Educação e Matemática

Nº 58

Maio/Junho de 2000

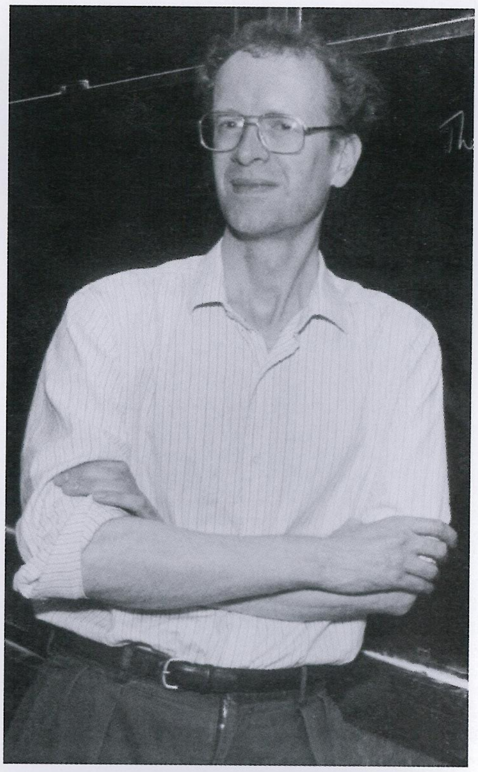
Preço: 850$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

O último teorema de Fermat

A capa consiste numa composição gráfica usando representações das superfícies tridimensionais, que são descritas implicitamente por equações do tipo $x^n+y^n=z^n$, com n par. Estas equações, como é sabido, estão associadas ao último teorema de Fermat. De acordo com esse resultado, para n>2, aquelas superfícies (com n par ou ímpar) não contêm pontos em que as três coordenadas sejam números naturais. O próprio Fermat, num comentário por ele deixado, chegou a afirmar possuir uma demonstração "simples" do seu resultado. A verdade é que o último teorema de Fermat só foi completamente demonstrado muito recentemente, em 1997, pelo matemático Andrew Wiles (na imagem ao lado).



Neste número também colaboraram

Ana Maria Boavida, Fernando Bensabat, Fernando Nunes, Isabel Paula, Joana Grilo, João Maria de Oliveira, José Maria Almeida, Luís Reis, Paula Teixeira.

Capa

A capa é da autoria de António Marques Fernandes.

Data da publicação

Este número foi publicado em Junho de 2000.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
Tel: (351) 217163690
Fax: (351) 217166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Nota

nº 58
Maio/
Junho
de 2000

Eu, de Matemática, não sei nada!

*Adelina Precatado**

Neste Ano Mundial da Matemática, se é verdade que, nas escolas, muitos professores e alunos se envolveram em actividades significativas e na divulgação da Matemática, também não é menos verdade que ao nível da comunicação social a imagem não saiu melhorada. Difundiu-se a ideia que "os portugueses se relacionam mal com a Matemática" e que o sucesso nesta disciplina depende de ajuda exterior à escola.

No que respeita aos programas de Matemática, até poderíamos dizer que se andou um pouco à frente da reforma 2001, pois temos programas ajustados, que pressupõem as ideias fundamentais agora anunciadas. Falam da construção do conhecimento a partir da experiência e de situações concretas, do uso da tecnologia, da resolução de problemas, de actividades experimentais e de modelação, de diversificação das formas de avaliação, etc... Os programas foram acompanhados e muitos professores de Matemática empenharam-se na sua execução, e, no entanto,... o que mudou? O que falhou? Qual é o problema?

O problema do ensino da Matemática é complexo, parte dele está na escola desajustada que hoje temos e que os alunos contestam – que, segundo o documento *Revisão Curricular no Ensino Secundário*, "sobrevaloriza o ensino e as aprendizagens de conteúdos estritamente académicos", apresenta "desajustamentos entre currículo e avaliação", com "programas extensos", e "ausência de ensino de natureza experimental". Mas, existem razões inerentes à própria Matemática, à sua natureza enquanto ciência e ao papel que lhe foi reservado pela sociedade.

O principal obstáculo à aprendizagem da Matemática parece-me ser a imagem que cada um dela tem e que é aceitável que tenha. Ao aceitar-se, ainda que de forma muito generalizada, que afinal esta disciplina serve "para fazer contas", e é óptima para "seleccionar", perdemo-la como ciência, trocamo-la pela "preparação para exame, ou prova global"... e não se diga que a culpa é só dos professores porque mesmo que estejam conscientes disto não conseguem fazer tudo ao mesmo tempo – motivar e possibilitar aprendizagens significativas, recuperar, contrariar as "ideias feitas", preparar para exames de selecção.

Então a questão dos programas A e B (para não falar dos Temas Actuais de Matemática ou Matemática Aplicada às Ciências Sociais que ainda não são conhecidos) são apenas parte de um problema muito mais vasto. Penso, no entanto, que as medidas para alterar esta situação terão que passar por:

- programas menos extensos e uma diversificação que não se traduza apenas num encurtamento;
- medidas "reais", em todos os ciclos, para resolver o problema do insucesso continuado em Matemática, e que não passam pelo módulo zero, este só vai servir para reforçar a imagem negativa e selectiva da disciplina;
- escolas equipadas de acordo com o previsto nos programas;
- diminuição do papel selectivo da Matemática, que me parece incompatível com o exame nacional e o consequente peso no acesso ao superior;
- aumento da margem de liberdade dos professores na interpretação do currículo adequando-o aos alunos e aos seus interesses.

Ao professor de matemática, cabe, antes de mais, debater estas questões, procurar soluções, fazer propostas, ser exigente e reivindicativo. Caso contrário estará também a contribuir para que a probabilidade, de que se continue a poder afirmar, sem constrangimentos, "eu, de matemática não sei nada!", seja quase 1.

* Escola Secundária de Camões, Lisboa

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Ana Paula Canavarro
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Composição e paginação
João Loureiro e Pedro Abrantes

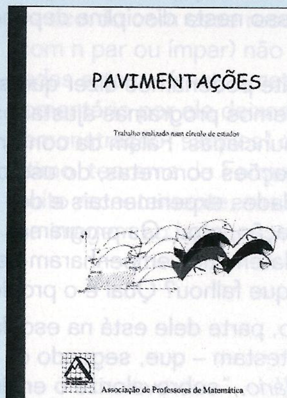
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
5200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

PUBLICAÇÕES A SAIR BREVEMENTE APM

PAVIMENTAÇÕES

APM, 2000
3 500$00



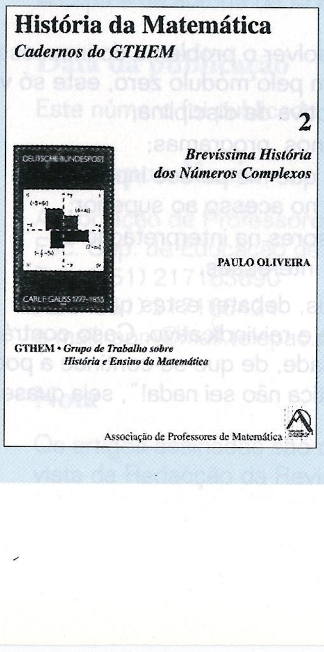
CALENDÁRIOS
Comemorativos do AMM

Tradução APM
(preço a definir)

ÚLTIMAS PUBLICAÇÕES APM

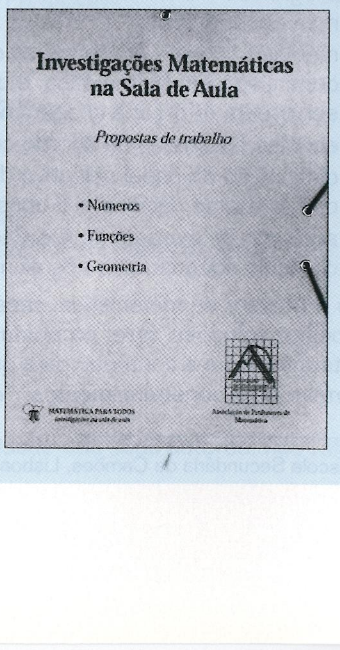
BREVÍSSIMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Paulo Oliveira, 2000
Caderno nº2 do GTHEM
600$00



INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA: PROPOSTA DE TRABALHO

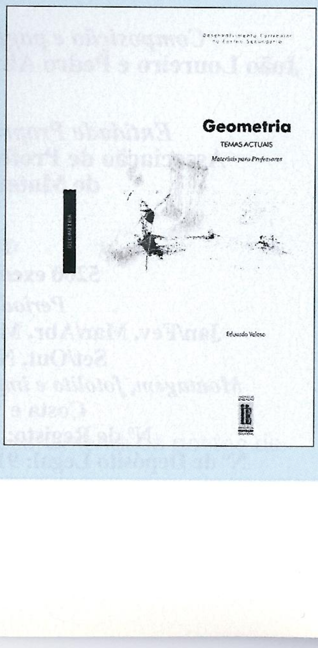
APM, 2000
1 500$00



GEOMETRIA TEMAS ACTUAIS

Reimpressão

Eduardo Veloso, 1998
4 250$00



Música e Matemática

Sendo este o Ano Mundial da Matemática, os XXIV encontros de música contemporânea da Fundação Calouste Gulbenkian, foram precisamente dedicados ao tema "Música e Matemática".

Assim, de 22 de Maio a 2 de Junho pôde assistir-se na Fundação a um total de nove concertos, seis sessões de conferências e uma sessão de cinema que, como não poderia deixar de ser, tiveram como figura central Iannis Xenakis.

O ciclo de conferências, incluído na programação e organizado pelos serviços de Música e de Ciência da Gulbenkian, contou com individualidades nacionais e internacionais ligadas à Música e à Matemática. As relações entre aquela arte e esta ciência foram objecto de particular reflexão na grande parte das conferências, cujo título aqui vos damos a conhecer:

- "Estruturas algébricas e transformações musicais" por João Pedro Oliveira (compositor), Helena Albuquerque (Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra),
- "O papel da matemática e do computador na análise e composição da música contemporânea" por Gérard Assayag (IRCAM, Paris),
- "Pitágoras e Apolo: projecções intercontemporâneas" por Paulo Almeida (Instituto Superior Técnico, Lisboa),
- " Simbologia do número como metáfora para a composição musical" por Pedro Amaral (Compositor),
- "Aspectos matemáticos na música da segunda Escola de Viena" por Carlota Simões (Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra),
- "A Matemática em composição musical: analogias e utopias, possibilidades e limites" por Cândido Lima (compositor),
- "Matemática e música contemporânea: relações naturais ou culturais" José Francisco Rodrigues (Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Lisboa).

Mas este ciclo incluiu ainda conferências sobre a vida e obra de Iannis Xenakis. De facto, falar na relação da Matemática e da Música obriga a dar destaque especial a este importante compositor contemporâneo, de origem grega que, em Atenas, cursou engenharia e adquiriu simultaneamente uma formação musical sólida. Obteve, deste modo, uma dupla cultura que lhe permitiu começar a explorar a ligação entre a Música e Matemática, desde logo, nas suas primeiras obras. Porém, tendo militado na resistência grega e combatido na guerra civil que, na altura, assolava o seu país, cedo teve que abandonar a Grécia, escolhendo a França para seu refúgio.

Em 1947, já em Paris, torna-se assistente do arquitecto Le Corbusier e entrega-se ao desafio de tentar "unificar" a arquitectura e a música. A partitura da sua obra *Metastasis*, estreada em 1955, baseada em cálculos idênticos aos de que se serviu na arquitectura, é um bom exemplo disto.

Mas Xenakis voou mais alto e reclama para si a especulação abstracta e a procura de proporções cósmicas. Espírito de invenção permanente, Xenakis ficou célebre pela criação do conceito de massas musicais, de música estocástica e música simbólica, através da utilização do cálculo de probabilidades e da teoria dos conjuntos na composição de música instrumental, electroacústica e com computador — a sua busca progressiva de uma "música audiovisual", fez dele uma figura dominante da música actual.

As relações entre a Música e a Matemática foram bem ilustradas

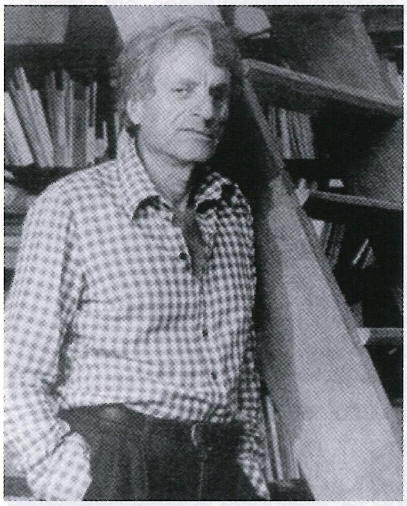


Foto: www.karadar.it/PhotoGallery/Xenakis.htm

nestes encontros pela audição de cerca de quarenta obras criadas ao longo das últimas quatro décadas: vinte e duas eram obras de Iannis, compostas entre 1962 e 1997; das outras salientam-se as obras de discípulos directos e herdeiros espirituais do compositor, nomeadamente o andaluz Guerrero, conhecido como "o Xenakis espanhol", em cujos trabalhos recorreu à aplicação especial da Teoria do Caos, em particular, a geometria dos fractais.

Hoje reconhece-se que a Matemática é o suporte, a base de todas as ciências e, como tal, como dizem Davis e Hersh, não é de crer que no mundo físico exista algo que seja não-matematizável. E, assim como o mundo físico, também o mundo social, com cada vez maior rapidez, está a ser matematizado. Xenakis, considerado um dos mais importantes compositores da segunda metade do século XX, veio evidenciar que mesmo a música se encontra menos para além da matemática do que poderia parecer.

http://www.musica.gulbenkian.pt

http://www.artnet.com.br

Fátima Alonso Guimarães
E.B. 2/3 de Telheiras

"Matemática ao Vivo" no Parque das Nações

Nos passados dias 5 e 6 de Maio, respirou-se ciência no Pavilhão Atlântico do Parque das Nações, em Lisboa.

No amplo espaço, fervilhando de actividade, alunos e professores observavam, experimentavam, viviam a Ciência, em agradáveis momentos de interacção. Na Física ou na Química, na Biologia ou na Electrónica, na Matemática ou... em qualquer outra área, era possível encontrar projectos interessantes. No entanto, havia uma área que merecia particular destaque: a Matemática. Com efeito, neste evento destinado à divulgação do trabalho realizado pelos projectos Ciência Viva em curso, a organização não quis deixar de lhe reservar um espaço especial, aliando-se assim às comemorações do Ano Mundial da Matemática.

No espaço "Matemática ao Vivo", para além de observar os diversos materiais expostos, era possível efectuar experiências e enfrentar vários desafios, bem como assistir a sessões de tipos diversificados.

Dar uma ideia do que foi este 4° Forum Ciência Viva, não é fácil, tal era a variedade de projectos apresentados. De entre tudo o que vivi, dizer o que mais me sensibilizou, pode parecer difícil mas, muito pelo contrário, não o é. Aquilo que recordo de imediato, quando penso nestes dias, são os alunos! Fiquei completamente cativada pela simpatia com que queriam falar do seu projecto, das experiências que tinham vivido nas suas escolas. Empolguei-me com o genuíno entusiasmo com que se empenhavam nas diversas actividades e experiências que tinham à sua disposição. E surpreendi-me com o interesse que alunos muito novos conseguiam encontrar em actividades que não tinham sido propriamente pensadas para o seu nível etário.

Entrara há pouco no pavilhão quando três alunos do 7° ano da Escola E. B. 2, 3 Luís de Camões me perguntaram se não queria conhecer o trabalho deles. E falaram entusiasticamente, de brilho nos olhos, entre-


Foto: Helena Rocha

ajudando-se uns aos outros para não falhar nenhuma informação importante. Passaram-me depois aos seus colegas do 9° ano que, com o ar calmo e seguro de quem sabe perfeitamente do que está a falar, não hesitaram em mostrar-me um pouco do que tinham feito nas aulas de Matemática. Mais reservados, preferiam exibir o à-vontade com que utilizavam o programa Geometer's Sketchpad a conversar. Mostraram-me então como, a partir de frisos, estudaram as transformações geométricas e como, com base numa abordagem de natureza investigativa, foram explorando a "geometria da circunferência".

Numa outra zona do pavilhão, algumas alunas da Escola Secundária D. Luisa de Gusmão dispunham-se a descobrir connosco "os mistérios do universo". Junto à exposição do material construído e/ou utilizado nas aulas, uma aluna, um pouco intimidada por saber que eu era professora de Matemática,

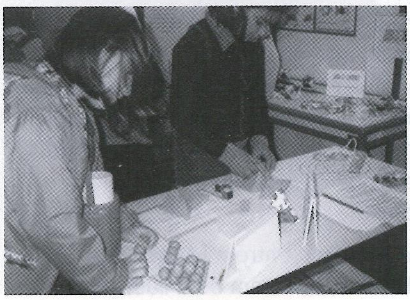


Foto: Helena Rocha

oferecia-me o material necessário e prontificava-se a ajudar-me a construir o meu próprio quadrante, bem como a explicar-me como utilizá-lo.

Entretanto, mesmo ao lado, duas colegas suas ajudavam um grupo de alunos de outra escola que, utilizando sensores associados a uma calculadora gráfica e respectivo *viewscreen*, efectuavam algumas experiências. A atenção com que eram ouvidas, enquanto transmitiam informações relativas à experiência, e o interesse com que eram questionadas, ilustram bem a forma como estes alunos estão habituados a viver a Matemática: com espírito crítico, questionando, reflectindo e experimentando.

Mas não se pense que os alunos eram os únicos a envolver-se nas inúmeras experiências ao dispor dos visitantes deste espaço. Também os professores não resistiam a um bom desafio. E tanto os quebra-cabeças e *puzzles* tridimensionais, expostos pelo Núcleo da APM de Almada Seixal sob o lema "Pensa, experimenta, joga...", como os módulos interactivos disponibilizados pela Atractor, constituíam uma óptima fonte de actividades desafiadoras.

No centro do espaço destinado à Matemática, no palco que aí se encontrava instalado, situava-se outro foco de interesse. Por este palco foram passando sessões de tipos e conteúdos diversificados. De comunicações a sessões de grande interacção com a assistência; conduzidas por alunos, por professores ou por especialistas convidados; incidindo sobre *origami*, instrumentos náuticos, dobragens, experiências no laboratório de Matemática... e até sobre magia! Houve de tudo um pouco. E se as características das sessões eram bastante variadas, as da assistência não o eram menos.

Foto: Helena Rocha

O grande número de professores e de alunos de todas as idades que pretendiam assistir a cada sessão, tornava claramente insuficiente as cerca de cinquenta cadeiras colocadas ao seu dispor. Mas, de pé ou sentado, ninguém resistia aos desafios que iam sendo colocados. Com efeito, quando a certa altura da sessão do Eduardo Veloso levantei os olhos da folha em que, por dobragens, construíra um triângulo equilátero, todos os que não o tinham já feito estavam, individualmente ou em grupo, dobrando, desdobrando, pensando, tentando de novo. E nem mesmo o crescente grau de dificuldade que nos levou até ao octógono, provocou desistências... embora tenha dado origem a alguns octógonos "pouco" equiláteros!

Muito mais haveria para dizer sobre tudo o que aconteceu neste forum e sobre todos os que estiveram presentes. Foram realmente dois dias especiais. Nas palavras de um dos muitos alunos que apresentavam os projectos das suas escolas e que, abertamente, expressavam o seu agrado pela experiência que viveram este ano, nas aulas de Matemática: "Aquilo de que mais gostei?! Isto aqui! É... espectacular!!"

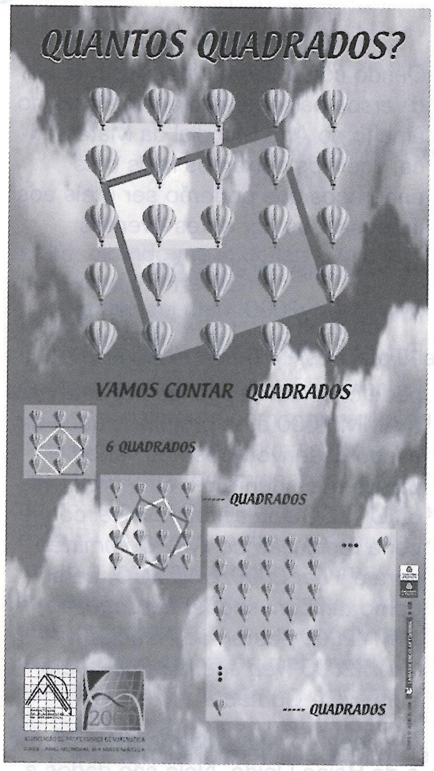
Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

APM e o AMM

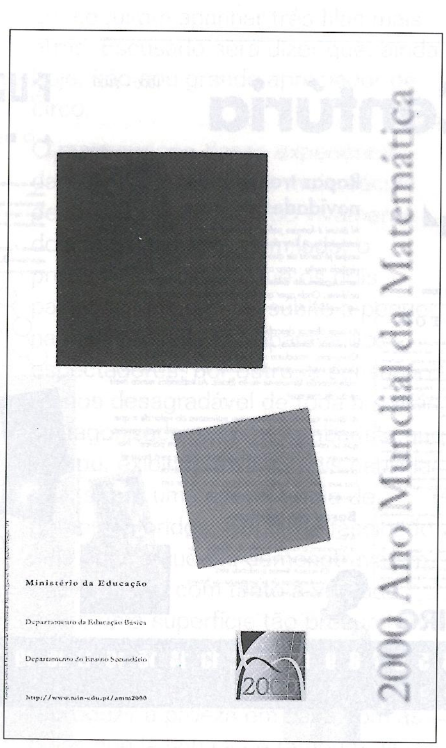
O cartaz comemorativo do AMM, elaborado pelo Grupo de Trabalho do Centro de Recursos, já se encontra disponível para todos os sócios. Pode ser solicitado um exemplar, junto do núcleo mais próximo da sua área de residência ou da sede.

O cartaz já foi enviado a todas escolas do 2º e 3º ciclos e secundárias. Para as escolas do 1º ciclo e das Regiões Autónomas, seguiu via Centro de Área Educativa, podendo chegar um pouco mais tarde. Este é acompanhado de uma folha de exploração, podendo a tarefa nele contida ser explorada por todos os níveis de ensino.

Informamos ainda que, quem quiser, pode ver o cartaz e a respectiva folha de exploração, na internet, na página do Centro de Recursos.



O ME e o AMM



O Ministério da Educação tem uma página na Internet http://www.min-edu.pt/amm2000/ dedicada ao Ano Mundial da Matemática. Aí pode encontrar informações sobre as iniciativas promovidas pelo Ministério no âmbito do AMM junto das escolas. Destacamos, em particular, a realização das seguintes actividades temáticas: Inovação Curricular em Matemática, Março, DRE Lisboa; Matemática e Arte, Abril, DRE Alentejo; Matemática e Sociedade, Maio, DRE Norte; A Matemática e as Crianças, Outubro, DRE Algarve; Matemática e Tecnologia, Novembro, DRE Centro.

Outra das iniciativas do ME foi o lançamento de um cartaz, apresentado pelos Departamentos da Educação Básica e do Ensino Secundário. Segundo pode lêr-se na página referida, o cartaz tem por base a pintura Quadrado negro e quadrado vermelho, de Malevich, cujo suporte tem a forma de um rectângulo de ouro.

O AMM na Internet

Dando conta das realizações que em diversos países estão a acontecer no âmbito do Ano Mundial da Matemática, aqui vos deixamos mais dois endereços que poderão ser úteis aos interessados por estes eventos:

www.mathsyear2000.org.;

http://wmy2000.math.jussieu.fr/.

Em http://wmy2000.math.jussieu.fr pode consultar a agenda prevista para o AMM 2000 e os projectos que vêm sendo desenvolvidos nos vários países que aderiram a esta iniciativa da UNESCO. É ainda possível conhecer a resolução *do IMU Committee* para o *Year 2000/UNESCO*, bem como também aceder ao *Logo;* ao *WMY2000 poster;* ao *National WMY2000 web site;* ao *Publishers servers;* e *Contacts*.

O endereço www.mathsyear2000.org é do Reino Unido. Nele são dados a conhecer projectos e outros eventos ingleses (acontecimentos, festas e actividades) relacionados com o ano mundial da Matemática. Aí há, igualmente, a possibilidade de aceder a jogos de vários tipos, como, por exemplo, jogos de estratégia, de tabuleiro e com números. Relacionado ainda com os números, existe, neste *site*, uma página própria, a *Numberland*, onde para além de jogos encontramos curiosidades e passatempos interessantíssimos.

Os exploradores deste *site* têm ainda a possibilidade de aceder a um dicionário de Matemática, e visitar um "museu" com quatro galerias: a galeria da aritmética; a galeria das aplicações da matemática; a da geometria; e ainda a dos instrumentos matemáticos do mundo. Nestas galerias é possível observar e recolher informações sobre instrumentos matemáticos usados em diversas culturas e imagens de instrumentos da matemática usados ao longo dos tempos, quer da geometria quer em outras áreas da Matemática. Podem ainda ter acesso a imagens que ilustram as grandes aplicações da matemática em áreas como a astronomia, a navegação, a guerra e outras. Este *site* possui ainda uma página TOP JOBS onde se ilustra, com algumas histórias de pessoas vulgares ou de celebridades (*pop stars* e outras), o modo como as suas carreiras foram afectadas e influenciadas pela matemática. Para quem quiser explorar e aprofundar outros aspectos relacionados com este assunto dão-se ainda a conhecer, neste *site*, diversos *links* importantes.

São, pois, dois endereços a fixar e a visitar agora que, com a chegada do Verão, vai abrandar o ritmo de trabalho dos professores nas escolas.

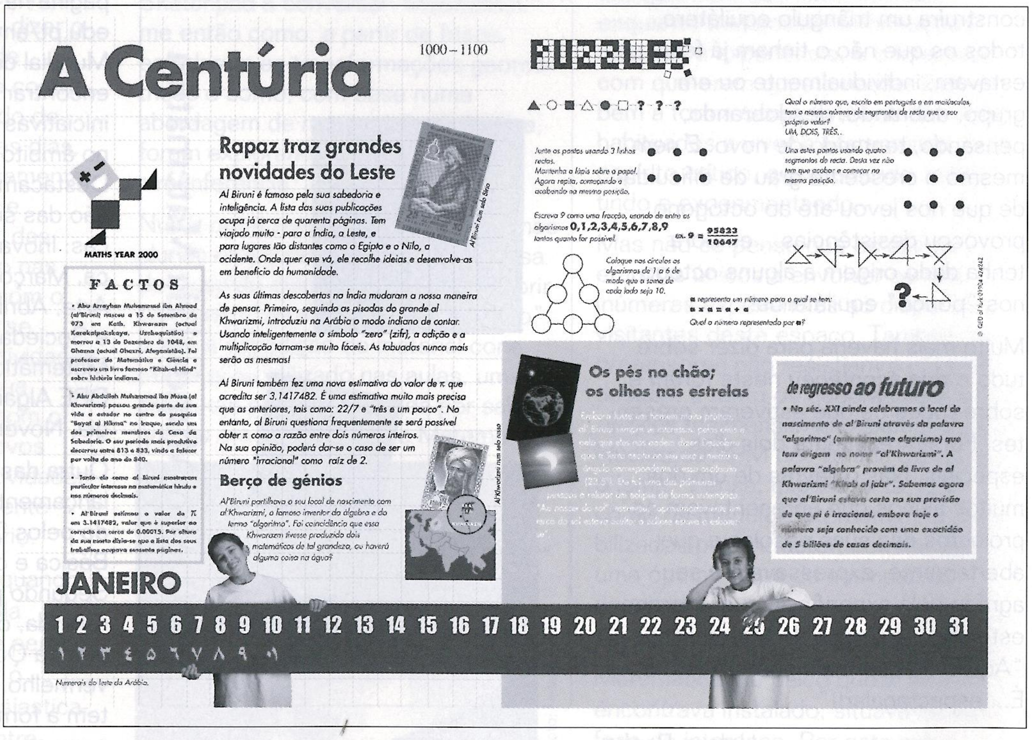
Fátima Alonso Guimarães
E.B. 2/3 de Telheiras

Calendário comemorativo do AMM

Integrada nas iniciativas desenvolvidas para comemorar o Ano Mundial da Matemática, a APM traduziu um calendário, composto por doze *posters* A3, edição da QED. Apesar de se tratar de um calendário a sua actualidade mantém-se para além do ano 2000.

Cada um dos *posters* representa um século (Centuria) com referências históricas da época respectiva, bem como propostas de actividades e desafios para os alunos.

Em breve será colocado à venda.



Z, curvas perigosas

Fernando Bensabat

Meio século decorrido, o autor recorda ainda a ida ao Coliseu e o fascínio que sentiu pela perícia que um malabarista demonstrou ao equilibrar-se com tanto à vontade. E, à volta das curvas perigosas, mais tarde veio a perceber as razões para a utilização de bolas tão grandes, pelos malabaristas, e outras coisas mais.

No dia em que fiz três anos, a minha mãe e a minha tia Maria Octávia decidiram levar-me ao Coliseu para assistir a um espectáculo de circo. Triste ideia! A multidão compacta que se ia acotovelando contra nós, o barulho — que na altura me pareceu ensurdecedor — e o facto de me ter perdido delas duas ou três vezes deixaram-me num estado miserável. O pânico que comecei a sentir atingiu o apogeu quando, subitamente, os palhaços que estavam a actuar resolveram saltar para a primeira fila e interpelar directamente as crianças que aí se encontravam — entre as quais eu próprio, absolutamente esgazeado e tão encolhido quanto possível entre os joelhos maternos. Nesse momento, perante a atitude ameaçadora daqueles monstros multicolores, fugi de gatas por entre pernas e cestos de merenda, e só me conseguiram apanhar três filas mais atrás. Escusado será dizer que, ainda hoje, não sou grande apreciador de circo.

O mais curioso dessa experiência dantesca é que, quase meio século decorrido, ainda recordo vivamente dois momentos: por um lado, o preciso instante em que os dois palhaços saltaram de súbito a pequena vedação que os separava dos espectadores; por outro, a sensação menos desagradável de toda a *soirée*, protagonizada por um malabarista que actuou, exibindo as habituais habilidades, sobre uma enorme bola de gomos coloridos. Senti-me fascinado pela perícia que ele demonstrava em equilibrar-se, com tanto à-vontade, sobre uma superfície tão presumivelmente incómoda. Lembro-me ainda de ter tentado, alguns dias depois, reproduzir a proeza em casa com as bolas que lá tinha — e também da inesperada profusão de *galos* que à noite, quando me ia deitar, a minha mãe ia encontrando.

Percebi mais tarde que a área da superfície útil (a que o malabarista usa como superfície de apoio), aumenta proporcionalmente com o tamanho da bola ou, de uma forma mais exacta, é directamente proporcional ao quadrado do raio (a área de toda a superfície é $4\pi r^2$), o que quer dizer que, aumentando o raio para o dobro, a área aumenta quatro vezes. Todavia, só mais recentemente me apercebi de que existe outra razão matemática para a utilização, pelos equilibristas, de bolas tão grandes quanto possível — é que a curvatura da sua superfície varia igualmente com o raio, mas desta vez numa razão inversamente proporcional ao seu quadrado.

1. A circunferência osculadora

Todos nós sabemos, por intuição e por experiência empírica directa, que é bastante mais fácil fazer imobilizar um berlinde sobre um tampo horizontal de uma mesa do que sobre a superfície de uma bola de praia. Justificamos este facto com o argumento de que a superfície da bola "não é direita", o que poderia ser traduzido, de forma mais precisa, pela afirmação de que ela "é curva". Também o ecrã de uma velha televisão é encurvado e, no entanto, temos a noção imediata de que, entre a curvatura da bola de praia e a do ecrã de televisão, existem duas diferenças imediatamente perceptíveis:

a) A superfície da bola é igualmente encurvada em todos os seus pontos — assumindo que é de facto esférica — o que quer dizer que é absolutamente indiferente escolher este ou aquele ponto para aí colocarmos o berlinde, pois o grau de encurvamento é o mesmo. Todavia, o ecrã de televisão apresenta diferentes encurvamentos ao longo da sua superfície, o que nos poderia sugerir que a habilidade que nos propúnhamos fazer seria mais fácil de executar num ponto do que noutro. Podemos expressar este facto dizendo que o grau de curvatura da superfície da bola é constante em todos os seus pontos, ao passo que a do ecrã varia de ponto para ponto;

b) Se a curvatura do ecrã é mais acentuada nuns pontos do que noutros, então deverá ser possível definir um critério que nos permita medi-la e comparar assim os valores pontuais obtidos.

Com efeito, o grau de encurvamento de uma superfície num dos seus pontos depende da curvatura das linhas que podemos desenhar nessa superfície passando pelo ponto considerado. Ora, tal como constatámos em relação às duas superfícies atrás referidas, também as linhas apresentam características semelhantes no tocante ao seu grau de encurvamento: este pode ser constante, ou não, e é susceptível de ser medido mediante um critério apropriado.

Comecemos por considerar dois casos de linhas especiais — a linha recta e a circunferência. Em relação à recta, sabemos intuitivamente tratar-se de uma linha direita (os ingleses chamam-lhe *straight line* e os franceses *droite*). Numa primeira análise, isto sugere que uma linha recta não tem qualquer encurvamento, seja qual for o ponto nela escolhido, o que poderá traduzir-se pela afirmação de que a sua curvatura *é nula*. Quanto à circunferência, analogamente ao que tínhamos verificado a propósito da bola de praia, constatamos que o seu grau de encurvamento *é constante*, independentemente do ponto que nela consideremos. Todavia, percebemos de imediato que essa curvatura constante não tem o mesmo valor para todas as circunferências. Na realidade, à medida que aumentamos o seu raio, a curva começa a aproximar-se de uma linha recta, o que se pode verificar fixando um dos seus pontos e fazendo crescer o raio — na vizinhança do ponto escolhido, o arco da curva começa a confundir-se com a recta que aí lhe é tangente (figura 1).

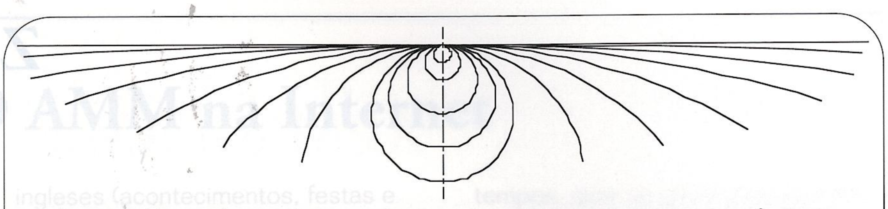


figura 1- Na vizinhança do ponto fixado, e à medida que o raio da circunferência aumenta, o arco da curva começa a confundir-se com a recta que aí lhe é tangente

Este fenómeno leva-nos a concluir que *a curvatura da circunferência diminui à medida que o seu raio aumenta*, o que poderá constituir um critério razoável para a definir. Uma vez que se trata de duas grandezas inversamente proporcionais (o encurvamento decresce à medida que o raio cresce, e vice-versa), poderemos medir uma em função da outra, e diremos então que a *curvatura de uma circunferência é metricamente igual ao inverso do comprimento do seu raio*:

$$(1) \quad k = \frac{1}{R}$$

Esta definição revela-se consistente com a anterior constatação, isto é, com o facto da linha recta ter uma curvatura nula. Com efeito, se um arco de circunferência se aproxima da tangente à medida que o raio vai crescendo, poderemos supor que as duas coincidirão numa situação limite, ou seja, quando *o raio da circunferência for infinitamente grande*. Ora se na expressão (1) fizermos tender R para ∞, o valor de k tenderá obviamente para 0, o que corresponde ao que foi atrás intuído.

Será curioso levar esta definição às suas últimas consequências. Em primeiro lugar, somos obrigados a aceitar, por força do que já foi dito, que *uma recta é uma circunferência de raio infinitamente grande*, ou, para os mais tortuosos, que uma circunferência é uma recta de curvatura constante não nula. Este inter-relacionamento entre as duas entidades estabelece uma ponte interessante entre a geometria euclidiana e a geometria riemanniana ou *geometria elíptica*. A geometria de Euclides pode assim ser encarada como um caso limite da geometria de Riemann, sendo esta mais geral.

O segundo aspecto que merece ser realçado prende-se com a possibilidade de adoptarmos o sentido de variação oposto ao que temos vindo a considerar, isto é: o que é que acontece quando fazemos *diminuir* o raio da circunferência? Como podemos facilmente deduzir da expressão (1), quando R tender para 0, k irá crescer e tender para ∞. Contudo, e no limite em que R=0, a circunferência reduzir-se-á a *um único ponto, coincidente com o seu próprio centro*, o que sugere que o ponto *é a única entidade geométrica cuja curvatura é infinitamente grande* (um buraco negro?).

Assentemos, então, no facto de que, qualquer que seja a curva considerada, a recta que lhe é tangente num dos seus pontos se confunde, na vizinhança do ponto de tangência, com a própria curva. Isto quer dizer que a relação entre uma curva qualquer e a sua tangente num dado ponto é exactamente análoga à que se verifica quando a curva é uma circunferência, o que nos sugere um processo de determinação da curvatura de uma *linha qualquer* em cada um dos seus pontos.

Suponhamos então uma curva qualquer e a recta tangente num dos seus pontos previamente fixado, *P*. É possível fazer passar por esse ponto um número infinito de circunferências tangentes à recta em questão. Todavia, e embora tenham todas em comum, com a curva inicial, o ponto fixado, nem todas se ajustam de igual modo ao seu perfil, isto é, haverá certamente uma que é a *que melhor se ajusta à curva, em P e na sua vizinhança*, circunferência essa a que chamaremos circunferência osculadora, chamando a *P*, subsequentemente, o ponto de beijamento. Como determinar o centro e o raio da circunferência osculadora à curva em *P*?

Antes de nos lançarmos em aventuras, comecemos por definir alguns dos conceitos aqui implícitos. O *centro de curvatura de uma linha num* *ponto P* é o centro da circunferência osculadora que passa por *P*, o seu *raio de curvatura* nesse ponto é o raio dessa mesma circunferência e a *curvatura* é metricamente igual ao inverso do comprimento daquele raio. Ora a circunferência osculadora, sendo concordante com a curva dada no ponto considerado, admite, nesse ponto, uma tangente que também o é àquela e, subsequentemente, ambas admitem uma recta normal comum. Como, na circunferência, a recta normal passa sempre pelo centro, o centro de curvatura da curva inicial em *P* está contido na normal comum.

Huygens foi um cientista de renome internacional. Entre os diversos campos a que se dedicou, a relojoaria proporcionou-lhe uma das suas descobertas matemáticas mais interessantes sobre curvas evolutas e involutas. Oiçamos Boyer e Merzbach (1989):

> Huygens (...) fez uma descoberta de importante significado matemático — a involuta de uma cicloide é uma cicloide semelhante e, inversamente, a evoluta de uma cicloide também é uma cicloide semelhante. Este teorema, e outros resultados respeitantes a involutas e a evolutas de outras curvas, foram demonstrados por Huygens de uma forma essencialmente análoga à que Arquimedes ou Fermat utilizariam: escolhendo pontos vizinhos e fazendo tender o intervalo para zero. Descartes e Fermat utilizaram esta técnica para a determinação de normais e tangentes a uma curva e agora Huygens aplicou-o para achar o que hoje chamamos *raio de curvatura de uma curva plana*. Se em pontos vizinhos *P* e *Q* de uma curva (figura 2) determinarmos as normais e acharmos o seu ponto de intersecção *I*, então, à medida que *Q* se aproxima de *P* sobre a curva o ponto variável *I* tende para um ponto fixo *O*, chamado centro de curvatura da curva em *P*, e a distância *OP* é o raio de curvatura.

Invoquemos então os espíritos de Descartes e de Fermat e comecemos por considerar um caso simples.

Seja a parábola dada pela expressão $f(x) = ax^2$ e *P* o seu vértice, situado na origem. Para determinarmos a curvatura da linha em *P*, consideremos um

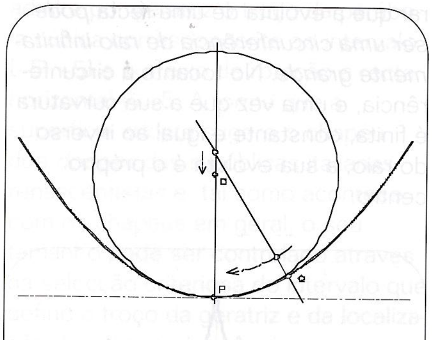


figura 2 - À medida que *Q* se aproxima de *P* sobre a curva, o ponto variável *I* tende para um ponto fixo *O*, chamado centro de curvatura da curva em *P*, e a distância *OP* é o raio de curvatura.

segundo ponto *Q* na vizinhança do anterior e determinemos a normal à curva nesse ponto. Como sabemos, o declive da recta tangente em qualquer ponto de uma curva é dado pelo valor que a primeira derivada da função tem nesse ponto e o declive da recta normal, que é perpendicular à tangente, é o inverso e o simétrico daquele. Assim, se as coordenadas de *Q* forem $[x_1, f(x_1)]$, teremos:

Declive da tangente: $m = f'(x_1)$

Declive da normal: $m_1 = \dfrac{-1}{f'(x_1)}$

Deste modo, a expressão que define a normal em *Q* $[x_1, f(x_1)]$ será:

$$y - f(x_1) = \frac{-1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

mas como a normal em *P*, no caso vertente, é o próprio eixo das ordenadas, o que pretendemos saber é *qual o valor da ordenada na origem da normal quando x_1 tender para zero*, isto é

$$(2)\quad y = \lim_{x_1 \to 0}\left[f(x_1) + \frac{x_1}{f'(x_1)}\right]$$

Tratando-se da curva atrás referida, em que $f(x)=ax^2$ e $f'(x)=2ax$, o limite dado pela expressão (2) toma o valor $1/2a$ quando x_1 tende para zero, o que quer dizer que, em relação ao vértice da parábola, o centro de curvatura é o ponto *O* (0; 1/2a), o raio de curvatura mede 1/2a e a curvatura na origem é igual a 2a. Esta situação é porventura a mais simples, uma vez que nos limitámos a determinar a variação da ordenada na origem da recta normal à curva em *Q* quando este tende para *P*. Se seleccionarmos outro ponto *A* da parábola $[x_A, f(x_A)]$ e pretendermos achar aí a curvatura da linha, teremos de recorrer ao mesmo método para determinar a variação das coordenadas do ponto de intersecção da normal em x_A com as normais em pontos situados na sua vizinhança, o que dará um pouco mais de trabalho.

Realcemos alguns factos curiosos acerca da curvatura de algumas linhas notáveis.

a) Em relação à parábola considerada, poderemos verificar que a curvatura máxima corresponde ao ponto situado precisamente no seu vértice. À medida que *x* tender para ∞, o ramo da curva vai apresentando um encurvamento cada vez menor que tende para zero, o que poderá ser interpretado como correspondendo à rectificação da linha que, no limite, se confundirá inteiramente com a sua recta tangente;

b) Sucede algo semelhante com as outras curvas cónicas. A hipérbole apresenta a sua curvatura máxima nos extremos do eixo real, chamado *eixo transverso*, e os dois ramos da curva vão tendendo para as respectivas tangentes no infinito, isto é, para as suas duas *assímptotas*; na elipse, existem dois limites entre os quais se distribuem os valores da curvatura — o superior, correspondendo à curvatura máxima, que se situa nos dois extremos do eixo maior da curva, e o inferior, correspondendo à curvatura mínima, que se situa nos dois extremos do seu eixo menor;

c) Generalizando, poderemos considerar que os pontos mais significativos no tocante à curvatura de uma linha estão relacionados com os seus *pontos singulares*, isto é, máximos e mínimos relativos, bem como eventuais pontos de inflexão.

2. Curvas evolutas e superfícies de revolução geradas por tais curvas

Vejamos agora a questão *com outros olhos*. Como se observou no ponto 1, a curvatura da parábola varia de ponto para ponto, o que significa que os centros de curvatura relativos a pontos diferentes da curva são também eles diferentes. Isto quer dizer que os centros de curvatura se irão distribuir de uma forma *directamente relacionada com a curva em análise*, dando por sua vez origem a um lugar geométrico a que se dá o nome de *linha evoluta da curva considerada*, sendo esta última designada por *involuta*. A curva evoluta tem uma particularidade interessante: dado que os seus pontos são determinados a partir das normais traçadas à curva inicial, estas são-lhe tangentes. Vejamos então qual a *fisionomia* da evoluta da parábola.

Achando as *equações paramétricas* da evoluta da curva considerada, é possível representá-la graficamente (figura 3).

Antes de procurarmos as evolutas de outras curvas cónicas, vejamos o panorama das três entidades que considerámos *mais simples* no início destas considerações: o ponto, a recta e a circunferência. Quais serão as suas evolutas? Em relação ao ponto que tem — recorde-se — um grau de encurvamento infinitamente grande, o raio de curvatura deverá ser *nulo* , o que implica que a evoluta de um ponto é *outro ponto coincidente com o primeiro*. Relativamente à recta, o caso fia mais fino. Dado que a sua curvatura é nula, os pontos da evoluta situam-se a uma distância infinitamente grande da recta considerada — mas em que sentido? Para "cima" da recta ou para "baixo"? Ambas as possibilidades se afiguram exequíveis, o que nos leva a considerar que a evoluta de uma recta *pode ser uma circunferência de raio infinitamente grande*. No tocante à circunferência, e uma vez que a sua curvatura é finita, constante e igual ao inverso do raio, a sua evoluta é o próprio centro.

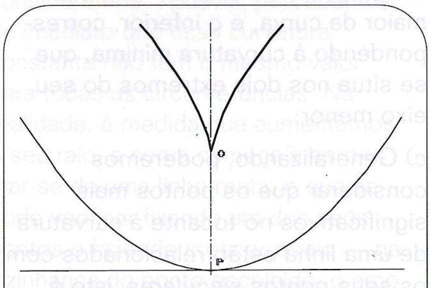


figura 3 - Curva evoluta da parábola f (x) = ax²

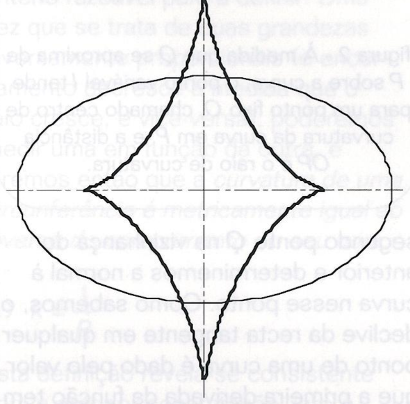


figura 4 - Curva evoluta da elipse

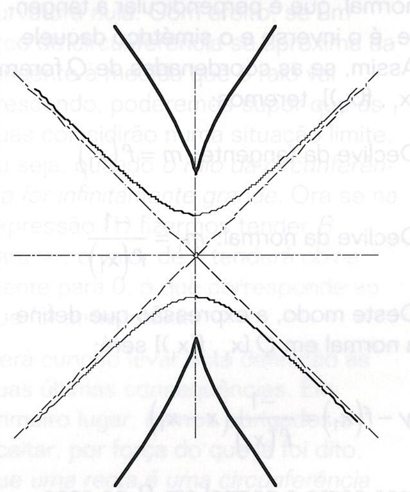


figura 5 - Curva evoluta da hipérbole

As figuras 4 e 5 são dois instantâneos das evolutas da elipse e da hipérbole. No primeiro caso, a curva resultante é muito semelhante à astroide, embora não obedeça às condições que a definem.

As curvas que acabámos de considerar, conhecidas por curvas cónicas devido ao facto de serem resultantes da intersecção de uma superfície cónica com diferentes planos secantes, são também utilizadas como

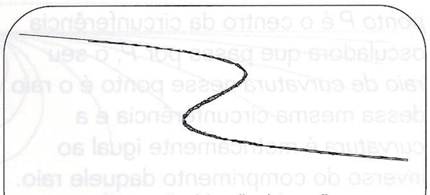


figura 6 - Um "rabisco"

curvas geratrizes de determinadas superfícies de revolução (uma superfície de revolução é a superfície originada pela rotação de uma linha em torno de um eixo com ela complanar, perfazendo um ângulo giro). Estão, neste caso, a esfera e a pseudo-esfera, o toro, o cone, o cilindro e os elipsóide, parabolóide e hiperbolóide de revolução – para além das que nos apetecer, como é óbvio.

Se desenharmos um rabisco num papel e o fizermos rodar em torno de um eixo apropriado, obteremos certamente um *rabiscóide*, e se o *rabisco* representar um gato, teremos um *gatóide*, superfície de revolução tão legítima quanto outra qualquer. Façamos uma rápida experiência (ver figura 6).

Visto a olho nu, o *rabisco* anterior é exactamente isso — um *rabisco* vagamente aparentado com nada. Contudo, se nos armarmos de alguma paciência e o orientarmos devidamente, procedendo à sua descrição analítica, depressa constataremos que não se trata de um *rabisco* qualquer — muito pelo contrário, é um membro da respeitabilíssima família das *parábolas cúbicas*.

No caso vertente, o falso *rabisco* é a parábola $f(x)=(x^3-12x)/6$ (ver figura 7).

De forte personalidade, admite uma raiz tripla, $x=-\sqrt{12} \vee x=0 \vee x=\sqrt{12}$, máximo e mínimo relativos (respectivamente x=-2 e x=+2) e ainda um ponto de inflexão na origem. Tal como qualquer curva decente, tem curva evoluta mas — e é aqui que a sua genealogia distinta mais se faz notar — esta última admite uma assímptota oblíqua (y=x/2), o que provoca alguns embaraços na determinação da sua curvatura.

Ora como já tínhamos notado a propósito da parábola *plebeia* do segundo grau, o menor raio de curvatura — e, logo, o maior grau de encurvamento —, corresponde aos vértices da curva, na circunstância os máximo e mínimo relativos; depois, e à medida que *x* tende para infinito,

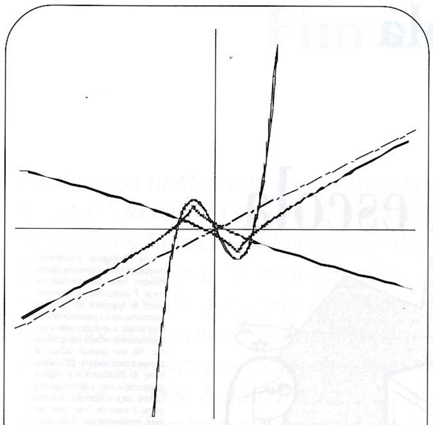


figura 7 - O *rabisco* $f(x) = (x^3-12x)/6$ e a sua curva evoluta.

quer pela esquerda, quer pela direita, o ramo da curva vai-se *rectificando*, aproximando-se consequentemente da recta tangente. O problema reside na vizinhança do ponto de inflexão (x=0), já que o centro de curvatura se situa à direita ou à esquerda, consoante nos aproximamos da origem por um ou pelo outro lado. Assim, quando x tende para 0^+, o centro de curvatura tende para $+\infty$ e quando x tende para 0^-, o centro de curvatura desloca-se para $-\infty$. Isto leva-nos a concluir que o ponto de inflexão é um ponto de *curvatura dupla* pois, embora o valor desta seja nulo em ambos os casos, na sua vizinhança admite centros de curvatura de *sinal contrário*.

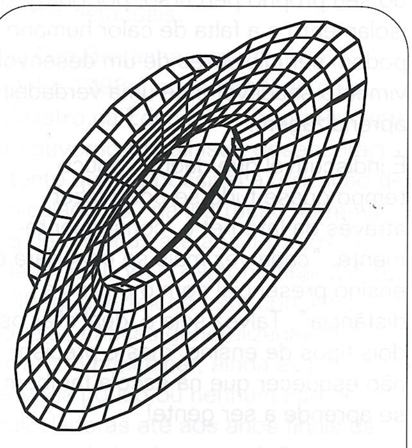


figura 8 - O "rabiscóide", gerado pela parábola cúbica $f(x)=(x^3-12x)/6$, e que poderemos baptizar com o nome de *chapéu dos dodges*.

Para finalizar esta visita ao *rabisco*, e dado que ele surgiu a propósito das superfícies de revolução, insere-se, na figura 8, o *retrato* da superfície que admite por geratriz o troço da parábola cúbica correspondente ao intervalo [−5; +5] e por eixo de rotação a recta horizontal y=−5. A forma que a superfície adopta sugere o chapéu dos *dodges* das repúblicas italianas renascentistas e, tal como acontece com os chapéus em geral, o seu tamanho pode ser controlado através da selecção criteriosa do intervalo que define o troço da geratriz e da localização do próprio eixo. Assim, para um *dodge* muito cabeçudo, poderíamos recorrer ao intervalo [−10; +10] e ao eixo y=−10, ao passo que, para uma princesinha loira de 7 anos, o intervalo [−2; +2] e o eixo y=−2 seria a medida ideal. Finalmente, se se pretender um chapéu aberto no cimo da cabeça — para ser usado como penteador, por exemplo —, bastaria provocar um certo desfasamento entre o intervalo escolhido e o eixo adoptado. Se o intervalo fosse [−5; +5] e o eixo y=−7 obter-se-ia uma abertura circular com 4 de diâmetro, perfeitamente indicada para o fim em questão.

Todavia, as superfícies mais clássicas chamadas *superfícies geométricas de revolução*, para além de terem um estatuto clássico universalmente reconhecido, são as que de facto dão origem a grande parte dos objectos que utilizamos no nosso quotidiano, desde as latas de salsichas ao funil doméstico, passando pelas antenas parabólicas. Ora se é possível gerar uma superfície de revolução fazendo rodar uma linha em torno de um eixo apropriado, então também é possível submeter ao mesmo processo a correspondente *linha evoluta*, o que, naturalmente, irá dar origem a uma segunda superfície de revolução. A título de curiosidade, as figuras 9, 10 e 11 mostram o retrato de família de algumas superfícies de revolução e das superfícies obtidas a partir das evolutas das suas curvas geratrizes.

Referências bibliográficas

Boyer,C. e Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. Singapore: John Wiley & Sons, p. 419.

Fernando Bensabat

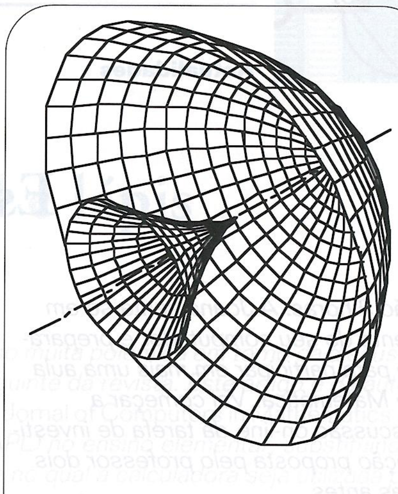


figura 9 - O parabolóide de revolução e a superfície gerada pela evoluta da parábola.

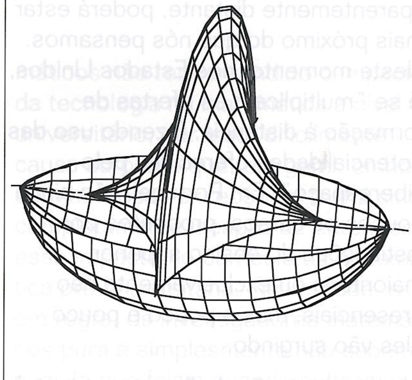


figura 10 - Um elipsóide de revolução e a superfície gerada pela evoluta da elipse. Para a sua mais fácil identificação, foram ambas seccionadas por um plano axial representadas apenas a metade inferior do elipsóide e a metade superior da outra superfície.

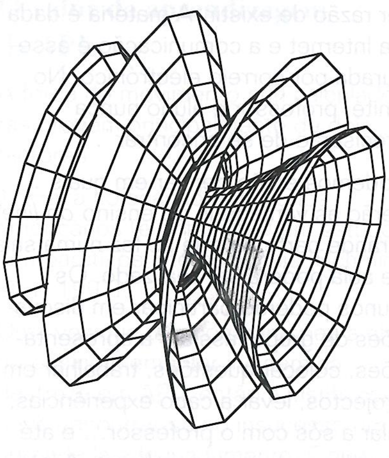


figura 11 - O hiperbolóide de revolução de uma folha e a superfície gerada pela evoluta da hipérbole.

Estudar sem ir à escola

São 9 horas. A Joana senta-se em frente do seu computador e prepara-se para participar em mais uma aula de Matemática. Vai começar a discussão on-line da tarefa de investigação proposta pelo professor dois dias antes…

Este poderia ser o início de uma história que retratasse um dia de trabalho de uma aluna algures no futuro. No entanto, esse futuro, aparentemente distante, poderá estar mais próximo do que nós pensamos. Neste momento, nos Estados Unidos, já se "multiplicam as ofertas de formação à distância, fazendo uso das potencialidades oferecidas pelo ciberespaço". Em Portugal, são ainda poucos os cursos, propostos por instituições do ensino superior, maioritária ou exclusivamente não presenciais, mas a pouco e pouco eles vão surgindo.

Mas se a criação de "cursos virtuais" parece estar a ter lugar, quanto tempo faltará para que esta nova modalidade de ensino se estenda às nossas escolas básicas e secundárias? Quando tal acontecer teremos um cenário igual ao apresentado no início desta notícia: "A sala de aula deixa de ter razão de existir. A matéria é dada via Internet e a comunicação é assegurada por correio electrónico. No limite, professor e aluno nunca precisarão de se encontrar".

Podemos então pensar em quais serão as vantagens do ensino *on-line*? Grande parte do que se faz numa sala de aula poderá ser realizado. Os alunos poderão participar em discussões de grupo, assistir a apresentações, colocar questões, trabalhar em projectos, levar a cabo experiências, falar a sós com o professor… e até socializar-se com os colegas. A isto acresce o facto de serem ultrapassados os constrangimentos espaciais e temporais e cada um poderá trabalhar, em certa medida, ao seu próprio ritmo.

Mas será isto que queremos? Uma escola em que os contactos entre professores e alunos e entre os próprios alunos sejam meramente electrónicos? Até que ponto um ensino deste tipo será facilitador das aprendizagens?

E o convívio nos intervalos? E os momentos informais de diálogo e conhecimento mútuo quer entre alunos, quer entre alunos e professores?

Se, por um lado, bem utilizado, o ensino *on-line* pode ser um excelente promotor da autonomia e da responsabilidade de cada um na construção do seu próprio percurso, por outro, o isolamento e a falta de calor humano, podem ser inibidores de um desenvolvimento saudável e de uma verdadeira aprendizagem.

É indiscutível que daqui a pouco tempo quase tudo se pode fazer através da Internet e, consequentemente, "cada vez mais se conciliará o ensino presencial com o ensino à distância". Talvez seja o ideal aliar os dois tipos de ensino, mas é preciso não esquecer que na escola também se aprende a ser gente!

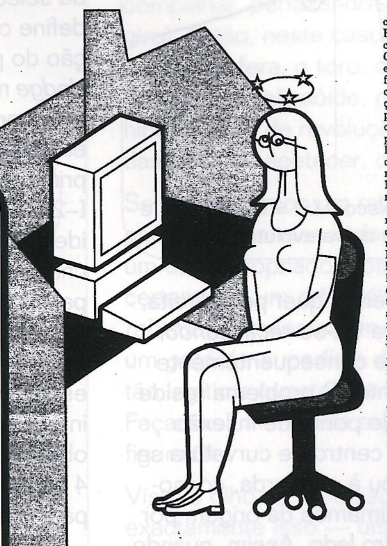
Fernanda Perez
Escola Secundária da Amora
Helena Fonseca
Universidade de Lisboa

Instituto Superior de Gestão, em Lisboa, inicia pós-graduação "on-line"

Estudar sem ir à escola

Isabel Leiria

ILUSTRAÇÃO: JOÃO LÁZARO



A sala de aula deixa de ter razão de existir. A matéria é dada via Internet e a comunicação é assegurada por correio electrónico. No limite, professor e aluno nunca precisarão de se encontrar. São algumas das potencialidades dos cursos "on-line". E embora este seja um cenário ainda distante, as instituições começaram já a lançar-se no que alguns consideram ser o modelo de ensino do futuro. Só falta legislar.

[…] ra que o contacto entre alunos não se perca, existe um "bar on-line" — uma espécie de sala de convívio, à qual é vedada a entrada do tutor — e ainda um espaço de debate aberto a todos. A aprovação em todos os módulos, dependente da avaliação positiva dos trabalhos individuais feitos em casa e corrigidos via e-mail, dará direito a um "Diploma de Estudos de Pós-Graduação em Fiscalidade".

"Algumas pessoas perguntavam-nos porque não abríamos um cursos deste tipo no Porto ou em Coimbra. Em vez de nos deslocarmos, que seria muito mais complicado, optámos por esta solução", justifica o director do curso, Saldanha Sanches. E, de facto, constrangimentos geográficos ou temporais é algo de inexistente nesta modalidade de ensino. "Liberto de deslocações diárias e de horários fixos, será possível compatibilizar o ritmo e horário de aprendizagem de cada um com as suas disponibilidades pessoais e profissionais", lê-se na página do curso, disponível em http://www.isg.pt.

As vantagens anunciadas chegaram para convencer Maria Ribeiro, uma das inscritas no curso. Funcionária da Direcção-Geral de Impostos no Funchal, encontrou aqui a possibilidade de frequentar a ambicionada e sucessivamente adiada pós-graduação. No ano passado falhou as provas de admissão do ISG para o curso de fiscalidade em regime presencial e, com a deslocação de Lisboa para a Madeira, o curso corria o risco de ficar uma vez mais comprometido. "Um dia, o ISG contactou-me para saber do meu interesse", conta.

Após a primeira sessão, afirma que as perspectivas são "francamente positivas". E diz que mesmo continuando a viver em Lisboa a opção pelo regime "on-line" seria muito provável. "Em Lisboa é sempre muito complicado chegar a algum lado e seria também uma forma de evitar ir ao instituto todos os dias". Mesmo sendo as propinas um pouco superiores ao regime presencial. "É um investimento que se faz", justifica. De qualquer forma, afirma, dos 15 colegas de turma, apenas uma é de Lisboa.

Perante o reduzido número de experiências portuguesas nesta área, Maria Ribeiro admite que tanto ela como os seus colegas poderão funcionar como uma "espécie de cobaias". "Mas também não é um risco sem rede", continua. "Não só os projectos se sucedem na Europa e Estados Unidos, como, daqui a poucos anos, quase tudo se fará através da Internet". Para Saldanha Sanches, muito do futuro do ensino passará, aliás, por aqui: "Não sei dizer em que proporção, mas acredito que cada vez mais se conciliará o ensino presencial com o ensino à distância."

Apesar de não haver legislação específica, o Ministério da Educação reconhece a necessidade de se definir regras. "Já há no ministério alguma reflexão sobre a matéria e terá necessariamente de haver alguma regulamentação no futuro", diz Manuel Farto, subdirector-geral do Ensino Superior. Por agora, tudo é remetido para o quadro legal existente. ■

Público, 7 de Maio de 2000

Fim à aritmética de papel e lápis

Anthony Ralston

Publicamos neste número a primeira parte da tradução de um artigo que tem causado muita polémica em torno da discussão do papel do cálculo de papel e lápis. A segunda parte será publicada no número seguinte da revista. Este artigo é da autoria de Anthony Ralston, do Imperial College, Londres e foi submetido para publicação no Jornal of Computers in Mathematics and Science Teaching. *O artigo propõe o fim do ensino da aritmética de papel e lápis (APL) no ensino elementar, substituindo-o por um currículo que enfatize, muito mais do que actualmente, a aritmética mental e no qual a calculadora seja utilizada para fins educativos em todos os níveis de ensino, incluindo o pré-escolar. O artigo analisa e refuta a argumentação apresentada pelos proponentes do* back-to-basics *contra o uso da calculadora e a favor da instrução tradicional nos algoritmos da aritmética de papel e lápis. É demonstrado o valor da aritmética mental na consecução de todos os objectivos – e mais – do currículo tradicional. Também é delineado um currículo de matemática do ensino elementar, sem aritmética de papel e lápis. É discutido, igualmente, o impacto de um tal currículo no ensino secundário e universitário. Finalmente, são avaliados os constrangimentos para atingir o que o artigo advoga.*

É possível ser um matemático de primeira grandeza sem ser capaz de calcular.

É possível ser um grande calculador sem possuir a mínima noção de matemática.

Novalis (1772-1801)

Back to basics

Nos EUA, as normas aprovadas pelo State Board of Education [California, 1998], versão revista das normas emitidas pela California Academic Standards Comission [Califórnia, 1997], mandatam um regime exclusivo de APL no ensino elementar, banindo as calculadoras de todos os testes estaduais.

Na Grã-Bretanha, um relatório [DFEE,1998a] encomendado pelo Ministro da Educação, David Plunkett, do governo trabalhista, desencoraja "tanto quanto possível a utilização de calculadoras" na instrução matemática de crianças até aos 11 anos de idade. Embora o relatório final [DFEE, 1998b] aperfeiçoe este conselho, face às críticas generalizadas ao relatório preliminar, ainda assim advoga pouco ou nenhum uso de calculadoras até aos anos finais da escolaridade elementar (10 ou 11 anos): o actual governo britânico, mais do que os seus antecessores, professa uma filosofia *back-to-basics*.

Apesar dos educadores matemáticos nos EUA terem condenado amplamente as normas da Califórnia e, de modo análogo, os educadores matemáticos na Grã-Bretanha serem quase todos (mas não todos - [Gardiner, 1998]) veementemente contra a posição governamental, muitas outras pessoas, em ambos os países, são apoiantes convictos do *back-to-basics*: os educadores não matemáticos, muitos encarregados de educação e a maioria dos políticos desde sempre deploraram que se metessem calculadoras nas mãos de crianças pequenas.

Talvez sejam os investigadores matemáticos que mais fortemente estão a favor das normas da Califórnia, incluindo muitos de instituições prestigiadas como Stanford e Berkeley. (Na Grã-Bretanha, essa comunidade tem estado relativamente silenciosa sobre [DFEE, 1998a e 1998b], mas uma parte significativa opõe-se claramente a que a calculadora desempenhe um papel não-trivial na matemática do ensino elementar, apesar de estudos respeitáveis [Shuard, 1991] mostrarem a eficácia desta abordagem.) A comunidade dos investigadores matemáticos tem bons motivos para estar preocupada com o estado da educação matemática pré-universitária nos EUA. Faço notar, simplesmente, que a comunidade americana dos investigadores matemáticos não tem entendido o impacto da tecnologia na matemática a nível universitário; por isso, dificilmente causa surpresa que, em geral, embora com honrosas excepções, tenha sido completamente incapaz de entender esse impacto no currículo da matemática pré-universitária. Na verdade, e em regra, os investigadores matemáticos pura e simplesmente não sabem daquilo que falam quando criticam o que acontece no ensino elementar [American, 1995-1997]. Diagnosticaram correctamente o problema – fraca preparação para a matemática universitária – mas não entendem nem as causas nem a cura.

O valor da aprendizagem da APL

A força do movimento anti-calculadoras provém principalmente de dois factores:

1. Fraca colocação dos alunos americanos (e britânicos) em estudos comparativos internacionais [Schmidt et al, 1997].

Uma vez que tais comparações a nível do ensino elementar incidem na destreza em APL, então a justificação deve encontrar-se no insucesso em aprendê-la adequadamente. E que causa mais provável para este insucesso do que o crescente uso de calculadoras ao longo do último quarto de século? Nos estudos comparativos do ensino secundário, a APL não representa um papel tão importante. Contudo, é frequente argumentar que o insucesso na APL durante o ensino elementar cria dificuldades ao aluno em todos os níveis posteriores de matemática.

2. Preparação cada vez mais fraca dos estudantes universitários do 1° ano para estudar matemática universitária.

Admitindo ser este o caso, então a causa desta fraca preparação não poderia ser a utilização de novas técnicas e novos materiais da moda – calculadoras, muitas vezes – no ensino da matemática escolar? As calculadoras também são frequentemente associadas à falta de rigor no ensino da matemática, enfraquecendo o currículo.

Pessoalmente, acredito que, apesar de estarem correctas as premissas de ambos os argumentos, as conclusões são completamente erradas e sem suporte factual ou verosímil. (Menciono, em particular, que, por ter ensinado matemática na universidade durante 30 anos, de 1965 a 1995, subscrevo plenamente a premissa do segundo argumento. Em geral, os meus alunos sabiam cada vez menos matemática ao entrar na universidade e, não menos importante, sabiam cada vez menos acerca do que é a matemática e de qual o seu valor.)

O meu raciocínio é o seguinte:

1. Em princípio, não parece haver motivo para que a mistura de APL e calculadora num currículo conduza, na globalidade, ao enfraquecimento da compreensão aritmética e do desempenho na APL. Afinal, os exercícios rotineiros de aritmética constituíram, durante muitos anos, a referência da matemática no ensino elementar praticamente em todo o lado, e ainda o constituem em muitos sítios, recolhendo um acordo quase unânime de que não proporcionam muita compreensão da aritmética, por muito que a consequência seja a mestria mecanizada. De facto, existem provas [Hiebert, 1986] de que muitos exercícios rotineiros e a ênfase na precisão de cálculo fazem perder a mensagem com a razão de se fazer aritmética. No entanto, muitos professores acham que a utilização da calculadora na sala de aula torna ainda mais difícil a perícia na APL. Poder-se-ia argumentar que, assim sendo, o motivo é o uso inadequado ou prosaico das calculadoras em vez de uma utilização imaginativa. Talvez, mas a minha conclusão é que situações de compromisso são ineficazes: ou a aritmética do ensino elementar consiste em APL sem calculadoras ou em calculadoras sem APL.

Provavelmente, os únicos de acordo com esta proposição são as proponentes do *back-to-basics* fazendo, obviamente, uma escolha diferente da minha. Quase todos os que são a favor da utilização da calculadora na sala de aula, no ensino elementar, parecem crer, talvez em consequência de um desejo de não parecer muito radicais face à brigada *back-to-basics*, que ela deve ser um suplemento à APL ou, seja qual for o caso, que deve haver uma componente maioritária de APL na aritmética do ensino elementar [Kitchen, 1998]. O apoio ao ensino da APL e utilização da calculadora encontra-se em estudos que mostram, quase sem excepção, que a introdução da calculadora na sala de aula não impede a consecução de competências na APL e pode até favorecê-las [Hembree, 1986]. Mas grande parte (todos?) destes estudos fez-se com professores que se comprometeram a experimentar a calculadora e se sentiram à vontade na sua utilização. Isso não acontece com a maioria dos professores, que sentem que as calculadoras criam dispersão, embora reconheçam que é o que quase todos, em toda a parte (no mundo desenvolvido?) usam para fazer aritmética. Talvez o ponto crucial seja, de facto, que as crianças quase universalmente usam a calculadora para a aritmética fora da sala de aula, restando apenas uns testes vagos sobre APL como meio de persuasão para a prática de APL nos trabalhos da escola. É certo que a utilização da calculadora fora das aulas retarda e retardará, inevitavelmente, a aquisição de competências em APL, fornecendo um argumento de peso contra o regime *back-to-basics*. A instrução clássica de APL está condenada ao insucesso num mundo onde a aritmética é feita quase universalmente com calculadoras e onde até a criança mais limitada percebe que ser competente em APL não tem quase valor nenhum em ocupações não-académicas.

Assim, o que está em causa não é tanto se o *back-to-basics* é uma boa ideia, mas antes se tem possibilidade de sucesso, por muito que se queira. Mesmo sendo verdade que "é preciso praticar tudo [em matemática] para compreender" [Saxon, 1990], pode tal prática ser bem sucedida, quando as crianças reconhecem que aquilo que estão a praticar não é uma competência útil no dia-a-dia?

2. Se a aprendizagem da APL não é uma competência útil no dia-a-dia, aprendê-la talvez seja útil para a matemática futura e para outras ocupações educacionais e profissionais. Ora, é evidente que a APL não é útil em nenhuma ocupação profissional. Apesar de alguns matemáticos profissionais precisarem de efectuar quantidades consideráveis de aritmética, usam quase sempre a calculadora ou o computador quando lidam com números com mais de um ou dois dígitos. E se cientistas, engenheiros e outros profissionais necessitam de muita aritmética, efectuam-na, quase sem excepção, com a calculadora e o computador.

A favor da aprendizagem da APL resta, ainda, o argumento da necessidade para a matemática subsequente. Se um aluno chegar a uma escola secundária incapaz de efectuar APL, estará esse aluno *ipso facto* em desvantagem com os alunos competentes na APL? Admito que não é a competência em APL por si só aquilo que os críticos da utilização das calculadoras consideram importante. Afinal, há pouca matemática no ensino secundário que exija muito cálculo *per se*. Importantes deverão ser os benefícios que resultam do desenvolvimento da destreza em APL. Habitualmente, são catalogados na numeracia ou sentido numérico e incluem, a par do óbvio conhecimento das tabuadas da adição e multiplicação, coisas como conhecer a operação aritmética a usar, possuir boa noção da grandeza de um número, conhecer estratégias de verificação das respostas às operações aritméticas. Tudo isto é importante, mas é algo que um currículo baseado na calculadora não possa proporcionar? Creio que a resposta é negativa.

O que muitos críticos à utilização da calculadora no ensino elementar deploram é a aparente perda da técnica, a capacidade de compreender e manipular símbolos. Geralmente, atribuem-na ao uso crescente das calculadoras. É uma ironia porque, apesar da calculadora ser utilizada em algumas escolas elementares e bastante mais nas escolas secundárias, a utilização actual de calculadoras e computadores na matemática é bastante limitada. Então, este insucesso na técnica, que os meus colegas universitários e eu próprio reconhecemos e deploramos, deve ter outra origem. Seja qual for o caso, que fique assente que a técnica é de importância crucial. Como Wu [1996] afirma, "Não se pode aspirar à compreensão sem a técnica". Na transição da escola secundária para a universidade, Askey [1996] lamenta a "falta de competência em álgebra" o que torna a aprendizagem do cálculo difícil ou impossível. Mas não está em questão se a APL proporciona sentido numérico e, com ele, a técnica. Claro que pode proporcionar (embora se possa duvidar de quantas vezes é que o currículo tradicional realmente o faz). A questão está antes em saber se a técnica, assim como a numeracia, podem ser atingidas plenamente num currículo baseado na calculadora. Creio que o currículo discutido adiante o pode fazer tão bem quanto um currículo baseado em APL.

Outro argumento a favor de alguma APL é o facto de fornecer às crianças a "primeira introdução ao poder da matemática abstracta" [Ernest, 1998]. Em princípio, a APL pode fazê-lo; contudo, questiono se as crianças apreendem bem a abstracção inerente aos números, a partir da aprendizagem das manipulações da APL. Em qualquer caso, mais uma vez argumento que este aspecto da APL não precisa de se perder num currículo baseado na calculadora.

Outro argumento é o de que a utilização da calculadora no ensino elementar está necessariamente associada à falta de atenção a outras partes tradicionais da aritmética, tais como valor de posição, fracções e proporções. Mas todos estes tópicos tradicionais – e importantes – podem e devem integrar um currículo do ensino elementar baseado na calculadora. Se é verdade ser frequente a redução de outros tópicos tradicionais quando as calculadoras são amplamente utilizadas, então a culpa é de quem concebe e ensina currículos baseados na calculadora, não é necessariamente uma consequência da utilização da calculadora.

Cabe-me ainda dirigir, se bem que sumariamente, ao seguinte argumento: se a APL tem sempre resultado, então porque não continuar a enfatizá-la? Porque nem sempre tem resultado – há muitas provas (tais como as de [Jonhson e Rising, 1967], referidas previamente) de que muitas crianças permaneceram basicamente "inumeradas" sob o currículo da APL clássica. De qualquer maneira, por muito bem que tenha funcionado em determinada altura, um currículo baseado na APL funciona de modo cada vez mais insuficiente num mundo em que quase todos usam calculadoras. Mesmo assim, se funcionou bem e ainda funciona, não há razão para não a substituir por algo melhor.

As três ideias sobre os quais assentam os argumentos da parte restante deste artigo são:

1. Não existe investigação que prove – bem pelo contrário – que a utilização da calculadora coloque dificuldades às crianças na compreensão da aritmética ou na aquisição da matemática subsequente.

2. A experiência, seja de indivíduos ou de professores de matemática, não fornece razões que apoiem a não utilização da calculadora no ensino elementar. Tal como indiquei, as razões alegadas por professores e doutores não são susceptíveis de demonstração, nem poderia ser, creio eu, qualquer outra que se apresente. A propósito, o mais preocupante é que os matemáticos profissionais cujo *ethos* se baseia na demonstração, não só não tentam provar aquilo que afirmam (em assuntos educacionais é muito difícil arranjar uma demonstração reconhecida) como nem sequer oferecem uma cadeia significativa de argumentos que apoie as suas discordâncias. Ou então, insensatamente, incompatibilizam a utilização da calculadora com outros pontos fracos do currículo. Por exemplo, Klein [1998] critica as normas da California Comission porque "permite que os alunos usem a calculadora no terceiro ano, sub-enfatizam a álgebra na escola secundária e são imprecisos e arbitrários". Falta de ênfase na álgebra e imprecisão e arbitrariedade são argumentos válidos para uma crítica, mas nenhum está, de modo algum, relacionado com a utilização da calculadora no terceiro ano. Porque é que tal utilização da calculadora é má? Klein não diz: um motivo é porque não é possível alegar nenhum argumento sólido contra a utilização da calculadora no terceiro ano.

3. Não há sequer razões plausíveis para crer que a calculadora na escolaridade elementar tenha efeitos perniciosos na aprendizagem matemática das crianças. É claro que se a utilização da calculadora levar a que as crianças dependam totalmente dela no ensino elementar e secundário, tornam-se simples carregadores de teclas, com efeitos desastrosos. Mas não só não é obrigatório que tal aconteça, como não aconteceria no tipo de currículo apresentado neste artigo.

(continua na Educação & Matemática nº 59)

Nota: As referências bibliográficas serão publicadas no final da segunda parte do artigo.

Traduzido por Luís Reis
E. S. B. da Univ. Católica do Porto

Estranho mas verdadeiro... Acredite se quiser!

Embora tenham sido as palavras "Não há nada a fazer..." que iniciaram a brilhante intervenção final da apresentadora do programa da SIC sobre "a repulsa dos portugueses pela matemática", ela, pertinentemente, não se esqueceu de referir que foram levantadas algumas pistas que poderiam ser aproveitadas, para recuperar o estado lastimável que caracteriza o ensino e aprendizagem desta disciplina no nosso país.

Decidimos aceitar o desafio. Deste modo, metemos mãos à obra e, depois de uma análise atenta da cerca de meia hora em que se pretendia debater a problemática da relação dos portugueses com a Matemática, sentimos estar em condições de evidenciar as pistas de que fala a apresentadora da SIC e de poder sugerir, aos leitores da E&M, algumas medidas despretensiosas que brotaram no nosso espírito, iluminadas pelas profundas e pertinentes opiniões expressas. Pretendemos, pois, dar a nossa modesta contribuição para acabar com as más classificações dos portugueses nos estudos internacionais, que igualmente a nós nos cobrem de vergonha. Mas, julgamos também, assim poder humildemente colaborar para terminar com o sofrimento de alunos e professores que nos pareceu preocupar sinceramente os participantes e apresentadora deste programa.

Na impossibilidade de dar a conhecer a versão integral do esclarecedor debate, aos leitores da E&M que não tiveram a felicidade, o privilégio e a sorte de a ele assistir, transcrevemos a seguir, embora com grande pena nossa, apenas algumas, se bem que paradigmáticas, das ponderadas afirmações que foram feitas durante esse programa. Graças a elas traçámos um rumo, clarificámos ideias, encontrámos caminhos. Aqui ficam algumas das que orientaram o posterior levantamento das humildes soluções que vos propomos mais à frente:

- "Os portugueses parecem ter de facto uma aversão à matemática. São os piores da Europa e mesmo a nível mundial estão mal classificados."
- "O problema dos gostos e das inclinações é um problema muito difícil de explicar."
- "Há diversos tipos de inteligência (...) que têm todas obviamente os seus méritos, embora haja dois pólos nos quais as outras inteligências se devem organizar: O pólo da linguagem e o pólo da Matemática."
- "Embora seja arriscado este tipo de generalidades, pode afirmar-se que os portugueses não têm grande vocação para a abstracção."
- "A Matemática tem uma sequência, o que aconteceu é que ela [a aluna com insucesso em Matemática, presente na mesa] perdeu a sequência. Tentou pegar na Matemática um pouco mais tarde e isto é impossível."
- "A Matemática é como um comboio que anda sobre carris (...) qualquer pequeno descarrilamento é a morte do artista."
- "Um dos factores que explica o insucesso em Matemática é diferença de literacia entre os presentes estudantes e os pais dos presentes estudantes."
- "No Superior é Matemática a sério, até ali é uma brincadeira."
- "Há dois anos fundamentais que são o 8º e o 9º. Até aí foi, entre aspas, uma brincadeira."
- " Eu admito que até certa idade não se pode dar Matemática mas motivações e imitações..."
- "Um aluno que sai do 12º ano nem sequer sonha o que lhe vai acontecer no superior."
- "Se um aluno não ficar retido, como devia, está perdido."
- "Para que serve a Matemática para a vida corrente? Para nada! A não ser as quatro operações para a pessoa não ser enganada nos trocos."

- [a Matemática] "é uma disciplina muito trabalhosa e é preciso passar uma mensagem."
- "A Matemática é uma linguagem sem corpo."
- "A Matemática podia existir independentemente do resto do mundo."
- "Perguntei ao meu filho, que está no 1 ano, o que é isso de infinito (...) definiu o infinito rigorosamente: é um número que é muito grande, muito grande, muito grande (...) Ele aprendeu com 7 anos o que eu aprendi com 15 ou 16."
- "Ainda hoje eu considero a Matemática extremamente difícil"
- "Tentar explicar [a Matemática] é a minha missão que não é assim tão difícil como parece à primeira vista."
- "Eu acho que a disciplina mais procurada para apoio extra escolar é a Matemática."
- "Eu uso um método que muitos dos professores de liceu contestam. Dou a Matemática toda antes de a darem na escola, portanto quando eles [os alunos] vão para as aulas estão muito mais motivados (....) antecipo a matéria e [então os alunos] já sabem o que se está a passar."
- "Estar a pôr as pessoas que vão para humanísticas a ter de estudar Matemática é um contra senso."
- "Não há nada a fazer: os portugueses não tem uma boa relação com a matemática."

Como os leitores puderam concluir

das eloquentes afirmações que seleccionámos, não é difícil retirar ideias para melhorar a relação dos portugueses, e mais particularmente dos alunos, com a Matemática.

Porém, rejeitamos as soluções fáceis e politicamente incorrectas do género de seleccionar alunos de nacionalidade não portuguesa para se submeterem aos estudos internacionais, ou escolher os alunos cuja discrepância cultural com os seus pais é pequena, ou mesmo propor que alunos de 20 anos efectuem os testes relativos ao 4° ano de escolaridade, de modo a alcançarmos artificialmente uma posição mais elevada. Não cedemos também à radicalidade de propor a destruição pura e simples da Matemática. Aliás, seria canhestro, pois como bem afirmou um dos participantes, ela "podia existir independentemente do resto do mundo."

Procurando seguir à letra as consequências das opiniões veiculadas pelos intervenientes no debate, aqui vos apresentamos algumas medidas que, a nosso ver, poderão servir de pedrada no charco da repugnância dos portugueses pela matemática:

- 1ª medida: Foi frequentemente transmitida, e pareceu consensual, a ideia de que os portugueses são, por razões culturais ou até naturais, pouco vocacionados para a abstracção, tão fundamental em Matemática. Assim sendo, a solução está à vista: acabe-se com o estatuto de português e, em sua substituição, atribua-se-lhe o de nacional de Singapura, o país classificado em 1° lugar no célebre estudo internacional do TIMMS (pensamos que se trata do estudo que viabilizou as referência utilizadas pela apresentadora do programa). Eventualmente, a nova Singapura poderá baixar alguns furos na classificação, mas com certeza continuará a não ser visível um trabalho matemático significativo, tal como já acontece hoje em dia.

Por esta razão, até sugerimos ao apresentador do "Quem quer ser milionário" (do canal da concorrência) que considere, no rol das questões para o programa, esta pergunta: "Qual destes quatro nomes pertence a um matemático famoso da actualidade, nascido em Singapura:
A- Euclides; B- Bhaskara; C- Anastácio da Cunha; D- Ka N'hon Há.

- 2ª medida: Como a matemática que os alunos devem aprender, até ao ensino superior, foi por vários dos intervenientes considerada uma "brincadeira", a outra forma de enfrentar o problema, parece-nos óbvia. Eliminamos a disciplina de Matemática dos currículos até ao 12° ano e substituimo-la por uma nova, que será chamada de Brincadeiras. Para além de nos pôr a cobro de uma má classificação internacional, uma vez que já não poderemos entrar em competição numa disciplina inexistente, esta medida também vai legitimar o facilitismo que grassa pelas escolas tantas vezes invocado pelos participantes, assim como justificará os referidos "pinotes", "saltos" e "guinchos" dos professores que, levados a seguir uma pedagogia sem esforço, a tudo parecem recorrer para procurar motivar os seus alunos.

- 3ª medida: Tendo ficado demonstrado à saciedade que a Matemática é uma disciplina extremamente sequencial (na feliz metáfora usada por um dos intervenientes é um combóio que anda sobre carris e que quando deles sai é a morte do artista), parece que podemos apontar uma outra sugestão para enfrentar o problema. A disciplina de Matemática deverá ser banida dos currículos de todos os anos de escolaridade, excepto no do ano terminal. Este, porém, terá um plano de estudos constituído exclusivamente pela Matemática, viabilizando deste modo, cremos nós, um tratamento eminentemente sequencial. Salientamos que esta solução permite também resolver o problema das passagens de ano dos alunos reprovados a Matemática (também nas palavras esclarecidas de um dos intervenientes, a causa de perdição de muitos jovens). Para além de todas estas vantagens, esta proposta permite o estudo da matemática apenas na altura em que, foi dito, ele é realmente possível, ou seja quando os alunos já possuem maturidade, que no entender de vários intervenientes, é condição necessária à abstracção matemática.

Claro que outras soluções poderiam ser apontadas. Por exemplo, a ideia de antecipar a matéria parece bastante prometedora, mas achamos que existe já uma quantidade suficiente de medidas para alimentar a nossa reflexão.

Todavia, não gostaríamos de terminar sem dizer que nos congratulámos com a SIC pelo facto deste tema ter sido abordado. Estamos certos que agradou a 99% dos professores e que ultrapassou todos os níveis de audiência previstos. E não nos venham com ideias de que são necessários tratamentos estatísticos para se fazer afirmações deste tipo! Os portugueses têm grande repulsa pela matemática e, ainda que não sendo singapurenses, sabem que a Estatística não serve para nada na vida do dia-a-dia.

Queremos, contudo, fazer ainda uma observação final: felizmente não participaram no debate alunos com sucesso e professores de Matemática com experiência no terreno e larga reflexão sobre a problemática dos ensinos básicos e secundário. Ainda bem! Pois com certeza isso só iria baralhar os espectadores, desviar a atenção para assuntos de somenos importância e desvirtuar o debate.

Certos da pertinência das soluções que vos viemos propor, estamos seguros que dentro de um ano acontecerá um outro debate televisivo com os mesmos participantes mas em que o tema sairá, com certeza, de entre estes: "Os abusos na disciplina de Brincadeira escolar"; "Provas da Maturidade dos alunos de 12°ano: relação com a única disciplina do currículo" ou ainda "Singa Pura ou Sing Apura?. Consequências de se subir uns furos na escala". Evidentemente que o debate passará a horas mais tardias, se for no mesmo canal, mas pode ser que, dada a publicidade que irá ter, seja adquirido por outro canal mais ousado!

Fátima Alonso Guimarães
EB 2/3 de Telheiras
Fernando Nunes
EB Marquesa de Alorna

(Des)educação matemática

No passado dia 4 de Abril acompanhei as minhas duas turmas do 5º ano a uma visita de estudo a um Palácio. Essa visita tinha sido programada pela professora de História e seria animada com a presença de um "marinheiro" da época dos Descobrimentos. Ao ser proposta esta visita nos Conselhos de Turma intercalares de Fevereiro, lembrei-me de alterar a planificação da unidade didáctica e "dar o salto" para a Geometria, estudando os ângulos e triângulos, encontrando na visita ao palácio um contexto apropriado para esse estudo, tendo ido eu própria fazer uma visita exploratória para melhor encaminhar matematicamente os meus alunos. Não faço parte dos grandes defensores de que a Matemática tem que ser toda seguidinha, muito sequencial... como o Dr. Graciano, por exemplo, que recentemente o afirmou na televisão.

Os meus meninos estavam muito entusiasmados com as pavimentações, construíram polígonos com a ajuda da professora de EVT, era grande a animação. Eu estava radiante, tinha despertado nos meus alunos a ideia de que a Matemática existe em toda a parte e é produto humano, só que... pois foi, ao chegarem ao Palácio com uma pequena ficha de Matemática, a guia da visita disse-lhes:

> "Ficha de matemática? Nem pensar! Se queriam vir para aqui estudar Matemática tinham pedido uma visita específica para estudarem os azulejos, que nós também fazemos. Hoje é Historia, temos animação."

Lá acalmei os meninos. Mas, para grande surpresa minha, eles não largavam a ficha, olhando para as paredes, para o chão e para os tectos das salas, registando às escondidas da guia, nos ombrais das janelas ou nos recantos, as informações que iam recolhendo. Quando chegámos a uma das salas, a senhora informou-os que esta tinha sido construída em honra dos 27 anos de uma princesa, por isso é que havia 27 cisnes no tecto. Aliás a sua grande beleza levava a que tivesse sido recentemente escolhida pelo senhor engenheiro Guterres para lá oferecer um jantar aos representantes das Comunidades Europeias.

E os meus alunos não ligaram e em segredo iam-me dizendo "pois é, no tecto estão octógonos, não pavimentam sozinhos!"... desta vez, quem não queria o trabalho era eu, que tinha de encarar os olhares furibundos da guia, a cada conclusão matemática dos alunos.

Neste Ano Mundial da Matemática, por mais publicidade e debates que se façam, continua a imperar, mesmo em serviços educativos com alguma responsabilidade, uma mentalidade retrógrada, que vê as disciplinas isoladas e impossibilita que se façam abordagens mais informais da Matemática.

É interessante referir que a sociedade (e a comunicação social) fala sempre da Matemática pelas más razões: aponta o insucesso dos alunos, compara os resultados obtidos pelos estudantes portugueses em provas internacionais, queixa-se dos alunos que não aprendem Matemática, levanta hipóteses muito perversas dizendo que os alunos não estão motivados porque os professores também não estão, ou ainda que o nosso mal, como portugueses, é que não temos raciocínio abstracto, também visível pela falta de filósofos...

Pelos vistos, com estas atitudes, bem pudemos nós esforçar-nos por mudar. Só faltou dizer como o Dantas: Abaixo a matemática PIM!

Isabel Paula
Escola Preparatória de Oeiras

O conceito de Matemática para quem a aprende

A Matemática nas escolas é uma disciplina com "desculpa", porque quando se tira uma nota mais baixa...

"Ah, deixa lá, é matemática, é mesmo assim."

Isso não me agrada assim como não deve agradar a muita gente.

A Matemática, sendo, às vezes, um pouco mais difícil de compreender que as outras disciplinas, em que alguns aspectos, faz com que os alunos se recusem a perceber no geral, pois como já foi referido anteriormente, é uma disciplina com "desculpa".

Um aluno interessado percebe a matéria. Um aluno minimamente interessado percebe as coisas mais óbvias, e o aluno que já não se interessa não percebe nada. A Matemática tornou-se chata, enfadonha, secante e principalmente difícil de chamar a atenção.

O que se pode fazer?

A Matemática não deve ser uma disciplina com "desculpa" e para isso é preciso prender a atenção dos alunos, e, fazer de uma coisa chata uma coisa divertida. Exemplos:

- Quando se está a explicar uma coisa, utilizar situações reais;
- Fazer jogos com os alunos;
- Realizar situações orais;
- Etc.

Joana Grilo, 12 anos
EB 2+3 D. Martinho Vaz,
Castelo Branco

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

ProfMat 2000

Ainda não começou a planear a sua viagem até ao ProfMat 2000 que se realizará em Novembro, na ilha da Madeira? Então, entre na página da APM, *www.apm.pt*, clique em ProfMat 2000 e inicie desde já uma viagem, através do planeta Terra, até ao Funchal.

E se as aulas durassem 72 minutos?

Ana Paula Canavarro

Não é uma provocação nem é uma tentativa de conciliar os actuais 50 minutos de aula com a nova proposta de 90 minutos. É mesmo uma realidade que se passa do outro lado do Atlântico, mais precisamente na Escola Secundária da South Grand Prairie, na zona suburbana de Dallas, nos EUA. Tive oportunidade de visitar esta escola na excelente companhia do meu colega João Almiro, no passado mês de Março, integrada no grupo de 70 convidados estrangeiros para a Conferência Internacional do Projecto T3 (Teachers Teaching with Techonologies) desenvolvido em Portugal pela APM.

Cedo percebemos que nos aguardava uma realidade muito, mas mesmo muito, diferente da nossa. É que tivemos a sorte de ter sido recebidos por uma professora da escola, a Beverly Horton, muito simpática e eficiente, que teve a gentileza de nos ir buscar ao aeroporto. No percurso que fizemos no seu belo CHEVROLET novo de seis metros de comprimento, interessou-se por saber como funcionavam as escolas portuguesas e contou-nos como funcionava a escola dela. A Beverly é professora de Matemática mas actualmente não está a dar aulas, uma vez que é assistente do *principal* da escola. Este termo é intraduzível para português e nem sequer existe na escola portuguesa uma figura que tenha as suas funções. Mas pode-se dizer que o *principal* é uma espécie de super-responsável pedagógico geral da escola, que não tem funções de gestão, mas apenas se preocupa com as questões relacionadas com aprendizagem dos alunos e com os professores. Para além da Beverly, o principal tem mais cinco assistentes especializadas em diversos domínios, como os projectos educativos, os recursos para a sala de aula, os livros de texto, a formação de professores. As contas são fáceis de fazer. Naquela escola existem sete professores com dispensa integral de serviço lectivo para poderem assumir a 100% as respectivas funções de coordenação pedagógica da escola!

O resto das surpresas viria no dia seguinte, que passámos na escola desde as 8 da manhã às 4 da tarde. E se é verdade que lá estivemos muito tempo, também é verdade que viemos com a sensação de que ainda havia mais para ver.

Chegámos à escola um pouco antes das 8h, que é a hora de entrada na escola para todos os alunos e professores. O horário é sempre igual nos cinco dias da semana: entrada às 8h e saída às 15:30 h, cinco tempos lectivos e um de almoço. Os alunos têm aulas em todos os tempos lectivos e os professores apenas em quatro, pois todos os dias têm um tempo lectivo dedicado ao trabalho colectivo com os colegas da mesma disciplina. Para além deste espaço diário, têm outros momentos extraordinários para reuniões mais formais do grupo ou avaliações, por exemplo. E como é que se distribuem os tempos? É que afinal todos passam 7 horas e meia por dia na escola! Perguntámos, claro. E de repente percebemos que as aulas tinham uma duração de 72 minutos! SETENTA E DOIS?! Confesso que o que me causou de imediato mais admiração foi a precisão do dois e não propriamente os setenta. É que me parece que, de facto, cinquenta minutos é demasiado tempo para fazer uma exposição teórica de "matéria", mas é muitíssimo pouco para realizar explorações e investigações e actividades que envolvam uma participação matematicamente significativa dos alunos. Por fim lá percebemos o horário completo, incluindo a razão de ser do tal dois. Cinco aulas de 72 minutos, intervalos de seis minutos para mudar de sala e pouco mais de uma hora para almoço ao fim da terceira aula.

Fomos recebidos pelo principal, Mister Roy Garcia, numa grande sala onde um grupo de alunos nos serviu o pequeno-almoço com um ar visivelmente satisfeito. Admirámo-nos por ver que se tratava de um professor bastante jovem, não teria mais de trinta anos. Contou-nos um pouco da história da escola. Foi construída no início dos anos setenta, mas está bem conservada. Recebe cerca de 2400 alunos e tem cerca de 150 professores. Em 1996 iniciaram um processo de restruturação curricular interna em que a principal preocupação é, como pode ler-se no folheto de apresentação da escola que nos forneceram, "oferecer aos alunos a oportunidade de explorar os seus interesses e aptidões enquanto recebem uma formação sólida na área específica da sua escolha."

8 - 9:12
9:18 - 10:30
10:36 - 11:48
Almoço
13 - 14:12
14:18 - 15:30

Ao andar pelos corredores, reparámos que a escola parece ser um espaço muito apropriado pelos alunos. As paredes estão preenchidas com *posters* feitos pelos alunos, alguns mostram ídolos do cinema, outros do desporto, e, também encontramos as fotografias das equipas de *basquetball* e de *football* que ganharam os sucessivos torneios da escola, taças expostas em armários, certificados que distinguem antigos alunos, um enorme *placard* a exprimir a "missão" da escola.

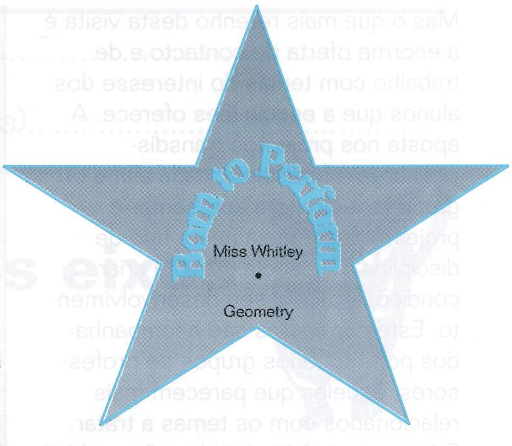
Tivemos oportunidade de entrar numa aula de Matemática. Por cima da porta, o nome da professora e da disciplina escrito numa estrela de cartolina informam desde logo que se trata da aula de Geometria de Miss Whitley. Ela estava com cerca de vinte e poucos alunos dotados do nível correspondente ao 11° ano. Estes trabalhavam em grupos de quatro, à volta de amplas mesas preparadas para o efeito. Cada aluno tinha uma TI-92 (92 mesmo, não é gralha) disponibilizada pela escola. Usavam-nas com à-vontade, com o CABRI-II, para realizar a tarefa pedida pela professora, que consistia na exploração de propriedades de quadriláteros. A tarefa era de natureza investigativa mas pareceu-me demasiado estruturada. Era retirada de um livro de texto que está este ano a ser ensaiado com os alunos dotados, livro esse concebido de modo a que os alunos possam aprender quase tudo autonomamente. Durante o Verão será feito um balanço desta experiência e ponderada a sua extensão a outros níveis de alunos. Os alunos não pareceram perturbar-se com a nossa presença, talvez devido ao facto de estarem habituados a receber visitas. Continuaram a trabalhar calmamente, cada aluno escreveu as suas conclusões numa folha separada e no final da aula a professora recolheu-as, anunciando que no dia seguinte as traria corrigidas e que iriam discuti-las colectivamente.

Depois de observar o que os alunos faziam, dedicámo-nos a observar a sala. A secretária da professora era uma mesa bastante grande, onde estava um computador ligado a equipamento de projecção. Tinha também uma TI-92 e o respectivo *viewscreen*. Para além disto, existiam dois enormes quadros negros clássicos. Três grandes armários continham materiais diversos para usar na aula, como calculadoras variadas, materiais manipuláveis diversos, uma panóplia de sólidos, planificações e muitos e muitos livros. As paredes estavam também cobertas de *posters*, a maioria alusivos a temas da geometria, alguns deles produzidos pelos alunos.

Quando tocou para a saída, os alunos levantaram-se e abandonaram a sala ordeiramente mas com muita rapidez, saindo cada um na sua direcção. Este facto admirou-nos, porque tinhamos em mente que iriam todos para o mesmo lado, para a mesma sala. Mas não. Perguntámos novamente e percebemos que o que tínhamos visto não era uma turma, conceito que por lá não existe com o significado que aqui lhe atribuímos, mas sim um grupo de alunos que tem aquela disciplina àquela hora. Dali cada um segue para outra disciplina, cumprindo um percurso e horário individual, um pouco à semelhança do que acontece no ensino universitário, mas mais complexo. É que os currículos são diferenciados mesmo! Cada aluno tem um plano de estudo que define as disciplinas que deve fazer em cada um dos três trimestres do ano lectivo. Esse plano é estabelecido consoante os interesses e vocações que lhe são identificados no início do ano pelo grupo de professores que o entrevista e consoante o nível de apetência que lhe é reconhecido. Existem três níveis de alunos — os dotados, os regulares e os básicos. É claro que isto nos fez logo impressão. Perguntámos então as razões desta estratificação... A resposta que veio é que esta é a única forma de oferecer um ensino adequado a cada aluno, sob pena de nivelar por baixo os alunos com mais capacidades para não deixar ao abandono aqueles que têm mais dificuldades. Se o princípio da educação para todos está de acordo com um ideal democrático, já esta forma de o por em prática me parece complicada do ponto de vista ideológico... Não fiquei nem muito convencida nem muito confortável. Mas fiquei com a ideia de que nesta escola americana existem muitas possibilidades, muitas ofertas, muitas responsabilidades para os alunos.

Foto: www.gpisd.org/gpisd/schools/highschool/sgphs/Default.htm

Visitámos depois alguns dos laboratórios da escola.



Existem laboratórios de tudo o que se possa imaginar. Um deles, o laboratório de computadores – que não é uma sala de trabalho com computadores – tem disponíveis vários aparelhos que os alunos podem abrir, desfazer, ver como é, trocar peças, voltar a compor. Outro, o de tecnologias, está equipado com aparelhagem sofisticada para que os alunos possam conhecê-la, estudar com funciona, etc.

Mas ainda muito estava para vir. Ofereceram-nos o almoço ali perto, recursos distrital de apoio ao trabalho dos professores, com umas condições logísticas excelentes (se é verdade que um azar nunca vem só, aqui parece que uma sorte também não...). Quando saímos da escola passámos pelo refeitório e pudemos observar os alunos a prepararem-se para almoçar, num sistema de self-service com vários postos de abastecimento de *fastfood*, muitas bebidas em lata e *donuts* também com fartura. Não precisámos de nos esforçar para conseguir antever o cenário de obesidade generalizada que os nutricionistas afirmam aproximar-se à velocidade de epidemia, até porque aqueles jovens são, na sua maioria, não só mais altos que nós, mas aflitivamente mais gordos.

A seguir ao almoço conduziram-nos ao expoente máximo dos espaços da escola: O planetário. É mesmo verdade! A escola tem um planetário a sério, com capacidade para cerca de duzentas pessoas, onde os alunos têm aulas de Astronomia. O professor lá nos pôs a ver estrelas (como se fosse preciso mais!) e pudemos verificar que tudo funciona bem, que o planetário está bem conservado, apesar dos seus quase trinta anos.

Mas o que mais retenho desta visita é a enorme oferta de contacto e de trabalho com temas do interesse dos alunos que a escola lhes oferece. A aposta nos projectos transdisciplinares é fortíssima, cada aluno ou grupo tem direito a apresentar o projecto que deseja neste tipo de disciplina e a escola procura criar condições para o seu desenvolvimento. Estes projectos são acompanhados por pequenos grupos de professores, aqueles que parecem mais relacionados com os temas a tratar. Existe um estúdio de televisão onde vimos um grupo de alunos a fazer um *casting*, com a candidata a locutora, a maquilhadora, operador de câmara, operador de luz, realizador, técnico de montagem... não faltava ninguém. Noutra sala de produção-vídeo, igualmente super-equipada, vimos alunos que trabalhavam em pares na animação de imagens em computador. Ao lado outros faziam filmes para prendar a família, no fim do ano, com composição de fotos desde bebés até à idade actual. Mas os projectos podem não estar ligados às tecnologias da informação. Por exemplo, existe uma opção relacionada com a gestão de lojas, que funciona com base na papelaria da escola, que é totalmente controlada pelos alunos. Até existe uma disciplina opcional de Cosmetologia, que funciona como um salão de beleza onde os próprios alunos cortam e pintam o cabelo, decoram as unhas, fazem tatuagens, maquilhagens... Fomos convidados a entrar mas recusámos.

É claro que esta escola é uma escola modelo, não traduz a realidade americana, nem de perto nem de longe. Mas é bom saber que existem espaços onde um tal investimento é feito na educação, independentemente dos aspectos que nela nos possam desagradar, e onde os alunos e os professores podem exercer as suas capacidades e interesses em harmonia.

Se ficou com vontade de visitar esta escola e não lhe dá jeito apanhar o avião para Dallas, experimente www.gpisd.org/gpisd/schools/highschool/sgphs/Default.htm

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Materiais para a aula de Matemática

Os animais são nossos amigos

O NCTM promove todos os anos uma jornada mundial propondo que num dia previamente escolhido todas as escolas desenvolvam actividades matemáticas relevantes para os alunos. Este ano o evento decorreu no dia 28 de Abril, e o tema "Os animais são nossos amigos" pretendeu mais uma vez celebrar a Matemática como uma importante parte da vida. Para facilitar o tratamento do tema na sala de aula foi distribuída uma brochura com sugestões de actividades. As propostas apresentadas encorajam os alunos a explorarem a Matemática dos animais, fazendo uso desde a Geometria, para construir a casota do cão ou o estudo dos favos de mel, aos decimais, para comparar a velocidade em *sprint* dos animais selvagens, à modelação para comparar as idades dos animais com o homem ou a evolução de populações até ao desenvolvimento de projectos mais abertos de descoberta da Matemática relacionada com um determinado animal.

As actividades que se seguem foram adaptadas da brochura referida. A primeira é dirigida aos alunos do 1° ciclo. Propõe que as crianças criem e analisem gráficos baseados nos animais que têm em casa; a criação de um gráfico com os dados de todos os alunos possibilita uma exploração colectiva e a elaboração e análise de outros gráficos. Para além das questões da ficha muitas outras podem ser colocadas, por exemplo: Quantos alunos têm pelo menos um peixe? Quantos não têm um gato? Qual o número médio de animais em cada casa? Também podem ser pedidos gráficos circulares de percentagens e discutidas com os alunos as vantagens de utilização de uns ou outros gráficos.

Para calcular a média pode, por exemplo ser sugerido aos alunos que empilhem as várias barras de quadradinhos de modo a ficarem todas as barras com a mesma altura e se tal não for possível ainda podem estimar que a média está "mesmo acima" ou "mesmo abaixo" de um certo número.

A segunda actividade destina-se mais ao 2° ou 3° ciclos do ensino básico, embora também possa ser feita no 10° ano. A forma como os alunos são orientados é que deve ser diferente.

Por exemplo, na actividade dos cavalos, os alunos mais novos podem contar de três em três para completar a tabela enquanto que os alunos mais velhos podem preencher a última célula da tabela com $3x$ e definir a expressão $y = 3x$ para representar a relação.

Na questão 3 os alunos podem fazer gráficos em papel milimétrico para estimar as respostas às perguntas enquanto os mais velhos podem utilizar uma calculadora gráfica e usar os modelos de regressão. Para comparar os modelos linear

($y = 4.32x + 11.2$),

quadrático

($y = -0.053x^2 + 5.42x + 8.6$)

e fraccionário

($y = 13.87x^{0.63}$)

os alunos podem somar os valores absolutos das diferenças entre os dados e as idades previstas usando cada uma das funções (31.42; 24.34 e 29.88). A soma de menor valor pode indicar uma melhor adequação, que neste caso parece ser o modelo quadrático.

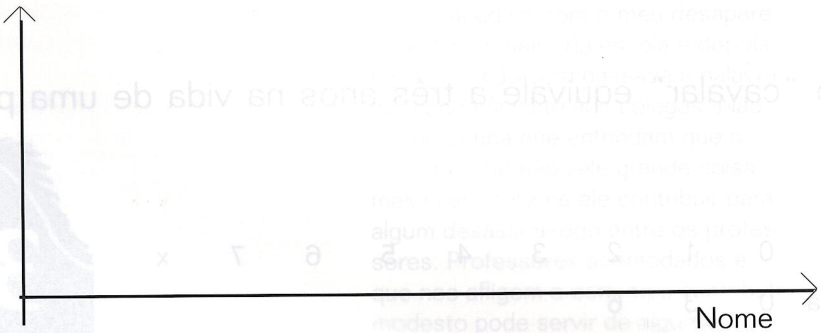
Para saber mais sobre estas actividades consulte www.nctm.org/wlme .

Paula Teixeira
E. S. D. João V
Damaia

Escola ....

Ano/Turma.................... Data....................... Aluno(a)...

Os animais saem dos eixos



cão — amarelo

pássaro — verde

tartaruga — preto

hamster — vermelho

gato — azul

peixe — branco

1. Escreve o teu nome por baixo do eixo horizontal. Coloca por cima do teu nome quadradinhos de cores correspondentes aos animais domésticos que tens em casa.

2. Repete o que fizeste no gráfico onde estão todos os alunos e está afixado na sala.

- Qual o aluno que tem mais animais em casa?
- Quantos animais tem o aluno que escreveu o nome em quarto lugar?
- Quantos alunos têm pelo menos um peixe?
- Quantos alunos não têm um gato?
- Qual é o tipo de animal que a maior parte dos alunos da turma tem?
- Qual é o tipo de animal que menos alunos da turma tem?
- Qual é o número médio de animais em cada casa?

3. Faz outro gráfico. Escreve agora o nome de todos os animais no eixo horizontal e coloca por cima tantos quadradinhos quantos os animais de cada tipo.

- Quantos cães há a mais que gatos?
- Quantas pernas têm os nossos animais todos juntos?
- Podemos usar este gráfico para indicar qual o animal doméstico mais popular?

Escola ....

Ano/Turma........................ Data........................ Aluno(a)...

Cães, cavalos e gatos!!

Os veterinários costumam comparar a idade de um animal com a de uma pessoa baseados no desenvolvimento dos ossos e dos dentes, assim como na maturidade em geral. A maior parte dos animais atingem a idade adulta mais rapidamente que as pessoas.

1. Em média, cada ano "cavalar" equivale a três anos na vida de uma pessoa. Completa a tabela:

Idade de um cavalo	0	1	2	3	4	5	6	7	x
Equivalência com a idade humana	0	3	6						...

- Qual é a idade "cavalar" equivalente à de um humano que tenha 10 anos de idade?

2. Há um ditado que diz que um ano de cão equivale a sete anos humanos, mas essa comparação não é exacta. A tabela aqui por baixo dá-nos uma ideia aproximada da comparação que pode ser feita entre as idades de cães ou gatos e as idades humanas.

cão ou gato	3 meses	6 meses	1 ano	2 anos	4	6	8	10	14	18	20	21
homem (em anos)	5	10	15	24	32	40	48	56	72	90	94	101

- Qual a idade humana equivalente à de um cão com 12 anos?
- Qual a idade de um cão equivalente à de uma pessoa com 20 anos?

3. Utiliza a calculadora gráfica para encontrares funções que se ajustem aos dados da questão 2.

Usa a função que melhor se adequa para responderes às questões:

- Quantos anos teria de ter um cão, ou um gato, para corresponder à idade de uma pessoa em 65 anos?
- O cão mais velho do mundo viveu na Austrália e chamava-se Bluey. Morreu com 29 anos e 5 meses de idade. Qual era a idade "humana" de Bluey?

Salpicos de didáctica da Matemática

João Maria de Oliveira

Aproveitando a nossa Revista que serve para que todos possamos passar a palavra e divulgar as nossas ideias, proponho-me apresentar o que fui experimentando através da minha vida de professor, relacionado com um método que criei e a que chamei "Cuisen'eu".

Agora que me aposentei, dou comigo a pensar que se calhar todo o meu trabalho de 35 anos de experimentação se apagará com o meu desaparecimento, primeiro da escola e depois da vida, e não será passada a palavra de modo eficiente aos colegas. Não me preocupa que entendam que o meu trabalho não vale grande coisa, mas ficarei feliz se ele contribuir para algum desassossego entre os professores. Professores acomodados é que nos afligem e este meu contributo modesto pode servir de alguma "provocação".

O que aqui me proponho divulgar tem a ver com o método a que chamei "Cuisen'eu", o qual criei a partir da ideia de Cuisenaire. Chamei-lhe assim porque no meu tempo de aluno do Magistério se contava que um professor teria respondido a um Sr. Inspector que o inquiriu sobre que método usava dizendo: "uso o meu" !... Para mim, aqui, deu "Cuisen'eu".

Antecedentes do método "Cuisen'eu"

I - Condições económicas

Por volta do ano de 1967, estando eu no meu 6° ano de trabalho docente e a minha esposa frequentando o 2° ano da Escola do Magistério Primário de Santarém, veio a esta cidade o Dr. João Nabais fazer um seminário sobre o método Cuisenaire. Como as possibilidades económicas do casal eram demasiado fracas para pagar duas inscrições, resolvemos que participaria só ela. Do referido seminário, a minha mulher trouxe para ela e para mim as ideias e alguns apontamentos que estavam incluídos no preço da inscrição, mas não trouxe material didáctico e livros por óbvias razões. Pelo que conversámos, logo pensei que era capaz de ser um caminho dinâmico e versátil para motivar os alunos, dadas as possibilidades que eles teriam de manusear o material respectivo. Mas fiquei-me por aqui, pensando e sonhando, que era para o que dava o ordenado dum professor de onde ainda tinha de sair a mensalidade para os estudos da mulher.

A instituição Escola não tinha possibilidades de ter biblioteca ou simplesmente o livro referente ao método e o respectivo material. Restava-me estar quieto, prejudicando a minha carreira e um maior sucesso dos meus alunos.

II - Condições de liberdade

Nos anos até ao 25 de Abril de 1974, não havia grandes possibilidades dum qualquer professor sonhador começar a pôr sonhos em prática, porque todo o sistema era rígido e controlado e sair daquele carreirinho era perigo à vista.

A hierarquia vigiava qualquer desvio, não fosse aparecer por aí inovação subversiva. Os alunos eram submetidos a exames desde o 1° ao 4° ano e todo o saber que deviam mostrar era muito normalizado, padronizado, muito decorado, enfim. Quaisquer inovações metodológicas dariam forçosamente exames fora da norma, e a norma era os alunos responderem de forma não pensada mas simplesmente decorada, evidenciando um falso desembaraço. Através dos resultados dos exames dos alunos controlavam-se também os professores. Então, tornou-se-me impensável implementar qualquer coisa parecida com o método referido.

Outro factor que também desencorajava a inovação era não ganhar nada com isso e poder perder muito. O fazer como sempre se fez traz segurança, rotina e menos trabalho, paz e harmonia no meio, paridade com os outros, confiança dos encarregados de educação e tranquilidade na hierarquia. O inovar traz insegurança porque foge à norma, faltam-nos pontos de referência e apoio, nunca sabemos muito bem se vamos no caminho certo e o tempo perdido nunca se recupera, cria desconfiança entre pares e encarregados de educação e algum "disse que disse", exige mais trabalho de preparação, origina mais reparos da hierarquia, etc. Se Cristo foi morto por inovar!... O reconhecimento pela inovação ganha-se, normalmente, a título póstumo. Enquanto o regime político e os exames não caíram, não se inovou. Havia que não fazer ondas. E eu por aí andei!...

III - O 25 de Abril

A revolução veio quebrar todos os condicionalismos existentes e deu-se uma verdadeira explosão de vontades, de quereres, de voluntarismos, de experimentações, de erros e de êxitos, ao fim e ao cabo, os resultados normais duma revolução. A hierarquia reformulou-se e os exames caíram. E apareceu em força a discussão sobre as vantagens e/ou desvantagens da integração e da segregação dos alunos ditos deficientes, hoje inclusão/exclusão de alunos com dificuldades de aprendizagem.

Por volta do ano lectivo de 1975/76 apareceu na minha escola uma criança surda muda profunda, cujos pais se apresentaram para procederem à sua matrícula. Nessa altura de grande generosidade, as três escolas da sede do concelho do Cartaxo resolveram fazer os seus conselhos escolares em conjunto, para que as decisões fossem uniformes em toda a cidade, sendo ao todo cerca de trinta professores a decidirem em democracia directa e num tempo em que tudo tinha de ser bem discutido e votado por todos. Tempos heróicos!

A Escola tinha ganho grande poder de discussão mas, no que diz respeito à sua estrutura, estava na mesma. À volta da ida da referida aluna para a escola, gerou-se grande discussão, dizendo uns que não iria fazer nada numa escola que não tinha nada para lhe dar e não tinha professores especializados, dizendo outros que a escola a devia aceitar por direito que à aluna se reconhecia, dando-lhe a escola e os professores aquilo que pudessem porque a mais não seriam certamente obrigados. Eu tomei a defesa da integração da aluna nas condições que tínhamos, mas, pelos consensos formados, logo vi que estava em minoria. E logo fui ouvindo dizer por ali que teria tomado aquela posição porque sabia que ela não me caberia por eu não estar a receber alunos novos nesse ano. Mas como a integração, mesmo em minoria, tem a ver mais com a moral do que a segregação, a matrícula acabou por ser aceite por consenso. E a aluna não me calhou nesse ano.

No ano seguinte o meu grupo de professores tinha de receber alunos do 1° ano e as turmas ficaram pequenas. Mas sendo os alunos do 2° ano numerosos e as turmas grandes, fomos obrigados a receber também alunos deste ano para descongestionar e equilibrar as turmas. Nesse grupo de alunos a redistribuir estava incluída a aluna surda muda. Eu não estava a perceber o que me estava a ser preparado, mas logo por ali ouvi dizer, mais ou menos em segredo, que desta não me escapava, que nem sequer a aluna seria sorteada como de costume, uma vez que eu tanto tinha defendido a sua entrada. Não tive coragem de exigir o tal sorteio e fiquei mesmo com ela.

Durante as férias passei o tempo a pensar como é que eu, sem preparação especial para o caso e comprometido com a sua defesa, havia de me reconverter em termos metodológicos no sentido de dar resposta às exigências da aluna e de todos os alunos da turma que não era pequena.

Foi então que me lembrei das tais reguinhas com as quais poderia concretizar toda a Matemática, tanto para aluna surda muda, como para os outros alunos. Manusear material na procura de conceitos dispensa muita conversa (ensino expositivo) e isso era bom tanto para ela como para os alunos normais. Comecei a fazer as minhas réguas com as quais todos os meus alunos iam aprendendo e eu também, pois ia vendo com entusiasmo que os conceitos estavam ali mesmo à mão. Tudo correu de tal maneira bem, que os alunos ditos normais aprenderam a ensinar a referida aluna de forma brilhante, a tal ponto que se tornaram meus coadjutores e foram depois o seu braço direito até ao 8° ano, conseguindo que ela tivesse sucesso. Mas viemos a perder a aluna neste ano, porque a escola de recepção separou a turma em função das novas opções que cada um resolveu tomar. E a aluna resolveu deixar de ir à escola.

A divulgação do "Cuisen'eu"

Eu próprio comecei a ficar entusiasmado com o que aprendia com os meus alunos na exploração do material que todos manuseávamos no dia a dia. Estava sempre vendo, ali mesmo junto de nós, conceitos que se tornavam simples de apreender pelos meus alunos. Então, mesmo não sendo do programa, mas relacionando-se directamente com o que se estava a tratar, experimentava-se.

Tudo foi tomando novas formas, de tal modo que o novo método, de semelhante com o verdadeiro Cuisenaire, só tinha a sua raiz etimológica. Evoluiu, tanto no material concretizador e nos diferentes passos para trabalhar os conceitos, como na preocupação de facultar aos alunos uma liberdade de contacto e exploração dos materiais e de incentivar a procura autónoma de caminhos (interacção). Deste modo fazia com que cada conceito seja sempre a propedêutica do conceito seguinte, já que se pretende que a matemática não seja constituída de compartimentos estanques.

Dado o método começou a ser novidade conhecida e solicitada, e entendendo eu que será sempre obrigação de cada professor pôr à disposição de todos os outros os seus progressos, não para serem cegamente seguidos, mas para serem criticamente avaliados e eventualmente aproveitados, ainda que modificados e adaptados, meti-me à estrada pelos caminhos do meu distrito, mostrando aos meus colegas como o método funcionava. Como tinha muito receio que me acusassem de que aquilo era só teoria sem aplicabilidade prática, resolvi, com a colaboração da Câmara Municipal do Cartaxo que me fornecia o transporte, levar sempre os meus alunos para trabalharem comigo nas demonstrações que fazia do método. Assim, fiz acções de formação em escolas de vários concelhos e em algumas escolas superiores de educação.

Quando fiz a candidatura ao 8° escalão, apresentei no meu currículo a criação do método "Cuisen'eu". Fiz os impossíveis por demonstrar que com este método era possível trabalhar com sucesso todos os conteúdos que neste trabalho vão descritos, mas não me livrei de um membro do júri argumentar que não acreditava que fosse possível que crianças do 1° ciclo assimilassem esses conteúdos. Sucedeu aqui o que eu sempre temi nas acções que fiz para os meus colegas, porque não me era permitido levar os meus alunos para demonstrarem o método na prática. Porém, tinha ido assistir à defesa da minha candidatura uma colega que tinha sido minha formanda numa acção de formação na Escola Superior de Educação de Santarém, quando ela ali era aluna. Pois a minha colega, indignada com o que ouviu, e porque tinha visto os meus pequenitos alunos a trabalharem esses conteúdos e respectivas estratégias com desenvoltura, interrompeu o júri, e, alto e bom som, afirmou que era verdade sim senhor, porque ela tinha visto os alunos a trabalharem esses conceitos lá na sua Escola Superior. Felizmente, o júri reagiu bem ao acontecimento e eu ofereci-lhe uma série de trabalhos feitos pelos meus alunos que ali não estavam para me defenderem. Fui aprovado com a classificação de MUITO BOM, e aqui deixo a minha homenagem de agradecimento à referida colega, pela coragem com que enfrentou a injustiça da afirmação do membro do júri.

A matemática com o "Cuisen'eu"

Como tenho sentido grandes dificuldades em demonstrar que é possível fazer esta matemática por este caminho com os alunos do 1° ciclo a quem não os vê trabalhar, pelo facto de abordar conteúdos que por norma só são trabalhados no 2° e mesmo no 3° ciclo; como tenho verificado quanto é útil trabalhar o programa do 1° ciclo no sentido do que os alunos encontrarão nos outros ciclos, evitando perdas de tempo em recomeçar tudo de novo; como sinto o dever de passar a palavra a todos quantos possam manifestar algum interesse em aproveitar o meu trabalho de "investigação" de mais de vinte anos em benefício dos alunos deste país; aqui fica este testemunho criado com muito empenho e provavelmente com pouco engenho.

Não se pretende que este trabalho seja um estudo exaustivo da Matemática, nem que trate de todos os assuntos possíveis. Ele é essencialmente um apanhado de propostas metodológicas que o autor pensou e implementou nas suas práticas escolares. A tentativa era tornar a aprendizagem mais dinâmica, mais participativa, no sentido de os alunos mexerem muito no muito material, sempre à sua disposição, na procura dos caminhos, sentindo-se, de alguma maneira, construtores dos seus saberes.

Sabemos que o método próprio da matemática é o dedutivo, porque toda ela são abstracções, produtos do nosso raciocínio e avessas a concretizações. Para os nossos pequenos alunos teremos que a trabalhar pelo método indutivo, recorrendo à tentativa de concretizar, manuseando material e correndo alguns riscos de imprecisão nos conceitos. Mas não podemos ter tudo!

A este propósito, ainda hoje me lembro quanto era embaraçoso no meu curso, mostrar aos alunos a igualdade entre o litro de líquidos e litro de sólidos, entre a caixa do decímetro cúbico e o decímetro cúbico. Aquilo nunca dava certo, por mais cuidado que tivéssemos ao enchê-los fosse com o que fosse. E nós, futuros professores, mas ignorantes na análise das vantagens e desvantagens dos dois métodos, procurando esconder o fracasso da concretização dos alunos a quem aquele trabalho se destinava, não

Material didáctico estruturado necessário no Método Cuisen'eu

- 30 réguas uns com 3x3x1 cm, com perímetro traçado, e um objecto marcado e inscrito.
- 30 réguas dois com 3x6x1 cm, com os perímetros traçados, e objectos marcados e inscritos.
- 30 réguas três com 3x9x1 cm, idem.
- 30 réguas quatro com 3x12x1 cm, idem.
- 30 réguas cinco com 3x15x1 cm, idem. (Todas com o n° de objectos traçado no fim da régua)
- 30 réguas seis com 3x18x1 cm, idem
- 30 " sete com 3x21x1 cm, idem
- 30 " oito com 3x24x1 cm, idem
- 30 " nove com 3x27x1 cm, idem
- 30 " dez com 3x30x1 cm, idem
- 10 réguas de 3x3x1 cm em branco e com o X escrito numa determinada cor.
- 10 réguas de 3x6x3 cm em branco e com o X escrito numa outra cor.
- 10 réguas de 3x9x1 cm em branco e com o X escrito noutra cor.
- 10 réguas de 3x12x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x15x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x18x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x21x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x24x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x27x1 cm, idem.
- 10 réguas de 3x30x1 cm, idem.
- 500 cubos de 3x3x3 cm.
- 1 caixa de blocos lógicos, tendo nós de furar todas as peças com um berbequim.
- 1 expositor de blocos lógicos.
- Plasticina.
- 1 balança de pratos suspensos improvisada.
- 1 baloiço bacalhau pequeno improvisado.
- 1 colecção de arames zincados grossos e direitos com 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30 cm.
- 1 colecção de arames, idem, mas dobrados todos de maneiras diferentes.
- Tubos de plástico de 3 cm, abertos, em cujo interior entrem justos os arames referidos.
- Vários cartões quadrados e rectangulares cujas dimensões sejam múltiplas de 3 cm.
- Várias caixas de cartão, em que umas caibam dentro umas das outras e outras não.
- 1 máquina de calcular para cada aluno.
- 1 garrafão de água transparente, cortado por cima de modo a ficar cilíndrico.

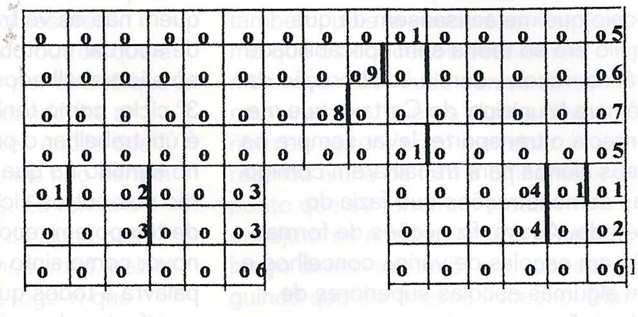
trabalhávamos nem um nem o outro método. Tentávamos que os alunos raciocinassem em vez de verem, quando eles só podiam ver para depois raciocinarem. No entanto, se vissem concluiriam que não era tanto assim, e lá se ia o raciocínio. E nós, em vez de fazermos o jogo claro, procurávamos esconder. Há que concretizar, alertando para os possíveis erros que serão corrigidos com as nossas chamadas de atenção, para as falhas que só o nosso raciocínio poderá corrigir. É como querer concretizar que o metro tem mil milímetros; ou que os ponteiros dum relógio formam um ângulo recto às três horas exactas, etc. A gente lá vai tentando, mas aquilo nunca dá certo. São conceitos a que se chega por abstracção. Estes alunos só mais tarde conseguem abstrair, mas fá-lo-ão tanto mais cedo quanto mais manipularem material didáctico estruturado, mesmo que funcione só por aproximação.

O número e o "Cuisn'eu"

Deixem-se os alunos brincar à sua vontade, ainda que vigiados, dando-lhe réguas Cuisen'eu para eles fazerem o que bem lhes apetecer, que no fim da aula arrumarão nos caixotes onde estavam. Podemos também deixá-los brincar com os cubos Cuisen'eu, e as crianças criarão com eles volumes e figuras a três dimensões, em simultâneo ou não com as réguas. Também podem brincar à vontade com os blocos lógicos, porque com eles farão coisas interessantíssimas e analisá-las-ão. E se lhe dermos plasticina e os convidarmos a fazerem com elas pequenas bolinhas, mais ou menos do tamanho de uma que nós fizemos para modelo, eles avaliarão volumes e farão com certeza contagens espontâneas e compararão a quantidade de bolinhas que fizeram, com a do colega ali ao lado. Isto dá para muitos dias de trabalho, ensinando o professor quase nada e os alunos aprendendo muito. A pouco e pouco começarão a verbalizar coisas interessantíssimas que o professor irá arrumando.

Durante os primeiros dias de aulas, manusear réguas, construir estruturas tipo lego, ir buscar as réguas que faltam aos caixotes e arrumá-las no fim dos trabalhos nos referidos caixotes, comparando os números de cada régua com o que está escrito no caixote respectivo, ou comparando a quantidade da régua que se quer lá pôr com a quantidade da régua que lá estiver dentro, é uma actividade matemática muito rica. Os alunos farão necessariamente, por correspondência, comparações de quantidades, concluindo qual a quantidade maior, a menor ou se são iguais, fazendo mesmo várias operações intuitivamente.

Mais tarde, pondo à disposição dos alunos cubos Cuisen'eu, eles construirão estruturas em articulação - réguas cubos - mais enriquecidas. Aqui aparecem práticas com superfícies e volumes criados e utilizados pelos alunos. Um exemplo de trabalho que os alunos gostam de fazer com as réguas Cuisen'eu (ver fig. 1), é uma parede duma garagem onde eles guardam os carrinhos com que brincam na escola na hora da Matemática. Todos os alunos costumam ser capazes de fazer um trabalho deste tipo sem que o professor intervenha. Muitas vezes influenciam-se uns aos outros, mas repare-se no que um aluno acabado do chegar à escola é capaz de fazer:



O Representa um desenho marcado nas réguas (fruto, objecto, etc.)

figura 1

1° Tem de centrar a porta da garagem, ficando igual espaço à esquerda e à direita e de modo a que o carro entre.

2° Na segunda fiada de réguas, não tendo a seis, ele substitui-a pela três e outra três no lado esquerdo, e pela quatro mais a dois no lado direito.

3° Na terceira fiada, ele substitui a régua seis duma outra maneira.

4° Na quarta fiada, ele descobre que a largura total da garagem leva a régua quinze, que para fazer o 15 ele necessita da régua dezena e da régua cinco e provavelmente descobre que a porta da garagem tem a largura da régua três.

5° Ele descobre nas outras duas fiadas que o 15 se pode constituir também com o 8 e o 7 e com o 9 e o 6.

6° Na última fiada ele volta a concluir que o 15 se constrói com a dezena e a régua cinco.

7° Se no fim quiser pôr o telhado na garagem, e quase sempre querem, terá que verificar que aqui só pode usar réguas inteiras e que a maior possível é a dezena. Descobre que o comprimento ou a largura afinal não podem medir mais do que a régua dez para lhe ser possível colocar o telhado.

Eles não verbalizam este tipo de raciocínios que necessariamente terão de fazer a fim de concluírem um trabalho como este. E repare-se na sua riqueza matemática. Quantos problemas não terá de resolver cada aluno para levar a cabo a sua construção?

O professor não teve que fazer um ensino expositivo. Apoiou, incentivou e tudo funcionou por interacção aluno/material didáctico estruturado e/ou aluno/aluno. A criatividade foi dos alunos. Eles gostam do que criam. E a falta que a matemática lhes faz!...

I - Menor, maior e igual; <, >, =

Com os jogos anteriormente feitos os alunos praticaram intuitivamente e usaram, interiorizando as noções de maior, menor e igual. Basta agora que se sistematizem os conceitos. Com ripas como as dos paus de algodão doce, podemos mostrar os sinais >, <, e =. Para isto só tem interesse a concretização e manuseamento do material, uma vez que os alunos ainda não sabem escrever.

II - A unidade

É natural que os alunos, através dos jogos anteriores, já tenham percebido a unidade, fazendo a correspondência um a um. Poderemos agora sistematizar o conceito de unidade, dando a cada aluno réguas de 1 a 10 - uma de cada - convidando-os a organizar escadinhas, na Horizontal e na Vertical. Naturalmente todos verificarão que o que falta a cada régua para ser igual à imediatamente superior é uma unidade. Note-se que uma régua representa uma quantidade.

III - Os algarismos

É natural que todos os alunos já tenham verificado que a cada régua/quantidade corresponde um símbolo lá escrito, e diferente para cada régua. É também natural que grande parte dos alunos não faça já a correspondência para comparar as réguas/quantidades e use simplesmente os símbolos que lhes andam associados. E a pouco e pouco todos o farão por ser mais prático e rápido. Nesta altura todos dominarão o conceito de algarismo e a sua função.

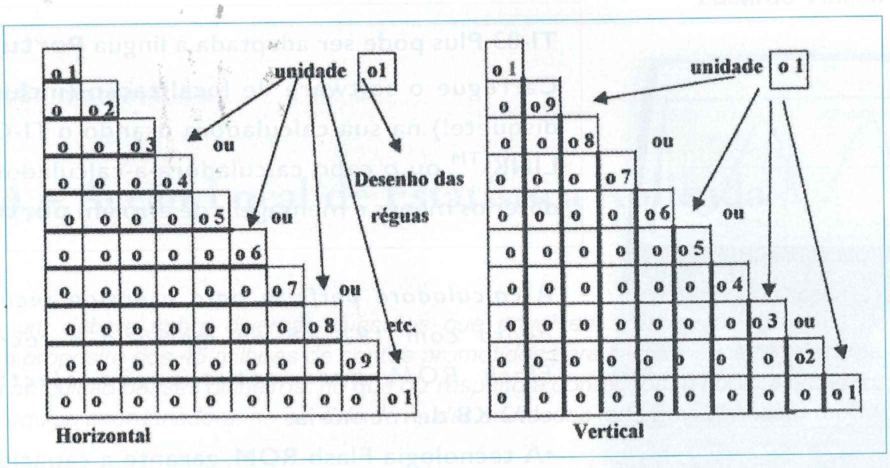


figura 3

IV - Decomposição de números

Com certeza já todos os alunos, nas actividades anteriores, concluíram (e utilizaram) que duas quantidades juntas constituem uma maior que lhe corresponde. Já realizaram, de modo intuitivo, o processo de composição/decomposição duma quantidade. Interessa agora organizar a prática, sistematizar e usar o processo. Para isso basta pôr uma régua - por exemplo 3 - na horizontal e em posição de destaque, e convidar os alunos a reconstituir aquela quantidade com outras réguas de modo a que cada reconstituição não seja igual à anterior. Por exemplo:

2 + 1 fica igual a 3,

1 + 2 fica igual a 3,

1 + 1 + 1 fica igual 3,

até este momento, usando só a adição. Por cada reconstituição/decomposição deve ser feita a sua leitura oral.

Com muita facilidade as crianças montam, lêem e escrevem simples mas úteis expressões numéricas, convivendo com as operações aritméticas, sem definições nem discursos do professor. Se cada aluno da turma propuser uma decomposição, outro a interpretar e outro a escrever no quadro, temos aqui matéria rica para umas aulas dinâmicas em que o professor pouco falará, pouco ensinará. Os alunos corrigir-se-ão uns aos outros e seguramente aprenderão rapidamente por estarem mutuamente motivados. A interacção aluno/material e aluno/aluno funcionará.

João Maria de Oliveira
Professor aposentado do 1° ciclo

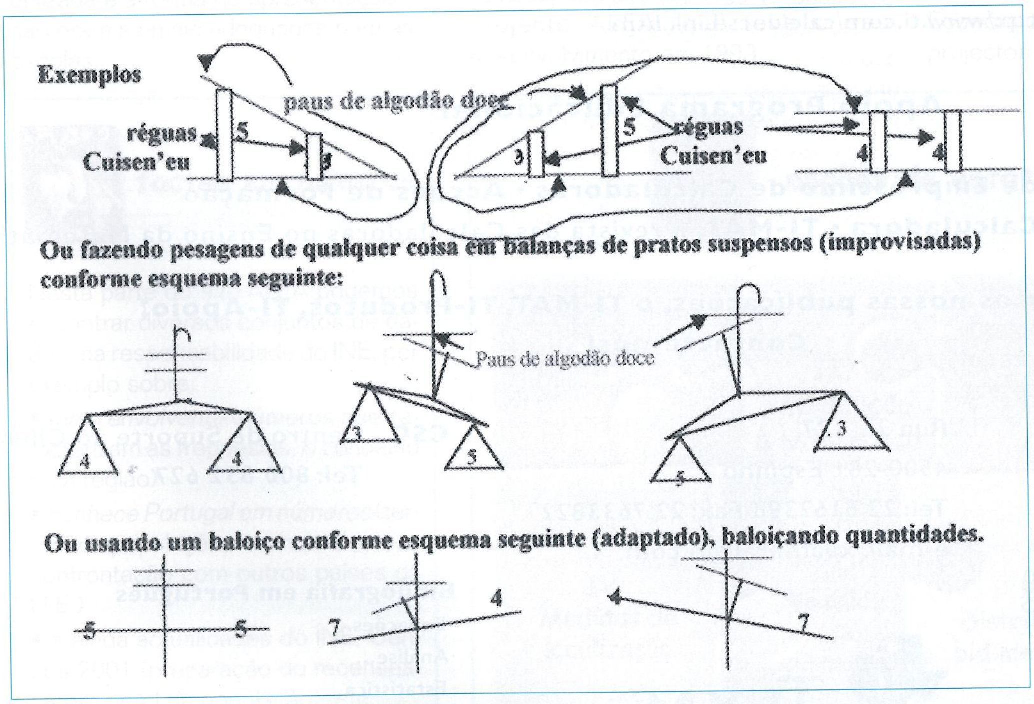


figura 2

Eduardo Veloso

ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada

No último número abrimos, neste local, um debate sobre diversas questões que envolvem a utilização concreta de computadores em educação matemática, a propósito dos 45 milhões de contos prometidos para a informática nas escolas. Apresentámos, como exemplo a seguir na atribuição desses dinheiros, no que diz respeito a conteúdos, o apoio a projectos como o ALEA. Entrevistámos por e-mail a equipa coordenadora, no sentido de ajudar os nossos leitores a conhecer melhor alguns aspectos desse projecto.

O projecto ALEA resulta da parceria entre a Esc. Sec. Tomaz Pelayo (ESTP) e o Instituto Nacional de Estatística (INE). No projecto intervêm os colegas Emília Oliveira e José Gomes, da ESTP e Pedro Campos, Rui Martins e João Poças, do INE, que responderam em conjunto à entrevista, a qual foi feita por e-mail.

E&M: Como nasceu a ideia do ALEA? Inspiraram-se em algum projecto estrangeiro? Quais os principais objectivos?

ALEA: A ideia do ALEA surgiu depois da apresentação na nossa escola, em Novembro de 97, do serviço *infoline* do INE. Achámos interessante e importante a informação disponibilizada, no entanto, a linguagem utilizada e a forma de apresentação não eram as mais adequadas para as escolas.

Esta opinião era partilhada pelas duas entidades, pois por um lado, o INE sentia a necessidade de atingir e cativar o público escolar para a informação estatística, e por outro, a escola estava em fase de implementação da utilização das TIC, com vários projectos em desenvolvimento. Nasce assim, o projecto "*Infoline* no Ensino Secundário", aprovado pelo PRODEP, projecto precursor do projecto ALEA.

Fizemos então um levantamento na Internet de iniciativas nesta área. De maior destaque, conhecemos a experiência do Canadá e da Nova Zelândia, mas da responsabilidade dos respectivos Institutos Nacionais de Estatística. Em 1998, apresentámos nova candidatura ao PRODEP, já como projecto ALEA, que teve o seu desenvolvimento em 1999.

Destinado a promover a literacia estatística junto dos alunos e professores do ensino básico e secundário, tem como objectivo essencial criar suportes pedagógicos inovadores para apoio ao ensino da Estatística e à utilização das estatísticas nas escolas.

E&M: Tendo por base a vossa experiência, que tipos de utilização sugerem como mais apropriadas para a exploração do vosso site por professores e alunos?

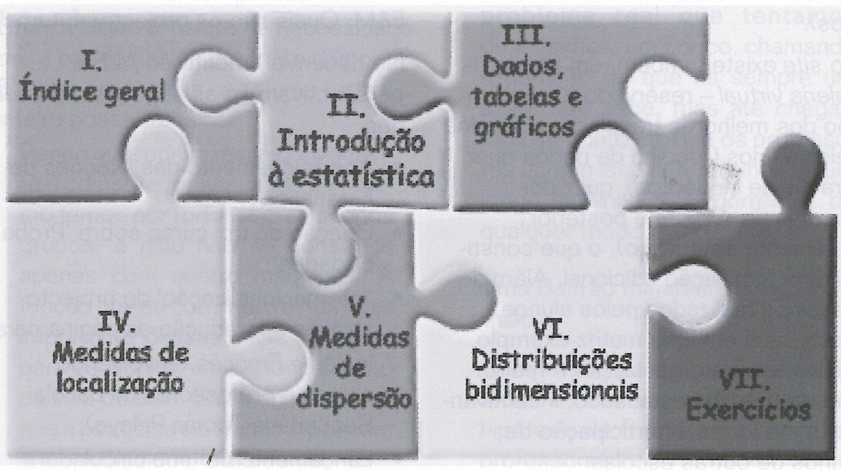
ALEA: O ALEA pode ser utilizado como um importante meio de apoio à disciplina de Matemática na leccionação do tema Estatística (e brevemente também do tema Probabilidades), nas disciplinas de Geografia, Introdução à Economia, Introdução ao Desenvolvimento Económico e Social e também em projectos interdisciplinares.

factos em números

Nesta parte do *site* ALEA podemos encontrar diversos conjuntos de dados, da responsabilidade do INE, por exemplo sobre:

- *meio envolvente* (números que caracterizam as freguesias, o concelho ou a região)
- *conhece Portugal em números* (território, população, economia e sua confrontação com outros países da U.E.)
- e ainda actualidades do INE, Censos 2001 (preparação do recenseamento geral da população), etc..

noções de estatística



Na nossa escola, o ALEA é uma ferramenta pedagógica utilizada por um número cada vez maior de professores e alunos, em várias disciplinas, em que a informação estatística disponibilizada (ver caixa *factos em números*) constitui um suporte à leccionação de temas económicos, sociais, demográficos e também a temas associados ao ambiente e à integração europeia. Além das estatísticas oficiais nacionais e do EUROSTAT, divulga ainda algumas operações estatísticas em curso (recenseamento geral da agricultura e censos 2001). Mas é, principalmente, na utilização das páginas das Noções de Estatística que a experiência nos diz mais. No presente ano lectivo, no 10º ano, a Estatística foi leccionada ao longo dos 2º e 3º períodos sob a forma de trabalho de projecto, sendo o ALEA um importante apoio no trabalho, quer em contexto de aula, quer fora da sala de aula. As páginas das *noções de estatística* (ver caixa) seguem o programa do 10º ano de escolaridade (a partir de um trabalho de base da Prof. Doutora Mª Eugénia Graça Martins), possibilitando ao aluno maior autonomia e motivação no estudo, cabendo a nós professores a orientação na abordagem dos diferentes conteúdos.

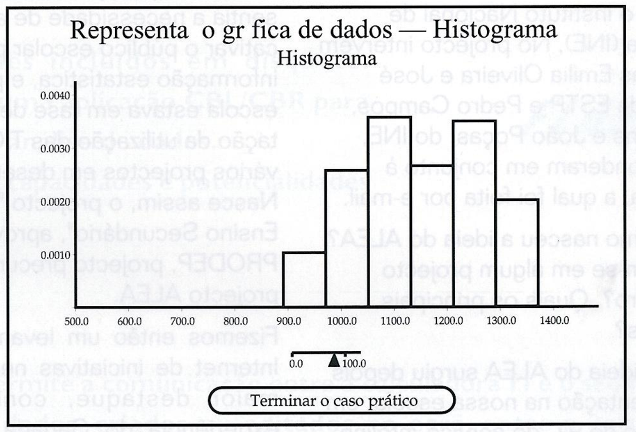
Embora se encontre ainda em fase de aperfeiçoamento (principalmente no que respeita à animação gráfica e à inclusão de mais *applets*) no item das "Noções de Estatística" é já possível desenvolver actividades interactivas, que privilegiamos em contexto de sala de aula (ver caixa com três exemplos).

No *site* existe também, um espaço – *galeria virtual* – reservado à publicitação dos melhores trabalhos realizados pelos alunos (recolha de dados quer através de inquéritos, quer por observação directa e posterior tratamento estatístico), o que constitui uma motivação adicional. Além de trabalhos realizados pelos alunos, existe também uma matriz-exemplo, facilitadora da organização e realização do trabalho estatístico, incentivando desta forma a participação de alunos de outras escolas.

Exemplos de actividades interactivas com o ALEA

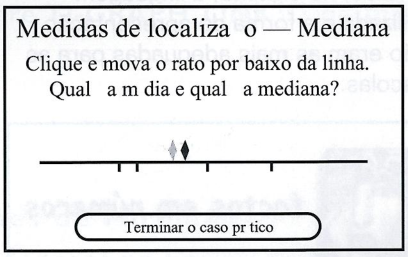
A) Na abordagem da organização de dados contínuos – quantas classes se devem considerar, para fazer a redução de um conjunto de dados? (ver endereço http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html/cap3_2_8.html). Além do exemplo apresentado é possível, ao utilizador, calcular o número de classes para a redução do seu conjunto de dados em estudo.

B) No estudo das representações gráficas, em particular do histograma, (ver endereço http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html/cap3_2_14.html) existe um *applet* que evidencia os cuidados a ter na construção de um histograma. No histograma seguinte, o movimento do cursor por baixo do eixo dos XX permite controlar a amplitude das classes e, assim, obter diferentes padrões no histograma. Deste modo, os alunos compreenderão melhor o efeito de alguns parâmetros no desenho dos gráficos.



C) No capítulo das medidas de localização (ver endereço http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html/cap4_4_3.html) existe um outro *applet* que confronta a média com a mediana.

Clicando e movimentando o rato por baixo da linha, vão sendo introduzidos dados surgindo dois símbolos, um representando a média e outro a mediana. Permite testar a robustez da mediana em relação à média e também verificar se o aluno domina os dois conceitos.



E&M: Quais são os projectos futuros?

No desenvolvimento do ALEA, perspectivam-se as seguintes actividades:

- Aperfeiçoamento das 'Noções de Estatística';
- Criação de um curso sobre 'Probabilidades';
- 'Internacionalização' do projecto através da tradução da página para Inglês e Francês (envolvendo alunos e professores da Escola Secundária Tomaz Pelayo);
- Lançamento de uma calculadora gráfica: a nossa 'CalcAlea';
- Dinamização de um projecto de formação de professores à distância, envolvendo: o ensino da estatística, a utilização de estatísticas nas diversas disciplinas, bem como a concepção de projectos interdisciplinares, associados sempre a uma vertente de utilização e dinamização das TIC;
- Dinamização das estatísticas internacionais (Eurostat, ONU, OCDE, ...);
- Criação de um espaço próprio sobre estatísticas dos PALOP;

- Enriquecimento do espaço lúdico com novos jogos (para breve o jogo da glória), curiosidades e humor estatístico, enriquecidos com desenhos originais.

E&M: Sei que têm em lançamento um CD-ROM tendo por conteúdo o vosso *site*. Como pode ser obtido?

ALEA: Cumprindo um dos objectivos do projecto PRODEP será enviado, ainda esta semana, através da Direcção Regional de Educação do Norte, um exemplar do CD ROM a todas as Escolas Secundárias do País. Gostariamos de o poder disponibilizar face a outras solicitações, no entanto, devido à tiragem reduzida, será uma hipótese um pouco remota.

Endereços:

Site ALEA:http://alea-estp.ine.pt

Factos em números: http://alea-estp.ine.pt/Html/statofic/html/estatofic.html

Noções de estatística: http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html/nocoes.html

Galeria virtual: http://alea-estp.ine.pt/html/galvirt/html/galeriavirt.html

Dossiers e recursos: http://alea-estp.ine.pt/html/statofic/html/dossier/html/dossier.html

"Computadores" – um fórum de discussão na revista e *online*

No último número da revista, foi publicado, nesta secção, um artigo intitulado "Que fazer com 45 milhões de contos" que abriu uma discussão sobre alguns pontos relativos às formas concretas de desenvolver e rentabilizar a utilização de computadores na educação matemática. Nas páginas web da APM foi aberto um Fórum de discussão com o título "Computadores" que já recebeu até agora sete contribuições. Parece-nos cedo para qualquer tentativa de síntese ou conclusiva e, portanto, optámos por fazer curtas transcrições que julgamos significativas das diversas contribuições. Sugerimos, no entanto, que os nossos leitores interessados nesta problemática leiam os textos integrais no Fórum e reajam com novas contribuições. O endereço é http://www.apm.pt/foruns.

Paula Teixeira parte da frase (do artigo de abertura) "O modelo exclusivo da sala atafulhada de computadores, onde apenas se pode fazer trabalho com computadores, deve ser abandonado como objectivo único [...]." e faz o seguinte comentário:

> A palavra atafulhado desvaloriza a ideia de uma sala com computadores e esse deve ser, em muitos casos, um objectivo fundamental. Estou a pensar em escolas como a minha onde muitos (a maioria) dos alunos não sabem trabalhar com computador porque não tem em casa e a escola não dispõe de um centro de recursos com computadores. [...]. Penso que se deveria dizer que o mínimo era haver uma sala com muitos computadores sempre aberta aos alunos e com pessoas que dessem apoio na realização dos trabalhos dos alunos. Depois, relativamente à Matemática, haver uma sala com computadores que os professores possam utilizar com toda a turma e haver várias outras salas com dois ou três computadores.

Adelina Precatado reage da seguinte forma ao artigo de abertura:

> Estou completamente de acordo com as ideias, mas não estou completamente de acordo com a forma. Os laboratórios ainda nem sequer existem e não têm que ser salas "atafullhadas" de computadores. Penso que as nossas preocupações se deviam centrar mais em que tipo de utilização devem os alunos e os professores de Matemática ter oportunidade de fazer, e aí, parece-me indispensável haver espaços onde todos os alunos de um turno (meia turma) possam trabalhar simultaneamente nos computadores e, por outro lado, ser possível ao professor e a alguns alunos utilizar de forma corrente (sempre que queiram) alguns computadores. Estabelecidas estas metas, cada escola encontrará a melhor forma de distribuir os computadores....

Branca Silveira insiste na necessidade de, a par das salas preconizadas por EV, existirem salas onde uma turma inteira possa trabalhar:

> Penso que, por vezes, é conveniente o computador ser usado ao mesmo tempo por todos, em pequenos grupos, e isso não se consegue apenas com quatro máquinas. A função que eu considero ainda mais importante dessas salas é serem, para os alunos, um prolongamento da sala de aula. Salas abertas para que a pesquisa e o trabalho possam ser continuados fora da aula.

E levanta um problema ainda não abordado mas muito importante:

> O que ainda não acontece nas nossas escolas e já deveria estar instituído é o lugar de um técnico para manutenção do parque informático. O número de computadores e de outro material que algumas escolas possui neste momento já justificava esse lugar. Não podemos continuar a pedir aos professores que sejam também técnicos de manutenção informática. E sabemos que a parte técnica afasta muitos da utilização do computador e isso é visível nos cursos onde há sempre colegas que referem a insegurança que sentem pelas falhas técnicas. É um problema real que tentamos desmistificar um pouco, chamando a atenção de que há sempre um aluno que sabe, mas até chegarmos ao ponto em que os professores achem isso natural ainda há um longo caminho a percorrer, e, de qualquer modo, não é solução.

Fátima Bairrão manifesta a seguinte opinião:

> Computadores sim, mas depois de todas as escolas apetrechadas e hipótese de formação a todos os professores.

Tina Gregório serve-se de uma descrição do trabalho gradual que têm feito, na sua escola, apoiados pelo Projecto Nónio, para discordar desta opinião:

> Não concordo que tenhamos de esperar que todos os professores tenham formação, antes os que já têm vão motivando os outros e cria-se uma dinâmica de interacção interessante, às vezes lenta outras mais rápida e entusiasta.
>
> Aproveito para reforçar, também, uma ideia: os computadores são apenas mais uma ferramenta que é importante utilizar, mas outras como a manipulação, por exemplo, são igualmente importantes.
>
> Creio que a variedade nas estratégias e a sua adequação constante aos grupos de alunos e conteúdos a leccionar é um desafio que se nos põe no dia a dia.

Jorge Ferreira preocupa-se, em particular, por salientar o papel da escola e dos grupos disciplinares nas decisões a tomar:

> Na minha opinião a discussão sobre a distribuição dos computadores na Escola deve começar ... na Escola. E deve começar na Escola enquadrada nos processos de Autonomia e Avaliação que estão a ser implementados por todo o país. E na Escola, deve ser primeiramente discutida em cada grupo disciplinar, de modo a fazer-se uma avaliação das necessidades e ... das ansiedades dos professores relativamente à sua utilização em aula. A sua distribuição pelas salas deve ser sempre objecto de um projecto, se possível interdisciplinar, de modo a aumentar o envolvimento dos recursos humanos que colaboram na sua implementação, bem assim como a utilização racional dos equipamentos.
>
> Cada escola é um "Ser" diferente e portanto não há receitas antecipadas. O que é preciso é discutir, planificar, implementar e acima de tudo avaliar para podermos fazer cada vez melhor.

Mário Lima comenta certas afirmações das autoridades educativas:

> Por si só, estes números [um computador por 20 alunos em 2003 e um computador por 10 alunos em 2006] não têm grande significado. O fundamental é o tipo de acesso que os alunos têm aos computadores e a sua utilização pedagógica. Hoje em dia, transmite-se a ideia (errada) que as escolas – e os alunos e professores, nessas escolas – estão todas ligadas à internet. As informações que tenho recolhido, através de alunos pertencentes a várias escolas, indicam que – quando estão ligadas! – em muitas não há acesso para os alunos. (Já para não referir casos extremos, em que a biblioteca – espaço onde geralmente se encontra ligado o único computador – se destina, não ao fim com que foi concebida, mas a "sala de castigo".)

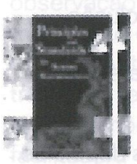
E salienta a importância da gestão apropriada dos espaços escolares:

> De facto, também chegou a hora de gerir convenientemente os espaços escolares. Aqui, as responsabilidades são repartidas entre a Administração central e regional, e as escolas. Nem o modelo actual (sala - turma), nem o modelo dos actuais laboratórios (confundindo-se, muitas vezes, com uma sala com computadores), satisfazem as necessidades educativas. (Contudo, isto não é desculpa para os laboratórios nunca terem sido oficialmente consagrados e, no Básico, nem sequer terem direito a plano.) [...] defendo o seguinte modelo para a gestão dos espaços escolares: estes, devem ser referentes a disciplinas, áreas disciplinares ou interdisciplinares (em vez de serem referentes a turmas). [...] Apesar (...) de alguma inovação nos métodos de ensino, tem-se ficado muito aquém do que seria desejável – por vários motivos; um deles é a gestão de espaços educativos e recursos materiais nas escolas. Nas aulas de Matemática, ainda prevalece o espaço da sala de aula "normal", isto é, apenas com mesas, cadeiras e o quadro de giz, na forma tradicional, e (nem sempre) um retroprojector. Incompreensivelmente, nos nossos dias, projectam-se e constroem-se escolas que dispõem dos já habituais espaços específicos (gimnodesportivos e salas artísticas, técnicas e laboratoriais), mantendo as salas "normais" para as restantes disciplinas. Estas dispõem de poucos materiais didácticos, geralmente guardados em armários ou arrecadações, longe das salas de aula.

As páginas da revista e o fórum "Computadores" continuam abertos aos comentários de todos os colegas que queiram intervir neste debate.

Salientamos que os tópicos que são aqui discutidas podem ajudar a APM e a sua direcção a intervir nas decisões que estão a ser tomadas a respeito da inadiável questão dos computadores no ensino da Matemática.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar



Acaba de ser publicada pelo NCTM (a associação de professores de Matemática americana) a nova edição dos *Standards*, cuja primeira versão em três volumes foi traduzida pela APM.

Este documento representa, dez anos depois da publicação da primeira edição, o resultado de anos de reflexão e consultas sobre a aplicação das ideias sobre o ensino da Matemática, avaliação e desenvolvimento profissional dos professores expressas nos primeiros *Standards*.

E·Standards

Edição electrónica dos *standards* já disponível no endereço http://standards.nctm.org.

Com e-exemplos (*applets*, vídeos,) *links* e outros suplementos.

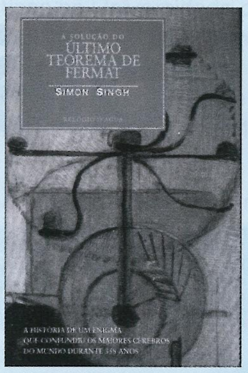
A solução do último teorema de Fermat

Não, não desista já. Não é preciso ser um especialista em teoria de números, nem tão pouco um matemático, para compreender e apreciar a leitura deste livro. Na verdade, *A solução do último teorema de Fermat* destina-se a todos aqueles que se interessam pela Matemática, sejam eles investigadores, professores, alunos ou simples curiosos. Não se trata pois da exposição da prova do mais famoso teorema de Fermat, mas sim de uma viagem pela Matemática e pelo mundo dos matemáticos que começa na Grécia antiga e termina na actualidade.

O último teorema de Fermat é um dos casos mais interessantes na história da Matemática e do conhecimento humano. Na verdade, este não foi o último teorema que Fermat construiu, mas sim o último a ser demonstrado. A busca desta demonstração, que levou mais de 350 anos e motivou inúmeros matemáticos e apreciadores de enigmas, é uma história fascinante que Simon Singh nos revela com este livro. Através dela e usando uma linguagem muito simples, o autor explica conceitos fundamentais que caracterizam a Matemática, como teorema, conjectura e demonstração; fala da evolução de algumas áreas da Matemática, como a teoria de números e a teoria das probabilidades; propõe e resolve alguns problemas que ficaram famosos; narra interessantes episódios da história da Matemática e desvenda a personalidade de alguns génios matemáticos.

O início da história remonta a Pitágoras e ao seu famoso teorema. É a partir dele que Fermat se inspira para procurar, à semelhança dos triplos pitagóricos, outros triplos que satisfaçam a equação $x^n+y^n=z^n$, para $n>2$. Depois de muito procurar, Fermat convenceu-se de que não existiriam três números inteiros que satisfizessem tal equação. Convenceu-se e, segundo se crê, provou-o mesmo. Mas onde está essa demonstração?

Fermat não era um matemático profissional. Apesar do seu génio, a Matemática ocupava apenas os seus tempos livres. Resolvia problemas e criava Matemática para seu puro prazer, não se importando com a publicação dos seus trabalhos. Nas margens de *Aritmética*, a importante obra de Diofanto que tanto o inspirou, Fermat ia escrevendo as suas descobertas e rabiscava umas demonstrações. Depois de registar a nova equação e fazer algumas anotações, escreveu:



A solução do último teorema de Fermat
Autor: Simon Singh
Editora: Relógio d'Água
Outubro 1998
336 pp.
Preço: 2900$00

> "Tenho uma demonstração maravilhosa desta proposição que esta margem é demasiado estreita para conter." (p. 83)

Mais tarde, já depois da morte de Fermat, o seu filho reuniu as suas notas e rascunhos e resolveu publicá-las numa edição especial de *Aritmética*. Contudo, a demonstração de que não existem triplos inteiros que satisfaçam a equação nunca foi encontrada, apenas alguns resquícios dos seus raciocínios.

A *Aritmética de Diofanto contendo observações por P. de Fermat* depressa despertou o interesse da comunidade matemática. Nos três séculos que se seguiram, a tentativa de demonstrar a proposição tornou-se a ambição de muitos e a obsessão de alguns. Entre inúmeras tentativas infrutíferas, produzidas sobretudo por caçadores de prémios, alguns avanços foram feitos por matemáticos como Euler, Sophie Germain, Cauchy, Lamé, Kummer... Muitos episódios curiosos ocorreram. O caso de Sophie Germain que se fez passar por homem para fazer valer o seu trabalho, ou o de Paul Wolfskehl que desistiu de se suicidar após ter descoberto um erro no raciocínio de Kummer que invalidava o seu trabalho, são exemplos da importância que este problema assumiu na vida de alguns matemáticos.

Ao longo do tempo, os matemáticos perceberam que estavam perante uma tarefa muito complicada, senão impossível. Encontrar a solução para este problema traria certamente muito prestígio, mas dedicar a carreira a esse estudo poderia ser altamente arriscado. Contudo, esse risco não demoveu o inglês Andrew Wiles. As suas palavras descrevem melhor do que ninguém o fascínio que o problema, desde cedo, exerceu sobre ele:

> "Parecia tão simples e todavia nenhum dos grandes matemáticos da história fora capaz de o resolver. Aqui estava um problema que eu, com dez anos de idade, podia compreender e soube a partir desse momento que nunca mais o poderia ignorar. Tinha que o resolver." (p. 30)

Depois de vários anos de trabalho isolado, Wiles voltou a Cambridge, sua terra natal, para anunciar a descoberta. Fê-lo no dia 23 de Junho de 1993, no Instituto de Sir Isaac Newton, perante uma audiência de muitos investigadores e alunos, porém apenas uma pequena parte deles compreendia o seu raciocínio. A maioria queria apenas presenciar algo histórico: a descoberta da demonstração do último teorema de Fermat.

Através desta história tão bem narrada por Simon Singh, podemos aprender muita Matemática. Porém, talvez mais interessante, seja a perspectiva profundamente humana que ganhamos desta ciência.

Lina Brunheira
Universidade de Lisboa

The Baby Machine

os matemáticos e os computadores

José Maria Almeida

A *Baby Machine* pode ser considerada como o protótipo dos actuais computadores. Pela primeira vez, na Terra tinha sido executado um programa armazenado na memória de um computador electrónico digital.

Tom Kilburn nasceu em 11 de Agosto de 1921 em Earlsheaton, um subúrbio de Dewsbury no Yorkshire em Inglaterra. Em 1940 obteve o grau de BA e em 1942 o de MA em Ciências Matemáticas na Universidade de Cambridge, UK. Em 1942 foi incorporado como *scientific officer* no *Telecommunications Research Establishment* — *TRE* — em Malvern, UK.

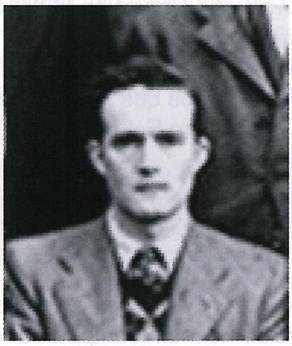
Ao chegar a Malvern, em Setembro, de 1942, Tom Kilburn disse, naturalmente, que gostaria de ser incorporado no Grupo da Matemática. A resposta foi seca: "o Grupo está cheio, apresente-se a Freddie Williams no pavilhão de *cricket*".

Freddie Williams, mais velho 10 anos que Tom Kilburn, era BSC (1933) em Engenharia pela Universidade de Manchester, DPhil (1936) pela Universidade de Oxford e DSc (1939) pela Universidade de Manchester. A área de investigação de Freddie Williams era a electrónica e desenvolvia, em Malvern, um projecto para explorar a possibilidade de memorizar dados em CRT[1] (Cathode Ray Tube) que equipavam o RADAR (Radio Detection And Ranging).

Quando Tom Kilburn se apresentou a Freddie Williams, que esperava um engenheiro electrotécnico para reforçar a sua equipa, Freddie perguntou-lhe: "Então você o que é ?", ao que Tom respondeu: "Sou matemático por Cambridge". O comentário imediato de Freddie foi: "Oh meu Deus!" e, após uma pausa, continuou: "Não faz mal vai aprender depressa a ser engenheiro".

Ao longo de quatro anos, Tom trabalhou na equipa, mas passados seis meses já se considerava um engenheiro electrotécnico muito competente.

Em 1946 Freddie Williams regressou à Universidade de Manchester para ocupar a cátedra de Electrotecnia e conseguiu uma licença para que Tom Kilburn, ainda ao serviço no TRE, viesse trabalhar com ele. Em Dezembro de 1946 Tom Kilburn chegou a Manchester e começou a trabalhar no aperfeiçoamento do sistema de memorização de dados nos CRT's.



Tom Kilburn

O computador electrónico digital então conhecido era o ENIAC - Electronic Numerical Integrator and Computer - que não possuia efectivamente uma capacidade electrónica de memorização.

Os números (dados) eram introduzidos no ENIAC através de um dispositivo denominado *constant transmitter* que trabalhava em conjunto com um leitor de cartões perfurados IBM. Os números eram memorizados em *relays* localizados no *constant transmitter* e disponibilizados quando solicitados pelo processo de cálculo.

Os resultados eram perfurados em cartão através de uma *printer unit* que trabalhava em conjunto com um perfurador de cartões IBM. Introduzindo os cartões numa Tabuladora IBM obtinha-se a impressão dos resultados.

A memorização era consubstanciada em acumuladores electrónicos (conjuntos de válvulas) e o programa era constituído por um conjunto de circuitos eléctricos de comando e controlo que enviavam e recebiam sinais dos diversos componentes.

No ENIAC mudar de um programa para outro era um trabalho árduo que implicava a reconfiguração do *hardware* a qual poderia demorar vários dias.

No entanto, desde Agosto de 1944 que John von Neumann visitava regularmente a Moore School da Universidade da Pensilvânia - USA, onde estava a ser construído o ENIAC. Von Neumann, discutia os problemas do controlo lógico com os elementos da equipa, nomeadamente Mauchly, Eckert, Burks, Goldstine e outros e apresentou dois relatórios sobre o assunto. O segundo relatório contendo 101 páginas e intitulado *First Draft of a Report on EDVAC* (Electronic Discret VAriable Calculator) foi apresentado em Julho de 1945 à equipa que construia o ENIAC na Moore School.

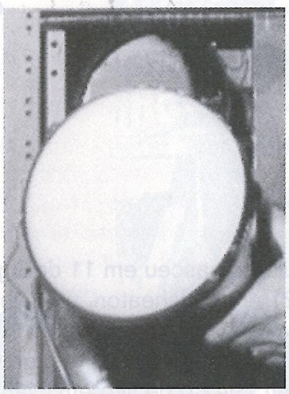
Este relatório foi o ponto de partida para a denominada "Arquitectura von Neumann" utilizada na construção de todos os computadores-série actuais.

No entanto, na época não tinha sido construído nenhum computador com base naquela arquitectura. Só mais tarde Mauchly e Eckert, que fundaram a *Electronic Control Co.*, em Filadéfia - USA, construiram um computador denominado BINAC (Binary Automatic Computer) de acordo com os princípios enunciados por von Neumann. O BINAC só ficou operacional em Agosto de 1950.

Freddie Williams tinha visitado a Moore School em 1946, viu o ENIAC a trabalhar e teve a ideia de construir um dispositivo que memorizasse informação digital (dados e programas) e resolvesse o problema da mudança dos programas.

No Outono de 1947 Tom Kilburn, assistido por Geoff Tootill[2], conseguiu memorizar 2.048 bit num CRT durante quatro horas. Este método passou a ser denominado *Williams Tube* embora tivesse sido descrito no relatório intitulado *A Storage System for use with Binary Digital Computing Machines* apresentado por Tom Kilburn ao TRE em 1 de Dezembro de 1947.

O passo seguinte era construir um computador utilizando um ou mais *William Tubes*.



Williams Tube

O financiamento do projecto tinha sido garantido pelo professor Max Newman[3] então catedrático de Matemática Pura na Universidade de Manchester. O financiamento era constituído por £3,000 para salários durante cinco anos e por £20,000 para serem gastos, também durante cinco anos, na construção do computador.

Tom Kilburn, assistido por Geoff Tootill tomou a iniciativa de construção de um protótipo denominado SSEM (*Small Scale Experimental Machine*) que rapidamente foi baptizado com a denominação *The Baby Machine*.

No esquema do computador podia perceber-se a existência de uma memória, de um processador e de uma unidade aritmética e lógica. No entanto, estas denominações não eram utilizadas na época e as unidades eram denominadas:

- Memória;
- Adicionador;
- Subtractor;
- Teste;
- Acumulador;
- Registo de controlo (também memorizava a instrução em execução);
- Registo de *flip-flop* (memorizava o endereço do operando durante a execução da instrução em execução e o endereço da instrução que seria executada em seguida);

Existiam também dois periféricos que só muito mais tarde seriam banalizados:

- *Display* - consubstanciado com um *Williams Tube*;
- Teclado - construído com os selectores de frequência TSF usados nos aviões de caça *Spitfire*.

De notar que o Adicionador apenas era usado para adicionar o valor resultante de um teste ao conteúdo do Registo de controlo.

O único dispositivo verdadeiramente aritmético disponível era o *Subtractor* porque podia ser utilizado, sem qualquer alteração, para criar os complementos dos números.

Assim, para introduzir um número positivo eram usados três passos, no primeiro dos quais o número era convertido em negativo, pela criação do seu complemento, no segundo, o número era memorizado e no terceiro, era introduzido de novo no *Subtractor* que o convertia em positivo através da criação do seu complemento.

Para adicionar dois números eram utilizados quatro passos. No primeiro, o número era convertido em negativo pela criação do seu complemento, no segundo, era introduzido o segundo número que era subtraido (adição do complemento) ao primeiro número (complemento memorizado no Acumulador), no terceiro, o resultado era memorizado e no quarto, o resultado era introduzido no Subtractor que o convertia em positivo através da criação do seu complemento. Por exemplo, considerando p e q:

> carrega o acumulador com p negativo; subtrai q ao conteúdo do acumulador; memoriza o resultado (-p-q); carrega o acumulador com o resultado negativo e obtém (+p+q).

A especificação da máquina, em terminologia actual, seria:

- palavra com 32 *bit* de comprimento;
- endereçagem simples;
- cálculo aritmético binário em série utilizando o complemento para dois dos algarismos;
- uma memória RAM com 32 *words*, extensível até 8.192 *words*;
- uma velocidade de cáculo de 1,2 milisegundos por instrução;
- o formato da instrução continha 3 bit para o campo função, 13 *bit*

para endereçamento e 16 *bit* que não eram utilizados.

A *Baby Machine* dispunha apenas de um conjunto de oito instruções:

Código[4]	**Operação**
000	Salto incondicional. Introduzia no Registo de controlo o conteúdo do endereço de memória indicado.
100	Salto incondicional relativo. Adicionava o conteúdo do endereço de memória indicado ao conteúdo do Registo de controlo
010	Carregamento negativo. Carregava o Acumulador com o complemento do conteúdo do endereço de memória indicado.
110	Armazenar. Copiava o conteúdo do Acumulador para o endereço de memória indicado.
001 ou 101[5]	Subtracção. Carregava o Acumulador com a diferença entre o seu conteúdo e o conteúdo do endereço de memória indicado.
011	Comparação a zero. Testava o valor do conteúdo do Acumulador. Se menor que zero era adicionado 2 ao Registo de controlo saltando assim uma instrução sequencial no programa.
111	*Stop*. Suspendia automaticamente a execução do programa e esperava pelos comandos manuais a introduzir pelo teclado.

Entretanto, Tom começou a escrever um programa que deveria ser executado na *Baby Machine* para determinar o maior factor primo contido na factorização do número 262144. O resultado era conhecido para o número escolhido (262144 = 2^{18}) pelo que seria fácil verificar a execução correcta do programa.

O programa original foi concebido e escrito por Tom, em notação binária, nas viagens de comboio entre a sua residência e a Universidade.

Terminada a construção do protótipo o programa foi armazenado na memória e lançada a sua execução. Nos primeiros ensaios a execução do programa não terminava e Tom e Geoff desligavam a Baby Machine, reviam o programa, corrigiam-no, voltavam a carregá-lo e lançavam de novo a sua execução.

Finalmente às 11 da manhã do dia 21 de Junho de 1948 o resultado esperado foi afixado no *Display* da *Baby Machine.* A execução do programa demorara 52 minutos.

Pela primeira vez, na Terra, tinha sido executado um programa armazenado na memória de um computador electrónico digital.

Assim, a *Baby Machine* pode ser considerada como o protótipo dos actuais computadores.

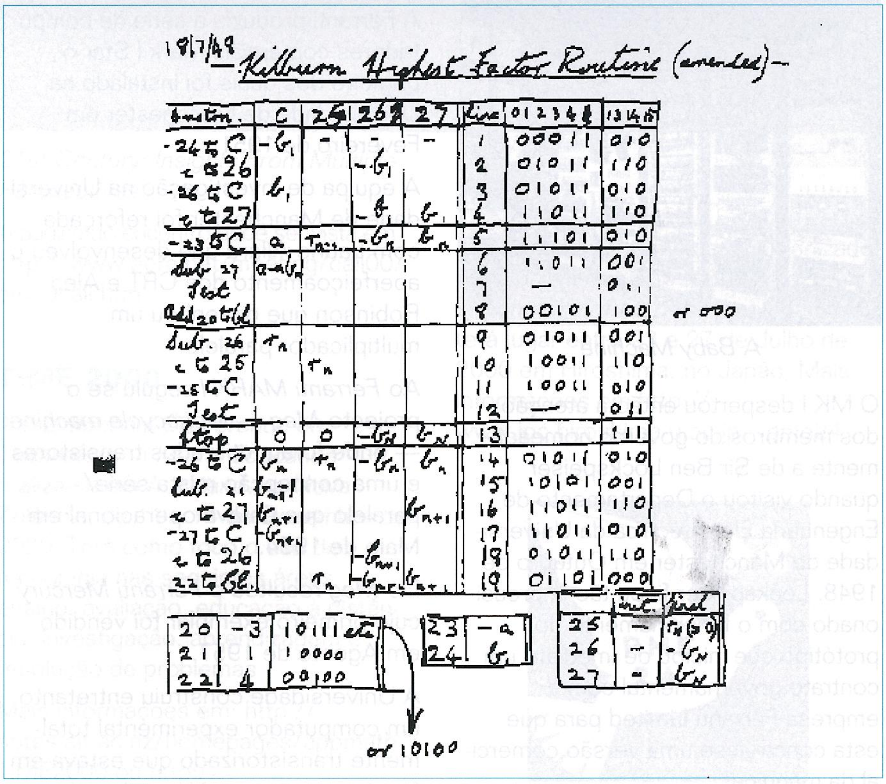
Embora o bloco de notas de Tom tenha desaparecido, Geoff conservou o seu onde tem escrita uma versão corrigida[6] do programa datada de 18 de Julho de 1948.

Em 1996 Tom e Geoff reconstituíram o programa original, o qual continha 17 linhas de código e utilizava 8 endereços de memória.

A primeira instrução do programa reduzia a zero o conteúdo do Acumulador e a segunda instrução carregava-o com o número 262144. Este número era também armazenado num endereço de memória cujo conteúdo não era alterado durante a execução do programa. O número memorizado era subtraído de uma unidade e armazenado num outro endereço de memória.

O conteúdo do primeiro endereço de memória era dividido pelo conteúdo do segundo endereço de memória e verificado se o resto era zero. Se o resto fosse zero a execução do programa terminava e era visualizado o resultado. No caso contrário o conteúdo do segundo endereço de memória era subtraído de uma unidade e a divisão e teste eram repetidos.

Para este problema o programa executava 131072 divisões e testes. Como a divisão era efectuada pelo método das subtracções sucessivas eram executadas aproximadamente



Uma página do bloco de notas de Geoff.

3,5 milhões de instruções. A execução total do programa demorava 52 minutos. Assim, a *Baby Machine* executava, aproximadamente, 1100 instruções por segundo.

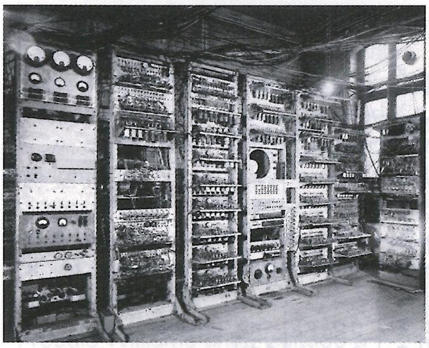
Em meados de Julho de 1948, Alan Turing escreveu um programa que foi executado na *Baby Machine* o qual incluia uma rotina para uma divisão longa.

A partir de Agosto de 1948 a equipa foi reforçada com dois estudantes de investigação — Edwards e Thomas — e a *Baby Machine* começou a ser sujeita a um desenvolvimento intensivo de engenharia de modo a proporcionar um melhor desempenho de cálculo.

Edwards trabalhou no aperfeiçoamento dos *Williams Tube's* e criou as denominadas *B-lines*[7] actualmente denominados registos de índice.

Thomas construiu o primeiro tambor magnético - inicialmente denominado *magnetic wheel* - que consubstanciava uma memória externa, mas sincronizada com a unidade *clock* do processador central. Esta concepção permitia a extensão para múltiplos tambores.

A *Baby Machine* mudou de nome e passou a ser designada pela sigla MK I[8].



A *Baby Machine*

O MK I despertou então a atenção dos membros do governo nomeadamente a de Sir Ben Lockspeiser quando visitou o Departamento de Engenharia Elctrotécnica da Universidade de Manchester em Outubro de 1948. Lockspeiser ficou tão impressionado com o funcionamento do protótipo que iniciou de imediato um contrato governamental com a empresa Ferranti Limited para que esta construísse uma versão comercial da máquina[9].

A partir de Novembro de 1948

Equipa em 1998. Da esquerda para a direita: 2ª fila - Geoff Tootill, Dai Edwards, Laurie Allard; 1ª fila -Tommy Thomas, Tom Kilburn, Alec Robinson

começou a vigorar entre a Universidade de Manchester e a *Ferranti Limited* um contrato por cinco anos envolvendo um dispendio estimado de £35,000 por ano. Este contrato é um exemplo frutuoso da colaboração entre Universidades e a Indústria.

A Ferranti produziu a série de computadores comerciais Mark I Star o primeiro dos quais foi instalado na Universidade de Manchester em Fevereiro de 1951.

A equipa de investigação na Universidade de Manchester foi reforçada com Laurie Allard que desenvolveu o aperfeiçoamento dos CRT e Alec Robinson que desenhou um multiplicador paralelo.

Ao *Ferranti MARK I* seguiu-se o projecto *Meg — Megacycle machine* — onde foram utilizados transistores e uma concepção mista série/paralelo que estava operacional em Maio de 1954.

Do *Meg* resultou o *Ferranti Mercury* cujo primeiro exemplar foi vendido em Agosto de 1957.

A Universidade construiu entretanto um computador experimental totalmente transistorizado que estava em funcionamento em Novembro de 1953.

Deste computador resultou o *Metropolitan-Vickers* MV950 que começou a funcionar em 1956.

No Outono de 1956 a equipa da Universidade de Manchester começou a trabalhar num novo projecto denominado *Muse — microsecond computer*. Foi criada em 1959 uma *joint venture* Universidade/*Ferranti* que produziu o computador resultante do *Muse* e que teve a denominação *Atlas*.

O *Atlas*, inaugurado oficialmente em 7 de Dezembro de 1962, foi o primeiro computador a utilizar o conceito de Memória Virtual.

O exemplar do *Atlas* instalado na Universidade de Manchester funcionou até 30 de Setembro de 1971.

Em 1966 a Universidade iniciou um projecto denominado MU5 que utilizava memórias associativas e podia ser usado num ambiente multiprogramação em *real-time*.

Parte da investigação desenvolvida foi utilizada pela ICL na série 2900 anunciada em Outubro de 1974.

O matemático, que aprendeu a ser engenheiro electrotécnico em seis meses, reformou-se em 1980, mas voltou à sua Universidade no dia 21 de Junho de 1998, de onde comandou, à distância, o arranque da *Baby Machine* reconstruída[10] instalada no Museu da Ciência e Indústria em Manchester.

José Maria Fernandes de Almeida
Universidade do Minho

Notas

1 Actualmente a banalização da utilização de CTR's nos receptores de Televisão e em Monitores de computador quase faz "esquecer" a sua existência.

2 Geoff Tootill, Mathematics MA por Cambridge, substituiu Arthur Marsh que considerou não haver futuro para este trabalho.

3 Chefe de projecto em Bletchley Park para construção do *Colossus* (1943).

4 Deve notar-se que os números eram escritos com o dígito menos significativo à esquerda.

5 para economizar elementos lógicos só era realizada uma descodificação parcial do código.

6 Tom afirmou, verbalmente, em 1998 que esta "versão oficial" também não é a verdadeira pois contém um êrro provocando um *loop*.

7 foi utilizada a letra B, porque a A já era utilizada para o Acumulador e a C para o controlo.

8 No *Illustrated London News* de 25 de Junho de 1949 o protótipo foi crismado MADM - *Manchester Automatic Digital Machine* -, denominação que nunca foi usada na Universidade de Manchester.

9 Carta assinada por Lockpeiser, datada de 26 de Outubro de 1948 e enviada a Eric Grundy (gestor do Departamento de Instrumentos da Ferranti): [...*Construct an electronic calculating machine to the instructions of Professor FC Williams*].

10 Chris Burton - membro da *Computer Conservation Society* - construiu uma réplica perfeita da *Baby Machine*. A réplica demorou 3 anos a ser construida, envolveu mais de 10.000 horas/homem de trabalho e representou um investimento de £150,000.

Encontros 2000 e 2001

CASTME

A International Conference On Science, Technology & Mathematics Education For Human Development realizar-se-á em Goa, de 20 a 23 de Fevereiro de 2001. Esta conferência internacional vai centrar-se na literacia científica e tecnológica, nomeadamente no papel da Ciência, Tecnologia e Educação Matemática no desenvolvimento humano. Os contactos podem ser feitos para:

Mr. Orlando Hall Rose
Section for Science and Technology Education
UNESCO
7 Place de Fontenoy
75352 Paris 07SP, FRANCE
Tel:+33-1-4568 0816;
Fax:+33-1-4568 5626
Email: c.thiounn@unesco.org

Para mais informações consultar a página http://www.hbcse.tifr.res.in/icstme.html.

AERA 2000

O próximo encontro anual da AERA (*American Educational Research Association*) realizar-se-á em New Orleans, entre 24 e 28 de Abril e terá como tema *Creating Knowledge in the 21st Century: Insights From Multiple Perspectives*.

A página do encontro pode ser vista em http://www.aera.net/meeting/call00/am00call.htm

TIME 2000

A *International Conference on Technology In Maths Education* realiza-se em Auckland, na Nova Zelândia, de 11 a 14 de Dezembro de 2000. Terá como foco o uso da tecnologia nas seguintes áreas: ensino, avaliação, educação à distância, investigação, aprendizagem e resolução de problemas.

Mais informações em: http://notes.ait.ac.nz/homepages/appmath/TIME2000 ou http://math.auckland.ac.nz/TIME2000

PME 24

O Congresso internacional organizado pelo *International Group for the Psychology of Mathematics Education* terá lugar entre 23 e 27 de Julho de 2000 em Hiroshima, no Japão. Mais informações em http://www.ipc.hiroshima-u.ac.jp/~pme24.

José Paulo Viana

Travessia do deserto

Um pelotão militar está acantonado junto a um deserto, dispondo de cinco *jeeps*. A carga máxima de gasolina que cada *jeep* consegue transportar, no depósito ou em bidões, dá para 600 quilómetros.

A certa altura, é preciso ir levar um material secreto a outro posto militar que fica do outro lado do deserto, a 1350 quilómetros de distância. Dada a gravidade da situação, o comandante está disposto a, se necessário, abandonar alguns *jeeps* no deserto, transferindo a gasolina de uns para os outros.

Conseguirá a missão ser cumprida?

Qual é a máxima distância que um *jeep* pode alcançar?

Respostas até 15 de Setembro

O elevador caprichoso

No número 56 de *Educação e Matemática* propusemos um problema que Élisabeth Busser e Gilles Cohen tinham apresentado no jornal francês *Le Monde* em 17-11-1998:

Um prédio de 11 andares tem um elevador muito caprichoso: só consegue subir 2, 3 ou 5 andares de cada vez e apenas desce 4 ou 11 andares.

A porteira, que vive no rés-do-chão, todas as noites tem de passar em todos os andares a recolher o lixo. Ao fim de algum tempo, conseguiu descobrir uma forma de parar um única vez em todos os andares e regressar ao rés-do-chão.

Como faz a porteira?

Desta vez tivemos 20 respostas: Aida de Jesus, Ana Margarida Baioa (Tavira), Ana Silva (Barreiro), António Moura (Cascais), Artur Silva (Guimarães), Bruno Rocha (Guimarães), Carla Alves (Caniço), Carlos Andrade (Lisboa), Eduarda Santos (Faro), Fernanda Melo (Resende), Isabel Viana (Porto), João António Alves (Chaves), Joaquim Nuno (Azurém), Jorge Manuel Ferreira (Camarate), José Manuel Oliveira (Amora), Mário Roque (Guimarães), Miguel Mendes (Guimarães), Paulo Correia (Alcácer do Sal), Rosa Ferreira (via internet) e Sílvia Carvalho (Felgueiras).

O problema tem de ser resolvido por tentativas. No entanto há várias condições obrigatórias que vão diminuir muito o número de tentativas.

A primeira, que não foi demonstrada, mas que se assume intuitivamente, é que o último andar a visitar é o 11°, para se poder aproveitar a capacidade do elevador descer 11 andares e regressar ao rés do chão.

Depois temos, como assinalam Jorge Manuel Ferreira, José Manuel Oliveira e Mário Roque:

- depois de chegar ao 10° é obrigatório descer ao 6°,
- só se consegue chegar ao 1° descendo do 5°.

Qualquer solução terá então de ter, representando os andares pelo seu número e o rés-do-chão por 0, estas sequências:

10-6, 5-1 e, no fim, 11-0.

O Mário utilisa ainda mais duas condições restritivas:

- o 2° andar ou é o primeiro a ser visitado ou então aparece a seguir ao 6°,
- o 9° ou é o penúltimo (seguindo-se o 11°) ou aparece antes do 5°.

Torna-se agora mais fácil chegar às soluções, mas houve quem, como o Bruno, preferisse fazer um programa de computador. Alguns leitores contentaram-se com a primeira solução que encontraram, mas muitos houve que descobriram as seis:

0 - 2 - 4 - 7 - 9 - 5 - 1 - 3 - 8 - 10 - 6 - 11 - 0

0 - 2 - 4 - 7 - 10 - 6 - 9 - 5 - 1 - 3 - 8 - 11 - 0

0 - 2 - 5 - 1 - 3 - 8 - 4 - 7 - 10 - 6 - 9 - 11 - 0

0 - 2 - 5 - 1 - 4 - 7 - 3 - 8 - 10 - 6 - 9 - 11 - 0

0 - 3 - 8 - 10 - 6 - 2 - 5 - 1 - 4 - 7 - 9 - 11 - 0

0 - 5 - 1 - 3 - 8 - 10 - 6 - 2 - 4 - 7 - 9 - 11 - 0

Existem várias particularidades nestas seis soluções:

- Há sempre 4 descidas: uma de 11 e três de 4.
- Além das sequências obrigatórias, há mais duas que aparecem sempre: 4-7 e 3-8.
- O percurso total é sempre de 46 andares.

Esta última particularidade foi uma das que o Paulo Correia usou para concluir que não há nenhum percurso melhor que outros, aproveitando para sugerir, tal como o José Oliveira, que a porteira, para evitar a monotonia, use um em cada dia da semana (e descanse ao domingo...).

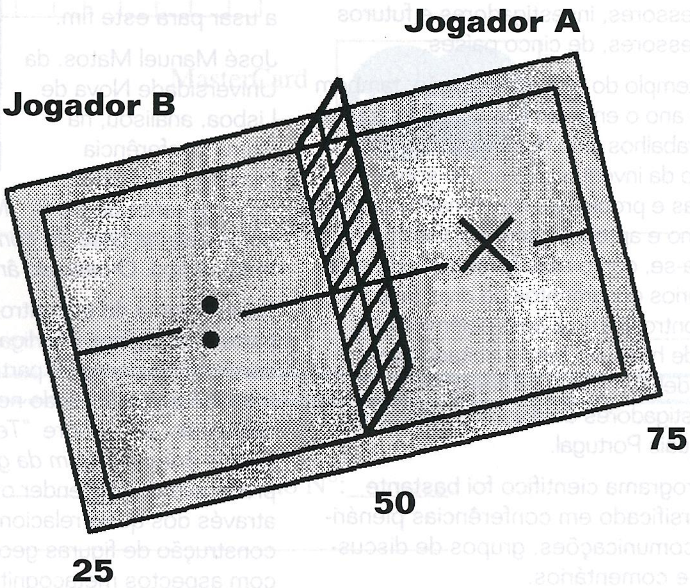
A situação relatada no problema suscitou ainda alguns comentários curiosos:

"O melhor era ter mandado arranjar o elevador. Era menos stressante." (Aida de Jesus)

"Com uma porteira destas, que prédio precisa de fazer manutenção nos elevadores?" (Artur Silva).

Badminton com a calculadora*

Este jogo, que estabelece uma curiosa analogia com o badminton, constitui uma óptima oportunidade para desenvolver o cálculo mental e a capacidade de estimar. Mais do que isso, uma simples "partida de badminton" é quanto basta para suscitar alguma reflexão a um jogador convicto de que, ao dividirmos um número, obtemos sempre um número inferior a esse número e, analogamente, ao multiplicarmos um número, obtemos sempre um resultado superior ao inicial.



Número de jogadores: 2

Material necessário: uma calculadora

Modo de jogar

O jogador A joga na parte do *campo* que consiste nos números de 50 a 75 e o jogador B na parte dos números de 25 a 50.

O volante é o número no ecrãn da calculadora.

As regras e a pontuação são idênticas às do badminton.

O jogador A serve, escolhendo um número no campo do jogador B e introduzindo-o na calculadora. O jogador B devolve o volante, dividindo o número por um outro, de modo a que o resultado seja um valor do campo do adversário. Se falhar, isto é, se o valor obtido fizer o volante cair no seu próprio campo ou fora, o jogador A ganha um ponto. Se for bem sucedido, é agora a vez do jogador A devolver o volante. Para isso, terá de multiplicar o valor na calculadora por outro, tentando que o resultado seja tal que o volante caia no campo do jogador B. Se não conseguir perde o serviço, ou seja, ninguém ganha um ponto e é vez do jogar B servir. Se, pelo contrário, o volante passar para o campo do jogador B, é a vez deste o devolver... E assim sucessivamente.

Cada partida é constituída por três jogos, terminando aos 15 ou 21 pontos conforme for combinado. "Num jogo de 15 pontos, quando a pontuação estiver 13-13, o lado que primeiro atingiu os 13 pontos tem direito a fixar o desempate em 5 pontos; quando a pontuação estiver em 14-14, o lado que primeiro atingiu essa pontuação tem a opção de fixar o desempate, em 3 pontos. Após ser fixado o desempate, a pontuação recomeça em 0-0 e o lado que primeiro marcar 5 ou 3 pontos, conforme o desempate tenha sido fixado aos 13-13 ou 14-14, ganhará o jogo. Num jogo a 21 pontos, o método para fixar o desempate é o mesmo, substituindo-se 13 e 14 por 19 e 20" (M. Costa e A. Costa, 1998, p. 58).

No final de cada um dos três jogos que constituem uma partida, os jogadores trocam de meio-campo.

Referência bibliográfica

Costa, M. & Costa, A. (1998). *Educação Física 10, 11,12*. Porto: Areal Editores.

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

*Adaptado de *Calculators in the Secondary School*. Centre for Mathematics Education (1986). Cambridge, The Open University.

O ensino e a aprendizagem da Geometria discutidos num encontro no Fundão

Realizou-se no Fundão, nos dias 7 a 9 de Maio de 2000, o habitual encontro anual promovido pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. De acordo com a lista de participantes, estiveram presentes neste encontro 92 professores, investigadores e futuros professores, de cinco países.

A exemplo do que é já tradição, também este ano o encontro foi temático, tendo os trabalhos sido desenvolvidos em torno da investigação actual sobre temas e problemas relacionados com o ensino e aprendizagem em Geometria. Trata-se, como aliás foi sublinhado nos próprios documentos de divulgação do encontro, de uma área polémica que desde há muito tem suscitado acalorados debates entre professores e investigadores de diversos países, entre os quais Portugal.

O programa científico foi bastante diversificado em conferências plenárias, comunicações, grupos de discussão e comentários.

Os trabalhos iniciaram-se, na tarde do primeiro dia, com uma sessão plenária intitulada *"Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning"*. Nesta conferência, John Olive, da Universidade da Georgia, explorou as implicações da utilização do *Geometer's Sketchpad* no ensino e aprendizagem da geometria em diferentes níveis de ensino. Apoiando-se na sua própria experiência bem como em experiências de outros professores e investigadores, levantou questões relacionadas, quer com as aprendizagens que os alunos podem realizar ao utilizarem este *software*, quer com consequências deste instrumento para os processos de ensino.

No segundo dia, logo pela manhã, Gila Hanna, da Universidade de Toronto, abordou o tema do encontro sob o prisma da *"Proof and its classroom role: A survey"*. Nesta sessão, a autora, após defender que a demonstração continua a ser uma questão importante em educação matemática, procurou justificar a ideia de que o seu papel, na sala de aula, é promover a compreensão matemática e que é importante encontrar modos, efectivos, de aí a usar para este fim.

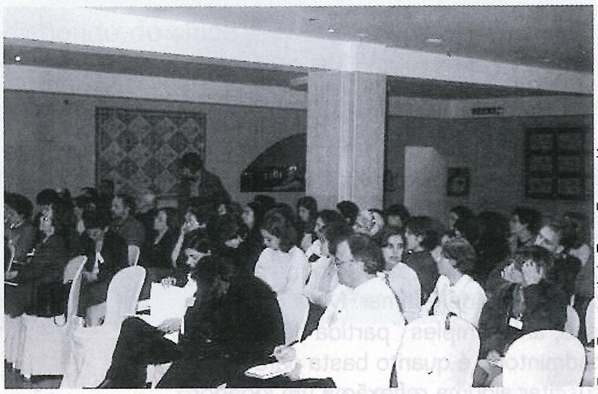


Foto: Enrique de la Torre Fernandéz

José Manuel Matos, da Universidade Nova de Lisboa, analisou, na última conferência plenária realizada ao início da tarde de dia 8, *"Metáforas corpóreas na base do conhecimento matemático. O caso do ângulo"*.

Do programa do encontro faziam ainda parte três tópicos interligados que serviram de ponto de partida ao trabalho a ser realizado nos grupos de discussão. Um, sobre *"Tecnologias no ensino-aprendizagem da geometria"*, procurava compreender os processos através dos quais relacionamos a construção de figuras geométricas com aspectos metacognitivos que se prendem com o controlo das nossas acções. Outro, sobre *"Demonstração - uma questão polémica"*, que procurava perspectivar o modo como concebemos o papel da demonstração em geometria. E, finalmente, um terceiro, intitulado *"Visualização, veículo para a educação em geometria"*, onde se pretendia aprofundar o conceito de imagem mental e, simultaneamente, discutir os modos de desenvolver a capacidade de visualização nos alunos.

Tal como tem já acontecido em anos anteriores, este encontro pautou-se pela existência de uma forte componente de debate que se traduziu, não apenas pela atribuição de três "espaços" aos grupos de discussão, mas também pela existência de comentadores a cada um dos textos que serviu de suporte ao trabalho destes grupos e que foi anteriormente disponibilizado a todos os participantes.

Tendo por base a minha experiência pessoal de participação no grupo de discussão sobre demonstração, considero que a estratégia de produção de textos directamente relacionados com os tópicos a discutir e a sua distribuição atempada aos participantes, se revela particularmente útil. De facto, para além de permitir uma maior apropriação do tópico em debate, proporciona uma identificação prévia de questões, contribuindo, assim, para o aprofundamento de ideias e para a troca, frutuosa, de pontos de vistas. Esta é, seguramente, uma via a prosseguir em futuros encontros.

Mas em qualquer encontro, para além do programa científico, são sempre importantes os momentos de convívio mais informal. Neste âmbito, a boa tradição culinária portuguesa não ficou por mãos alheias, como se pôde constatar pelas copiosas e variadas refeições. Além disso, alunos do Conservatório Regional de Música da Covilhã, deliciaram-nos com um encantador espectáculo de música clássica, música tradicional e espirituais negros. E como estamos em tempos de "achamento" do Brasil, o fim de tarde de dia 8 foi preenchido por uma visita a Belmonte, terra de Pedro Álvares Cabral.

Só foi pena que, apesar da Primavera se ter feito anunciar há já algum tempo e dos campos floridos traduzirem esta realidade, o sol quase não se tenha querido mostrar e o frio tenha sido uma constante. Será que São Pedro não gosta de Geometria?!...

Ana Maria Roque Boavida
ESE de Setúbal

Quota de 2000

No ano de 2000 o valor da quota é de **7 500$00** para professores, 5 500$00 para estudantes(só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 8 500$00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1549-003 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou Mastercard , preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número ____ ____ ____ ____

Visa ☐ VISA

MasterCard ☐ MasterCard

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________

__________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Nome: ______________________________ Sócio N°: ______

Morada: ______________________________

Código Postal: __________ Distrito: __________

Telefone: __________ E-Mail: __________

Data de Nascimento __/__/__ N° Contribuinte: __________

N° do B.I.: __________ Arquivo: __________ Data de Emissão __/__/__

Ano em que começou a leccionar: __________ Nível de Ensino: __________

Categoria Proffissional: __________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: __________ E-Mail: __________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo e-mail:apm@mail.telepac.pt.

Índice