inovação Educacional, pelo Departamento de Educação Básica e pelo Departamento de Ensino Secundário.

Durante os três dias realizaram-se cerca de duas dezenas de debates e comunicações, painéis, exposições temáticas, projecção de videos sobre projectos já realizados em várias escolas e uma mostra de materiais produzidos pelo IIE, DEB e DES, bem como *dossiers* produzidos pelas escolas.

Para todos aqueles que pelos mais variados motivos não conseguiram estar presentes, vou tentar fazer um relato o mais alargado possível, tendo a consciência de que será impossível descrever muito do que lá se passou.

Estiveram presentes mais de 2000 professores, número que foi sendo notado à medida que as filas para as sessões aumentavam, tendo-se repetido algumas das sessões mais procuradas.

No primeiro dia realizaram-se os painéis sobre as competências no ensino básico e a criação de redes de formação de professores em áreas estratégicas do ensino secundário. Foram ainda dadas a conhecer experiências escolares que se destacam pelos resultados obtidos.

Neste dia foram igualmente apresentadas publicações, provenientes dos vários departamentos do Ministério da Educação, que pretendem promover a reflexão e divulgar práticas das escolas. Destacaram-se, pela procura, os Guias de Recursos relacionados com temas sobre a Educação para a Cidadania.

*Falha de Cálculo* foi o nome da peça de teatro que iniciou o segundo dia do encontro, em que o "Cálculo Mental" coadjuvado com outras personagens tenta decifrar um enigma relacionado com o Ano Mundial da Matemática. Seguiram-se painéis sobre a revisão curricular no ensino secundário e aspectos relacionados com a gestão curricular no 1° ciclo. As comunicações permitiram que as escolas do ensino básico e secundário, revelassem as suas experiências e caminhos percorridos a vários níveis.

No último dia decorreu uma conferência seguida de debate subordinada ao tema "Um currículo baseado em competências: implicações no ensino e na avaliação", bem como um painel relacionado com os desafios levantados pelo perfil profissional em relação à gestão do currículo. As várias comunicações estavam relacionadas com as novas áreas curriculares não disciplinares, áreas transversais e ainda com o processo de avaliação dos programas do secundário.

Foto: Ilda Rafael

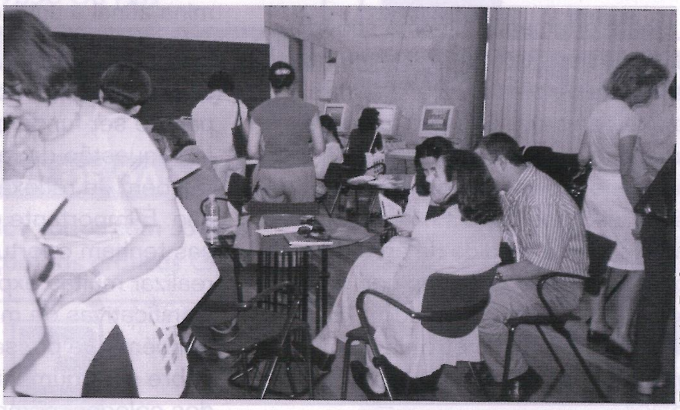


Foto: Ilda Rafael

Ao escrever sobre as sessões não é possível descrever muitos dos momentos de reflexão em conjunto que as mesmas foram proporcionando. No final de algumas era mesmo possível assistir a conversas iniciadas nos auditórios, que se prolongavam nos átrios exteriores com frequente troca de materiais e experiências entre os professores.

Para além das sessões foi possível consultar os *dossiers* de materiais, as várias publicações e outros materiais que estavam ao dispor na "Sala de Leitura" (espaço aproveitado para trocar impressões e partilhar experiências, sendo assim bastante concorrido). Nos átrios exteriores estavam também disponíveis para consulta várias brochuras, publicações, guias de recursos, *dossiers* temáticos e outro tipo de materiais distribuídos pelos seguintes temas: Currículo, Orientação Escolar e Profissional, Língua e Ciências Humanas e Sociais, Matemática e Ciências, Educação Física e Artística, Novas Áreas Curriculares, Tecnologias de Informação e Comunicação.

Um dos espaços frequentemente visitado foi o *Matemática e Ciências*, onde era possível experimentar alguns dos materiais expostos e assistir a sessões de esclarecimentos sobre os mesmos.

Tal como diz o poeta António Machado:

> Caminhante, não há caminho. Faz-se o caminho ao andar.

Este foi um contributo para ajudar a construir esse caminho.

Anabela Gaio
DEB e ESE de Lisboa

# A propósito da (re)organização da Escola

A noção que os professores tendem a ter da sua profissão, a forma como estão habituados a organizar o seu trabalho, a ideia que têm de currículo como algo rígido e prescritivo, frequentemente restrito a uma listagem de conteúdos a leccionar... são apenas alguns dos aspectos que não deixarão de ser postos em causa pelas grandes mudanças que a reorganização curricular do Ensino Básico e a revisão curricular do Ensino Secundário se preparam para introduzir nas nossas escolas. Foi pois com o intuito de contribuir para aprofundar os conhecimentos e de promover o debate sobre a actual reorganização/revisão curricular que o Secretariado Inter-Associações de Professores organizou, nos passados dias 26 e 27 de Abril, o seu VI Encontro Nacional.

Com uma maior incidência nas questões associadas ao Ensino Básico, os trabalhos organizaram-se essencialmente em torno de painéis e não descuraram a importância do debate. Ainda assim, o grande interesse, mas também as dúvidas, e por vezes até os receios, que o tema despertava nos presentes, tornou manifestamente insuficiente o tempo destinado à interacção entre a assistência e os oradores. Com efeito, num auditório da Fundação Calouste Gulbenkian completamente lotado, foram muitos os que, apesar do horário previsto já ter sido largamente ultrapassado, lamentaram não ser possível dispor de mais tempo.

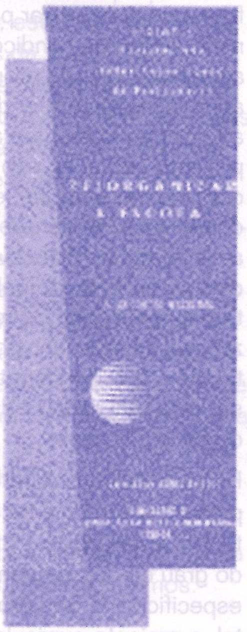
Ao longo do encontro foram sendo abordados diferentes aspectos, desde as competências essenciais no currículo nacional do Ensino Básico às estratégias para a sua concretização, passando pela avaliação externa da gestão flexível do currículo, pelo projecto curricular de escola e de turma e terminando nas implicações da reorganização curricular na (re)organização das escolas.

A noção de competências essenciais, ou seja, de um tipo de saber que procura integrar conhecimentos, capacidades e atitudes, é a grande ideia por trás da reorganização curricular do Ensino Básico. O foco é assim colocado não na aquisição de conhecimentos, mas na capacidade de os utilizar sempre que adequado. O termo competência não é usado em referência a um comportamento específico observável, nem como sinónimo de desempenho, pelo contrário, é entendido como sinónimo de activar os recursos que são necessários numa determinada situação. É pois um termo que podemos associar à noção de literacia e que nos leva inevitavelmente a pensar nas razões que fazem com que alunos que num determinado momento parecem saber um certo assunto, se venham posteriormente a comportar como se nunca tivessem ouvido falar nele.

Para além destas ideias, o director do DEB, Paulo Abrantes, referiu ainda o ponto da situação actual da reorganização curricular e a evolução prevista. Mencionou a intenção de, a médio prazo, introduzir alterações nos actuais programas das disciplinas, com o intuito de os tornar menos prescritivos. Referiu-se à transformação daquilo que até agora tem sido a ideia associada aos nossos programas (uma listagem de conteúdos a leccionar) em algo mais flexível e semelhante a um documento de orientação.

Por seu turno, Zélia Santos, da Associação Portuguesa de Professores de Francês, procurou partir de algumas das ideias expressas por Paulo Abrantes, mas abordando-as agora numa perspectiva mais ligada ao trabalho dos professores. Referindo-se à crescente complexidade desse trabalho e às dificuldades em o adequar às características da nossa sociedade em mudança, mencionou aspectos ligados à formação contínua e à auto-formação dos professores. Discutiu o que as competências essenciais devem ou podem ser na preparação do trabalho dos professores, apontando-as como mediadoras na leitura dos programas e conduzindo a um ensino mais diversificado.

Abordou então um aspecto fundamental: as mudanças por que os professores vão ter que passar relativamente à sua forma de trabalhar. Neste âmbito enfatizou não só a formação e o empenhamento mas, e principalmente, o tempo que é necessário dar para que as mudanças sejam efectivamente integradas.



A gestão flexível do currículo e, em particular, a avaliação que desta foi feita, também foi abordada, atendendo aos fortes pontos de contacto existentes entre esta e a reorganização prevista. A coordenadora do referido processo de avaliação, Luisa Alonso, referiu aspectos em que a gestão flexível do currículo introduziu alterações na escola, partindo de um modelo segundo o qual a inovação e a mudança educativa dependem de quatro factores fundamentais: o desenvolvimento curricular, o desenvolvimento organizacional, o desenvolvimento profissional e o desenvolvimento do processo de ensino–aprendizagem.

Referiu diversos problemas de natureza curricular, facilmente identificáveis nas nossas escolas, mencionando de seguida as ideias centrais da educação básica. Caracterizou o currículo escolar como um projecto integrado, que consubstancia as opções da escola acerca da selecção e organização da cultura e da formação a oferecer aos alunos, através de actividades e experiências que possibilitem uma educação de qualidade para todos.

A manhã do segundo dia, que contou com Maria do Céu Roldão, da ESE de Santarém, Albano Silva, da ESE de Portalegre, Júlia Galego, directora do Centro de Formação da Associação de Escolas de Loures-Norte, e Júlio Pires, da SPCE, foi dedicada ao projecto curricular de escola e de turma.

Estes projectos foram referidos como uma tomada de decisão por parte da escola quanto ao seu currículo, como forma de concretizar para aquele meio, naquelas condições concretas, a melhor forma de promover as aprendizagens pretendidas e de articular as diferentes áreas. O projecto curricular não é, pois, um documento, embora se corporize num documento; não é um elenco de actividades extra-lectivas e extra-disciplinares, muito pelo contrário, tem que envolver o todo das aprendizagens e não apenas os "extras"; e também não é uma retórica, tem que ser uma realidade traduzível na prática de cada professor.

Relativamente às diferenças entre os projectos curriculares de escola e de turma, estas devem situar-se ao nível do grau de aprofundamento e de especificidade dos projectos. Como tal, o projecto curricular de escola deve abranger as questões numa perspectiva mais geral, tendo em conta as características globais da escola, enquanto o projecto curricular de turma as abrange numa perspectiva mais concreta, atendendo às especificidades dos alunos da turma.

O encontro terminou com uma sessão dedicada às implicações da reorganização curricular na (re)organização das escolas, que contou com Domingos Fernandes, director do DES, Paula Rocio, da ES Quinta do Marquês, Marina Simão, da EB 2,3 Gaspar Correia, e Isabel Branco, da ES António Arroio. Neste âmbito, e como não poderia deixar de ser, foi abordada a questão das aulas de 90 minutos. Referiram-se aspectos positivos de experiências já vividas em escolas, tais como: a possibilidade de envolver os alunos em determinados tipos de trabalho, sem estar sujeito a tantas interrupções; a facilidade em conseguir melhores horários, tanto para os alunos como para os professores; o ambiente de maior tranquilidade na escola que esta organização torna possível; o facto de os alunos passarem a ter, no mesmo dia, um número inferior de disciplinas (evitando-se tanto a dispersão por vários assuntos, como o transporte de um número considerável de livros); e o agrado expresso pela maioria dos alunos envolvidos. Também a área de projecto mereceu destaque, tendo sido referida como uma área central para o currículo do Ensino Secundário nos próximos anos.

Foram ainda mencionadas algumas das iniciativas que estão a ser levadas a cabo pelo Departamento do Ensino Secundário, no sentido de informar e apoiar os professores relativamente à revisão curricular. Foram, em particular, referidas a elaboração de brochuras e a organização de sessões com as escolas sobre o currículo e a avaliação, a organização e o funcionamento dos cursos tecnológicos e a área de projecto.

Tratou-se pois de dois dias de trabalho intenso e de debate vivo, em que, para além de conhecer os principais aspectos da reorganização/revisão curricular que terá início no próximo ano lectivo para os 1º e 2º ciclos e no ano seguinte para os restantes ciclos, foi possível compreender algumas das razões que estão na base destas.

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

# 5º Forum Ciência Viva

Para o Luís, o Eduardo, o Valter, o Sérgio, o Bruno e o Mário, alunos do 12º e do 11º da Escola Infante D. Henrique, no Porto, os dias 11 e 12 de Maio foram passados de forma muito diferente. Foram participar no 5º Fórum Ciência Viva, no Pavilhão Atlântico do Parque das Nações, integrados no projecto "A Matemática e o Mundo".

Representaram a Escola, expondo os trabalhos que com mais uma dúzia de colegas foram desenvolvendo desde Junho de 2000, e observaram com os seus próprios olhos as dezenas de investigações científicas de outras escolas. Viajaram de comboio e estiveram alojados na Pousada da Juventude, a menos de um quilómetro do Pavilhão Atlântico. Não podia ser mais simples.

À entrada, sentiu-se que tinham sido impostas firmes regras de segurança para o Pavilhão. Íamos um pouco tensos pois éramos sete e tinhamnos enviado apenas cinco convites (apesar de termos pedido treze, contando com alguns familiares). Mas logo nos deram os dois convites que nos faltavam. Ouvi dizer, mais tarde, que algumas pessoas criticaram o facto de só se poder entrar por convite, porque havia pessoas interessadas que não foram e consideraram isso uma restrição inaceitável. De facto parece ser difícil conciliar abertura ao público com segurança, mas vale a pena pensar em melhorar este aspecto, e organizar a segurança de forma a permitir que mais pessoas, sobretudo os jovens, possam apreciar esta tão bela e grande exposição, sobre o que, no campo da ciência, se vai concretizando nas escolas e universidades portuguesas.

Na sessão de abertura, o auditório estava repleto de gente muito jovem, aguardando as comunicações do Primeiro Ministro, do Ministro da Ciência e da Tecnologia, do Ministro da Educação, da Presidente da Comissão de Avaliação de Projectos Europeus (de nacionalidade sueca) e da Directora do Ciência Viva.

Já não me lembro quem deu aquela ideia simples, velha e pouco praticada que "para aprender é necessário sujar as mãos, pôr a mão na massa". A representante da Suécia também fez uma analogia conhecida mas sempre bem vinda da receita de culinária que pode estar muito bem explicada, mas se não tivermos a prática, não sai nada de jeito...

Os alunos assistiram atentamente a toda a cerimónia, agradados com a eloquência e a simpatia dos oradores.

Finda a abertura, o Pavilhão onde decorreram todas as actividades, estava efervescente de visitantes e participantes. Cada projecto desenvolvia um tema diferente.

Um dos quiosques expunha fotografias do céu, tiradas à noite por astrónomos amadores, situando uma nebulosa ou um cometa relativamente a constelações conhecidas. Outro mostrava muitos trabalhos com fractais construídos com tetraedros, em três dimensões. E ao lado uma pequena escultura da *stella octangula*, em acrílico, recheada de flores secas vermelhas e verdes. Noutro podia ficar-se a conhecer a história do programa interactivo de Geometria agora tão utilizado nas escolas, o *Geometer Sketchpad*. No do *Atractor*, com a ajuda de uns óculos, observava-se num visor o atractor de Lorenz, sempre em movimento, fazendo lembrar a fita de Mobius.

Noutra secção estavam os projectos associados à Física, à Biologia e à Química. Num lugar de destaque estava montada uma cozinha, com os legumes e as frutas habituais, interpretada como um grande laboratório de reacções químicas. A *mousse* de chocolate vista como uma espuma, a ciência num bolinho de bacalhau, ou numa farófia, os petiscos que são obra de bactérias. E como sintetizar o ADN de forma simples, à custa de detergente, álcool, sal e bicarbonato de sódio!

Havia um corredor quase só dedicado ao 1° ciclo. Por exemplo, com um simples arco graduado, qualquer criança de seis anos pode medir o comprimento de uma circunferência... O programa Ciência Viva, ao nível do regulamento, definiu como prioritário os primeiros anos, e foi óptimo o aumento de candidaturas no nível básico. É excelente tomar contacto com as imensas possibilidades de fazer ciência com os mais pequenos.

E quem quisesse, podia aprender como construir um caleidoscópio, uma campainha, ou um altifalante. E observar como manobra um navio à vela, para conseguir navegar segundo um rumo pré-determinado, apesar da direcção do vento lhe ser adversa. Seriam precisos vários dias para conseguir observar detalhadamente todos os quiosques e oficinas, participando nas actividades propostas.

Apesar de haver um pouco divisão por sectores, também se sentiu o facto de estarmos num espaço integrado, não essencialmente disciplinar, mas de ciência.

Por todos estes aspectos, penso que é salutar darmos os parabéns ao programa Ciência Viva. Vimos experiências possíveis de incorporar na futura área de projecto. Para qualquer professor, uma manifestação destas é um grande cesto cheio de motivações!

Na noite de Sexta-feira, dia 11, houve uma interessante tertúlia – o Café da Ciência. Distribuídos em pequenas mesas de café, estavam conhecidas personalidades da sociedade portuguesa, políticos, cientistas, médicos, sociólogos, antropólogos e jornalistas, à volta do tema "À conversa sobre Ciência, Saúde e Risco".

A tertúlia, soberanamente dinamizada pelo Professor Alexandre Quintanilha, deu-nos a conhecer os diferentes pontos de vista e opiniões de, por exemplo, Rui Mota Cardoso, João Lobo Antunes, José Calheiros, João Lavinha, Luísa Lima, Mariano Gago, Ivone Delgadinho, Jorge Massada, Diana Andringa, Isabel Stilwell.

Duas horas depois de terminar, ainda comentávamos o que ouvíramos. Inesquecível!

No Sábado a chuva não impediu que novos visitantes animassem os corredores da exposição.

À tarde, assistimos e participámos nas comunicações sobre projectos de Matemática, coordenadas por Eduardo Veloso. Embora versassem diferentes níveis, do básico ao secundário, todas as comunicações mostraram a simplicidade com que os vários temas matemáticos podem ser investigados e entendidos.

Depois, tivemos o prazer da visita do Presidente da República. Percorreu todos os corredores observando os quiosques e os expositores com atenção, e louvou as iniciativas dos projectos ligados ao programa Ciência Viva.

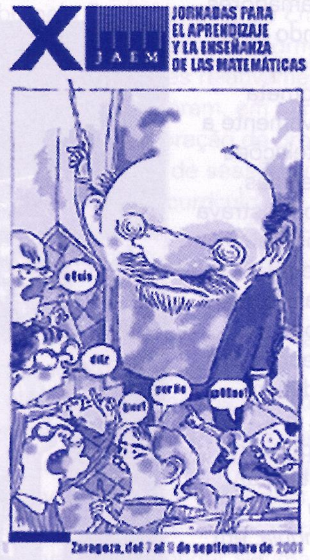
Perguntei aos meus alunos se para o ano gostariam de voltar a participar num Fórum do Ciência Viva. A resposta foi unânime:

— Se isso fosse possível...

Isabel Viana
Esc. Sec. Infante D. Henrique

# Encontros 2001

## X JORNADAS DE APRENDIZAGE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS




A *Federacion de Sociedades de Professores de Matemáticas* (FESPM) organiza em Zaragoza, de 7 a 9 de Setembro de 2001, as "X Jornadas de Aprendizage y Enseñanza de las Matemáticas". Este evento tem como propósito fundamental servir de ponto de encontro entre professores de Matemática dos diversos níveis educativos, de forma a apresentar, comparar e discutir resultados de investigação, experiências de aula, recursos, etc.

Ao longo do programa elaborado contam-se temas como o tratamento da diversidade, aspectos históricos, investigação didáctica, experiências, recursos, gestão da aula, resolução de problemas.

X JAEM
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12 — 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45; E-mail: xjaem@posta.unizar.es
Página web: www.unizar.es/ice/jaem

## XXI CONGRESSO DO MOVIMENTO DA ESCOLA MODERNA (M.E.M.)

O M.E.M. organiza anualmente o seu Congresso, no qual os seus sócios partilham os trabalhos que desenvolveram ao longo do ano lectivo com os alunos. É um momento de reflexão, debate e de avaliação das actividades pedagógicas realizadas ao longo do ano.

Este ano o XXI Congresso decorrerá nos dias 14, 15, 16 e 17 de Julho na Escola Superior de Educação de Setúbal. Para além dos Relatos de Práticas que decorrerão em sessões paralelas, todos os dias terá lugar uma sessão plenária. Estas sessões plenárias terão várias formas:

Conferência: *Um olhar sobre o M.E.M. entre 1966 e 1996* — Ana Pessoa.
Painel: *O modelo do M.E.M. na Formação Inicial de professores* — Pedro Gonzalez e Américo Peças; animador: Sérgio Niza.
Colóquio: *Freinet e o Movimento da Escola Moderna Portuguesa* — António Nunes.
Forum: Debate livre sobre a pedagogia da Escola Moderna — animadores: Irene Fortuna, Lígia Penim, José Pires.

## XI COLÓQUIO DA SECÇÃO PORTUGUESA DA AFIRSE: INDISCIPLINA E VIOLÊNCIA ESCOLAR

Em colaboração com a Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação (FPCE) da Universidade de Lisboa e com a Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, a secção portuguesa da AFIRSE realizará nos dias 22, 23 e 24 de Novembro de 2001 um colóquio dedicado ao tema *indisciplina e violência escolar.*

Terá lugar na FPCE da Universidade de Lisboa e será constituído por conferências, sessões plenárias e sessões temáticas; para estas últimas espera-se a apresentação de trabalhos de investigação, relatos de experiências concretas desenvolvidas no terreno e submetidas a avaliação. Pretende-se recentrar o debate nos resultados da investigação científica, estimulando simultaneamente a sua produção.

AFIRSE
AIPELF
Section Portugaise

XI Colóquio da AFIRSE / AIPELF
Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação
Alameda da Universidade — 1649 - 013 Lisboa
Telefone: 21 793 45 54; Fax: 21 793 34 08
E-mail: afirse2000@fpce.ul.pt

# Quota 2001

No ano de 2001 o valor da quota é de 7 800$00 para professores, 5 700$00 para estudantes (só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 8 800$00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

**Associação de Professores de Matemática**

**Rua Dr. João Couto, nº 27–A, 1500-236 Lisboa**

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou MasterCard, preenchendo o impresso abaixo.

**Só para sócios residentes no estrangeiro**

(Nome) ____________________________________________ autorizo que seja debitado no meu cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| cvv |_|_|_| *

Visa ☐ VISA    MasterCard ☐ MasterCard

Validade ____________ o valor de ______________ correspondente a ____________________ ______________________ Data ___/___/___

Assinatura ____________________________________________

*os 3 últimos dígitos do número que vem a seguir à assinatura

Nome: ____________________________________ Sócio nº: __________
Morada: ____________________________________________
Código Postal: ________________ Distrito: ____________________
Telefone: ____________________ Email: ____________________
Data de Nascimento ___/___/___ Nº de Contribuinte: ____________________
Nº do B.I. ____________ Arquivo: ____________ Data de emissão: ___/___/___
Ano em que começou a leccionar: ____________ Nível de ensino: ____________
Categoria profissional: ____________________
Escola: ____________________________________________
Morada: ____________________________________________
Telefone: ____________________ Email: ____________________

# Publicações — Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes de correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até 2 500$00 — 20%; de 2 501$00 a 5 000$00 — 15%; mais de 5 000$00 — 10%

Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo email: apm@netcabo.pt

# Índice