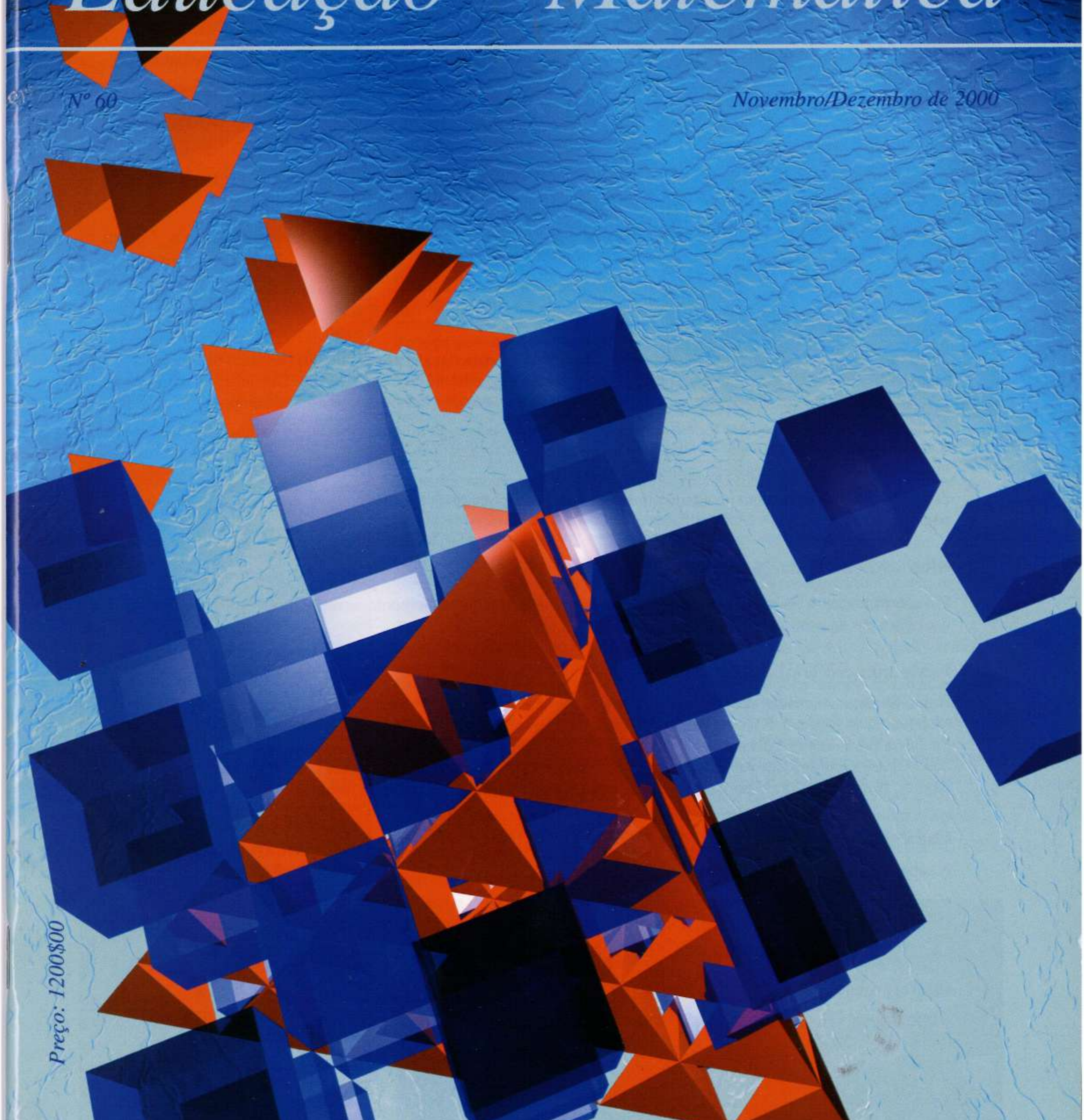
Educação e Matemática

Nº 60

Novembro/Dezembro de 2000



Preço: 1200$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Ano Mundial da Matemática

Sobre a capa

A composição gráfica na capa é alusiva ao terceiro problema de Hilbert (ver a respectiva discussão na p. 7 desta revista). O tetraedro e o cubo são em certo sentido (no sentido daquele problema) "incompatíveis ". É essa incompatibilidade, expressa numa *união daquilo que não pode unir-se*, que o grafismo pretende descrever.

Sobre o número temático

Sendo este o Ano Mundial da Matemática, a redacção da revista decidiu neste número temático dar especial relevo à Matemática, procurando atender à sua evolução e ao seu ensino neste século. Convidámos então para editor, Eduardo Veloso dada a sua experiência e entusiasmo sempre manifestados nestes campos.

Eduardo Veloso participou em toda a concepção da revista, escreveu artigos, procurou e estimulou a colaboração de outras pessoas ligadas quer à área da educação, quer à área da matemática e esteve presente em todos os momentos, incluindo o processo de revisão e paginação.

Este número apresenta uma novidade em termos de concepção gráfica que é possuir, pela primeira vez, oito páginas a cores.

Alterações na Redacção

Passou a integrar a Readacção da Educação e Matemática um novo elemento, o nosso colega António Fernandes. Para ele as nossas boas vindas.

Neste número também colaboraram

Alcino Simões, Ana Reis, A.J. Franco de Oliveira, Armando Severino, Branca Silveira, Carlota Simões, David Mendes, Elisa Figueira, Fátima Roque, Fernando Menezes, Henrique Machado, Hussene Remane, Irene Segurado, Isilda Silva, Jaime Carvalho e Silva, Joana Porfírio, João Filipe Matos, João Pedro da Ponte, Jorge Nuno Silva, José Oliveira, Lurdes Serrazina, Manuela Pires, Margarida Font, Margarida Mendes Lopes, Mário Roque, Michele Emmer, Nuno Candeias, Pedro Ávila, Ricardo Barreiros, Rui Roboredo, Sérgio Antunes.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Novembro de 2000.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27 - A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 217163690
Fax: (351) 217166424
e-mail: apm@netcabo.pt

Nota

nº 60
Novembro/ Dezembro de 2000

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Ana Paula Canavarro
António Fernandes
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Editor convidado deste número
Eduardo Veloso

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Composição e paginação
João Loureiro e Pedro Abrantes

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
5500 exemplares

Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez

Montagem, fotolito e impressão
Scarpa

Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Que fazer com a matemática?

Eduardo Veloso

Neste Ano Mundial da Matemática passaram diante dos meus olhos centenas e centenas de imagens, muitas delas fortes, esteticamente apelativas, cheias de significado matemático. No entanto, quando no meio deste ano vertiginoso paro um pouco a pensar no sentido do que temos andado para aqui a fazer, uma dessas imagens instala-se imediatamente à minha frente. Coloquei-a aqui ao lado, enquanto escrevo este editorial.

Este espantoso desenho, muito prejudicado aqui pela reprodução a preto e branco, foi feito pelo David, aluno da escola básica do 1º ciclo nº 11 de Setúbal. Duas turmas do terceiro ano desta escola envolveram-se fortemente no projecto do poliedro na escola e fizeram muitas construções com palhinhas e fios de lã. Claramente, David viveu intensamente essas horas de trabalho com os poliedros e usou a sua liberdade criativa para as registar.

Não seria natural que, através da matemática, continuasse a desenvolver-se a sua criatividade, o seu espírito de observação, a liberdade formal com que utilizou vários pontos de vista para melhor retratar os seus colegas?

Temos do nosso lado a matemática, a ciência da criatividade, da liberdade, da imaginação. Temos, ao nosso redor, o David e todos os seus colegas – curiosos, receptivos, cheios de energia! Tudo parece ser propício a que todos os jovens possam ter uma experiência matemática escolar agradável e culturalmente rica ao longo de toda a escolaridade. Tal como as professoras Alda e Fátima abriram o mundo dos poliedros aos seus alunos, outros mundos matemáticos estão disponíveis e poderiam ser explorados e aprofundados nos anos seguintes. No entanto, infelizmente, a experiência de muitos alunos com a matemática é precisamente a oposta. Em vez da criatividade, a rotina dos exercícios sem significado. Em lugar da liberdade, o espartilho das definições caídas do céu. Em vez de investigações e explorações matemáticas com espaço para a imaginação, para a escolha, para o ensaio, caminhos pré-definidos para chegar a soluções únicas.

Que queremos fazer com a matemática e com os nossos alunos?

Cinco problemas

Cinco problemas da história da matemática no séc. XX

No final de 1999, a redacção da Educação e Matemática *decidiu dedicar as capas dos cinco números da revista, a publicar no ano 2000, Ano Mundial da Matemática, a cinco problemas ou teoremas importantes que tivessem sido resolvidos ou demonstrados durante o último século. Os problemas escolhidos foram: a conjectura de Kepler sobre os empilhamentos de esferas, o último teorema de Fermat, a conjectura do fole, o teorema das quatro cores e o 3º problema de Hilbert. Seguem-se artigos curtos relativos aos cinco resultados. Agradecemos aos colegas que aceitaram o desafio de comprimir em poucas palavras histórias que duraram séculos...*

A conjectura de Kepler

António Marques Fernandes

Introduzindo a conjectura

Foi no ano de 1611 que Kepler enunciou uma famosa conjectura que é hoje denominada por conjectura de Kepler. O famoso enunciado resistiu durante séculos às inúmeras tentativas para o estabelecer pela via demonstrativa. A conjectura estabelece um facto que desde muito cedo se considerou mais ou menos evidente, designadamente: *se se pretender empilhar esferas no espaço (todas de raio igual a uma unidade) não é possível fazê-lo e desperdiçar menos espaço que quando se distribuem essas esferas como no empilhamento cúbico de faces centradas* (fig. 1).

figura1. Empilhamento cúbico de faces centradas.

Embora Kepler tenha formulado a sua conjectura, não foi ele quem inicialmente se dedicou ao estudo deste problema. Os primeiros de tais estudos devem-se a T. Harriot.

Harriot, enquanto assistente de Sir Tomas Raleigh, foi incumbido por este de determinar fórmulas que permitissem determinar o número de balas de canhão que se podiam arrumar em empilhamentos regulares de diferentes tipos. Ele estudou exaustivamente o problema e, curiosamente, na sequência dos seus estudos foi conduzido a um triângulo, conhecido como *triângulo* de Harriot (fig. 2), que é uma versão do famoso teorema de Pascal, só que obtido muito antes do de Pascal.

O modo como estes resultados de Harriot chegaram ao conhecimento de Kepler é também curioso. Nem Kepler estava interessado inicialmente no estudo matemático do problema, nem Harriot procurou dar a conhecer-lhe esses resultados pelo seu valor matemático intrínseco.

Nos primeiros anos do séc. XVII, Harriot e Kepler trocavam correspondência acerca da natureza da matéria. Kepler era um partidário de que os fenómenos naturais resultavam de *conflitos de contrários*, por exemplo, Kepler explicava os fenómenos de reflexão e refracção da luz como uma consequência da competição entre as propriedades de transparência e opacidade. Harriot não partilhava nem de perto esta convicção, aliás e a propósito, terá escrito numa das suas cartas para Kepler o seguinte:

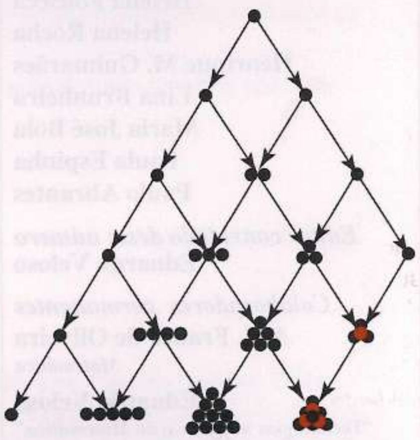


figura 2. O triângulo de Harriot

[...] se essas assumpções e explicações o satisfazem, bem... fico surpreendido.

As explicações de Harriot, relativamente aos fenómenos naturais, assentavam na teoria atomista de Demócrito. A matéria é composta por átomos arranjados no espaço e é o modo como esses átomos se dispõem que determina as propriedades de cada substância. Foram os seus estudos sobre a reflexão e refracção da luz, que apresentaram a Kepler a problemática da disposição de esferas no espaço (os átomos eram supostos indivisíveis e com a forma de pequenas esferas).

Kepler foi certamente sensível às explicações de Harriot.

O facto é que em 1611, publicou um ensaio onde explorava diversas consequências de uma teoria da matéria composta por pequenas esferas. Foi precisamente nesse ensaio que Kepler, pela primeira vez, formulou a sua conjectura.

Interlúdio

O problema foi conhecendo ao longo do tempo algumas versões, muitas delas constituindo problemas aparentemente mais simples, pelos quais os matemáticos se foram interessando, na esperança de que a sua solução, trouxesse alguma intuição sobre o modo como demonstrar a conjectura de Kepler. Um desses problemas foi objecto de debate entre Isaac Newton e David Gregory. O problema consistia em determinar qual o número máximo de esferas que se podem agrupar de modo a todas tocarem uma esfera previamente dada. Newton defendia que esse número era de 12, enquanto que Gregory defendia que em certos casos podiam ser 13.

Newton estava correcto mas a primeira demonstração deste facto só surgiu em 1953 por B. L. van der Waerden e por Schüte. Aparentemente a resolução do problema de Newton/Gregory não tem relação evidente com a conjectura de Kepler, no entanto, em 1953, L. Fejes Tóth, concebeu uma estratégia para demonstrar a conjectura de Kepler em que um dos passos é inspirado na demonstração de van der Waerden e Schüte.

O análogo à conjectura de Kepler para duas dimensões, estabelecendo que a forma mais eficiente de arrumar discos no plano corresponde à disposição em rede hexagonal, foi demonstrada por Thue, em 1892. Depois desta demonstração outras surgiram, uma delas chegando a estabelecer uma generalização da conjectura a espaços não euclidianos.

A demonstração da conjectura de Kepler pareceu de tal modo um problema fascinante que levou Hilbert a incluí-lo na sua famosa lista de problemas apresentada em 1900. Tratava-se do 18º problema dessa lista. Milnor, num comentário ao 18º problema de Hilbert, chegou a escrever:

> Isto (o facto de não se conseguir demonstrar a conjectura de Kepler) é uma situação escandalosa, uma vez que a resposta (presumivelmente) correcta é conhecida desde o tempo de Gauss.

A solução

A demonstração da conjectura de Kepler parece ter sido finalmente obtida por Thomas Hales em 1998. A estratégia é fortemente apoiada numa redução da complexidade do problema sugerida por L. Fejes Tóth, atrás referida, e que relaciona a resolução deste problema com o problema de Gregory/Newton. A demonstração de Hales faz uso intensivo do computador. A razão pela qual a conjectura resistiu durante tanto tempo à sua demonstração é porque inicialmente se tratava de um problema de optimização num número finito de variáveis. Apesar de ser uma simplificação, a redução de Tóth, ainda obriga a resolver um problema de optimização em 150 variáveis, facto este que torna o problema exasperante do ponto de vista combinatório. Só para se ter uma ideia, a resolução deste problema *simplificado* envolve a análise de 5000 mapas planos. A classificação destes 5000 casos foi feita com recurso a rotinas computacionais.

Pode agora compreender-se melhor a expressão: *a demonstração da conjectura de Kepler parece finalmente ter sido obtida*. É de facto muito difícil convencer alguém, que se encontre perante *gigabytes* de código, que esses *gigabytes* constituem uma demonstração de uma conjectura.

Resta-nos esperar que esta demonstração combinatório/computacional envolvendo a consideração de 5000 subcasos, descritos por um algoritmo computacional como sendo os relevantes para a resolução do problema, possa ser no futuro substituida por uma outra que possa realmente tocar o espírito humano.

Referências

Hales, Thomas C., *An overview of the Kepler conjecture*, arXiv:math. MG/9811071, 1998.

Lagarias, Jeffrey C., *Bounds for local Density of Sphere Packings and the Kepler Conjecture*, arXiv:math.MG/0008151, 2000.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

O último teorema de Fermat

Margarida Mendes Lopes

A capa da revista da APM de Julho apresenta uma superfície que nos dizem estar relacionada com o teorema de Fermat. Afinal o que é o teorema de Fermat? É a afirmação: *Para todo o $n \geq 3$ não existem números naturais a, b, c tais que* $a^n + b^n = c^n$.
Esta afirmação foi escrita por Fermat (1601-1665) na sua cópia do tratado de aritmética de Diofanto.

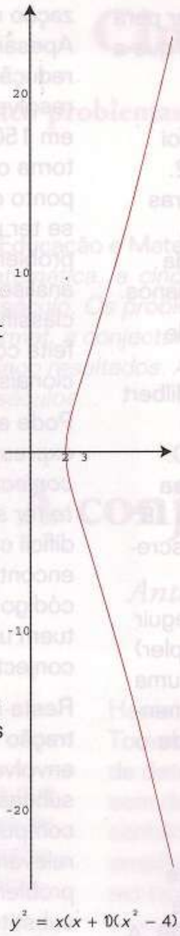
Ao lado da passagem que apresentava as soluções naturais da equação $x^2 + y^2 = z^2$ (ou seja a forma geral de todos os ternos pitagóricos) Fermat escreveu que para $n \geq 3$ não existiam tais soluções e acrescentou (em latim) "Tenho uma demonstração admirável mas esta margem é demasiado pequena para a conter".

No entanto Fermat não apresentou nunca a demonstração desta afirmação que ficou conhecida como o último teorema de Fermat. Em rigor dever-se-ia chamar a conjectura de Fermat dado que só em 1994 foi demonstrada.

Este problema capturou a imaginação de muitos e as tentativas de demonstração levaram a grandes avanços no conhecimento da Matemática. Para saber os detalhes (por vezes quase romanescos) da longa história desta conjectura aconselha-se a leitura do belíssimo livro de Simon Singh[1].

Ainda hoje se discute se Fermat teria de facto uma demonstração. O que é indiscutível é que Fermat não podia ter feito a demonstração apresentada por Andrew Wiles durante os anos 90. De facto o que Wiles demonstrou (parcialmente) foi a conjectura de Taniyama-Shimura formulada só nos anos 50, da qual decorre o teorema de Fermat.

Andrew Wiles é um matemático inglês estabelecido nos Estados Unidos e especialista em Geometria Aritmética, o ramo da matemática que aborda a teoria de números usando técnicas geométricas. Mais concretamente Wiles é um especialista em curvas elípticas.



$y^2 = x(x+1)(x^2-4)$

As curvas elípticas são todas as curvas definidas no plano por uma equação polinomial do 3º grau a duas incógnitas e uma curva elíptica diz-se racional se os coeficientes desta equação forem números racionais.

Uma classe importante destas curvas é a formada pelas curvas definidas por $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$, a, b, c e d números racionais e onde o polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem três raizes distintas (reais ou não).

A conjectura de Taniyama-Shimura diz que cada curva elíptica racional está associada a uma forma modular (abreviadamente, é modular). As formas modulares são objectos analíticos que aparentemente nada têm a ver com geometria. Muito imprecisamente as formas modulares são funções complexas definidas por séries de potências e que têm muitas simetrias. A conjectura foi formulada pelo matemático japonês Taniyama, depois de ter conseguido associar a algumas curvas elípticas uma forma modular. Mais tarde o seu amigo Goto Shimura mostrou que a cada forma modular estava associada uma curva elíptica racional. No entanto o problema de saber se cada curva elíptica racional era modular permaneceu em aberto.

Nos anos 80 o matemático alemão G. Frey, estudando curvas elípticas com coeficientes inteiros, considerou as curvas (chamadas posteriormente curvas de Frey) definidas por $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ obtidas a partir de uma hipotética solução inteira de $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$. Só existiria uma destas curvas se a conjectura de Fermat não fosse verdade. Frey verificou que estas curvas, se existissem, teriam propriedades estranhas, diferentes de outras curvas elípticas. Em 1984, num congresso em Oberwolfach, apresentando os seus resultados, conjecturou que estas curvas não eram modulares. O americano Ken Ribet, que estava na audiência, começou a trabalhar nesta conjectura tendo-a finalmente demonstrado em 1986.

O sonho de infância de Wiles tinha sido demonstrar o teorema de Fermat. Crescendo tinha abandonado esse sonho e tinha-se dedicado às curvas elípticas. Quando Wiles ouviu falar do resultado de Ribet viu uma estrada para realizar o seu sonho. Abandonando todos os outros projectos, durante sete anos dedica-se à conjectura de Taniyama-Shimura e finalmente em Junho de 1993, em Cambridge, apresenta a demonstração da conjectura para uma grande classe de curvas elípticas racionais, que incluía as curvas de Frey se existissem. Como Ribet tinha mostrado que as curvas de Frey, se existissem, não eram modulares, concluía-se que as curvas de Frey não existiam e portanto também não existiam soluções inteiras das equações $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$, tal como Fermat tinha afirmado.

Durante os meses seguintes a demonstração foi verificada por vários especialistas, mas foi descoberta uma falha. A demonstração continuava válida para uma grande classe de curvas elípticas que, no entanto, não incluía as curvas de Frey. Portanto o resultado de Wiles, embora continuando a ser importante, não demonstrava o teorema de Fermat.

Wiles tornou a concentrar-se no problema. Com o auxílio do seu antigo aluno Richard Taylor conseguiu demonstrar em Setembro de 1994 o resultado para a classe de curvas elípticas que incluiria a curva de Frey, fechando assim finalmente a saga do Teorema de Fermat.

A demonstração é muito longa tendo sido publicada em dois artigos[2]. Utiliza técnicas sofisticadas de várias áreas da Matemática e, dada a sua complexidade, possivelmente só há 20 ou 30 matemáticos no mundo capazes de a entender completamente.

A demonstração de Wiles encerrou um capítulo na História da Matemática mas talvez seja ainda mais importante por ser o começo de um novo e excitante capítulo. Deu um novo ânimo ao estudo da conjectura de Taniyama-Shimura, que foi finalmente demonstrada em 1999 para todas as curvas elípticas por C. Breuil, F. Diamond, B. Conrad e R. Taylor. Por seu lado a conjectura (agora teorema) de Taniyama-Shimura é a primeira pedra sólida de uma vasta teoria, conhecida como o programa de Langlands, proposta nos anos 60 pelo matemático canadiano Robert Langlands. Essencialmente o programa de Langlands é a procura de unificação de várias teorias matemáticas, não muito diferente da procura de teorias unificadoras em Física.

Só nos resta esperar que este novo capítulo não leve tanto tempo a ser concluído como o anterior.

Referências bibliográficas

1. Singh, Simon. *A solução do último teorema de Fermat*. Ed. Relógio d' Água, 1998.

2. • Wiles, Andrew. "Modular elíptica curves and Fermat's Last Theorem". *Ann. Math.*, II. Ser. 141, No.3, 443-551, (1995).

• Taylor, Richard; Wiles, Andrew. "Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras". *Ann. Math.*, II. Ser. 141, No.3, 553-572 (1995).

Margarida Mendes Lopes
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

A conjectura do fole

António Marques Fernandes

Se considerarmos polígonos construídos de tal modo que os lados sejam feitos de um material rígido, mas tais que os vértices sejam articulados então, não é difícil verificar que todos os polígonos se podem deformar (mantendo os lados inalterados) com uma única excepção: a do triângulo. Este facto simples ajudou a suportar durante muitos anos a convicção de que qualquer poliedro, possuindo faces triangulares, seria rígido.

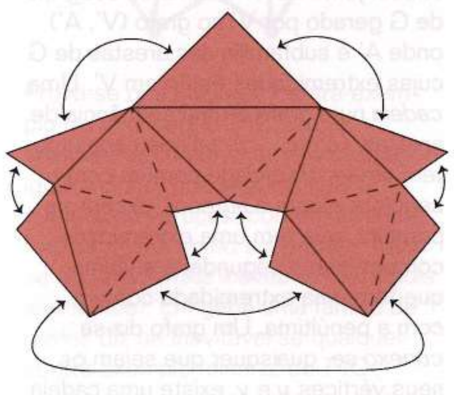
Embora a problemática da indeformabilidade de sólidos no espaço remonte a 1813, data em que Cauchy demonstrou que todo o poliedro convexo é indeformável, foi já no século XX, que se provou a existência de sólidos de faces triangulares flexíveis e se provou a denominada conjectura do fole (*bellows conjecture*), estabelecendo que o volume de um poliedro flexível de faces triangulares permanece inalterado durante qualquer deformação. (De facto é por esta razão que a conjectura recebe a designação de *conjectura do fole*: de acordo com este resultado não existem foles exactos, no sentido em que, se nos foles verdadeiros as faces não sofressem elas próprias deformações, então eles não conseguiriam bombear ar – a sua função).

Antes de continuarmos, importa precisar o que se entende por *deformação*, neste contexto. De facto no tipo de *deformação* que estamos a considerar, as faces do poliedro devem permanecer rígidas. O movimento produz-se apenas ao nível das arestas, alterando-se apenas os ângulos entre as faces. Esta exigência coloca de parte muitos exemplos que podem vir imediatamente à ideia, como sejam certas construções de *origami* ou o já referido exemplo do fole. Em todos estes casos a forma das faces é alterada, embora ligeiramente, durante as deformações.

A primeira pessoa a ter um vislumbre da possibilidade da existência de sólidos flexíveis, foi um engenheiro francês de nome Raoul Bricard. Falamos de um vislumbre na medida em que o seu exemplo consistia de uma figura imaginária com faces que se intersectavam mutuamente e que não podia ter correspondência em nenhum objecto real. Apesar disso, o exemplo de Bricard não se tratou de um mero vislumbre. Em 1970, Robert Connelly produziu uma modificação do poliedro não convexo, imaginário, de Bricard, construindo deste modo o primeiro exemplo de um sólido flexível de faces triangulares. Esta construção seria simplificada por Klaus Steffen, produzindo o exemplo cuja planificação se pode ver na figura abaixo.

- - - - - - dobra tipo vale

——— dobra tipo montanha



A análise destes exemplos sugeriu que durante a deformação o volume dos sólidos permanecia constante. De resto esta hipótese foi testada de modo engenhoso por Dennis Sullivan que, depois de construir o sólido de Steffen, introduziu fumo no seu interior através de um pequeno orifício, vindo a verificar que durante a deformação do sólido, o fumo permanecia no seu interior.

Estava formulada a conjectura do fole (uma conjectura, de resto, cujo análogo para duas dimensões é falso. É bem conhecido que deformando um rectângulo por exemplo, a respectiva área se altera).

Finalmente, num artigo publicado na revista *Contributions to algebra and geometry*, três matemáticos: R. Connelly, I. Sabitov e A. Waltz, demonstraram a veracidade da conjectura do fole.

A ideia central da demonstração consistiu em relacionar o volume do sólido com o comprimento das respectivas arestas (uma vez que esse valor permanece inalterado, o mesmo sucederia com o volume). A prova de Connelly, Sabitov e Waltz, é essencialmente algébrica. Eles demonstraram que se $d_1, d_2, \ldots, d_k$ são os comprimentos das arestas de um poliedro *S* de faces triangulares, então o volume de S, denotado $vol(S)$ é algébrico sobre $Z[d_1^2, \ldots d_k^2]$, o que em termos simples, significa que existe um polinómio com coeficientes que são *combinações algébricas* de $d_1^2, \ldots d_k^2$ e de números inteiros, de que $vol(S)$ é uma raíz.

Claro que, do ponto de vista teórico, um polinómio pode ter várias soluções mas, como as raizes são pontos isolados, o volume na deformação não pode *saltar* de um valor para outro, já que a deformação, sendo contínua, a alterar o volume do sólido teria que produzir uma alteração igualmente contínua.

Nas palavras de Ian Stewart, *é interessante que mais um teorema matemático tenha nascido a partir da manipulação de alguns modelos de cartão.*

Bibliografia

R. Connelly, I.Sabitov, A. Walz, "The Bellows Conjecture" in *Contributions to algebra and geometry*, Volume 38 (1997), No. 1, pp 1-10.

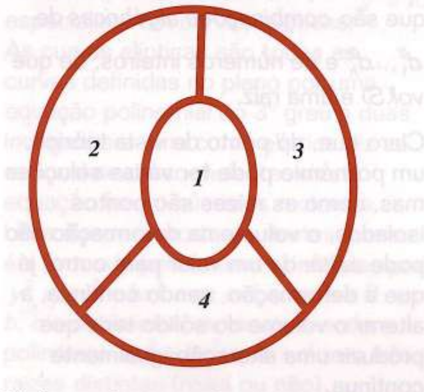
Ian Stewart, "Mathematical Recreations", in *Scientific American*, Julho 1998, pp 90-93.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

O Teorema das Quatro Cores (T4C)

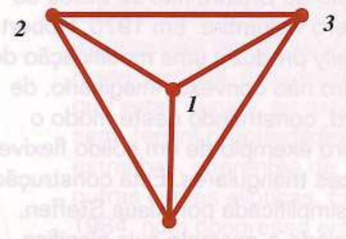
Jorge Nuno Silva

Em 23 de Outubro de 1852 De Morgan, professor do University College, em Londres, recebia de um aluno, Frederick Guthrie, o enunciado do Problema (ou Conjectura) das Quatro Cores. O autor da questão tinha sido o irmão do aluno, Francis, a quem o problema ocorrera quando coloria um mapa de Inglaterra. *Quatro cores bastam para pintar um mapa plano de forma a que dois países vizinhos não partilhem a mesma cor.* Países que só se tocam num ponto não são considerados vizinhos. Por exemplo, se num tabuleiro de xadrez cada casa representar uma nação, a coloração habitual alternada preto/branco mostra que duas cores bastam neste caso. Mas a figura abaixo prova que, às vezes, quatro cores são mesmo necessárias já que a zona 1 tem três vizinhos.



No lugar de áreas planas, revelou-se mais proveitoso usar grafos, de cuja teoria relembramos os conceitos mais básicos antes de avançar[3].

Um *grafo* é um par G = (V,A) onde V (*vértices* de G) é um conjunto finito e A (*arestas* de G) é uma família finita de pares não ordenados de elementos de V. Numa aresta $a = \{u,v\}$ diz-se que u e v são as *extremidades* de a. Uma aresta $\{u,v\}$ em que $u = v$ chama-se *lacete*. Se um grafo contém duas arestas com os mesmos elementos, estas dizem-se *arestas paralelas*. Um grafo que não contenha lacetes nem arestas paralelas diz-se *simples*. Há uma forma natural de associar um grafo a um mapa. A cada região corresponde um vértice, e dois vértices são adjacentes, isto é, definem uma aresta, exactamente quando as respectivas regiões são vizinhas. Por exemplo, ao mapa ilustrado acima corresponde o grafo



Grau de um vértice é o número de arestas incidentes nele.

Seja G = (V, A) um grafo e V' um subconjunto de V. Chama-se *subgrafo* de G gerado por V' ao grafo (V', A') onde A' é subfamília das arestas de G cujas extremidades estão em V'. Uma *cadeia* num grafo é uma sequência de arestas, $(a,b,c,...,z)$, tal que cada uma tem uma extremidade comum com a seguinte e com a anterior, excepto a primeira, que tem uma extremidade comum com a segunda, e a última, que tem uma extremidade comum com a penúltima. Um grafo diz-se *conexo* se, quaisquer que sejam os seus vértices u e v, existe uma cadeia em G que liga u a v. Grafos *planares* são os que se podem representar no plano sem que as suas arestas se intersectem para lá dos vértices. Um resultado que usaremos fica aqui realçado: se G é um grafo planar simples conexo então G tem um vértice de grau no máximo 5.

O *número cromático* de um grafo G é o menor número de cores necessárias para pintar os vértices de forma a que nenhuma aresta incida em vértices da mesma cor. O T4C equivale então a dizer que o número cromático de um grafo planar (sem lacetes) é, no máximo, 4.

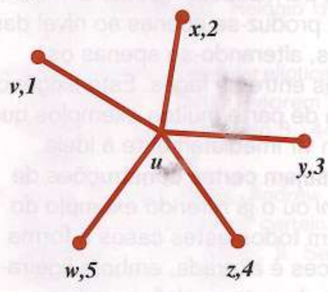
Em 1879 o jurista e matemático amador inglês Alfred Kempe publicou uma pretensa prova do T4C. O interesse neste problema baixou, ao pensá-lo resolvido, até que, em 1890, Percy Heawood, matemático inglês, mostrou que o argumento de Kempe não era satisfatório. Contudo, no mesmo trabalho, Heawood mostrou como o *método das cadeias de Kempe* podia ser utilizado na prova do T5C. É essa demonstração que apresentaremos, na linguagem da teoria dos grafos. Vamos usar Indução Matemática em v, o número de vértices do grafo. Se v é menor ou igual a 5, o resultado é óbvio. Suponhamos que vale também para $v=n$ e seja G=(V, A) um grafo planar com $n+1$ vértices. Como realçámos atrás, G tem um vértice de grau no máximo 5, seja u um tal vértice.

Seja G' o subgrafo de G gerado por V-{u}. Tem-se que G' é um grafo planar com n vértices, logo, por hipótese de indução, o seu número cromático é no máximo 5.

Caso 1. A coloração dos vizinhos de u em G usa menos do que cinco cores. Neste caso sobra pelo menos uma cor para pintar u. E assim temos uma coloração de G com cinco cores.

Caso 2. A coloração dos vizinhos de u em G usa cinco cores. Neste caso o grau de u em G é cinco.

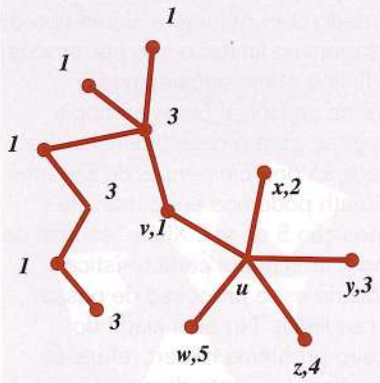
Sejam os vizinhos de u em G representados por v, x, y, z, w, e as respectivas cores numeradas de um a cinco.



Podemos colorir todos os vértices de G com cinco cores da forma seguinte.

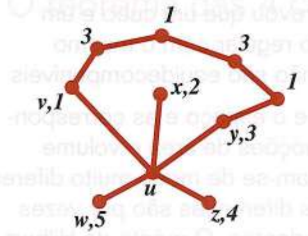
Consideremos todas as cadeias que partem de *v* e alternam as cores 1 e 3.

Caso 2.1. Nenhuma destas cadeias termina em *y*.



Nesta situação podemos trocar entre si as cores 1 e 3 nas cadeias consideradas, ficando a cor 3 disponível para colorir *u*.

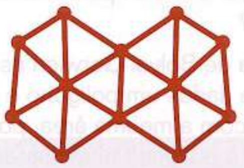
Caso 2.2. Uma destas cadeias termina em *y*.

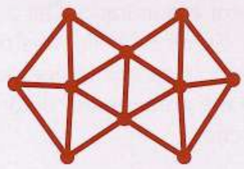


Agora, como o grafo é planar, nenhuma cadeia que nasça em *x* e que alterne as cores 2 e 4 pode cruzar a cadeia marcada na figura acima. Portanto podemos, à semelhança do que fizemos no Caso 2.1, trocar entre si as cores 2 e 4 em todas as cadeias que partam de *x* e alternem as cores 2 e 4, libertando assim a cor 2 para *u*.

A demonstração está terminada.

Método semelhante foi utilizado por Kempe na sua tentativa de demonstração do T4C. Pegar num grafo G e mostrar que qualquer grafo que o contenha, se for colorido com cinco cores, sendo uma cor usada num único vértice, que também está em G, pode ser recolorido com quatro cores, como Kempe tentou, pode aplicar-se a algumas configurações, ditas *reductíveis*, mas não funciona com todas, por exemplo não se pode aplicar às duas seguintes:





Prova-se que qualquer contra-exemplo minimal para o T4C, isto é, qualquer grafo com número cromático igual a cinco, que seja minimal no número de vértices, contém uma das formas acima como subgrafos. Trata-se de uma *família inevitável* (com dois elementos). Em geral uma família de grafos diz-se *inevitável* se qualquer contra-exemplo minimal do T4C contiver necessariamente um elemento da família. Para demonstrar o T4C precisamos então de arranjar uma família inevitável composta por grafos reductíveis. Foi exactamente isto que Appel, matemático americano, e Haken, matemático alemão, trabalhando em Urbana, nos EUA, conseguiram, com a ajuda de um computador IBM 360. A família inevitável utilizada tinha perto de 2000 elementos, a prova não pode ser inspeccionada por um ser humano, é demasiado longa. Trata-se do primeiro exemplo de uma demonstração cuja validade não pode ser aferida pelos colegas dos autores. Em 1994 uma prova simplificada da autoria dos matemáticos americanos Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas foi anunciada[6]. A respectiva família inevitável contém somente 633 elementos, e os algoritmos utilizados são mais eficientes. Contudo, a colaboração do computador é ainda necessária.

Referências

1. R. Fritsch, *The Four-Color Theorem*, Springer 1998
2. L. Saaty & P. Kainen, *The Four-Color Problem*, Dover 1986
3. I. Silva, *Tópicos de Matemática Finita*, AEFCL 1992
4. G. Toth, *Glimpses of Algebra and Geometry*, Springer 1998
5. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
6. http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

O terceiro problema de Hilbert

Eduardo Veloso

Fez 100 anos em 8 de Agosto passado que David Hilbert proferiu a conferência famosa em que enunciou 23 problemas que iriam influenciar, na sua perspectiva, a história da matemática no séc. XX. Disse Hilbert aos seus colegas matemáticos:

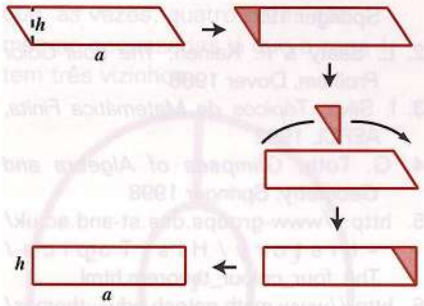
> Qual de nós não gostaria de levantar o véu atrás do qual o futuro está escondido, de lançar um olhar sobre os avanços da nossa ciência e sobre os segredos do seu desenvolvimento nos séculos futuros? Quais serão os objectivos específicos que procurarão atingir os mais agudos espíritos matemáticos das futuras gerações? Que novos métodos e factos serão desvendados, no amplo e rico domínio da matemática, nos próximos séculos?

David Hilbert, 1900

Dos 23 problemas, o terceiro é considerado o mais elementar e foi logo resolvido no mesmo ano de 1900. A sua solução revela uma diferença essencial de comportamento relativamente a certas propriedades dos objectos geométricos – área e volume – quando passamos da segunda para a terceira dimensão. Devido à falta de espaço, aceitaremos sem análise as noções intuitivas de área e volume que cada um de nós tem ao ler este texto, mas prometemos noutra altura voltar a este assunto importantíssimo e habitualmente muito mal tratado no nosso ensino básico. Comecemos pela dimensão dois.

O teorema de Bolyai-Gerwien

Todos nós passámos na escola básica pela "descoberta" da fórmula da área do paralelogramo pelo método da *dissecção*:



Ou seja, cortamos o paralelogramo num número finito de peças (neste caso, em duas), juntamos as peças (sem ligar às suas fronteiras) de modo a formar uma figura de área conhecida (neste caso um rectângulo) e ficamos assim a conhecer a área do paralelogramo. Até ficamos com uma fórmula!!!

Pelo menos desde os gregos é essa a ideia fundamental para calcular áreas de polígonos (e apenas essas figuras nos interessam neste texto). Diremos que dois polígonos são *equidecomponíveis* se é possível cortar um deles num número finito de peças e rearranjá-las, por meio das isometrias do plano, e sem ligar às fronteiras, de modo a formar o outro.

Dois polígonos equidecomponíveis têm naturalmente a mesma área. Será a recíproca verdadeira?

F. Bolyai (pai de Janos Bolyai, um dos inventores da geometria hiperbólica) e P. Gerwien demonstraram que sim, independentemente, nos anos trinta do século XIX. Isto é,

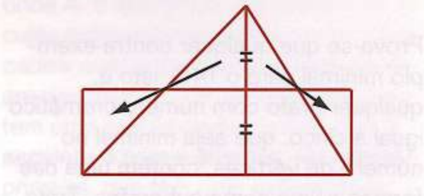
Dois polígonos são equidecomponíveis se e só se têm a mesma área (teorema deBolyai-Gerwien).

Uma demonstração simples pode encontrar-se no livro de Stan Wagon referido na bibliografia.

O terceiro problema

Essencialmente, o terceiro problema de Hilbert consiste em colocar a questão: existirá um teorema análogo ao de Bolyai-Gerwien para a terceira dimensão?

O teorema de Bolyai-Gerwien assegura-nos que dados um polígono e um quadrado com a mesma área, posso decompor o polígono num número finito de polígonos e juntá-los de forma a obter o quadrado. Daí o cálculo das áreas de polígonos poder fazer-se, depois de aceite que sabemos o que é a área de um rectângulo, por dissecção.



Por exemplo, esta figura mostra como posso dissectar um triângulo em três partes e juntá-las de modo a formar um rectângulo.

Se existisse um análogo do teorema de Bolyai-Gerwien para o espaço, isso significaria que poderíamos encontrar processos semelhantes de calcular volumes de poliedros, por exemplo de uma pirâmide. Ora, desde Euclides que o cálculo do volume de uma pirâmide tinha sido sempre sido abordado com recurso a algum tipo de passagem ao limite, e não por processos finitos como aqueles que o teorema de Bolyai-Gerwien podia assegurar para o caso bidimensional. Na edição dos *Elementos* de Euclides de Heath podemos encontrar, na proposição 5 do vol. XII, a "escada do diabo", uma figura característica indicando esse processo de passagem ao limite. No enunciado do terceiro problema Hilbert refere-se precisamente a esta demonstração de Euclides e prevê que na terceira dimensão, para poliedros, a equivalência entre equidecomponibilidade e igualdade de volumes não seja demonstrável no caso geral.

Hilbert tinha razão. Logo no mesmo ano de 1900, um seu discípulo, Max Dehn, provou que um cubo e um tetraedro regular com o mesmo volume não são equidecomponíveis.

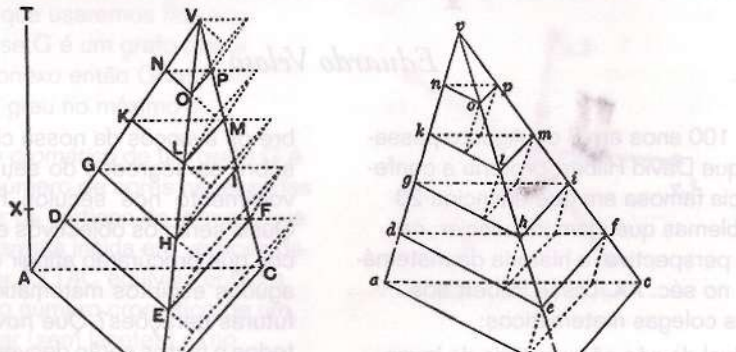
O plano e o espaço e as correspondentes noções de área e volume comportam-se de modo muito diferente. Essas diferenças são por vezes surpreendentes. O mérito de Hilbert foi colocar claramente uma questão e prever correctamente a sua resposta.

Bibliografia

Boltianskii, Vladimir. Hilbert's third Problem, trad. de R. Silverman.Washington, D.C.: Winston, 1978.

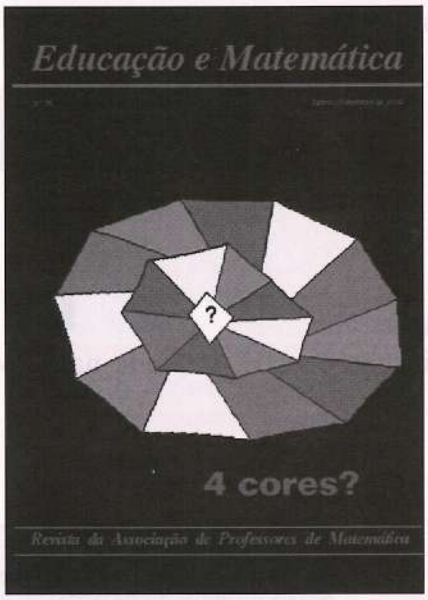
Wagon, Stan. The Banach-Tarski Paradox. N.Y.: Cambridge University Press, 1985.

Eduardo Veloso

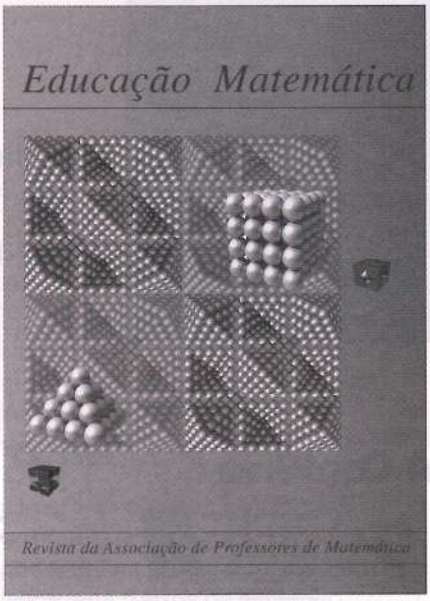


A escada do diabo

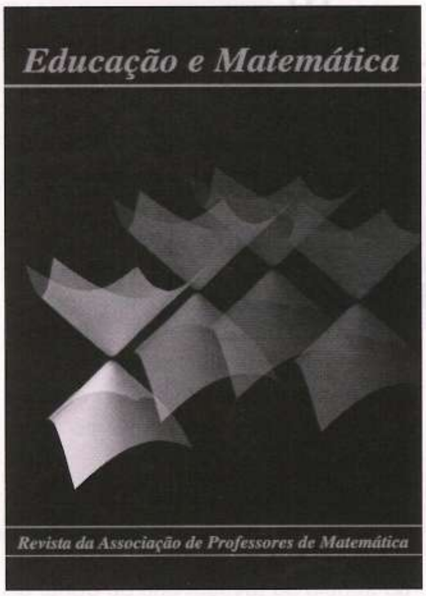
Cinco problemas Cinco capas



nº 56
O teorema das 4 cores

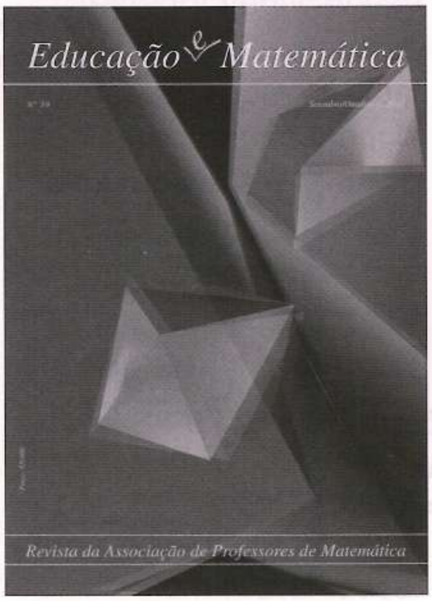


nº 57
A conjectura de Kepler

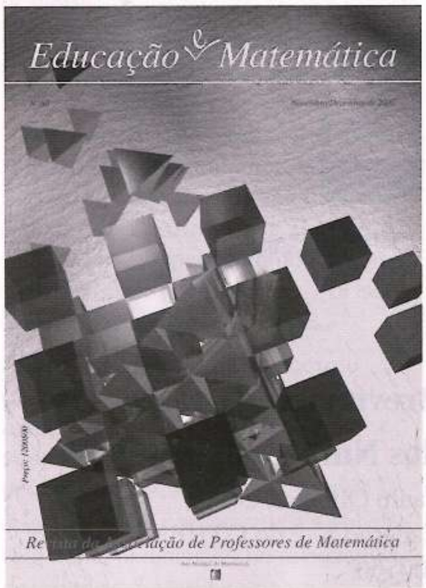


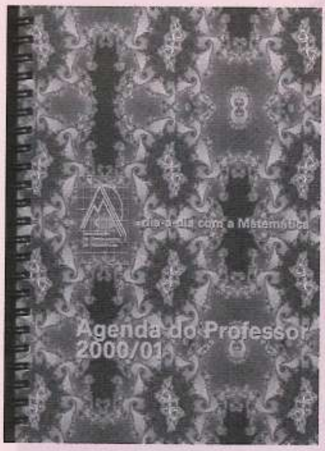
nº 58
O último teorema de Fermat

nº 59
A conjectura do fole



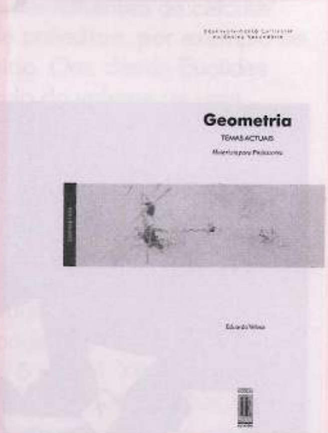
nº 60
O terceiro problema de Hilbert





Agenda do Professor 2000/2001

APM, 2000
1000$00



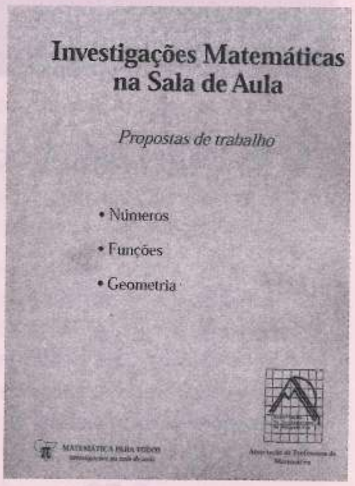
Geometria Temas Actuais

Eduardo Veloso, 1998
4250$00

Reimpressão
Publicação do IIE, à venda na APM

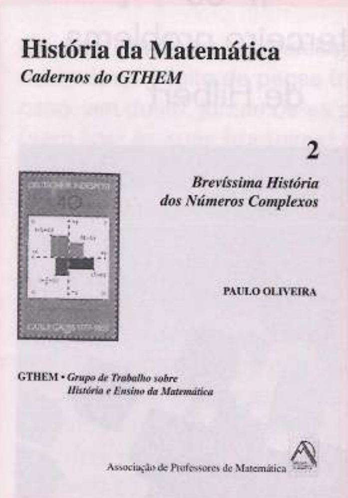
Calendários Comemorativos do AMM

Tradução APM
2500$00



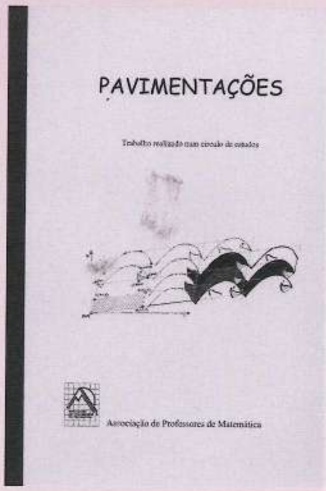
Investigações Matemáticas na Sala de Aula: propostas de trabalho

APM, 2000
1500$00



Brevíssima História dos Números Complexos

Paulo Oliveira, 2000
Caderno nº 2 do GTHEM
600$00



Pavimentações

Trabalho realizado num círculo de estudos

APM, 2000
3500$00

As demonstrações da Vânia

Joana Porfírio

Há três anos desenvolvi, em colaboração com a Teresa Olga Duarte, um projecto de natureza curricular numa turma do 8º ano em que a exploração de investigações matemáticas ocupava um papel central.

Neste artigo, procuro partilhar um conjunto de reflexões que surgiram com o desenrolar desta experiência e que giram à volta da demonstração.

Começo por apresentar algumas das reacções/observações de uma aluna — a Vânia Alexandra — quando tentava validar as conjecturas que tinham sido formuladas e testadas a partir do trabalho desenvolvido pelo seu grupo de trabalho. Com base em três episódios referentes ao modo de pensar desta aluna, procuro argumentar que a demonstração é um meio importante de promover a compreensão da Matemática e que é um aspecto que deve ser trabalhado com todos os alunos.

As tentativas de demonstração da Vânia

Ao longo do ano lectivo, os alunos da turma com que trabalhámos, exploraram 13 tarefas de investigação. Com base nos dados recolhidos na altura, vou relatar três episódios que se passaram com a Vânia. Embora eles sejam apresentados cronologicamente, os motivos que me levaram a seleccioná-los, prenderam-se apenas com o facto de ilustrarem dificuldades e descobertas de vários alunos relativamente à demonstração das conjecturas que formulavam. Assim, estão longe de pretender corresponder a uma descrição da evolução da Vânia e, mais ainda, duma possível reflexão sobre padrões gerais de evolução dos alunos da turma.

Episódio 1: Porque é que um polígono regular de n lados tem n eixos de simetria?

Este é um episódio com três etapas. Numa primeira, a Vânia, tal como os seus colegas de turma, depois de investigar o número de eixos de simetria dos polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 7 e 8 lados concluiu que o número de eixos de simetria era sempre igual ao número de lados e, portanto, um polígono regular com n lados teria n eixos de simetria.

A professora, ao discutir as explorações realizadas pelos alunos, salientou a diferença entre afirmar que uma propriedade é válida para determinados casos em que se ela se verificou experimentalmente e afirmar que ela é válida para todos. Depois, desafiou os alunos a olharem para a forma como traçavam os eixos de simetria e pediu-lhes que pensassem, em casa, numa forma de validar a afirmação que tinham descoberto.

Na sequência deste desafio, ocorreu a segunda etapa deste episódio. A Vânia incluiu no seu dossier o seguinte texto:

> (...) Devia ser n; embora não o conseguisse provar sabia que era verdade (...) cheguei à conclusão que o número de lados é par ou impar. Quando é par juntamos lado com lado. Isto é $n/2$, e vértice com vértice, outra vez $n/2$, e a soma é n. Quando é impar juntamos vértice com lado e o total é n eixos. Por isso é sempre n e está provado.

A terceira e última etapa ocorreu quando o grupo da Vânia apresentou a sua exploração desta tarefa numa sessão a que assistiram alunos de uma ESE. Nessa altura, depois de desafiarem os participantes a pensarem numa justificação da relação descoberta, a Vânia comentou:

> A Vânia, tal como os seus colegas de turma, inicialmente não sentia qualquer necessidade de demonstrar as conjecturas que tinha testado: verificava-se para uns *poucos*, verificava-se para todos. Mas, na sequência de um trabalho em que a justificação das descobertas e afirmações era valorizada, conseguiu ir tendo uma ideia mais rica do significado e da importância da demonstração em Matemática.

— Nós estávamos habituados a ver uma coisa e já está, era assim. Mas agora começámos a ter mais cuidado. Eu nunca tinha pensado nisto e gostei de conseguir.

Episódio 2: Porque é que os ângulos correspondentes, do mesmo lado da secante, são iguais?

Os alunos tinham construído, com o auxílio do *Sketchpad*, duas rectas paralelas cortadas por uma secante e chegado à conclusão experimental, por exemplo, de que os ângulos alternos internos eram sempre iguais. Mas hesitavam sobre o que deveriam fazer/pensar de modo a responderem ao *porquê* que estava no enunciado da ficha. Durante este impasse, passei pelo grupo e perguntei "Vocês percebem o que têm de tentar explicar?". A resposta da Vânia:

— Sim. Temos de ver porque é que quando se arrasta a recta, estes ângulos ficam sempre iguais.

Depois de pensarem um pouco mais:

— Isto é porque as linhas são paralelas é que dá isso. (Vânia)

— Olha isso já a gente sabia.

— Sim, mas se a gente pegar nesta linha pode pô-la em cima da outra. Fica só uma recta. (Vânia)

— Já sei. Já sei. Por isso é que os ângulos têm de ser iguais. Assim vê-se que são o mesmo ângulo.

— E por isso é que são iguais. (Vânia)

Episódio 3: Do prever onde fica um número até ao "temos que escrever a linha do n".

O grupo da Vânia tinha formulado e testado várias conjecturas a propósito das relações que descobriram entre os seguintes números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
...	...	...	...

Quando a professora lhes perguntou as conclusões a que tinham chegado, uma colega de grupo da Vânia respondeu:

— Ainda não sabemos. Temos muitas conjecturas. Mas ainda não as provámos.

Quando começaram a tentar demonstrar algumas das conjecturas que tinham formulado e testado, a Vânia, começou por dizer:

— Então, temos que ter uma ideia que generalize, não é?

Depois, construiu uma tabela com bastantes linhas (que ocupava uma folha A_4) mas em que apenas a primeira linha estava preenchida com números.

O grupo começou, então, a tentar prever os números que iriam ficar em várias linhas, mas sem os escrever todos até lá:

— Agora explica lá. (Vânia)

— Se na linha 10 for 36, na linha 20 é 72.

— Mas isso não generaliza. Se a gente souber esta (a primeira coluna) é só somar 1, 2 ou 3. (Vânia)

A Vânia, desde o princípio, não parecia acreditar nas possibilidades deste processo de previsão. No entanto, durante algum tempo, colaborou com os colegas:

— Então aonde fica o 100?

— Vai ficar na primeira coluna.

— Sim. E vai ficar na linha ... espera então é de 4 em 4.

— Na linha 10 temos o 40.

— Não, o 40 está na linha 11. (Vânia)

(...)

— Então e agora onde fica outro? Onde fica o 89?

(...)

— Agora temos de parar. Isto dá para ajudar, mas agora temos mesmo que generalizar. Eu acho que já sei como fica a linha do *n*. (Vânia)

Na sequência de alguma discussão e troca de esclarecimentos com os colegas, a Vânia lidera a demonstração de conjecturas que envolviam operações com linhas e colunas. Assim, por exemplo, demonstraram que a soma da 2ª coluna com a 4ª vai dar múltiplos de 4, da seguinte forma (ver caixa).

Linha do n	4(n – 1)	4(n – 1) + 1	4(n – 1) + 2	4(n – 1) + 3

$4(n-1)+1+4(n-1)+3=4n-4+1+4n-4+3=8n-4$
que é sempre um múltiplo de 4.

Um comentário dos episódios anteriores

A Vânia, tal como os seus colegas de turma, inicialmente não sentia qualquer necessidade de demonstrar as conjecturas que tinha testado: verificava-se para uns *poucos*, verificava-se para todos. Mas, na sequência de um trabalho em que a justificação das descobertas e afirmações era valorizada, conseguiu ir tendo uma ideia mais rica do significado e da importância da demonstração em Matemática. Embora o foco deste artigo não se situe ao nível da caracterização da experiência curricular desenvolvida com a turma da Vânia, é importante realçar que a demonstração foi objecto de um trabalho explícito com os alunos. Assim, depois de recolherem e organizarem dados, formularem e testarem conjecturas, a Teresa Olga sempre insistiu no *porquê*. Nalguns casos incentivou os alunos a pensarem e foi dando sugestões que os podiam apoiar. Noutros, organizou ela própria a demonstração e procurou ir discutindo as questões e opções que se colocavam a cada passo do processo que seguia. Nos casos, em que, por restrições impostas pelos conhecimentos matemáticos dos alunos, as conjecturas que tinham resistido a sucessivos testes não podiam ser demonstradas por eles, este aspecto sempre foi claramente vincado pela Teresa.

O episódio 1 pode ser interpretado como revelando uma primeira ideia comum antes de pensar numa demonstração. Está-se convencido de que uma coisa é verdade — *devia ser n* — mas, apesar disso, procura-se corresponder ao desafio que constitui organizar uma demonstração. No caso da Vânia, esta atitude pode ser entendida como uma tentativa de corresponder ao que a professora espera e valoriza. No entanto, mesmo que esta tenha constituído a motivação inicial, a verdade é que a Vânia considerou ter tido um certo prazer em pensar na demonstração.

No episódio 2, a Vânia realça um aspecto importante do significado de demonstrar: perceber porque é que determinada relação ou propriedade se verifica. Para além disso, consegue descobrir um processo que efectivamente justifica a relação de igualdade entre os ângulos considerados.

Finalmente, no episódio 3, após uma fase que a Vânia e os seu colegas de grupo pareciam corresponder, inequivocamente, à formulação e teste de conjecturas que não tinham sido provadas, começaram um processo de *previsão* da tabela numérica: tentam saber em que linha e coluna fica um determinado número e constroem uma tabela com espaços em branco (só escrevem os números da primeira linha). A passagem de uma tabela com todos os espaços preenchidos com números para outra tabela em que há espaços que não estão preenchidos é a primeira tentativa que corresponde à procura de "uma ideia que generalize". De facto, seguem um caminho que os ajuda a abstrair dos números e que lhes irá permitir chegar à expressão geral de qualquer linha da tabela, revelando ter uma noção importante associada à demonstração: procurar olhar para o geral e não para casos particulares. Além disso, conseguem demonstrar várias das conjecturas que tinham formulado e testado.

Os episódios anteriores evidenciam dois aspectos. Um primeiro, diz respeito à demonstração como um meio para aprofundar o conhecimento dos alunos. A Vânia não teve apenas acesso ao conhecimento de determinadas relações matemáticas. Conseguiu desenvolver um conjunto de raciocínios que enriqueceram a compreensão dessas relações. Um segundo, diz respeito à compreensão do que é a Matemática. Embora com as limitações impostas pelo seu nível de conhecimentos, a Vânia teve uma experiência em que o raciocínio e a demonstração eram valorizados. Progressivamente, começou a entender o significado e a importância de justificar o que fazia e a perceber como isso era importante para ajudar a perceber o *porquê* de uma dada relação. Mostrou também perceber o *estatuto* de uma conjectura e de só se poder afirmar a sua validade depois de a demonstrar.

Uma nota final sobre a demonstração

Ao longo deste artigo usei sempre o termo demonstração. Em jeito de brincadeira, posso dizer que o fiz para *fazer a vontade* ao Eduardo Veloso. É que quando falei um pouquinho com ele sobre o tema deste artigo, ele disse-me mais ou menos textualmente:

— Se gostavas de escrever sobre esse tema parece-me muito bem. Desde que não chames prova à demonstração.

O principal argumento dele? Parece que começa a notar-se uma certa tendência de associar prova a uma demonstração de segunda categoria, o *tipo de coisa* que estará ao alcance dos alunos no Ensino Básico.

A verdade é que, depois de ter lido alguns artigos em que se distinguem os termos argumentação, prova e demonstração, fiquei com a convicção de que, quando pensamos nos alunos e no que podemos e devemos trabalhar com eles, há aspectos mais relevantes do que saber se é lícito considerar determinado tipo de justificação como constituindo uma demonstração, ou se pelo contrário será melhor dizer que se trata de um argumento ou de uma prova. Do meu ponto de vista, é mais importante conseguir, em todos os níveis de escolaridade, promover o hábito de justificar as afirmações que se fazem, desenvolver e criticar raciocínios e reconhecer que o raciocínio e a demonstração são fundamentais em Matemática.

Para que a Vânia, ou para que um outro aluno do Ensino Básico, seja capaz de perceber a necessidade de demonstrar e conseguir organizar uma demonstração matemática, entendida como "um modo formal de expressar determinados tipos de raciocínio e de justificação" (NCTM, 2000, p. 56), terá que ser preparado um caminho que passa, por exemplo, por reconhecer a importância de justificar uma afirmação e de usar raciocínios e justificações adequados em matemática.

Os dois primeiros episódios não relatam demonstrações matemáticas feitas pela Vânia. No entanto, com as limitações impostas pelos seus conhecimentos matemáticos ela demonstrou várias relações e entendeu o significado de o fazer. Sem este tipo de experiência, dificilmente teria conseguido tomar a iniciativa de usar o método mais formal que é descrito no episódio 3. Primeiro teve de perceber o *estatuto* de uma conjectura, que demonstrar também significa perceber o *porquê*, que para demonstrar é importante olhar para *o geral*. Mas também foi importante sentir-se desafiada e gostar de pensar nos *porquês*.

Em todos os episódios anteriores a Vânia descobriu um argumento convincente, ou seja, demonstrou as relações a que tinha chegado experimentalmente. Em certa medida, o que ela fez foi aquilo que os matemáticos fizeram e continuam a fazer: recorrer aos conhecimentos e ferramentas de que dispõem para justificar as suas descobertas. Nuns casos, demonstrações que foram consideradas como tal em determinada altura, são posteriormente reformuladas à luz do rigor matemático que se atingiu entretanto. Noutros casos, mais recentemente, recorre-se ao computador para realizar grande parte da demonstração.

Claro que é importante que a Vânia perceba e consiga usar um modo formal e característico da Matemática de demonstrar. Mas, ao nível do que era possível no 8º ano, ela conseguiu demonstrar.

Referência Bibliográfica

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Joana Porfírio
ESE de Setúbal

José Paulo Viana

Banho na Piscina

A minha amiga Maria João convidou-me outro dia para ir tomar banho na bela piscina rectangular que a família tem na Praia das Maçãs.

A certa altura, parei de nadar e reparei que estava a 8 metros exactos de um dos cantos, a 13 metros do canto seguinte e a 15 metros do terceiro canto.

A que distância estava do último canto?

Mais difícil: qual é a maior piscina (em área) onde isto poderia ter acontecido?

Respostas até 15 de Janeiro

Travessia do Deserto

No número 58 de Educação e Matemática propusemos este problema:

Um pelotão militar está acantonado junto a um deserto, dispondo de cinco jeeps.

A carga máxima de gasolina que cada jeep consegue transportar, no depósito ou em bidões, dá para 600 quilómetros.

A certa altura, é preciso ir levar um material secreto a outro posto militar que fica do outro lado do deserto, a 1350 quilómetros de distância.

Dada a gravidade da situação, o comandante está disposto a, se necessário, abandonar alguns jeeps no deserto, transferindo a gasolina de uns para os outros.

Conseguirá a missão ser cumprida?

Qual é a máxima distância que um jeep pode alcançar?

Esperando que nada se tenha perdido durante a naturalmente difícil mudança da sede da APM, recebemos as resoluções de : Augusto Taveira (Faro), Edite Magalhães (Braga), Eduarda Pereira (Felgueiras), Eduarda Terremoto Santos (Tavira), José Manuel Oliveira (Cruz de Pau), Margarida Correia (Castelo Branco), Sérgio Peixoto (e-mail), Sílvia Machado e Carlos Caldeira (Barreiro).

Conforme salienta o Augusto (e também o Sérgio, a Sílvia e o Carlos por outras palavras) "o objectivo será atingido se cada um dos *jeeps* "auxiliares" andar o menos possível, de forma a poupar combustível". Assim, logo que se possa esvaziar um depósito, a gasolina de um *jeep* deve ser transferida para os outros, que ficam de depósito atestado.

Como os *jeeps* são 5, logo que tenham andado o equivalente a um quinto do depósito, os quatro quintos de gasolina do primeiro *jeep* a abandonar podem ser distribuídos pelos outros, que ficam assim de depósito cheio. Isto acontece após $\frac{600}{5}=120$ quilómetros.

O raciocínio repete-se para 4 *jeeps*, que andarão $\frac{600}{4}=150$ quilómetros até mais um *jeep* ser abandonado.

Os 3 jeeps seguintes andarão 200 quilómetros. Depois, 2 *jeeps* avançam 300 e o último *jeep* pode avançar mais 600 quilómetros.

A distância máxima a que o último jeep pode chegar é portanto

$120+150+200+300+600 = 1370$ km.

Conclusão: a missão pode ser cumprida e o jeep que chega ao fim ainda tem gasolina para mais 20 quilómetros.

A Sílvia e o Carlos observam que talvez fosse de tentar pôr um *jeep* a rebocar os outros. O consumo do jeep que puxasse seria maior mas talvez compensasse. Ou seja, seria possível procurar outras soluções que, na prática, nos levassem mais longe...

O José Manuel lança outras questões, que abrem novos problemas:

— E se os quilómetros percorridos fossem uma função do peso do *jeep*?

— E se para cada quilómetro existisse uma probabilidade (muito pequena) de um *jeep* se avariar? ■

José Anastácio da Cunha – uma tragédia eterna

Jaime Carvalho e Silva

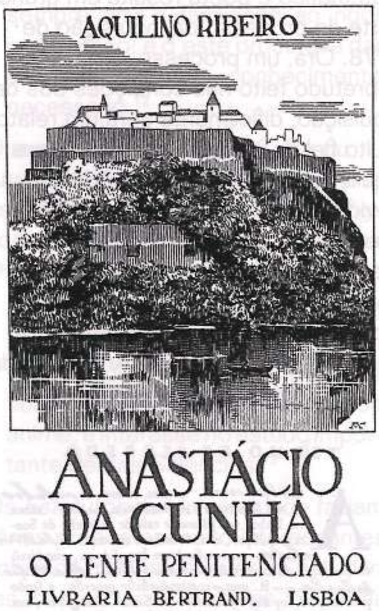
Anastácio da Cunha pretendeu, com os seus *Principios Mathematicos* fazer uma "reforma geral completa do sistema das mathematicas puras". Não admira, por isso, que o livro contenha muitas definições, algumas delas inovadoras.

Copado, alto, gentil Pinheiro Manso;
Debaixo cujos ramos debruçados
Do sol ou lua nunca penetrados,
Já gozei, já gozei mais que descanso…

O célebre romancista Aquilino Ribeiro qualifica o soneto de José Anastácio da Cunha que se inicia com esta quadra como uma "gema rara". Mas opina também que nas poesias então conhecidas do matemático se podem encontrar "versos de mau gosto, mais horripilantes que gazómetros".[1]

Estes extremos caracterizam de algum modo não só a vida do matemático e poeta José Anastácio da Cunha mas também a maneira como a sua vida e a sua obra foram lembrados desde que morreu em 1 de Janeiro de 1787. A maioria dos textos que, desde então, foram escritos sobre Anastácio da Cunha é parcial e preconceituosa, a favor ou contra Anastácio da Cunha. Muitos aproveitam para atacar as ideias da época, a igreja que supostamente Anastácio da Cunha criticara, os jesuítas ou o ensino universitário em geral. Um exemplo disso, que dispensa mais comentários, é o do matemático e político António José Teixeira que, nas notas às cartas de José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha, que editou entre 1890 e 1892, escreveu:

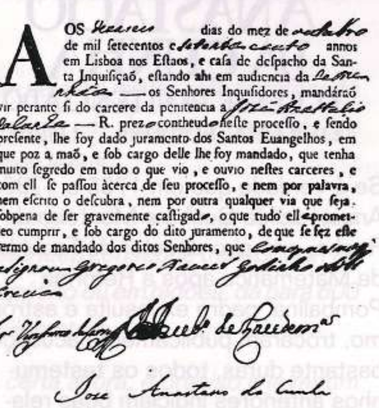
> Não devemos porém esquecer que José Monteiro da Rocha (…) havia pertencido à ordem dos jesuítas, e, posto que justamente possuia a reputação de um sábio, que nos faz muita honra, era um invejoso também, cheio de ambição insaciável, e vendo sempre em tudo a sombra do seu rival, cujo admirável ingenho a consciencia lhe advertia irrecusavelmente ser, em gráu elevadissimo, superior ao seu.[2]



Se é verdade que em 1785 e 1786 Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha, primeiro director da Faculdade de Matemática após a Reforma Pombalina, padre ex-jesuíta e astrónomo, trocaram publicamente acusações bastante duras, todos os testemunhos anteriores indiciam boas relações entre os dois. O que não quer dizer que não tenham existido querelas, mas para poder concluir tal é preciso encontrar documentos que o provem; muitos comentadores exprimem opiniões baseadas nas suas ideias pessoais ou no modo como vêem a época, mas a História não se compadece com esses preconceitos. As análises devem sempre partir de documentação conhecida (e mesmo essas análises são passíveis de contestação pois é possível que haja interpretações divergentes quanto ao alcance dos documentos conhecidos). É por isso que neste texto irei sobretudo chamar a atenção para vários aspectos inéditos relacionados com documentos que encontrei no decurso das minhas investigações ou para aspectos menos debatidos da vida e da obra de José Anastácio da Cunha.

O estudo mais abrangente publicado em Portugal sobre a vida e a obra de Anastácio da Cunha talvez seja o de João Filipe Queiró *José Anastácio da Cunha: Um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois*[3] pelo que tentarei não repetir temas aí abordados.

O que se sabe sobre a vida do matemático e poeta resulta em grande parte do processo da Inquisição de 1778. Ora, um processo judicial, sobretudo feito nas condições dos da Inquisição, dificilmente será um relato muito fiel da realidade. Como refere Aquilino Ribeiro, é preciso "dar o devido desconto a estas confissões, que não raro representam uma maneira de armar à boa disposição dos juízes".[4] Contudo tem sido ignorada uma fonte importante para conhecer a vida de José Anastácio da Cunha, como veremos de seguida.


TERMO DE SEGREDO.

AOS [illegible] dias do mez de [illegible] de mil ſetecentos e [illegible] annos em Lisboa nos Eſtaos, e caſa de deſpacho da Santa Inquiſiçaõ, eſtando ahi em audiencia da [illegible] os Senhores Inquiſidores, mandáraõ vir perante ſi do carcere da penitencia a José Anastasio da Cunha R. preſo contheudo neſte proceſſo, e ſendo preſente, lhe foy dado juramento dos Santos Euangelhos, em que poz a maõ, e ſob cargo delle lhe foy mandado, que tenha muito ſegredo em tudo o que vio, e ouvio neſtes carceres, e com ell ſe paſſou àcerca de ſeu proceſſo, e nem por palavra, nem eſcrito o deſcubra, nem por outra qualquer via que ſeja. ſobpena de ſer gravemente caſtigado, o que tudo elle prometteo cumprir, e ſob cargo do dito juramento, de que ſe fez eſte termo de mandado dos ditos Senhores, que [illegible]

Jose Anastasio da Cunha

Termo de segredo com que fecha o processo de José Anastacio da Cunha.

João Manuel de Abreu, discípulo e amigo de Anastácio da Cunha pretendia publicar em França uma *Notice sur la vie de J. A. da Cunha*[5]. Viveu alguns anos em França mas, que se saiba, não o chegou a fazer, embora tenha editado várias outras obras, como uma tradução francesa dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha. Parece claro que ele e um outro discípulo, Anastácio Joaquim Rodrigues, tentaram, ao máximo, divulgar em França a obra de Anastácio da Cunha; por exemplo, os *Principios Mathematicos* chegaram à Academia das Ciências de Paris e está registado nas actas das sessões da Academia de 1811 que o matemático Lacroix ficou de elaborar um parecer (mas este nunca foi apresentado na Academia). Contudo, é muito provável que João Manuel de Abreu tenha dado a conhecer a várias pessoas a sua *Notice* ou, pelo menos, os elementos essenciais da vida de Anastácio da Cunha e que seja por causa disso que, no século XIX, várias referências biográficas foram publicadas em enciclopédias francesas. A mais antiga delas é provavelmente a entrada, escrita por Villenave, da enciclopédia *Biographie Universelle,*

CUNHA (JOSEPH-ANASTASE DA) nascido em Lisboa em 1744, foi um desses homens raros, que, sem ter recebido uma educação cuidada, se elevaram a si próprios a um alto grau nas ciências, com a simples força do seu génio. O seu pai, arquitecto decorador de teatro, deu-lhe algumas lições de desenho e perspectiva, e enviou-o ao colégio dos oratorianos para aí aprender o latim. O acaso fez com que chegassem às mãos do jovem Cunha os *Elementos de Geometria* do padre Tosca, e desde então o estudo deste livro tornou-se o seu passatempo favorito. Em breve, o seu génio, como o de Pascal, fê-lo preencher os vazios, e corrigir as imperfeições que o autor tinha deixado na sua obra. Um dos padres do Oratório deu-lhe os *Éléments d'Euclide* por Tacquet. Emprestaram-lhe uma gramática francesa, um dicionário, e alguns livros nos quais, quase sem ajuda, aprendeu o francês e extraiu os seus primeiros conhecimentos. Em 1762, o conde de la Lippe tendo sido chamado a Portugal para organizar e comandar o exército, Da Cunha, que acabava de perder o seu pai, quis seguir a carreira das armas, e foi nomeado subtenente no regimento de artilharia de Valença. O coronel, Ferrier, oficial instruído, soube distinguir o seu mérito, e colocou uma biblioteca escolhida à sua disposição. E foi na vida agitada dos campos e guarnições que, pela simples impulsão do seu talento e pelo amor do estudo, Da Cunha adquiriu em pouco tempo conhecimentos profundos e variados nas línguas antigas e modernas, na filosofia, na história, nas belas letras, e sobretudo na matemática. Poder-se-á, com um simples facto, julgar a força do seu génio; sem ter outros elementos que os de Tosca ou do jesuíta Jacquet, ele começou a estudar a alta matemática pela *Arithmetica universalis* de Newton e pela *Algebra* de Simpson. Sem outra ajuda ele passou aos *Principia mathematica philosophiae naturalis* de Newton, comentados pelos padres Lesueur e Jacquier, e conseguiu, antes da idade de vinte e seis anos, entender bem este livro, que sempre exigiu aos mais sábios geómetras a mais profunda atenção. Foi-lhe em seguida fácil ler as obras dos Bernoulli, de Euler, de Clairaut e de D'Alembert. O estudo da matemática não o impedia de modo nenhum de cultivar ao mesmo tempo as letras. Já alguns trabalhos o tinham feito sobejamente conhecer, quando, sob recomendação do conde de la Lippe, o marquês de Pombal, o nomeou, em 1774, professor de uma das cadeiras de matemática da Universidade de Coimbra. Foi empregado, com distinção, em diversos trabalhos até 1778; mas, nessa época, foi preso por uma ordem secreta da inquisição, e riscado do número dos professores. Depois de dois anos de prisão, recuperou a liberdade, e a sua saúde, já enfraquecida, não lhe deixou mais que uma existência dolorosa. Recusou diversos empregos que o governo lhe ofereceu: o lugar de director do colégio real de S. Jorge foi o único que aceitou. Foi para esta escola que ele compôs os seus *Principios Mathematicos*, obra em que desenvolve um novo método que ele tinha julgado necessário introduzir no ensino, e que formou em breve alunos distintos. A sua obra foi impressa em Lisboa em 1782. Um dos seus amigos, professor no colégio de S. Jorge, traduziu-a em francês, e foi impressa em Bordéus em 1811. Um dos seus alunos fez o seguinte relatório no *Moniteur* de 8 de Agosto do mesmo ano: "Esta obra, profunda e baseada num plano uniforme, distingue-se por uma grande concisão, pelo vigor das demonstrações, e por muita originalidade. Com a ajuda do seu método, o autor conseguiu encerrar, num volume de 300 páginas, o que há de essencial na matemática, desde a noção de ponto até aos problemas dos isoperímetros, quer dizer, as verdades que compreendem o sistema de focos e pontos centrais, donde se podem deduzir todos os conhecimentos matemáticos." Uma morte prematura roubou Da Cunha à ciência e à sua pátria, a 31 de Dezembro de 1787. Deixou em manuscrito diferentes opúsculos matemáticos que os seus amigos pretendem publicar. Eles conservam também uma pequena recolha de poesias que lhe subtraíram, e onde brilha uma feliz mistura de sentimento e filosofia. Da Cunha tentou traduzir várias obras estrangeiras, entre outras a tragédia *Mahomet* de Voltaire, que foi representada em Portugal com um grande sucesso. V-VE.

"Biographie Universelle, ancienne et moderne ... – A Paris, chez Michaud frères, libraires", Tome dixième, 1813, p. 356-357.

ancienne et moderne... — *A Paris, chez Michaud frères, libraires* de 1813; esta entrada deverá ter sido acompanhada por algum discípulo de Anastácio da Cunha e até poderá ter sido parcialmente escrita por um deles. Por não ter sido ainda publicada em Portugal e conter elementos importantes transcrevo-a em anexo (caixa)[6]. É curioso que essa referência biográfica seja tão elogiosa ao qualificar Anastácio da Cunha como *un de ces hommes rares, qui (...) se sont élevés d'eux-mêmes à un haut degré dans les sciences, par la seule force de leur génie.* Como seria possível tal elogio a um homem de que apenas tinha sido publicada em França a tradução de um livro (com algumas lacunas graves que lhe deturpavam o sentido em passos essenciais[7])? Penso que só uma *campanha* dos amigos poderia ter produzido tal efeito. Contudo não deixo de assinalar que o bibliófilo português Inocêncio Francisco da Silva refere (sem documentar) "convites e instancias que algumas Universidades da Europa lhe dirigiram por vezes, oferecendo-lhe vantajosos partidos, no intuito de attrahirem a si um homem tao benemerito, cuja sciencia era mais acatada entre os extranhos, que entre os seus compatriotas"[8] e que Anastácio da Cunha não teria aceite para não abandonar a sua mãe (que lhe sobreviveu e a quem foi atribuída uma pensão devido aos serviços prestados por Anastácio da Cunha).


COMPOSIÇÕES POETICAS

DO

Doctor Joseph Anastasio da Cunha,

NATURAL DE LISBOA,

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra,

FALLECIDO NO ANNO DE 1787.

Agora colligidas pela primeira vez

LISBOA.

NA TYPOGRAPHIA CARVALHENSE,
ANNO DE 1839.
Rua dos Capellistas n.º 68.

Depois de falecer, José Anastácio da Cunha continuou a desencadear as paixões mais desencontradas. O livro *Composições poéticas*, contendo algumas poesias de Anastácio da Cunha, que Inocêncio Francisco da Silva editou em 1839 "a prol da gloria e engrandecimento da Litteratura Nacional" foi apreendido pela censura por "abuso de liberdade de imprensa em materia religiosa"[9]. O próprio trabalho de Aquilino Ribeiro não é isento de erros e exageros ao querer provar a todo o custo a *culpa* de Monteiro da Rocha. Vicente Gonçalves peca em sentido contrário ao querer provar que Anastácio da Cunha não era boa pessoa[10].

A controvérsia de 1785/1786 entre Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha[11] também documenta indirectamente alguns aspectos da vida e da obra de Anastácio da Cunha. Referirei dois aspectos dessa controvérsia.

A maioria dos estudantes que na Universidade de Coimbra frequentava a Faculdade de Matemática não era da licenciatura em Matemática. Segundo a "Relação Geral do Estado da Universidade" de 1777 os "(...) Estudantes que frequentam os Estudos de Mathematicas [dividem-se em] Ordinarios; Obrigados; e Voluntarios (...) Os Obrigados são aquelles, que hão de estudar necessariamente alguma parte de Mathematica como subsidio, e preparação, para o Estudo das Faculdades, a que se destinam: Como são os Medicos, os Juristas, Theologos e Philosofos. (...) Hé muito conveniente, que o Curso de Mathematica seja frequentado por todas estas classes de Ouvintes". Anastácio da Cunha teve assim como alunos da cadeira de Geometria alunos de várias (se não mesmo todas as) Faculdades. Havendo muitos alunos, a cadeira estava dividida em dois turnos, sendo o outro da responsabilidade de um professor italiano, Miguel Ciera. Segundo se pode ler numa carta do Reitor, D. Francisco de Lemos, "(...) os que frequentam a cadeira extraordinária do Dr Ciera dão a maior parte deles boa conta de si (...)". Significava isso que os alunos aprendiam bem? Há muitas maneiras de ensinar Geometria!... Anastácio da Cunha foi chamado ao Reitor devido a reclamações dos estudantes. Mas defendeu-se:

> O meu *modo de ensinar* era o que a minha consciencia e intelligencia perfeitamente conformes n'esse ponto com o que os *Estatutos* mandam, me dictavam. Expunha o objecto das proposições, a sua connexão e dependencia; o artifício com que Euclides consegue quasi sempre unir a facilidade ao rigor geometrico; e d'este procurava dar aos estudantes o conhecimento necessario.[12]

Quem ensinaria melhor? Ciera ou Anastácio da Cunha? Quem cumpriria os *Estatutos* da Universidade, redigidos pela mão de Monteiro da Rocha? Os Estatutos diziam que

> os Lentes de Mathematica deveráõ distinguir-se na maior diligencia em fazer circular pelos seus Discipulos hum Exercicio vivo, e efficaz, que os anime, e interesse no estudo importante destas Sciencias.[13]

Os *Estatutos* da Universidade faziam várias propostas muito interessantes sobre os modos de levar os estudantes a entender as matérias. Nada mais longe da memorização e das rotinas do que a explicação dos próprios alunos:

> Para que os Estudantes venham mais dispostos a darem boa conta das Lições; deveráõ conferir particularmente entre si: Aproveitando-se reciprocamente da applicação de huns, reunida com a dos outros. E achando os Lentes, que alguns são mais remissos, ou de engenho mais embaraçado; os obrigaráõ a conferir previamente as Lições com alguns dos outros de maior penetração, e capacidade; os quaes lhes nomearáõ; e elles serão obrigados a cumprillo assim, como convem ao seu aproveitamento.[14]

A compreensão das matérias era um ponto de honra dos *Estatutos* da Universidade e o trabalho de investigação não era estranho ao trabalho preconizado:

> Cuidaráõ tambem muito os mesmos Lentes, em que os Discipulos se ponham no caminho dos Inventores: Presentando-lhes para isso

algumas materias pelos passos, que se deram, ou podiam dar, até se chegar ao descubrimento das verdades, que nellas se contém: Mostrando-lhes os indicios, por onde se suspeita, e conjectura primeiro o que se poderá achar; e os meios, e tentativas, que se applicam para o descubrir: E dando-lhes huma idéa circumstanciada da evolução dos descubrimentos Mathematicos, e de como por degráos se passou de huns aos outros.[15]

Segundo o que declara Anastácio da Cunha isto era mesmo o que ele fazia:

> Não me demorava em ler ou repetir litteralmente (como os meus companheiros costumavam) as proposições que por faceis nem carecem de explicação, nem a admittem, só para poder empregar tempo sufficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras difficuldades da lição, e facilitar-lh'as quanto as minhas tenues forças o permittiam. (...) Porém queria que tambem os estudantes trabalhassem e os obrigava a resolver problemas.[16]

E acusava os outros lentes de não procederem deste modo, e portanto de não estarem a cumprir os Estatutos da Universidade:

> O mestre repetia ou pelo livro ou de cór litteralmente as proposições da lição; e no dia seguinte cada estudante satisfazia repetindo de cór a proposição que lhe perguntavam. Nem se mostrava o uso das proposições, nem se resolviam problemas; ninguem ainda viu o lente do 1° anno no campo ensinando as praxes que os Estatutos mandam. Debalde solicitei os instrumentos necessarios: não me consta que a Universidade tenha ainda nem uma prancheta.[17]

José Anastácio da Cunha tem toda a razão neste último ponto, pois apenas na Acta da Congregação da Faculdade de Matemática de 17 de Fevereiro de 1807 aparece uma referência a uma diligência para que o material de Geometria fosse comprado. Isto apesar de os *Estatutos* determinarem que

> O Lente do Primeiro Anno, (...) terá o cuidado de lhes mostrar o uso prático da *Geometria*, e *Trigonometria Plana*. Para o que lhes assinará alguns dias feriados, em que Elles se devam achar em algum lugar do Campo nas vizinhanças da Cidade. Tendo feito conduzir a elle *Graphometros*, *Pranchetas*; e outros instrumentos da *Geodesia*; lhes mostrará a praxe das Operações sobre o terreno.[18]

Mas a força dos estudantes pesou mais sobre o Reitor e sobre o Director da Faculdade de Matemática, pelo que Anastácio da Cunha foi forçado a adoptar o método a que os alunos já estavam habituados: "(...) Compellido pois por força superior, conformei-me ao tal methodo estabelecido, e serenou a tempestade. O tal methodo era certamente suave e commodo para os estudantes e mestres." A facilidade era o que os estudantes pretendiam; sempre é mais fácil memorizar! E aqui Anastácio da Cunha atinge o máximo do seu sarcasmo ao explicar porque o método dos *Estatutos* não era seguido: "Mas similhantes lições dão trabalho aos mestres e luzes aos estudantes; e isso é justamente o que não convém." Por este testemunho, eventualmente parcial, se pode concluir que era mais fácil redigir uns *Estatutos* inovadores do que modificar as práticas.

Os *Principios Mathematicos* são, sem dúvida, a obra principal de José Anastácio da Cunha. Aí aparecem pela primeira vez com singular clareza as definições de função, infinitésimo, infinitamente grande, derivada, série convergente, função exponencial. É geralmente considerado que esta obra foi publicada em 1790[19], três anos depois da morte de José Anastácio da Cunha. Contudo só temos a sustentar esta tese a data da página de rosto do livro. Mas, como bem observa Aquilino Ribeiro, "o rosto e a página em branco foram colocadas posteriormente". Nas *Noticias históricas de Portugal e Brasil* indica-se que os "Principios (...) Sahirão á luz" a 19 de Maio 1798 e que "Vendem-se na Casa da Fazenda da Real Casa Pia por 1600 reis em papel, e 1800 reis encadernados"[20]. Oito anos depois do que vem indicado na capa! É bem provável que assim tenha sido devido ao facto de os amigos terem dificuldade em influenciar a edição em Portugal por causa da situação política; além do mais o livro teria sido utilizado para instrução dos alunos do colégio de S. Lucas da Real Casa Pia, mas as dificuldades deste Colégio fizeram com que o próprio Anastácio da Cunha tenha perdido o emprego[21]; não é de crer que, falecendo em 1787, a impressão e a venda do livro encontrassem facilidades.

Anastácio da Cunha pretendeu, com os seus *Principios Mathematicos* fazer uma "reforma geral completa do sistema das mathematicas puras". Não admira, por isso, que o livro contenha muitas definições, algumas delas inovadoras. Por exemplo:

> Se huma expressão admittir mais de hum valor, quando outra expressão admitte hum só, chamarse-ha esta constante, e aquella, variavel.

Com esta definição fica claro o que é uma (expressão) variável e o que é uma (expressão) constante, embora Anastácio da Cunha não considere uma constante um caso particular de uma variável, o que terá consequências como veremos mais adiante.

> A variavel que podér sempre admittir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamarse-ha infinita; e a variavel que podér sempre admittir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamarse-ha infinitessima.

Aqui faz-se uma distinção, com um sabor claramente moderno, entre o zero e um infinitésimo e fica claro de uma vez por todas que o infinito não é um número mas apenas uma variável. Para que tudo encaixe bem é preciso definir função:

> Se o valor de huma expressão A depender de outra expressão B, chamarse-ha A funcção de B; e B raiz de A.

Todas estas noções são necessárias para dar a definição de derivada:

> Escolhida qualquer grandeza (...) para se chamar fluxão [da raiz x] (...), e denotada assim dx; chamarse ha fluxão de Γx, e se denotará assim, $d\Gamma x$, a grandeza que faria
>
> $$\frac{d\Gamma x}{dx} \text{ constante, e}$$
>
> $$\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$$

infinitessimo ou cifra, se *dx* fosse infinitessimo, e constante tudo o que não depende de *dx*.

Repare-se que, nesta definição, a diferença entre a razão incremental e o valor da derivada deve ser um infinitésimo; mas, se a diferença for identicamente zero, Anastácio da Cunha já considera que é uma constante e é por isso que tem de aparecer a opção cifra (isto é, zero).

O mais importante de todas estas definições é que Anastácio da Cunha as utiliza para provar propriedades. Claro que, tal como se fazia na época, se considerava que todas as funções eram deriváveis (funções como a função módulo ainda não eram conhecidas). Uma das propriedades mencionadas diz que se uma função é derivável então é contínua (embora a hipótese da derivabilidade não seja referida):

> *dx* infinitessimo, e o que de *dx* não depende constante, fazem $\Gamma(x+dx)-\Gamma x$ infinitessimo.
>
> Pois fazem $\frac{d\Gamma x}{dx}$ constante, e $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx}-\frac{d\Gamma x}{dx}$ infinitessimo ou cifra; e logo infinitessimo $\frac{d\Gamma x}{dx}dx+\left(\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx}-\frac{d\Gamma x}{dx}\right)dx$ expressaõ que se reduz a $\Gamma(x+dx)-\Gamma x$.

Muitos outros aspectos dos *Principios Mathematicos* mereceriam uma referência detalhada pois não têm sido suficientemente analisados. Consideremos apenas mais o seguinte extracto:

> (...) a expressaõ $\frac{4}{9}=0{,}44444\,\&c.$ naõ significa em rigor senaõ que, proposto qualquer numero $<\frac{4}{9}$, pode o decimal $\frac{4}{9}=0{,}44444\,\&c.$ [continuado quanto for necessario] denotar numero maior que o proposto, ainda que tambem $<\frac{4}{9}$. Esta he a significaçaõ do sinal = em semelhantes expressoens.

Anastácio da Cunha tem um cuidado extremo ao escrever expressões como 0,444444... pois poderão não ter significado rigoroso se a dízima for infinita. Assim, definindo 0,444444... também, no fundo, como uma variável, Anastácio da Cunha contorna as eventuais contradições. 4/9 é apenas o limite para que tende 0,444...44 (com um número finito de algarismos) quando o número de algarimos tende para infinito. Este é o argumento fundamental para se entender, por exemplo, que 0,9999... = 1, igualdade ainda actualmente difícil de interiorizar pela maioria dos alunos.

Nem sempre estas subtilezas teóricas foram entendidas pelos contemporâneos de Anastácio da Cunha ou pelos que se lhe seguiram. Um exemplo dessa incompreensão é dada por um dos aspectos da polémica pública entre Anastácio da Cunha e Monteiro da Rocha já referida. Atentemos na seguinte carta que António José Teixeira enviou a Francisco Gomes Teixeira em 1892:

> Meu prezado am°. e coll^a^.
>
> No Instituto, n.° 11, ha dias publicado, verá V.Ex.^cia^ a continuação da questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha, ambos fundadores da faculdade de Math^a^.
>
> Como estou ha 29 annos fóra do ensino, receio commetter algum erro no ponto mais delicado da controversia q. é uma emenda feita por José Monteiro nas erratas da Mechanica do Abade Marie, como tudo vem exposto no jornal. Rogo pois a V.Ex^cia^ a fineza de:
>
> (...) 4° provar o erro da supposta emenda de m por m + 1/m.
>
> Tudo isto eu faria, mas não tenho confiança nos resultados sem ouvir a autorizada opinião de V.Ex^cia^ de quem sou
>
> A° e Ob° Coll^a^
>
> L^a^. 6-7- AJTeixeira[22]

José Anastácio da Cunha havia considerado que uma emenda feita por Monteiro da Rocha era um "absurdo". António José Teixeira pretendia que Gomes Teixeira provasse que Anastácio da Cunha tinha razão. A carta transcrita foi o motivo pelo qual Francisco Gomes Teixeira publicou no 1° volume dos "Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto" (1905) um texto onde analisa essa questão: "Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha". Francisco Gomes Teixeira concluiu que nem Monteiro da Rocha nem Anastácio da Cunha tinham razão:

> Monteiro da Rocha, substituindo m por m+1/m, commetteu o erro de julgar falsa a passagem considerada da Mecanica de Marie, quando não o era; mas Anastacio da Cunha, dando como absurda a substituição que fez Monteiro da Rocha, parece considerar esta substituição como erronea, quando era apenas inopportuna.

Apesar de estar desligado do ensino há mais de 29 anos, António José Teixeira não deixa de tecer inúmeras loas à obra de Anastácio da Cunha; muitos outros citaram os elogios de António José Teixeira como vindo de um especialista, quando não pode ser considerado mais do que um admirador esforçado.

A parte matemática da polémica é analisada em detalhe no texto da conferência "Duas ou três histórias da História da Matemática" que João Filipe Queiró proferiu na sessão de homenagem ao Professor José Morgado, para onde remeto os leitores interessados em mais pormenores[23].

Anastácio da Cunha não tem sido totalmente esquecido ao longo dos tempos. A Academia das Ciências de Lisboa prestou-lhe uma homenagem, no século XIX. Em 1904, por ocasião de uma reunião extraordinária da Congregação da Faculdade de Matemática, os professores pediram à Câmara Municipal de Coimbra que desse o nome de Anastácio da Cunha à rua que então se chamava de "Entre-Collegios". No Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra existe desde 1987 uma sala com o nome de José Anastácio da Cunha. Por fim, o segundo centenário da sua morte foi condignamente comemorado em Portugal[24].

Anastácio da Cunha foi, como bem assinalou Tiago de Oliveira, "Nem santo nem herói (...), um homem simplesmente comum (...) mas talento notável".[25]

Contente vivo, sem sonhar em quintas,
Em dourados palacios, nem carrinhos.
Desfructo em paz a farta natureza[26].
... um homem só e desgraçado como eu[27]*...*

Notas

1 "Anastácio da Cunha, O Lente Penitenciado", Livraria Bertrand, Lisboa, 1938, p. 132.

2 in "Questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha", "O Instituto", 1890, p. 27.

3 publicado em Boletim da SPM, nº 29, Setembro 1994, p. 1-18. Deve também ser consultada a obra M. L. Ferraz, J. F. Rodrigues e L. Saraiva (eds.), "Anastácio da Cunha 1744/1787. O Matemático e o Poeta", Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990.

4 "Anastácio da Cunha, O Lente Penitenciado", Livraria Bertrand, Lisboa, 1938, p. 112.

5 cf. prefácio da tradução francesa dos "Principios Mathematicos" e texto "Escritos posthumos..." (in M. L. Ferraz, J. F. Rodrigues e L. Saraiva (eds.), "Anastácio da Cunha 1744/1787. O Matemático e o Poeta", Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990, p. 354).

6 Embora contenha algumas pequenas imprecisões óbvias (como a relativa à data de falecimento).

7 ver o texto de João Filipe Queiró já citado.

8 in "Dicionário Bibliográfico Português", vol. IV, p. 226. Note-se contudo que Anastácio da Cunha perdeu o emprego que tinha no Colégio de S. Lucas, pelo que poderia ter tentado outras hipóteses (cf. prefácio de João Manuel de Abreu na tradução francesa dos "Principios Mathematicos").

9 essencialmente por causa do poema "A Voz da Razão" que tem referências explícitas a temas religiosos.

10 ver análise mais detalhada em Carvalho e Silva, Jaime, *Vicente Gonçalves e a História da Matemática em Portugal*, Boletim da SPM, 37,1997, p. 47-55.

11 que António José Teixeira transcreve, com notas abundantes, na revista "O Instituto" entre 1890 e 1892.

12 "O Instituto", 1890-91, vol. XXXVIII, p. 659.

13 "Estatutos da Universidade de Coimbra", 1772, Livro terceiro, p. 198.

14 ibidem, p. 199.

15 ibidem, p. 201.

16 "O Instituto", 1890-91, vol. XXXVIII, 1890, p. 659.

17 ibidem.

18 "Estatutos da Universidade de Coimbra", 1772, Livro terceiro, pp. 202-203.

19 O livro começou a ser impresso em 1782 (e era vendido em fascículos).

20 Lopes de Almeida, Manuel, "Noticias Históricas de Portugal e Brasil (1751-1800)", Coimbra, 1964.

21 conforme assinala João Manuel de Abreu no prefácio da tradução francesa dos "Principios Mathematicos".

22 carta 1563 do espólio de Francisco Gomes Teixeira.

23 Este texto foi publicado na revista "Gazeta de Matemática" no nº 138 (Janeiro de 2000).

24 de que resultaram várias obras, com destaque para a edição fac-simile das edições portuguesa e francesa dos "Principios Mathematicos".

25 Tiago de Oliveira, J., "Jozé Anastásio, o geómetra exilado no interior", Obras, vol. II, Évora, 1995, p. 129.

26 excerto da poesia "Contra os vicios, que impedem o progresso das Sciencias".

27 "O Instituto", 1890-91, vol. XXXVIII, p. 654.

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra

Materiais para a aula de Matemática

José Anastácio da Cunha (1744-1787)

Derivadas

Todas as recomendações internacionais relativas ao ensino da Matemática incluem a História da Matemática num lugar de destaque. Infelizmente não abundam propostas concretas de integração na sala de aula; mais raras ainda são as propostas que incluam a matemática portuguesa. Esta actividade pretende fornecer algumas ideias para essa integração, ao nível do 12º ano.

Parte-se de uma reescrita de um extracto dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha, eliminando pormenores que podem confundir um não especialista (e simplificando as notações). A ideia base do matemático português é mantida e continua a ser possível realizar as inferências pretendidas pelo autor.

Tendo como base a definição que Anastácio da Cunha dá para derivada propõem-se duas coisas distintas: primeiro, reconhecer que a definição de Anastácio da Cunha é equivalente à nossa definição actual; segundo, refazer a demonstração de duas das propriedades propostas por Anastácio da Cunha a partir da definição dada.

Além de um enquadramento diferente, há uma diferença essencial entre esta actividade e uma actividade que não inclua a História da Matemática: o texto precisa de ser colocado no respectivo contexto histórico. A propriedade VI não está correcta tal como a entendemos hoje porque não se coloca como hipótese a função *G* ser derivável (isto é, ter derivada finita). Na época todas as funções com que se trabalhava eram deriváveis. Por outro lado a expressão "seja um infinitésimo ou seja zero" na definição pode parecer estranha aos nossos olhos: não está incorrecta mas para quê distinguir a função identicamente nula de um infinitésimo? Anastácio da Cunha procede assim para evitar as confusões reinantes na época entre variável e constante.

Na avaliação de uma actividade como esta é natural que, além de outros critérios que tenham a ver com a correcção matemática e com a escrita, se deva valorizar também um mínimo de conhecimentos históricos, como seja o reconhecimento de que os dois problemas anteriores eram generalizados nos tempos de Anastácio da Cunha (é também para ajudar a situar o texto que o cabeçalho inclui as datas de nascimento e falecimento de Anastácio da Cunha).

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra

Escola ....

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)..

José Anastácio da Cunha (1744-1787)

Derivadas

Em terminologia moderna, a definição apresentada pelo matemático português José Anastácio da Cunha (no livro *Principios Mathematicos* de 1790) pode ser escrita como:

Chama-se derivada da função $G(x)$, em cada ponto x, a grandeza $G'(x)$ que faz com que

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-G'(x)$$

seja um infinitésimo ou seja zero, quando h for um infinitésimo.

José Anastácio da Cunha usa esta definição para provar, entre outras, as seguintes propriedades:

III. A derivada de $a + bx$ é b.

Pois h infinitésimo faz

$$\frac{a+b(x+h)-(a+bx)}{h}-b=0$$

VI. h infinitésimo faz $G(x+h)-G(x)$ infinitésimo.

Pois $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}-G'(x)$ é infinitésimo ou seja zero; e logo infinitésimo

$$G'(x)h+\left[\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-G'(x)\right]h$$

expressão que se reduz a $G(x+h)-G(x)$.

Faz uma pequena composição onde interpretes a definição e estas duas propriedades e onde analises o seu significado, à luz da matemática estudada.

A música das esferas

Carlota Simões

Introdução

Durante séculos, filósofos e artistas imaginaram o universo como um mecanismo perfeitamente organizado segundo regras que podiam ser apresentadas tanto matemática como musicalmente. As certezas da religião em relação a uma tal harmonia divina dificultaram a vida de pensadores como Galileu Galilei e Giordano Bruno. A procura de ligações entre as diversas áreas do pensamento atrasou muitas vezes o avanço da ciência, mas também foi o desejo de encontrar tais ligações que acabou por ser a base emocional que conduziu alguns cientistas a resultados importantes, como aconteceu com Johannes Kepler, ao tentar compreender a *música das esferas* a partir do movimento dos planetas.

Atribui-se a Pitágoras a descoberta da base aritmética dos intervalos musicais, ou seja, a relação entre a frequência das vibrações e a altura dos sons. Aplicando esse conhecimento ao movimento dos astros e relacionando as distâncias entre as esferas celestes com os intervalos musicais, os gregos atribuíam notas musicais aos astros, tentando identificar a melodia associada à *musica mundana*.

Os sucessivos modelos para o nosso sistema solar

A natureza dá-nos três ciclos primários: os dias como rotação da Terra em torno de si própria, os meses como revoluções da Lua à volta da Terra, os anos como revoluções da Terra em volta do Sol. A existência de dois solstícios e dois equinócios leva ainda à divisão do ano em quatro períodos iguais, as estações do ano. A existência de tais ciclos aliada ao movimento aparente dos céus sempre intrigou e interessou o Homem.

O movimento da Lua e a explicação para as suas fases foram muito cedo compreendidos. Quanto ao movimento do Sol, pelo contrário, vários foram os modelos apresentados por astrólogos, filósofos e teólogos ao longo da história para o representar.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.), astrónomo e matemático grego, foi o primeiro a afirmar que a Terra gira em torno do Sol ao mesmo tempo que gira em torno de si mesma. No entanto, o sistema geocêntrico proposto por Ptolomeu (c. 85 - c.160 d.C.), também astrónomo e matemático grego, foi adoptado pela religião e pela filosofia, dominou durante toda a Idade Média e só foi deposto no séc. XVI com Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642), Giordano Bruno (1548-1600) e Johannes Kepler (1571-1630).

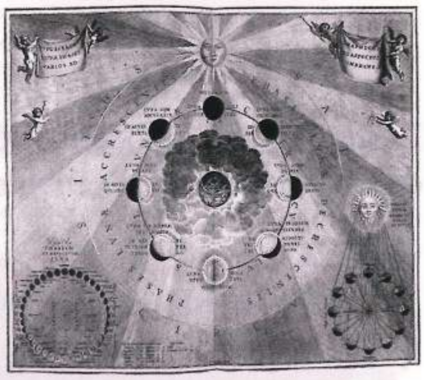


figura 1 – Andreas Cellarius, Harmonia Macrocosmica, Amsterdam, 1660. As fases da Lua explicadas de acordo com a sua posição em relação ao Sol e à Terra.

No modelo geocêntrico de Ptolomeu, a Terra estava situada no centro do Universo e os astros giravam em torno dela, em movimento circular, presos a esferas transparentes de centro na Terra. Estas esferas etéreas de Ptolomeu, que na Idade Média se julgava serem feitas de cristal, são a razão por que ainda falamos na música das esferas e no sétimo céu. Existiam uma esfera ou céu para a Lua, outras para Mercúrio, para Vénus, para o Sol, para Marte, para Júpiter e para Saturno. A esfera mais excêntrica era a das estrelas, chamada "Primum Mobile" *(a primeira que se move)* porque, impelida pelo amor divino, era ela a origem do movimento de todas as outras esferas.

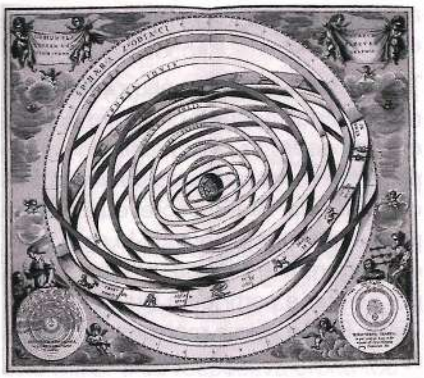


figura 2 – Andreas Cellarius, Harmonia Macrocosmica, Amsterdam, 1660.
O modelo geocêntrico de Ptolomeu.

O modelo geocêntrico tornou-se muito popular. Foi adoptado pela religião cristã e publicitado por teólogos, filósofos, escritores e muitas foram as fantasias criadas a partir dele.

Dante Alguieri

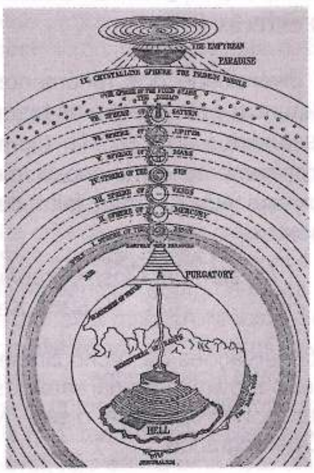


figura 3 – Michelangelo Cactani, La Materia della Divina Comedia di Dante Aliguieri, 1855.
Na Divina Comédia de Dante (1265-1321), o Inferno encontra-se no interior da Terra. A alma, no seu caminho para Deus, deve subir através do Purgatório, das nove esferas dos planetas, das estrelas e da esfera de cristal, até chegar ao Paraíso.

Luis de Camões

Debaxo deste grande firmamento
Vês o ceo de Saturno, Deos antigo;
Jupiter logo faz o movimento,
E Marte abaxo, bellico inimigo;
O claro olho do ceo no quarto assento,
E Venus, que os amores traz consigo;
Mercurio, de eloquencia soberana;
Com tres rostos debaxo vai Diana.

Os Lusíadas, Canto Décimo, 89, Camões (c. de 1524-1580).

A deusa Tétis mostra o universo a Vasco da Gama. O modelo descrito é o de Ptolomeu, visto de fora para dentro.

Apoiado pela Igreja durante toda a Idade Média, o modelo de Ptolomeu impediu o progresso da astronomia durante mais de um milénio. Somente em 1543, 1800 anos depois de Aristarco, o Sol voltou ao centro do universo. Nicolau Copérnico, um clérigo polaco, publicou uma nova hipótese explicativa do movimento aparente dos planetas: no centro do universo passava a estar o Sol, enquanto a Terra passava a ser apenas mais um dos planetas, o terceiro a contar do Sol, movendo-se numa órbita circular. Copérnico apresentou esta teoria na sua obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* em 1543, o ano da sua morte. Anos mais tarde, Galileu e Bruno viriam a ter graves problemas com a Inquisição precisamente por também adoptarem este modelo heliocêntrico.

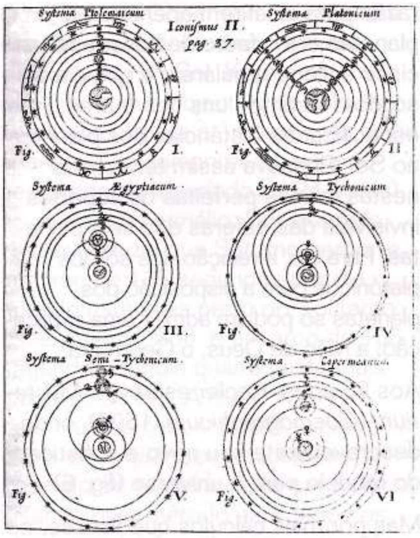


figura 4 – Athanasius Kircher, Iter extaticum, Roma, 1671.
I: O sistema de Ptolomeu (c. 85-160 d.C.) com a Terra no centro, cercada pelas sete esferas etéreas da Lua, Mercúrio, Vénus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. No plano superior fica a superfície imóvel das estrelas e dos signos do Zodíaco.
II: Platão (427-374 a.C.) colocava o Sol imediatamente a seguir à Lua.
III: No sistema pseudo-egípcio de Vitruvius, Mercúrio e Vénus descreviam um círculo à volta do Sol e este, por sua vez, tal como os restantes planetas, girava em torno da Terra.
IV+V: O sistema proposto em 1580 por Tycho Brahe (1546-1601) parte de dois centros: à volta da Terra, vista como um centro fixo, gira o Sol que por seu turno é o centro de outros planetas.
VI: Em 1543, 1800 anos após Aristarco, Copérnico (1473-1543) voltou a colocar o Sol no centro do universo[3].

A Matemática e a Música

Desde Platão (427-347 a.C.) até à Idade Média, o conhecimento dividia-se em duas grandes áreas: o *Trivium* (constituído por gramática, dialéctica e retórica), e o *Quadrivium*, constituído pela música (disciplina da relação do número com o som), pela aritmética (disciplina das quantidades absolutas numeráveis), pela geometria (disciplina da magnitude imóvel das formas) e pela astronomia (disciplina do curso do movimento dos corpos celestes). Era assim natural relacionar a música com a astronomia ou a matemática, olhando para a escala de sete sons como um problema cósmico, ou para a astronomia como uma teoria da música celeste.

Pitágoras (c. 572- c. 497 a.C.) distinguia entre três tipos de música, que se mantiveram durante toda a Idade Média. Eram a *música instrumentalis*, a música produzida por instrumentos musicais (a música cantada fazia parte desta classe, sendo as cordas vocais consideradas um instrumento musical); a *música humana*, a música inaudível produzida por cada ser humano, indicativa da ressonância entre corpo e alma, e ainda a *música mundana*, a música produzida pelo cosmos, mais tarde conhecida por *música das esferas*.

Atribui-se a Pitágoras a descoberta da base aritmética dos intervalos musicais, ou seja, a relação entre a frequência das vibrações e a altura dos sons. Aplicando esse conhecimento ao movimento dos astros e relacionando as distâncias entre as esferas celestes com os intervalos musicais, os gregos atribuíam notas musicais aos astros, tentando identificar a melodia associada à *música mundana*.

Para explicar porque razão não conseguimos ouvir a *música mundana*, Aristóteles argumentava dizendo que a ouvimos desde o momento do nascimento, nunca deixando de a ouvir, e que por esta razão não temos a capacidade de distinguir este som do seu oposto, o silêncio.

Que som é este, tão prodigioso e doce, que me enche os ouvidos? É o som que, ligado a espaços desiguais mas racionalmente divididos numa proporção específica, é produzido pela vibração e pelo movimento das próprias esferas, e, combinando notas agudas e graves, gera diversas harmonias; com efeito, movimentos tão prodigiosos não podem ser impulsionados no silêncio. Assim, a órbita mais alta do céu, que contém a esfera estrelada, cuja rotação é mais rápida, move-se com um som agudo e agitado, enquanto a da Lua e a dos corpos inferiores se move com um som mais grave. Porque a Terra, a nona das esferas, estática, permanece fixa num lugar, no centro do universo[3].

Cícero (séc. I a.C.)

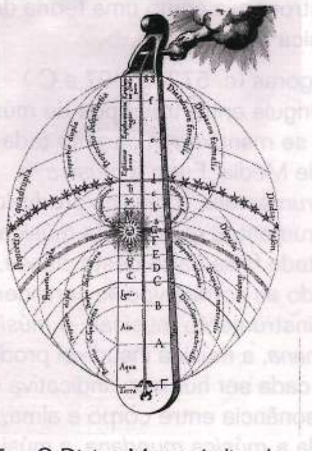


figura 5 – O Divino Monocórdio, de Robert Fludd.

No Divino Monocórdio de Fludd (1574-1637), filósofo inglês, a nota correspondente a cada planeta é associada a uma divisão da corda do monocórdio. Tal como na descrição de Cícero, também neste modelo o som associado a cada planeta é tanto mais agudo quanto maior for a distância do planeta à Terra.

A Teoria dos Poliedros no *Mysterium Cosmographicum* de Kepler

A geometria existia antes da criação.
É tão eterna como o pensamento de Deus.
A geometria deu a Deus um modelo para a criação.
A geometria é o próprio Deus.

Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler, astrólogo e astrónomo, nasceu na Alemanha protestante. De formação profundamente religiosa, Kepler via Deus como o poder criador do Cosmos. Descobrir os segredos do universo era para ele um jogo que jogava com Deus.

Durante os seus estudos na Universidade de Tubingen, foi confrontado com o modelo heliocêntrico de Copérnico. Apesar da sua fé, Kepler não achou que um universo heliocêntrico fosse uma heresia; pelo contrário, nesse modelo, o Sol parecia ser uma metáfora de Deus, à volta de quem tudo gira.

No tempo de Kepler só se conheciam seis planetas: Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Kepler perguntava a si mesmo porquê apenas seis, e porquê o espaçamento entre as suas órbitas, que Copérnico tinha calculado. Da geometria de Euclides, Kepler sabia que existiam apenas cinco sólidos regulares ou platónicos, cujas faces eram polígonos regulares todos iguais. Kepler achou que estes dois números tinham que estar relacionados, achando que a razão para existirem apenas seis planetas era o facto de haver apenas cinco sólidos regulares, e que esses sólidos, inscritos uns nos outros, iriam especificar as distâncias dos planetas ao Sol. Pensava assim ter achado nestas formas perfeitas os suportes invisíveis das esferas dos seis planetas. Para ele, a relação dos sólidos platónicos com a disposição dos planetas só podiam admitir uma explicação: a Mão de Deus, o Geómetra[4].

Aos 25 anos, Kepler escreveu *Mysterium Cosmographicum* (1596), onde descreveu este seu novo e sofisticado modelo para o universo (fig. 6)

Mas por mais cálculos que fizesse, os sólidos platónicos e as órbitas planetárias não concordavam completamente. Kepler acreditou então que as observações que possuía deviam estar erradas.

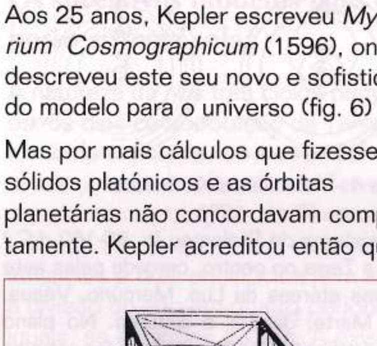


figura 6 – o Mistério Cosmográfico de Kepler.

Tycho Brahe, o matemático imperial da corte do imperador Rudolfo II, tinha em seu poder as observações planetárias mais exactas da altura. Por coincidência, Brahe escreveu a Kepler por essa altura, a convidá-lo para se encontrarem em Praga. Kepler acabou por aceitar e partir para Praga em 1598. Brahe veio a morrer subitamente em 1601, e Kepler foi então reconhecido como o matemático imperial da corte.

A partir desse momento, Kepler teve acesso absoluto às observações planetárias de Brahe. Mas os novos dados também não apoiaram a sua conjectura de que as órbitas dos planetas estão circunscritas pelos cinco sólidos platónicos.

As Leis de Kepler e a música das esferas

A diversidade dos fenómenos da Natureza é tão vasta e os tesouros escondidos no Céu são tão ricos precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimentos.

Mysterium Cosmographicum (1596), Kepler

As observações de Tycho Brahe sobre o movimento aparente dos planetas, não apoiavam o seu "Mistério Cosmográfico".

No entanto permitiram a Kepler obter de modo empírico três leis gerais que descrevem o movimento dos planetas.

1ª Lei de Kepler: As órbitas dos

A órbita da Terra é a medida de todas as coisas; circunscreva-se em torno dela um dodecaedro e o círculo que contém este será o de Marte; circunscreva-se em torno do círculo de Marte um tetraedro e o círculo contendo este será o de Júpiter; circunscreva-se em torno do círculo de Júpiter um cubo e o círculo contendo este será o de Saturno. Agora inscreva-se dentro da órbita da Terra um icosaedro e o círculo contido nele será o de Vénus; inscreva-se dentro da órbita de Vénus um octaedro e o círculo contido nele será o de Mercúrio. E desta forma obtemos a razão para o número de planetas.

Mysterium Cosmographicum (1596), Kepler planetas são elipses, ocupando o Sol um dos seus focos.

2ª Lei de Kepler (ou lei das áreas): O raio vector que une o centro do Sol ao centro de cada planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

3ª Lei de Kepler: O quadrado do período de revolução *T* de cada planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do comprimento do semi-eixo maior *a* da respectiva órbita (ou seja, a^3/T^2 = constante).

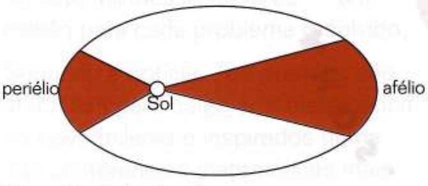


figura 7 – A lei das áreas.
Das 1ª e 2ª leis conclui-se que o movimento dos planetas não tem velocidade constante. A velocidade é máxima no periélio (ponto da órbita mais próximo do Sol) e é mínima no afélio (ponto da órbita mais afastado do Sol).

A partir das 1ª e 2ª leis, Kepler concluiu que o movimento dos planetas não tem velocidade constante. A velocidade mínima é atingida no afélio (ponto da órbita elíptica que está mais afastado do Sol) e a velocidade máxima é atingida no periélio (ponto da órbita elíptica que está mais próximo do Sol). Kepler podia agora aplicar estas novas conclusões à teoria musical das esferas. A primeira observação a fazer era a de que, tendo o planeta velocidade variável, não emitia uma nota única, sendo a nota mais aguda atingida no periélio e a mais grave no afélio. A partir da diferença entre as velocidades mínima e máxima, podia ainda calcular o intervalo musical definido pelas notas mais grave e mais aguda produzidas por cada planeta.

A partir da 3ª lei, podia relacionar os sons produzidos pelos diversos planetas. Concluindo que os planetas mais longínquos eram mais lentos, ele entendeu que os sons produzidos seriam mais graves à medida que a distância ao Sol aumentava.

Nesta teoria, os sons produzidos pelos diversos planetas são tanto mais graves quanto maior a distância ao Sol, o centro, ao contrário dos sistemas inspirados em Ptolomeu, nos quais o som se vai tornando mais agudo à medida que a distância ao centro do sistema, nesse caso a Terra, aumenta.

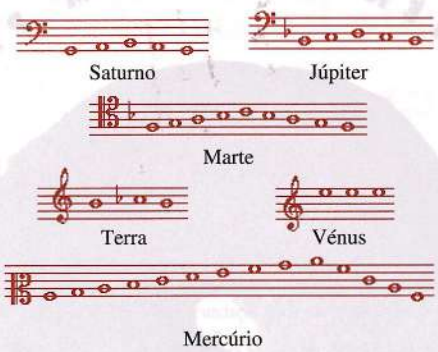


figura 8 – A música das esferas de Kepler. Kepler deduziu os intervalos musicais produzidos por cada planeta. Para ele, a melodia produzida por cada planeta não era uma sequência de notas distintas, mas sim um único som eterno, a variar continuamente entre o mais grave e o mais agudo, como o som produzido por um violinista deslocando continuamente o seu dedo, sem o levantar, sobre a corda do seu violino.

O modelo de Copérnico obrigava-o a estudar o cosmos como se fosse visto a partir do Sol. Kepler efectuou cálculos com o objectivo de calcular para cada planeta o "movimento diário aparente" (o comprimento de arco percorrido num período de 24 horas) no afélio e no periélio. Por exemplo, Kepler deduziu que Saturno percorre um arco de 135 segundos por dia quando está mais perto do Sol (arco esse visto do Sol) e um arco de 106 segundos por dia quando está mais afastado do Sol. A razão 135/106 está muito próxima de 5/4, a razão entre as frequências associadas ao intervalo de *terceira maior* em música. Usando este método para todos os planetas, ele descobriu que as razões periélio-afélio relacionadas com quaisquer dos seis planetas são todas muito semelhantes às razões associadas a intervalos musicais consonantes. Assim, para Júpiter a razão periélio-afélio seria aproximadamente 6/5 (uma *terceira menor*); para Marte seria 3/2, uma *quinta perfeita*; para a Terra, 16/15, um *meio–tom*; para Vénus, 25/24, um intervalo muito próximo da *coma pitagórica*; para Mercúrio, 12/5, uma *décima menor*[2].

> Os movimentos dos céus não são mais que uma eterna polifonia.
> *Harmonices Mundi* (1619), Kepler

Na sua obra *Harmonices Mundi* (1619), Kepler imaginou um coro no qual Mercúrio, a voz mais aguda, seria o Soprano, Vénus e Terra os Contraltos, Marte o Tenor, enquanto que Júpiter e Saturno, as vozes mais graves, seriam os Baixos. Nesta sua teoria da música celestial, ao planeta Terra correspondia um intervalo musical de meio-tom, que ele associou ao modo eclesiástico de mi (modo frígio), levando-o a concluir que a melodia entoada pela Terra era "mi – fá – mi". Kepler fazia esta descoberta durante a Guerra dos Trinta Anos, o que o levou a pensar que a Terra produzia um lamento constante, em nome da *misere* e *fami* (miséria e fome) que reinavam na altura.

O fim da música das esferas

O Século XVII representa uma transição crítica na história do pensamento do homem, pois marca o momento da separação entre fé e dogma religioso por um lado, e a visão mecanicista da natureza por outro.

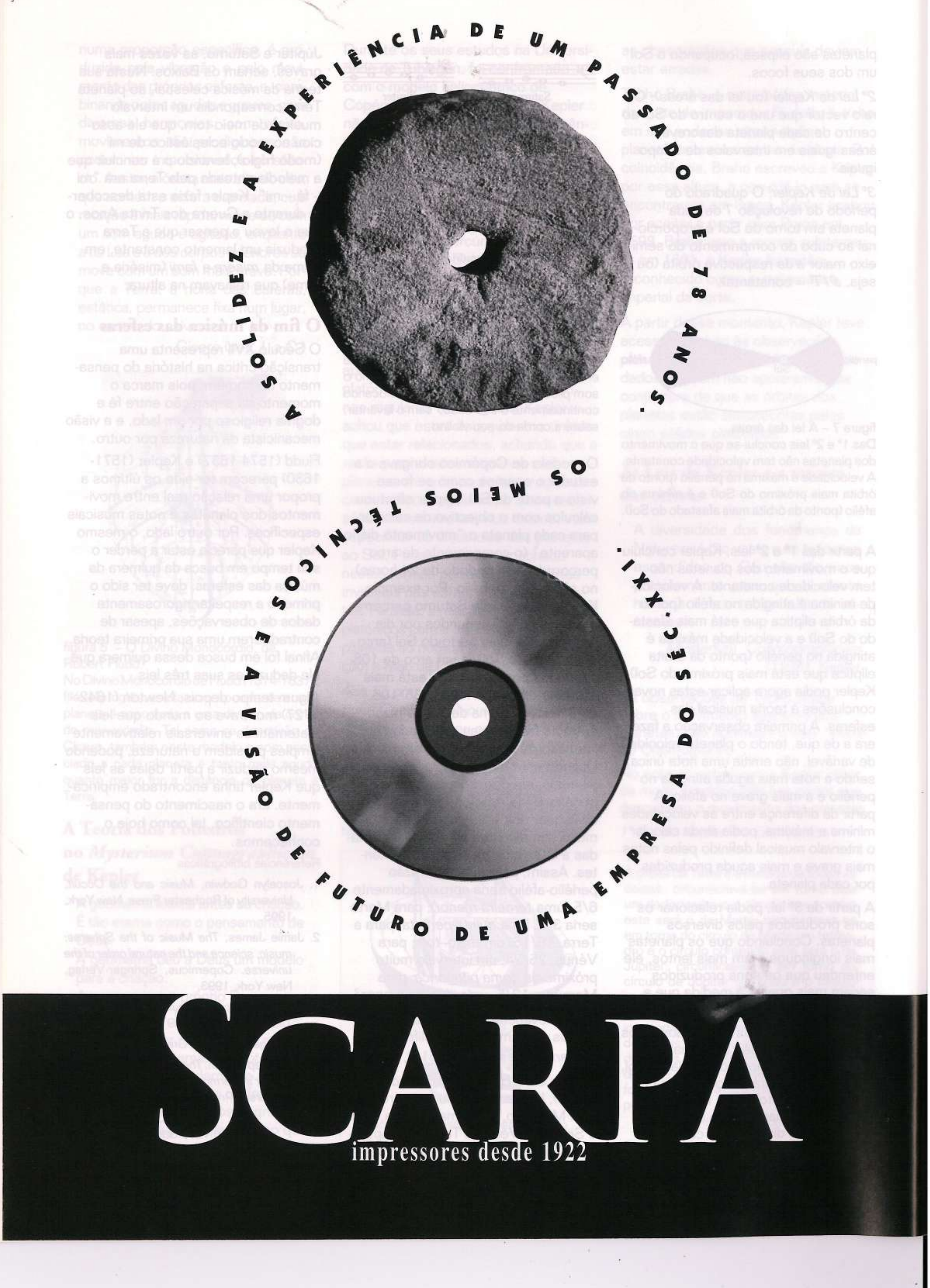
Fludd (1574-1637) e Kepler (1571-1630) parecem ter sido os últimos a propor uma relação real entre movimentos dos planetas e notas musicais específicas. Por outro lado, o mesmo Kepler que parecia estar a perder o seu tempo em busca da quimera da música das esferas, deve ter sido o primeiro a respeitar rigorosamente dados de observações, apesar de contradizerem uma sua primeira teoria. Afinal foi em busca dessa quimera que ele deduziu as suas três leis.

Algum tempo depois, Newton (1642-1727) mostrava ao mundo que leis matemáticas universais relativamente simples presidem a natureza, podendo mesmo deduzir a partir delas as leis que Kepler tinha encontrado empiricamente. Era o nascimento do pensamento científico, tal como hoje o conhecemos.

Referências bibliográficas

1. Joscelyn Godwin, *Music and the Occult*, University of Rochester Press, New York, 1995.
2. Jamie James, *The Music of the Spheres: music, science and the natural order of the universe*, Copernicus, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. Alexander Roob, *Alquimia e Misticismo*, Taschen, Colónia, 1997.
4. Carl Sagan, *Cosmos*, Gradiva, Lisboa, 1984.
5. Bruce Stephenson, *The Music of the Heavens, Kepler's Harmoni Astronomy*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

Carlota Simões
Universidade de Coimbra


A SOLIDEZ E A EXPERIÊNCIA DE UM PASSADO DE 78 ANOS,
OS MEIOS TÉCNICOS
E A VISÃO DE FUTURO DE UMA EMPRESA DO SÉC. XXI.
SCARPA
impressores desde 1922

Problemas matemáticos milionários

A notícia que seleccionámos para este número, anuncia a forma como o Instituto matemático Clay dos EUA assinalou o Ano Mundial da Matemática, atribuindo sete prémios no valor de sete milhões de dólares — um milhão para cada problema resolvido.

Segundo a notícia, "os prémios são atribuídos para celebrar a matemática do novo milénio e inspirados numa das conferências matemáticas mais influentes de sempre: fez este ano cem anos que David Hilbert enunciou, em Paris, os seus famosos 23 problemas para o séc. XX, três dos quais continuam sem solução" e um deles *A hipótese de Riemann* faz parte da nova lista.

Ainda segundo a notícia do Público de 19 de Agosto, os sete problemas foram escolhidos com a preocupação de abranger vários ramos da matemática desde a lógica, a aritmética passando pela topologia, geometria, álgebra e pela análise faltando apenas um problema sobre probabilidades.

Mas, apetece perguntar, então os matemáticos só demonstram por dinheiro?

Questionando um matemático, que entrou na sede da APM, sobre estes prémios e esta questão, disse-nos ele:

> Nenhum matemático vai procurar as soluções desses problemas pelo prémio, mas alguém vai recebê-lo", e continuou " o mais provável é que esses problemas que são tão difíceis, em geral não se sabe sequer por onde começar a investigação, acabem por ser resolvidos por matemáticos que se dedicam à resolução de outros problemas.

Ou seja, como diz o artigo, só depois de estarem resolvidos é que se percebe como é que aconteceu.

Mas então a descoberta de um

teorema é assim tão rara? Quantos teoremas se descobrem por ano?

E a notícia também nos revela alguns dados significativos:

> Se em 1900 havia 300 profissionais dos números, actualmente são perto de 50 000, que publicam cada ano mais de 200 000 teoremas.

Esta informação, que passa despercebida no meio de uma notícia onde o que sobressai é o prémio, não poderá deixar de nos levar a perguntar:

- Se a actividade matemática é hoje tão intensa e esta disciplina desempenha um papel tão importante na sociedade, porque não tem o cidadão comum informação simplificada acerca dessa actividade? Porque não é a Matemática, enquanto tal, mais vezes notícia?
- O que fazer para que a Matemática deixe de ser notícia apenas pelos maus resultados escolares ou muito mais esporadicamente por uma ou outra iniciativa lúdica mas que de forma alguma deverá ser associada a "aula" ou "aprendizagem" de Matemática, porque essas têm que ser inevitavelmente "difíceis, inacessíveis à maioria, fontes de desgosto...", pelo menos nas imagens retratadas na comunicação social. E se bem que em muitos casos estas imagens traduzam sentimentos reais não será também verdade que muitos outros casos existem, de relação mais feliz com a Matemática, que bem podiam ser também objecto de notícia?
- Que iniciativas deve a APM continuar a desenvolver, para além do Ano Mundial, para que a imagem da Matemática e também da Matemática escolar, aos olhos da sociedade, se altere de forma significativa?

Adelina Precatado, Esc. Sec. Camões
Helena Rocha, Esc. Sec. Patrício Prazeres

Referências de livros e CD-Roms sobre Matemática e Educação Matemática

A lista de referências que se segue procura englobar um conjunto de livros sobre Matemática e Educação Matemática que foram editados nos últimos quatro anos (1997-2000) e em língua portuguesa. Não pretendemos ser exaustivos, pois com certeza existirão outras publicações nestas condições e que não foram referidas, no entanto consideramos que esta relação poderá ser útil, de algum modo, aos professores de Matemática.

100 Jogos Geométricos
Autor: Berloquin, Pierre
Editor: Gradiva 1999
Colecção: O Prazer da Matemática

100 Jogos Lógicos
Autor: Berloquin, Pierre
Editor: Gradiva 1998
Colecção: O Prazer da Matemática

100 Puzzles Matemáticos
Autor: Loyd, Sam
Editor: Europa - América 1ª Edição de 1998

A Matemática na Vida das Abelhas
Autor: Teles, A. L., Vieira, A., Ali, A. e Antunes, F.
Editor: Associação Professores de Matemática 1997

A Mente Virtual
Autor: Penrose, Roger
Editor: Gradiva 1997
Colecção: Ciência Aberta

A Relação Professor-Aluno na Realização de Investigações Matemáticas
Autor: Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L. e Oliveira, H.
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

A Solução do Último Teorema de Fermat
Autor: Singh, Simon
Editor: Relógio D Água 1ª Edição de 1998
Colecção: Ciência

Actividades do 1° Ciclo I
Autor: vários
Editor: Associação Professores de Matemática 1997
Colecção: Pastas de Actividades e Materiais

Actividades do 1° Ciclo II
Autor: vários
Editor: Associação Professores de Matemática 1997
Colecção: Pastas de Actividades e Materiais

Aprender Matemática - Pensar a Realidade
Autor: Graça, Margarida e Costa, Liliana
Editor: Texto Editora 1998

As dez noções fundamentais
Autor: Bruter, Claude-Paul
Editor: Inst. Piaget 1ª Edição de 2000
Colecção Ciência e Técnica N°. 6

As Notícias e a Matemática
Autor: Paulos, John Allen
Editor: Europa-América 1ª Edição de1997
Colecção: Fórum da Ciência N°. 36

Bento de Jesus Caraça
Autor: Vilaça, Alberto
Editor: Campo das Letras 2000

Brevíssima História dos Números Complexos
Autor: Oliveira, Paulo
Editor: Associação Professores de Matemática 2000
Colecção: Cadernos do GTHEM, N°. 2

Cinco Equações Que Mudaram o Mundo
Autor: Guillen, Michael
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1998
Colecção: Ciência Aberta N°: 96

Cinco Regras de Ouro
Autor: Casti, John L.
Editor: Gradiva 1999
Colecção: O Prazer da Matemática N°. 25

Coisas da Matemática
Autor: Palhoto, Joaquim
Editor: Palhoto - Joaquim Saldanha H. 1ª Edição de 1998

Compreender as Matemáticas
As dez noções fundamentais
Autor: Bruter, Claude-Paul
Editor: Inst. Piaget 1ª edição de 2000
Colecção: Ciência e Técnica N°. 6

Conceitos Fundamentais de Matemática
Autor: Caraça, Bento de Jesus
Editor: Gradiva 1998
Colecção: Ciência Aberta

Curso de Geometria
Autor: Araújo, Paulo Ventura
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1998
Colecção: Trajectos / Ciência N°. 5

Dicionário de Geometria Curiosa
Autor: Wells, D.
Editor: Gradiva 1998
Colecção: O Prazer da Matemática

Dicionário Prático de Matemática
Autor: Alain, Georges
Editor: Terramar 2000

Didáctica das Matemáticas
Autor: Brun, Jean
Editor: Inst. Piaget 1ª Edição de 2000
Colecção: Horizontes Pedagógicos, N°. 62

Do Zero ao Infinito
Tratado Básico de Matemática Aplicada
Autor: Garcia, Narciso
Editor: Escolar Editora 1ª Edição de 1997

Estatística e Calculadoras Gráficas
Autor: Grupo T³
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

Estudos de História da Matemática
Autor: Almeida, A. A. Marques de
Editor: Editorial Inquérito 1ªEdição de 1997
Colecção: Inquérito Universidade

Explorações de Construções Geométricas Dinâmicas
Autor: Junqueira, M. e Valente, S.
Editor: Associação Professores de Matemática 1998

Explorar, Jogar, Descobrir: a Matemática ao Alcance de Todos
Autores: Vários; Sá, António
Editor: Associação para Museu Ciência e Indústria 1ª Edição

Fascínios da Matemática
Autor: Pappas, Theoni
Editor: Replicação 1ª Edição de 1998

Fractais no Ensino Secundário
Autor: Canavarro, A. P., Nunes, C., Alves, D., Alves, S.
Editor: Associação Professores de Matemática 1998
Colecção: Pastas de Actividades e Materiais

Geometria – Temas Actuais
Autor: Veloso, Eduardo
Editor: Instituto de Inovação Educacional 1998

Geometria com o Cabri-Géomètre
Autor: Grupo T³
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

Grandes Enigmas de Pensamento Lateral
Autor: Sloan, Paul e MacHale, Des
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1998
Colecção: O Prazer da Matemática

Grupos e Simetria
Um Guia para Descobrir a Matemática
Autor: Farmer, David W.
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1999
Colecção: Prazer da Matemática

História Universal dos Algarismos — Tomo 2
Autor: Ifrah, Georges
Editor: Nova Fronteira 1ª Edição de 2000

Histórias da Aula de Matemática
Autor: Ponte, J. P., Costa, F., Lopes, H., Moreirinha, O. e Salvado, D.
Editor: Associação Professores de Matemática 1ª Edição de 1997

Investigação em Educação Matemática
Autor: Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P.
Editor: Instituto de Inovação Educacional 1998

Investigações Matemáticas na Sala de Aula: Propostas de Trabalho
Autor: Projecto Matemática para Todos
Editor: Associação Professores de Matemática 2000
Colecção: Pastas de Actividades e Materiais

Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
Autor: Bernardes, O., Teixeira, P., Esteves, P. e Viana, J. P.
Editor: Associação Professores de Matemática 1997

Mais Puzzles Matemáticos
Autor: Loyd, Sam
Editor: Europa - América 1ª Edição de 1998
Colecção: Arte de Viver

MAT 789 — Inovação Curricular em Matemática
Autor: Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P. e Veloso, E.
Editor: Fundação Calouste Gulbenkian 1997

MAT 789 — Inovação Curricular em Matemática
Proposta de Actividades Para os Alunos
Autor: Abrantes, P., Leal, L. C., Silva, M., Teixeira, P. e Veloso, E.
Editor: Associação Professores de Matemática 1ª edição de 1997

Matemágica
Autor: Blum, Raymond
Editor: Bertrand Editora 1ª Edição de 1999

Matemática e Novas Tecnologias
Autores: Ponte, J. P. e Canavarro, A. P.
Editor: Univ. Aberta 1ª Edição de 1997
Colecção: Textos de Base / Cursos Formais Nº. 128

Matemática ou Mesas, Cadeiras e Canecas de Cerveja
Autor: Providência, Natália B.
Editor: Gradiva 2000
Colecção: O Prazer da Matemática

Matemática para Jovens
Autor: Vancleave, Janice
Editor: Dom Quixote 2ª Edição de 2000
Colecção: Ciência para Jovens Nº. 4

Matemática para Principiantes
Autor: Vários
Editor: Dom Quixote 1ª Edição de 2000
Colecção: Para Principiantes

Modelação no Ensino da Matemática — Calculadora, CBL e CBR
Autor: Grupo T³
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

Normas Profissionais para a Avaliação em Matemática Escolar
Autor: NCTM
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

O Caos
Autor: Ekeland, Ivar
Editor: Instituto Piaget 1ª Edição de 1999
Colecção: Biblioteca Básica de Ciência e Cultura Nº. 68

O Diabo dos Números
Autor: Enzensberg, Hans Magnus
Editor: Edições Asa 1998

O Homem que só Gostava de Números
Autor: Hoffman, Paul
Editor: Gradiva 1ª Edição de 2000
Colecção: Ciência Aberta Nº. 102

O Livro dos Números
Autores: Conway, John e Guy, Richard K.
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1999
Colecção: Universidade de Aveiro/ Gradiva Nº. 6

O País da Matemática — Versão Para Peritos
Autor: Norman, L. C.
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1997
Colecção: Gradiva Júnior Nº. 44

O País da Matemática — Versão Para Principiantes
Autor: Norman, L. C.
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1997
Colecção: Gradiva Júnior Nº. 43

O Problema da Semana
Autor: Costa, M. J. (org.)
Editor: Associação Professores de Matemática 1997

O Sonho de Descartes — o Mundo Segundo a Matemática
Autores: Davis, Philip e Hersh, Reuben
Editor: Difusão Cultural 1ª Edição de 1997
Colecção: Ciência Hoje

O Último Teorema de Fermat
Autor: Aczel, Amir D.
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1997
Colecção: Ciência Aberta Nº. 9

Objectos Fractais
Autor: Mandelbrot, Benoît
Editor: Gradiva 1998
Colecção: Ciência Aberta

Os Números e as Mensagens Secretas
Autor: Saraiva, M. J. e Farias, C. I.
Editor: Associação Professores de Matemática 1999

Pavimentações
Autor: vários
Editor: Associação Professores de Matemática 2000
Colecção: Pastas de Actividades e Materiais

Sociologia da Matemática
Autor: Grupo TEM (org.)
Editor: Associação Professores de Matemática 1998
Colecção: Cadernos de Educação Matemática, Nº. 3

Transformações Geométricas
Autor: Oliveira, A. J. Franco de
Editor: Univ. Aberta 1ª Edição de 1997
Colecção: Textos de Base / Cursos Formais Nº. 139

Truques ao Raciocínio Matemático
Empolgantes Quebra-Cabeças Que Desenvolvem Capacidades Matemáticas
Autor: Stickels, Terry H.
Editor: Replicação 1ª Edição de 1999
Colecção: Matemática Divertida

Truques de Lógica Matemática
Autor: Smith, Kurt
Editor: Replicação 1ª Edição de 1998
Colecção: Matemática Divertida

Uma Paródia Matemática
Autor: Bolt, Brian
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1997
Colecção: Prazer da Matemática Nº. 21

Vamos Contar
Autores: Snape, Charles e Scott, Heather
Editor: Gradiva 1ª Edição de 1997
Colecção: Viva a Matemática

CD-Roms

Eu adoro Matemática (Win/Mac)
Editor: Porto Editora

Eu Aprendo Matemática — 5º ano (Win)
Editor: Porto Editora

Eu Aprendo Matemática — 6º ano (Win)
Editor: Porto Editora

Eu Aprendo Matemática — 9º ano (Win)
Editor: Porto Editora

Matemania — Jogos de Matemática (Win/Mac)
Editor: Porto Editora 1997

Matemática à Aventura 1 - Contar e Ordenar (Win/Mac)
Editor: Porto Editora

Matemática à Aventura 2 — Adição e Subtracção (Win/Mac)
Editor: Porto Editora

Matemática Fantástica
Editor: Iona Software 1996

O Mundo da Matemática — Heróis dos Números
Editor: Iona Software 1997

Educação (,) Matemática e Sociedade

João Filipe Matos

Não restam dúvidas de que a construção de uma cidadania informada e detentora de sentido crítico é hoje um dos objectivos fundamentais da educação. Esta ideia tem sido sistematicamente repisada pelos políticos. Mas paradoxalmente (ou talvez não) são os mesmos políticos que definem (com o *apoio* dos professores depois das *amplas discussões* realizadas nas escolas) orientações curriculares e formas de avaliação que apelam muito mais ao regorgitar e à aplicação mecânica de alguns saberes práticos do que à demonstração de capacidades de reflexão, de análise, de crítica.

Na área disciplinar de Matemática a situação não é muito diferente das restantes mas eventualmente as contradições são menos visíveis. Onde estão no ensino da matemática as grandes preocupações com a contribuição para uma melhor compreensão da realidade, dos fenómenos sociais, do desenvolvimento de um espírito democrático, da solidariedade? Onde está a preocupação em pensar a formação matemática dos jovens nas articulações que essa área tem com o desenvolvimento socio-histórico da matemática enquanto adquirido cultural da sociedade? Onde está a preocupação em proporcionar aos jovens oportunidades de envolvimento em projectos que incidam sobre questões sociais que estão aí todos os dias e que não se podem mais ignorar? Onde está uma política de educação matemática que considere com seriedade o problema da exclusão social provocada directamente pela matemática enquanto disciplina escolar? Onde está uma política, uma orientação, um investimento na formação de professores que considere as suas responsabilidades sociais e políticas na formação matemática dos jovens como cidadãos do futuro?

> É preciso reinventar a educação matemática de um ponto de vista social e político. Não basta dizer que a educação matemática é importante, que a matemática é uma actividade social (o que é que não é uma actividade social?), que a matemática é difícil (de que matemática estamos a falar, de que dificuldades estamos a falar?). É na utopia de uma educação matemática libertadora que reside algo de interessante e realmente estimulante.

Como estamos hoje?

A sociedade vive actualmente inúmeros problemas com os quais é necessário aprender a lidar, sobre os quais é preciso actuar. A educação matemática hoje em dia não pode continuar a colocar-se à margem dos problemas da sociedade actual. O argumento universalmente repetido até à exaustão de que é preciso e forçoso ensinar a matemática na escola (*mais tarde verás porquê!*) e que os alunos/futuros cidadãos têm que saber matemática para encarar os problemas do mundo moderno (problemas alguns que não conhecemos porque ainda nem existem...), esse tipo de argumento não pode ser utilizado para continuar a fazer mais do mesmo. Isto é, para continuarmos a fazer, no ensino da matemática, as mesmíssimas coisas com outras roupagens — passamos a ter caricaturas de investigações que se tornam em exercícios para fazer na aula em vinte minutos, passamos a ter mais resolução de problemas que não são de facto problemas mas sim exercícios vestidos com histórias, passamos a ter mais tecnologia e sobretudo mais Internet confundindo a sua função de elemento mediador das aprendizagens com a sua utilização folclórica. Estamos na fase do "está tudo bem" ou, como diz um conhecido meu com um ar de consolo invejável, "há uns quinze anos estávamos atrasadíssimos". Mas não está tudo bem. Mesmo as pequenas operações de maquilhagem nos programas actuais acabam por se atraiçoar a si mesmas revelando ainda mais as fraquezas dos mesmos programas. Sistematicamente não se coloca a questão básica "que matemática ensinar". Na minha perspectiva é aí que está o cerne da questão. Isto é, é preciso revisitar a questão das finalidades do ensino da matemática escolar — "para quê, porquê ensinar matemática na escola básica e secundária".

Modelação matemática como factor de indução da reflexão...

Induzir os alunos a perceber as dimensões culturais da matemática não é simplesmente desenvolver alguns problemas de aplicação e modelação matemática — muitas vezes modelando sobre situações que já nada têm que ver com o mundo. E onde muitas vezes esse "mundo" é praticamente desnecessário, só *atrapalha* os objectivos do professor, *causa* mais dificuldades nos alunos e não acrescenta nada ao problema matemático em questão. Levar os alunos a reflectir sobre a dimensão política da matemática passa primária e necessariamente por serem os professores a fazer essa reflexão. E isto não é apenas estabelecer alguns diálogos sobre o problema. É analisar o que tem sido escrito sobre a questão, é envolver-se a discutir seriamente estas questões. Não basta fazer alguns problemas de modelação matemática e incluí-los nos exames ou nas provas globais e imaginar que os alunos se apercebem da complexidade das situações sociais modeladas.

... mas com reflexão e discussão das situações

Todos somos capazes de reconhecer alguns dos modelos matemáticos que regulam o nosso dia-a-dia e de apontar a sua função de prescrição. Mas é importante notar e assumir que não somos alheios à existência desses modelos. De facto, também somos nós enquanto cidadãos que contribuímos para a legitimação desses modelos. Veja-se o exemplo do IRS. Luta-se para diminuir as taxas de desconto a aplicar mas não se põe em causa o próprio modelo do IRS como se se tratasse de algo natural, lógico ou oriundo de algum deus. Luta-se por um aumento dos salários de 3% em vez de 2,5% sem pôr sequer em causa a legitimidade do facto dos aumentos serem proporcionais. E estes modelos que *organizam* a nossa vida diária, são percepcionados como sendo impostos pela matemática na sociedade quando são de facto criação da própria sociedade. Os modelos matemáticos têm uma função formatadora da sociedade mas a sociedade não é alheia a esse facto. Analisar e desconstruir modelos matemáticos presentes no dia-a-dia da sociedade cria oportunidades de debate e reflexão sobre os seus aspectos sociais e políticos e pode constituir uma das vias de colocar a matemática como um vector de formação cívica e humana dos alunos. Mas para isso é necessário ir mais longe. É necessário interrogar a própria matemática que se está a ensinar nas escolas. A questão pertinente não é "para que serve" do ponto de vista utilitário mas "para quê" do ponto de vista formativo.

O que diz sobre isto a investigação?

A investigação em educação matemática que tem vindo a ser desenvolvida em Portugal desde os anos 80 não tem reflectido sobre este tipo de questão. Por um lado, tem-se virado para questões (que reclama serem de didáctica da matemática) que tendem a perder a noção da sociedade e do país em que vivemos — como se o facto de se investigar, por exemplo, o ensino das funções pudesse ser desligado do papel que elas têm na formação matemática dos alunos enquanto cidadãos, ou da questão da agenda que está por detrás do ensino das funções como veículo de construção de uma dada forma de ver o mundo... Por outro lado, muita investigação tem analisado as concepções, as competências e os saberes dos professores como se se tratasse de seres que vivem fora do mundo em que nos movemos e deixando de lado as questões de natureza política e social que determinam muitas das opções e das práticas desses professores. Neste domínio, a investigação em educação matemática não tem dado contributos significativos para a reflexão dos professores. Mesmo alguma investigação feita sobre a aprendizagem escolar tende a focar-se sobre o que se passa na sala de aula, em trabalho de grupo e em díades, mas quase sempre fora de uma perspectiva socio-cultural e política que entenda a escola como inserida no mundo social em que vivemos. As tentativas que estão a ser feitas para trazer para um plano mais relevante as aplicações e a modelação matemática através da investigação de experiências de natureza interdisciplinar podem constituir uma oportunidade para fortalecer cada vez mais na escola a dimensão social e política da educação matemática.

De professor de matemática a educador matemático[1]

O professor de matemática é antes de mais professor. Como professor e como cidadão é preciso que não seja visto e não se assuma como uma correia de transmissão das autoridades escolares, mas como um educador. Um educador matemático. A escola tem que fazer educação matemática e não apenas ensinar matemática. E não deve presumir-se que o facto de se ensinar implica necessariamente que os alunos aprendam. A definição de um programa de educação matemática para o ensino básico e secundário passa por uma revisão das finalidades que a matemática escolar tem actualmente. Passa por um questionamento sobre o tipo de competências que se pretende que os alunos adquiram ao longo da sua escolaridade. E isto significa que o professor de educação matemática não pode ter como limites do seu trabalho os constrangimentos impostos necessariamente pela sua preocupação com a preparação dos seus alunos para exames nacionais ou provas (exames) globais. Se o professor de educação matemática sabe que os seus alunos vão ser sujeitos a um tipo de prova X é obrigação ética prepará-los para esse tipo de prova. E isso de certeza ocupará tempo e energia suficiente para não permitir disponibilidade e tempo para actividades que envolvem pesquisa no terreno, análise preliminar de dados, organização da apresentação dos resultados à turma, elaboração e discussão de relatórios, etc. O ensaio de pseudo-soluções como a inclusão de problemas, *investigações* e situações de modelação e aplicação nos exames é a caricatura do estado de embriaguez a que se chegou no afã de satisfazer todas as clientelas (o Ministério da Educação, as associações de professores, os investigadores, etc). Mas este é também um fenómeno social e analisá-lo implica espaço que não cabe neste artigo.

Fica certo para mim que cabe ao professor de educação matemática o desenvolvimento nos alunos da capacidade de reflexão, de reparar nas questões mais simples que nos rodeiam, de as interrogar e de perceber como a matemática como produto humano é ao mesmo tempo um resultado dessa actividade e um elemento fortemente formatador das nossas práticas.

Está na nossa mão

O que podemos fazer como professores de educação matemática desde o 1° ciclo ao secundário? Não faltam diariamente situações do dia-a-dia que nos alertam para os problemas e situações que a sociedade vive. No momento em que este artigo está a ser redigido registam-se, um pouco por toda a Europa, protestos fortíssimos contra os altos preços dos combustíveis. Pergunta ingénua: porquê? Como ponto de partida para o desenvolvimento de uma reflexão informada acerca da situação social e económica, esta questão traz consigo de imediato a consideração de indicadores económicos de desenvolvimento, o que arrasta a questão dos modelos que são usados na definição desses indicadores e da volta que se lhes dá para que se tornem eles próprios os vectores de desenvolvimento da situação económica. Claro que os modelos são muitíssimo complexos, a vida é complexa. Mas é por isso mesmo que a educação matemática não pode viver à parte de tudo isso, num mundo cor-de-rosa cheio de triângulos, de teoremas de Pitágoras, de funções e de derivadas. É preciso reinventar a educação matemática de um ponto de vista social e político. Não basta dizer que a educação matemática é importante, que a matemática é uma actividade social (o que é que não é uma actividade social?), que a matemática é difícil (de que matemática estamos a falar, de que dificuldades estamos a falar?). É na utopia de uma educação matemática libertadora que reside algo de interessante e realmente estimulante. Não na obediência cinzenta a currículos que apanharam a terminologia da moda (as investigações, a resolução de problemas, a tecnologia gráfica, a modelação, etc) e que estão condenados a ser cartilhas de prepotência e de castração da imaginação dos jovens.

Notas

[1] A língua Portuguesa está carregada de elementos que quase nos obrigam a utilizar sistematicamente o masculino em vez do género neutro, colocando-nos num registo que pode ser lido como significando exactamente a valorização do masculino. Neste texto mantenho essa forma de escrita apenas para não tornar a linguagem demasiado visível o que poderia obscurecer as ideias que procuro discutir.

João Filipe Matos
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

Divisores e Regularidades

Esta tarefa apesar de não ser uma tarefa de investigação especificamente virada para alunos do 2° ciclo, pode ser abordada por estes. O estudo dos divisores, associado à descoberta de regularidades, é uma boa maneira de fomentar nos alunos o gosto pelas actividades de investigação. Esta não é contudo uma tarefa para o ensino dos divisores. No entanto, pode ser útil na compreensão de pontos fortes e fracos que os alunos apresentem no que se refere à compreensão destes. As regularidades existentes envolvem o conceito de número primo, número quadrado (quadrado prefeito) e número rectangular o que pode ser desconhecida para alguns alunos. Neste caso o professor poderá aproveitar o desenrolar da actividade para introduzir esses conceitos.

Na primeira fase de realização da tarefa os alunos apercebem-se da importância da organização dos dados, aprendizagem essencial no estudo da Matemática. O foco da actividade muda depois para a procura de regularidades e relações. Os alunos já sabem que os números com dois únicos divisores são números primos. Poderão observar que os números com um número ímpar de divisores são quadrados perfeitos e que os números com quatro, seis, oito... divisores são outros números rectangulares. Pode ainda ser explorado de quantos modos se podem construir esses rectângulos e a sua relação com o número de divisores. Este tipo de tarefa requer que se proceda à discussão do trabalho realizado pelos alunos, sendo neste caso aconselhável que se desenvolva numa aula de duas horas. Esta fase é essencial para levar os alunos, nesta altura ainda pouco experientes neste tipo de tarefas, a perceberem que para além de descobrirem regularidades há também que tentar justificá-las. O recurso à máquina de calcular assume alguma importância na realização desta tarefa. O seu uso permite que os alunos validem os divisores de forma a que possíveis erros não lhes dificultem a descoberta das regularidades.

Adaptado de " Thinking Things Through", Leone Burton (1984)

Irene Segurado
EB 2,3 Dr. Rui Grácio

Escola ....

Ano/Turma.................... Data........................ Aluno(a)..

Divisores e Regularidades

A seguinte tabela mostra os números de 1 a 6 e os respectivos divisores.

número	divisores					
1	1					
2	1	2				
3	1	*	3			
4	1	2	*	4		
5	1	*	*	*	5	
6	1	2	3	*	*	6

- Investiga que tipo de números têm apenas três divisores.
- Pensa agora no caso de 4, 5, ... divisores.
- Tenta encontrar outras regularidades na tabela.

O que é para ti a Matemática?

Helena Fonseca

Em relação à realização de investigações na aula de Matemática, a maioria dos alunos considera que isso é possível, defendendo que permitem aos alunos interiorizar melhor a matéria, fazer novas descobertas (mesmo não o sendo para a comunidade matemática), pesquisar o porquê.

O que é para ti a Matemática? Não queremos que nos responda, o que queremos é dar-lhe a conhecer o que os alunos pensam acerca do assunto. Neste Ano Mundial da Matemática, fomos procurar conhecer qual a imagem que alguns alunos têm da Matemática, procurando ir ao encontro de um dos subtemas propostos a nível internacional. Para isso, decidimos aproximarmo-nos de algumas escolas e recolher dados que fornecessem, de certo modo, a visão que os alunos têm desta ciência.

Até há pouco tempo atrás era muito frequente os alunos associarem a Matemática ao cálculo, à memorização, ao seguimento de regras, à ciência do certo e do errado. No entanto, estas ideias têm vindo a sofrer algumas alterações e para isso têm contribuído os esforços levados a cabo por diversos professores no sentido de as contrariarem, mostrando a Matemática como uma ciência que estuda as regularidades, como uma linguagem, como um modo de pensar e encarando-a de uma forma dinâmica, criativa e em permanente evolução.

Os alunos da Escola Secundária de Emídio Navarro, em Almada, tiveram a oportunidade de expressar a sua visão da Matemática através de frases alusivas a esta ciência ou ao AMM. Estas frases, elaboradas por alunos do ensino secundário, foram submetidas a um concurso destinado a eleger a frase representativa da escola. De entre as frases apresentadas, destacamos cinco que encaram a Matemática como algo de fundamental para a Humanidade:

- Vá para onde for, faça o que fizer, a matemática é fundamental!!!
- A Matemática é a roda que faz girar o Mundo.
- O Homem é a Unidade ... A Matemática é o Todo...
- A Matemática é a base da ciência, e por isso, do progresso mundial.
- A Humanidade depende da razão Matemática.

Outras, transmitem ainda uma visão da Matemática como uma ciência exacta que consiste em regras bem definidas:

- A Matemática, a ciência mais exacta.
- A Matemática é como um jogo, porque é necessário saber bem as regras para poder jogar.

No final do concurso, elegeu-se a frase representativa da escola: A Matemática é a $\sqrt{\text{do saber}}$.

Na Escola Secundária Amélia Rey Colaço, em Linda-a-Velha, os alunos puderam expressar a sua imagem da Matemática através de uma escultura. As esculturas, desenvolvidas no âmbito do concurso promovido na escola e intitulado "Uma escultura matemática na escola", foram realizadas, na sua maioria, na disciplina de Oficina de Artes por alunos do 11° ano e por uma aluna do 10° ano. Dos sete trabalhos apresentados a concurso, cinco dos quais tinham incluída uma esfera ou semi-esfera, saiu vencedora uma escultura que envolve uma superfície parabólica, uma superfície triangular e uma esfera.

Sofia Macedo — 11° ano
Esc. Sec. Amélia Rey Colaço

Poemas, foi outro dos meios utilizados para os alunos expressarem a sua visão da Matemática. Foi o que aconteceu na Escola Secundária Augusto Gomes, em Matosinhos. Uma aluna procurou definir a essência da Matemática simulando, por palavras, a resolução de um problema matemático, com as suas tentativas de resolução, caminhos que não levam à solução, procura de novos caminhos:

Resolver um problema matemático,
por mais irónico que pareça, é um verdadeiro problema!
Numa folha de rascunho, traço as minhas linhas de pensamento.
Tento as combinações, arranjos, com ou sem repetição, ou até permutações.
E, por fim, descubro que podem ser todas elas.
Será que isto é um acontecimento impossível?
Contudo, procuro saber a sua probabilidade,
Lançando uma moeda ao ar, para os casos possíveis, e fazer girar um dado viciado, para as casos favoráveis.
Talvez, mudando de universo, consiga a probabilidade condicionada.
(Bem, talvez condicionado ficaria, o futuro da matemática!!)
Mas, uma coisa é certa meia folha já lá vai!
Vejo que não consigo resolver, derivo para outras bandas.
Experimento os logaritmos, de base dez ou neperianos, calculando os respectivos limites, limites esses, que na minha imaginação finita, tende para o mais infinito.
No entanto, só me resta um cm² de papel, para acabar esta parábola.
Mas que seno...
Bem, cá vai uma tangente!
Tentando, tentando, adormeço perdida, cada vez mais, sonhando, com deduções e demonstrações, de triângulos amorosos, como é o de Pascal.
De repente, acordo e pergunto-me:
— Mas afinal, qual era a questão?
Tão simples como esta.
— Qual é a essência da MATEMÁTICA?

Maria Isabel Silva, 12º ano

Outro aluno, colocou a Matemática como algo fundamental para a compreensão do Homem e do mundo:

Matemática, o que és tu para mim?
Bem, não sei ao certo,
E no entanto, todos os dias me encontro contigo,
Todos os dias vivo contigo,
Mesmo sem muitas vezes o saber.
É verdade, sim, não minto,
Quantas dores de cabeça já me deste,
Quantas vezes me deixaste *piurso*,
... Sou um mero estudante, não fujo à regra.
Ahhh, qualquer relação tem os seus arrufos.
Mais do que isso são as alegrias que me deste
Mais do que isso foram as vezes que me deixaste maravilhado.
E tal como a mim,
Já o vens fazendo ao Homem, desde que ele se conhece,
Já o vens surpreendendo e encantando
Com conhecimento que só tu nos sabes dar
Mas... Matemática, estarei eu a falar para ti?
Só existes desde que o Homem foi criado,
Só existes dentro de cada Homem.
Tu, Matemática, que para muitos continuas aí fora,
És eu, estás dentro de mim.
Só existes para mim porque eu existo
Por isso tenho que te explorar bem
Tenho que te conhecer melhor
Tenho que compreender os teus caprichos.
Só assim poderei dizer quem realmente sou
E o que o mundo realmente é
Procuro ajuda para te (me) conhecer melhor
... E encontro!!
Matemática na Escola!
Bem mereces um Ano Mundial,
Por tudo o que fizeste pelo Homem!

João Pinho, 12º ano

E outra aluna, da mesma escola, exprimiu a sua imagem da Matemática do seguinte modo:

Queria oferecer ao mundo
Uma função quadrática!
Queria mostrar a todos
A beleza de uma raiz cúbica,
A serenidade de um logaritmo,
As fantásticas cores de um expoente.
Queria que todos nós víssemos
Como é lindo e fascinante
Quando x tende para mais infinito.
Mas qual é a probabilidade de isto acontecer?
Não sei quais são os casos possíveis!
Nem sequer sei os casos favoráveis!
E afinal calculo a percentagem de quê?
Faz o que deves!
Agarra num lápis
E perde-te no mundo das progressões.
Hoje as geométricas,
Amanhã as aritméticas.
Dá ao mundo um caso notável,
Cria o teu próprio gráfico,
Inventa o teu próprio arranjo,
As tuas próprias combinações e permutações,
Porque decidamente não há limites.
Aqui no mundo da matemática,
Tudo se soma, subtrai, divide e multiplica.
Cria fracções,
Põe algo em evidência,
Anula elementos,
Descobre todas as soluções
E mais tarde,
Quando acordares deste sonho,
Vais-te aperceber que não há,
Nem nunca houve motivos
Para alguém ter medo deste mundo,
Pois foi simplesmente
O sonho mais fantástico que alguma vez tiveste.
Por isso: fecha os olhos
E volta a sonhar.

Rita Sá Pereira, 12º ano

Noutra escola, a Escola Secundária de Linda-a-Velha, a professora de uma turma de 10º ano, decidiu confrontar os alunos, não com a questão "O que é para ti a Matemática?", mas com outra fortemente relacionada com o trabalho dos matemáticos "O que é uma investigação?". Uns associaram-na à procura de 'coisas', informações, dados; outros, à procura de respostas para responder a questões e problemas; outros, ao estudo de um assunto; outros ainda, ao processo para determinar conhecimentos e chegar a conclusões; e um, à descoberta de por que é que as 'coisas' acontecem. A maioria dos alunos incluiu a Matemática entre as ciências em que se dá um maior relevo à investigação.

No seguimento desta questão pretendia-se que os alunos pensassem noutras: "O que fará um investigador em matemática?" e "Achas que é possível, nas aulas do ensino secundário, fazer investigações em Matemática?". Relativamente à primeira, e de entre as diversas respostas que surgiram, o investigador matemático procura responder a questões ou obter soluções para problemas; procura leis ou investiga os meios para chegar a um determinado resultado; tenta perceber, desenvolver ou provar certas teorias; faz exercícios práticos e investiga fórmulas matemáticas; colabora com investigadores de outras ciências. Destas respostas destacam-se duas que defendem que um investigador em matemática:

- procura perceber algumas teorias e valores não explicados, descobrir novos valores que o ajudem a resolver os problemas com que se defronta. Um matemático deve também tentar compreender porque é que as coisas são como são, experimentando, construindo, calculando e comprovando.

  Carolina Patrocínio

- procura através de sucessivas tentativas encontrar soluções para resolver o problema que lhe é colocado. Por vezes, contesta uma afirmação feita por outro matemático através de cálculos e pesquisas ou confirma o que estava já estabelecido ou encontra novas soluções e conceitos.

  Clara Barroso

Em relação à realização de investigações na aula de Matemática, a maioria dos alunos considera que isso é possível, defendendo que permitem aos alunos interiorizar melhor a matéria, fazer novas descobertas (mesmo não o sendo para a comunidade matemática), pesquisar o porquê. De entre os vários argumentos apresentados, salientam-se os seguintes:

- o aluno partindo do princípio que não tem conhecimentos sobre o que investiga, vai chegar ou não a uma conclusão, embora ela não seja novidade para a comunidade matemática, mas sim para o aluno.

  Francisco Almeida

- é a descobrir e a investigar que se aprende!

  Carolina Patrocínio

- é importante que os alunos, em grupo ou sozinhos, tentem encontrar soluções para os problemas que lhe são colocados e não ser só o professor a explicar o raciocínio e o modo de resolução. Penso que, deste modo, os alunos interiorizam melhor a matéria, mas também acho necessário que o professor oriente ou indique o caminho a ser tomado para chegar a determinadas soluções.

  Clara Barroso

Depois há alguns que consideram ser possível mas difícil a realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, transmitindo a ideia de que as investigações só deverão ser feitas num nível mais superior pois são necessários muitos conhecimentos que não possuem, ou que não será necessário investigar porque a professora sabe explicar aquilo que vão aprender. De entre os alunos cuja opinião se situa neste nível, temos, por exemplo:

- Há muito pouca coisa para investigar, pois a maioria dos enigmas matemáticos são difíceis de investigar, ou seja, nós não sabemos certas coisas que poderiam ser precisas na tal investigação.

  João Ricardo

- É difícil conduzirmos a nossa própria investigação na medida em que ainda não adquirimos todos os conhecimentos básicos da matemática. Torna-se, portanto, difícil alcançar conclusões e elaborar regras o que implica um árduo e cansativo trabalho de investigação e experimentação consecutivas. Não digo que seja impossível, mas acho difícil um trabalho de investigação no secundário dar importantes resultados.

  Diana Martins

Finalmente, temos os que consideram, e que são muito poucos, não ser possível realizar investigações na sala de aula, defendendo que em matemática não há coisas novas a descobrir, que está praticamente tudo resolvido e que a matéria dos programas já está o mais explícita possível. Temos, por exemplo, a opinião de duas alunas:

- em matemática não há coisas novas a descobrir como por exemplo em Química ou Biologia. Nestas duas últimas ciências a todo o minuto se descobrem novos remédios para curar doenças; ao mesmo tempo surgem novas doenças para as quais se tem que investigar a cura. Em matemática, todos os problemas têm solução o que pode ser difícil é descobrir a verdadeira solução.

  Diana Alves

- a maior parte das vezes está tudo resolvido em relação à matemática, pode é achar-se outra alternativa para resolver um problema. Mas hoje em dia está já quase tudo claro e exemplificado.

  Raquel

Na Escola Secundária António Arroio, em Lisboa, os alunos de uma turma de 10º ano e a sua professora de Matemática, Maria Azenha, desenvolveram um trabalho em pintura, no qual quiseram transmitir a imagem que têm da Matemática. Para acompanhar a sua pintura cada aluno elaborou uma explicação da mesma e um poema. Todos os trabalhos foram compilados numa 'brochura' intitulada "Espelhos da Matemática" e que será oportunamente editada em livro. (ver alguns trabalhos nas páginas seguintes).

Na mesma escola, outros alunos procuraram responder à questão "o que é para ti a Matemática?". De entre as respostas recolhidas destacam-se: "Eu penso que a Matemática é um bicho muito complicado. Mas, por outro lado, ajuda-nos a sermos rápidos e eficazes nas nossas decisões. Este bicho de raça quase ... dá-nos reflexos e instintos *calculados*" e "É simples. Quando se gosta, gosta. Quando não se gosta, tenta-se gostar. No meu caso não tenho Matemática, tenho Métodos Quantitativos, é um bocado mais complicado. Mas não interessa, eu gosto de pensar".

Estas foram as imagens da Matemática que recolhemos. Outras existirão. É preciso que nos apercebamos delas para as fomentar, procurar melhorar ou, até mesmo, contrariar.

Helena Fonseca
Universidade de Lisboa

À deriva nos rios,
Procurei a luz do conhecimento.
Estava muito Longe.
Mas algo me transmitiu uma
Paz, uma segurança para
Me empurrar a mim própria.
Muitos tentam chegar
Ao que eu não chego,
Mas represento a Matemática
Como se lá chegasse
Insegura, os pincéis eram aves
Nas minhas trémulas mãos.
Compenetrei-me...
Finalmente, eu entendo a matemática
Feliz de ver o quadro acabado.

Sónia Ribeiro
Esc. Sec. António Arroio

Naquela noite, a Matemática invadiu-me
O ser... o espírito.
Dediquei-me completamente, e
Imaginei-me nas íngremes escadas
Em direcção à luz, circundadas
Pelo abismo escuro... voltei à
Realidade, caí das escadas,
Mas ainda posso subi-las

Vera Caneta
Esc. Sec. António Arroio

Numa tarde a inspiração sussurrou-me ao ouvido palavras silenciosas. Diziam-me que a Matemática escondia algo... Algo que eu poderia desvendar se pegasse num pincel, num pouco de tinta, e deixasse as minhas mãos serem levadas pelo vento.

Que vento?

Um vento que acarretava com ele o nascer desta arte numérica e que nos embala para o Ponto. O Ponto por onde tudo aparece. Aparece, esquecendo a palavra desaparecer, expande-se, esquecendo a palavra parar...

Aparece e deixa a essência dilatar-se.

Joana Baptista
Esc. Sec. António Arroio

O ponto de interrogação na tela significa a minha ignorância de Matemática bem como o vasto universo que ela nos proporciona.

Cátia Oliveira
Esc. Sec. António Arroio

O sólido perfeito no espaço flutua sem brilho.

Nelson Soares
Esc. Sec. António Arroio

Matemática visual

Michele Emmer

A computação gráfica é um instrumento importantíssimo, tanto no campo científico como artístico; um novo e poderoso instrumento que não elimina, no entanto, os demais instrumentos à disposição dos cientistas e dos artistas. O primado continua a pertencer à capacidade criativa do Homem. Nenhuma máquina conseguirá alguma vez substituir esta capacidade singular.

Os teoremas visuais

Nos nossos dias seria impossível tratar certos sectores da matemática contemporânea — dos fractais à teoria do caos, passando pelos sistemas dinâmicos — sem recorrer à eficácia dos computadores para produzir gráficos apropriados. O aparecimento desta nova tecnologia modificou em parte o modo como se faz a Matemática. Em parte, porque o fenómeno apenas diz respeito a certos sectores da Matemática e não se pode obviamente generalizar. O computador tornou-se um instrumento que permite experiências matemáticas que abrem perspectivas completamente novas.

Em 1993, foi publicado na revista *Scientific American* um artigo intitulado *The Death of Proof* ("A Morte da Demonstração"), onde o autor a certo passo dizia: "O computador está a obrigar os matemáticos a reconsiderar a própria natureza da demonstração, e consequentemente da verdade. Nos últimos anos, para conseguir certas demonstrações foi necessário executar uma enorme massa de cálculos, e assim nenhum ser humano pode verificar essas pretensas demonstrações feitas com computador; apenas outros computadores o podem fazer. Recentemente, alguns investigadores propuseram uma demonstração com computador que fornece apenas a probabilidade e não a certeza da verdade, o que para alguns matemáticos é uma verdadeira incongruência. Outros ainda preparam a 'vídeo-demonstração' na esperança de que seja mais convincente do que páginas e páginas de fórmulas". Haverá que precisar de imediato que o autor do artigo estava a pensar apenas em determinados problemas matemáticos e em certos sectores onde a "vídeo-demonstração" poderia ser útil.

Um exemplo famoso: as superfícies mínimais

No artigo do *Scientific American* citava-se, entre outros, David Hoffman, hoje no MSRI (*Mathematical Science Research Institute*, de Berkeley), que juntamente com William Meeks III, e utilizando as equações descobertas por um matemático brasileiro, C. Costa, demonstrou a existência de uma categoria de superfícies minimais de tipo topológico bastante elevado, superfícies minimais com buracos, e portanto impossíveis de obter por meio de películas de sabão. O método usado por aqueles investigadores consistiu em estudar visualmente, num terminal vídeo, as superfícies construídas a partir das equações de Costa para tentar compreender a sua estrutura. Através da análise das imagens os dois matemáticos conseguiram estabelecer algumas simetrias entre as figuras vistas e graças a tal observação ficaram aptos a demonstrar analiticamente a existência das soluções.

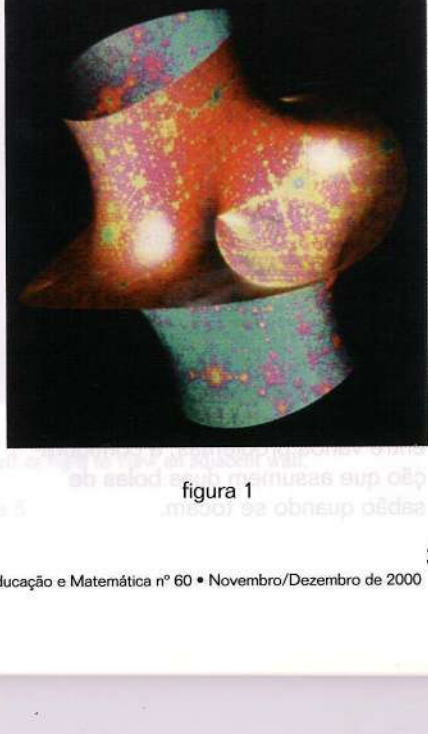


figura 1

Foi este um dos primeiros, se não o primeiro resultado no qual a computação gráfica desempenhou um papel importante na demonstração de um problema matemático não trivial, pois o problema resolvido estava em aberto há 200 anos.

Desde o seu surgimento, a teoria das superfícies minimais baseou-se de maneira preponderante em imagens. Antoine Ferdinand Plateau (1808-1883) publicou em 1873 o resultado de quinze anos de investigação: *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires.*

No caso de duas bolas de volume igual obtém-se uma configuração perfeitamente simétrica com uma lâmina plana dividindo as duas bolas.

A demonstração, obtida utilizando essencialmente o computador, foi anunciada por Joel Hass e Roger Schlafly em 16 de Agosto de 1995 durante o *Math Festival* de Burlington (nos EUA).
Foram obtidas imagens muito interessantes das duplas bolas por John Sullivan no Geometry Center da Universidade do Minnesota em Minneapolis, um centro encerrado em 1998.

Há poucos meses, Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré e Antonio Ros anunciaram ter demonstrado que a configuração de duas bolas (a chamada "dupla bola") tal como aparece nas imagens de Sullivan é efectivamente a que tem a propriedade de mínimo. No sentido de que se se formam dois volumes de ar em duas duas bolas de sabão que se tocam, elas assumirão uma configuração que consiste em três superfícies: as duas bolas iniciais truncadas pela parte comum e a superfície que as separa. Esta superfície é curva excepto no caso em que os dois volumes de ar sejam iguais.

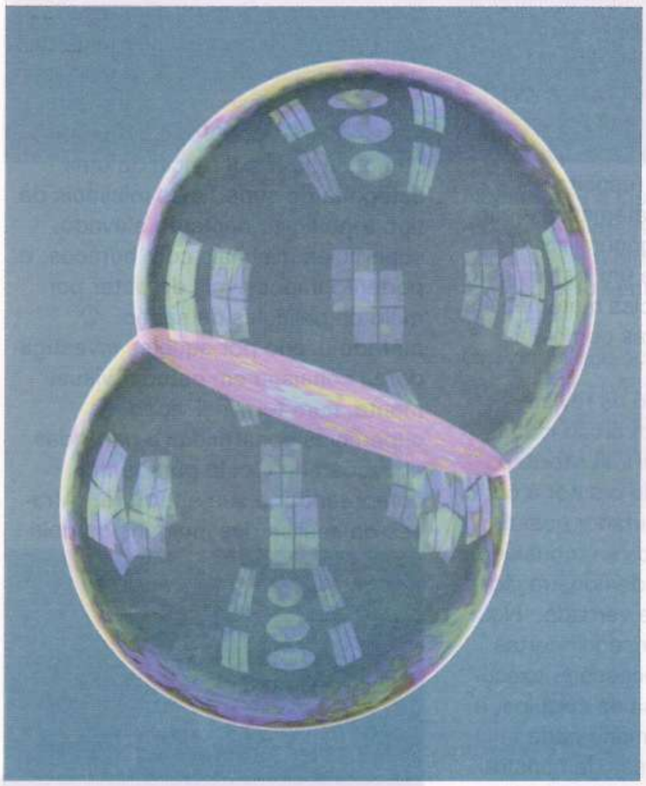


figura 2

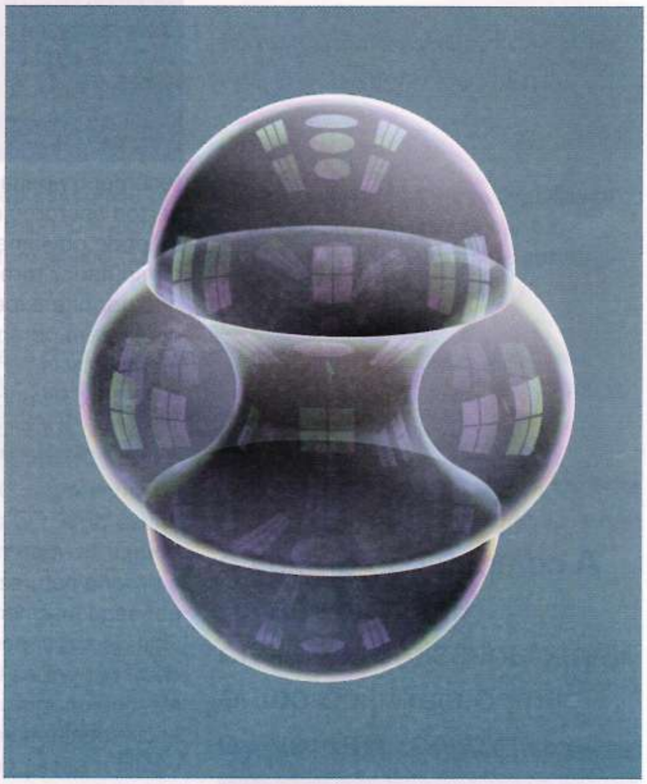


figura 3

Nessa obra, são expostos vários problemas relativos às lâminas e às bolas de sabão. Naturalmente, está cheio de desenhos que ilustram os diferentes problemas. Nasce assim a teoria das superfícies minimais, ou seja as superfícies que minimizam a área da superfície em relação a determinada propriedade; no caso de uma bola de sabão, em relação ao volume de ar que contêm.
No livro de Plateau observava-se, entre vários problemas, a configuração que assumem duas bolas de sabão quando se tocam.

Faltava uma demonstração da configuração de duas bolas de volume de ar diferente. O problema consiste em provar que duas bolas de sabão que se tocam, formarão uma configuração do tipo da imagem computorizada realizada por Sullivan. As equações que permitem modelar as superfícies minimais e as bolas de sabão são de tipo não linear, ou seja complicadas. Não são fáceis de tratar e essa é a razão pela qual alguns matemáticos ganharam a medalha Fields (equivalente ao Nobel) trabalhando com superfícies minimais.

Neste caso, a parede que separa as duas bolas será plana.

Esta configuração é a única configuração que tem a área mínima superficial global em relação a qualquer outra configuração formada pelas duas bolas (do tipo da bola "não *standard*" de Sullivan).

O artigo "Proof of the Double Conjecture" está na Internet desde 15 de Março de 2000.

Pode consultar-se no sítio: http://www.williams.edu/Mathematics/fmorgan/ann.html.

As imagens de Sullivan encontram-se em: http://www.math.uiuc.edu/~jms/Images. Outras imagens encontram-se em: http://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/cmc/library/double/index.html.

As primeiras imagens

As primeiras tentativas para utilizar a computação gráfica na geometria e na matemática foram levadas a cabo em fins dos anos Sessenta quando um especialista em informática, Michael Noll, concebeu um programa de animação de um hipercubo. Tratava-se de recorrer às várias possibilidades de projecção de um cubo a quatro dimensões num espaço a três dimensões e de com um *plotter* imprimir em papel e em sequência as diferentes imagens: a técnica dos desenhos animados (fig. 4).

A ideia foi mais tarde retomada por Thomas Banchoff e Charles Strauss, da Brown University, em Providence, nos Estados Unidos. Foram então realizados os primeiros filmes de superfícies geométricas em evolução no espaço utilizando a técnica da animação computorizada. Em particular o filme *Hypercube: projecting and slicing*, de1976, mostrava uma sequência contínua das diversas projecções do hipercubo. Era possível assim ver o hipercubo mover-se no espaço. O filme provocou uma grande impressão ao ser projectado no congresso mundial de matemática de Tóquio, em 1978. Se já se conhecia muita coisa do objecto geométrico hipercubo, a possibilidade de ver no ecrã de um computador esse objecto em movimento permitia pela primeira vez investigar as suas propriedades, por meio de uma experimentação em tudo semelhante à das outras ciências. Um poderoso meio de investigação, capaz por outro lado de fornecer imagens muito sugestivas. Poucos anos depois, o mesmo Thomas Banchoff, com outros colegas da Brown University, realizou a animação em computador da esfera a quatro dimensões (fig. 5).

Tornava-se realidade o sonho de Quadrado, o protagonista do romance *Flatland* ("O Mundo Plano"), escrito por A. Abbot em 1884, de ver os objectos do espaço a quatro dimensões.

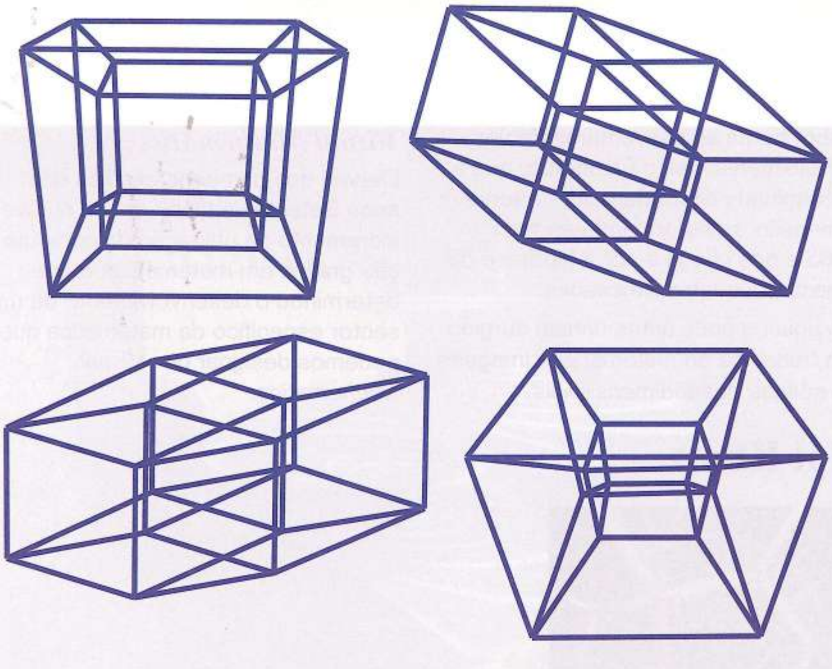


figura 4

Surfaces Beyond the Third Dimension: Gallery View

To get a closer look, click on a wall that you would like to view. (The materials available for the items outlines in gold are more extensive.)

To get a closer look, click on a picture that you would like to view. Click on the floor to get the floor plan again, and click on the left or right to view an adjacent wall.

figura 5

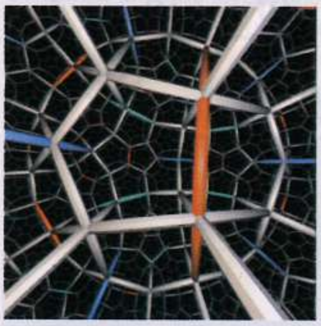
Abbot conta as desventuras de um ser bidimensional, o Quadrado, que a determinada altura descobre a terceira dimensão, transformando-se num cubo e que chega a pôr a hipótese de objectos a quatro dimensões.

Só poucos anos antes tinham surgido em trabalhos de matemáticos imagens de sólidos quadridimensionais.

Visual Mathematics

Depois dos primeiros ensaios dos anos Setenta verificou-se um notável incremento na utilização da computação gráfica em matemática; o que determinou o desenvolvimento de um sector específico da matemática que podemos designar por *Visual Mathematics*.

Not Knot:



Not Knot is a guided tour into computer-animated hyperbolic space. It proceeds from the world of knots to their complementary spaces -- what's not a knot. Profound theorems of recent mathematics show that most known complements carry the structure of hyperbolic geometry, a geometry in which the sum of three angles of a triangle always is less than 180 degrees.

> *Audience*: Mathematics students, particularly advanced undergraduates and graduate students.
> *Distributed by*: A. K. Peters.

A number of still images from *Not Knot* are available from the Geometry Center Graphics Archive.

Up: *Video Productions*

The Geometry Center Home Page

figura 6

Sphere turning inside out (overhead view)

This image is the centerfold of *Making Waves*, a full-color 48-page book that accompanies *Outside In*.

Next: *Movie Clips and Interactive Graphics*
Up: *Introduction*

The Geometry Center Home Page

figura 7

Não se trata apenas, como se poderia pensar, em tornar visíveis, ou seja visualizar, fenómenos bem conhecidos por meio de instrumentos gráficos, mas antes de utilizar instrumentos visuais para conseguir formar uma ideia de problemas ainda em aberto na investigação matemática. Thomas Banchoff e Charles Strauss tiveram a ideia de recorrer à animação de gráficos em computador para investigar visualmente as propriedades geométricas e topológicas de superfícies tri e tetra-dimensionais. Esta utilização do computador em matemática era nova. Tornava possível construir uma superfície num terminal vídeo e assim imprimir-lhe movimento e transformá-la para estudar melhor as suas propriedades. Mais do que funcionarem como um apoio à intuição, os computadores tornam-se instrumentos essenciais para a construção de modelos. À medida que instrumentos e programas de computador se tornavam mais sofisticados, iam também aumentando a profundidade e a importância das aplicações da computação gráfica aos problemas matemáticos.

Em Outubro de 1992, realizou-se, também no MSRI de Berkeley, um congresso. O tema era *A Visualização das Estruturas Geométricas*. Em todas as conferências se utilizava uma *workstation* que permitia mostrar em tempo real os resultados gráficos obtidos no estudo de determinados problemas geométricos. Naturalmente, não era possível fornecer um demonstração analítica de todas as soluções gráficas conseguidas.

Alguns anos antes, em 1987, nascia na Universidade do Minnesota, em Minneapolis, o *Geometry Supercomputer Project* destinado a pôr à disposição dos melhores matemáticos do mundo grandes computadores com elevadas capacidades gráficas para resolver problemas de interesse relevante.

No âmbito do *Geometry Project* foram realizados, entre outros, três filmes de animação computorizada: *Not Knot*, no qual são estudados os espaços complementares de um nó; *Inside Out*, que vira do avesso uma esfera; *The Shape of Space*, sobre a forma do espaço onde julgamos viver.

Os filmes foram realizados por um grupo de matemáticos e de informáticos. Em Agosto de 1999, o *Geometry Center* foi encerrado por os financiadores não se sentirem satisfeitos com os resultados económicos conseguidos!

Muitos daqueles que contribuíram para a sua realização mudaram-se para outros sítios, desde o MSRI de Berkeley, ao NCSA em Urbana e à Universidade Técnica de Berlim. Em 1995, tinha-se realizado em Berlim um *workshop* internacional sobre *Visualization and Mathematics*, cujas actas foram publicadas em 1997. Neste mesmo ano, realizou-se um novo *workshop*, também em Berlim e também sobre o mesmo tema. E é esta a razão de escolha de Berlim para a organização do *VideoMath Festival* de 1998, o primeiro em absoluto do género: Berlim tornou-se na nova capital da matemática animada em computador.

Filmes de Matemática

O congresso mundial de matemática que se realiza de quatro em quatro anos serve de palco ao mais alto e ambicionado reconhecimento manifestado aos matemáticos que se distinguiram na investigação. O último congresso teve lugar em Berlim de 18 a 27 de Agosto de 1998. Além das variadíssimas conferências plenárias e das dezenas de conferências dos oradores convidados, nas quais os matemáticos tentaram não só fazer o ponto sobre as investigações efectuadas, mas sobretudo delinear as orientações da investigação para o futuro, havia uma novidade: um festival de cinema matemático, o *VideoMath Festival*, organizado por Konrad Polthier, da Universidade Técnica de Berlim, sede do congresso mundial, e Hans-Christian Hege, especialista em computação gráfica.

Quatro noites de projecções num grande cinema do centro da cidade — iniciando-se cada uma delas com um genérico realizado para a ocasião, como convém a um verdadeiro festival. A ideia tinha nascido um ano antes quando foi lançado um concurso a nível mundial destinado a reunir vídeos matemáticos para uma selecção.

figura 8

Foram enviados mais de cem trabalhos, dos quais foram seleccionados vinte e quatro. Os vídeos seleccionados foram reunidos numa cassete vídeo distribuída pela Springer. O sucesso conseguido por esta cassete foi tal que esta editora alemã decidiu criar uma colecção de cassetes vídeo de matemática, tendo os primeiros títulos aparecido durante 2000. Uma iniciativa análoga decorre no congresso europeu de matemática em Barcelona e realizar-se-á no próximo congresso mundial de matemática, em Pequim, no ano 2002.

Os vídeos seleccionados incluíam, além do já referido *Inside Out* (que além disso foi o vencedor do prémio do Festival), vídeos realizados em diversos países do mundo utilizando técnicas de computação gráfica mas também técnicas tradicionais. Dedicou-se um vasto espaço à simulação, desde ver como se fazem os testes de aderência ao piso de um automóvel (o famoso teste de *slalom* que o novo modelo da Mercedes não tinha superado) até como se constrói um *oito-voador* fantástico no qual os passageiros viajam de cabeça para baixo. O famosíssimo matemático alemão que forneceu o modelo para a curva do *oito-voador* explicou que para evitar danos indesejáveis aos passageiros a curva devia ser suave (regular, dizem os matemáticos) e por isso utilizava uma curva do (tipo de um polinómio de) terceiro grau. E ainda se diz que a álgebra não serve para nada! Alguns vídeos eram de imagens matemáticas sublinhadas apenas por um comentário musical, tipo *Mandelbloom*, rosas fractais que se reproduziam até ao infinito. Havia também lugar para as bolas de sabão, quer realizadas em computador, quer reais. No fim de cada projecção, o público que tinha pago bilhete para entrar podia votar no seu vídeo preferido; foi este o processo de nomeação do vencedor.

Matemática e arte

Naturalmente, os artistas também não podiam ficar indiferentes às novas imagens e formas que os matemáticos estavam a criar. O próprio facto de cada vez mais se realizarem em todo o mundo novos encontros sobre "Matemática e Arte" é prova disso. Só em 2000, haverá encontros de matemática e arte nos EUA, em Portugal, em França e em Itália.

Já em 1993, no próprio ano da publicação do artigo da *Scientific American*, a MIT Press publicava um volume intitulado *The Visual Mind; Art and Mathematics* dedicado às relações que se estabeleceram entre artistas e as novas imagens criadas pelos matemáticos. Nesse volume incluíam-se artigos escritos por matemáticos e também por artistas e historiadores de arte.

Dado o grande interesse despertado por esta obra, quer nos meios científicos quer entre os artistas, encontra-se já em preparação na editora MIT Press um segundo volume que sairá no ano 2002. Na capa do livro da MIT Press de 1993 via-se uma obra do famoso artista suíço Max Bill, desaparecido em 1996. O primeiro artigo era constituído pela reimpressão de um artigo seu de 1949 dedicado à abordagem matemática da arte. Escrevia Bill:

> [...] a matemática não é apenas um dos meios de pensamento primário, e portanto, um dos recursos necessários para o conhecimento da realidade circundante, mas também, nos seus elementos fundamentais, uma ciência das proporções, do comportamento objecto a objecto, grupo a grupo, movimento a movimento. E já que esta ciência possui em si tais elementos fundamentais e estabelece entre eles relações significativas, é natural que factos semelhantes possam ser representados, transformados em imagens.[...]

Além disso, estas representações matemáticas, estes casos limite em que a matemática se manifesta plasticamente, possuem indiscutivelmente um efeito estético, acrescenta Bill.

Vale a pena lembrar estas palavras para não dar a impressão que a arte, assim como a matemática, esteja reduzida a meras operações mais ou menos sofisticadas com a computação gráfica. A computação gráfica é um instrumento importantíssimo, tanto no campo científico como artístico; um novo e poderoso instrumento que não elimina no entanto os demais instrumentos à disposição dos cientistas e dos artistas. O primado continua a pertencer à capacidade criativa do Homem. Nenhuma máquina conseguirá alguma vez substituir esta capacidade singular.

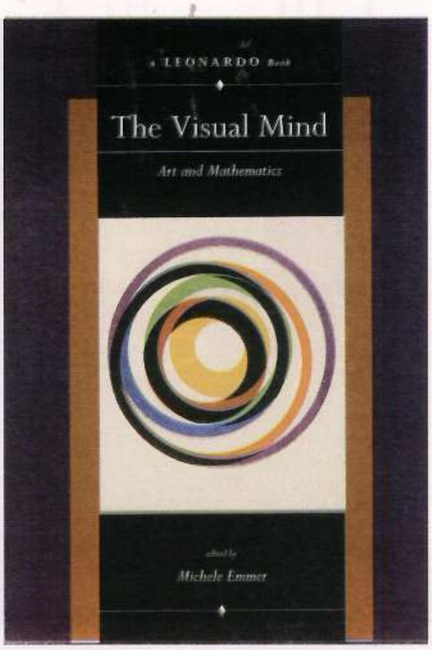


figura 9

Bibliografia

T. Banchoff, *Oltre la terza dimensione*, Zanichelli, Bolonha, 1993.

P. Concus, R. Finn, D. Hoffman *Geometric Analysis and Computer Graphics*, MSRI Series n. 17, Springer, Berlim, 1991.

M. Emmer, ed., *The Visual Mind: Art and Mathematics*, MIT, Boston, 1993.

M. Emmer, *Bolle di sapone*, La Nuova Italia, 1991.

M. Emmer, *La perfezione visibile*, Theoria, 1991.

M. Emmer, ed., *Visual Mathematics*, Special issue, Int. J. Shape Modeling, vol. 5, n. 1, Junho 1999.

M. Emmer, *Art and Mathematics*, series of 18 videos, 1980-1996.

H.-C. Hege e K. Polthier,(eds.) *Visualization and Mathematics*, Springer, Berlim, 1997.

_________________, *Mathematical Visualization*, Springer, Berlim, 1998.

_________________, *Videomath festival at ICM98*, video, Springer, Berlim, 1999.

D. Hoffman, *The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces*, The mathematical intelligencer, vol. 9, n. 3, 1987.

J. Horgan, *The Death of Proof*, Scientific American, Outubro, 1993.

Referências /Figuras

(1) D. Hoffman, W.H. Meeks III, J.T. Hoffman "Superfície mínima completa imersa de género topológico 1", computação gráfica a partir das equações de C. Costa, 1985. © Hoffman, Meeks, Hoffman.

(2) Quando duas bolas de sabão se unem como na figura, produzem uma dupla bola que consiste em duas porções de esfera e uma superfície de separação, que é plana se as bolas contêm dois volumes de ar iguais. Simulação no computador de John Sullivan, Universidade de Illinois em Urbana Champaign, 1995 © J. Sullivan.

(3) Configuração *não standard* de duas bolas de sabão, das quais uma em forma de amendoim e a outra de anel (de bóia) cuja área da superfície global externa é maior do que a configuração *standard*. Simulação no computador de John Sullivan, Universidade de Illinois em Urbana Champaign, 1995 © J. Sullivan.

(4) Quatro das projecções possíveis de um hipercubo, o cubo a quatro dimensões, no espaço a três dimensões.

(5) Sítio na Internet de Thomas Banchoff, chamado *Beyond the third dimension* ("Para além da Terceira Dimensão").

(6) Página de apresentação do vídeo *Not Knot*, no sítio do *Geometry Center*.

(7) A página de apresentação do vídeo "The Sphere inside out" no *site* do Geometry Center.

(8) "Superfície mínima de Riemann", um fotograma do vídeo de A. Arnez, K. Polthier, M. Steffens, C. Teitzel, *Touching Soap Films*, © A. Arnez, K. Polthier, M. Steffens, C. Teitzel. Um extracto deste vídeo, assim como outros que venceram a selecção para o congresso mundial de Berlim de 1998, foi incluído no vídeo *VideoMath Festival at ICM'98*, Springer, 1999.

(9) Capa do livro: M. Emmer, ed., *The Visual Mind: art and mathematics*, MIT Press, 1993. Reprodução de *Variação 12*, litografia de Max Bill, 1937.

Referências/*Online*

Endereços relativos a Thomas Banchoff *home page*:
http://www.math.brown.edu/~banchoff
ver também:
http://www.geom.umn.edu/~banchoff/
e ainda:
http://www.geom.umn.edu/~banchoff/projects.html

Endereço relativo a D. Hoffman
http://www.msri.org/publications/sgp/SGP/indexc.html

Endereços relativos ao *Geometry Center*:
principal:
http://www.geom.umn.edu/
vídeos disponíveis:
http://www.geom.umn.edu/video
download do Geomview, programa de visualização 3D para Linux
http://www.geomview.org/

Endereços relativos a Konrad Polthier
home page:
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/
vídeos:
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/video.html

Endereço relativo ao *VideoMath festival*
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/VideoMath/

Michele Emmer
Università di Roma "La Sapienza"
emmer@mat.uniroma1.it

Nota da redacção: as imagens de John Sullivan foram obtidas por *download* da *web* com autorização do autor.

Que ideia têm em relação à Matemática?

Na Escola Secundária Eng. Calazans Duarte, na Marinha Grande, numa tarde de um sábado quente, em Junho, esperava–nos um grupo de professores de várias disciplinas. Lá estava a Manuela Pires que, a nosso pedido, tinha reunido alguns actuais e antigos colegas da escola, todos professores bem dispostos, com vontade de colaborar e prontos a falar de Matemática.

Depressa nos apercebemos que eles próprios já tinham entrado em projectos comuns com os seus alunos e que costumavam ter conversas profundas e animadas sobre os alunos, as suas disciplinas e o ensino em geral.

Estiveram presentes: Ana Reis, professora de História; Armando Severino, professor de Físico-Química; Fátima Roque, professora da área das artes; Isilda Silva, professora de Filosofia; e Margarida Font, professora de Português.

Educação e Matemática (EM): Neste Ano Mundial da Matemática, surgiu-nos a ideia de dedicar o número temático à Matemática. Não é que essa não seja a intenção de todos os números da revista, mas o que nos interessa hoje é apercebermo-nos da sensibilidade que outros professores que não sejam desta área, têm da Matemática, quer como disciplina quer como ciência. Certamente que irão recorrer à vossa experiência pessoal, às experiências conhecidas dos alunos, ao papel da Matemática na sociedade, às ligações que a vossa disciplina pode ter ou não com a Matemática. O que nós queremos saber é, que ideia têm em relação à Matemática, isto é, o que é para cada um de vós a Matemática?

Margarida Font (MF): A Matemática é uma coisa fascinante. Uma construção, um arquitectar de mundos fascinantes. Os matemáticos são pessoas que inventam coisas. Na escola, perde-se isso um bocadinho, acho eu, e muitas vezes a Matemática não tem sentido para os miúdos. Eu acho que a Matemática é sempre um mundo. A Matemática foi sempre o mais difícil. Essa coisa opaca, difícil, que não se percebe, além de que mete muito medo, faz sofrer muito e exige uma coisa que também não tem muito a ver com os nossos alunos e se calhar com os nossos hábitos que é a persistência, a disciplina, o treino. A persistência a estudar e a tentar resolver coisas porque há aquele tipo de aluno que é muito esperto, que vê tudo à primeira e que, para ele, é um sacrifício repetir. Depois, quando chegam aos testes, lá encalham numa

coisa qualquer para a qual falta o treino e, embora tenham percebido a ideia, aquilo corre mal. Também tenho ideia da Matemática de quando andei no liceu que era o Palma Fernandes, muitas folhas com muitos exercícios todos iguais que nós tínhamos de resolver.

EM: Mas, hoje em dia, também é assim? Acham que é assim?

MF: Acho que não. Acho que não é bem assim. De qualquer das maneiras é um lado que é sempre preciso, acho eu. Nessa altura havia também aquela história dos problemas que se resolviam e que muitas vezes não tinham sentido. Eram assim umas coisa mesmo parvas. Não se percebia, o professor esforçava-se imenso para mostrar que aquilo tinha sentido, mas não...

Isilda Silva (IS): Eu acho que, em primeiro lugar, as expectativas relativamente ao sucesso da Matemática são muito fracas, as expectativas familiares, as pessoais... e até os professores de Matemática têm já expectativas muito baixas relativamente ao sucesso dos alunos. Digamos que, no país, as expectativas são muito baixas relativamente ao sucesso da Matemática. Mas também é verdade que esta imagem de insucesso não é só da Matemática. Há insucesso noutras áreas, na Física, no Inglês, e ninguém fala desse insucesso, não é? A imagem que eu tenho é de um esforço enorme dos professores de Matemática a tentar dar a volta de maneira a levar a água... a bom porto. Em Filosofia acontece exactamente o mesmo. Os alunos quando chegam à Filosofia, no 10º ano, não têm ideia do que vão estudar mas já sabem que não vão gostar de Filosofia, que é muito abstracto, que é muito difícil. É como na Matemática... Já estão com a ideia de que não vão gostar. Portanto, logo à partida fazem resistência. Dá ideia é que a Matemática não envolve os alunos pelo lado da emoção. Trata-se de uma disciplina puramente racional, em que tem de haver aquele esforço árduo e, se calhar, a maior parte deles não está para isso. Por um lado expectativas baixas, por outro lado o esforço que é preciso fazer para levar isto a bom porto, torna tudo complicado. Eu acho que a vida hoje é muito mais voltada para o facto e para o imediato...

MF: Eu acho que os alunos não trabalham menos do que trabalhavam. Acho é que se faz apelo a tudo o que é fácil. É como por exemplo a ópera. A ópera é fascinante mas há muitas pessoas que não gostam. Não é à primeira que se gosta. Há coisas que as pessoas têm de percorrer um caminho...

EM: Fascinante não é fazer muitos exercícios, é isso?

MF: Não. Eu acho que a Matemática é fascinante... na medida em que é uma obra de inteligência, de construção e de invenção! A escola, eu acho que é pouco isso. É um pouco como a Literatura, apesar de tudo... A escola é muito especialista em tornar o universo intelectual e a descoberta, numa desgraça. Não é só na Matemática é também na Literatura. É como quando nós desescolarizamos, um bocadinho, o acto de escrever. É uma maravilha o que se consegue que os garotos escrevam. A escrita que a escola normalmente pede não tem nada a ver com a escrita da vida que faz com que as pessoas escrevam todos os dias. O que eu acho é que a Matemática é, apesar de tudo, muito impessoal, ao passo que a Filosofia não é tanto assim, porque os alunos reconhecem algumas coisas e encontram-se nelas. É como nos poemas, estão lá as emoções e é fácil esse caminho, na Matemática não. Eu gostava de dizer que esta dificuldade em Matemática não existe só aqui, em Portugal, embora pense que há outros países e outras zonas do globo em que as pessoas encarreiram melhor e não há esta tragédia toda. Nós portugueses pessoalizamos tudo entre nós. Admito é que haja outras culturas europeias, que sejam muito mais rigorosas e precisas em tudo, desde os horários às relações entre as pessoas.

EM: E os colegas das Artes e da História também acham que a Matemática tem de ser impessoal e exacta, portanto, tudo o que não é exacto ou é pessoal... está um bocado em contradição com a Matemática, é isso?

Ana Reis (AR): Na minha infância, era essa exactidão abstracta, muito abstracta, que eu não entendia. Com bastante gosto, agora, vejo nos manuais dos meus filhos que estão na escola primária, apelos ao uso de materiais e à experimentação. É um desafio para olhar a realidade, para olhar o espaço, para ver como é que se constroem os objectos. Lembro-me que, no liceu, quando comecei a estudar Física, senti um grande entusiasmo porque podia fazer a parte experimental, o que não acontecia nas aulas de Matemática em que nem uma regra, nem uma medição eram feitas. Eu hoje, acho que, na Matemática, é possível esta experimentação. Por exemplo, eu vejo em casa como os meus filhos percebem hoje os números fazendo modelos. Penso que há ideias, da Matemática, que nos introduzem uma maneira de ver o universo que fascinam qualquer pessoa. Eu digo aos meus alunos: a curiosidade é a procura da verdade, aprender é a procura da verdade, as crianças procuram a verdade fazendo experiências a torto e a direito. É preciso é que as áreas experimentais, sejam elas todas a fazer este apelo à verdade.

Armando Severino (AS): Eu sou de Físico-Química, uma área muito chegada à Matemática, pertenço à Engenharia, tenho muitos anos de Matemática e adoro Matemática. A nível da escola, acho que a maneira como a Matemática é apresentada aos alunos não ajuda a reconhecer a sua importância mesmo junto das outras disciplinas. Dou aulas há 5 anos e acho que os alunos vêem as disciplinas de uma forma estanque, ou seja, o aluno vai ter uma aula de Matemática, aquilo é uma coisa, vai para Físico-Química é outra que não tem nada a ver com o que esteve a aprender em Matemática. Os alunos não estabelecem pontes de ligação entre a Matemática, as outras disciplinas e o mundo que os rodeia. Por exemplo, é emocionante descobrir relações da Matemática com fenómenos da natureza como acontece com os fractais.

É emocionante descobrir relações da Matemática com fenómenos da natureza como acontece com os fractais.

AR: O problema é os alunos não terem o mesmo grau de desenvolvimento. Por exemplo, alguns conseguem representar ideias abstractas, como números ou formas geométricas, por objectos ou desenhos, enquanto outros têm de ser ajudados para o fazerem, têm de ter outro percurso.

IS: É essa diferença na evolução e na aquisição de determinadas estruturas mentais que depois faz com que, pelo menos no secundário, os alunos sejam muito heterogéneos. Há aqui um aspecto que é essencial do meu ponto de vista e que é a nossa sociedade, uma sociedade ainda muito iletrada. Ora, quando se chega à Matemática pede-se imediatamente um raciocínio que é muito superior, em termos de exigência, ao raciocínio habitual. Logo à partida nem todas as crianças têm facilidade nesse desempenho. Há logo aqui, parece-me, um factor social de exclusão. Outra questão que me parece que choca é a questão da extensão dos programas. Porque uma coisa é a pessoa fazer muitos exercícios, mas também não basta a quantidade de exercícios, tem que haver um tempo e eu penso que sinceramente nem a Filosofia, nem a Matemática possivelmente, nem a maior parte das disciplinas consideram muito a sério o problema do tempo que é preciso para as crianças interiorizarem qualquer coisa. Portanto, se calhar, em Matemática é preciso mais tempo e os conteúdos têm que ser menos ou serem dados com maior qualidade, sob pena de não haver esse tempo de interiorização da informação.

AS: ... era só... só realçar o carácter da experimentação da escola que é fundamental. Os alunos da escola primária medem o comprimento da escola com uma fita métrica e estimam a área da sala de aula usando um quadrado de papel. Tem de ser este tipo de abordagem...

AR: Eu penso que o problema é que os garotos que estão na escola primária gostam de Matemática mas depois vão perdendo o gosto.

MF: Não é só pela Matemática. É por muitas outras coisas da escola.

EM: Terá a ver com o facto de terem de começar a aprender explicitamente coisas?

MF: De haver listas de conteúdos? Mas isso é a grande contradição da escola, porque se o caminho para o conhecimento tem que ser um caminho em que se pergunta, a escola faz o caminho ao contrário... dá a resposta. É como um supermercado a encher as pessoas, não é verdade? Mas, por isso é que eu acho que a escola é impossível. É uma utopia.

Fátima Roque (FR): Para mim a Matemática nunca foi o cálculo. Foi um jogo e, se calhar, foi por isso que eu sempre gostei de Matemática, sempre tive facilidade com a Matemática e sempre lidei com ela com uma grande naturalidade. Mesmo quando os professores colocavam fórmulas ou davam aqueles nomes muito pomposos que me entravam por um ouvido e saíam por outro. A Matemática, para mim, foi sempre um jogo de números. Este ano tive uma experiência muito gira. Foi a construção de uma escultura geométrica feita em pedra, por alunos do 12º ano, no âmbito de um projecto lançado pela Câmara. É uma escultura estilizada da mãe com uma criança ao colo, rodeada por uma série crianças. A cabeça é um globo de pedra e o restante corpo é feito com paralelepípedos, uns mais altos, outros mais baixos. Eu julgo que os professores aproveitaram isso para mostrar que com a arte também se aprende Matemática, ou seja, aproveitaram esse jogo de cubos, de esferas e paralelepípedos para mostrar aos alunos o que é a Matemática. Aqui a Matemática não foi cálculo. Os miúdos adoraram esse projecto.

IS: Gostava de colocar aqui uma questão central que é o problema das metodologias utilizadas no ensino da Matemática. Por exemplo, aprender os sólidos geométricos pela via da arte, naturalmente que isso é fascinante, mas isso coloca o problema das metodologias utilizadas no ensino da geometria ou no ensino do que quer que seja. O ensino tornar-se-á mais ou menos aliciante conforme a metodologia usada. Mas aqui há outro problema que é a existência de duas concepções da Matemática, uma via mais ortodoxa, que dá mais força ao cálculo e à abstracção pura e outra via mais voltada para a realidade dos nossos alunos, mais voltada para o desenvolvimento de competências dos alunos. Digo isto, porque em Filosofia passa-se o mesmo. Há quem diga que a Filosofia é em si didáctica e portanto não precisa de didáctica nenhuma a acompanhá-la. Penso que, na Matemática, se passará exactamente o mesmo. O ensino da Matemática já é, em si, didáctico e só precisa de treino e da tal persistência. Mas a persistência implica mecanização. Ora essa mecanização também não é salutar, porque não é criativa. Portanto, eu penso que uma das questões centrais aqui é, a das metodologias que têm sido utilizadas no ensino da Matemática, da Filosofia ou de outras disciplinas, ou seja, é preciso passar do ensino à aprendizagem. Se tentarmos a aprendizagem muita coisa mudará.

EM: Deixem-nos perguntar o seguinte: o que julgam que são os objectivos do ensino da Matemática? O que é que pretendem os professores de Matemática? Terão todos o mesmo objectivo, ou não? E o que acham que devem pretender?

IS: Ao nível da Filosofia eu quero que os meus alunos saibam alguma coisa de Filosofia, mas que também desenvolvam algumas competências, nomeadamente, no desenvolvimento do raciocínio crítico... A Matemática também, com certeza. Agora, se estiver apenas centrada na mera transmissão de conteúdos...

MF: ... a Matemática, do ser capaz de pensar, do desenvolver o raciocínio ...

AR: Eu posso tentar responder a isso, mas será que os próprios professores de Matemática já pensaram por que é que ensinam matemática? Eu acho que esta questão da metodologia, daquilo que desencadeamos na aula e do que temos autonomia para privilegiar, está no nosso ser e na própria área científica a que estamos ligados. Se na sua formação científica que acompanhou ou antecedeu a sua formação pedagógica, houve já um contacto com a construção do conhecimento científico, a visão que se tem sobre essa construção é diferente de quem nunca a teve. Portanto, se tiver conhecimento desse processo procurará estimular nos seus alunos processos idênticos.

MF: Posso perguntar uma coisa? Quer dizer, a única forma se calhar... o que não devia haver na escola era didáctica. Sim, sim! Porque se calhar o que devia haver na escola era a recriação da produção... social, da maneira como se produz Ciência, de como se produz História, de como se produz Literatura, Ciência e Arte. O que devia haver na escola era a reprodução disso e não o acesso ao conhecimento mediatizado pela didáctica.

IS: E não havia escola?

MF: Eu não estou a recusar a metodologia nem o professor. Não estou a dizer isso. Como é que se pode aprender Matemática, como é que se pode aprender a pensar? Como nos sítios onde se produz Matemática! Claro que isto não é a escola que nós temos. A escola é uma utopia, é uma coisa que não existe. Um aluno que anda a aprender 10 anos Matemática tem que, a certa altura da vida dele, começar a fazer Matemática, assim como um aluno de Física tem que fazer ciência e um aluno de Português tem de fazer Literatura portuguesa. Ensina-se um aluno de História a ser historiador.

Como é que se pode aprender Matemática, como é que se pode aprender a pensar? Como nos sítios onde se produz Matemática!

IS: A escola não forma espírito científico nenhum. A escola tem que formar estes espíritos e formar estes espíritos não é ensinar só conteúdos. É claro que os conteúdos são importantes. Tem de haver é uma articulação entre os conteúdos.

MF: Os conteúdos são fatais! Não é serem importantes ou deixar de ser. Se tu fores trabalhar num determinado objectivo numa área... os conteúdos aparecem sempre.

Manuela Pires: Eu acho é que, a Matemática, aliás todas as ciências, cada vez estão mais interligadas. Há uma fusão tão grande que já é impossível distinguir aonde é que acaba a Matemática e começa a Física, aonde é que acaba a Arte e começa a Matemática.

EM: E a Matemática deveria acabar, no secundário, ou não? Deveria ser para todos, ou não?

Acho que a Matemática é fascinante... na medida em que é uma obra de inteligência, de construção e de invenção!

MF: Ser para todos, mas agora, de repente, para o ano, não. Coitados dos garotos! Por amor de Deus! Na situação actual do nosso ensino, das nossas escolas... de carreiras de insucesso desde o 1° ciclo, não. Às vezes acontecem estas coisas, no nosso sistema de ensino... Alguém tem a ideia: para o ano haverá Matemática para todos... Seria um horror, meu Deus! Era pior. Se as coisas começarem a mudar... Se os garotos não acumularem insucesso sobre insucesso, à espera de, finalmente, poderem respirar no 9° ano e deixarem a Matemática.

EM: Não quer dizer que não dessem com uma Matemática diferente.

MF: Ah, mas valham-nos esses professores, essas pessoas, que fossem capazes de fazer isso! Não há professores suficientes na região para resolverem isto assim, de repente.

IS: Há uma coisa que, se calhar, também é importante para os alunos que não sei se se faz em Matemática, que é, fazer o levantamento do significado que os alunos dão aos conceitos. Porque a Matemática é um linguagem que lida com conceitos absolutamente abstractos, diferentes dos da linguagem natural. A linguagem quotidiana nada tem haver com os co-senos e com as tangentes...

MF: Mas, isso é o primeiro passo quando se faz ciência, não é? Definir conceitos. Não será definir, é cada um saber o que é que está a dizer. Se se fizesse Matemática como eu estava a dizer há bocado, se cada um tivesse que reproduzir a maneira como os matemáticos fazem matemática, tinha de se passar por aí, mas os professores não se ralam com isso. Dizem: — Isto é assim e acabou-se.

EM: A nossa ideia actual, nós que ensinamos Matemática, é que não tentemos dar definições dogmáticas inicialmente e que os conceitos estejam pouco definidos. Temos a certeza que cada miúdo, ao longo dos anos, vai construindo na sua cabeça, em relação ao mesmo conceito matemático, ideias diferentes e isso não nos preocupa. Interessa é discutir, como a colega dizia há pouco, trocar impressões... seguindo, de resto, o mesmo progresso que existiu na História da Matemática. A ideia é muito essa de ir construindo. E é nesse sentido que nós não estamos muito de acordo que fosse mau todos os alunos terem Matemática no secundário. A única coisa de mal nisso era talvez chamar-lhe Matemática. Se lhe chamássemos outra coisa, a essa nova disciplina, o aluno com insucesso nem sequer reconhecia que era aquela que ele tinha aprendido até ao 9° ano e daí para a frente perceberia que era outra coisa, porque nós daríamos a História da Matemática, as investigações, os problemas,... portanto, de tal maneira diferente daquela que provavelmente teve no ano anterior que ele nem a reconheceria. É essa a nossa ideia, a de que a Matemática fosse para todos os alunos, os que até aí têm gostado e os que não gostaram. Seria uma Matemática desse tipo.

IS: Como Lógica...

EM: História, Lógica, outros conceitos,... mas não com técnicas, com aprendizagens técnicas que não servem para nada.

MF: Faltou-nos um passo nas apresentações. Eu pelo menos devia ter dito que pensava que estava a falar, e agora desculpem lá se isto é muito injusto, para a grande maioria dos professores de Matemática... Mas estou aqui a falar com uns professores que não representam a maioria dos professores de Matemática. Então, esses professores aonde é que eles estão? Na escola, conheço um, se calhar dois professores de Matemática que pensam estas coisas. Portanto, quando eu estou aqui a falar convosco, estou a falar com os minoritários. Desculpem lá, sem ofensa. Mas era isto que eu queria dizer. Eu sei que vocês têm trabalhado imenso e que gostariam, se calhar, de ser menos minoritários do que o que são. Mas a ideia que eu tenho é que era um massacre, para o ano, todos os alunos terem Matemática.

Um massacre... eram mais uns massacrados. Mas para esclarecer isto, a maioria dos professores, para mim, não são assim e posso estar a ser injusta para eles.

IS: Porque lá está, há aquela visão ortodoxa, muito ortodoxa da Matemática que só os conteúdos é que são em si pedagógicos e mais nada.

AS: Se calhar é o departamento de Matemática o mais afectado em termos de falta de professores, ou seja, foi cair ao ensino da Matemática muita gente que não tinha nenhuma apetência nem competência para ser matemático. E se calhar foi a partir daí que nasceu este estigma... este ódio pela Matemática... o ser uma coisa difícil.

IS: Ainda aqui na escola, são uma minoria os que fazem coisas com fractais e outras experiências, são uma minoria. Não é para todos.

FR: Mas se nas escolas não houver esse género de pessoas para fazer esse tipo de experiências, também nunca se faz.

IS: Há um mal estar na Matemática, é evidente, talvez, de um modo exagerado, enfim, há muito insucesso na Matemática...

AR: É que há factores de que não nos apercebemos. Com os índices europeus de desemprego que estamos a viver, é natural que haja determinadas expectativas do ponto de vista social.

IS: O nosso modelo é o ensino universitário da Matemática, não é? Aqui, temos que ter um modelo de aprendizagem dos alunos. E isso choca em Matemática como choca em Filosofia. Não há dúvida que o modo como aprendemos a aprender é diferente daquilo que temos de fazer com os nossos alunos. E há toda uma geração de professores que não passou por uma formação profissional que lhe permitisse essas aprendizagens.

EM: Falando ainda um pouco sobre os exames e o insucesso escolar em Matemática, o que acontece é que aquilo que nós tentamos que os alunos aprendam e sejam, não é aquilo que é avaliado nos exames.

Em Matemática é preciso mais tempo e os conteúdos têm que ser menos ou serem dados com maior qualidade, sob pena de não haver esse tempo de interiorização da informação.

Pretendemos que eles trabalhem em grupo, no exame trabalham individualmente; pretendemos que resolvam problemas e que sejam capazes de estar três dias a pensar num problema e no exame não há memória que isso aconteça; achamos que é importantíssimo o raciocínio e não o resultado, e no exame, em geral, é o resultado que é avaliado. Os testes internacionais são feitos no mesmo estilo. Quem pensa os testes internacionais são países como o Japão e a Coreia que têm 50 alunos em cada turma, que decoram tudo e que...

MF: E que se matam!

EM: E que se suicidam permanentemente porque não conseguem chegar ao ensino superior. E nós continuamos a aceitar isso como bom. É uma situação completamente inacreditável...

IS: Que põe em causa muito daquilo que é o *terminus* do estudo, que é o exame nacional. Que condiciona imenso, também, a actuação dos professores. A Manuela dizia, um dia destes: "nós andamos agora aqui com estas coisas todas mas, efectivamente, eles são confrontados com o exame nacional e os conteúdos têm de aparecer...".

EM: Vamos terminar. Cada um poderia deixar uma ideia final, um recado para a Matemática.

FR: Tal como se diz que muitos de nós somos professores de Português, acho também que todos nós somos, um pouco, professores de Matemática. O nosso papel, nas aulas, devia também ser um pouco esse. Mostrar aos alunos que nas nossas áreas pode haver relações com a Matemática e algumas são bem nítidas.

MF: Eu quero dizer para estes professores de Matemática e não para a Matemática em abstracto, quero dizer que aprecio imenso o que andam a fazer e que vos desejo sorte, porque percebo a intenção, o esforço e a persistência que é preciso para fazer isto.

AS: Eu também diria aos professores de Matemática e aos outros professores que temos que gerir de uma maneira mais colectiva. Eu acho que é fundamental. Se não for assim ficamos afastados uns dos outros sem saber o que é que se passa nas outras disciplinas. Hoje, está tudo inter-relacionado, o professor de Física precisa do professor de Matemática e vice-versa. É incrível, como é que no princípio do século XXI, nós ensinamos Matemática e Física e Química do século XVII, ou seja, utilizamos a tecnologia do século XXI, mas os alunos sabem muito pouco... ao nível da Física e da Matemática deste século.

AR: O enriquecimento de que precisamos é muito do ponto de vista científico. Ninguém tem a veleidade de ter toda a informação. Os nossos alunos têm hoje um conjunto de informações e de dúvidas que, para satisfazer, teremos de recorrer não só ao trabalho de grupo mas também à recolha de informação em áreas diversificadas. Temos que ter Internet nas aulas, temos que assumir que vamos, com os nossos alunos, explorar e descobrir informação. Não somos enciclopédicos. Temos de ser é outra coisa, se calhar, temos que ganhar em humanidade e compreensão... O aluno não deve ter problemas em dizer que tem dúvidas e que não sabe.

IS: É assim: para além da Matemática na escola, ter que ser uma reprodução do real, ela deve ser também uma produção da realidade. É essa dimensão mais criativa da Matemática que está a faltar à escola.

EM: Chegámos ao fim do tempo previsto para a mesa redonda. Gostámos muito de vos conhecer e muito obrigada a todos.

Entrevista conduzida por Eduardo Veloso, Mª José Boia e Paula Espinha

Programas de computador para a matemática*

Kaleidomania

O *Kaleidomania* é um programa que nos permite estudar a simetria através de interessantes actividades de exploração, sendo possível criar padrões coloridos usando diferentes tipos de grupos de simetria (cíclicos, diedros, frisos e padrões).

Para mais informações e possibilidade de compra via Internet (não está ainda à venda em Portugal), utilizar o endereço www.keypress.com e procurar no SOFTWARE.

Preço (dólares):
Um utilizador - $39.95;
Pacote de 5 utilizadores - $149.95;
Pacote de 10 utilizadores - $199.95.
(O CD é acompanhado por um manual de utilização e um livro de actividades)

NuCalc 2.0 (Windows) Graphing calculator 2.7 (Mac OS)

O *NuCalc* é um programa de representação gráfica de funções no plano e no espaço, incluindo as funções implícitas. Interactividade conjugada com a extrema versatilidade e facilidade de utilização. A versão demo pode ser obtida em http://www.pacifict.com Apenas pode ser adquirido *online*. No Macintosh chama-se *Graphing Calculator* e vem (versão 1.0) com o sistema operativo.

Modellus

Versão actual: 2.01

Permite visualizar animações, simulações de situações, gráficos de funções, etc., que decorrem de modelos analíticos, criados pelo utilizador. Endereço na web: http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/
Neste endereço podem ser obtidas cópias autorizadas, para fins não lucrativos, de várias versões (contacto: modellus@mail.fct.unl.pt)

Graphmatica

Versão actual: 3.1P

Permite desenhar e gerir gráficos de funções (com variação de parâmetros), domínios planos, curvas diversas. Permite ainda o estudo gráfico numérico de características de funções representadas: zeros, máximos e mínimos, derivadas em pontos, etc. Endereço na web: http://www8.pair.com/ksoft/
Neste endereço pode fazer-se o download ou pedir o envio de cópias de versões experimentais (para um mês de utilização).
Preço individual: 5.792$00
Para escolas: 15.000$00 + 1.000$00 por instalação.

MATHEMATICA
Defining the Next Step in Technical Computing

Mathematica 4.0
(Mac OS e Windows)

Trata-se de uma ferramenta computacional muito poderosa. Entre as suas potencialidades encontram-se o cálculo quer numérico quer simbólico e a visualização gráfica. De resto a versão 4.0, incorpora já as potencialidades do *OpenGL*, que tornam o desempenho gráfico muito mais efectivo. Como é programável, este *software* é um ambiente em permanente expansão. O seu *Kernel*, parte do *software* responsável pelas computações, tem um elevado desempenho. O *Mathematica* pode ainda interagir com outros programas através da sua funcionalidade conhecida como *MathLink*. Endereços Wolfram Research:
http://www.wolfram.com
Distribuição em Portugal:
imberlake Consultants, tel. 21 471 7347;
e-mail: timberlake.co@mail.telepac.pt.

Maple 6.0
(Mac OS e Windows)

Trata-se do concorrente mais forte do *Mathematica*. Tem à partida as mesmas funcionalidades. No entanto o *Kernel* do *Mathematica* é mais eficiente. Além disso, como não é tão utilizado, existe menos programação para o *Maple* que para o *Mathematica*.

* *Neste número temático sobre a matemática resolvemos coleccionar aqui um conjunto actualizado de referências sobre programas de computador relativos à matemática. A ideia não é tanto indicar programas para o "ensino da matemática" mas sim para a nossa aprendizagem e exploração de diversos temas da matemática. Evidentemnente, alguns destes programas são excelentes programas para a educação matemática, também. Agradecemos aos colegas Alcino Simões, António Fernandes, Branca Silveira e Mário Roque a ajuda que nos deram nas notas e indicações que publicamos sobre os diferentes programas. Agradecemos a indicação de eventuais incorrecções. Esta lista poderá ser ampliada em futuras edições desta secção com informações que nos forem enviadas.*

No entanto, os gráficos no Maple podem ser manipulados em tempo real, usando o rato, enquanto que no *Mathematica* isso só é possível (por enquanto) usando *software* exterior.
Endereços:
Waterloo Maple:
http://www.maplesoft.com
Distribuição em Portugal:
Timberlake Consultants, tel. 21 471 7347;
e-mail: timberlake.co@mail.telepac.pt.

MuPAD

MuPAD

(Mac OS e Windows)

O *MuPAD* é dedicado à representação gráfica de funções e à algebra simbólica. Deste modo não cobre um leque tão vasto de aplicações como o *Maple* ou o *Mathematica*. Também é mais limitado em termos gráficos, já que só gera gráficos em formatos de baixa resolução. Não deixa por isso de ser extremamente poderoso, sobretudo no que diz respeito à álgebra simbólica, como já se referiu, sendo igualmente programável.

Além disso apresenta a grande vantagem de ser gratuito para efeitos educacionais ou de investigação. Apesar disso deve registar-se o *software* e obter uma *password*.

SciFace
http://www.sciface.com

Cabri-géomètre II

Existe nas versões DOS, Windows e Mac OS. Uma versão do *Cabri* II está disponível nas calculadoras TI-92 e pode ser feito o *download* da versão para a TI-89, através da Internet. Versões de demonstração, para Mac e PC podem ser obtidas em

http://www-cabri.imag.fr, na secção de PRODUTOS.

Existe uma versão em português. O programa pode ser adquirido nos distribuidores dos produtos da Texas Instruments e muito brevemente na APM.

Preço recomendado: aproximadamente 22.000$00, para um utilizador.

O *Cabri* é um programa de geometria dinâmica. Dispõe de ferramentas para efectuar o estudo da geometria euclidiana, cónicas, lugares geométricos, transformações geométricas e geometria analítica utilizando referenciais. Permite realizar a animação múltipla de objectos e a construção de tabelas por captação de dados das explorações que vão sendo feitas

A publicação na Web pode ser feita. Está em desenvolvimento o projecto *Cabri Java*
Endereços web:
http://www-cabri.imag.fr
http://forum.swarthmore.edu/cabri/cabri.html

The Geometer's Sketchpad

Um programa de geometria dinâmica que executa todas as construções elementares da geometria euclidiana, tem comandos referentes às transformações geométricas e ainda pode ser utilizado para o estudo da geometria analítica. Com imaginação, pode servir para o estudo das geometrias não euclidianas (hiperbólica, elíptica, do motorista de táxi,...) e da geometria no espaço. Existem versões para Mac OS e para Windows e um Java Sketchpad.

Endereços web:
http://www.keypress.com
http://forum.swarthmore.edu (faça um search com a palavra *sketchpad* e encontrará centenas de sítios sobre o *Sketchpad*)

Distribuição em Portugal: APM

Preços aproximados (depende do câmbio):

licença individual	17.500$00
escolas (1 licença)	39.000$00
(inclui uma cassete de vídeo de demonstração)	
10 licenças	129.800$00

Derive

Versão actual: 4.0

Tem as potencialidades inerentes a um sistema de cálculo algébrico, permitindo todo o tipo de cálculos, que incluem simplificação de expressões algébricas, cálculo de limites, obtenção de expressões de derivadas de funções, etc. Permite igualmente a visualização de gráficos a duas e a três dimensões.
Endereço web:
http://www.derive.com/
Endereço da distribuidora em Portugal:
Areal Editores
www.arealeditores.pt
Tels. 223 393 900 / Fax 222 005 708

Preço para professor e estudantes: 17.600$00
Licença para escolas: 86.000$00

Materiais para a aula de Matemática

Os sapatos que nós usamos

A recolha e análise de dados deve ser tratada nas aulas de Matemática do 1° ciclo e pode sê-lo a partir do 1° ano de escolaridade, desde que o professor a proponha oralmente. O professor pode fornecer aos alunos desenhos de diferentes tipos de sapatos, de modo que possam recortar o correspondente ao que estão a usar, colori-lo e colocá-lo no gráfico.

O mesmo tipo de proposta pode ser feita sobre outros temas, por exemplo aniversários dos alunos, animais de estimação, tempos livres, etc.

Lurdes Serrazina
ESE de Lisboa

Escola..

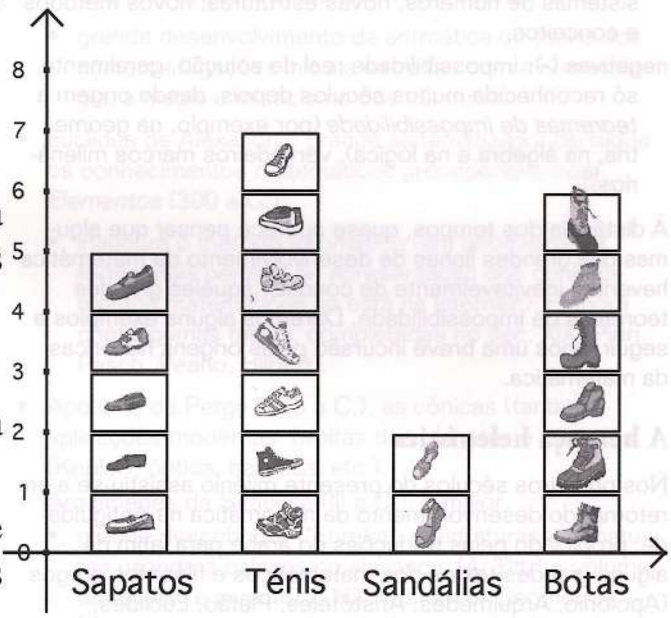
Ano/Turma................... Data..................... Aluno(a)...

Os sapatos que nós usámos

O gráfico da figura representa o número de sapatos usados numa turma do 2º ano. Observa-o e responde às seguintes questões:

1. Qual é o tipo de sapatos mais usado pelos alunos da turma?
2. Qual é o tipo de sapatos menos usado?
3. Quantos meninos usam botas? E ténis?
4. Em que estação do ano é que os dados da figura foram recolhidos? Porque é que tens essa opinião?

Os sapatos que nós usamos



Observa agora os sapatos que os alunos da tua turma trazem hoje.

Dos desenhos que a tua professora deu, escolhe o que corresponde ao tipo de sapato que trazes e cola-o no quadro, na coluna respectiva.

Depois de todos terem colado os seus desenhos, observa o gráfico que obtiveram e responde:

1. Qual é o tipo de sapatos mais usado na tua turma hoje?
2. Quantos alunos têm esse tipo de sapatos?
3. Qual o tipo de sapatos menos usado?
4. Se um novo aluno chegasse à tua turma que tipo de sapatos pensas que usaria?
5. Qual é o tipo de sapatos que uma criança da tua idade mais usa?

Marcos milenários na História da Matemática[1]

Um panorama – grandes sucessos, falhanços e desafios

A. J. Franco de Oliveira

Introdução

Centrarei a exposição em torno de variadas situações de (*aparente*, ou *real*) impossibilidade ocorridas no processo histórico de desenvolvimento das matemáticas, situações em que os matemáticos se confrontaram com dificuldades operatórias, metodológicas ou conceptuais, e que tiveram soluções ora positivas (+) ora negativas (-):

positivas (+): solução através de actos criativos, de novos sistemas de números, novas estruturas, novos métodos e conceitos,

negativas (-): impossibilidade real de solução, geralmente só reconhecida muitos séculos depois, dando origem a *teoremas de impossibilidade* (por exemplo, na geometria, na álgebra e na lógica), verdadeiros marcos milenários...

À distância dos tempos, quase apetece pensar que algumas das grandes linhas de desenvolvimento da matemática haveriam inevitavelmente de conduzir àqueles grandes teoremas de impossibilidade. Daremos alguns exemplos a seguir, após uma breve incursão pelas origens históricas da matemática.

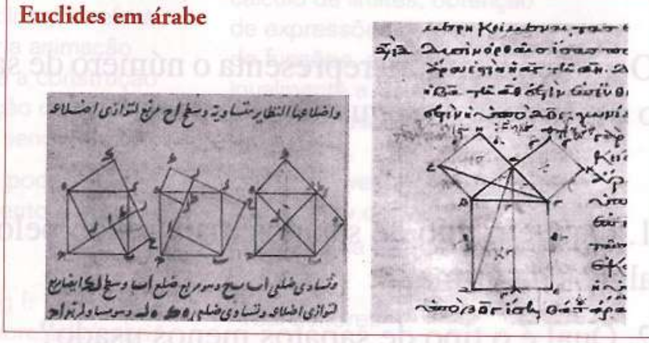
A herança helenística

Nos primeiros séculos do presente milénio assistiu-se a um retomar do desenvolvimento da matemática na Antiguidade, propiciado pelas traduções do árabe para latim de alguns grandes textos dos matemáticos e filósofos gregos (Apolónio, Arquimedes, Aristóteles, Platão, Euclides, Ptolomeu, Papo, Próclo, Diofanto e outros) sobre *Aritmética, Geometria, Mecânica* e *Astronomia*, depositados em centros culturais árabes a sul da Península Ibérica (Córdova, Granada, Toledo, Sevilha) e também trazidos para a Europa por viajantes ao Médio Oriente e Norte de África, os quais tinham sido preservados pelos árabes (apesar da destruição da Biblioteca-Museu de Alexandria em 641 d.C. por fanáticos pagãos), que também tinham absorvido conhecimentos matemáticos dos indianos (sistema decimal).

É necessário, pois, conhecer melhor essa rica herança legada pela civilização dos gregos antigos. É uma herança de realizações, falhanços e desafios para a posteridade. Mencionemos alguns expoentes e suas principais contribuições:

- Tales de Mileto (séc. VII–VI a.C): o primeiro matemático grego, que defendeu a necessidade de demonstrar as proposições matemáticas [a matemática dos babilónicos e egípcios antigos era essencialmente prática e empírica].

Euclides em árabe (1)



Apolónio e Arquimedes em latim (2)

O sistema ptolomaico (3)

***As Mecânicas* de Herão e *As Aritméticas* de Diofanto** (4)

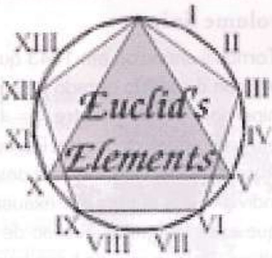
(5) **Pitagóricos: matemática e música**

(6) **Dedekind e os números irracionais**

Faz-se tantas vezes a afirmação de que o cálculo diferencial tem a ver com grandezas contínuas, e no entanto uma explicação desta continuidade nunca é dada... [...]
[...] a linha recta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos racionais em números [...]
[O que eu pretendo é] criar novos números de modo que o domínio dos números ganhe a mesma completude [ou a mesma] continuidade que a linha recta.

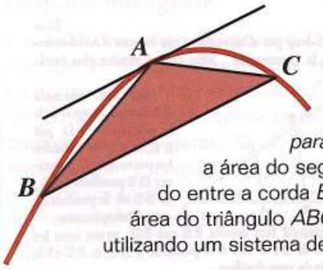
Dedekind, *Continuidade e Números Irracionais*, 1872

(7) **Euclides na Internet**



Site interactivo de David Joyce, da Clark University: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

(8) **Arquimedes: quadratura do segmento de parábola**



No tratado *Da quadratura da parábola* Arquimedes demonstra que a área do segmento de parábola compreendido entre a corda *BC* e a parábola é igual a 4/3 da área do triângulo *ABC*. Este resultado foi descoberto utilizando um sistema de alavanca.

(9) **3 problemas clássicos de construções com régua não graduada e compasso**

Trissecção do ângulo e duplicação do cubo

Primeira demonstração de impossibilidade dada em 1837 por Pierre Wantzel (1814-1848).

Quadratura do círculo

Demonstração de impossibilidade dada em 1881 por Ferdinand Lindemann (1852-1939). Lindemann demonstrou que π é um número transcendente, resultando daí a impossibilidade da quadratura do círculo.

Bourbaki, na 1ª linha do volume I dos *Éléments de Mathématique* (Paris, 1939) diz «Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration.»

- Os pitagóricos (séculos VI-V a.C., Crotona, Itália):
  - relação entre matemática (inteiros positivos e razões entre eles) e música, daí a ideia de explicar o mundo através dos números ("tudo é número") e concepção da matemática como instrumento privilegiado para compreender o mundo (Platão);
  - descoberta dos incomensuráveis (impossibilidade de medir *racionalmente* a diagonal de um quadrado tomando o lado para unidade: "irracionalidade de $\sqrt{2}$"): é um falhanço, ou uma insuficiência — primeiro confronto entre o *discreto* dos números inteiros e o *contínuo* da geometria —, colmatada geometricamente pela teoria das proporções de Eudóxio, mas que deixa um desafio para a posteridade: enriquecer suficientemente o universo numérico para corresponder ao contínuo geométrico. Somente completado no séc. XIX (Dedekind, Cantor, Weierstrass, 1872);
  - grande desenvolvimento da aritmética ou teoria dos números (ligações iniciais estreitas com a numerologia, a magia e misticismo dos números).
- Euclides de Alexandria: grande sistematizador de todos os conhecimentos matemáticos precedentes, nos *Elementos* (300 a.C.),
  - inaugura o método axiomático (em geometria), a forma mais perfeita de apresentação dos conhecimentos matemáticos (já está na Internet!). Embora com algumas falhas, completadas no séc. XIX (Pieri, Pasch, Peano, Hilbert).
- Apolónio de Perga (225 a.C.): as cónicas (tantas aplicações modernas: órbitas dos planetas e cometas (Kepler), óptica, balística, etc.).
- Arquimedes de Siracusa (III a.C.): o maior
  - grande descobridor ("Eureka", quadraturas e cubaturas usando a balança ou alavanca, $(4/3)\pi r^3$ = volume da esfera) e inventor («Não matem O Geómetra» — Marcelo), precursor do cálculo integral, utilizando indivisíveis (*O Método*, ficou desconhecido até 1906), mas fazia as demonstrações pelos métodos rigorosos da geometria — intuição e descoberta *vs.* demonstração).
- Ptolomeu, Eratóstenes: medições astronómicas.
- Outras grandes questões e desafios:
  - o problema das paralelas: o postulado de paralelismo de Euclides é *verdadeiro*?, questão só resolvida nos anos 70 do século XIX: impossível demonstrar aquele postulado, utilizando os restantes postulados de Euclides;
  - construções com régua (não graduada) e compasso (segundo o *princípio da parcimónia* de Platão): 3 problemas clássicos (quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo) só resolvidos pela negativa no séc. XIX: demonstrações de impossibilidade;

- paradoxos do movimento de Zenão de Eleia ("horror ao infinito"): compreender a natureza do movimento, do espaço e do tempo, só resolvidos com a moderna teoria das séries e do cálculo infinitesimal;
- a lógica de Aristóteles: compreender o raciocínio, só finalizado nos séculos XIX e XX para a lógica clássica (Boole, Frege, Gödel).

O segundo milénio

- Leonardo de Pisa ou Fibonacci (*Liber Abaci*, 1202) introduz na Europa o sistema decimal hindu-árabe e os algoritmos operatórios usuais, o que representa uma primeira *democratização* das matemáticas; sucessão de Fibonacci (problema da criação de coelhos) definida recursivamente por $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, presente em tantos fenómenos físicos e biológicos.
- Renascimento:
  - os algebristas italianos (del Ferro, Fiore, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli) resolveram equações até ao grau 4, exprimindo as raízes em função dos coeficientes com +, -, x, ÷ e extracção de raízes; primeira aparição dos números complexos ("quantidades impossíveis") na *Ars Magna* de Cardano. *Desafio*: fazer o mesmo para a quíntica e grau superior a 4 — só completado no século XIX (Ruffini, Abel, Galois), mais outro teorema de impossibilidade;
  - matemática da navegação (Pedro Nunes): os portugueses não acreditaram em Colombo, porquê?
  - redescoberta dos indivisíveis (Kepler, Pascal, Galileu, Cavalieri); em Galileu: paradigma da modelação matemática;
  - Torricelli (o dos vasos comunicantes) faz a primeira cubatura de um sólido ilimitado com volume finito. Talvez o infinito seja amenizável, afinal de contas...
- Descartes: números negativos; cálculo dos segmentos como se fossem números (o produto de dois segmentos é um segmento, e não um rectângulo, como pensavam os gregos), primeiro passo para...
- Pioneiros do cálculo infinitesimal (Newton, Leibniz, M. de l'Hospital, Euler, ...): a matemática como linguagem das ciências.

Revoluções e fundamentos nos séculos XIX e XX

- Novidade das demonstrações de impossibilidade (resolubilidade algébrica: emergência do conceito de estrutura; construções com régua e compasso: ligação re-encontrada entre a álgebra e a geometria);
- resolução do problema das paralelas e geometrias não euclidianas (Saccheri, Gauss, Bolyai e Lobachevskii);
- rigorização da Análise: construção dos sistemas de números, noção de limite como fundamental, etc., pagando um preço: abolição dos indivisíveis, infinitamente grandes e pequenos numéricos, mas não definitiva (criação da *Análise Não-standard* nos anos 60 deste século); substituição da intuição geométrica por propriedades analíticas dos números e das funções, com recurso a

Fibonacci e os casais de coelhos (10)

Em 1202, Fibonacci coloca o seguinte problema: *quantos casais de coelhos são gerados num ano, começando por um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal que por sua vez é capaz de gerar um novo casal a partir do segundo mês?*

O número total de casais gerados desta maneira, mês a mês, forma a sucessão posteriormente chamada de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

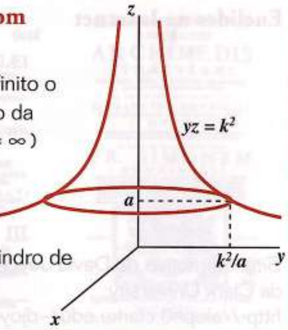
Veja a página premiada de Matt Anderson, Jeffrey Frazier e Kris Popendorf, alunos da escola secundária de Logan, nos Estados Unidos: http://library.thinkquest.org/27890/

Cardano, *Ars Magna* e os números complexos (11)

Num dos últimos capítulos de *Ars Magna*, Cardano coloca o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto seja 40. Quando chega às soluções

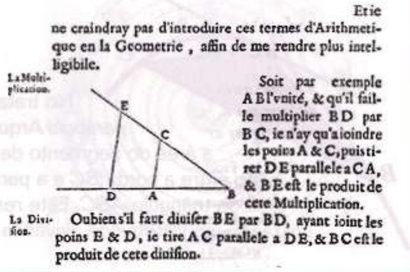
$5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$, que Cardano escreve "5p:Rm:15" e "5p:Rm:15", comenta que este resultado é "tão subtil quanto inútil".

Torricelli: um sólido ilimitado com volume finito (12)



Torricelli anunciou em 1643 que era finito o volume do sólido gerado pela rotação da hipérbole $yz = k^2$ (entre $z = a$ e $z = \infty$) em torno do eixo dos *zz*. Demonstrou, primeiro pelo método dos indivisíveis e depois por exaustão, que esse volume é igual ao de um cilindro de altura k^2/a e raio da base igual ao semidiâmetro da hipérbole ($\sqrt{2k}$).

Descartes: aritmética de segmentos (13)



Etie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication.

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cete diuision.

Geometrias não euclidianas (14)

Saccheri *A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, porque é repugnante para a natureza da linha recta.*

Gauss *Estou cada vez mais convencido que a necessidade da nossa geometria não pode ser demonstrada [...]*

Janos Bolyai [...] *criei um mundo novo e diferente a partir do nada.*

Lobatchevskii [...] *outra geometria pode existir, se não na natureza, então ao menos na matemática* [...]

(15)

Cantor e Dedekind (em 1877) sobre a existência de uma bijecção de um quadrado sobre um segmento

Cantor para Dedekind – *Enquanto não me tiver confirmado [o resultado anterior], o mais que posso dizer é:* vejo, mas não acredito. *[...]* Dedekind para Cantor – *Verifiquei a sua demonstração e não lhe encontrei nenhuma falha; portanto acredito que o seu interessante teorema é verdadeiro e congratulo-o por isso. [...] Mas acredito agora, de maneira provisória, no seguinte teorema: dada uma correspondência unívoca e completa entre os pontos de uma variedade contínua A de dimensão a e os pontos de outra variedade contínua B de dimensão b, então a própria correspondência, se a e b são desiguais, é necessariamente [...] descontínua.*

(16)

Hilbert: questões em aberto; Gödel: respostas

- consistência da (teoria dos números) e da análise? não
- consistência da teoria dos conjuntos? não
- completude da teoria dos números e da análise? não
- completude da lógica elementar? sim

(17)

Mandelbrot sobre a "geometria da natureza"

Porque razão a geometria é descrita muitas vezes como "fria" e "seca"? Uma razão assenta na sua incapacidade para descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de uma costa, de uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as costas não são circunferências e nem a cortiça é lisa nem a luz se desloca em linha recta.

(18)

Alan Turing sobre as condições para considerar uma máquina inteligente

Em 1950, no artigo *Computing Machinery and Intelligence*, Turing escreveu que se uma máquina conseguisse fingir que era humana perante um observador conhecedor então poderia ser considerada inteligente. O observador deveria interagir com a máquina e com uma pessoa por meio de um teletipo (para evitar ter que imitar a voz humana) e tanto a pessoa como a máquina tentariam persuadir o observador que eram humanos.

(19)

Um desafio antigo: a conjectura de Poincaré

Se esticamos uma banda de elástico em torno de uma maçã, podemos reduzi-la a um ponto encolhendo-a lentamente, sem a partir e sem a separar da supefície. Poicaré sabia, há cerca de 100 anos, que esta propriedade (ser simlesmente conexa) caracteriza essencialmente a esfera bidimensional. E interrogou-se se a esfera tridimensional (lugar geométrico dos pontos que distam uma unidade da origem, no espaço a quatro dimensões) teria uma propriedade análoga.

- um novo e poderoso instrumento para as matemáticas: a teoria dos conjuntos de Cantor, que permite, pela primeira vez, a domesticação dos infinitos; apesar de alguns problemas iniciais (paradoxos) acaba por se tornar no séc. XX a grande teoria fundacional para as matemáticas; mas,
- ficam problemas em aberto: o problema da consistência ou não-contradição (teoremas de incompletude das teorias formais, Gödel, 1931), o problema do contínuo ("quantos pontos tem uma recta?"); e
- a matemática torna-se mais *pura*, deixa de ser só a matemática do mundo real para ser também a dos mundos possíveis (e, afinal de contas, qual é o mundo *real*? — nem os físicos sabem...); o real é finito mas muito complexo...
- teoria dos algoritmos e da computabilidade, após definição matemática de algoritmo e de função computável (mais teoremas de impossibilidade na lógica e na computação, por exemplo: impossível decidir algoritmicamente se uma equação diofantina arbitrária $f(x_1,...,x_n) = 0$ tem ou não soluções inteiras não triviais; indecidibilidade do problema da paragem, indecidibilidade e incompletude das teorias formais consistentes suficientemente ricas, resultados de independência relativa na teoria dos conjuntos — Axioma da Escolha, Hipótese do Contínuo —, etc.).

Novos desafios

- Compreender mais e melhor o que se pode fazer e não se pode fazer, por exemplo, na Inteligência Artificial (talvez mais um teorema de impossibilidade em vista, mas somente após definição matemática precisa do que é a I.A.);
- compreender melhor o caos, os fenómenos da turbulência, a natureza fractal da natureza-mãe;
- compreender melhor o cérebro, a consciência, como surge um "eu" (consciência de si mesmo), o código genético;
- compreender melhor a língua natural (problemas da tradução automática);
- resolver os inúmeros problemas matemáticos em aberto (conjectura de Goldbach, Hipótese de Riemann, etc.), só porque "estão lá", porque os infinitos matemáticos (úteis para aproximar ou "arredondar" os finitos muito complexos) são uma fonte inesgotável de surpresa e maravilha.

Notas

1. Notas resumidas de conferências que, com pequenas variações, foram apresentadas em algumas escolas secundárias e instituições universitárias em Lisboa, Évora, Porto, Setúbal, Portalegre e Macau, no âmbito do Ano Mundial da Matemática.

A. J. Franco de Oliveira
Universidade de Évora

(*continua na página 60*)

ICME 9 no Japão

Elisa Figueira

A *International Comission on Mathematical Instrution* (ICMI) organiza, de 4 em 4 anos, o *International Congress on Mathematical Education* (ICME) com o objectivo de desenvolver a Educação Matemática no Mundo, unindo esforços internacionais. Este ano, Ano Mundial da Matemática, realizou-se o 9º ICME, pela primeira vez no continente asiático, na moderna cidade japonesa de Makuari, de 31 de Julho a 6 de Agosto. Makuari é uma cidade recente, situada na baía de Tóquio e com ligações rápidas a esta grande metrópole. É possuidora de um complexo arquitectónico moderno que se expande por uma extensa área, compreendendo vários edifícios para congressos, hotéis, restaurantes, centros comerciais, empresas de alta tecnologia, jardins, ... Foi neste espaço agradável, arejado e a remeter-nos para o Séc.XXI que decorreu o Congresso.

O número de participantes foi elevado, cerca de 1850, envolvendo 75 países. A maior delegação foi, naturalmente, a nipónica (794), seguida da americana (209) e da chinesa (111). A delegação portuguesa era constituída por 16 elementos, encontrando-se entre os 25 primeiros lugares!

A riqueza deste congresso foi a diversidade e relevância da temática abordada e a partilha de ideias em grupos de trabalho (13), grupos de estudo (23), conferências plenárias (4), comunicações (60) e apresentações de projectos (400).

Os grupos de trabalho funcionaram em 4 períodos distintos sendo o último reservado para as conclusões. O regime de trabalho foi intensivo permitindo a troca de ideias e, no sentido de tornar mais profícuo o debate, formaram-se subgrupos com interesses comuns.

Das comunicações destaco duas:

- *Overcoming Obstacles to the Democratisation of Mathematics Education*, de Alan Bishop;
- *Gaudi's Ideas for your Classroom: Geometry for three-Dimensional Citizens*, de Claudi Alsina.

Alan Bishop começou por referir que na sociedade moderna é exigido aos cidadãos um conhecimento matemático cada vez maior, situação que coloca, aos professores, novos desafios na democratização do conhecimento. Ao considerar que o futuro do Mundo depende da qualidade da educação proporcionada aos jovens e que a luta contra a ignorância é o maior desafio dos nossos tempos, defende a necessidade da democratização do conhecimento matemático sem o qual a grande maioria dos jovens fica empobrecido e diferenciado.

Claudi Alsina, na sua conferência sobre o legado de Gaudi que marcou a arquitectura espanhola e tem uma presença forte na cidade de Barcelona, realçou com grande entusiasmo a importância de algumas ideias de Gaudi e relevou o facto de poderem ser levadas para a sala de aula como propostas de trabalho no ensino da geometria espacial, contribuindo para elevar a literacia dos jovens.

A apresentação de projectos sob a forma de poster ou vídeo versavam temas variados e materiais diversificados. Os projectos expostos utilizavam as novas tecnologias, materiais manipuláveis e envolviam problemas geométricos, problemas de modelação, problemas numéricos,... Destacou-se a presença dos professores japoneses com a apresentação da *Arte Origami*. Segundo eles, *origami* não é só um engenhoso trabalho de mãos, mas dá aos estudantes uma oportunidade de aprender e compreender facilmente os conceitos matemáticos, desenvolvendo a sua concentração. Constroem-se poliedros platónicos, compostos, estrelados, poliedros inscritos noutros poliedros, etc, é um verdadeiro mundo de possibilidades que dão uma grande visibilidade a problemas geométricos por vezes complicados. Parecia fácil construir qualquer um dos poliedros, mas ... construímos um cubo com a ajuda de uma simpática colaboradora e com algum esforço. A persistência foi, neste caso, uma boa conselheira!! Neste grande espaço aberto onde pudémos trocar ideias com os autores destes projectos, encontrámos associações de professores de matemática de diferentes países, institutos ligados à investigação e ensino da matemática, sessões de divulgação das novas tecnologias e o cantinho da Internet.

Mas não foi só trabalho!

O passeio ao famoso Monte Fuji, com 3 776 metros de altura foi muito agradável. O contraste entre as montanhas verdejantes e o ar agreste de uma montanha vulcânica foi surpreendente.

Guardamos alguma saudade daquele povo que nos recebeu com simpatia e estima e que parece não ter esquecido pontos comuns na nossa História.

Em 2004 o ICME–10 vai realizar-se em Copenhaga de 4 a 11 de Julho sob a organização conjunta dos países nórdicos — Dinamarca, Finlândia, Islândia, Noruega e Suécia. Aí poderemos conhecer e discutir, também, a investigação e as práticas no ensino da matemática nos países dos Vikings. Poderá ser obtida mais informação sobre o próximo congresso no endereço www.ICME-10.dk.

Elisa Figueira
Esc. Sec. D. Luísa de Gusmão

Competências essenciais da Matemática: que novidade?

Organizados por objectivos, gerais e específicos, os actuais programas curriculares para a disciplina de Matemática no ensino básico separam nitidamente as três dimensões a desenvolver: conhecimentos, capacidades/aptidões e valores/atitudes. Por outro lado, apesar de reflectirem uma ênfase razoável na atenção a dar às duas últimas dimensões referidas, numa delineação mais pormenorizada, é a primeira dimensão — conhecimentos — que claramente se destaca. A subdivisão em capítulos contendo, cada um deles, uma listagem de temas e subtemas a desenvolver, também não induz a abordagens relacionadas e integradoras de conhecimentos, capacidades e atitudes.

De acordo com a nota introdutória que acompanha as brochuras sobre as competências essenciais divulgadas até à data pelo Departamento da Educação Básica (DEB)[1], é precisamente na tentativa de minimizar este risco de excessiva prescrição e de separação anti-natural e indesejável das três dimensões que devem ser consideradas no ensino da Matemática — conhecimentos, capacidades/aptidões e valores/atitudes —, que é introduzida, no discurso oficial, a noção de *competência* e a designação *competências essenciais*.

> (...) adopta-se aqui uma noção ampla de competência, que procura integrar conhecimentos, capacidades e atitudes e que pode ser entendida como um saber em acção. (Competências Gerais e Transversais — 1° volume do conjunto de documentos de trabalho divulgados pelo DEB no âmbito do Projecto de Gestão Flexível do currículo, 2000, p. 3)

Obter números, a partir de outros, por composição, por decomposição (Programa de Matemática, Vol. II — Ensino Básico, 3° Ciclo —, p. 19), constitui um bom exemplo, mas apenas um entre muitos, de um objectivo que apenas apela à aquisição de conhecimentos. Para o atingir, basta ao aluno conhecer os números com os quais está a trabalhar (neste caso, os números naturais) e conhecer processos de composição e decomposição desses números; isto é, conhecer as quatro operações, os critérios de divisibilidade, algumas técnicas de composição e decomposição e, eventualmente, a tabuada. A reforçar esta abordagem, consta na mesma página do documento em questão, como observação ou sugestão metodológica, a seguinte afirmação: "Retomando alguns assuntos já conhecidos para aprofundar um pouco mais (múltiplo, divisor, potência...) os alunos irão trabalhar com números naturais, decompondo-os em somas ou produtos, procurando divisores, formando potências, associando-os segundo propriedades comuns (quadrados perfeitos, números primos, etc.)", a qual não acrescenta nada ao objectivo definido. No que respeita ao tipo de situações de aprendizagem que devem, neste domínio, ser proporcionadas aos alunos, no documento consta apenas que "alguns jogos numéricos poderão constituir um desafio à imaginação contribuindo para desenvolver o raciocínio" (p. 19), indicação muito geral que pode, ou não, ser seguida no caso concreto da composição e decomposição de números, mas, acima de tudo, uma ilustração evidente de como as capacidades e aptidões podem ser vistas e desenvolvidas separadamente, com recurso a actividades intencionais e com o objectivo explícito de trabalhar essa dimensão, naquele momento, e não outra.

Sem pretender subvalorizar o tema (ou subtema) matemático em questão e sem questionar a sua importância na aprendizagem da Matemática nos alunos numa formação geral obrigatória, compor e decompor números naturais pode constituir uma actividade de muito gratificante e proveitosa num certo tipo de abordagens, mas pode também transformar-se numa tarefa enfadonha e profundamente inútil se for encarada apenas como um procedimento que deve ser adquirido como pré-requisito para aprendizagens futuras, por exemplo. Ora nos programas actuais não consta qualquer referência ou comentário nem a uma coisa nem a outra. Isto é, não é claro nas orientações curriculares vigentes nem até que ponto a composição e decomposição de números naturais no 7° ano de escolaridade deve ser considerado um conhecimento fundamental, nem a que tipos de capacidades e de atitudes deve ser associado, com vista a facilitar uma aprendizagem efectiva, integrada e com significado para o aluno.

Já na brochura relativa à Matemática, p. 4, e para concluir o exemplo utilizado ao longo deste texto, podem ler-se os seguintes aspectos da competência matemática que todos os alunos devem desenvolver no domínio dos números e do cálculo:

- a compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações
- a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem.

Nesta formulação é notória a preocupação em relacionar as três dimensões conhecimentos, capacidades e atitudes, e é possível ainda, a um leitor atento, depreender até que ponto trabalhar este ou aquele tópico matemático é fundamental e imprescindível. O segundo aspecto transcrito, por exemplo, coloca a ênfase na capacidade — explorar, investigar, ... — de trabalhar determinados conhecimentos — padrões e relações numéricas, ... — mas de uma certa maneira — com gosto, desenvolvendo a predisposição para, ... Por outro lado, uma interpretação possível é a de que trabalhar divisores e múltiplos neste contexto é desejável mas não é o fundamental. As relações e os padrões numéricos, esses sim fundamentais, podem ser trabalhados à custa de muitos outros elementos matemáticos que não estes.

De facto, estes novos documentos não falam de nada de que não se falasse já, mas pretendem, e quanto a mim bem, ir mais além no entendimento do que já existia. E este é, sem dúvida, um dos aspectos mais interessantes das brochuras sobre competências essenciais da Matemática.

Notas

[1] Competências gerais e transversais, competências essenciais do Português e competências essenciais da Matemática.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., 1999, *A Matemática na Educação Básica*, Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação, Lisboa.

Associação de Professores de Matemática, 1998, *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*, APM, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Gestão Flexível do Currículo*, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Matemática - competências essenciais*, Documento de trabalho, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Competências gerais e transversais*, Documento de trabalho, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DGEBS - ME, 1991, *Organização Curricular e Programas - Matemática - 3º ciclo do ensino básico*, Vol. I e Vol. II, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário, Ministério da Educação, Lisboa.

Fernanda Perez
Esc. Sec. da Amora

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições no espaço disponível na revista.

Marcos milenários na História da Matemática (continuação da pág. 57)

Nota da redacção

As ilustrações foram inseridas por Eduardo Veloso, com a concordância e revisão do autor.

Notas sobre algumas das ilustrações:

(1), (2), (4) e (5). Figuras extraídas do livro *Mathématiques en Mediterranée: des tablettes babyloniennes au théorème de Fermat*. Catálogo de uma exposição, ed. Édisud/Musées de Marseille, 1988.

(3). Figura extraída do livro *Alquimia e Misticismo*, de Alexander Roob. Ed. Taschen, 1997.

(6). Uma tradução foi publicada no Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática de Dezembro de 1999.

(11). Figura extraída da obra citada *Mathématiques...*

(13). Retrato de Descartes extraído da obra citada *Mathématiques...* Texto do livro *La Géometrie*, de Descartes, ed. fac simile (1ª edição, 1637) bilingue da Dover Inc., 1954.

(15). Extractos da correspondência entre Cantor e Dedekind, in *The History of Mathematics, a reader*, org. por John Fauvel e Jeremy Gray, pag. 578. Ed. The Open University, 1987.

(16). Retratos de Hilbert e de Gödel extraídos respectivamente dos livros: *Hilbert-Courant*, de Constance Reid, ed. Springer-Verlag, 1986. *Reflections on Kurt Gödel*, de Hao Wang, ed. The MIT Press, 1987.

O autor faz notar que "as duas respostas apenas são 'não' se não saírmos das teorias cuja consistência se quereria demonstrar".

(17). Primeiro parágrafo da Introdução do livro *The Fractal Geometry of Nature*, de Benoit B. Mandelbrot, ed. W. H. Freeman and Company, 1977.

(18). Fonte: *Alan Turing, The Enigma*, de Andrew Hodges, ed. Simon & Schuster, Inc.,1983.

Cartas, Chapéus & Prendas de Natal

José Paulo Viana

- Escrevi quatro cartas para quatro amigos e fiz os respectivos envelopes. Depois distraí-me e enfiei as cartas ao acaso nos envelopes. Qual é a probabilidade de nenhuma carta ter ido para o endereço certo?
- Cinco homens de chapéu foram a uma festa. Quando chegaram, colocaram os chapéus num armário. Durante a festa alguém gritou "Fogo!" e os cinco homens foram a correr ao armário, tiraram os chapéus ao acaso e saíram. Qual é a probabilidade de todos terem pegado em chapéus errados?
- Na minha escola há 100 professores e no Natal há sempre um almoço em que cada um leva uma prenda. As prendas são depois sorteadas entre os professores. Qual é a probabilidade de ninguém receber de volta a prenda que levou?

Aqui estão três problemas do mesmo tipo que, nestas versões ou noutras parecidas, aparecem regularmente e levantam quase sempre muitas interrogações e hesitações sobre como chegar à solução.

Por isso, talvez valha a pena tentar desfazer as dúvidas e resolvê-los aqui.

Três problemas do mesmo tipo que, nestas versões ou noutras parecidas, aparecem regularmente e levantam quase sempre muitas interrogações e hesitações sobre como chegar à solução.

As Cartas

Vamos começar pelo primeiro, o das cartas. O número de casos possíveis, isto é, o total de maneiras diferentes que eu tenho de enfiar as quatro cartas nos quatro envelopes é 24. Para isto, basta pensar que, para o primeiro envelope, há 4 cartas que lá posso meter. Feito isto, restam 3 cartas para o segundo envelope, e depois 2 cartas para o terceiro e uma única carta para o último envelope. Então tenho:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Este é o número de "permutações de 4", ou seja, o total de maneiras que existem de ordenar quatro objectos. O número obtém-se multiplicando os naturais de 4 até 1 e a isto chama-se "factorial de 4", que se representa por 4!.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Vamos agora contar o número de maneiras que há de nenhum envelope ter a carta que devia. Para isso, um bom método é fazer uma listagem dos casos ou, visualmente melhor, um diagrama em árvore. Como se vê na figura 1, o envelope 1 pode ter a carta 2, 3 ou 4. Se tiver a carta 2, o envelope 2 pode ter a carta 1, 3 ou 4. E assim sucessivamente.

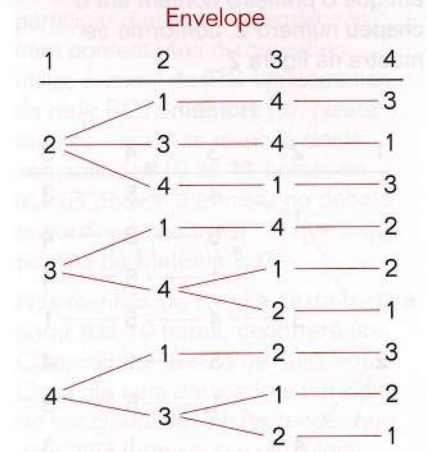


figura 1

Obtemos então 9 casos favoráveis. Favoráveis para aquilo que estamos a investigar, isto é, em que nenhum envelope tem a carta certa (na realidade, estes casos não são nada favoráveis para mim, que assim envio as cartas todas erradas...).

A probabilidade procurada é então:

$$P = \frac{9}{24} = 0{,}375$$

Note-se que, se tivéssemos feito uma lista, teríamos:

2 - 1 - 4 - 3
2 - 3 - 4 - 1
2 - 4 - 1 - 3
3 - 1 - 4 - 2
3 - 4 - 1 - 2
3 - 4 - 2 - 1
4 - 1 - 2 - 3
4 - 3 - 1 - 2
4 - 3 - 2 - 1

Cada um destes casos chama-se um "desarranjo" porque nenhum número (ou objecto) está na sua posição natural.

Os Chapéus

Passemos aos cinco amigos com chapéu. O número de casos possíveis quando eles vão buscar os chapéus a correr é o número de permutações de 5:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Os casos favoráveis vão ser os desarranjos de 5 elementos e é de prever que sejam bastantes. Vamos fazer um diagrama apenas dos casos em que o primeiro homem tira o chapéu número 2, conforme se mostra na figura 2.

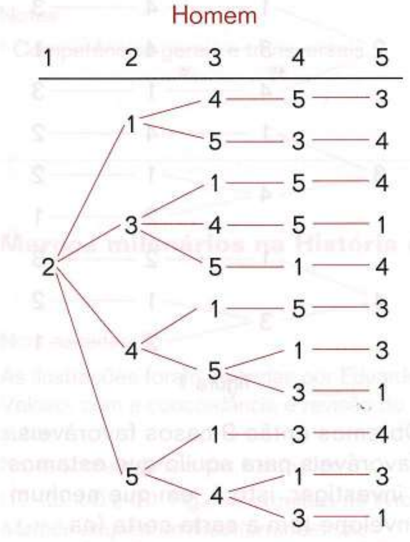


figura 2

Há 11 casos. No entanto, se pensarmos um bocadinho, rapidamente concluímos que também terão de ser 11 casos se ele tirar o chapéu 3, outros 11 para o chapéu 4, e mais 11 para o 5.

Ou seja, o número total de desarranjos é:

$4 \times 11 = 44$

Então, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{44}{120} \approx 0{,}3667$$

As Prendas

Bem, agora a situação complica-se. O número de casos possíveis, isto é, o número de maneiras diferentes de distribuir 100 prendas a 100 professores é o factorial de 100. Ora este número é enorme e ultrapassa a capacidade de uma calculadora científica ou gráfica habitual. Uma calculadora mais avançada, como a TI-89 ou a TI-92, já nos dá o número (exacto!) com 158 algarismos. Temos então:

Casos possíveis $\approx 9{,}33 \times 10^{157}$

Mas, e o número de casos favoráveis? Queremos saber quantos são os desarranjos de 100 objectos mas não existe qualquer hipótese de fazer um diagrama em árvore ou uma listagem.

Tentemos uma outra abordagem: começar pelos casos mais simples e tentar descobrir o que se passa.

Com 1 prenda, há 1 caso possível e 0 favoráveis.

Com 2 prendas, há 2! = 2 casos possíveis e 1 favorável.

Com 3 prendas, há 3! = 6 casos possíveis e 2 favoráveis.

Com 4 prendas, estamos na situação das cartas nos envelopes e há 4! = 24 casos possíveis e 9 favoráveis.

Com 5 prendas, estamos na situação dos chapéus e há 5! = 120 casos possíveis e 44 favoráveis.

Com 6 prendas há 6! = 720 casos possíveis e fazer um diagrama ou uma listagem dos casos favoráveis já vai dar uma grande trabalheira.

A lista de casos favoráveis é, até às 5 prendas, esta:

0 1 2 9 44

Estava eu aqui, sem descobrir nenhuma lei de formação destes números, quando, ao ir à Internet ver uma das minhas páginas preferidas, a do *MathForum* (http://forum.swarthmore.edu/), encontro por acaso uma fórmula para o *número de desarranjos de n objectos*:

$$D(n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

É um grande passo em frente! Embora não seja uma fórmula simples de calcular quando o *n* cresce, já podemos determinar os valores seguintes.

Objectos n	C. Favoráveis D(n)
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1 854
8	14 833
9	133 496
10	1 334 961

figura 3

Organizemos então uma tabela.

Ao analisar estes números, reparei que o valor para n=10 era 10 vezes maior que o anterior mais 1 unidade. Seria isto uma coincidência ou aconteceria sempre?

Bem, quase. Ora veja-se:

$1 = 0 \times 2 + 1$

$2 = 1 \times 3 - 1$

$9 = 2 \times 4 + 1$

$44 = 9 \times 5 - 1$

$265 = 44 \times 6 + 1$

$1854 = 265 \times 7 - 1$

$14833 = 1854 \times 8 + 1$

$133496 = 14833 \times 9 - 1$

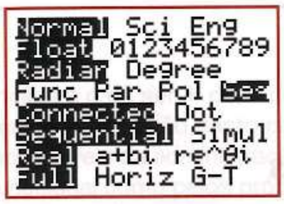
Temos então uma regra simples de formação destes números: o número de ordem *n* é igual a *n* vezes o anterior com, alternadamente, mais ou menos uma unidade.

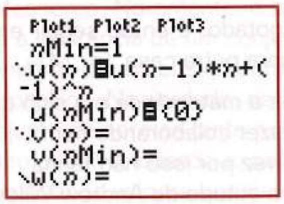
Ou seja, é possível definir a sucessão D(n) por recorrência:

$D(1) = 0$

$D(n) = D(n-1) \times n + (-1)^n$

Agora, usando por exemplo uma calculadora TI-83 a trabalhar em modo Seq (sequência), é fácil construir a sucessão D(n) e fazer uma tabela.





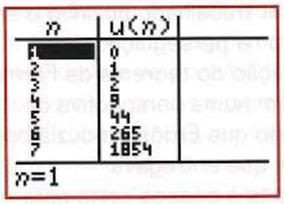
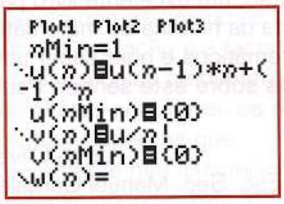
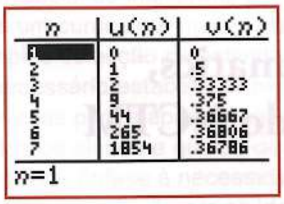


figura 4

Relembremos que *n* representa o número de professores (ou de prendas) e D(n) os desarranjos, isto é, as diferentes maneiras de ninguém receber de volta a prenda que levou.

Já sabemos calcular os desarranjos para qualquer número de objectos (dentro das capacidades da calculadora). Podemos aproveitar e determinar, para os diferentes valores de *n*, as probabilidades de nenhum professor receber a sua prenda. O número de casos favoráveis está em u(n) e o número de casos possíveis é n!.





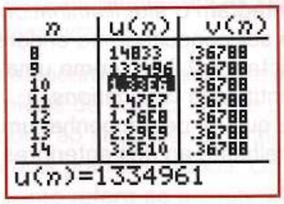


figura 5

Basta então criar uma nova sucessão

$$v(n) = \frac{u(n)}{n!}.$$

Observemos as probabilidades. A partir de n=8 o valor parece estabilizar. Mas na tabela só temos cinco casas decimais. Passemos ao ecrã principal para podermos ver os números com melhores aproximações.

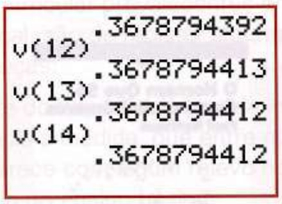


figura 6

A partir de n=13, com 10 casas decimais, já não há alterações na probabilidade. A sucessão v(n) das probabilidades converge rapidamente para 0,3678794412.

Está resolvido o nosso problema. A probabilidade de, nos 100 professores, ninguém receber de volta a sua prenda é aproximadamente 0,36788.

Logo, a probabilidade de haver pelo menos um professor que receba a sua prenda de volta é 0,63212.

Há duas curiosidades que vale a pena realçar.

A primeira é que a probabilidade de ninguém receber a prenda de volta é praticamente a mesma quer haja 8 professores ou 100 ou 1000 ou um milhão. O valor da probabilidade estabiliza rapidamente.

A segunda curiosidade é este valor que encontrámos: 0,3678794412... À partida não suspeitaríamos que fosse um número especial. Mas, afinal, trata-se nada mais nada menos que do inverso do número *e* de Nepper...

Quem diria que a solução deste tipo de problemas estava afinal tão intimamente ligada a um dos mais famosos números irracionais?

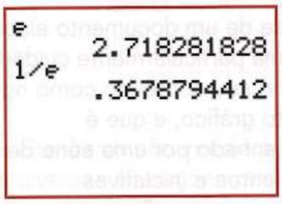


figura 7

José Paulo Viana
E.S. Vergílio Ferreira - Lisboa

A Matemática e a Internet no Pavilhão do Conhecimento

Decorrerá de 20 a 24 de Novembro, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, a semana "A Matemática e a Internet". Esta semana, organizada pelo Grupo de Trabalho da Internet em colaboração com o Programa Internet na Escola — Ministério da Ciência e Tecnologia, inclui várias realizações, com a finalidade de promover a utilização da Internet no ensino e aprendizagem da matemática.

Na segunda-feira, dia 20 de Novembro, realiza-se uma videodifusão que inclui um painel, dinamizado pela Branca Silveira, sobre tecnologias e educação matemática e uma conferência do José Paulo Viana sobre paradoxos. Para assistir presencialmente a esta realização, a partir das 10 horas da manhã no Auditório do Pavilhão do Conhecimento, contacte a APM. Se a quiser ver via Internet, consulte a página da APM no endereço www.apm.pt/semana/index.html. Se quiser participar durante a videodifusão com comentários ou questões, utilize o canal de IRC #matematica, da rede RCTS (irc.rcts.pt). Neste mesmo canal nas manhãs desta semana, das 10 às 11 horas, os alunos podem participar no debate subordinado ao tema "O que é que pensas da Matemática?"

Nas manhãs de terça a sexta-feira, a partir das 10 horas, decorrerá no Cibarc@fé uma aula de duas horas. Cada dia será dedicado a um ciclo de escolaridade. Se pretender que seja uma turma sua a participar, contacte a APM.

Como o acesso é totalmente livre, está disponível nesta semana um menu de propostas interactivas realizáveis na Internet. A Mediateca do Pavilhão do Conhecimento será utilizada para a construção de páginas www de alunos, com temas matemáticos.

Para completar todas estas informações consulte www.apm.pt/semana/index.html.

GT da Internet

O homem que só gostava de números

O Homem Que Só Gostava De Números é... Paul Erdös. É nele que o autor, Paul Hoffman se centra durante quase todo o livro, para assim falar de matemática e dos matemáticos. Este livro dá-nos o retrato de um matemático excêntrico com as suas manias e teimosias, os seus hábitos próprios e a sua forma característica de encarar as coisas.

Paul Erdös foi um matemático do século XX, nasceu a 26 de Março de 1913 e morreu a 20 de Setembro de 1996 com 83 anos de idade. Dedicou toda a sua vida a um único objectivo — a matemática —, sendo por isso um verdadeiro contra-exemplo para os que pensam que a idade faz diminuir a produção matemática, pois mesmo na casa dos 70 chegou a publicar 50 artigos por ano. É a Erdös, que chegava a trabalhar 19 horas por dia, que se deve a frase: "Um matemático é uma máquina que transforma café em teoremas."

Vejamos um pouco mais de Erdös, agora nas palavras do autor:

> Erdös estruturou a sua vida no sentido de maximizar o tempo que tinha disponível para a matemática. Não tinha mulher nem filhos, não tinha emprego, passatempos, nem mesmo uma casa que o prendesse.
>
> Numa busca infindável de bons problemas matemáticos e de bom talento matemático fresco, atravessou quatro continentes para trás e para a frente a um ritmo frenético, deslocando-se de uma universidade ou centro de investigação para o seguinte. O seu *modus operandi* consistia em aparecer à porta de um colega matemático, declarar "o meu cérebro está aberto", trabalhar com o anfitrião durante um dia ou dois, até se aborrecer ou o anfitrião ficar esgotado, e então seguir em frente para outra casa. (p. 14)

O Homem Que Só Gostava de Números

Autor: Paul Hoffman

Editora: Gradiva

Março de 2000

284 pp.

Preço: 2.800$00

Para Erdös a matemática era algo que se devia fazer colaborando com outros; talvez por isso não tenha aprovado a atitude de Andrew Wiles, por este ter trabalhado sozinho e em isolamento na perseguição da demonstração do teorema de Fermat. Era também numa perspectiva de colaboração que Erdös produzia bons problemas que entregava normalmente à pessoa certa para resolver.

É notória a admiração do autor por Paul Erdös, e é essa admiração que traz um brilho especial ao texto e nos leva a uma leitura com um espírito devorador. Mas nem só de Erdös fala este livro, outros notáveis génios matemáticos estão aqui presentes, partindo da sua relação com Erdös ou das ideias que Erdös tinha deles. Associado a isto tudo aparecem inevitavelmente alguns tópicos da história da matemática, principalmente teoria dos números.

Este é, então, um excelente livro para quem gosta da história da matemática e dos matemáticos e quer saber um pouco mais sobre este senhor: Paul Erdös.

José Oliveira
Esc. Sec. Manuel Cargaleiro

Principles and Standards for School Mathematics, um novo documento de orientação curricular do NCTM

Em Abril de 2000, na sequência do que desde há muito vinha sendo anunciado, o NCTM publicou a versão final dos seus *Principles and Standards for School Mathematics*. Esta associação de professores pretendia assim actualizar e dar novo impulso à aplicação prática dos seus documentos anteriores — os *Standards* sobre o currículo, a prática profissional e a avaliação.

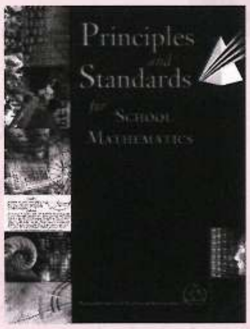
Trata-se de um documento elaborado de forma particularmente cuidada, tanto no seu conteúdo como no seu aspecto gráfico, e que é acompanhado por uma série de outros documentos e iniciativas complementares. Entre estes destacam-se uma versão electrónica (que existe em CD-ROM ou pode ser obtida através da Internet), um conjunto de propostas para a sala de aula que integram o *site Illuminations* (que pode ser consultado no endereço www.nctm.org), bem como uma colecção intitulada *Navigations*, a publicar, e que irá desempenhar um papel semelhante ao das anteriores *Addendas*.

Os *Principles and Standards* não constituem propriamente um currículo. São, antes, um documento de orientação curricular. O seu objectivo principal é o de servir de suporte a tomadas de decisão, tanto por responsáveis da administração educacional como pelos próprios professores. No entanto, é bom notar que a existência de um conjunto de *standards* para o ensino está longe de ser pacífica. Na verdade, definir um conjunto de normas tanto pode ter um efeito positivo, criando expectativas e promovendo valores que de outro modo poderiam ficar diluídos, como pode ter um efeito negativo, limitando a criatividade e as possibilidades de professores e alunos e gerando contradições com alguns dos grupos culturais minoritários na sociedade. Os problemas são tanto mais fortes quanto mais esses *standards* se apresentem com um carácter normativo não suficientemente consensualizado e pouco justificado.

Uma das formas que o NCTM encontrou para lidar com as dificuldades ligadas à ideia de *standard* foi incluir um conjunto de ideias orientadoras gerais para o ensino da Matemática — designadas por Princípios — cuja saliência surge bem expressa no próprio título da publicação. São indicados seis princípios: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Enquanto que os princípios sobre o ensino, a avaliação e a tecnologia se reportam a ideias fundamentais de documentos anteriores, os restantes sublinham aspectos que anteriormente não assumiam tanta relevância, ao indicarem, por exemplo, que um currículo é mais do que uma simples colecção de actividades, que é necessário estabelecer expectativas elevadas para a aprendizagem de todos os alunos e que se deve dar particular ênfase à necessidade de estes compreenderem as ideias matemáticas.

Os *standards*, que atravessam todos os níveis de ensino, desde o pré-escolar ao secundário, estão divididos em dois grandes grupos. Um primeiro conjunto refere-se a conteúdos (números e operações, álgebra, geometria, medida, análise de dados e probabilidades) e um segundo conjunto a processos (resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões e representação). Em comparação com a "arrumação" de tópicos e a terminologia curricular prevalecentes em Portugal, são de registar algumas diferenças:

- este documento dá grande importância à medida, que entre nós só aparece com algum relevo no 1° ciclo do ensino básico;
- as funções e a iniciação ao cálculo infinitesimal, que em Portugal assumem grande destaque, são aqui consideradas como parte da álgebra;
- em vez de estatística, surge como tema organizador a análise de dados, ideia que no nosso currículo tem um papel subsidiário;
- em vez de números e cálculo, como se diz em Portugal, fala-se aqui em números e operações, o que, sem constituir uma grande diferença, sempre representa uma terminologia mais adequada.



Principles and standards for school mathematics

Autor: NCTM

Editora: NCTM

2000

404 pp.

Nestes *Standards* são imediatamente visíveis diversas alterações relativamente às publicações precedentes. Assim, a comunicação, que tinha sido preterida a favor do discurso, ressurge de novo como uma noção fundamental. A matemática discreta, que constituía anteriormente um *standard* (apenas para o nível do secundário) deixou de estar individualizada, tendo os aspectos que lhe dizem respeito sido distribuídos pelos restantes temas.

Outras alterações, não tão evidentes, são talvez mais importantes. Por exemplo, a expressão "poder matemático" (*mathematical power*), que constituía uma ideia aglutinadora central do documento de 1989, desapareceu nesta versão. Além disso, deixou de ser dada grande ênfase à ideia que os alunos podem e devem fazer Matemática. Agora, o que é apresentado como grande objectivo do ensino desta disciplina é o desenvolvimento da compreensão por parte dos alunos (*students' understanding*). Isso mesmo é sublinhado em numerosas passagens do documento e desenvolvido muito em especial no princípio sobre a aprendizagem. Esta ênfase na compreensão é fortemente associada ao conhecimento de factos específicos, ao domínio de procedimentos e à capacidade de usar a Matemática:

> Aprender a Matemática indicada [neste documento] requer compreensão e capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos. No século XXI, deve-se esperar que todos os estudantes sejam capazes de compreender e ser capazes de aplicar a Matemática (p. 20).

Por outro lado, a noção de resolução de problemas, que constitui uma ênfase curricular fundamental nos EUA desde o início da década de 80, continua aqui a ter um lugar de destaque, sendo-lhe dedicado um dos *standards* de processo. Outras duas ideias merecem igualmente grande relevo, sendo objecto de outro *standard*: (i) a investigação de situações matemáticas pelos alunos constitui um excelente contexto de aprendizagem e (ii) os alunos devem ser levados a argumentar e a realizar demonstrações matemáticas.

Este documento dá uma grande importância à aprendizagem de factos e *skills*, bem como à capacidade de aplicar a Matemática.

Deste modo, parece representar uma tentativa de estabelecer um compromisso aceitável para todos os sectores da sociedade americana que intervêm nas disputas curriculares. Não será por acaso que logo de início se inclui uma "carta de apreciação" ao NCTM pelo trabalho realizado, subscrita por numerosas organizações afiliadas no *Conference Board of the Mathemati-cal Sciences*.

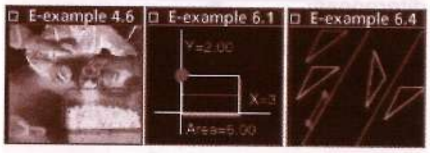
É de registar, igualmente, que este documento não define de modo explícito um conjunto de grandes finalidades para o ensino da Matemática, aspecto muito forte no pensamento curricular português. No entanto, de forma implícita dá a entender que estas se desdobram por quatro grandes domínios, nomeadamente: (i) o uso da Matemática na vida de todos os dias, incluindo o exercício da cidadania, (ii) a sua apropriação como parte da herança cultural, (iii) o seu uso em actividades profissionais e (iv) o seu uso pela comunidade técnica e científica (p. 4).

De todo o documento, penso que merecem particular destaque a organização do currículo em termos de conteúdos e processos, em pé de igualdade — aspecto que seria interessante ver melhor concretizado no nosso currículo. Destaco também o reconhecimento da necessidade de articular a ideia de *standard* com a explicitação de princípios educacionais que orientem o ensino da Matemática e a noção (apesar das oscilações de terminologia e de ênfase) que o trabalho dos alunos na realização de tarefas matematicamente ricas e desafiantes — como a resolução de problemas e as actividades de investigação e exploração — constitui a chave de um processo de ensino-aprendizagem bem sucedido.

Será interessante comparar cada um dos *standards* curriculares concretos (tanto de conteúdos como de processos) com os do documento de 1989 e com o currículo português, ponderando as vantagens e desvantagens de uma maior ou menor ênfase neste ou naquele aspecto.

Principles *and* Standards *for* SCHOOL MATHEMATICS

Electronic *Principles and Standards*



Exemplos interactivos nos *Standards online*

Illuminations, as novas Adendas

Mas seria, evidentemente, um erro transpor de forma acrítica estes (ou outros) *standards* para a realidade portuguesa. Eles foram feitos pela comunidade americana tendo em conta as realidades e o contexto americano. Apesar disso, eles constituem um excelente documento de trabalho para ser estudado e discutido atentamente por todos aqueles que em Portugal se interessam pelo ensino e aprendizagem da Matemática.

João Pedro da Ponte
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

Uma investigação em torno do Teorema de Napoleão

A tarefa proposta — Uma investigação em torno do Teorema de Napoleão — foi adaptada de uma actividade apresentada por Steve Weimar em http://forum.swarthmore.edu/ces95/napoleon.html e poderá ser explorada no 3º ciclo do ensino básico ou no ensino secundário. Trata-se de uma tarefa de investigação matemática que, tal como o nome indica, pretende pôr os alunos a explorar diversos aspectos à volta do Teorema de Napoleão e a procurar justificações para as suas descobertas. Estas poderão ser mais ou menos aprofundadas consoante o nível de escolaridade dos alunos.

O Teorema de Napoleão é assim designado porque o problema original é atribuído a Napóleão Bonaparte que era conhecido por ser um matemático amador. Este teorema estabelece que:

Se desenhar sobre cada um dos lados de um dado triângulo (arbitrário) um triângulo equilátero exterior ao inicial e unir os baricentros dos três triângulos equiláteros obtidos, o triângulo resultante é também um triângulo equilátero.

Na Internet há alguma informação disponível sobre o Teorema de Napoleão. O *site* que se segue é um desses e lá podem ser encontradas algumas demonstrações do teorema e até uma generalização: http://www.cut-the-knot.com/proofs/napoleon_intro.html

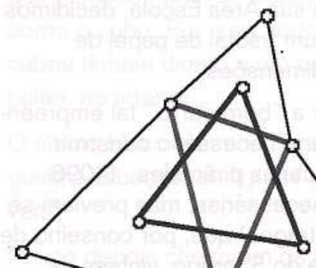
Helena Fonseca
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Escola ....

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)..

Uma investigação em torno do Teorema de Napoleão

Desenha, utilizando o *software Geometer´s Sketchpad* ou *Cabri-Géomètre*, um triângulo e sobre os seus lados constrói triângulos equiláteros. Determina os baricentros destes últimos triângulos e une-os de modo a formar um novo triângulo — o **triângulo de Napoleão**.

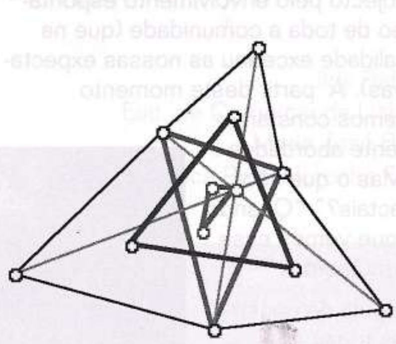


• O que podes dizer acerca deste novo triângulo?

Une agora os vértices "exteriores" dos triângulos equiláteros ao vértice oposto do triângulo original.

• Investiga o que se passa com estes segmentos.

Reflecte cada vértice do triângulo de Napoleão através do lado mais próximo do triângulo original e une-os, obtendo assim um novo triângulo.



• Investiga relações entre este último triângulo, o inicial e o de Napoleão.

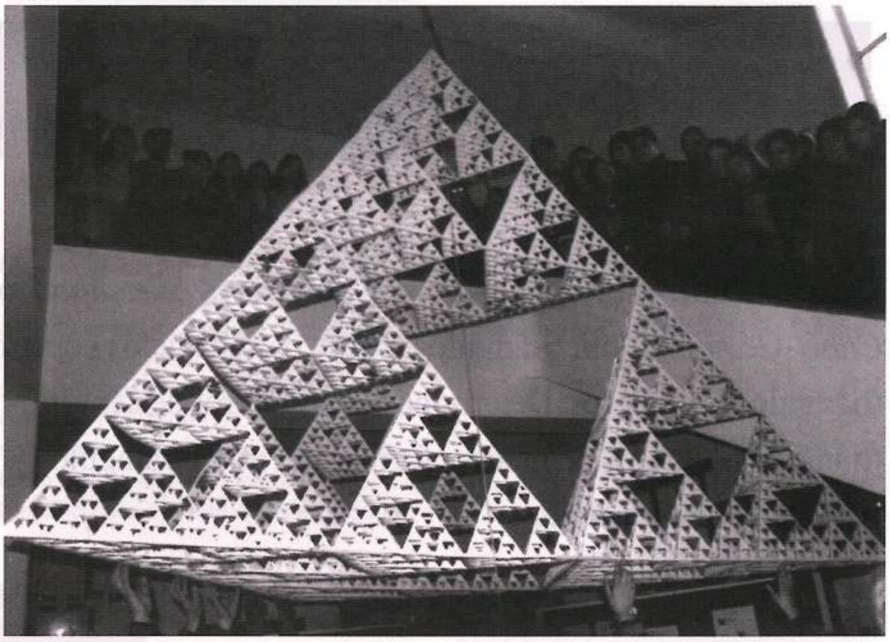
Um monumento de papel

"2000 Ano Mundial da Matemática" que fazer para que toda a escola se apercebesse deste acontecimento?

Uma vez que o desafio lançado pela APM "Construção de um sólido geométrico no jardim" já tinha sido concretizado na nossa escola, em 1999, por uma turma do 10° ano no âmbito da sua Área Escola, decidimos construir um fractal de papel de grandes dimensões.

Para levar a "bom porto" tal empreendimento era necessário construir 6000 pequenas pirâmides (4096 eram as necessárias, mas previam-se alguns estragos) que, por conselho de um colega do 5° grupo, vinham da tipografia já vincadas, era só (!) dobrar e colar. E foi por ser "tão fácil" que conseguimos pôr toda a escola (Professores, Alunos, Funcionários) a colaborar. Por todo o lado (corredores, átrios, sala de professores) se construíam pirâmides que eram personalizadas pelo próprio: umas eram pintadas, outras continham mensagens ou simplesmente a assinatura.

Esta foi a fase mais importante do projecto pelo envolvimento espontâneo de toda a comunidade (que na realidade excedeu as nossas expectativas). A partir deste momento éramos constantemente abordados : "Mas o que são fractais?" "Quando é que vemos esse monumento?"



Depois de construídas todas as pequenas pirâmides, os professores do grupo com ajuda de alunos, foram construindo os módulos seguintes, tendo o cuidado de reforçar as arestas com arames, pois pretendíamos que este fosse erguido e permanecesse suspenso no vão das escadas acima das nossas cabeças, para que pudesse ser apreciado de todos os ângulos.

Fizemos a inauguração no fim de uma manhã de aulas em que estiveram presentes alunos, funcionários e professores desta e de outras escolas. Após uma pequena palestra sobre Fractais e Matemática o fractal foi erguido e suspenso perante o olhar admirado e amedrontado de todos os presentes (o monumento estava bonito e imponente mas não sabíamos se iria cair!). Foi com alegria que todos festejaram.

Durante os três meses seguintes em que o fractal esteve suspenso pudemos observar o interesse com que este era olhado nas várias perspectivas (por baixo, por cima, ao longo das escadas) e como era consultada a exposição sobre fractais que o acompanhou.

Neste momento resta-nos o prazer de termos conseguido divulgar na nossa escola conhecimento actual, para além dos currículos do ensino secundário

Nunca mais esqueceremos algumas frases ouvidas :

— Fractais estão relacionados com Caos.

Professores

— Fala-se muito de Fractais e Caos em Ciências Sociais. Preciso de investigar este assunto.

Professora

— Olha a Minha pirâmide!!

Alunos

— Estou farta de olhar e pensar como vão juntar estas 4 pirâmides.

Auxiliar de acção educativa, durante a montagem

— O que em casa era "o grande" aqui é "o pequeno".

Miúdo de 8 anos que tinha ajudado a construir um módulo de 16 pirâmides.

— Nunca mais vou esquecer que nós não somos sacos de sangue mas sim fractais encarnados.

Vários – a frase tinha sido proferida por Arsélio Martins durante a inauguração.

Os professores de Matemática
da Esc. Sec. José Estevão

Visita à exposição interactiva "Brincando com a Matemática", na EB1 nº 11, Monte Belo em Setúbal.

No passado dia 7 de Junho fomos visitar a exposição "Brincando com a Matemática", realizada na escola Monte Belo, em Setúbal.

A escola está situada na periferia da cidade, no meio de prédios de habitação. Não foi imediata a sua identificação mas, à entrada de um edifício, lá estava um grande icosaedro, construído em tubo de plástico, revestido com fita adesiva colorida. A Geometria marcava presença.

Chegámos quase na hora do recreio e à medida que entrávamos na escola fomos invadidas pela sensação de nos encontrarmos num lugar calmo, acolhedor, propício ao desenvolvimento da aprendizagem. À nossa espera estavam as professoras Alda, Fátima e Elda Tramm, a grande entusiasta da Geometria e impulsionadora da exposição.

As nossas anfitriãs levaram-nos primeiro ao Centro de Recursos Educativos, uma sala ampla e acolhedora com uma área de leitura, outra de televisão e vídeo e ainda uma de computadores. Embora fora da hora do recreio dois alunos estavam tranquilamente a ver na televisão, desenhos animados, falados numa voz suave, em tom baixo que não incomodava. Não pudemos deixar de elogiar a quantidade de computadores e impressoras disponíveis e a belíssima fotocopiadora de que o centro dispunha. As nossas colegas tinham boas razões para se sentirem orgulhosas.

Dirigimo-nos depois à exposição que dava uma amostra do trabalho realizado ao longo do ano e que estava organizada por blocos. Junto de cada bloco havia algumas pequenas mesas e cadeiras que esperavam os seus pequenos ocupantes.

O primeiro bloco intitulava-se, *a interdisciplinaridade* e abarcava a horta pedagógica e o estudo da escola inserida no bairro e na cidade. Soubemos que os produtos colhidos na horta tinham sido vendidos pelos alunos, nas suas casas, e do estudo feito resultaram alguns daqueles mapas e maquetes da escola, do bairro e até das ruínas de Troia, onde se tinham deslocado, em visita de estudo.

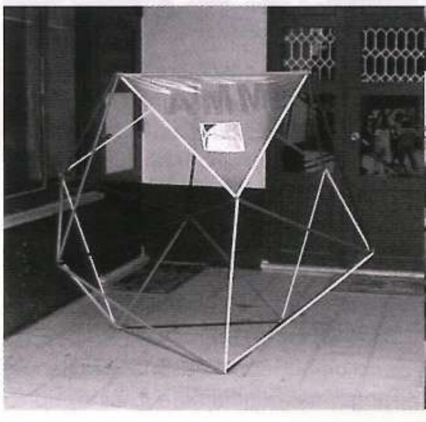
No bloco dos *Jogos* lá apareciam os dominós, alguns com temas de geometria, o "Jogo do banqueiro" sobre o sistema de numeração, o "Jogo dos montes" que tinha a ver com o conceito de divisão.

O bloco a seguir chamava-se *Nós e a geometria*. Lá estavam os polígonos, as pavimentações e os esqueletos de sólidos geométricos feitos com palhinhas de refresco. Destes, se havia alguns que se mantinham seguros e indeformáveis, havia outros que teimosamente se deformavam, como o cubo. Por isso, todos os cubos tinham direito a um pequeno balão, no interior.

O último bloco eram os *Desafios*, os quebra-cabeças, as figuras impossíveis.

Pouco depois chegaram os alunos, vindos do recreio. Vinham acompanhados das suas professoras, alguns de mãos dadas, a conversar, sem pressas. Ocuparam os seus lugares, onde havia materiais disponíveis e seguiram calmamente as orientações dadas. Não era a primeira vez que ali estavam e eles sabiam exactamente onde se sentar. Muitos construíam estruturas de sólidos, outros pavimentações, ... sem gritos nem correrias. Dava gosto vê-los.

Ilda Rafael
Esc. de Comércio de Lisboa
Maria José Bóia
Esc. Básica Prof. Noronha Feio



Pais, Mães, Filhos e Matemática ou, de como familiarizar (com) a Matemática

A TANGERINA é uma escola particular, com Jardim de Infância e 1º ciclo do Ensino Básico, situada no Porto e frequentada actualmente por 125 crianças.

É já uma tradição da Escola comemorar os Dias do Pai e da Mãe, convidando os respectivos – Pais e Mães – para virem à Escola, nesse dia, e realizarem uma actividade em conjunto com os seus filhos. E isto porque estamos convencidos de que, para além de ser preciso trazer cada vez mais os Pais à Escola, é também necessário encontrar outras formas de participação e envolvimento, que não apenas as reuniões e encontros formais.

Procuramos, assim, que esses momentos sejam sempre simultaneamente divertidos (lúdicos) e educativos.

Este ano, correspondendo aos desafios lançados pela APM para a comemoração do AMM, decidimos propor, nesses Dias, actividades relacionadas com a Matemática.

Dia do pai

A actividade escolhida para realizar no Dia do Pai foi a da *construção de poliedros* — um dos interessantissimos desafios lançados pela APM.

Teríamos de adaptar a actividade às condições específicas em que se ía desenvolver: um grande grupo de pessoas a trabalhar em simultâneo (cerca de 250 – 125 crianças e outros tantos Pais); um grupo muito heterogéneo, já que envolveria pessoas dos 3 aos 60 ou 65 anos (todos os anos acontece que, na impossibilidade de alguns Pais virem, vem em sua substituição a Mãe ou um dos Avós); o tempo

para a realização da actividade é relativamente curto, para atender à disponibilidade dos Pais (cerca de 2 horas).

Optou-se, então, pela formação de grupos e pela construção de 6 poliedros: 1 tetraedro, 1 octaedro, 1 cubo, 2 dodecaedros e 1 icosaedro.

Atendendo às condições referidas, os materiais para a construção de cada poliedro foram previamente definidos pela Escola. A cada grupo, foi distribuído um guião de orientação, do qual constava o nome e desenho do sólido a construir e os materiais propostos para a sua construção. Procurou-se variar de materiais de forma a colocar desafios diferentes de grupo para grupo e, também, para que resultassem produtos finais também variados:

- o tetraedro foi construído com varas de ferro e coberto a plástico de cor, tendo 1,5m de altura;
- o octaedro, tinha 2m de altura, a estrutura em cana, e foi coberto também a plástico de cor;
- o cubo, com 1,5m de aresta, foi construído em tubo eléctrico, de plástico, coberto também depois a plástico de cor;
- no caso dos 2 dodecaedros, um foi construído em cartão e depois pintado, o outro em arame e tubo eléctrico de plástico;
- o icosaedro foi também feito em cartão e pintado pelo grupo.

Em paralelo à actividade, tinha sido previamente montada uma pequena exposição sobre o tema – com materiais recolhidos sobretudo das revistas e boletins da APM e via Internet – e que serviu essencialmente de motivação inicial para a tarefa a realizar.

A actividade desenvolveu-se no recreio da Escola, tendo-se gerado um clima de grande empenhamento e entusiasmo por parte de todos: crianças, pais e professores (estes serviram apenas de rectaguarda organizativa e logística do trabalho dos grupos).

Melhor do que as palavras, as imagens recolhidas demonstram o envolvimento e a animação que rodearam a actividade.

Dia da mãe

Para o Dia da Mãe, a actividade escolhida baseou-se no *Tangram*.

Formaram-se também grupos (neste caso, de Mães e filhos, claro está!).

Cada grupo começava por construir, a partir de um modelo dado, três Tangram, em cartolina preta. Com esses Tangram, os elementos do grupo teriam que compor três figuras que lhes tinham sido, igualmente, distribuídas. Finalmente, com as figuras formadas, cada grupo elaborava um quadro (cartaz), em cartolina grande, de cor.

Também neste caso, uma pequena exposição sobre o Tangram, serviu de motivação e apoiou a actividade proposta.

A actividade decorreu, tal com acontecera no Dia do Pai, num clima de grande envolvimento e entusiasmo, como o demonstram, também, as respectivas imagens .

Manuel Rangel
Tangerina, Educação e Ensino, Porto

Notícias das escolas

A Semana da Matemática já é usual em muitas escolas, mas este ano houve algumas que, respondendo ao desafio lançado pela APM, tiveram um tema comum em algumas das actividades que desenvolveram: os poliedros. Alguns colegas tomaram a iniciativa de nos enviarem relatos do que foi feito, de que reproduzimos alguns excertos.

Escola EB2,3 do Cartaxo

(...) estiveram expostos trabalhos sobre História da Matemática e trabalhos diversos sobre actividades da disciplina (...) funcionaram laboratórios lúdicos, onde grupos de alunos jogavam xadrez, damas, abalone, jogo do gelo, construção de *puzzles*, etc.. Num outro espaço amplo foi montada uma escultura gigantesca de poliedros, trabalho esse que contou com a colaboração importante do grupo de Educação Visual. (...) foi propiciado o visionamento de algumas vídeo cassetes, a turmas do 3° ciclo. Também se destacou uma peça de teatro sobre *Ensino da Matemática ao longo dos tempos*, peça posta em cena por alunos do 2° ciclo. Foi apresentado como desafio *O problema do dia*, que teve adesão significativa da parte dos alunos. (...) Uma palavra final de agradecimento à APM e SPM pelo estímulo e apoio que nos deram ao longo do ano, sendo elas com certeza uma das razões da nossa motivação no trabalho da Matemática.

Manuel de Oliveira Pires

Escola Sec. de Vila Real de Santo António

(...) procedeu-se à construção de um tetraedro em dimensões gigantes (...). Teve lugar uma exposição permanente com diversos materiais didácticos com o intuito de promover o ensino-aprendizagem da Matemática. Entre esses diversos materiais destacaram-se as demonstrações de programas informáticos (*GSP), Zometool*, geoplanos, trabalhos realizados pelos alunos subordinados a diversos temas como: a geometria no dia-a-dia, História da Matemática, matemáticos famosos, etc.. Para que a comunidade se consciencialize que jogando vamos aprendendo, foi posto à sua disposição materiais de carácter lúdico entre os quais se destacam quebra-cabeças matemáticos e jogos de estratégia. (...) foi colocado diariamente, um problema a toda a comunidade escolar. (...) Torna-se importante realçar toda a adesão e entusiasmo revelado tanto por alunos como por professores pelas actividades propostas.

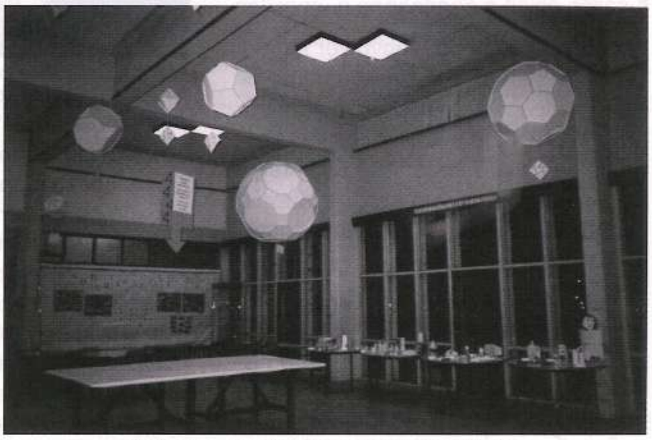
Gil Afonso

Escola Secundária de Linda-a-Velha

Na semana de 20 a 24 de Março, foi feita uma exposição sobre alguns trabalhos desenvolvidos por alunos e professores, neste AMM.

Logo à entrada da escola, passou a estar colocado um grande octaedro com o seu dual, construídos em ferro e depois coloridos. Lá dentro, afixados nas paredes podiam ver-se alguns painéis e trabalhos realizados nas aulas sobre vários temas como simetrias, pavimentações, fractais, o teorema de Pitágoras. Pendurados no tecto, poliedros gigantes, os cinco platónicos e os treze arquimedianos, todos com a mesma medida de aresta, chamavam a atenção de quem entrava.

Além disso, a exposição foi animada por diversos jogos, desafios e concursos. De entre estas actividades destacam-se: o desafio, já conhecido por muitos, que consiste em escrever os números de 1 a 100 usando apenas quatro quatros e as operações que cada um conhece, e que foi apresentado em tamanho gigante, sendo estimulante ver os alunos em todos os intervalos tentarem escrever mais um número; o concurso *A realidade na Matemática* para os alunos do 3° Ciclo que tinham de pensar em algo da realidade e transferirem para a Matemática, através duma construção com sólidos geométricos; e a *Caça ao Tesouro* que foi um género de *Peddy-paper* com pistas e provas associadas à Matemática que os alunos tinham de ultrapassar para descobrirem o tesouro escondido.


Poliedros pendurados em Linda-a-Velha

Não faltaram os computadores disponíveis com alguns programas ligados à matemática, como o *Polly*, o *Sketchpad*, ou jogos variados. Houve também materiais manipulativos como o *Zometool* , as figuras feitas com bolas de sabão, pavimentações e construções.

Apesar do cansaço no final da semana, nada que o tempo não cure, o balanço foi muito positivo, sentimento revelado por nós e pela comunidade escolar.

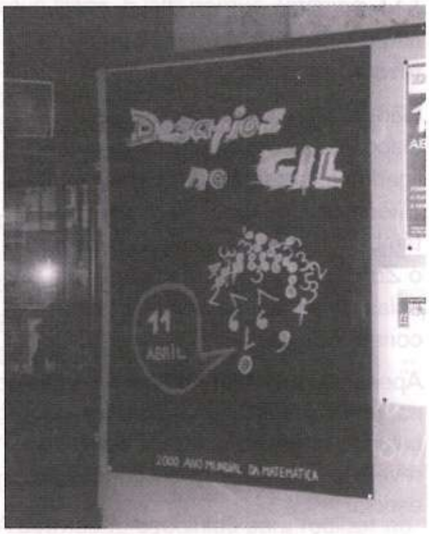
Paula Espinha

Escola Sec. de Gil Vicente, Lisboa

No âmbito das comemorações do AMM realizou-se (...) um encontro de resolução de problemas denominado

Desafios no Gil. O encontro (...) dividiu-se em duas partes: a da manhã destinada aos alunos do 3° ciclo e a da tarde aos do secundário. No total, participaram vinte e oito equipas, compostas na sua maioria por quatro alunos. Cada um dos grupos teve que resolver num período de uma hora e meia um conjunto de quatro problemas. (...) A realçar temos o empenho e a alegria demonstrada quer pelos alunos quer pelos professores do nosso departamento que participaram na iniciativa e também a qualidade das resoluções apresentadas por algumas das equipas.

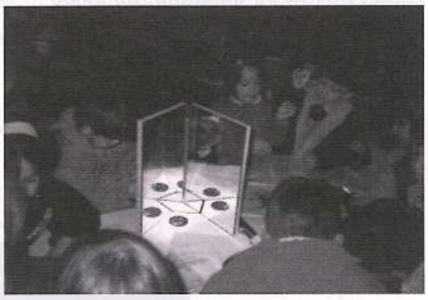
Luís Barbosa



Escola Secundária Eng. Calazans Duarte

Decorreu de 3 a 9 de Abril de 2000 a VII Semana da Educação do Concelho Marinha Grande, iniciativa promovida pelo Conselho Municipal de Educação. Um dos temas da Semana foi "2000 Ano Mundial da Matemática". Ao nível da freguesia, foi à nossa escola que coube desenvolver esta iniciativa, pelo que o departamento de Matemática, em colaboração com os professores das escolas dos vários graus de ensino, organizou um Atelier de Matemática, como espaço interactivo. Do que se passou, gostaríamos de destacar:

- a importância da colaboração de colegas de outras escolas, bem como do Núcleo da APM, quer na disponibilização de materiais, quer na organização das visitas dos alunos;
- a existência de uma grande diversidade de materiais para todas as idades, desde jogos e materiais didácticos para os primeiros anos até à modelação, passando pelos espelhos, a sabonária e as superfícies minimais, as pavimentações e os poliedros. Incluiu trabalhos dos alunos, como os fractais e a história da Matemática, ou exposições como a do Escher e ainda ... a Internet;
- a participação num mesmo espaço de crianças, jovens e adultos (desde professores a funcionários, passando pelos pais) que levou à descoberta de coisas em conjunto;
- a concretização de actividades mobilizadoras da comunidade escolar:
  - — o passatempo *Pense já ou daqui a um bocado, desde que seja hoje* envolveu a participação professores, alunos e funcionários;
  - — o jogo da estimativa que nos permitiu 'contar' 2433 visitantes diferentes;
  - — o jogo do dia na sala de professores;
  - — as construções e desconstruções permanentes realizadas no atelier principalmente de *puzzles*, pavimentações e poliedros, das quais destacamos a do poliedro arquimediano icosidodecaedro truncado com 62 faces.



Apreciámos os comentários dos professores do 1° ciclo e da pré que salientaram a importância da existência na nossa comunidade de um espaço permanentemente aberto e que nos levou a fazer uma proposta ao nosso vereador da cultura, na qual defendemos a existência duma mediateca central com um atelier de matemática, dinamizado por professores requisitados e monitores, que seria visitado regularmente pelos alunos dos primeiros anos. Esse espaço permitiria experimentar materiais e actividades que muitas vezes devido ao isolamento e falta de meios não existem na escola. Serviria certamente para os professores levarem novas ideias para a sala de aula.

Manuela Pires

Escola Sec. de Henrique Nogueira, Torres Vedras

Desta escola recebemos o jornal Matematicar, doze páginas de humor, poesia, jogos, reportagens, notícias, curiosidades. Numa pequena notícia sobre a Semana da Matemática, dá-se conta das actividades realizadas:

> (...) computadores com jogos relacionados com Matemática tais como o Trinca-Espinhas, o Vrum-vrum ou *puzzles*, e vários outros jogos, nomeadamente xadrez, damas, tangrans, dominós, triominós, torres de Hanoi. Ao longo da semana foram construídos vários sólidos para serem expostos no baú dos sólidos, foram mostrados vídeos, estiveram expostos cartazes alusivos ao AMM e outros trabalhos realizados pelos alunos do 8° e 9° anos.(...)

Noutra página do jornal reproduzem-se algumas opiniões dos alunos de que destacamos a da Sofia Braz (7° B):

> Estou a gostar de cá estar, e como escreveram alguns dos meus colegas, acho que deviam ter mais jogos e deviam estar abertos todo o ano.

•••••

Os nossos parabéns a todas as escolas que se mobilizaram para, aproveitando o AMM, divulgar de uma forma variada a Matemática à comunidade escolar. Apesar de apenas termos recebido estes testemunhos, todos sabemos que estas actividades se realizaram em inúmeras escolas do país, e certamente que todos temos a experiência do entusiasmo que despoletam na comunidade e que os testemunhos destes colegas transcrevem. Como diz a jovem Sofia, é pena é que a Matemática não seja assim todo o ano lectivo, e não poderá ser?

Nuno Candeias
EB 2,3 da Ramada

Matemática do século XX: o século em breve revista[1]

Lawrence Shirley

O artigo que se segue constitui um breve sumário dos desenvolvimentos matemáticos recentes – Século XX –, ao nível da Matemática pura e aplicada e do contributo dos computadores para o estudo da mesma. Para além disso, é feita uma referência ao aparecimento da educação matemática como campo académico, à interacção da cultura com a matemática e à influência da história e da filosofia da matemática nos desenvolvimentos desta ciência.

Este artigo é da autoria de Lawrence Shirley (Shirley@towson.edu) que trabalha na Towson University, onde ensina educação matemática e história da matemática. Os seus interesses também se situam ao nível da etnomatemática.

Muitas vezes recomenda-se a discussão da história da matemática nas salas de aula como uma das maneiras para ajudar a mostrar que a matemática não passou inalterável das mãos de Deus (ou de Euclides!) para os cadernos dos alunos, mas que foi mudando e crescendo ao longo dos séculos. Esperamos que os alunos encarem a matemática como dinâmica e constantemente nova, e não como uma coisa antiga e assente que tem necessariamente que ser aceite como é. A maior parte dos livros de história e das notas laterais dos manuais concentra-se nos desenvolvimentos significativos da matemática feitos por egípcios, babilónicos, gregos, e europeus dos séculos dezasseis a dezanove. Estes manuais evitam frequentemente a evolução da matemática no século vinte, o que dá aos alunos a impressão que o progresso matemático parou há cem anos atrás.

Uma das razões para esta omissão é que não é fácil olhar para o passado recente com um olhar histórico; muita da *história* do século vinte ainda está a decorrer. Os livros de história têm de parar algures, e os autores hesitam muitas vezes em aproximar-se demasiado da data da publicação. Assim, a maioria dos manuais mais comuns sobre a história da matemática cobre pouco da segunda metade do século vinte. Agora que o fim do século está à vista, é apropriado os historiadores olharem para trás e os professores mostrarem que a matemática não só está viva e bem, como está no seu período mais produtivo de sempre. Os historiadores descobriram que mais de metade da matemática que se conhece foi desenvolvida desde 1900; e alguns diriam mesmo desde 1950 (fig. 1 e 2).

Outras duas razões para evitar a história recente: a maior parte da matemática escolar baseia-se em material mais antigo; e muita da matemática do século vinte é demasiado abstracta e difícil para poder ser usada no ensino básico. Mesmo que o conteúdo real possa ser difícil, as histórias excitantes sobre as pessoas, os desenvolvimentos, os resultados, e as aplicações merecem cobertura. Estas histórias podem dar vida à matemática escolar e encorajar os nossos alunos a juntarem-se ao divertimento! O que se segue é um breve sumário que dá ideia do sabor dos desenvolvimentos matemáticos recentes. Apresentam-se desde já desculpas pelas muitas omissões e simplificações. Este século viu demasiado para que tal caiba num pequeno artigo! As referências no final pretendem ser um guia na busca de mais detalhes.

Matemática Aplicada

Provavelmente, as proezas mais óbvias da matemática do século vinte são as suas aplicações. Mesmo que os alunos ainda não tenham estudado formalmente estes tópicos, eles já viram os resultados. A física moderna tornou-se quase um ramo da matemática; Einstein, Bohr, Dirac, Feynman, Gell-Mann, e muitos outros físicos notáveis fizeram muito do seu trabalho em matemática. A relatividade usa algumas das aparentemente estranhas geometrias teóricas abstractas do século passado e demonstra que aquelas são mais tangíveis do que os seus inventores sonharam. A mecânica quântica aplica a teoria das probabilidades e dos grupos à estrutura de partículas subatómicas. A física também desagua na astronomia e na cosmologia. Stephen Hawking, um físico e matemático que ocupa a mesma cadeira de professor em Cambridge que em tempos foi ocupada por Newton, está a trabalhar no desenvolvimento de uma "grande teoria unificadora" do universo. Hawking é especialmente interessante como um exemplo da luta e da perseverança porque o seu corpo foi atacado pela doença de Lou Gehrig mesmo quando a sua mente explorava o universo. Se a física é matemática aplicada, a engenharia é física aplicada. As muitas maravilhas da engenharia do século vinte sublinham o poder da matemática nos automóveis e nas auto-estradas; nos aviões nas naves espaciais; nos telefones e na televisão; e, claro, nos computadores.

Duas outras áreas importantes da matemática aplicada do século vinte são a estatística e as probabilidades. Ambas tinham uso limitado antes de 1900, especialmente no cálculo, mas matemáticos das duas áreas construíram fundamentos teóricos sólidos e encontraram muitas novas aplicações.

No princípio do século, estatísticos como Pearson, Fisher e Kendall desenvolveram análises e metodologias, algumas das quais têm agora o seu nome; mas os cálculos entediantes limitaram as suas aplicações. Os computadores vieram abrir enormemente esse campo, não apenas com velocidades de cálculo mais elevadas mas também com novos e poderosos tipos de análise, incluindo os métodos e simulações de Monte Carlo. Incidentalmente, do lado "menos tecnológico" da estatística, os alunos de níveis médios de escolaridade talvez se interessem por saber que as representações em diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis são ambas produto da parte final deste século.

Numa certa altura, a probabilidade parecia ser pouco mais que uma ferramenta útil para os jogadores. No século vinte, porém, foi aplicada na mecânica quântica para a localização de electrões, como foi referido anteriormente e, através da teoria do jogo de John von Neumann, para a análise estratégica em negócios, na economia, na política, e na guerra. John Nash e Reinhard Selten, ambos matemáticos, até partilharam o prémio Nobel da economia em 1994 pelo seu trabalho nesta área.

De facto, a matemática tem contribuído em muitas áreas de negócios, muito para além dos dados pelos livreiros de Dickens do século dezanove. Alguns consideram o desenvolvimento, em 1947, por George Dantzig, do método simplex de programação linear, uma poderosa ferramenta de optimização nos negócios, como uma das mais importantes descobertas matemáticas do século. Por volta de 1970, a teoria do caos, desenvolvida por René Thom e Christopher Zeeman, considerou resultados abruptos, não contínuos, de acções contínuas. A teoria tem aplicações nas áreas financeira e empresarial, bem como na biologia e noutros campos que anteriormente não tinham relação estreita com a matemática.

As complexidades da economia, biologia, e outros campos "confusos", tais como a metereologia e a ecologia, estão agora a ser apetrechados pela matemática da teoria do caos e dos sistemas dinâmicos. Os alunos podem ter ouvido falar da teoria do caos no filme *O Parque Jurássico*. O mais famoso exemplo é o "efeito borboleta" de Edward Lorentz, no qual ele sugere que o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar uma cadeia de acontecimentos que causem um tornado no Texas!

Computadores na Matemática

Alguns diriam que a história dos computadores não faz parte da história da matemática, mas os computadores têm interagido de perto com a matemática ao longo deste século. Somos tentados a começar a história com Charles Babbage, frequentemente considerado o pai dos computadores. Apesar de ter ideias do século vinte, a vida de Babbage (1702 – 1887) decorreu cem anos mais cedo! O mundo teve de esperar até à década de trinta para haver um trabalho significativo na área dos computadores.

Década	Aplicada	Computadores	Pura	Educação e Sociedade
1900	*Design* de aviões Relatividade	Babbage? (Oops! Século errado!)	Os 23 problemas por resolver de Hilbert	Os "primeiros" educadores matemáticos
1910	Sistemas eléctricos e telefónicos, com fios		*Principia Mathematica*	
1920	Mecânica quântica		Fundamentos e lógica Teoria dos anéis Análise funcional	Fundação do NCTM
1930	Teoria dos jogos Física atómica	Teoria da computabilidade Máquina de Turing *Design* de circuitos	Teorema da não completude de Gödel Bourbaki Topologia	Matemática "significativa"
1940	Criptologia Projecto de Manhattan Método Simplex	ENIAC Programação		*How to Solve it*
1950	Economia matemática Sistema interestadual de auto-estradas	UNIVAC Linguagem FORTRAN	Números primos	Preocupação com o currículo
1960	Engenharia aeroespacial	Linguagens COBOL e BASIC	Solução para a hipótese do contínuo	Revisão do currículo para uma "nova" Matemática
1970	Uso dos computadores na estatística Teoria do caos	Teorema das quatro cores, demonstrado com ajuda de computadores		Filosofia de Lakatos
1980	Sistemas dinâmicos Fractais	Uso mais alargado dos computadores na matemática	Teorema do empacotamento das esferas	Etnomatemática
1990	Cosmologia — teoria das cadeias	Redes de computadores ajudam a encontrar mais números perfeitos	Demonstração do último teorema de Fermat	Normas do NCTM

figura 1. Uma tabela cronológica da matemática do século vinte

A teoria da computabilidade de Alan Turing e as ideias de Claude Shannon sobre a troca de circuitos deram suporte teórico ao desenvolvimento da programação. As ideias de John von Neumann puseram a entrada da programação no mesmo formato que a entrada de dados, o que tornou o design de computadores muito mais flexível. As décadas de cinquenta e de sessenta viram as primeiras linguagens de computador, tais como FORTRAN, BASIC, e COBOL — a última desenvolvida por Grace Hopper, que também criou o termo *bug* quando uma traça causou uma avaria no seu computador. Estas linguagens ajudaram a que o uso do computador se tornasse vulgar entre os cientistas, engenheiros e homens de negócios. Entretanto, os matemáticos continuaram a influenciar a teoria da ciência computacional e a tecnologia em áreas como a teoria dos códigos da álgebra e a análise de redes da topologia.

Os matemáticos hesitavam em adoptar o computador, argumentando que a matemática é um esforço da mente, e não um cálculo mecânico dos computadores. Em 1976, no entanto, Wolfgang Haken e Kenneth Appel anunciaram uma demonstração do famoso teorema das quatro cores, sem solução desde há mais de 100 anos. Apesar da demonstração ser difícil, os alunos de níveis de escolaridade média conseguem perceber o problema: em qualquer mapa colorido de forma a que dois países vizinhos não tenham a mesma cor ao longo da sua fronteira, quatro cores são suficientes. Uma chave para a solução de Haken e Appel foi uma análise detalhada de perto de dois mil casos de configuração, encontrados pelo computador. Mesmo usando computadores, a verificação demorou mais de seis meses; sem computadores, poderia levar décadas. Filosoficamente, o anúncio reabriu a velha questão do que é que constitui uma demonstração.

Os computadores também desempenharam um papel principal no desenvolvimento de fractais. O conceito de fractal envolve objectos geométricos que são feitos de padrões infinitos de réplicas cada vez menores deles próprios. Na prática, os fractais eram difíceis de compreender sem a ajuda dos computadores gráficos, que faziam ampliações cada vez mais profundas nas suas estruturas. A mais famosa é a representação de Mandelbrot, que foi apelidada do objecto matemático mais complexo que foi visionado.

Matemática Pura

Embora as aplicações e o trabalho com computadores possa ser mais visível para o público, os matemáticos puros argumentariam que a matemática abstracta tem sido a área de mais importante crescimento deste século. O século começou com um "trabalho de casa" para matemáticos quando David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, fez a sua célebre intervenção.

Kenneth Appel	1932 —	teorema das quatro cores
Stefan Banach	1892 — 1945	análise funcional, topologia dos espaços vectoriais
Edward Begle	1914 — 1985	currículo escolar, "nova Matemática"
"Nicolas Bourbaki"		álgebra abstracta, topologia, rigor dedutivo
Paul Cohen	1934 —	fundamentos, hipóteses do contínuo
Ubiratan D' Ambrosio	1933 —	etnomatemática, assuntos socio-políticos
George Dantzig	1914 —	programação linear, método simplex
Jean Dieudonné	1906 — 1992	topologia, álgebra abstracta, parte do grupo Bourbaki
Albert Einstein	1879 — 1955	física, relatividade
Paul Erdõs	1913 — 1996	teoria dos números
Kurt Gödel	1906 — 1978	fundamentos, não completude da matemática
Wolfgang Haken	1928 —	teorema das quatro cores
G. H. Hardy	1877 — 1947	teoria dos números, outra matemática pura
Stephen Hawking	1942 —	cosmologia
David Hilbert	1862 — 1943	geometria, fundamentos, relatividade
Grace Hopper	1906 — 1992	computadores, COBOL
Imre Lakatos	1922 — 1974	filosofia da matemática
Henri Lebesgue	1875 — 1941	teoria da medida, generalização de integral
Benoit Mandelbrot	1924 —	fractais
John Nash	1928 —	economia, equilíbrio
Emmy Noether	1882 — 1935	relatividade, álgebra abstracta, teoria dos anéis
George Pólya	1887 — 1985	resolução de problemas
Srinivasa Ramanujan	1887 — 1920	teoria dos números, teoria das funções
Bertrand Russell	1872 — 1970	filosofia, fundamentos, lógica
Atle Selberg	1917 —	teoria dos números
Reinhard Selten	1930 —	economia, equilíbrio
Claude Shannon	1916 —	teoria de circuitos
David E. Smith	1860 — 1944	educação matemática
René Thom	1923 —	teoria do caos
Alan Turing	1912 — 1954	teoria dos computadores, computabilidade
John von Neumann	1903 — 1957	teoria dos jogos, programas de computador
André Weil	1906 — 1998	geometria algébrica, parte do grupo de Bourbaki
Andrew Wiles	1953 —	último teorema de Fermat
Grace Chisholm Young	1868 — 1944	teoria dos conjuntos
Christopher Zeeman	1925 —	aplicação da teoria do caos, sistemas dinâmicos

figura 2. Alguns matemáticos importantes do século vinte

listou vinte e três problemas sem solução que requeriam atenção. Alguns deles ainda permanecem por resolver! Muitos dos desafios de Hilbert lidavam com os fundamentos da matemática, especialmente uma tentativa de organizar toda a matemática numa estrutura lógica de um sistema de axiomas. Esse projecto foi posto na mesa em 1931, contudo, quando Kurt Gödel provou que qualquer sistema matemático axiomático era "incompleto" — isto é, afirmações verdadeiras poderiam existir sem que pudessem ser provadas ou refutadas. De facto, utilizando um complexo sistema para numerar sistemas lógicos e afirmações, Gödel produziu uma afirmação verdadeira que diz essencialmente, "esta afirmação não pode ser provada". Compare esta frase com a afirmação "eu estou a mentir". A ideia da auto-referência reapareceu mais tarde nos fractais e na teoria da recursividade. As ideias de Gödel também contribuíram para a teoria da computabilidade de Turing.

Outro acontecimento importante foi a solução para a hipótese do contínuo. Georg Cantor mostrou que a cardinalidade — grosseiramente, o número de elementos — do conjunto dos racionais e a do conjunto dos inteiros era a mesma, contável e infinita, designada por $\aleph_0$. Ele também mostrou que a cardinalidade dos números reais era incontável infinita, que ele apelidou de continuum *c*. A questão era, se há alguma cardinalidade entre $\aleph_0$ e *c*? A hipótese do contínuo diz que a resposta é «não». A prova eventual foi uma surpresa. Paul Cohen mostrou que a resposta era "não interessa"; quer a resposta fosse "não" quer fosse "sim" poderia chegar-se a uma teoria dos números sem contradições. Esta situação é comparável à aceitação ou não aceitação do quinto postulado de Euclides nas geometrias euclidianas e não-euclidianas, pelo que as estruturas foram apelidadas de teoria dos números cantorianas e não-cantorianas.

O século também viu muito trabalho na análise funcional, na álgebra abstracta, e na topologia. A análise funcional proveio do trabalho existente em álgebra linear, lidando com problemas especiais de diferenciação e integração. Emmy Noether e Grace Chistolm Young foram duas proeminentes mulheres do começo do século que trabalharam em análise e álgebra. Embora o seu trabalho seja esotérico para os alunos, ele é significativo por mostrar o grande papel que as mulheres começaram a ter em matemática. Uma história de vida mais estranha é a de Nicolas Bourbaki, cujo nome aparece em diversos livros que ajudam a organizar e a ligar muitas áreas importantes da álgebra abstracta e da topologia. Bourbaki, porém, nunca existiu! O nome era um pseudónimo colectivo de um grupo de matemáticos na sua maioria franceses que trabalharam nos livros de "Bourbaki", revezando-se na cuidadosa escrita e edição e constantemente argumentando sobre o modo de apresentar as ideias para um maior rigor e clareza. Como piada, os matemáticos também inventaram uma biografia e genealogia de Bourbaki e até celebraram o casamento da sua filha!

A topologia emergiu do século dezanove como uma nova área da matemática, ligando ideias de álgebra, análise e geometria. A topologia informal agrada aos alunos, incluindo os tópicos mais antigos dos anéis de Möbius e das pontes de Könisberg, mas este século viu a solução do teorema das quatro cores, mencionado previamente; estudos dos nós e do espaço à volta dos nós; e estudos envolvendo o virar esferas do avesso. Na década de noventa, os topologistas debateram demonstrações sobre a maneira optimizada de empacotar esferas num espaço fechado, embora alguns observadores notassem que os vendedores de fruta têm empacotado laranjas em caixas há muito tempo!

A teoria dos números é a área mais antiga da matemática pura, datando de antes de Pitágoras, mas continua a florescer como uma fonte de questões tentadoras e de respostas difíceis. Os números primos continuam enigmáticos, ainda sem qualquer padrão reconhecido na sua sequência. No século XIX, Chebyshev provou que entre qualquer número contável e o seu dobro se encontra pelo menos um número primo. Em 1930, Paul Erdös de dezassete anos de idade encontrou uma demonstração muito mais simples. Mais tarde, foi mostrado que para $n > 47$, um número primo ocorre sempre entre n e $9n/8$. Em 1949, Paul Erdös e Atle Selberg também encontraram uma demonstração mais elegante da distribuição dos números primos. Erdös viveu até 1996 como o ilustre e estranho velho homem da matemática, que não pensava em nada excepto na matemática. Ele não tinha casa, mas viajava de universidade em universidade com todos os seus haveres num pequeno saco, ajudando os teóricos dos números a resolver mais problemas enquanto eles o ajudavam a lavar as suas roupas e o lembravam de parar e comer. Os alunos de nível de escolaridade média podem investigar a conjectura de Goldbach, ainda por provar, que qualquer número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Os gregos também estavam intrigados com os números perfeitos, que são números para os quais a soma dos seus factores próprios é igual a eles próprios, mas apenas encontraram os primeiros quatro (6, 28, 496 e 8128). Durante séculos, novos números perfeitos foram descobertos mas apenas em pequena quantidade por causa das dificuldades no cálculo à medida que se verificavam números muito maiores. Em 1900, apenas mais seis números foram descobertos. As calculadoras mecânicas ajudaram a descobrir mais dois em 1911 e 1914, respectivamente. Então, depois de 1950, os computadores começaram a ajudar. Começando nos anos 50, foram descobertos mais seis números perfeitos, depois cinco, quatro, e mais quatro, respectivamente, nos anos 60, 70 e 80. Em 1990, os novos números perfeitos tinham centenas de milhares de dígitos e o processo parecia abrandar novamente, embora mais três fossem encontrados em 1993, 1994 e 1996. A ajuda, contudo, veio através da cooperação na Internet.

Centenas de pessoas começaram a usar um novo programa de verificação. Outro número perfeito foi encontrado mais tarde em 1996, mais dois foram encontrados em 1997 e 1998, e provavelmente mais entre a escrita e a publicação deste artigo.

O acontecimento matemático mais celebrado do final do século vinte foi a solução do último teorema de Fermat, que tinha desafiado os matemáticos desde os anos de 1600. De novo, embora a demonstração seja extremamente difícil, os alunos podem compreender esta afirmação: apesar de haver muitas soluções inteiras que verificam o teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$ (tais como 3, 4, 5 e 5, 12, 13), não existe nenhuma quando os expoentes são maiores que 2. Depois de sete anos de trabalho secreto num escritório no sótão de casa, Andrew Wiles anunciou o resultado em 1993, gastando depois dois anos a pôr em ordem os pormenores. O seu trabalho foi significativo não apenas porque resolveu um problema de longa data, mas também porque o seu método ajudou a ligar diversas áreas da matemática, tais como as funções elípticas, formas modulares e geometrias não-euclidianas, que pareciam pouco ter a ver com a teoria dos números.

A Educação Matemática, a História, e a Cultura

Embora os alunos aprendam matemática há centenas de anos, o estudo formal da educação matemática como um campo académico não começou realmente antes da primeira década do século vinte. David Eugene Smith, um matemático que trabalhava na universidade da Columbia, reconheceu a necessidade de estudar o processo de aprendizagem e os problemas curriculares da matemática, e é frequentemente considerado o primeiro educador matemático. Evidentemente, muitos professores de Matemática já estavam a trabalhar, e começaram a formar organizações profissionais. Em 1920, diversos grupos uniram-se para formar o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que se tornou na primeira organização de educação matemática e na maior organização do mundo relacionada com matemática.

Ao longo do século, os educadores matemáticos estiverem principalmente preocupados com o reforço do conteúdo curricular e com o aperfeiçoamento das práticas de ensino. Um tema central quer no currículo quer no ensino tem sido a resolução de problemas. George Pólya apresentou ideias básicas sobre os melhores métodos de resolução de problemas no seu livro *How to Solve It* (1945), que se tornou um dos maiores *best sellers* de todos os tempos da matemática. A preocupação por se alcançar um entendimento mais aprofundado das ideias matemáticas também levou às maiores revisões curriculares dos finais dos anos 50 e 60 que passaram a chamar-se a "nova Matemática". Ainda que a "nova Matemática" representasse muitas ideias boas, muitos pensavam que enfatizava demasiado o rigor e a abstracção, e a sua implementação ficou parada na confusão das exigências de vários programas e na competição das ideias sobre o que seria melhor. A reacção contra a "nova Matemática" abrandou o processo, até que relatórios sobre os baixos rendimentos na década de 80 levaram a uma nova forma de pensar e, em 1989, às *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* do NCTM. Seguidas de dois volumes a acompanhar e, no final da década, de uma versão actualizada, *Principles and Standards for School Mathematics*, as *Normas* foram um guia para muita da educação matemática para a nova geração do século vinte e um.

Tal como a educação, a cultura sempre interagiu com a matemática, mas o último terço do século vinte viu um novo interesse nesta interacção. Este interesse está expresso na preocupação sobre as questões do género na educação matemática e nos campos da matemática e da ciência em geral e encontra-se reflectido no novo campo da etnomatemática, que olha especificamente para a matemática em várias culturas. A igualdade na educação matemática procura assegurar que o campo da matemática beneficie do talento de todos e que o poder da matemática seja acessível a todos. Uma breve revisão a apenas este artigo revela que apesar das questões relacionadas com a igualdade estarem agora a ser faladas, as oportunidades na matemática estiveram maioritariamente limitadas a homens brancos, mesmo no século vinte. Esperamos que a matemática no século vinte e um possa provir da população em geral.

O aumento do interesse na história e na filosofia da matemática tem ajudado a colocar os desenvolvimentos matemáticos num contexto mais vasto e tem encorajado o pensamento sobre para onde se dirige a matemática a seguir. Um filósofo em particular, Imre Lakatos, defendeu uma visão mais flexível do significado da matemática. Ele sugeriu que as demonstrações e conceitos matemáticos não sejam finais nem estáticos, mas que sejam constantemente reavaliados e que sofram alterações dinâmicas. De facto, este artigo foi escrito por essa razão — para lembrar a todos nós que a matemática não parou no século dezanove e que está pronta a dar o salto para o século vinte e um!

Notas

[1] Traduzido, para língua portuguesa, de *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 5, nº5, Janeiro 2000, copyright 2000, e publicado com a autorização do *National Council of Teachers of Mathematics*. Todos os direitos reservados. O NCTM não é responsável pela exactidão ou qualidade da tradução.

Bibliografia

Albers, Donald J., and G. L. Alexanderson, eds. *Mathematical People*. Cambridge, Mass.: Birkhäuser Boston, 1985.

Boyer, Carl. *A History of Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1989.

Burton, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Group, 1991.

Casti, John L. *Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics-and Why They Matter*. New York: John Wiley & Sons, 1996.

Cipra, Barry A. *What's Happening in the Mathematical Sciences. Vol. 1.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1993.

D'Ambrosio, Ubiratan. "Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics." *For the Learning of Mathematics* 5 (1985): 44-58.

Davis, Philip, and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience.* Cambridge, Mass.: Birkhäuser Boston, 1981.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics.* Orlando, Fla. Saunders College Publishing, 1990.

Grinstein, Louise S., and Paul J. Campbell. *Women of Mathematics.* Westport, Conn.: Greenwood Press, 1987.

Gulick, Denny. *Encounters with Chaos.* New York: McGraw-Hill, 1992.

Hoffman, Paul. *"The Man Who Loves Only Numbers"* [artigo de Paul Erdös]. *Atlantic Monthly* 260, no. 5 (Novembro 1987): 60-74.

Hofstadter, Douglas. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* New York: Vintage Books, 1979.

Katz, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction.* New York: HarperCollins Publishers, 1993.

Linear Programming Founder Turns 80 [artigo de George Dantzig]. *SIAM News* 27, no. 9 (1994): 3, 8.

Math Horizons [quarterly]. Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* 31st Yearbook. Reston, Va.: NCTM, 1969,1989.

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Reston, Va.: NCTM, 1989.

Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft Reston, Va.: NCTM, 1998.

Polya, George. *How to Solve It.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945,1973.

Scientific American, Science in the 20th Century (special issue) 3, no. 1 (1991).

Stewart, Ian. *From Here to Infinity.* Oxford: Oxford University Press, 1996.

Worral, J., and E. Zahar, eds. *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Alguns recursos excelentes foram recolhidos nos sites seguintes da World Wide Web. Tome algum do seu tempo para explorar os seus muitos e úteis *links*.

The Sci. Math FAQ Team. *Frequently Asked Questions in Mathematics* (informações comuns e históricas). www.cs.unb.ca/ãlopez-o/math-faq/math-faq.html

Trinity College, Dublin. *The History of Mathematics* (conjunto de ficheiros e *links*). www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html

University of Saint Andrews, Scotland. *MacTutor History of Mathematics Archive.* www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/

Woltman, George. *Great Internet Mersenne Prime Search* (números primos e perfeitos). www.mersenne.org

Alguns vídeos que se relacionam com este artigo também estão disponíveis.

Csicsery, George Paul. *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös* [uma visita com este teórico dos números], 1993.

Lynch, John, directed by Simon Singh. *The Proof* [*background* da demonstração de Andrew Wiles do último teorema de Fermat]. Episódio da série *Nova.* BBC-TV/WGBH_Boston coproduction, 1997.

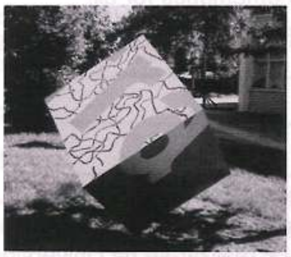
Not Knot (1991), *Outside In* [dois filmes maravilhosos sobre transformações topológicas]. Minneapolis: Geometry Center, University of Minnesota, 1994.

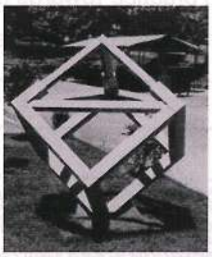
Lawrence Shirley,
Towson University

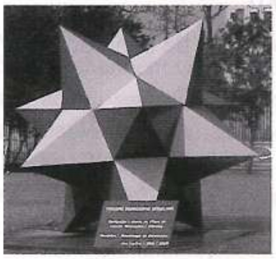
Traduzido por:
David Mendes, Fernando Menezes, Henrique Machado, Hussene Remane, Pedro Ávila, Ricardo Barreiros, Rui Roboredo, Sérgio Antunes
Ensinos-Estudos Técnicos e Profissionais, SA

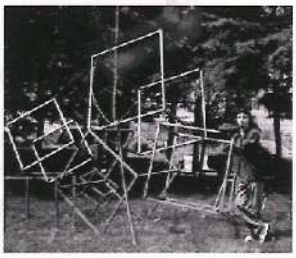
Galeria de poliedros

Neste ano 2000 foram construídos muitos poliedros nas escolas. Deixamos aqui o registo de alguns deles, sugerindo aos leitores que visitem a página web http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/galeriaA.html onde encontrarão estes a cores e muitos mais.









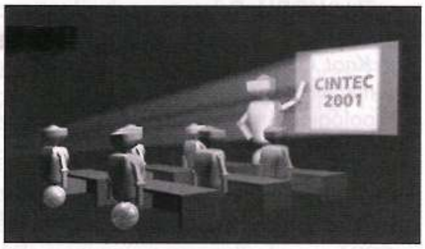
Encontros em 2001

Nesta página divulgamos alguns encontros nacionais e internacionais que se irão realizar em 2001.

AERA 2001

O encontro anual da *American Educational Research Association* vai realizar-se em Seattle, de 10 a 14 de Abril de 2001 e terá como tema *What We Know and How We Know It.*

Consulte a página do encontro em: http://www.aera.net/meeting/am2001/



CINTEC 2001

A Conferência Internacional sobre Novas Tecnologias no Ensino das Ciências vai realizar-se entre 4 e 6 de Julho de 2001 na Universidade de Aveiro. Este encontro, organizado pelas Universidades de Aveiro e Castilla-La Mancha, tem como objectivos a apresentação de modelos, ferramentas e aplicações das Novas Tecnologias no Ensino das Ciências.

Para mais informações consulte a página na Internet: http://www.mat.ua.pt/cintec

PME 25

O PME 25 é um congresso internacional organizado pelo *International Group for the Psychology of Mathematics Education* e que terá lugar entre 12 e 17 de Julho de 2001 em Utrecht, na Holanda.

Poderá obter informações sobre este encontro em: http://www.fi.ruu.nl/experimenteel/Pme25/welcome.html

CIEAEM 53

A 53ª *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseigment des mathématiques* terá lugar em Rhodes, Grécia, de 4 a 10 de Julho de 2001. O título deste encontro é *Mathematical literacy in the digital era – Research and classroom practice towards a new conception of mathematics for all.*

Mais informações poderão ser encontradas em: http://www.rhodes.aegean.gr/cieaem53

ICTMT 5

A *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* é um encontro onde serão discutidas ideias que permitam melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem utilizando as tecnologias. Vai realizar-se na Universidade de Klagenfurt, na Áustria, de 6 a 9 de Agosto de 2001.

Para mais informações sobre o encontro consulte a página da Internet: http://www2.ifi.uni-klu.ac.at

Quota de 2000

No ano de 2000 o valor da quota é de **7 500$00** para professores, 5 500$00 para estudantes(só considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 8 500$00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática -
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou Mastercard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ________________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐ VISA

MasterCard ☐ MasterCard

Validade ____________ o valor de ______________ correspondente a ______________

______________ Data __/__/__

Assinatura ________________________________

Nome: ________________________________ Sócio Nº: ________

Morada: ________________________________

Código Postal: ____________ Distrito: ____________

Telefone: ____________ E-Mail: ____________

Data de Nascimento __/__/__ Nº Contribuinte: ____________

Nº do B.I. ____________ Arquivo: ____________ Data de emissão: __/__/__

Ano em que começou a leccionar: ____________ Nível de ensino: ____________

Categoria Profissional: ____________

Escola: ________________________________

Morada: ________________________________

Telefone: ____________ E-Mail: ____________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo e-mail:apm@mail.telepac.pt.

Índice