Educação e Matemática

N.º 4 Outubro de 1987

Com um brilhozinho nos olhos...
Discutir a renovação dos currículos
A Matemática não é só cálculo
Fractais na Escola Secundária

PROFMAT-88 EM FARO

Revista da Associação de Professores de Matemática

CORPOS GERENTES
DA ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

MESA DA ASSEMBLEIA GERAL (1987-89)

Presidente:

Raul Fernando Carvalho, Escola Superior de Educação de Setúbal

Vogais:

Isabel Quinta Santos, Escola Secundária de Padrão da Légua, Porto
Manuel Saraiva, Universidade da Beira Interior, Covilhã

CONSELHO FISCAL (1987-89)

Presidente:

Maria de Lurdes Cangueiro, Escola Preparatória Gaspar Correia, Sacavém

Vogais:

Alice Inácio, Escola Secundária de D. Pedro V, Lisboa
Ana Maria Lopes, ESE de Lisboa - Escola Secundária Marquês de Pombal

DIRECÇÃO

Presidente:

Leonor Filipe, Escola Superior de Educação de Lisboa

Vice-presidente (presidente eleito para 88-89):

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Secretário:

Conceição Mesquita (87-90), Escola Secundária da Falagueira, Amadora

Tesoureiro:

Cristina Loureiro, ESE de Lisboa - Escola Secundária Ferreira Borges

Outros membros:

Ana Leitão Rodrigues, Escola Superior de Educação de Bragança
Carlos Próspero, ESE de Faro, Escola Secundária João de Deus
Eduardo Veloso (87-90), Projecto Minerva, Lisboa
Fátima Mendes, ESE de Portalegre - Escola Secundária de S. Lourenço
Fernando Duarte (87-90), Escola Superior de Educação de Viseu
Gertrudes Amaro, Escola Superior de Educação de Castelo Branco
Isabel Vale (87-90), Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
José António Duarte, Escola Superior de Educação de Setúbal
Margarida Queirós, Escola Secundária Fontes Pereira de Melo, Porto
Maria do Loreto Couceiro (87-90), FCT da Universidade Nova - Escola Secundária Camões
Odete Bernardes, Escola C+S de Montelavar

Na Assembleia Geral realizada no dia 10/09/87 em Bragança, foram eleitos por um período de dois anos (87-89) os membros da mesa da A.G. e do Conselho Fiscal. Foram ainda eleitos, por três anos, os cinco membros da Direcção à frente de cujo nome figura a indicação (87-90), substituindo Albano Silva, Henrique Guimarães, Leonor Moreira, Elisabete Sousa e José Tiago Filipe. Dos restantes dez membros da direcção (eleitos na Assembleia Geral de 19/09/86 em Portalegre) cinco terminarão o seu mandato em 1988 e os outros cinco em 1989.

Educação e Matemática

N.º 4 Outubro de 1987

Com um brilhozinho nos olhos...
Discutir a renovação dos currículos
A Matemática não é só cálculo
Fractais na Escola Secundária

Revista da Associação de Professores de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 4, Outubro de 1987

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
Conceição Mesquita,
Henrique M. Guimarães,
José Manuel Duarte,
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:
Conceição Mesquita, Cristina Loureiro, Daniela Gori Giorgi, Eduarda Fonseca, Eduardo Veloso, Henrique Guimarães, João Ponte, Judite Amaral, Leonor Moreira, Licínia Costa, Maria João Costa, Paulo Abrantes, Pedro Pimentel, Susana Carreira

Entidade proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: trimestral

Tiragem: 1500 exemplares

Impressão: Costa e Valério

Composição, montagem e fotolito:
Execução e oferta da Texto Editora

Correspondência:
Associação de Professores
de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Núcleo do Projecto Minerva
do DEFCL
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

Editorial

Com um brilhozinho nos olhos...

21 de Setembro.

Eles aí estão, os putos. Com cadernos novos, lápis afiados e um brilhozinho nos olhos. Prontos para a aventura de aprender.

Ora, aventura tem a ver com trilhar caminhos imprevistos, com arriscar: aventura tem muito de ousadia e muito de emoção. Assim sendo, a Escola é a antítese de aventura, porque lugar de rotina. Da sala de aula só se parte para becos sem saída. E os heróis são-no de pacotilha; esgrimem símbolos em lugar de floretes, papagueiam regras quando deviam cantar vitória (ou deveria dizer gritar EUREKA ?). E quanta emoção se pode pôr na divisão de polinómios ou no «ritual euclideano» do demonstrar de um teorema já demonstrado?

Não admira, pois, que um tédio inenarrável, pouco a pouco, apague o tal brilhozinho nos olhos. A aventura transformou-se em amestração, amestração em habilidades para a sobrevivência escolar. Porque, tal como dançar minuetes, ridiculamente vestidos de gente, não desenvolve nos cães qualquer capacidade importante para a sua vida de cães, também os alunos, munidos de umas quantas habilidades que lhes permitem obter os cincos ou o ingresso nas universidades, permanecem, de facto, mal armados para enfrentar as situações do dia a dia, continuam mal apetrechados para iniciar uma carreira investigativa; somente domados para aceitarem um ensino livresco e dogmático.

Se a experiência matemática não proporcionasse qualquer espécie de gozo intelectual, se a actividade matemática fosse o calvário que tantos recordam com amargura, há muito que o conhecimento matemático teria estagnado e não teria havido sucessivamente lugar a novas teorias. A não ser que o conhecimento matemático cresça por ser aplicável e, então, percorrer esse calvário é uma actividade rentável. Mas como explicar, a produção anual de 200 000 teoremas[1], na grande maioria inaplicáveis a coisa alguma, completamente ignorados não só pelo grande público mas também pela comunidade matemática? Provavelmente porque aqueles que os descobriram tiraram daí algum prazer, provavelmente porque o acto de descoberta envolve emoção, é aventura.

O jovem que sai da escola sem ter experimentado o «triunfo da descoberta»,[2] sem ter esgrimido em sua defesa, sem ter provado a validade da sua presunção, (ou renunciado à mesma por lhe ter reconhecido falsidade ou inoperância), o jovem que não viveu a experiência matemática é um indivíduo mutilado e o professor o seu carrasco.

Dizer mal dos programas está-nos na pele. Pugnar pela inclusão de conteúdos potencialmente mais formativos ou mais próximos da realidade é, já, um facto, clamar pela introdução das novas tecnologias de informação no acto educativo é um grito recente, assentar o nosso trabalho com os alunos no desenvolvimento de uma atitude investigativa em matemática é uma raridade.

Qualquer que seja o programa, deve ser esse o nosso objectivo primeiro. Sem o que se extinguirá para sempre o tal brilhozinho nos olhos.

Leonor Moreira

(1) Davis, P. e Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Company

(1) Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência. (Publicado pela Princeton University Press com o título «How to solve it»)

Participar na renovação dos currículos e programas — um direito e um dever dos professores de Matemática!

Vivemos numa época de mudança que o nosso sistema de ensino não tem sabido acompanhar. Os currículos e os programas escolares nos vários níveis de ensino, muito especialmente na disciplina de Matemática, estão ultrapassados. Eles não respondem adequadamente às necessidades actuais, sejam as necessidades individuais dos alunos, da sociedade no seu conjunto, ou aquelas que resultam da evolução das próprias disciplinas que se ensinam (e não ensinam) nas escolas. E esta questão não tem a ver apenas com a eventual inadequação de alguns temas dos programas e a necessidade de os substituir por outros. Trata-se de algo muito mais geral e mais complexo que se refere, para além dos conteúdos, aos métodos de ensino, à natureza e formas de organização das actividades de aprendizagem, ao envolvimento dos alunos, ao papel dos professores, etc. É nesta perspectiva global que o currículo deve ser entendido.

Este fenómeno não é um problema exclusivamente português. Os mais importantes organismos internacionais da área da Educação têm-lhe dedicado a maior atenção. Em diversos países, procuram-se alternativas, ensaiam-se reformas mais ou menos profundas. Também no nosso país começa a generalizar-se a convicção de que é preciso efectuar mudanças. A nível oficial, existe agora uma Secretaria de Estado e uma Comissão da Reforma Educativa. Prometem-se para breve alterações significativas no sistema de ensino, nos currículos, nos programas.

Para a APM, a necessidade de renovação do ensino é uma questão vital que está ligada ao próprio processo de criação da Associação e que tem marcado as suas principais actividades. Um grupo de trabalho, anterior à própria constituição formal da APM, tem-se debruçado especificamente sobre problemas relativos aos currículos e programas. Em «Educação e Matemática», diversos artigos têm realçado a necessidade de renovação, a começar no editorial do primeiro número da Revista. No último número (Julho), não só o editorial como outros artigos abordavam directamente esta questão, nalguns casos realçando o papel dos professores na mudança, noutros casos apresentando uma perspectiva crítica relativamente aos actuais programas, noutros ainda discutindo a inclusão de novos temas e novos métodos na Matemática escolar.

Na Assembleia Geral da APM realizada em Setembro passado em Bragança, no decorrer do Profmat-87, a renovação dos currículos e programas de Matemática foi considerada a questão central que deveríamos discutir e aprofundar ao longo do presente ano lectivo. Nesse sentido, serão organizadas diversas acções que deverão ter um ponto alto no próximo ano, durante o Profmat-88. Na parte que lhe diz respeito, «Educação e Matemática» dispõe-se a contribuir, abrindo declaradamente o debate sobre este tema e mantendo-o num lugar de destaque, nas páginas da Revista, nos próximos números.

Há naturalmente, muitas formas de contribuir para uma discussão sobre renovação curricular em Matemática. Entre elas incluem-se artigos de opinião, sínteses de debates (de âmbito local, distrital ou nacional), relatos de experiências inovadores na sala de aula ou na escola, etc. Contamos para isso com a colaboração dos nossos leitores!

Temas e perguntas para reflectir e discutir

Apresentam-se a seguir alguns tópicos possíveis para uma discussão sobre renovação de currículos e programas de Matemática no nosso país. Não pretendendo, de forma alguma, esgotar o tema, esses tópicos são apresentados na forma de perguntas — por vezes incluindo várias alternativas — com o propósito de motivar e ajudar a discussão.

Questionar o papel da Matemática como disciplina escolar

1. A Matemática ocupa tradicionalmente um lugar de destaque nos currículos escolares em todos os níveis de ensino. Esse lugar será inquestionável? As razões que o justificam têm a ver essencialmente com a natureza da Matemática, com algumas características específicas desta ciência? Ou estarão sobretudo ligadas a alguns conteúdos e/ou processos indispensáveis na generalidade das profissões? Que objectivos tem afinal a Matemática enquanto disciplina curricular no período da escolaridade obrigatória? Que capacidades são desenvolvidas especificamente pela Matemática quando a comparamos com outras disciplinas escolares?

2. A Matemática surge desde o 5.º ano de escolaridade como uma disciplina autónoma dispondo de um número de horas semanal superior ao da maioria das outras disciplinas. Este peso relativo justifica-se? Poderia aceitar-se uma maior integração com outras disciplinas durante mais alguns anos depois do ensino primário? Que vantagens e desvantagens poderiam, daí resultar?

Ter em conta a evolução da sociedade e da escola

3. Vivemos numa época caracterizada por aquilo a que alguns têm chamado a Revolução Informática. Que novos objectivos coloca este facto ao ensino da Matemática? Que diferenças existem a este respeito face à época (há vinte anos atrás) em que foram desenvolvidos os programas de Matemática ainda em vigor?

4. É hoje apontado como meta o alargamento da escolaridade obrigatória até ao 9.º ano. Que implicações tem esta meta no ensino da Matemática? Que significado tem falar-se de uma «Matemática para todos»? O ensino da Matemática deverá assumir um novo papel social?

5. Existe tradicionalmente uma espécie de currículo «canónico» de Matemática, vigorando em países com problemas muito diversos, sendo os programas de Matemática como que «importados» de uns para outros. Será isto inevitável? Haverá lugar, na Matemática escolar, para se considerarem necessidades ou características de âmbito nacional ou mesmo regional? Em todos os níveis de ensino?

Analisar criticamente a situação actual e as reformas anteriores

6. As taxas de insucesso (abandono, reprovação, etc.) são hoje extremamente elevadas e diversos indicadores sugerem que o rendimento escolar tem vindo a baixar. Que factores concorrem para esta situação? Que influência relativa têm: (a) o tipo de Matemática que se ensina? (b) a forma como se ensina? (c) os instrumentos de avaliação que se utilizam?

7. As reformas anteriores no ensino da Matemática parecem ter-se preocupado sobretudo com as necessidades sociais e políticas (da sociedade como um todo) e/ou com as necessidades da Matemática enquanto ciência, e muito pouco com as necessidades dos alunos enquanto indivíduos. Será isto verdade? Em caso afirmativo, que consequências terão daí resultado? Poderiam as prioridades das reformas ser diferentes?

8. Tradicionalmente, as decisões de natureza curricular para o ensino da Matemática têm muito pouco em conta o papel dos professores, considerados como uma espécie de simples «correias de transmissão». Que consequências daí resultarão? De que outras maneiras é possível conceber o papel dos professores?

Discutir o tipo de currículo que queremos

9. Que «estilo» deveria ter o currículo de Matemática? Definição de objectivos e especificação de conteúdos? Propostas de actividades? Indicação de temas centrais e sugestões sobre métodos a utilizar? Até que ponto deveria ir a sua flexibilidade? Esse «estilo» deveria variar de acordo com os níveis de ensino?

10. Um currículo de Matemática desejável deveria ser esssencialmente baseado: (a) em conteúdos? (b) em aplicações da Matemática? (c) em processos matemáticos? Que vantagens e desvantagens haverá em cada uma destas opções?

11. O currículo de Matemática deveria ser uniforme ou diferenciado? Na segunda hipótese, como deveria fazer-se a diferenciação? Por escolas, por turmas (nível dos alunos), apenas em certas áreas dos últimos anos de escolaridade? Será preferível conceber um currículo «modular» (com um núcleo e diversas opções)? Até que ponto, designadamente no ensino primário, diferenças de natureza cultural e/ou regional poderiam ser admitidas?

Admitir novos conteúdos e novos métodos, questionar práticas e orientações correntes

12. Será de facto importante a inclusão nos programas de temas de Estatística e de Probabilidades? Deverá essa inclusão limitar-se à Estatística descritiva? E deverá ocorrer desde a escola primária? Haverá outros novos temas que deveriam ser incluídos nos programas?

13. Que decisões se impõem sobre a prática de cálculo? A ideia de que os exercícios de execução do algorismo da raiz quadrada são hoje uma prática absurda estender-se-á em breve a outros tópicos? Que «perigo» correm os exercícios complexos envolvendo operações com fracções ou com polinómios no ensino básico? Até que ponto se admite essa «complexidade»?

14. Vamos continuar a proibir ou a ignorar o uso das calculadoras nas aulas de Matemática ou admitimos que elas deveriam ter aí um lugar? Em todos os níveis de ensino? Que mudanças, de atitudes e de métodos, deveriam ocorrer acerca da sua utilização? Que actividades e experiências se poderiam implementar?

15. Que papel desempenhará a Geometria no futuro da Matemática escolar? Que carácter deveria assumir a Geometria ao longo dos vários níveis de escolaridade (prática, intuitiva, vectorial, cartesiana, axiomática, ...)?

16. As aplicações da Matemática deverão de facto adquirir uma importância muito maior no ensino? Em caso afirmativo, as actividades a desenvolver deverão ocorrer prioritariamente: (a) nas aulas de Matemática? (b) em outras disciplinas? (c) em projectos interdisciplinares?

17. A utilização de computadores constituti de facto uma alternativa efectiva? Que papel poderão desempenhar dentro das aulas de Matemática? Que importância deve ser atribuída a: (a) actividades de programação? (b) uso de programas utilitários? (c) uso de programas especialmente concebidos para o estudo de tópicos de Matemática (e que tipo de programas)?

Reflectir sobre a natureza das actividades escolares e sobre o papel do professor

18. As aulas de Matemática deverão continuar a ser organizadas como têm sido tradicionalmente (trinta alunos, um professor, 50 minutos, ...)? E deverão continuar a ser praticamente o único local que a escola proporciona para actividades de aprendizagem de Matemática? Que alternativas poderiam ser propostas e implementadas?

19. Deveria haver claramente, no currículo, lugar para tipos diversificados de actividades de aprendizagem (estudo teórico, prática, resolução de problemas, trabalhos de investigação, etc.)? Do mesmo modo, deveria haver uma larga diversificação de formas e instrumentos de avaliação?

20. O papel que o professor desempenha relativamente aos alunos permanecerá estável ou deverão ocorrer mudanças? O professor continuará a ser, no futuro, o centro do processo? Assumirá essencialmente o papel de um administrador de recursos? Ou deverá ser um organizador e guia de actividades de aprendizagem? Que evolução é desejável?

Profmat-87: uma manifestação de vitalidade

Entre 8 e 11 de Setembro de 1987, a Associação de Professores de Matemática promoveu, com a colaboração da Escola Superior de Educação de Bragança e nas instalações desta, o Profmat-87. Associados ao encontro, foram ainda organizados cursos de dois dias (7 e 8 de Setembro) — a linguagem LOGO, a utilização da folha de cálculo, o ensino das probabilidades e da estatística, a utilização de materiais manipulativos no Ensino Primário. Estes cursos foram os primeiros de uma série que se deseja longa. Inicialmente previstos para os professores da região de Bragança, verificou-se no entanto que a maioria das inscrições vieram de outros e muito diversos pontos do país, o que mostra a importância de diversificá-los no tempo e no espaço. De notar que o êxito dos cursos se deveu não só à procura de formação no domínio da utilização do computador mas igualmente ao interesse que muitos professores revelam por conhecer outros materiais didácticos e por ensaiar novos temas curriculares.

Elevada participação de professores e grande diversidade de tipos de trabalho

O Profmat-87 contou com a participação de cerca de 370 professores de Matemática de todos os níveis de ensino — primário, preparatório, secundário e superior (Escolas Superiores de Educação e Universidades), além de estudantes e estagiários de cursos de formação de professores — e provenientes de todos os distritos do continente e ainda da Madeira e dos Açores.

O Encontro incluiu, como principais actividades, sessões plenárias, sessões práticas, grupos de discussão e comunicações. Parece importante destacar a grande diversidade de temas, tipos de trabalho e contribuições, aspecto em que o Encontro superou largamente todas as realizações idênticas anteriormente realizadas em Portugal.

Realidade e mudança

Embora não houvesse um tema único para o Encontro, pode considerar-se como grande tema unificador «a Educação Matemática ao virar a década de 80 — que realidades? que mudanças?».

Muitas comunicações contribuíram para ajudar a reflectir sobre a *realidade*, ao tratarem temas como as atitudes dos professores face à utilização dos computadores, a animação pedagógica da escola através de clubes, o papel do delegado de grupo nesta animação, ou as atitudes e dificuldades de aprendizagem dos alunos. No entanto, a maioria das comunicações apresentou perspectivas de *mudança*, muitas delas associadas ao uso de computadores — com destaque para a utilização da linguagem LOGO, das simulações e da folha de cálculo — sendo ainda de salientar o relato de experiências envolvendo o uso de calculadoras na escola.

As sessões práticas *(workshops)* continuam a ser especialmente procuradas. O material que divulgam bem como o tipo de interacção que proporcionam situam estas sessões entre os momentos mais ricos de um Encontro. Fo o que sucedeu em Bragança onde se realizaram sessões práticas sobre uma larga diversidade de aspectos como o uso de computadores no ensino da Matemática, a resolução de problemas, as aplicações da Matemática, os jogos, etc.

Outro dos momentos altos do Encontro foi a manhã dedicada aos grupos de discussão. Nalguns casos, eles foram o resultado de actividades e reflexões de um ano de trabalho; noutros casos, foram dinamizados por grupos formados especificamente para o Profmat, aproveitando a ocasião para lançar perspectivas de trabalho para o próximo ano. No conjunto, tratou-se de uma ocasião privilegiada para a reflexão e troca de ideias acerca dos principais problemas da Educação Matemática, analisando-se a realidade mas numa perspectiva de mudança e inovação.

BRAGANÇA, 9 A 11 DE SETEMBRO

Com efeito, esta dialética realidade-mudança terá estado sempre presente ao longo do Encontro, mesmo nas sessões plenárias. Uma reflexão sobre como aprendem os alunos levantou a necessidade de um estudo mais profundo no domínio da investigação pedagógica, a evocação de Anastácio da Cunha referiu o papel que a divulgação da História da Matemática pode desempenhar na

(continua na pág. 26)

A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço

João Pedro Ponte, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

No momento em que se anuncia uma reforma global dos planos de estudo e dos programas das diferentes disciplinas, é posto em cheque, de forma talvez subreptícia mas nem por isso menos grave, o papel da Matemática como disciplina curricular.

A Matemática sempre foi uma disciplina rodeada de polémica e de um sentimento de insatisfação relativamente aos resultados do seu ensino. Sempre houve protestos acerca das dificuldades evidenciadas pela maioria dos alunos ao aplicarem os seus conhecimentos às mais simples situações da vida prática e a propósito das deficiências na preparação dos que entram na Universidade.

São bem conhecidas as mais recentes tendências de orientação curricular para esta disciplina. Nos anos cinquenta, vigorava a pedagogia da mecanização. Por memorização e repetição exaustiva procurava-se que os alunos dominassem o cálculo aritmético, o cálculo algébrico, a resolução de exercícios geométricos do tipo «mostre que...». Foi o período áureo dos célebres livros de exercícios de Palma Fernandes.

Nos anos sessenta, tivemos uma época de profunda e generosa renovação, baseada nos livros piloto de José Sebastião e Silva. Procurava-se conciliar uma visão moderna da Matemática com uma perspectiva cultural e um justo relevo dado às aplicações desta disciplina. Mas a única coisa que acabou por ficar dessa época de reforma foi uma extrema preocupação com o rigor da linguagem e a pureza dos conceitos.

Nos anos setenta, vivemos um período triunfalista e arrogante em que se fizeram programas extremamente formais e exigentes, desligados das necessidades das outras disciplinas e desinteressantes para a maioria dos alunos. A insistência em aspectos pseudo-logicistas, tanto em exercícios de cálculo proposicional, como na abordagem de certos conceitos e demonstrações, atingiu nalguns casos os limites do absurdo.

Aparentemente, parece que vamos começar a pagar a factura dos devaneios formalistas dos últimos anos. Fecha-se o ciclo, regressando a um desinspirado e redutor princípio de que o que interessa é o cálculo.

Neste artigo pretende-se mostrar que esta orientação não pode deixar de conduzir a uma degradação ainda maior do ensino desta disciplina.

A Matemática e o Cálculo

Na proposta de renovação curricular submetida à apreciação pública pela Comissão da Reforma do Sistema Educativo o reforço do cálculo e a operacionalização dos conceitos surgem como ideias-chave relativamente à disciplina de Matemática.

É indiscutível que o cálculo tem alguma coisa a ver com a Matemática. Mas para a maioria das pessoas, e aparentemente para os responsáveis da Comissão da Reforma, a Matemática é essencialmente cálculo. Os matemáticos seriam pessoas que passam a vida a fazer contas.

Esta ideia é profundamente errada. O cálculo corresponde apenas a uma das facetas da Matemática, que está longe de ser a mais rica e importante. Cálculo é tudo aquilo que se pode facilmente programar num computador. A sua execução não requer inteligência especial. O que já é mais difícil é decidir, perante um problema, que dados utilizar, que cálculos efectuar, como avaliar os resultados e como conjugá-los com os conhecimentos já estabelecidos acerca dum dado assunto.

Para muitas profissões tradicionais, e até há relativamente pouco tempo, o cálculo aritmético era um instrumento de trabalho fundamental. No entanto, em todos os ramos de actividade, exceptuando os casos mais simples e triviais, todas as necessidades de cálculo aritmético são hoje virtualmente satisfeitas recorrendo aos instrumentos que a tencologia pôs ao nosso dispor, nomeadamente as calculadoras e os computadores.

O cálculo com fracções é muito pouco utilizado nos problemas da vida corrente, servindo essencialmente de suporte às técnicas algébricas. O cálculo algébrico relativo à simplificação de polinómios e à resolução de equações, a diferenciação de funções e a determinação de integrais indefinidos, são técnicas respeitáveis, justamente consideradas fundamentais em diversas áreas de aplicação ao nível universitário. No entanto, já estão no mercado calculadoras que efectuam simplificação algébrica e diferenciação de funções. Existem programas de computador que efectuam os mais difíceis integrais indefinidos. É cada vez mais penoso convencer os estudantes de que vale a pena memorizar técnicas para resolver exercícios que eles sabem poder ser resolvidos com toda a facilidade recorrendo aos instrumentos electrónicos de cálculo.

O argumento caricato relativo às calculadoras é o de que os alunos têm de saber fazer cálculos à mão para estarem prevenidos no momento em que se acabarem as pilhas. É evidente que os seus defensores raramente levam a sua fúria antitecnológica ao extremo de se recusar a usar o telefone (e se alguém ouve a conversa?), de não pensar em ter um frigorífico (podia faltar a luz, e lá se estragava a comida), nem em comprar um automóvel (e as greves das bombas da gasolina!). A lógica parece ser a de que a tecnologia é boa quando proporciona comodidades mas é má quando é posta ao alcance dos alunos.

O argumento económico não tem também qualquer margem de aceitação. Dado o seu preço, muito inferior ao dos livros, e dado o seu largo campo de aplicação, a calculadora é um objecto que se pode pressupor ao alcance de qualquer aluno. Ou, alternativamente, que se pode estabelecer serem as próprias escolas a possuir, de forma a cobrir todas as necessidades do ensino.

O único argumento sério com que se pode tentar justificar a importância ainda dada ao cálculo, é o de que ele seria um pré-requisito para as restantes aprendizagens em Matemática. Este argumento é globalmente questionado pelos resultados da investigação feita a propósito da introdução massiva das calculadoras no ensino. Aliás, é precisamente com base nos resultados dessa investigação, neste momento em quantidade e qualidade já muito considerável para ser ignorada, que são justificadas as posições públicas francamente favoráveis à utilização das calculadoras tomadas pelas Associações de Professores de Matemática de diversos países, como a Grã-Bretanha e os Estados Unidos.

Não faltam as anedotas acerca dos estudantes, nomeadamente do ensino superior, que utilizam desastradamente a máquina de calcular, seja para determinar $\sqrt[3]{3^3}$ ou 0,5/2. Essas histórias não provam absolutamente nada acerca dos pretendidos malefícios das máquinas — apenas demonstram que os alunos têm de ser urgentemente ensinados a usá-las crítica e conscenciosamente.

A sobrecarga do ensino tradicional nos algoritmos pouco contribui para o densenvolvimento do espírito crítico e a compreensão profunda dos conceitos. É precisamente no tempo que se pode ganhar diminuindo a prática dos algoritmos tradicionais que se poderão réalizar actividades orientadas para criar maior desenvoltura na resolução de problemas concretos, desenvolver o sentido do número e melhorar a capacidade de estimação e de avaliação de resultados.

Ninguém propõe que se eliminem todas as técnicas de cálculo dos programas, sejam elas as aritméticas, as algébricas, ou as da análise infinitesiamal. O que está em causa, e que não se pode de forma alguma aceitar como apropriado, é que se queira fazer do cálculo o eixo fundamental da orientação curricular.

A Matemática e a Resolução de Problemas

A Matemática, como todas as ciências, está em constante evolução. Problemas deixados em aberto por uma geração são resolvidos uma ou duas gerações mais à frente. Novas concepções fornecem novas maneiras de encarar problemas e resultados antigos, levando à reformulação de teorias, notações, e hábitos de trabalho.

A força vital que faz a Matemática avançar é a formulação e resolução de problemas. Os resultados são depois generalizados, relacionados, e estruturados em teorias coerentes. Todos os processos essenciais da Matemática — descoberta de regularidades, formulação de conjecturas, demonstração, matematização de situações da vida real, axiomatização das teorias, refinamento dos conceitos — são atravessados por esta actividade da resolução de problemas.

Em muitos problemas a parte mais difícil está na respectiva formulação. O que queremos verdadeiramente saber? De que dados dispomos? Que tipo de abordagem podemos utilizar? São deste tipo a maioria das situações da vida real que os alunos vão encontrar pela vida fora. A escola, e, em particular a Matemática, podem dar um contributo para os tornar mais desembaraçados e bem sucedidos na arte de reconhecer, formular e resolver problemas.

É importante que se distinga um problema de um exercício. Enquanto que num exercício se aplica simplesmente um algoritmo ou um teorema conhecido, num problema tal não acontece. É preciso conceber toda uma estratégia para a sua resolução. É necessário usar uma certa criatividade em analisar, sintetizar, avaliar dados, relações e situações.

Um problema, para ser um efectivo desafio, tem de despertar a curiosidade da pessoa a quem é proposto. Mas uma mesma questão, dependendo dos conhecimentos e da experiência de cada pessoa, pode ser para uns um intricado problema e para outros apenas um elementar exercício.

Em resumo, a resolução de problemas é indiscutivelmente uma componente essencial da actividade matemática, e deve ser considerada como uma componente essencial no ensino desta disciplina dando um contributo fundamental para a formação integral do indivíduo.

Devem ser por isso recusadas as visões estritamente utilitaristas que reduzem a Matemática ao simples papel duma disciplina de serviço, limitando-se a fornecer técnicas para serem utilizadas pelas outras disciplinas curriculares. Sem negar que a Matemática pode e deve dar um apoio importante às outras áreas e em projectos interdisciplinares — e a própria Matemática tem muito a ganhar duma estreita relação com a realidade concreta — deve no entanto sublinhar-se que a sua vocação essencial é contribuir para o desenvolvimento das formas mais elaboradas de raciocínio, do poder de análise, do espírito crítico, da capacidade de avaliação, da criatividade, da confiança nas suas próprias capacidades. Deve ser esse, e não o simples reforço do cálculo, o verdadeiro eixo dos programas de Matemática.

Conclusão

Talvez um «back to basics» à portuguesa seja inevitável e merecido. A Matemática aparece hoje mais como um mal necessário do que como uma disciplina capaz de dar uma contribuição positiva para a educação dos jovens. Os tristes resultados alcançados em termos de

(continua na pág. 26)

FRACTAIS na Escola Secundária

Daniela Gori Giorgi*

Introdução

Este assunto foi desenvolvido com alunos com idades entre os 16 e os 17 anos.

Na aula, depois de termos sublinhado as diferenças entre figuras da «geometria ordinária» (polígonos, círculos,...) e aquelas, bastante mais complexas, que observamos na natureza, chamámos a atenção dos alunos para uma grande diversidade de formas naturais que parecem repetir o mesmo motivo em diferentes escalas: por exemplo, um fragmento da linha costeira observada de um avião, a diferentes altitudes, os ramos de uma árvore, um floco de neve examinado ao miscroscópio com diferentes objectivas.

Foi a regularidade do floco de neve que nos ajudou a matematizar as formas naturais. Depois de termos trabalhado a «curva do floco de neve», estudámos outras curvas que se obtêm repetindo a mesma construção; entre elas, a curva de Peano. Assim chegámos ao conceito de dimensão e às curvas fractais. E destas considerações abstractas voltámos a realidade: fenómenos naturais, reproduzidos por simulação, deram uma ideia da investigação actual sobre geometria fractal.

Alguns problemas clássicos a propósito do floco de neve

A construção clássica de um floco de neve é sugerida pelas seguintes figuras:

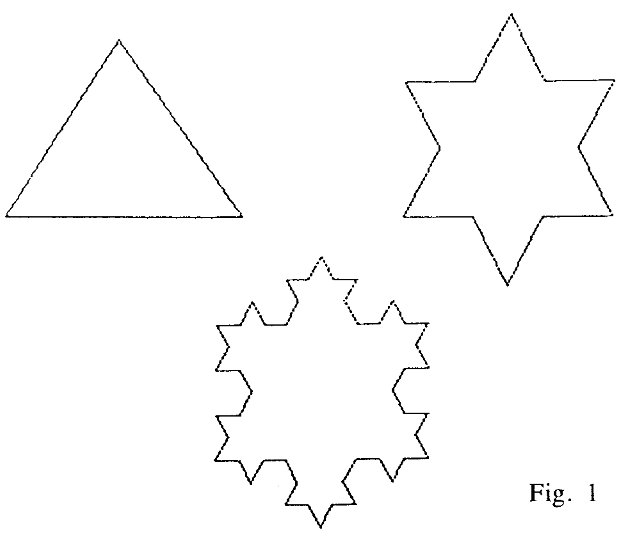


Fig. 1

Parte-se do triângulo equilátero de lado **3a.** No terço médio de cada lado constrói-se um triângulo equilátero de lado **a** e apaga-se a respectiva base. Continuando este processo obtêm-se polígonos com um número crescente de lados cada vez mais pequenos.

Os valores correspondentes dos lados e perímetros são os seguintes:

Lado	Perímetro
3a	9a
a	12a
a/3	16a

É evidente que o valor do perímetro tende para infinito.

Calculemos, agora, as sucessivas áreas A_1, A_2, A_3,...

$$A_1 = 9/4\ a^2 \sqrt{3} \approx 3.9\ a^2$$
$$A_2 = 3/4\ a^2 \sqrt{3} \approx 1.3\ a^2$$
$$A_3 = 9/4\ a^2 \sqrt{3} \approx 0.6\ a^2$$

A soma destas áreas será, então:

$$A = 9/4\ a^2 \sqrt{3} + 3/4\ a^2 \sqrt{3} + 1/3\ a^2 \sqrt{3} + \ldots$$

Se excluirmos o primeiro termo, trata-se de um progressão geométrica infinita de razão 4/9. Assim, a área total é dada por:

$$A = 9/4\ a^2 \sqrt{3} + \frac{\frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 18/5\ a^2 \sqrt{3} \approx 6\ a^2$$

Isto é, no limite, o lado é zero, o perímetro é infinito e a área é, apenas, um pouco maior do que vez e meia a área A_1 do triângulo inicial!

Estes resultados clássicos acerca do infinito sempre fascinam os estudantes.

Do floco de neve à curva de Peano

Avancemos na nossa investigação. Examinemos, passo a passo, a construção: dividimos um lado em 3 segmentos geometricamente iguais e, eliminando o segmento médio, construímos uma linha poligonal com 4 segmentos de recta.

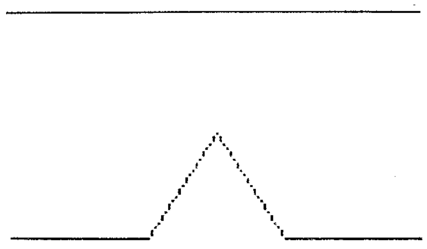


Fig. 2

De seguida, repetimos a mesma operação em cada um destes novos segmentos de recta. Continuando o processo, obtemos poligtonais com um número de lados cada vez maior; no limite obtemos uma curva — **a curva do floco de neve.**

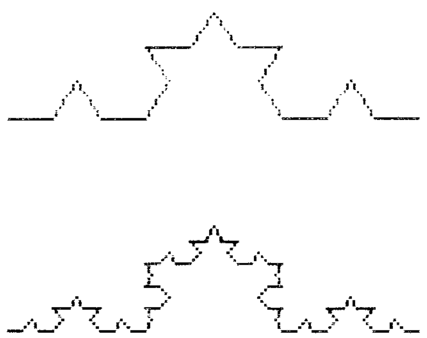


Fig. 3

Surge, então, uma questão: será possível traduzir esta construção por uma fórmula? Haverá alguma relação entre o número de partes em que cada segmento é dividido (3) e o número de segmentos obtidos a partir do segmento inicial (4)?

Antes de respondermos a estas questões, consideremos um outro exemplo: a construção de uma cercadura grega (na sua forma mais simples) a partir de um segmento de recta.

À semelhança do que se fez atrás, dividimos o segmento inicial em 5 partes e eliminamos o segmento médio; de seguida, construímos uma linha poligonal com 9 segmentos, como se vê na figura seguinte.

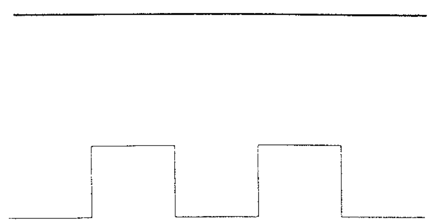


Fig. 4

Haverá agora, uma fórmula que relacione o 5 com o 9?

Consideremos, ainda, um outro exemplo. É possível que, a partir deste, surjam algumas ideias que nos permitam chegar a uma fórmula.

Vamos, então, dividir um segmento de recta em 3 partes e construir uma figura utilizando 9 segmentos. Numeramos esses segmentos de forma a poder-se percorrer a linha poligonal sem descontinuidades.

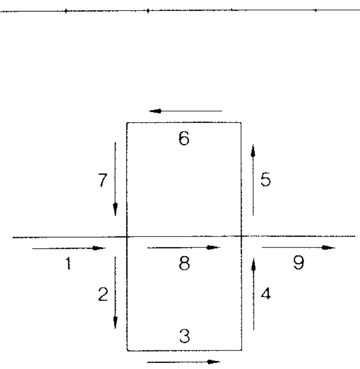


Fig. 5

Repetindo esta operação sobre cada um dos segmentos, obtêm-se as seguintes figuras:

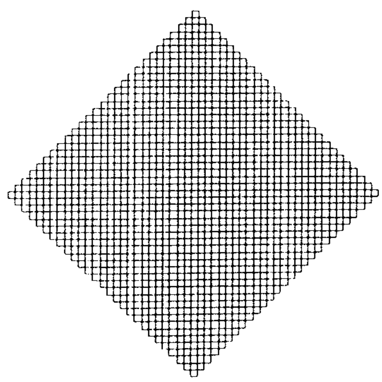


Fig. 6

Continuando este processo a linha poligonal tende para uma curva, a famosa **curva de Peano.** Trata-se de uma curva do tipo «plane-filling», isto é, uma curva que passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado. A descoberta desta curva (em 1890) chocou os matemáticos do fim do século passado, conduzindo a uma crise acerca do conceito de dimensão e de curva: de facto, se a dimensão de uma cruva é 1 e se a dimensão de uma região plana, como o quadrado, é 2, como explicar o comportamento da curva de Peano?

Tentaremos clarificar esta contradição concluindo, intuitivamente, que a curva de Peano passa por todos os pontos do quadrado.

Voltemos à construção e consideremos as duas figuras seguintes, ambas obtidas a partir da divisão de um segmento de recta em 3 partes iguais.

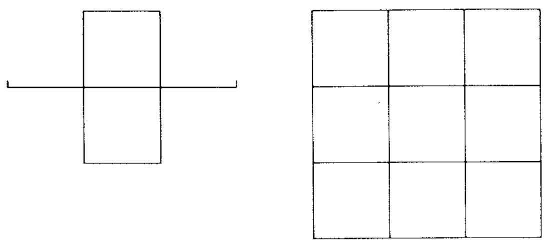
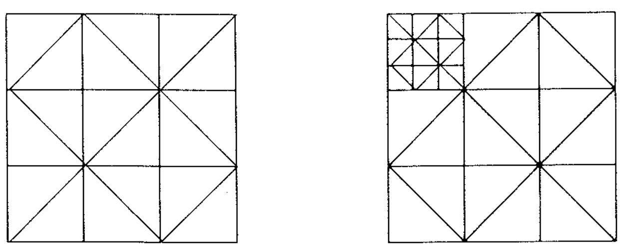


Fig. 7

A primeira é formada por 9 segmentos, a segunda por 9 pequenos quadrados. Pode-se, pois, estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos segmentos e o conjunto dos quadrados. Tal correspondência torna-se evidente se a linha poligonal for desenhada, tal como no trabalho de Peano, a partir de uma das diangonais do quadrado, caso em que a cada quadrado menor corresponde o «seu» segmento-diagonal.



Vê-se, também, claramente que esta correspondência biunívoca entre os lados da poligonal e os pequenos quadrados se mantém válida, quando, por repetição do processo, os segmentos se tornam sucessivamente menores. No limite, isto é, quando a linha poligonal tende para uma curva, quer a diagonal quer o quadrado tendem ambos para um ponto. Podemos, assim, concluir que a curva passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos do quadrado inicial, isto é, preenche o quadrado. Por isso mesmo, somos levados a concluir que a dimensão da curva de Peano é 2, tal como a do quadrado.

Representemos por **s** o número de partes em que se divide o segmento de recta inicial e por **n** o número de segmentos da linha poligonal. Teremos, então:

$$s = 3 \qquad n = 9 \qquad \text{e, portanto,} \qquad n = s^2$$

Podemos dizer que o expoente 2 surge pelo facto da dimensão da curva ser 2, tal como descobrimos.

A noção de fractal

Voltando à construção do floco de neve, a situação é a seguinte: o segmento de recta é dividido em 3 partes e a poligonal é formada por 4 segmentos, isto é,

$$s = 3 \qquad n = 4$$

Não se pode, agora, escrever $4 = 3^2$ mas, antes,

$$4 = 3^d$$

onde **d** é a dimensão da curva do floco de neve. É evidente que

$$1 < d < 2$$

e este valor traduz o facto de ser impossível estabelecer uma correspondência biunívoca entre 4 segmentos e 9 quadrados, uma vez que há mais quadrados. Assim sendo, continuando este processo, não é possível preencher o plano. A dimensão da curva é, neste caso

$$d = \log_3 4 \quad \text{ou} \quad d = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.3$$

que comparada com a dimensão do quadrado — 2 — está de acordo com o não preenchimento.

No caso da cecadura grega, sendo

$$s = 5 \qquad \text{e} \qquad n = 9 \qquad \text{temos:}$$

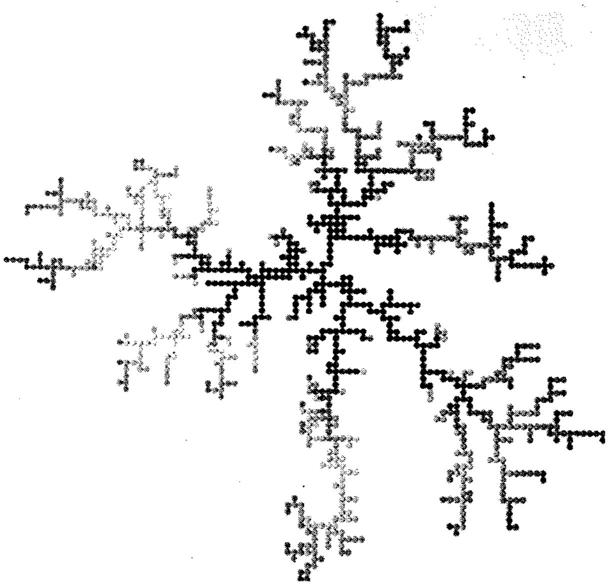
$$9 = 5^d \quad \text{e, portanto,} \quad d = \frac{\log 9}{\log 5} \simeq 1.4$$

Também neste caso a dimensão **d** é um número real entre 1 e 2.

Quando a dimensão de uma curva obtida por repetição de um processo de «dilatação» é, como nestes casos, um número real entre um e dois, a curva não preenche o plano, quer dizer, há espaços vazios. A curva diz-se, então, uma **curva fractal.** A palavra **fractal** foi criada por Benoit Mandelbrot em 1975.

A importância deste tipo de curvas deve-se à sua relação com alguns fenómenos naturais. Com o objectivo de estudar estas relações, têm-se simulado alguns modelos destes fenómenos naturais.

A fotografia 1 mostra um modelo de um agregado aerosol, isto é, de uma suspensão de minúsculas partículas sólidas ou líquidas no ar. O modelo foi construído com base no movimento browniano. A sua estrutura fractal é surpreendente; lembra a forma dos ramos e dos troncos de algumas árvores e, também, a queda de raios durante uma trovoada.



A fotografia 2 reproduz as linhas de ruptura num vidro inquebrável.

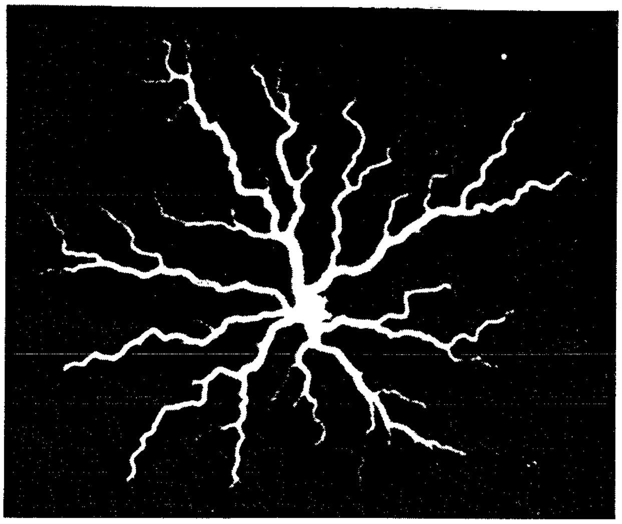
É fácil imaginar a importância que a previsão destas linhas poderá ter na manufactura do vidro.

Outra possível aplicação da geometria fractal é na modelização duma massa de nuvens com base em observações feitas por radar ou satélites e na investigação da forma como tendem a difundir-se. No dia em que estes estudos estiverem suficientemente avançados haverá uma verdadeira revolução na previsão do tempo.

É interessante pensar quão viva (natural) pode ser uma simulação obtida por meio da geometria fractal; na verdade, ninguém suspeitará que as paisagens reproduzidas em filmes como a Guerra das Estrelas são «artificiais»!

Como viram, os estudantes debruçaram-se sobre alguns aspectos da investigação mais actual. Para além disso, várias circunstâncias levaram os estudantes a pensar em conceitos matemáticos importantes como o conceito de limite ou o conceito abstracto de dimensão. Também as «habituais matemáticas escolares», como logaritmos e progressões, apareceram a tornaram-se importantes e com significado.

Percebe-se facilmente que este estudo possa ter fascinado mesmo os estudantes com reticências relativamente à Matemática. E foi por isso mesmo que pensámos apresentar este trabalho aos nossos colegas portugueses.



Bibliografia

Daccord, G. e Lenormand, R. (1987). Du pétrole, du plâtre et des fractals. *La Recherche* (Março).

Dewdney, A. K. (1985). A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics. *Scientific American* (Agosto).

Jullien, R., Botet, R. e Kolb, M. (1985). Les agrégats. *La Recherche* (Novembro).

Kahane, J. P. (1984). *Mesures et dimensions.* In Proceedings of ICMI 5.º Adelaide.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press.

Mandelbrot, B. (1983). *The fractal geometry of nature.* W. H. Freeman New York.

Noss, R. (1985). Fractals, turtles and snowflakes. *Micromath* (Spring).

Pertegen, H. O. (1985). *The beauty of fractals.* Springer Berlino.

Sawada, Y. e Honjo, H. (1986). D'ou vient la forme des dendrites? *La Recherche* (Abril).

Tahta, D. (1985). Frontiers of chaos exhibition. *Mathematics Teaching* (Dezembro).

* Daniela Gori Girogi é professora de Matemática e Física do Liceo Scientífico de Roma. Tem apresentado trabalhos em encontros internacionais, sendo, aliás, membro da CIEAEM (Comission Internationale pour l'étude et lAmélioration de l'Enseignement des Mathematiques).

O artigo que aqui se publica e que constituiu parte da sua comunicação no Prof Mat 87 é o resultado de um trabalho realizado com Emma Castelnuovo e Claudio Gori Giorgi com quem, também, é co-autora de uma colecção de livros, «La Scienza», de que estão publicados quatro volumes:

1.º Il Cammino della Matematica (I)
2.º Il Cammino della Matematica (II)
3.º La Matematica nella realtá
4.º Trigonometria.

A tradução do artigo é da responsabilidade de Leonor Moreira.

A Curva do Dragão

Maria João Peres Costa, Instituto de Inovação Educativa

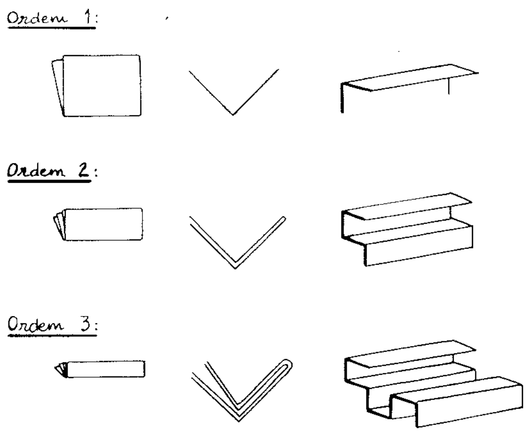
A «curva do dragão» é uma figura curiosa, que pode ser gerada por vários processos e se adequa perfeitamente a diversos tipos de abordagem e desenvolvimento.

Manipulação

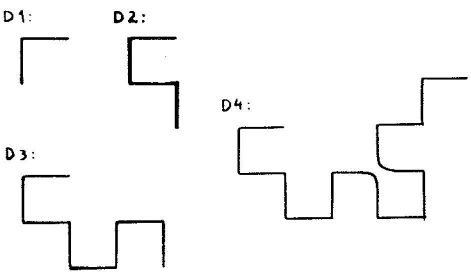
O processo original para obter a Curva do Dragão consiste em tomar uma folha de papel, dobrá-la ao meio e abri-la de forma a obter um ângulo recto: temos assim um dragão de ordem 1.

Para um dragão de ordem 2, o processo é o mesmo com a diferença de se ter de fazer duas dobras. Em seguida a folha é novamente aberta de forma a que as dobras formem entre si ângulos rectos. Para um dragão de ordem **n** será necessário dobrar o papel ao meio **n** vezes seguidas, sempre no mesmo sentido.

Na figura 1 temos representado o processo de construção dos dragões de ordem 1, 2 e 3:

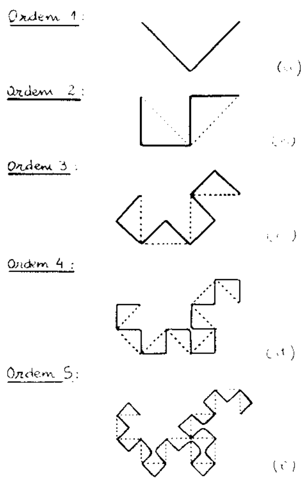


A figura 2 representa vários dragões:



Geometria

Existe também um processo geométrico para construir dragões, que está representado na figura 3. Este processo parte inicialmente de um ângulo recto (a). Cada um dos lados é tomado, em seguida, como hipotenusa de um triângulo rectângulo. Construindo esses triângulos, os seus catetos formam, então, dois ângulos rectos que constituem o dragão de ordem 2 (b). O processo repete-se, substituindo sempre cada segmento de recta, considerado como hipotenusa, pelos catetos do triângulo rectângulo respectivo, ficando cada novo ângulo alternadamente para um e outro lado da curva anterior (c, d, e).



Propomo-vos agora que procurem, por dobragens ou geometricamente, construir um dragão de ordem 6.

Álgebra

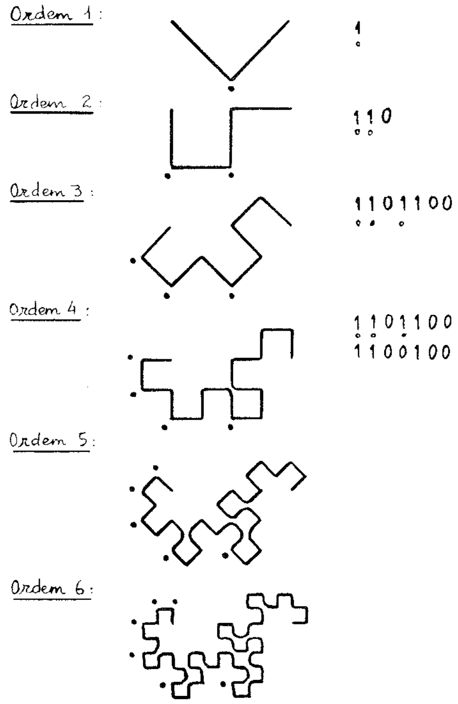
Um terceiro processo para a construção da curva do dragão recorre à representação binária: representemos por «1» as curvas à esquerda e por «0» as curvas à direita. A fórmula que nos permite obter o número de qualquer curva obtém-se por recorrência:

- toma-se o número do dragão de ordem imediatamante inferior, que designaremos por **a**;
- seja **b** o número que se obtém trocando o algarismo central de **a**;
- o número do nosso dragão será **a1b.** Vejamos um exemplo: o número do dragão de ordem 1 é, naturalmente, 1. Teremos neste caso a = 1, b = 0. Desta forma o número do dragão de ordem 2 é 110.

Para o dragão de ordem 3 teremos a = 110, b = 100. O número pretendido é 1101100. Pela mesma ordem de ideias, o dragão de ordem 4 tem por número associado 110110011100100.

Será capaz de determinar os números associados aos dragãos de ordem 5 e 6?

Verifica-se um facto curioso relativamente a esta Curva do Dragão . Na figura 4, estão representados alguns dragões em que foram marcados alguns pontos. Esses pontos são obtidos da seguinte forma: para a ordem 1, marcamos um ponto no único vértice existente. Na curva correspondente à ordem 2 mantemos o ponto anteriormente marcado e marcamos um segundo ponto, correspondente ao algarismo central 1 do número associado à curva. O processo repete-se, acrescentando sempre em cada ordem o ponto correspondente ao algarismo central 1 do número que descreve a curva. Ora verifica-se que, qualquer que seja a ordem do dragão, estes pontos situam-se sobre uma espiral logarítmica!



Logo

Uma interessante actividade de programação em LOGO é a construção de um programa para desenhar a Curva do Dragão, correspondente a uma ordem dada. Esta actividade implica o recurso a listas, utilizando procedimentos recursivos e variáveis.

O programa que a seguir se apresenta está escrito em SINCLAIR LOGO e assenta em dois subprocedimentos: DN e DES. Estes dois procedimentos são depois integrados, juntamente com um terceiro subprocedimento, num procedimento global, DRAGÃO, que requer um *input* numérico e que, ao ser chamado, desenha a curva do Dragão de ordem correspondente ao *input* dado. Assim, Dragão 4 desenha uma curva do dragão de ordem 4.

O subprocedimento DN :N constrói, por recursão, a lista correspondente ao número associado ao dragão de ordem N que se pretende desenhar. Quando esse processo termina, é chamado o subprocedimento DES :A que analisa sucessivamente cada um dos elementos dessa lista: se o elemento encontrado é 0, a tartaruga roda 90° para a direita; caso contrário, roda 90° para a esquerda. O processo é novamente recursivo até se esgotarem todos os elementos da lista e ficar desta forma concluído o desenho de curva do dragão.

O subprocedimento D1 só é chamado quando se pretende desenhar um dragão de ordem 1.

A listagem completa dos procedimentos é a seguinte:

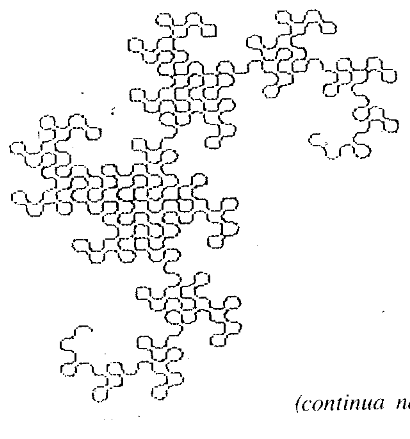
```
TO DRAGAO :N
CS
IF EQUALP :N 1 [D1 STOP]
MAKE "A 1
MAKE "B 0
DN :N - 1
END

TO D1
FD 50
RT 90
FD 50
END

TO DN :N
IF EQUALP :N 0 [PU SETPOS [20 -4
5] PD DES :A STOP]
MAKE "X ( SE :A 1 :B )
MAKE "Y ( SE :A 0 :B )
MAKE "A :X
MAKE "B :Y
DN :N - 1
END

TO DES :A
HT FD 1
IF EQUALP :A [] [STOP]
IF EQUALP FIRST :A 0 [REPEAT 5 [
FD 1 RT 18]] [REPEAT 5 [FD 1 LT
18]]
DES BF :A
END
```

A figura 5 representa um dragão de ordem 9 desenhado em LOGO.



(continua na pág. 36)

Clubes de Educação Matemática e Informática: Que enquadramento na Escola de hoje? Que contributo para a Escola de amanhã?

Judite Gonzalez Amaral, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Licínia Brandão Costa, Escola Superior de Educação do Porto

Afirmar que vivemos a escola do insucesso constitui já uma banalidade a que nos habituámos de tal modo, que corremos o risco de integrarmos passivamente este fenómeno nos nossos hábitos e valores socioprofissionais. Dada a gravidade de tal risco, vale a pena persistir na investigação sobre as causas do insucesso e investir em tudo o que possa contribuir para o combater.

É frequente ouvirmos os professores afirmarem que estão conscientes dessas causas: proveniência sócio-cultural e falta de interesse dos alunos, ausência de formação contínua dos professores, programas... Todas independentes do professor. Logo, não há nada a fazer. Sentimo-nos completamente impotentes perante razões que nos ultrapassam.

Debruçamo-nos aqui, em especial, sobre uma causa de insucesso escolar que, não sendo alheia a todas as que mais vulgarmente são assinaladas, contempla-as segundo uma perspectiva diferente. Referimo-nos ao desfasamento entre o modelo cultural dos alunos (interesses, valores, expectativas...) e a oferta da Escola (conteúdos, estratégias, relações, organização...). É evidente que, quanto maior é este desfasamento, maior é o insucesso.

Ora, analisadas as coisas deste ponto de vista, já o professor fica mais envolvido. De facto, a oferta da Escola tem também a ver com o professor, pois a actuação deste pode contribuir para a aproximar do modelo cultural dos alunos, ou, pelo contrário, para a afastar.

Perante a distância entre o que a Escola lhe oferece e o seu modelo cultural, os alunos reagem através de atitudes de oposição ou retraimento. Ambas, como sabemos por experiência própria, perturbam e desmotivam o professor.

Se se investir na experimentação de práticas pedagógicas susceptíveis de gerar nos alunos atitudes de empenhamento, autonomia e iniciativa, caminharemos para uma aproximação do seu modelo cultural (sem nos reduzirmos a ele, mas antes transcendendo-o) e, simultaneamente, para um maior entusiasmo e motivação no desempenho profissional por parte do professor.

É nossa convicção que os clubes de Educação Matemática e Informática têm razão de ser neste enquadramento.

Consideramos que eles podem desempenhar um papel importante na pesquisa e desenvolvimento de métodos[(1)] que invertam uma situação de aborrecimento e violência em relação à Escola, numa situação de entusiasmo, responsabilização e autonomia.

Neste sentido, definimos como objectivos dos CEMI, os seguintes:

- Criar um espaço de actividade livre que facilite a aprendizagem com prazer.
- Desenvolver atitudes e capacidades necessárias à formação de indivíduos responsáveis e actuantes.
- Abrir novas perspectivas culturais.
- Contribuir para o sucesso escolar, particularmente na Matemática.
- Contribuir para a dinamização da Escola.

Para perseguir estes objectivos, propomos a organização de actividades, de um modo geral, em três categorias (o projecto que apresentamos dirige-se especialmente ao Ensino Preparatório):

I — Actividades livres

Com este tipo de actividades, pretende-se estimular nos alunos o gosto pela descoberta e pela investigação:

— Jogos e passatempos
— Resolução de problemas
— Uso do computador — Jogos, Logo, Folha de Cálculo, Processamento de texto, Art/studio e/ou outros programas de desenho
— Trabalho de projecto

II — Actividades orientadas

Pretende-se que também estas actividades se enraízem nos interesses e motivações das crianças.

Numa primeira fase, estas actividades serão dirigidas especialmente para a preparação da aquisição e consolidação de conceitos do programa de Matemática. Julgamos no entanto que, apesar desta restrição, se contribuirá, em alguma medida, para o incremento do sucesso escolar noutras disciplinas. Relativamente a estas actividades orientadas, optamos por descrever um pouco mais pormenorizadamente os exemplos, por nos parecer que assim se torna mais fácil compreender o que com elas se pretende conseguir.

1 — Preparação da aquisição dos conceitos de perímetro e área.

Material — geoplano e elásticos de várias cores.

Primeira fase:

Construção de figuras, segundo a imaginação dos alunos e discussão da possibilidade de determinar o comprimento da linha que as limita, bem como o número de quadrados no seu interior.

Segunda fase:

Em face das conclusões da fase anterior, construção de figuras em que o comprimento de todos os lados possa ser determinado usando a mesma unidade.

Terceira fase:

Construção de figuras que permitam relacionar área e perímetro (por ex.: fixar a área e comparar os perímetros).

Quarta fase:

Resolução de problemas, relacionados com situações da vida real, em que sejam aplicadas as conclusões encontradas.

As fases desta actividade são indicadas como um caminho possível, que poderá ser completamente alterado em face das estratégias dos alunos e do próprio professor.

Todas as actividades dirigidas para a preparação da aquisição de conceitos, deverão ser desenvolvidas com uma antecedência considerável relativamente ao momento de abordagem lectiva dos conceitos correspondentes.

2 — Consolidação dos conceitos de número primo, divisor e múltiplo.

Jogo dos divisores.

Numa primeira fase o jogo processa-se entre duas equipas de alunos (ou entre dois alunos).

Numa segunda fase, pode utilizar-se a versão deste jogo para computador.

Naturalmente esta actividade e todas as que têm como finalidade a consolidação de conceitos, deverão ser desenvolvidas posteriormente à sua introdução nas aulas.

III — Actividades dinamizadoras da Escola

Com este tipo de actividades pretende-se que o trabalho de professores e alunos transcenda a sala de aula, transformando a Escola num «polo dinamizador de cultura» (Desp. 187/ME/85).

— Lançamento do problema do mês e sua dinâmica:
- proposta do problema
- recolha e organização das respostas
- divulgação das respostas mais significativas a fim de serem discutidas.
- escolha(s) da(s) solução(ões) se a(s) houver.

— Colaboração no jornal da Escola com:
- passatempos
- informações sobre a vida do CEMI.
- concursos

....

— Arranjo gráfico e impressão do Jornal (se na Escola existir um Centro Escolar de Informática, considera-se que ele seria mais vocacionado para desenvolver esta actividade).

— Acções de sensibilização dirigidas a Professores e/ou Encarregados de Educação.

A organização do clube, particularmente no que respeita às actividades livres e às actividades orientadas, processar-se-á de modo que ele constitua um permanente incentivo e atractivo para os alunos. Neste sentido, as actividades e correspondentes materiais serão periodicamente renovados, sem isto significar o total abandono dos anteriores.

Não podemos concluir esta nossa reflexão sobre o enquadramento teórico dos Clubes de Educação Matemática e Informática, sem referir o empenhamento desinteressado e a dedicação que alguns colegas têm vindo a pôr na exploração das potencialidades deste espaço de actividade livre e de investigação do Ensino da Matemática.

O entusiasmo com que têm transmitido as suas experiências e interrogações, o modo como têm ultrapassado tantas dificuldades, vêm constituindo uma importante base de reflexão e estímulo.

Concordamos que «a Escola tem manifestado grande incapacidade de se aperceber do ritmo acelerado das andanças sociais e tecnológicas que se têm processado à sua volta» (Ponte, J. P.). Entretanto, pela dinâmica do trabalho que tem sido desenvolvido nos clubes de Matemática, pelos novos projectos que aqui e além continuam a surgir, pela consciência que os professores vão tomando do seu papel como investigadores, não diremos estar lançada a primeira pedra da construção de uma Escola Diferente só porque as novas tecnologias aí vão ser introduzidas. Diremos, antes, estar accionado o primeiro elemento de uma reacção em cadeia que torna irreversível o empenhamento de professores e alunos na

(continua na pág. 24)

A conquista do castelo e suas implicações matemáticas

Susana Carreira, Escola Secundária de Mem Martins

«A Conquista do Castelo» é um programa de simulação que oferece também características de jogo. Na sua raíz está a simulação de um fenómeno físico bem conhecido: o lançamento de projécteis segundo determinadas direcções. Só por si, este facto evidencia uma estreita ligação à Física e, em particular, ao estudo de um certo tipo de movimentos. Mas, para além disso, o programa permitirá contactar com um razoável conjunto de modelos e conceitos matemáticos.

Em traços gerais, «A Conquista do Castelo» apresenta duas etapas distintas. Na primeira etapa, designada por «Assalto ao Castelo», é simulado um ataque à torre de um Castelo. No ecrã, surge um archeiro que terá de lançar flechas, de modo a atingir 3 alvos, escolhidos aleatoriamente em cada execução e materializados nas vigias da torre. O utilizador, poderá efectuar um lançamento (um tiro de arco) visando cada um dos alvos. Para isso, terá de introduzir dois valores: o ângulo de inclinação do projéctil (ângulo que a flecha faz com a horizontal) e a velocidade imprimida. Após a introdução destes dados, pode observar-se, num sistema cartesiano, a trajectória descrita pelo projéctil.

A segunda etapa consiste na «Defesa do Castelo». Nas ameias da torre encontra-se uma sentinela que terá de lançar pedras, segundo a horizontal, por forma a atingir os invasores que, em baixo, procuram chegar à porta do Castelo. A posição do invasor vai variando, nos 3 sucessivos lançamentos de pedras. Ao utilizador pede-se apenas que introduza a velocidade a imprimir ao projéctil. Em seguida, ser-lhe-á apresentado o gráfico da trajectória da pedra.

O carácter de jogo resulta, fundamentalmente da existência de uma pontuação que premeia o jogador, sempre que este acerta num alvo.

«A Conquista do Castelo», sendo uma situação imaginária, até mesmo, do domínio da fantasia, (já houve alguém que viu nela as célebres contendas entre o Robin dos Bosques e o Xerife de Nottingham) parece ter um forte sentido lúdico, o que pode ser um factor de motivação. Além disso, julgo que o programa permite levantar questões importantes, das quais dependerá, sem dúvida, o êxito da sua exploração didáctica em aulas ou em outro tipo de actividades.

«A Conquista do Castelo» estará especialmente vocacionada para o estudo de funções, nomeadamente, o da função quadrática, no 11.º ano.

Há toda uma série de conceitos que, poderão ser captados, a partir da sua utilização.

Por exemplo, as equações paramétricas e cartesianas de uma curva, a restrição e o prolongamento de uma função, a injectividade, a interpretação e visualização do máximo, a determinação de zeros, as relações de simetria, a concavidade, os limites, a existência de funções de uma e mais variáveis, bem como, a multiplicidade de soluções para um mesmo problema.

Os gráficos das trajectórias dos projécteis são construídos, a nível de programação, recorrendo às equações físicas do movimento. Surge assim, uma variável de extrema importância: o tempo. De facto, cada posição do projéctil corresponde a um instante bem determinado. Atribuindo à variável t valores sucessivos e suficientemente próximos, torna-se possível localizar num sistema de eixos, as posições correspondentes (x, y) da flecha do archeiro ou da pedra da sentinela.

O modo segundo o qual a abcissa e a ordenada dependem do tempo, também não é difícil de calcular, atendendo às leis da Cinemática, e tem-se então:

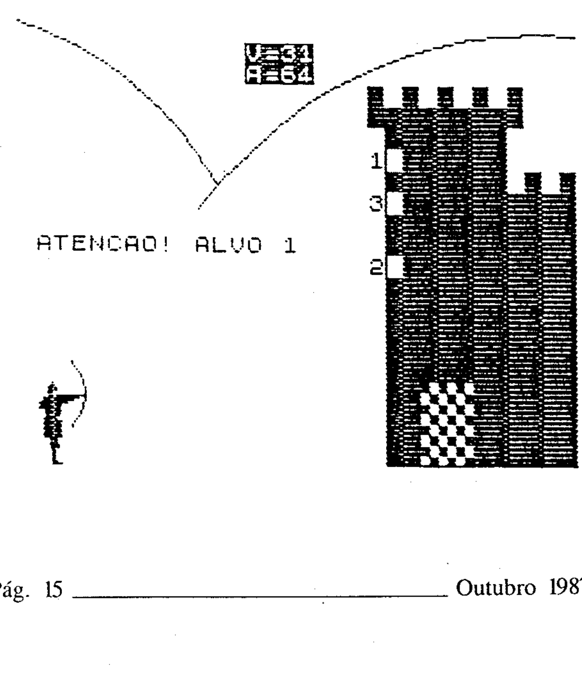
— No lançamento da flecha, com um ângulo de inclinação A e uma velocidade inicial Vo:

$$\begin{cases} x = V_0.\ \cos A.\ t \\ y = V_0.\ \operatorname{sen} A.\ t - 1/2\ gt^2 \end{cases}$$

— No lançamento da pedra, segundo a horizontal, com uma velocidade inicial Vo:

$$\begin{cases} x = -\ V_0.\ t \\ y = -\ 1/2\ gt^2 \end{cases}$$

Será curioso descobrir que a flecha lançada pelo archeiro descreve uma curva e, mais ainda, que esta curva é sempre do mesmo tipo, qualquer que seja a incli-



nação ou a velocidade inicial do lançamento. Algo de semelhante sucede com a pedra lançada das ameias da torre; a trajectória que esta descreve é sempre do mesmo tipo, independentemente da velocidade inicial.

Mais espectacular, porém, será a conclusão de que as curvas descritas pela flecha e pela pedra são da mesma família. Tal resultado poderá surgir com a passagem às equações cartesianas das curvas, ou por outras palavras, «congelando o movimento», o que significa eliminar o parâmetro t.

Surgem, então, as seguintes expressões:

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2 .\ \mathrm{Cos}^2 A}\,x^2 + \mathrm{tg}\,A .\ x$$

para a trajectória da flecha e

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2}\,x^2$$

para a trajectória da pedra.

Deparamos, afinal, com funções quadráticas cujo gráfico é uma parábola e, como tal, pertencentes à mesma família.

A partir deste ponto, será interessante reconhecer que a trajectória de cada flecha corresponde à restrição de uma função quadrática a um dado intervalo, o mesmo acontecendo à trajectória de cada pedra lançada da torre.

Então, ao invés de dar valores e esperar para ver a trajectória no ecrã pode pensar-se numa função particular, de qualquer dos dois tipos, para tentar descobrir os valores do ângulo e/ou da velocidade inicial que lhe correspondem. Assim, por exemplo, à função:

$$f\,(x) = -\frac{1}{40}\,x^2 + x$$

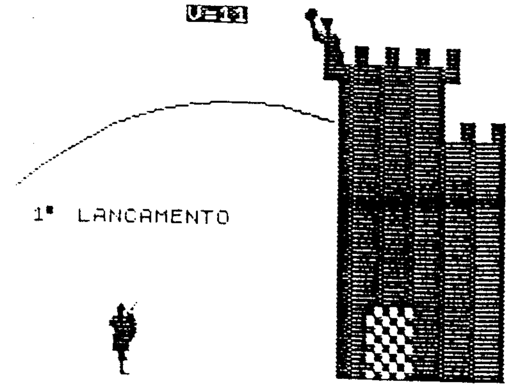
estão associados um ângulo de 45° e uma velocidade de 19.8 m/s. Se o gráfico desta função tiver sido esboçado previamente, ele poderá ser confirmado no computador, introduzindo estes dados.

Outro aspecto que poderá ser digno de atenção, tem a ver com a descoberta e determinação dos zeros destas funções. Se tomarmos para origem do referencial a posição inicial da flecha e desprezarmos a altura do archeiro, poderemos constatar a existência de dois pontos do gráfico, cuja ordenada é zero: o ponto de lançamento da flecha e o ponto em que esta atinge de novo o solo. Este segundo ponto tem, inclusivamente, um significado especial uma vez que corresponde à distância máxima atingida pela flecha, segundo a horizontal, também designada por alcance. Ao determinarmos os zeros da função quadrática, obtemos:

$$x - 0 \text{ ou } x = \frac{V_0^2 \text{ sen } 2A}{g},$$

conseguindo, assim, a expressão que nos dá o alcance da flecha.

No caso do lançamento da pedra, e tomando para origem do referencial a posição de arremesso, é fácil verificar que existe um único zero, ou seja, o ponto (0,0). Partir daqui para a generalização do número de zeros de uma função quadrática é um curto passo.



Vejamos ainda, como se poderá entender o máximo de qualquer destas funções, à luz do fenómeno real que elas traduzem. No caso da parábola que tem como restrição o lançamento da pedra, o máximo situa-se no ponto (0,0). É neste ponto que a 1.ª derivada se anula e muda de sinal. Mas podemos olhá-lo também como um ponto de viragem. Para isso, basta supor que a sentinela lança a pedra para o lado oposto da torre, o que implicará uma velocidade inicial negativa. Eis assim, um paralelismo entre o sinal da derivada e o sentido do movimento. Tal paralelismo mantém-se no lançamento da flecha. O máximo corresponde ao ponto em que a 1.ª derivada se anula e muda de sinal.

Contudo, este ponto é também aquele em que o movimento passa de ascendente a descendente.

Seria, por certo, possível encontrar várias outras aplicações do programa ao estudo das funções quadráticas; basta pensar na monotonia, observando a variação de altitude do projéctil, na concavidade, etc.

No entanto, e um pouco em jeito de desafio, não posso deixar de mencionar aquilo a que chamei «Limites para a Imaginação».

De facto, parece-me evidente que os programas de simulação possuem potencialidades que conduzem a um tipo de aprendizagem muito mais centrada no aluno, despertando nele a atitude de colocar a questão «o que é que aconteceria se...». Segundo esta perspectiva, será interessante ver o que acontece quando o archeiro, ao lançar as suas flechas, faz variar o ângulo de lançamento até aos limites 0° e 90°. Veremos, sem dúvida, as trajectórias aproximarem-se, respectivamente, da horizontal e da vertical.

De modo análogo, nada nos impede de imaginar a sentinela, lançando pedras do alto da torre com uma velocidade tão grande quanto se queira. E, de facto, poder-se-á visualizar uma trajectória que se aproxima inifinitamente da horizontal. Mas, poderemos também supor que a sentinela deixa simplesmente cair a pedra do alto da torre, sem lhe imprimir qualquer impulso horizontal. Neste caso, estaremos perante um movimento de queda livre e a trajectória será vertical, conforme poderemos verificar no computador.

Ficam, assim, apresentadas, algumas das implicações matemáticas de «A Conquista do Castelo». Espero que outros conquistadores possam vir a alcançar novos e insuspeitados Castelos.

PENSE NISTO:

T. P. C.

Trabalho Para Casa — T.P.C.. Esta é, provavelmente, uma expressão, e uma sigla, das mais conhecidas no meio escolar. Das mais conhecidas e das mais duradouras, talvez só ultrapassada pelo «Sumário» ou por «exercícios» (estou a pensar só na Matemática...), isto supondo que estão já um pouco esquecidas as «revisões» ou «chamadas»...

É também, decerto, das expressões mais «transdisciplinares». Todos os professores a utilizam, todos os alunos a ouvem e pronunciam, a propósito de não importa que disciplina:

«Qual é o trabalho para casa?»
«Fizeste o trabalho para casa?»
«Esqueci-me do trabalho para casa»

No Ensino Primário são os «deveres» quando a criança, chegada a casa, deseja (ainda!), com algum entusiasmo, orgulho e prazer, realizar o que a sua professora nesse dia lhe pediu que fizesse — *Já fiz os deveres!...*

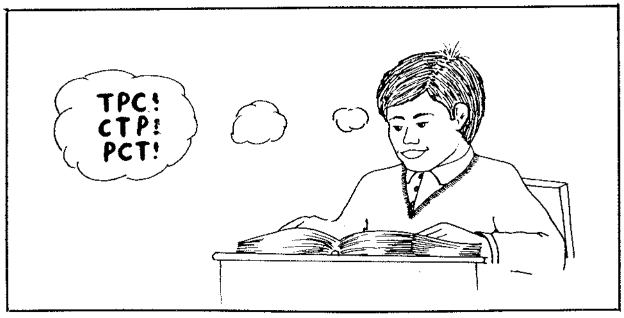
De «dever» passa a «trabalho» e, nos Ensinos Preparatório e Secundário são «trabalhos para casa» aquilo que o professor pede, quase sempre no fim da aula, para a aula seguinte. Normalmente, os alunos encaram-no com desinteresse, como uma autêntica maçada que se cumpre para não «ouvir» os pais ou o professor, para não ter «falta»: isto quando não é esquecido ou simplesmente ignorado. Na verdade, o gosto foi-se perdendo, o entusiasmo esmoreceu, o orgulho, aquele orgulho, foi esquecido.

Mas o T.P.C. persiste, todos os dias (ou quase) e tem muitas vezes honras de sumário: *Correcção do trabalho para casa.* Uns fazem-no, quantas vezes nos corredores ou no pátio das escolas, ou, mais precipitadamente, durante a aula que antecede a de Matemática; outros esquecem-se, outros ainda nunca sequer o pensaram fazer. A *correcção*, pela própria maneira como é feita, constitui em muitos casos um momento da aula «difícil», desinteressante, não conseguindo, habitualmente, entusiasmar mais os alunos que o próprio trabalho. Para além disto, como ela é quase sempre efectuada no início da aula, e se «arrasta» durante longos minutos, acaba mesmo por marcar negativamente todo o ritmo dessa aula.

Porquê o T.P.C.? Que Trabalho Para Casa?

Pode-se-á dizer, não sem razão, que, nas condições actuais do sistema de ensino português, o T.P.C. pode ter um papel importante na formação do aluno e, em particular, na sua aprendizagem matemática. Assim, *Responsabilidade..., Autonomia..., Hábitos de trabalho...*, são algumas qualidades que o Trabalho Para Casa pode ajudar a desenvolver, a que eu acrescentaria a *Capacidade de organização*, o *Espírito de iniciativa*, o *Gosto pela pesquisa*, estas sim bem mais desprezadas, ou esquecidas, no que vem a dar ao mesmo, pelos trabalhos que se propõe aos alunos que realizem, para além do tempo curricular da nossa disciplina.

No entanto, o trabalho para casa é quase sempre concebido como um momento onde o aluno vai «aplicar» o que aprendeu (?) em aula; um momento cuja intenção principal, e habitual, é proporcionar uma oportunidade de *treino*, de *consolidação*, das técnicas, processos e conceitos matemáticos já tratados. Esta intenção acaba mesmo por se tornar dominante e vai fazer com que o T.P.C. seja constituído essencialmente por tarefas parcelares, repetitivas, pouco estimulantes, quer pelo seu conteúdo quer pelos processos e actividades que solicita. Por outro lado, o regime com que é utilizado — quase todos os dias há trabalho para casa, é o mesmo para todos os alunos, é proposto para o dia (ou aula) seguinte — vai apenas fazer realçar esse seu carácter rotineiro.



Terá o T.P.C. que ser, apenas, infalivelmente os «exercícios da página tal»? Será necessário, ou conveniente, que se proponha trabalho para casa com a frequência com que muitas vezes ele é proposto? Que o tempo dado para a sua feitura seja sempre «até à aula seguinte»? Terá o T.P.C. que ser necessariamente o mesmo para todos os alunos?

Alternativas...

Numa turma do oitavo ano, a professora, no fim de uma aula, anunciou: «T.P.C.: Construir a planta da casa onde vives». Este exemplo serve para ilustrar uma tarefa

(continua na pág. seguinte)

Materiais para a aula de Matemática

Conforme se declarou no número 1, *Educação e Matemática* preocupar-se-á em apresentar — a par com elementos para a reflexão e discussão sobre os principais problemas que afectam o ensino e aprendizagem da Matemática — sugestões práticas para o trabalho com os alunos dos vários níveis de escolaridade. Com esta nova secção, **Materiais para a aula de Matemática,** pretendemos dar um novo passo nesse sentido, fornecendo materiais concretos para as aulas numa forma imediatamente utilizável.

Assim, publicaremos fichas de trabalho que nos pareçam ter um mínimo de qualidade e que possam ser facilmente usadas pelos professores interessados. A única coisa que terão que fazer é fotocopiar a página respectiva da Revista e... preparar a aula, evidentemente.

Para que *Educação e Matemática* possa desempenhar o papel de divulgar este tipo de materiais, é necessária a colaboração dos seus leitores, o que constitui um novo desafio aos professores de Matemática que lêem habitualmente a nossa Revista: enviem-nos fichas de trabalho que vos pareçam capazes de ajudar a organizar uma aula de Matemática interessante.

A preferência será dada a fichas de descoberta, de exploração ou de investigação. Não pensamos publicar listas de exercícios mas sim sugestões de actividades que possam ajudar a desenvolver a criatividade, e as capacidades de descoberta e de investigação dos alunos. Por razões óbvias, pede-se que o material enviado esteja em boas condições de reprodução gráfica, sobretudo as figuras que eventualmente contenha. E pede-se ainda que esse material seja acompanhado de breves sugestões para a sua utilização e exploração.

Uma investigação sobre rodas dentadas

Neste número, publicamos uma ficha da autoria de Pedro Pimental, professor da Escola Preparatória N.º 2 de Torres Vedras. Esta ficha não se refere a um tópico específico dos programas e pode ser usada em diferentes anos de escolaridade do ensino preparatório ou do secundário, embora o seu autor a recomende para o curso geral unificado. Trata-se de uma proposta de investigação orientada sobre problemas envolvendo rodas dentadas (a primeira questão de natureza científica que terá entusiasmo Papert, o criador da linguagem LOGO, na sua infância — segundo ele próprio descreve no famoso livro *Mindstorms*).

O problema 1 — engrenagens de eixos fixos — pretende motivar a descoberta de que o número de dentes de cada roda é directamente proporcional ao seu perímetro (e, claro, ao raio) e inversamente proporcional à velocidade.

O problema 2 — engrenagens de duas rodas, uma de eixo móvel e outra de eixo fixo — é um ponto de partida para a descoberta da fórmula geral aplicável nestes casos. Observando-se que o centro da roda móvel é o único ponto que descreve uma circunferência, o quociente entre o perímetro desta e o perímetro da própria roda móvel dá o número de voltas em torno do seu eixo: **(r/r') + 1**, em que **r** e **r'** designam os raios das rodas fixa e móvel respectivamente — ou, claro, **(n/n') + 1**, sendo agora **n** e **n'** o número de dentes de uma e de outra.

Paulo Abrantes

T. P. C. *(continuação)*

que para além de não ser uma mera actividade de rotina, e que provavelmente levantará um sem número de dificuldades que os alunos terão que resolver passo a passo, vai exigir tempo; não pode ser (como na realidade não foi) para a aula seguinte. Este foi, na verdade, o trabalho para casa desses alunos *durante* uma semana.

Propostas de trabalho como esta, mais globalizantes e duradouras, que obrigam à análise de uma situação, à definição de uma estratégia, à escolha de instrumentos e que conduzem, por vezes, à realização de tarefas «concretas», podem constituir situações de aprendizagem ricas e estimulantes. «Construções» como a do exemplo citado (ou mesmo de outros objectos...), pequenos programas de pesquisa (levantamentos, inquéritos,...), estudos bibliográficos (a biografia de determinado matemático, a «história» de determinado conceito, teorema ou teoria, a preparação de determinado tema para expor — ou discutir — numa aula...), ou mesmo a simples resolução de um problema verdadeiramente desafiante, podem permitir diversificar o tipo de trabalho que se propõe, a sua frequência e duração, as actividades que se solicitam. Talvez, assim, o T.P.C. possa ser mais estimulante e o aluno, chegado a casa, se lembre, interessado, que tem trabalho para fazer.

P.N. (pense nisto).

Henrique M. Guimarães

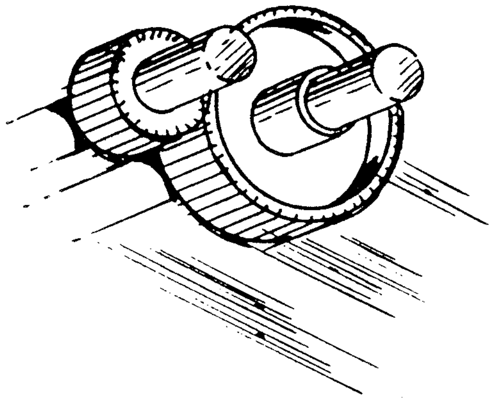
Uma investigação sobre rodas dentadas

PROBLEMA 1

Uma roda dentada com 120 dentes engrena numa outra com 24, sendo fixos os seus dentes.

— Quantas voltas em torno do seu eixo dá a roda menor, enquanto a maior dá uma volta?

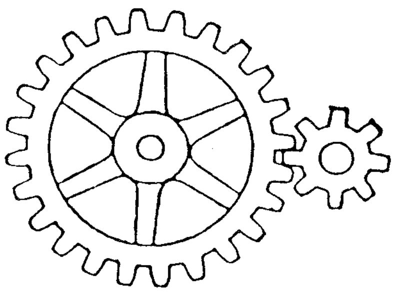
— Sabendo que o raio da roda menor é 2 cm, qual é o da roda maior?



PROBLEMA 2

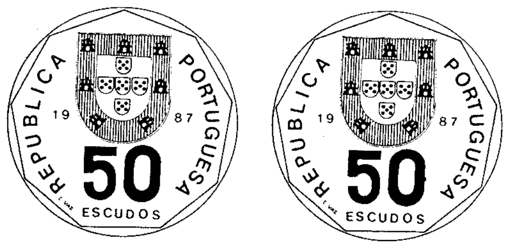
Uma roda dentada com 8 dentes é par de uma outra com 24, de eixo fixo.

Quantas vezes a pequena deve girar em torno do seu eixo para dar uma volta em torno da grande?



SUGESTÃO: «Pega» primeiro em duas moedas iguais. Fixando uma delas, roda a outra à volta da moeda fixa. Quantas vezes gira a moeda móvel em torno do seu eixo até completar uma volta completa em torno da moeda fixa?

Depois de justificares o sucedido, resolve então o problema proposto.



Henry Borenson é, praticamente, desconhecido entre nós. A inclusão de um artigo seu nesta secção não se justifica, assim, pela importância da sua obra, mas, somente, pelo conteúdo do artigo em si mesmo.

Trata-se do relato de uma aula em que se procura iniciar alunos do sétimo ano de escolaridade no processo de investigação em Matemática. Não sendo, uma aula exemplar, vale no entanto pelo seu propósito e pelas concepções, implícitas, que a suportam. Parece-nos que o autor se situa numa perspectiva, dita «falibilista», da construção do corpo de conhecimentos matemáticos. Esta é a perspectiva defendida por Lakatos que afirma ter a Matemática um crescimento semelhante ao das ciências experimentais. Partindo de um problema ou de uma conjectura, há uma procura simultânea de demonstrações e contra-exemplos; novas demonstrações explicam os contra-exemplos, novos contra-exemplos colapsam essas mesmas demonstrações. Assim, a demonstração não é um processo que assegure a transmissão da verdade, numa cadeia ininterrupta e inquebrantável, das hipóteses até às conclusões. É, antes, um processo complexo em que, sob a pressão dos contra-exemplos, as definições e os passos da demonstração se vão precisando e detalhando, tornando, assim, a conjectura mais plausível até se tornar inexpugnável ao criticismo.

Ensinando o Processo de Investigação Matemática

Jenry Borenson

A chave do processo investigativo é o conceito de raciocínio indutivo, isto é, o processo que conduz a uma generalização com base num conjunto limitado de factos específicos.

Haverá poucos estudantes que não tenham utilizado, já, este tipo de raciocínio na sua vida diária. Na verdade, desde muito cedo, que as crianças aprendem que, gritando, chamam sobre si a atenção dos adultos. O garoto, que conclui que «odeia» raparigas porque não gosta da irmã, raciocinou, também indutivamente. Basta então proporcionar a aplicação deste tipo de raciocínio na área da Matemática. É este processo que torna possível a investigação criativa, embora as conclusões a que se chega nem sempre sejam verdadeiras.

O relato que se segue ilustra uma abordagem à investigação criativa e à formulação de conjecturas na sala de aula.

Tratava-se da noção de diagonal de um polígono. Acompanhei a definição de diagonal com o traçado de duas diagonais de um pentágono tiradas do mesmo vértice (fig. 1). «Quantas diagonais tem um pentágono?», perguntei de seguida. «Dez», respondeu o Marco. Como há duas diagonais com origem no vértice A e como os vértices são cinco, então as diagonais de um pentágono devem ser dez — deve ter pensado o Marco. «Toda a gente está de acordo?», perguntei eu. Depois de um curto período de reflexão e de algum trabalho com papel e lápis, os alunos concluiram que o pentágono tinha só cinco diagonais.

Achei então oportuno pôr a seguinte questão: «Já várias vezes falámos, aqui, em raciocínio indutivo e na formulação de conjecturas. Observem o desenho no quadro (fig. 2). Alguém quer propor uma conjectura?» Ime-

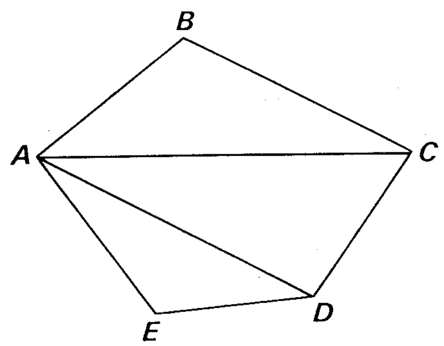


Fig. 1 — Estão desenhadas duas diagonais. Quantas seriam se as tivéssemos desenhado todas?

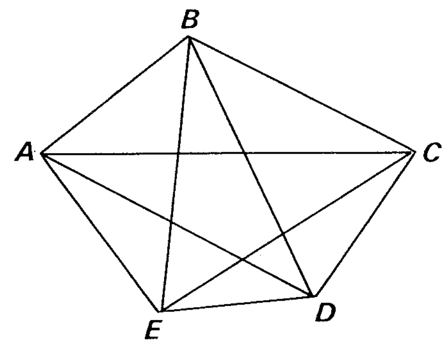


Fig. 2 — A conjectura da Alice: num polígono de cinco lados, as diagonais formam uma estrela.

diatamente vários braços se levantaram. Algumas das conjecturas eram verdadeiramente surpreendentes. (Antes de continuar a ler não quer, também, formular a sua própria conjectura?) Seguem-se as principais conjecturas propostas pelos alunos, tal como foram escritas no quadro:

1. A conjectura do Marco: Um pentágono tem sempre cinco diagonais;
2. A conjectura da Susana: Há tantas diagonais quantos os lados do polígono;
3. A conjectura do Rui: Em qualquer pentágono, de cada vértice saem duas diagonais;
4. A conjectura da Alice: Num polígono de cinco lados, as diagonais formam uma estrela (fig. 2);
5. A conjectura do Marco: Se as diagonais de um pentágono se intersectam, formando uma estrela, então o «centro» dessa estrela é um pentágono (fig. 3).

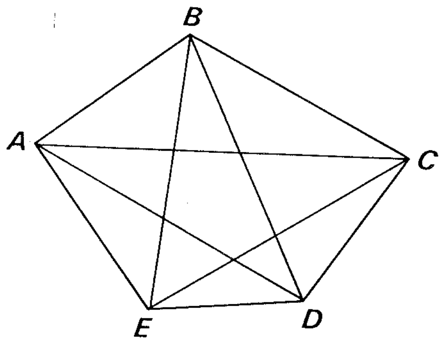


Fig. 3 — Conjectura do Marco: se as diagonais de um pentágono se intersectam, formando uma estrela, então o «centro» desta estrela é uma pentágono.

Tanto a conjectura 4 quanto a conjectura 5 eram novas para mim.

Dividi, depois, a turma em grupos de quatro alunos cada um e propus-lhes que avaliassem da veracidade ou da falsidade das diferentes conjecturas. Cada grupo teria, depois, de transmitir e defender as suas conclusões ao resto da turma.

Os alunos meteram mãos à obra numa tremenda excitação. Eu andei por entre os alunos, atento ao seu trabalho, ouvindo os seus argumentos, prescrutando o seu pensamento. Quinze minutos depois, a turma reorganizou-se para encetar a discussão em grande grupo. A Marta foi ao quadro e apresentou um contra-exemplo à conjectura 2. Um quadrilátero, observou ela, tem quatro lados e, apenas, duas diagonais. Um outro aluno chamou a atenção para o triângulo que, tendo três lados, não tem qualquer diagonal. Então a turma toda concluiu que a conjectura 2 era falsa. Para refutar a conjectura 4, a Rosita e o Roberto desenharam, no quadro, os pentágonos e respectivas diagonais que constam da figura 4. Em qualquer dos casos a turma concurdou que as figuras formadas pelas diagonais não eram, de facto, estrelas.

Como o tempo de aula se aproximasse do fim, pedi aos grupos que apresentassem as restantes conclusões por escrito. Pude ver, assim, que a maioria dos algunos consideravam verdadeiras as conjecturas 1, 3 e 5. Porém, alguns alunos admitiam a existência e davam exemplos de pentágonos em que algumas diagonais se sobrepunham a outras ou se justapunham, mesmo, aos lados (fig. 5).

Mas o toque da campainha não fez esmorecer o interesse pelo assunto. Ter visto as conjecturas designadas com os nomes dos colegas, motivou outros alunos a formularem as suas próprias conjecturas. O trabalho de grupo encorajou-os a partilhar ideias e a aprender uns com os outros. A procura de contra-exemplos às conjecturas formuladas constituiu um desafio estimulante. E, para além das capacidades desenvolvidas, sentiram, sobretudo, quão excitante é o processo de investigação matemática.

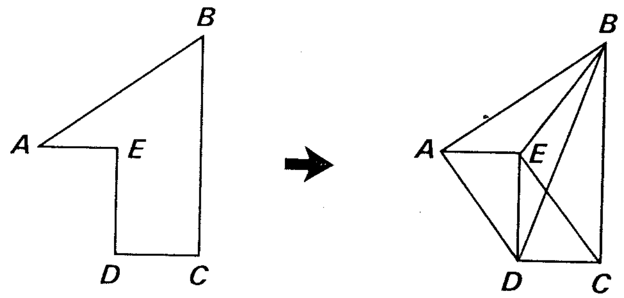


Fig. 4 — A turma concordou que nem sempre as diagonais de um pentágono formam estrelas.

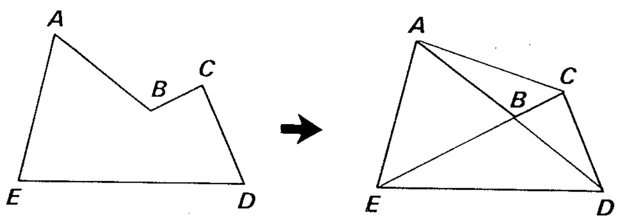


Fig. 5 — A diagonal CE sobrepõe-se à diagonal BE e ao lado BC. A diagonal AD sobrepõe-se à diagonal BD e ao lado AB.

Tradução de *Leonor Moreira* e *Eduarda Fonseca*

O quadro rectangular e o universo infinito

7.º ano de escolaridade. Noções de Geometria elementar. Começou-se por aí. Os miúdos (alguns com 16 anos de idade, carregando a mochila de insucesso e não sabendo que são importantes) procuram figuras geométricas planas em recortes de revistas muito mal coladas em bocados de cartolina (fui eu que os colei...).

Ah, sim! Os trapézios surgem nos telhados, os círculos revelam-se nos pratos e nas chávenas; aparecem os octógonos porque os panos de tabuleiro, onde assentam as chávenas, têm estas formas peculiares e onde eu via apenas dois polígonos de oito lados, alguém conta trinta e dois... com razão!

Nascem triângulos das pernas de uma mesa e as grades sobre o muro são paralelas. Já os lápis que irradiam do interior do copo são mais concorrentes do que outra coisa. Abundam rectângulos pelo mundo, a julgar pelas estantes, pelos livros e sofás, pelas portas e janelas. Há também relógios que são circulares, como o candeeiro, redondo, e há quadradinhos no tampo entrançado de uma mesa, onde está uma caixa de aguarelas, que até são losangos. E a tomada eléctrica parece insignificante, perdida no todo, mas é um quadrado.

Insignificante, poderia ser o facto de uma recta não ter princípio nem fim. Mas há quem ache que as rectas podem não existir porque não se sabe se o universo é finito ou infinito (e um toque de filosofia torna mais bonita a aula). O pior é que eu também não sei, mas continuo a preferir uma recta à medida da imaginação: minha e deles.

Entretanto, olho e espanto-me, porque num caderno aberto de uma aluna lê-se como título: «Descobertas Sensacionais», e depois, por baixo, arrumadinha, desenrola-se a história de uma revelação — que um rectângulo é um paralelogramo e um quadrado também, que o quadrado é rectângulo e é losango, que nem todos os losangos são quadrados!...

Agora que penso melhor naquele título, pergunto-me se não serão todas sensacionais, as descobertas, porque nos arrancam o olhar à fixidez de uma ideia. Algo de semelhante ao que se passou com aquela aluna, parece ter acontecido comigo, há bem pouco tempo, quando conversava com uma pessoa amiga que me definiu um vector como uma «forma de armazenar e transmitir informação». De repente, BUM! Lá se vai aquele estranho ser que habita espaços vectoriais e aquela imagem dos n-uplos, das coordenadas e da algébrica matriz-coluna. Até a setinha inocente dá lugar a uma coisa muito mais parecida com uma carta que segue de avião para algum canto do mundo.

Porém, a história começada não acaba aqui e, a certa altura, algo surge estampado no quadro negro — aquele onde a gente risca a nossa incerteza, tão revestida de certezas — eu acho que é um poema:

triângulo — 3
quadrilátero — 4
pentágono — 5
hexágono — 6
heptágono — 7
octógono — 8
eneágono — 9
decágono — 10

E eles quiseram saber o nome dos outros...

Porque não? O poema continua naqueles olhos. Continuará no quadro (que é rectangular) e nos cadernos (também rectangulares) de descobertas, insucessos e universos infinitos ou finitos?

Tocou. Amanhã há mais... e entretanto, tenho de procurar em casa informações acerca de uma certa nomenclatura.

Susana Carreira

(À minha colega Otília Moreirinha, cuja preciosa colaboração tornou possível a realidade que aqui descrevo, o meu profundo agradecimento.)

PROBLEMAS • IDEIAS • SUGESTÕES • PROBL

A resolução de problemas tem sido, sem dúvida, a actividade matemática mais falada, mas, porventura, a menos praticada em situação educativa.

Em Portugal, tanto no Ensino Preparatório como no Secundário, a resolução de problemas, quando acontece, surge a propósito da aplicação de um conteúdo específico como, por exemplo, a proporcionalidade ou o Teorema de Pitágoras. Raramente, a resolução de problemas é considerada um conteúdo em si mesma, raramente a resolução de problemas é ensinada. Não nos admiremos, portanto, que os nossos jovens apresentem altos índices de fracasso frente a situações problemáticas (veja-se a percentagem de eliminações nas Olimpíadas). De facto, é um pouco como se, depois de ter ensinado uma criança a desenhar as letras, se lhe pedisse para escrever um ensaio.

Nos últimos anos, investigações várias (ver Suydam, 1984) têm conduzido à conclusão de que o ensino em heurísticas específicas contribui de facto, para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Assim, estratégias como começar por resolver um problema mais simples, o ensaio e erro, a regressão, a elaboração de uma tabela ou o simples traçado de um esquema ou diagrama, devem ser sugeridos em situações particulares, pois há evidência de que a transferência ocorrerá e o aluno se socorrerá delas em futuras ocasiões.

Os problemas que apresentamos desta vez são exemplos típicos de situações em que a utilização de um esquema apresenta vantagens sobre qualquer outra forma de resolução. De facto, em qualquer dos casos, um esquema apropriado não só ajuda a clarificar o enunciado do problema, como, também, torna a solução óbvia.

No caso de miúdos mais pequenos ou em dificuldades, o esquema pode ser precedido ou mesmo substituído, com vantagem pela manipulação de objectos ou, até, por dramatização.

Engarrafamento de laranjadas

No mês passado, a nossa turma fez uma visita à fábrica de laranjadas. Vimos tudo, desde a fabricação do sumo até ao engarrafamento.

Todos comentaram o funcionamento da máquina que punha as cápsulas, porque ela mantinha sempre 36 garrafas igualmente afastadas umas das outras e todas em movimento. Tentei ver quanto tempo demoraria a colocar as 36 cápsulas. Comecei a contar o tempo no instante em que a máquina acabou de pôr a cápsula na primeira garrafa e verifiquei que passaram dez segundos até à nona garrafa ficar com cápsula. Nessa altura, o professor disse que tínhamos de voltar para a escola.

Quanto tempo leva a máquina a pôr a cápsula nas 36 garrafas?

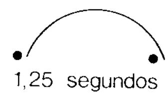
A pista de atletismo

Na nossa escola, há uma pista de atletismo de forma circular e com 6 bandeiras, igualmente espaçadas, colocadas à volta.

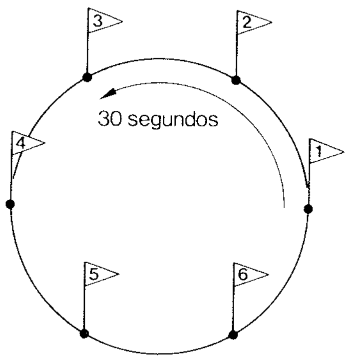
Ontem, os 3 corredores mais rápidos da minha turma começaram a correr junto da primeira bandeira e o Eduardo levou 30 segundos a chegar à terceira bandeira.

Quanto tempo levará o Eduardo a dar uma volta completa à pista se correr sempre à mesma velocidade?

Proposta de resolução



$t = 36 \times 1.25$ segundos



$t = 3 \times 30$

$t = 90$ segundos

Desenvolvimento

O primeiro problema pode ser resolvido por aplicação de conhecimentos relativos a sucessões. Trata-se, de facto, de uma progressão aritmética em que cada termo é o tempo gasto desde que a máquina acabou de colocar a cápsula na primeira garrafa até à colocação da cápsula na garrafa correspondente ao termo da sucessão.

$u_1 = 0$

$u_9 = 10$

$u_{n+1} = u_n + r$

$u_n = (n-1) \times 1.25$

As calculadoras na aula de Matemática

Vulgarizada no dia-a-dia nas mais diversas actividades práticas e profissionais, usada naturalmente por estudantes de cursos de natureza técnica ou científica, custando hoje (no seus modelos mais simples) menos do que um livro escolar — a calculadora continua a ser ignorada, ou mesmo proibida, nas nossas escolas de ensino não superior. Tratando-se de um instrumento dos nossos dias que se destina a efectuar operações aritméticas, não deixa de ser curioso que esta atitude se faça sentir sobretudo nas aulas de Matemática. Em Portugal, a calculadora é frequentemente alvo de acesas discussões entre professores de Matemática, divididos entre posições de apoio à sua utilização nas aulas e posições de recusa à sua integração na aprendizagem.

Apresenta-se a seguir a posição do National Council of Teachers of Mathematics (dos EUA) sobre esta matéria. Está datada de Abril de 1986 e o próprio NCTM afirma que ela se apoia em resultados de investigação realizada sobre os efeitos das calculadores no ensino da Matemática.

«O NCTM recomenda a integração da calculadora nos programas de ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade, nas actividades da aula, no trabalho de casa, e na avaliação. Embora usadas por toda a parte na sociedade, as calculadoras são pouco utilizadas nas escolas onde poderiam libertar muito do tempo que os estudantes gastam habitualmente em exercícios de cálculo. O tempo economizado deveria ser aproveitado para ajudar os estudantes a compreender a Matemática, a desenvolver estratégicas de raciocínio e de resolução de problemas e, em geral, a usar e a aplicar a Matemática.

Em todos os níveis de escolaridade todos os estudantes deveriam ser ensinados sobre como e quando usar a calculadora. Para usar calculadoras de um modo efectivo, os estudantes devem ser capazes de estimar resultados e de julgar se eles são razoáveis. Consequentemente, a compreensão das operações e o conhecimento de factos básicos são tão importantes como sempre. A avaliação da compreensão dos estudantes acerca dos conceitos matemáticos e das suas aplicações, incluindo os testes habituais, deveriam ser preparados de forma a permitir o uso da calculadora.

O NCTM recomenda que todos os estudantes usem calculadoras para:

- centrar a atenção nos processos de resolução de problemas mais do que nos cálculos associados com os problemas;
- ter acesso à Matemática sem que o nível de desembaraço no cálculo constitua uma condicionante decisiva;
- explorar, desenvolver e consolidar conceitos incluindo estimação, cálculo, aproximação e propriedades;
- realizar experiências com ideias matemáticas e descobrir padrões;
- efectuar os cálculos fastidiosos que surgem quando se trabalha com dados reais em situações problemáticas.

O NCTM recomenda aos editores e autores de testes e exames que integrem o uso da calculadora no material de Matemática que elaboram para todos os níveis de escolaridade.»

Aí está um tema que, no nosso país, deveria merecer uma profunda reflexão!

Paulo Abrantes

Clubes de Educação Matemática e Informática *(continua na pág. 14)*

construção de uma Comunidade Escolar aberta que, descongelando definitivamente as suas estruturas e mentalidades, procura situar-se nas perspectivas delineadas por Piaget, Seymour Papert, Bossuet, Emma Castelnuovo, Pedro Ponte e tantos outros.

O entusiasmo, espírito de cooperação e criatividade com que alguns professores vêm enfrentando o desafio da mudança, permitem-nos ser mais optimistas que o Prof. Helder Coelho quando afirma, no seu recente livro sobre Tecnologias de Informação, que perante a revolução informática os professores se situarão no grupo dos «grandes derrotados». Acreditamos que eles se vão situar no grupo dos grandes vencedores pois não só conseguirão apropriar-se das técnicas informáticas como saberão, o que é bem mais difícil, tirar partido delas de um modo integrado, eficaz e inovador, utilizando-as como preciosa ferramenta para perseguir a sua contínua actualização no domínio da técnica e das humanidades e para desenvolver um modelo educativo cada vez mais dinâmico, sintónico e global.

Bibliografia

Nizet, Jean e Hiernaux, Jean-Picerne (198.). *Aborrecimento dos Jovens na Escola.* Porto: Rés-Editora.

Ponte, João Pedro (1987). Os Professores e a Revolução Informática. *Educação e Matemática*, n.º 2, 1.

Silva, Albano (1987). O Clube de Matemática: Reflexão e Acção. *Educação e Matemática*, n.º 1, 19-20.

(1) Usamos aqui o termo método, com o significado que lhe atribui Gimon Sacristan, isto é, como resultado final das opções feitas em relção às diferentes variáveis de ordem psicológica e didáctica.

LOGO.MAT

Um procedimento de cada vez...

REPEAT
Um procedimento popular

O procedimento primitivo REPEAT existe em todos os LOGO's e obedece sempre às mesmas regras de utilização (até ver, está claro). É extremamente útil em muitas situações e de fácil uso, daí ser tão popular... Mas outra razão que o torna popular é o facto de ser empregue para desenhar um quadrado no ecrã e os cursos de iniciação ao LOGO não viverem sem quadrados...

REPEAT é um comando com dois *inputs*, sendo o primeiro um número natural e o segundo uma lista. Dissemos que é um comando, e isso significa que **REPEAT** produz um efeito, a saber: executa repetidamente — tantas vezes quanto o valor do primeiro *input* — as instruções contidas na lista. Assim, se teclarmos **REPEAT 4 [FD 40 RT 90]** e depois **ENTER** ou **RETURN**, a instrução **FD 40 RT 90** é executada quatro vezes, resultando no traçado de um quadrado no ecrã.

O primeiro *input* é um número natural, mas como é habitual no LOGO pode ser obtido como *output* de uma operação. Assim, se criarmos a variável "**n** e lhe atribuirmos o valor 3 com a instrução **make "n 3** e se depois teclarmos **REPEAT : n + 1 [FD 40 RT 90]**, o efeito será idêntico ao anterior. Deve no entanto notar-se que, se o valor do primeiro *input* não é um natural mas um número racional positivo qualquer, o LOGO toma como *input* para o comando REPEAT a sua parte inteira. No caso de um *input* nulo ou negativo, obtemos uma mensagem de desagrado por parte do LOGO.

Quanto ao segundo *input*, ele deverá ser naturalmente uma lista com uma sequência de procedimentos LOGO com os respectivos *inputs*, no caso de existirem. E se assim não for, se introduzirmos na lista uma palavra que não seja um procedimento conhecido do LOGO? Este, muito justamente, responde-nos com uma mensagem dizendo que não conhece tal palavra (o texto exacto da mensagem varia de versão para versão). É o que acontece se tentarmos executar a instrução **REPEAT 3 [MARIA]** (experimente!; e depois experimente a instrução **REPEAT 3 [PR "MARIA]**. Se a lista for vazia, como por exemplo em **REPEAT 10 [ ]**, LOGO repete 10 vezes o procedimento que consiste **em não fazer nada,** mas nos computadores mesmo não fazer nada leva um certo tempo... e portanto isto é uma maneira de fazer uma pausa, tanto maior quanto o valor do primeiro *input*. Pode fazer umas experiências e servir-se deste processo para fazer pausas com as durações que desejar.

Se o primeiro *input* for **1**, então o comando **REPEAT** torna-se equivalente ao comando **RUN** (consulte o manual da sua versão de LOGO).

REPEAT é um comando muito útil, mas há tarefas de que não é capaz, está claro. Por exemplo, poderíamos ser tentados, para obter as primeiras duas letras de uma palavra, a usar o seguinte procedimento:

```
to prim.duas.letras :palavra
repeat 2 [pr first :palavra]
end
```

Mas o resultado será diferente daquele que talvez esperemos (experimente!). Se queremos efectuar repetições em que, de cada vez, o *input* sobre que actuamos seja diferente, teremos que usar outro tipo de procedimentos: os procedimentos recursivos. Mas isto fica para outra vez...

Eduardo Veloso

Desafio aos logoistas!

Uma imagem de uma criança lendo em livro cuja capa é, por sua vez, a imagem da mesma criança lendo o mesmo livro cuja capa é, por sua vez..., é um exemplo de recursividade em expressão gráfica.

O jogo de bonecas russas que se encaixam umas nas outras pode encarar-se como uma concretização artística de recursividade.

Definir avô paterno como «pai do pai» é um exemplo de definição recursiva, aliás muito utilizada em Prolog.

No campo da Matemática as definições recursivas são frequentes. Por exemplo, podemos definir o factorial de um número natural, recursivamente, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \end{cases}$$

A recursividade é, também, uma das características da linguagem LOGO, na medida em que se podem construir procedimentos que se «usam» a eles próprios. Por exemplo, para calcular a potência de expoente inteiro de um número real, podemos construir o seguinte precedimento

```
to potência :b :e
ifelse :e = 0 [op 1] [op :b * potência :b :e-1]
end
```

Vimos, no artigo «Fractais na Escola Secundária» como as curvas fractais são estruturas invariantes por dilatação de escala. O porcesso geométrico de as obter consiste na repetição sucessiva dos mesmos passos, em diferentes escalas. Parece, assim, ser possível construir, em LOGO, um procedimento recursivo que permita desenhar, por exemplo, a curva do floco de neve e a curva de Peano (ou outras!).

Vamos a isso?

Leonor Moreira

Profmat-87 *(continuação)*

sugestão de novas práticas curriculares, uma análise do trabalho de alunos à volta de aplicações da Matemática focou uma tendência pedagógica de grande actualidade. Por último, a conferência de encerramento foi dedicada especificamente aos problemas da renovação curricular no Ensino da Matemática.

A componente social do Encontro

Também a parte social do Encontro não deixou os seus créditos por mãos alheias, tendo sido possível oferecer a todos os interessados visitas guiadas a diversos pontos da região de Bragança, um almoço de confraternização, uma medalha comemorativa do Profmat-87 e duas sessões culturais. O apoio de diversas entidades — designadamente Escola Superior de Educação, Governo Civil e Câmara Municipal de Bragança — conribuiu para o êxito desta componente social do Encontro. Também a Fundação Gulbenkian colaborou, concedendo um subsídio.

Foi ainda possível proporcionar a todos os participantes a visita à exposição itinerante francesa «Horizontes Matemáticos» que permaneceu na ESE de Bragança durante os vários dias do Encontro.

Um balanço muito encorajador

Durante três dias e meio, em Bragança, os principais problemas e desafios que o ensino e a aprendizagem da Matemática hoje nos colocam foram descritos, analisados, discutidos, vividos, por um grupo muito numeroso de professores que os sentem e que estão empenhados em procurar colectivamente responder-lhes de uma forma adequada. Não menos significativo e importante terá sido o ambiente geral de amizade e confraternização: as «sessões culturais e recreativas espontâneas» forma disso um excelente exemplo. Este ambiente de amizade é uma faceta ligada às características da APM desde o início da Associação e não é possível dissociá-la do êxito dos seus principais encontros.

É evidente que o Encontro teve falhas de carácter organizativo, algumas delas resultantes de um número de participantes muito superior às previsões mais optimistas. Mas, no conjunto, parece ser opinião unânime que se tratou de uma magnífica demonstração da vitalidade e das potencialidades da nossa Associação e, de um modo mais geral, de um movimento de (muitos) professores de Matemática que têm consciência de que é necessário um maior esforço de estudo, reflexão colectiva e troca de expriências para defrontar, com os olhos postos no futuro, a situação de crise que a Matemática escolar atravessa.

Sem dúvida, todos os nossos colegas que se empenharam na organização dos múltiplos aspectos do Profmat-87 merecem os nossos parabéns e o nosso agradecimento. O núcleo de Bragança tem aí obviamente um lugar de destaque. Mas, agora, há muito trabalho a fazer ao longo do ano. E, tendo passado Bragança-87, há que começar a olhar para Faro-88! No próximo número, «Educação e Matemática» não deixará de referir-se ao Profmat-88.

Cristina Loureiro e *Paulo Abrantes*

A Matemática não é só cálculo *(continuação)*

aproveitamento, atitudes, a concepções dos alunos, ou seja, o insucesso generalizado, são cada vez mais aceites com perigosa naturalidade. Tudo parece contribuir para legitimar a ideia que se estará em vias de instalar nos responsáveis — já que nada mais podemos conseguir, ao menos que os alunos sejam capazes de calculcar.

A renovação curricular de que Sebastião e Silva foi protagonista em Portugal integrava-se num movimento mais geral que na maioria dos países foi conhecido pela designação de Matemática Moderna. Este movimento, de inspiração bourbakista, insistindo nos aspectos algébricos e formais da Matemática, desligando-a por completo da realidade, não melhorou a situação em termos de aproveitamento dos estudantes e acabou por conduzir a grandes controvérsias na opinião pública. Perante o desencanto dos seus promotores, seguiu-se uma reacção profundamente conservadora — conhecida por exemplo nos Estados Unidos por «back to basics» — cuja linha de força essencial consistia precisamente no reforço do cálculo.

A ironia é que sob a capa da recusa aos modismos, expressa alto e bom som no documento da Comissão da Reforma do Sistema Educativo, se opta por uma orientação que traduz um dos mais pobres, mais conservadores e mais desastrosos modismos, que tiveram a sua época noutros países há mais de 15 anos. Ou talvez se venha a verificar não passar tudo afinal de um pequeno equívoco, fruto provavelmente de uma desatenção momentânea. Nesse caso, a displicência actual talvez ainda se venha a converter num salutar movimento de atenção por parte das autoridades educativas para com os problemas colocados por uma verdadeira Educação Matemática.

I C M E - 6

6th International Congress on Mathematical Education
Budapeste — Hungria, 27 de Julho a 3 de Agosto de 1988

O ICME (Congresso Internacional sobre Educação Matemática) realiza-se de quatro em quatro anos e constitui o acontecimento internacional mais importante na área da Educação Matemática. Estes Congressos contam sempre com milhares de participantes de um grande número de países, entre os quais as figuras mais destacadas nesta área. O último teve lugar em Adelaide, Austrália (1984) e o ICME-7 decorrerá no Canadá (1992).

O ICME é organizado pela **International Comission on Mathematical Instruction** (ICMI) que é filiada na União Matemática Internacional, da qual no entanto se tornou autónoma a partir de meados dos anos sessenta. Por sua vez, diversos grupos de estudo internacionais trabalham sob a égide do ICMI mas de forma independente, alguns deles realizando os seus próprios Encontros anuais: PME (Psychology of Mathematics Education); HPM (History and Pedagogy of Mathematics); TME (Theory of Mathematics Education); IOWME (International Organization of Women and Mathematics Education).

Além da organização dos Congressos de quatro em quatro anos, o ICMI tem promovido estudos e seminários sobre temas considerados de grande importância internacional. Os dois mais recentes debruçaram-se sobre o impacto dos computadores na Matemática e no seu ensino e sobre as grandes questões da renovação de currículos e programas de Matemática nos Ensinos Primário e Secundário.

O ICME-6 incluirá: (a) sessões plenárias; (b) sete grupos de trabalho e discussão paralelos correspondendo aos vários níveis e tipos de ensino (quatro sessões de 90 minutos cada); (c) sete grupos de discussão paralelos incidindo sobre temas gerais — a profissão de professor, computadores e ensino da Matemática, resolução de problemas, avaliação, prática de ensino e investigação em didáctica, Matemática e outras áreas, currículo para o futuro (igualmente, quatro sessões de 90 minutos cada); (d) dezassete sessões paralelas relativas a tópicos específicos ou ao trabalho de grupos internacionais; (e) conferências sobre temas diversos; (f) apresentações nacionais por parte de países convidados (Argentina, Bulgária, Malawi e Espanha); (g) um dia especial incluindo sessões dedicadas ao tema «Matemática, Educação e Sociedade»; (h) apresentação de posters, breves comunicações orais ou projectos.

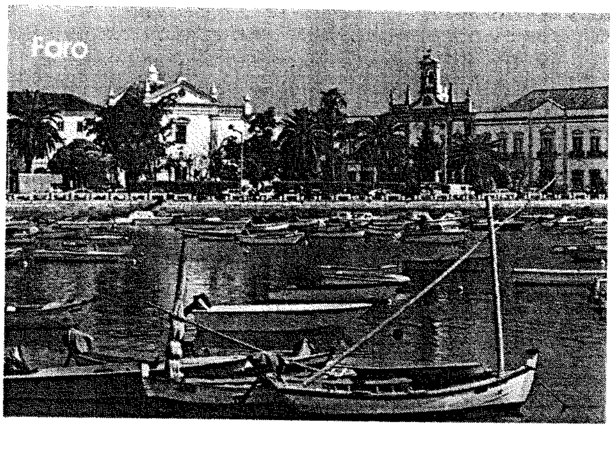
Nos últimos anos, alguns professores portugueses têm participado em encontros realizados em diversos países e, nalguns casos, pertencem mesmo a comissões internacionais na área do Ensino da Matemática. A APM tem estado particularmente atenta, promovendo muitos contactos quer em Congressos quer fora deles. Retomou-se assim o contacto com o movimento internacional que se havia praticamente perdido durante a década de 70. Por maioria de razão, é importante que haja uma participação portuguesa, tão forte quanto possível, num Congresso com a relevância do ICME.

A APM fornecerá as informações necessárias a todos os colegas interessados em participar neste Congresso. Essas informações podem ser pedidas a um dos quinze membros da Direcção Nacional da APM (no verso da capa deste número da Revista indicam-se os nomes e locais de trabalho — que se situam em Viana do Castelo, Bragança, Porto, Viseu, Castelo Branco, Lisboa, Portalegre, Setúbal e Faro). Para além disso, a APM irá estudar formas possíveis de promover uma deslocação colectiva à Hungria e ainda de contribuir activamente para os trabalhos do Congresso.

PROFMAT-88 EM FARO

No Encontro de Bragança, os colegas de Faro candidataram-se à organização do Profmat-88. Depois de estudar a questão, a Direcção Nacional da APM decidiu aceitar a proposta e marcar o Encontro para o próximo Setembro. Existe já uma comissão organizadora local, coordenada pelo Cárlos Próspero, enquanto os colegas Maria do Loreto Louceiro e João Filipe Matos serão, em Lisboa, os responsáveis pelo programa científico do Encontro.

Brevemente, haverá mais notícias sobre o Profmat-88!



Triângulos, cubos e outras coisas que tais...

0. Dois problemas do dia-a-dia com a Matemática no n.º 2 de Educação e Matemática despertaram-me a atenção. No primeiro pedia-se a colocação dos números 1 a 6 nos lados e vértices de um triângulo de modo que a soma nas três direcções fosse a mesma (v. fig. 1). O segundo era um problema análogo para o cubo, mas agora com os números 1 a 8 e de modo que a soma dos vértices em cada face fosse 18 (v. fig. 2).

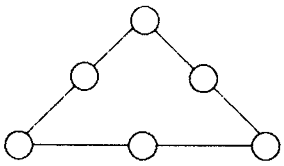


Fig. 1

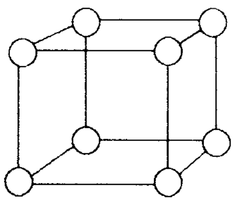
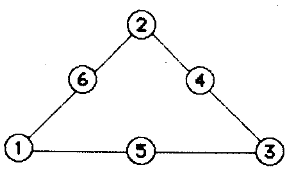
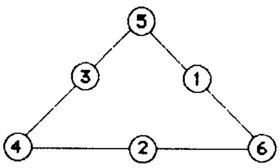


Fig.2

1. Uma solução para o problema relativo ao triângulo obtém-se rapidamente se pensarmos que de 1 a 6 há três números «mais pequenos» — 1, 2 e 3 — e três números «maiores» — 4, 5 e 6. Daí surge a ideia de colocarmos nos vértices os números 1 a 3 e nos lados os números 4 a 6. Há apenas que ter algum cuidado na colocação nos lados, para compensar as somas obtidas com os extremos de cada lado. E é natural pensar na solução «oposta» — 4 a 6 nos vértices e 1 a 3 nos lados. Teremos assim:





2. Pedia-se uma solução e já temos duas! Quem (ainda... ou já) não tenha o bichinho da Matemática ficará satisfeito por aqui — ou mesmo por ali, com a primeira solução. Mas o aprendiz de Matemática pensará: serão estas **todas as soluções**?

E embora perceba que, dada a pequena dimensão dos dados, seria possível descobrir todas as soluções por tentativas, prefere empregar uma estratégia que eventualmente possa servir para outros problemas. Por exemplo a seguinte:

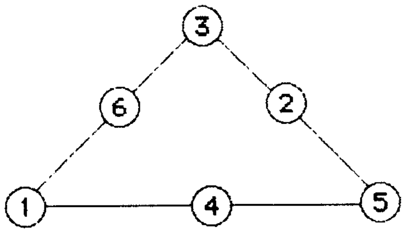
— como a soma dos números correspondentes a cada lado **tem que ser constante,** então a soma **N** dos três grupos de números associados aos três lados tem que ser um **múltiplo de três;**

— além disso, como cada vértice, na soma **N,** é **contado duas vezes** (pois pertence a dois lados), **N** é em cada caso igual à soma de duas parcelas, uma fixa — que é a soma dos números de 1 a 6, ou seja 21 — e outra correspondendo a cada escolha que fazemos dos números a colocar nos vértices.

Então **N** tem que ser maior ou igual a **27** = 21 + 6 (escolha de 1, 2 e 3 para os vértices) e menor ou igual a **36** = 21 + 15 (escolha de 4, 5 e 6 para os vértices). Como **N** ter que ser múltiplo de 3, as soluções possíveis são as que correspondem a **N** igual a 27, 30, 33 e 36. Os casos N = 27 e N = 36 referem-se às soluções já encontradas. Vejamos os outros:

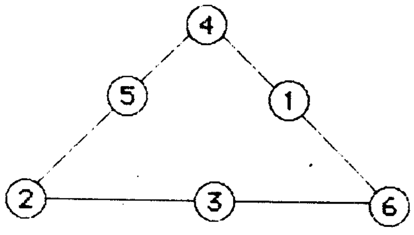
N = 30: A soma dos números colocados nos vértices é **9** = 30 − 21. Há três escolhas possíveis

- 1, 2 e 6 nos vértices. Não corresponde a nenhuma solução, como é fácil ver.
- 2, 3 e 4 nos vértices. Idem.
- 1, 3 e 5 nos vértices. Obtém-se mais uma solução:



N = 33: A soma dos números colocados nos vértices é **12** = 33 − 21. Há escolhas possíveis:

- 1, 5 e 6 nos vértices. Não produz nenhuma solução.
- 3, 4 e 5 nos vértices. Idem.
- 2, 4 e 6 nos vértices. Obtém-se mais uma solução:



O problema relativo ao triângulo tem assim quatro soluções.

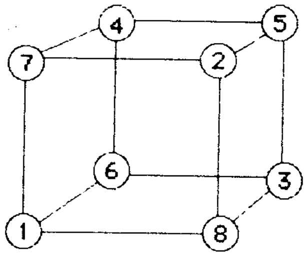
3. Quanto ao problema análogo relativamente ao cubo, o que se estranha é que no enunciado seja agora fornecido um dado omitido no problema anterior: o valor constante da soma dos números colocados nos vértices de cada face (18). Na realidade, como veremos já a seguir, este dado é supérfluo.

Significando agora **N** a soma dos seis grupos de 4 números colocados nos vértices de cada face, notando que o número colocado em cada vértice é agora contado **três vezes** em N e que todos os números, de 1 a 8, são colocados nos vértices, concluímos que **N** tem que ser igual a **108** = 3 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) e que a soma dos quatro vértices de cada face tem que ser igual a **18** = 108/6.

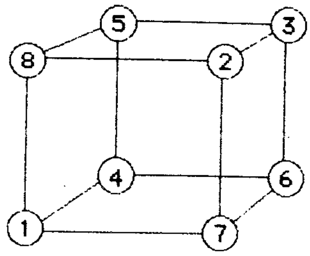
Se repararmos ainda que no cubo há *três pares* de faces disjuntas (significando, aqui, faces disjuntas aquelas que não têm vértices comuns), vemos que cada eventual solução do problema está ligada a existência de *três decomposições* do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} em dois subconjuntos disjuntos de quatro elementos cuja soma seja igual a 18. Procedendo com cuidado, vemos que existem apenas quatro decomposições daquele tipo, a que chamaremos A, B, C e D, a saber:

A...... {1, 2, 7, 8} e {3, 4, 5, 6}
B...... {1, 3, 6, 8} e {2, 4, 5, 7}
C...... {1, 4, 5, 8} e {2, 3, 6, 7}
D...... {1, 4, 6, 7} e {2, 3, 5, 8}

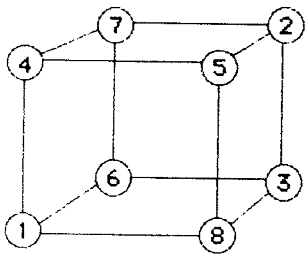
Mesmo sem recorrer à fórmula das combinações, vemos que são quatro os modos como podemos agrupar três a três aqueles quatro pares de faces, a saber: ABC, ABD, ACD e BCD. Isto é, haverá quando muito quatro soluções para o problema posto. Mas ABC parece não poder ser solução, pois a aresta 1-8 estaria em três faces, o que não é possível num cubo. Só os outros casos deverão corresponder efectivamente a soluções, como o leitor pode verificar pelas figuras seguintes;



ABD



ACD



BCD

Nota final: Serão estes dois interessantes problemas realmente **dois** problemas ou apenas dois exemplos de **um mesmo problema**? Para isso teríamos de ir estudar outras figuras planas e outros poliedros, como o tetraedro, por exemplo. Quem quer continuar?

Eduardo Veloso

Alguns colegas têm perguntado se seria possível publicarem-se as soluções dos problemas apresentados, nesta secção, nos dois primeiros números da nossa revista. Como é visível nestas duas páginas, alguns desses problemas têm merecido uma especial atenção de colaboradores ou leitores de *Educação e Matemática.* Em relação aos restantes, pensamos apresentar proximamente um número maior de soluções e sugestões. Entretanto, claro, esperamos a contribuição dos colegas que tenham encontrado soluções ou explorações particularmente interessantes.

PUBLICAÇÕES A.P.M.

Publicações recentes:

O computador na aula de Matemática

Tal como os três títulos que apresentamos em seguida, é uma das edições da APM que surgiram no PROFMAT 87. Partindo da premissa que o computador na aula de Matemática é simultaneamente inevitável e desejável, Eduardo Veloso ocupa-se das várias formas e modalidades que pode tomar a sua utilização, num estudo crítico e comparativo.

☐ Agosto 1987; 73 páginas; preço: 250$00.

A Matemática na Vida das Abelhas

Este trabalho, da autoria de Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes, constitui a primeira publicação da série «Aplicações da Matemática». Partindo de um contexto real e mantendo ligações entre a Matemática, a Biologia e o Desenho, estuda problemas de geometria do plano e do espaço associados à vida das abelhas e relata uma experiência de trabalho sobre este tema com alunos do 9.º ano.

☐ Julho 1987; 80 páginas; preço: 250$00

Jogos, Enigmas, Problemas

Odete Bernardes e Paula Teixeira seleccionaram e apresentam neste trabalho um conjunto de problemas e jogos que são de fácil preparação (requerendo nenhum ou pouco naterial) e que são acessíveis a todos. Para cada um desses problemas ou jogos, sugerem-se variantes e soluções possíveis.

☐ Julho 1987; 48 páginas; preço: 150$00.

Como adquirir as publicações da APM pelo correio:

- fotocopie e **preencha** a ficha respectiva (ver abaixo)
- envie a ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome da **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

  Paulo Abrantes
  Faculdade Ciências
  Av. 24 de Julho, 134, 4º
  1300 Lisboa
- escreva a indicação «pedido de publicações APM» no sobrescrito
- NOTA: os títulos disponíveis são apenas os que constam da ficha incluída no número mais recente de **Educação e Matemática.**

Ficha para pedido de publicações da APM

Titulos	nº de exemplares	custo unitário	custo
O computador na aula de Matemática		250$00	
Cronologia recente do ensino da Matemática		200$00	
Jogos, Enigmas e Problemas		150$00	
A Matemática na vida das abelhas		250$00	
O Problema da Semana		200$00	
PROFMAT nº 3		400$00	
Educacão e Matemática nº 2		200$00	
Educação e Matemática nº 3		200$00	

Pedido feito na data .... / /

Nome...

Morada...

Código Postal ....

Assinatura...

subtotal →	
portes/correio (10%) →	+
valor total →	

Para uso da APM:

Pedido recebido em.................................. / /

Publicações enviadas em.......... / /

Assinatura:

OPINIÕES • CRÍTICAS • NOTÍCIAS • OPINIÕES

E a cidade viveu Matemática...

Este é o título de um artigo que nos chegou do Porto, da autoria de Maria José G. Alves (E. S. Garcia da Horta) e Isabel Quinta (E. S. do Padrão da Légua) e que de alguma forma nos conta o modo como a exposição **Horizontes Matemáticos** foi «vivida» naquela cidade. Destinava-se a ser publicado no número 3 de Educação e Matemática mas a sua tardia recepção inviabilizou essa intenção.

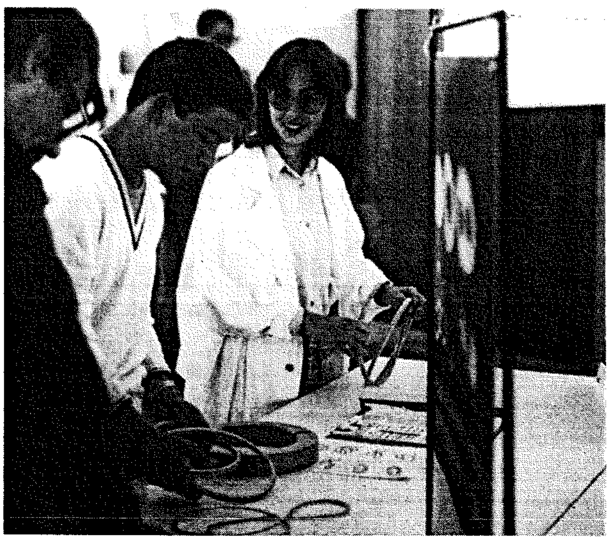
Como é conhecido, esta exposição esteve em várias cidades do País durante o ano lectivo passado. No Porto, dizem-nos aquelas duas colegas, durante duas semanas inúmeras escolas do ensino primário ao ensino superior, com forte predominância do ensino secundário, levaram os seus alunos até aos **Horizontes Matemáticos.** Foram mais de dois mil — sem incluir os que a visitaram sem marcação prévia... — da cidade do Porto e arredores e até de Amarante, Aveiro, Santo Tirso...

Isto passou-se em Maio e ficou a dever-se, em grande parte, ao empenhamento e capacidade de dinamização dos nossos colegas da APM do Porto. Podendo o assunto estar um tanto desactualizado, o que atrás se disse justifica, pensamos a menção que agora fazemos. Trascrevemos a seguir uma parte do artigo que temos estado a referir, ilustrado por uma fotografia que na mesma altura nos foi enviada.

Durante as duas semanas solicitámos ao público impressões sobre a exposição. Da sua análise, resultou:

Aspectos positivos

- a exposição ser agradável, bem elaborada, cativante, criativa, didáctica, imaginativa, inovadora, instrutiva, interessante, original;



- a necessidade de continuar a estimular iniciativas deste género.

Aspectos negativos

- as instruções e informação não estarem totalmente traduzidas.

— «Quem me dera começar agora! Parabéns!»
— «A Matemática não tem mesmo que ser aquela «chatice» que me «impingiram» quando andava no liceu»
— «Gostava de saber se as senhoras que fazem renda de bilros conseguiam passar na cadeira de Topologia!»
— «Penso que é uma exposição que nos dá uma visão diferente do que se está habituado a pensar do que é a Matemática. Faz sem dúvida desenvolver a nossa capacidade mental para além de nos divertir (uma iniciativa a não esquecer)!!!»
— «Gostei. É de fundir os fusíveis dos meus eléctrodos mentais».

...Algumas reflexões após...

O exito da exposição e a boa preservação de todo o seu material manipulável foi resultado da colaboração do Doutor José Azevedo da ESE-Porto, do núcleo dinamizador da APM--Porto e dum grupo de sócios que para tal foram solicitados.

Os ensinos primário e preparatório praticamente não aderiram à exposição. Na APM-Porto temos, presentemente, como sócios dois professores do ensino primário e uma meia dúzia do ensino preparatório. Porquê?

Anastácio da Cunha
— Colóquio internacional —

Tal como tínhamos anunciado, realizou-se em Lisboa, em Outubro passado, um colóquio internacional inserido na homenagem a José Anastácio da Cunha, no ano do bicentenário da sua morte. Este colóquio, promovido pela comissão de homenagem de Lisboa a este Matemático e Poeta português do século XVII, reuniu investigadores em várias áreas, nomeadamente em Matemática, História e Literatura. As várias conferências e comunicações contribuiram por certo para um mais profundo conhecimento e melhor divulgação, a nível nacional e internacional, da vida e da obra de Anastácio da Cunha.

Cabe aqui referir a comunicação de João Pedro Ferro que teve o mérito de mostrar que o retrato que circulava como sendo eventualmente de Anastácio da Cunha, e que **Educação e Matemática** também publicou, não é de facto desse matemático, mas, muito possivelmente, de José Rodrigues Lisboa.

(Nota: Na notícia que publicámos no número anterior de Educação e Matemática referente a este colóquio, onde está «Morre, entretanto, o Marquês...» devia estar «Morre, entretanto, D. José...». Pelo lapso, pedimos desculpa.)

OPINIÕES • CRÍTICAS • NOTÍCIAS • OPINIÕES

Seminário Nacional de História da Matemática

De Jaime Carvalho e Silva, professor no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, recebemos o anúncio da criação de um **Seminário Nacional de História da Matemática**, cujo manifesto publicamos noutro local, bem como a indicação do seu tema prioritário para 1988: **A vida e obra de José Anastácio da Cunha.**

São sugeridas como possíveis pistas a desenvolver:

«*a*) Procura de documentos que permitam esclarecer os períodos da vida de Anastácio da Cunha pouco conhecidos (...); a que livros teve acesso (...); qual o pensamento de Anastácio da Cunha sobre a Matemática (...);

b) análise das influências que terá sofrido Anastácio da Cunha (...);

c) o ensino da Matemática na época e o pensamento de Anastácio da Cunha sobre o ensino;

d) desenvolvimento da Matemática por via das necessidades militares ou desenvolvimento das técnicas militares por via do desenvolvimento da Matemática? Contribuição de Anastácio da Cunha.»

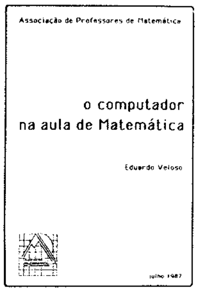
Um livrinho a dar que falar...

Decorria em Bragança o Profmat/87. No **Diário Popular** o jornalista Rodrigues da Silva contava assim, num texto vivo e interessante, o modo como de um momento para o outro se viu a ler — e a gostar! — de um **livrinho de título ameaçador,** onde se falava de aulas de Matemática, de computadores e não só (sobretudo **não só!**):

> Há fraquezas inconfessáveis, mas para os leitores perceberem bem este texto tenho que confessar uma secreta: odeio a Matemática e, quando me enervo, só sou capaz de contar pelos dedos...
>
> Dito isto, poder-se-á imaginar o que senti quando, há dias, me caiu em cima da mesa um livrinho com um título ameaçador: «O Computador na Aula de Matemática». Não fora o nome do autor (Eduardo Veloso), amigo de andanças que não são para aqui chamadas, e o livro sofreria o destino a que votei — quando pude — quanto compêndio de Matemática me passou pelas mãos dos 10 aos 15 anos.
>
> Assim, dominei os instintos, mas abri o livro com a sensação angustiante de quem, por dever de ofício, vai ter que enfrentar «o conhecimento do inferno».
>
> Uma hora depois, não digo que tenha chegado ao paraíso, mas garanto que andei lá perto. Este livro é um prazer, um estimulante exercício de inteligência e uma fascinante prova de confiança nos destinos do Homem».

E, mais à frente, quase a terminar:

> «Porque a questão de fundo que o seu livro levanta é esta: até que ponto, sem um cada vez maior divórcio entre a Escola e a Vida, as aulas de hoje (de Matemática e não só) podem continuar a ser as aulas de há cem anos?
>
> Neste livro, não são os professores nem os alunos quem está em causa. Tão-pouco o computador, o giz ou o quadro preto. É, antes, a concepção filosófica do ensino hoje vigente e dominante, responsável pelo insucesso escolar e por aversões à Matemática e a muitas outras disciplinas».



São só excertos, poucos, que com a dita vénia publicamos. O que falta vem no Diário Popular de 9.9.87.

Quanto às razões do jornalista... bom, se querem saber leiam o livro do Eduardo Veloso... Vale a pena.

Pouco tempo depois, em 22 de Setembro, o **Correio Informático** publicava o capítulo final de «O Computador na Aula de Matemática» ao mesmo tempo que dizia em texto introdutório:

> A utilização da informática como ferramenta auxiliar do ensino ultrapassa largamente a simples instalação de computadores nas salas de aula. A afirmação é incontestável e é quase um lugar comum. A realidade de muitas das experiências de introdução da informática nas escolas mostra no entanto que é necessário insistir nela e generalizar a reflexão que alguns vão tentando suscitar em torno dos temas informática e ensino. A Associação de Professores de Matemática acaba de publicar um pequeno volume intitulado «O Computador na aula de Matemática», da autoria de Eduardo Sousa Veloso, que constitui um importante contributo para essa reflexão.

Um livrinho a dar que falar...

Ainda a Maria e as Maçãs

No número 2 de Educação e Matemática, lembram-se, perguntava-se «Quantas maçãs tinha a Maria?». Entretanto este problema ia acompanhado de um desafio aos **logoístas** que suscitou algumas respostas que publicámos no número 3 desta revista.

Desta vez é João Palma da E.S. de Sampaio (Sesimbra) quem nos envia uma contribuição àquele desafio a que Eduardo Veloso responde com alguns comentários:

Agradeço ao colega João Palma a sua carta. Na realidade, a frase criticada por João Palma é discutível e mesmo incorrecta, ao pretender ser uma afirmação de carácter geral. Inteiramente de acordo, por isso, com as restantes observações da carta. No entanto, quanto ao caso concreto do problema da Maria e das maçãs, continua a parecer-me ter algum sentido a minha observação, pelas razões seguintes:

- na minha concepção tem mais justificação a construção de um algoritmo quando ele se destina a resolver uma classe de problemas idênticos — digamos que nesse caso vale a pena *investir* na procura de uma fórmula algébrica, por exemplo, *para resolver todos os problemas de certo tipo.*
- quando estamos perante um problema isolado, como é o caso que nos ocupa, parece-me, porventura erradamente, ser mais normal ou natural tentar escrever um programa de modo a passar a tarefa de fazer cálculos, algébricos ou numéricos, para o computador, do que deduzir uma expressão algébrica, aplicável apenas a um problema, e depois transcrevê-la numa linguagem de programação.

Uma outra abordagem do problema da MARIA

«...a dedução de uma expressão que depois é programada. Será possível de outra forma mais natural em programação, que é partir directamente do enunciado sem deduções laterais?».

Penso que esta frase é, pelo menos, discutível.

A maioria das linguagens de programação (LOGO incluído) são linguagens algorítmicas (do outro lado, as linguagens declarativas).

Um programa numa linguagem algorítmica não é a descrição de um problema mas sim a descrição formal (nessa linguagem) de uma maneira de resolver o problema — o algoritmo. O programa tem muito a ver com a maneira como se resolve o problema mas pode não ter nada a ver com a maneira como o problema é apresentado. Um problema pode ter várias soluções (como é exemplarmente ilustrado no n.º 2 desta revista) e a cada solução corresponde um algoritmo — ou seja, um programa.

O programa que se segue, propõe uma outra solução (das muitas...) que o problema da Maria sugere. A estratégia seguida é uma estratégia «heurística», a procura da solução não é feita segundo um processo pré-determinado por uma expressão algébrica que conduza imediatamente ao resultado mas sim por sucessivas aproximações orientadas para o valor procurado. A partir de um valor gerado aleatoriamente simula-se a situação do problema. O resto obtido para este valor é comparado com o resto do problema e a diferença vai aferir o novo valor a testar.

O programa

:N n.º de amigos
:B parte das maçãs dadas
:A acréscimo das maçãs
:R resto das maçãs
:X valor inicial

o procedimento PROB — necessário para inicializar o valor de :X
o procedimento MARIA — gera os sucessivos valores de :X
o procedimento TESTE — simula a situação do problema para um dado valor de :X

```
TO PROB :N :B :A :R
MARIA :N RANDOM 25
END

TO MARIA :N :X
IF (TESTE :X :N) = :R [PR :X STOP]
MARIA :N :X + 5 * (:R — TESTE :X :N)
END

TO TESTE :X :N
IF :N = 0
[OP :X]
OP TESTE :X — (:A + :X/:B) :N — 1
END
```

João Palma

Movimento de Professores em S. Tomé e Príncipe

Preocupados com a situação actual do ensino na República de S. Tomé, com a degradação sistemática e progressiva das suas condições um grupo de professores são-tomenses criou, em 1986, o Círculo de Estudos de Professores (CEP). Tendo como intenção modificar um certo modo de ver e de estar em relação às questões ligadas à promoção cultural, em particular no que se relaciona com o professor, o CEP assume como finalidades prioritárias: estimular e desenvolver o espírito crítico e o gosto pela pesquisa, proporcionar ambientes de reflexão e discussão dos problemas educacionais e despertar o interesse dos elementos intervenientes no processo educativo para os avanços mundiais no campo da educação.

Este Círculo promoveu e organizou já várias actividades — *ateliers*, conferências, sessões de reciclagem para professores — sobre temas como: «A Educação como sistema de valores» e «As Relações Pedagógicas no Acto de Educativo».

«Evoluta»

Por intermédio do seu ex-director, Carlos Frias, recebemos o número 7 da **Evoluta** — revista para o ensino da Matemática que se publica na cidade de Évora.

No seu editorial, ainda da responsabilidade de Carlos Frias pode ler-se:

> «Quem recusa ser um(a) passivo(a) gerente da crise por que passa o nosso ensino (e o da nossa disciplina) quer compreender as causas, analisar a situação, definir caminhos de transformação. (...)»

Agradecemos a recepção desta revista e desejamos uma boa continuação para a nova direcção.

A Aprendizagem da Geometria nos primeiros nove anos de escolaridade

No número dois de **Educação e Matemática** anunciámos a publicação das conclusões de um encontro de professores, realizado em Évora, sobre a aprendizagem da Geometria. Essas conclusões (transcritas já na íntegra no número 7 da revista **Evoluta** que se publica em Évora e de que também damos notícia neste número de **Educação e Matemática**) foram-nos enviadas, na devida altura, por José Tiago Filipe num documento assinado pelo próprio e pelos colegas Ana Maria Perdigão, António Alexandre Botelho e António Faria Monteiro.

Nesse documento, com cerca de seis páginas, as conclusões do encontro realizado estão agrupadas segundo os vários níveis de ensino. Para cada um deles, de um modo geral, procurou-se identificar os objectivos perseguidos, a medida em que os respectivos programas são cumpridos e as principais razões, se for o caso, do seu não cumprimento e o grau de articulação desses programas. Publicamos seguidamente largos extractos do capítulo que contém as reflexões e as conclusões gerais do referido encontro.

> «A articulação vertical e horizontal dos programas só será efectuada se os professores perceberem os mecanismos de ligação de toda a escolaridade.
>
> Devemos ser capazes de deixar uma mão presa no passado e outra livre para estabelecer a ligação de conhecimentos com o futuro.
>
> A Matemática não pode ser leccionada como um livro de quadras, mas sim como um romance».

A maior parte deste capítulo é dedicada à apresentação de um conjunto de recomendações, de que transcrevemos:

> «Os propósitos meramente intelectuais da Matemática devem ser ultrapassados, procedendo-se à sua extensão a domínios como os psicomotor e psico-social.
>
> É sentida a falta de um processo individual dos alunos convenientemente descriminado com registos de estratégias utilizadas na aprendizagem, de objectivos alcançados, de dificuldades sentidas, bem como de todas as informações de natureza social, afectiva, entre outras, que possam contribuir para uma maior eficiência de todo o processo de ensino-aprendizagem. Saliente-se que este método é usado no ensino primário, mas não acompanha as crianças para o preparatório.
>
> No fim da escolaridade obrigatória os alunos devem estar preparados para a vida real e os conhecimentos que adquiriram devem satisfazer as suas necessidades básicas. Registe-se que na actual situação, o aluno à saída do ciclo preparatório não fica de modo algum apto para enfrentar as exigências que lhe são impostas a nível social.
>
> A estruturação e organização do ensino, que já atingiu um plano aceitável no primário, vai decrescendo progressivamente à medida que se avança para o secundário. Seria bom que se efectuasse um nivelamento entre todos os ramos de ensino em termos organizativos, tendo em conta os aspectos positivos de cada um e a sua aplicabilidade aos outros.
>
> É urgente que em cada escola sejam criadas condições de trabalho e que os professores disponham de horário misto — lectivo e não lectivo — de modo a poderem realizar o trabalho em grupo, a interdisplinaridade, a articulação dos programas, a investigação e resolução de situações problemáticas e o apoio aos alunos. Enquanto isto não acontecer não haverá reforma que consiga resolver os problemas que foram apontados e que urge solucionar.

Uns versos...

Quem esteve em Bragança, no Profmat, lembrar-se-á, certamente, que depois da Assembleia Geral da APM, o José António Duarte aproximou-se do microfone e antes de começar a dirigir o «coro» disse uns versos. Aqui ficam, pois, os ditos que «alguém» nos fez chegar:

À Associação de Professores de Matemática

Ideias...

Segui em linha recta... mas nada encontrei.
Apenas a continuidade, a monotonia crescente.

Segui a linha curva fechada
mas ciclicamente encontrei-me comigo próprio
na mesma situação em que tinha partido.

A minha paixão foram as descontinuidades
sempre adversas, trazendo consigo a novidade do
desconhecido.

Talvez porque estas se aproximam mais da vida
e afinal é esta proximidade do real
que traz o distante à nossa vizinhança
que deixa em nós esta sede de mudança
e que justifica que exista, já hoje, em Portugal
um movimento que cresce para tornar
a verdadeira Matemática de todos conhecida.

A crise de identidade...

Axiomatizaram-me, dizem uns.
Descubram-me, dizem outros.
Afinal permaneço eternamente sem saber (bem) quem sou.
Existo ou estou por descobrir?

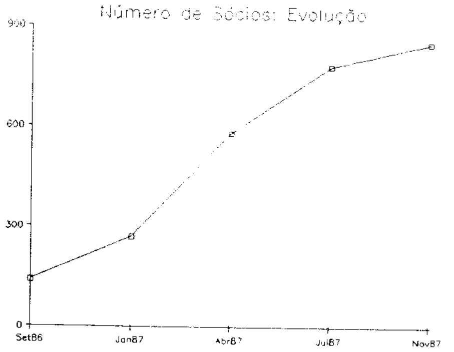
87, Setembro, 02

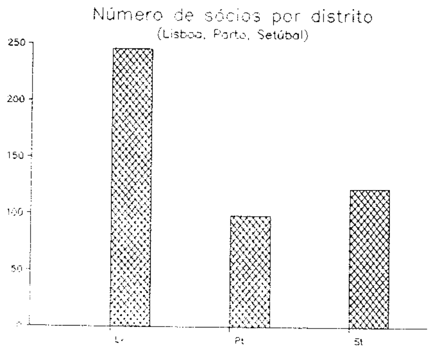
José de Oliveira Duarte

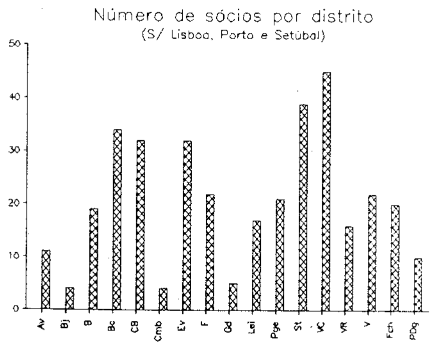
A APM a crescer

Foi em Portalegre que cerca de 140 professores levantaram o braço para dizer o sim unânime que levou à criação de uma Associação que se desejava, e precisava, a **Associação de Professores de Matemática.**

Fez agora um ano, em Setembro, e dos 140 «fundadores» passou já para mais de oito centenas o número de professores que são hoje sócios da APM repartidos pelos vários pontos do país:

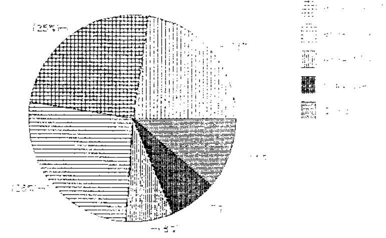




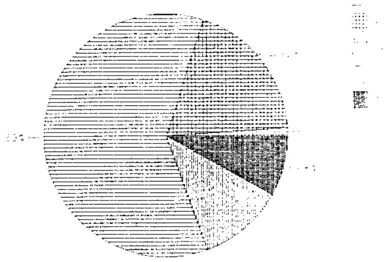


Para se ficar, agora, com uma ideia sobre «quem são» os sócios da APM repare-se nos gráficos seguintes:

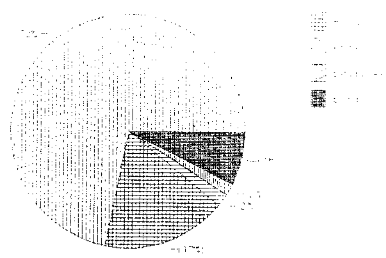
Tempo de Serviço
(% de sócios)



Grau de Ensino
(% de sócios)



Categoria Profissional
(% de sócios)



Em primeiro lugar (gráfico 1) poder-se-á arriscar dizer, sem desprimor para os colegas mais velhos, que a APM é uma associação de professores «jovens». Poder-se-á mesmodizer que a grande maioria dos sócios começou a leccionar depois de 25 de Abril que já lá vai há 13 anos!...

No gráfico 2 podemos constatar que são professores do ensino secundário a maioria (60%) dos sócios da APM. Esperávamos talvez um maior «equilíbrio» entre esta percentagem e a relativa aos sócios que são professores do ensino preparatório (19%) — mesmo contando com os que foram incluídos na categoria «s/ indicação» por terem indicado uma escola C + S. Por outro lado é interessante notar já a presença de alguns estudantes (2%) — alunos das licenciaturas em ensino — e de uma percentagem, talvez não esperada, de professores do Ensino Superior (11%) que se deve à grande adesão de professores das escolas superiores de Educação. Finalmente, talvez esperada mas nem por isso menos reveladora, é a percentagem dos sócios que são professores do ensino Primário (1%). Na verdade, teremos que ter isto bem presente, a APM terá que oferecer muito a esses professores, que não são só de Matemática, fazendo-os sentir que vale a pena ser sócio desta associação. A experiência destes professores, porque lidam com alunos muito novos, com uma apetência forte pela aprendizagem, porque trabalham em contextos mais globais, de carácter potencialmente interdisciplinares e integradores, é-nos, de certeza, importante. É preciso mais professores do ensino primário na APM!

Por último, o gráfico 3 indica-nos que os sócios da APM constituem um corpo de professores profissionalizados (74%).

A APM está pois a crescer... e crescerá mais, por certo!

A Curva do Dragão *(continuação)*

Matemática e decoração

A curva do dragão permite o levantamento de inúmeras questões:

- haverá outros processos para a obter?
- que acontece se «1» for virar à direita e «0» à esquerda?
- e se as dobras do papel forem feitas alternadamente num e noutro sentido? Que curva obteremos?
- que formas há de unir vários dragões?

Esta última questão torna-se particularmente interessante se se tentarem unir os vários dragões sem que haja intersecção. Pode-se tentar unir os extremos correspondentes, mas também extremos opostos ou mesmos zonas intermédias das várias curvas. Pode-se também unir vários dragões para provocar pavimentações ou desenhar figuras simétricas. As combinações possíveis são múltiplas e um dos matemáticos que se dedicou ao estudo da curva do Dragão, Donald Knuth, chegou a utilizar dragões de ordem 9 para obter três tipos diferentes de azulejos com os quais revestiu uma parede da sua própria casa.

Dragões decorativos, porque não?

Bibliografia

Gardner, Martin (1981). *Math Festival.* Paris: Pour la science.

Manifesto para a criação de um Seminário Nacional de História da Matemática

1 — Como as comemorações alusivas aos 200 anos da morte de José Anastácio da Cunha mostraram:

a) a história da matemática em Portugal tem ainda muito por fazer;

b) a história da matemática é pouco conhecida em Portugal;

c) existe um grande interesse em Portugal pela história da matemática.

2 — Justifica-se, pois, que se incentivem em Portugal os estudos de tudo o que se relacione com a história da matemática, nomeadamente a história da matemática pura e aplicada (desde a lógica à computação), a história do ensino da matemática, o ensino da história da matemática, a filosofia da matemática, etc.

3 — Esses estudos podem ser integrados numa estrutura informal designada por «**Seminário Nacional de História da Matemática**», que agregará todos os interessados em trabalhar (a tempo total ou parcial) nas áreas atrás referidas, não havendo qualquer limitação quanto a habilitações (licenciados em matemática ou não) ou profissão (professores dos ensino superior, do ensino secundário ou outras profissões).

4 — Os participantes no seminário reunir-se-ão um certo número de vezes por ano em locais a designar; para cada ano será designado um tema prioritário de que todos os participantes, mesmo os que não estejam a estudar assuntos relacionados com esse tema, se devem procurar informar para que os seminários possam ser sobretudo um lugar de frutífero debate.

5 — Todos os anos será designado um coordenador (diferente de ano para ano) dos trabalhos desse ano.

6 — Para incentivar os contactos com estudiosos estrangeiros, todos os anos deverá haver pelo menos um professor visitante que, além de participar pelo menos numa sessão do seminário, fará conferências em diversos locais, esperando-se que possam ser encetados projectos de investigação com participantes do seminário.

7 — Será incentivada a participação activa em encontros internacionais de participantes do seminário.

8 — Será procurado o patrocínio da Sociedade Portuguesa de Matemática e de outras instituições de âmbito científico-cultural.

I N D I C E