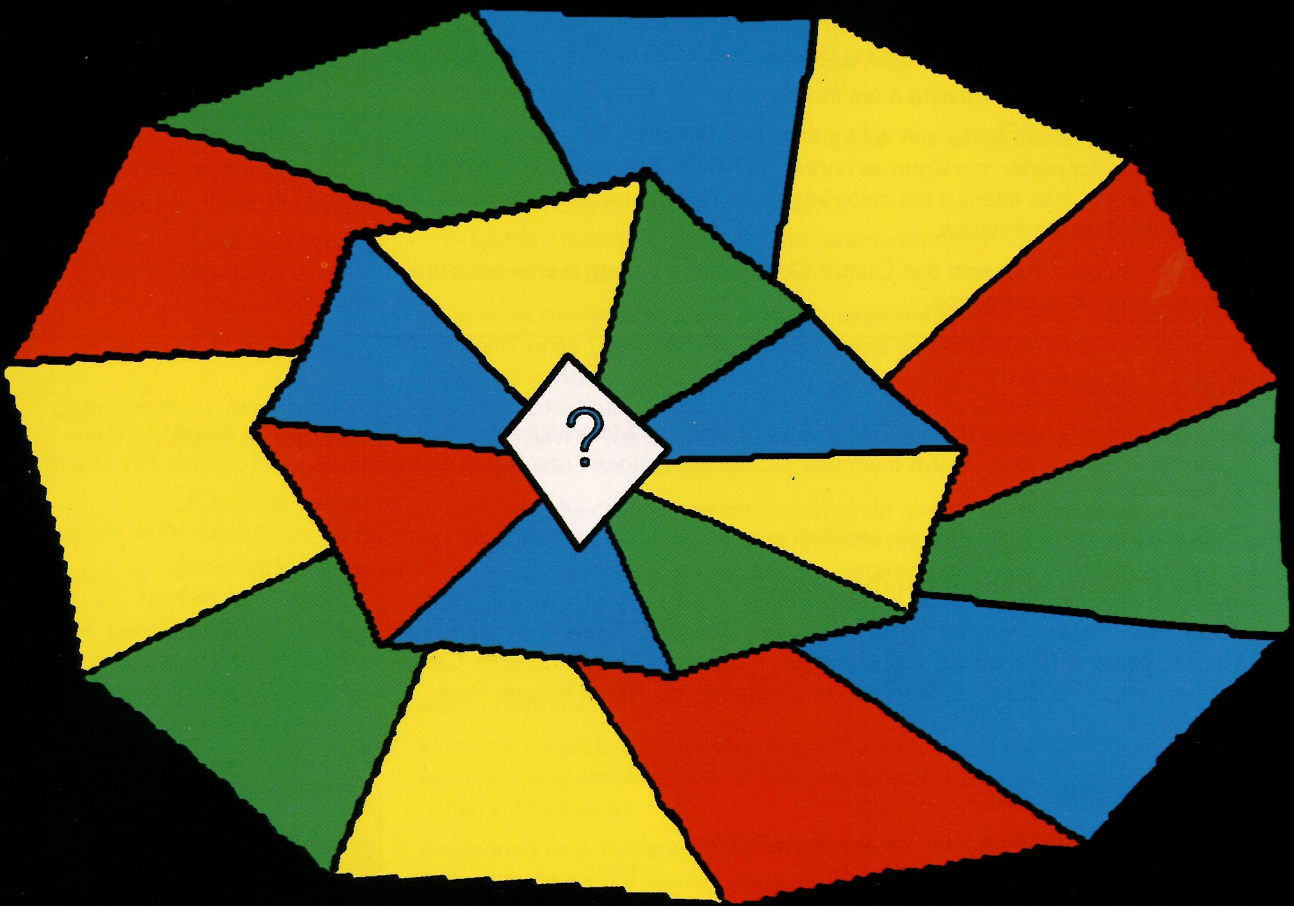
Educação e Matemática

Nº 56

Janeiro/Fevereiro de 2000



4 cores?

Preço: 1.200$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Teorema das Quatro Cores

Formulada em 1852 a *Conjectura das Quatro Cores*, estabelecia que quatro cores chegavam para colorir qualquer mapa no plano.

Durante mais de um século procurou-se uma demonstração para o facto.

Em 1976, K. Appel e W. Haken resolveram o problema transformando a conjectura no *Teorema das Quatro Cores*.

No entanto a demonstração apresentava um aspecto "revolucionário" — dependia do uso do computador.

Às reacções de entusiasmo pela resolução do problema juntaram-se de imediato outras questões:

> Até que ponto uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos por computador e humanamente impossível de verificar pode ser considerada uma demonstração?

O filósofo Stephen Tymoczko escreve mesmo:

> Se aceitarmos o teorema das quatro cores como teorema, estamos sujeitos a ter de mudar a ideia de teorema, mais precisamente mudar a ideia de demonstração que lhe está subjacente.

Para Haken, numa entrevista a um jornal:

> Qualquer pessoa pode, em qualquer altura, preocupar-se com os pormenores e verificá-los. O facto de o computador poder, em algumas horas, verificar mais pormenores do que um ser humano conseguirá durante toda a vida, não altera o conceito básico de demonstração matemática. O que mudou não foi a teoria, mas a prática da matemática.

O facto é que o Teorema das Quatro Cores abre o debate e uma nova era, na forma de encarar e "fazer" a demonstração matemática.

Sobre a capa

Esta é a primeira revista do ano 2000 - Ano Mundial da Matemática. A capa desta revista pretende também assinalar o facto sendo alusiva a um dos problemas famosos resolvidos no século XX - O Teorema das Quatro Cores.

Deixamos ao leitor a questão de recolorir o mapa usando o número mínimo de cores.

Neste número também colaboraram

Alexandra Pinheiro, António Manuel Guerreiro, Branca Silveira, Carlos Farias, Clara Cruz, Elsa Fernandes, Fernando Nunes, Fernando Bensabat, Francisco Silva, Gonçalo Marçalo, Jaime Carvalho e Silva, Leonor Moreira, Marcelo Borba, Marco Paulo Jesus, Maria Luísa Delfim Matos, Mário Roque, Paulo A. J. Oliveira, Telma Sousa Gracias.

Data da publicação

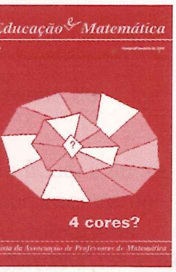
Este número foi publicado em Fevereiro de 2000.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
Tel: (351) 217163690
Fax: (351) 217166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Nota

nº 56
Janeiro/ Fevereiro de 2000



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Ana Paula Canavarro
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Composição e paginação
João Loureiro e Pedro Abrantes

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
5200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

2000 Ano Mundial... de quê?

*Branca Silveira**

Com calma (??), em festa, sem *bugs* chegou finalmente o ano 2000!

Esta data sempre teve o seu quê de misterioso, povoou o imaginário infantil de muitos de nós, quando ouvíamos as nossas avós contar as profecias para esta data e se calhar, os primeiros cálculos que fizemos foram para saber que idade teríamos nessa altura e ficarmos um pouco mais descansados pois o fim do mundo estava ainda muito longe!

Quer o milénio tenha entrado ou não, quer o século tenha começado ou não, não haverá com certeza outra ocasião tão marcante como esta.

Como se não bastasse toda a magia desta data, ou talvez por causa disso mesmo, eis que em 1992 a *International Mathematical Union* declara o ano 2000 como Ano Mundial da Matemática.

Pensemos um pouco nos três grandes objectivos da Declaração do Rio de Janeiro

1- Os grandes desafios do século XXI
2- Matemática, uma chave para o desenvolvimento
3- A imagem da Matemática

O primeiro destes objectivos teve por base uma conferência realizada em 1900, em Paris, onde David Hilbert enunciou uma série de problemas que iriam ser enfrentados neste século. Então em 1990 numa assembleia geral da IMU, no Japão foi constituído um grupo de matemáticos eminentes a que foi dado o nome de *Turn of the Century Committee* encarregado de identificar os principais desafios para o novo século.

O segundo objectivo tem a ver com a ajuda que se torna necessário dar aos países sub-desenvolvidos, nos campos da educação, da formação e do acesso à informação científica, entendendo a matemática Pura e Aplicada como uma das principais chaves para a compreensão do mundo e para o seu desenvolvimento.

Provavelmente terá sido esta a principal razão que levou a UNESCO, em 1997, a patrocinar este acontecimento.

O terceiro objectivo pretende promover a imagem da matemática através de exemplos e aplicações onde a matemática esteja presente e envolvendo o maior número de pessoas.

Analisando as actividades programadas para esta comemoração, que nos vão chegando de todo o mundo, parece que este último objectivo será perfeitamente atingido. É talvez o mais fácil. É o que permite maior visibilidade, transmite às pessoas a ideia de que se fazem coisas com e para a matemática. Vê-se obra feita. As pessoas envolvem-se. Acalma as consciências. As actividades propostas pela APM, enquadram-se perfeitamente nesta linha e veja-se a magnífica adesão das nossas escolas.

Os tais "sábios" dir-nos-ão alguma coisa quanto ao primeiro.

E o segundo? O que se vai fazer para ser atingido? Como vamos colaborar para a sua realização? Qual vai ser o nosso papel enquanto professores de Matemática? Não será este, o principal desafio para o novo século?

Um óptimo Ano Mundial da Matemática!

* Presidente da Direcção da APM

O ProfMat 99

Maria Luísa Delfim de Matos

Este ano coube-me a mim o papel de repórter do ProfMat de Portimão. Porquê eu? Não tenho grande jeito para a escrita, só fui a metade dos Encontros já realizados, e nunca desempenhei papel relevante em nenhum deles, e este ano também só estive presente num reduzido número de actividades (embora tivesse lá estado sempre!). O pedido para escrever sobre este ProfMat foi-me feito na última noite (quando já não podia voltar atrás para ver mais coisas) e, claro que recusei, alegando que muitos outros o podiam fazer melhor do que eu. Depois da insistência e porque o pedido de uma amiga, para mim, é uma ordem, aqui vai o relato da minha experiência pessoal do que foi este Encontro.

Cheguei com a Tina, minha companheira inseparável destas andanças, no domingo à tarde e, depois de instaladas na Praia da Rocha, fomos até Portimão, à procura da escola. Sentidos únicos, voltas e voltinhas, lá íamos perguntando (às vezes a turistas…) onde ficava a Escola Secundária Poeta António Aleixo, até que umas meninas, possivelmente estudantes, nos dizem que a escola a essa hora estava fechada e "as senhoras estão um bocadinho perdidas…" mas lá nos deram indicações, que nos conduziram ao sítio e que até era perto do nosso hotel. Problema de quem não leva mapa…

Na segunda-feira começaram os cursos e fiquei surpreendida ao ver tantas caras novas! Penso que a inscrição nos cursos foi superior ao habitual e, sobretudo, de muitos professores novos. É uma esperança para o desenvolvimento da Matemática e combate ao insucesso escolar, ver que há tantos professores interessados em participar, aprender e dar a conhecer aos outros os seus projectos e experiências.

Lamentei não me ter inscrito mais cedo para ter ficado numa das minhas primeiras opções de curso, pois disseram-me que foram muito interessantes. Para o ano, assim que receber o programa, tirarei um dia para ver todas as propostas com atenção, decido e inscrevo-me de imediato! A conclusão que se pode tirar é que há muitos professores interessados em frequentar estes cursos (mesmo pagos e sem "créditos"…) e que as opções são em número limitado.


foto: J. Pinto

Sessão prática

Nos dias dos cursos almoçámos na cantina, e depois de longas filas ao Sol, era reconfortante uma refeição bem confeccionada e de qualidade em confraternização com colegas que há muito não via, ou mesmo desconhecidos, com quem trocava impressões. A organização, impecável, tinha lucrado se tivesse apostado no bom tempo que fazia e disponibilizasse chapéus, que toda gente compraria…

Na terça-feira à tarde começou a distribuição das pastas e era impressionante ver a longa, longa fila de professores aguardando a sua vez de receber os documentos e a expectativa de conhecer quais as sessões práticas e grupos de discussão em que participariam.

Esta fila só pode ser comparada à que se formou depois, à porta da Biblioteca para a distribuição — gratuita — da nova brochura de para o 12º ano, e que só contemplou os primeiros resistentes…

A sessão de abertura do ProfMat 99 teve a presença de muitas individualidades, que realçaram a importância destes Encontros e se congratularam com o elevado número (quase 2000! - não é factorial) de participantes. A conferência plenária que se lhe seguiu, a cargo da Drª Maria Emília Brederode Santos foi extremamente interessante e o primeiro ponto alto deste Encontro.

O número de participantes, neste dia, mais que duplicou e comecei a encontrar mais caras conhecidas, que valorizam a nossa formação profissional. É este contacto humano, o encontro de colegas do tempo do Liceu e da Faculdade, ex-companheiros de escola e de outros Encontros e, principalmente de estagiários e ex-alunos que agora são colegas, que tornam únicos estes dias de agradável convívio.

Comecei mal com a conferência a que me propunha assistir – não se realizou! A qualquer um podem acontecer imprevistos, mas é de lamentar que não se avise a organização da impossibilidade de comparecer e se deixe ficar à espera largas dezenas de pessoas...

A sessão prática em que fiquei inscrita agradou-me imenso. É surpreendente o que se pode "tirar" de dobragens de papel ou de alguns cortes a preceito! Os fractais são um mundo que apetece explorar! Para completar, na interessante exposição do Atractor, maravilhei-me com a resolução em fractais do problema das torres de Hannoi. O que pode a imaginação! Relacionar as dobragens para obter formas fractais com as sucessões e a geometria, é uma abordagem deveras interessante e que, "fractalmente" não tem limite (a não ser o da minha capacidade...).

Se outra coisa não houvesse, esta sessão (mais a pasta de materiais que foi distribuída) tinha valido o ProfMat. Mas houve mais...As calculadoras gráficas e os programas interactivos de computador estiveram presentes em muitas sessões, e aprendi muitas possibilidades de exploração.

A matemática que se faz na aula é cada vez mais participada pelos alunos, manipulando, jogando, conjecturando e descobrindo por si novos conceitos.

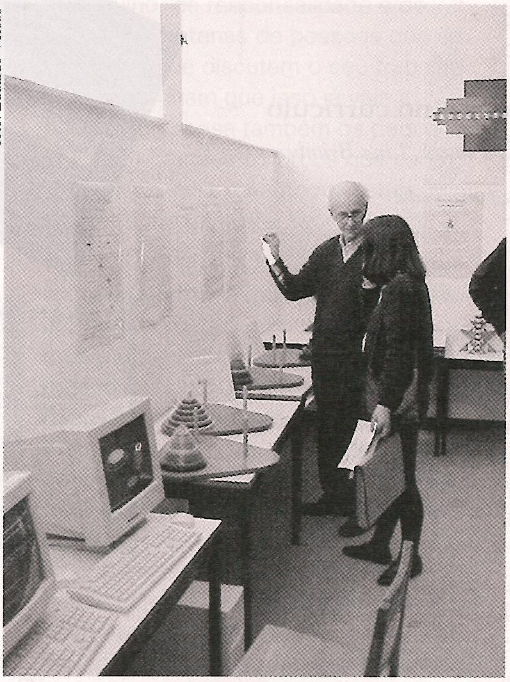
Na sessão *A jogar também se aprende!?* impressionou-me o trabalho que três muito jovens professoras tiveram para imaginar e construir jogos para alunos do 7° ano que, a brincar, em alegres competições, puderam adquirir os conhecimentos que o programa impunha.

Consegui resistir à tentação de ir para a praia e dar um mergulho, que o tempo convidava, mas tinha-me inscrito num encontro para trabalhar matemática e não estava de férias. Havia exposições para ver, conferências e comunicações para ouvir, painéis para participar e um grupo de discussão onde ia saber quais as perspectivas de reorganização do ensino secundário.

Os espaços comerciais também mereciam visitas demoradas. Comprei jogos para os alunos da Escola, *polydrons* para os meus netos, *puzzles* para mim e para eles, e livros, a que não consigo resistir. As cartas de trigonometria do Tio Papel fizeram enorme sucesso nas minhas aulas de 11° ano!

Na quinta-feira a organização proporcionou a todos — participantes e acompanhantes — um jantar convívio em Silves, nas belíssimas instalações da antiga Fábrica de Cortiça, que visitámos, mas depois do pôr do Sol arrefeceu imenso e só os belos aperitivos (de comer e beber...) nos aqueceram até entrarmos. Aí, o calor das salas foi superado pelo calor humano e o jantar, muito bem servido, foi um outro ponto de convívio muito agradável.

foto: Eduardo Veloso



Sala do Atractor

Os alunos dos últimos anos da escola montaram umas barraquinhas no pátio e quem não tinha tempo para ir almoçar fora ou na cantina, servia-se de alguns petiscos que eles traziam feitos, ou de umas bifanas apetitosas que eram ali mesmo confeccionadas. Eu fui sempre uma freguesa assídua! Contribuíamos para a sua viagem de fim de ano e ficávamos satisfeitos com a afabilidade dos "servidores", que até tinham máquinas de café, e estavam sempre disponíveis, a qualquer hora. Contribuímos também para melhorar a imagem que os alunos têm dos professores de Matemática. Segundo as suas palavras, os professores, assim em convivência, eram muito simpáticos e bem dispostos.

Para o jantar, reunia-se sempre um grupo que ia experimentar e saborear os bons petiscos algarvios, que os diversos restaurantes nos proporcionavam. O ProfMat continuava... Depois uns iam para os espectáculos previstos no programa e outros (onde me incluía...), iam testar conhecimentos de Probabilidades. Fazíamos um estudo exaustivo, e prático, do tempo necessário para as máquinas nos comerem as fichas todas... Todos sabíamos, de teoria, que a probabilidade maior de ganhar está com o "dono" do jogo (recordações do Prof. Peter Braumman...) mas mesmo assim, tentar não custa, ou custa pouco... e divertimo-nos bastante.

Na sexta feira já começaram as despedidas, mas no sábado não podia perder a conferência do Zé Paulo, que sempre nos encanta, sobretudo com o tema dos paradoxos de que eu tanto gosto. Depois da conferência plenária, a cargo de Fernando Nunes, seguiu-se a sessão de encerramento.

É impressionante o número de pessoas envolvidas numa realização destas e a coordenação que é necessária para que, nestes dias, tudo corra sem se dar conta do muito grande trabalho que todos estes colegas tiveram que realizar para proporcionarem a mais de 1800 participantes uns dias inesquecíveis. Mereceram os prolongados aplausos com que a assistência os brindou.

A nova presidente da APM foi saudada por todos os presentes e desejo-lhe as maiores felicidades e que prossiga o caminho que a Cristina tão bem trilhou.

E adeus! Até para o ano no Funchal!

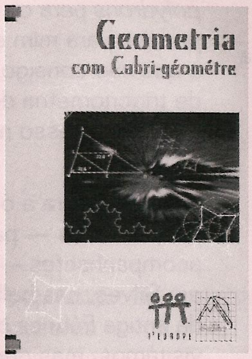
Maria Luísa Delfim de Matos
Esc. Sec. Josefa de Óbidos, Lisboa

Últimas publicações APM

Geometria com Cabri-géomètre

Grupo de Trabalho T³

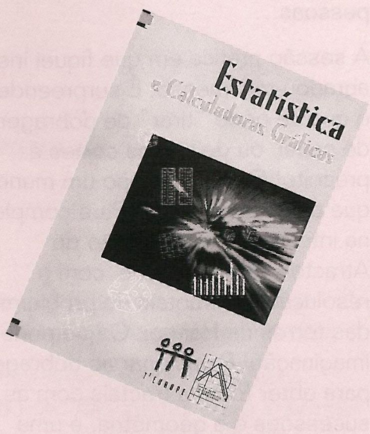
700$00



Estatística e Calculadoras Gráficas

Grupo de Trabalho T³

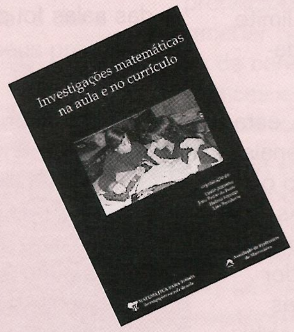
700$00

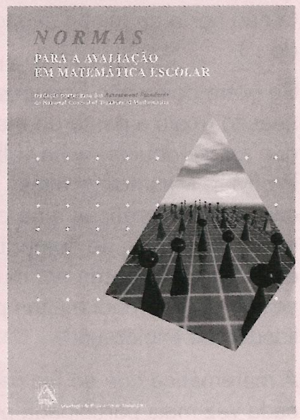


Normas para a avaliação em matemática escolar

Tradução de Assessment Standards do NCTM

1 500$00



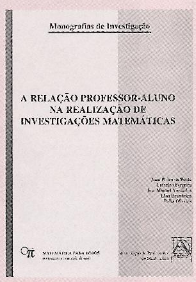


Investigações matemáticas na aula e no currículo

Paulo Abrantes, João Pedro da Ponte, Helena Fonseca, Lina Brunheira (org)

Edição conjunta APM e Grupo "Matemática para Todos"

1 100$00

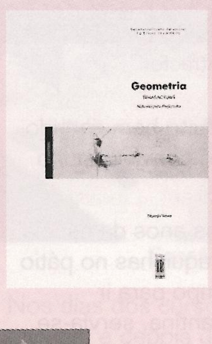


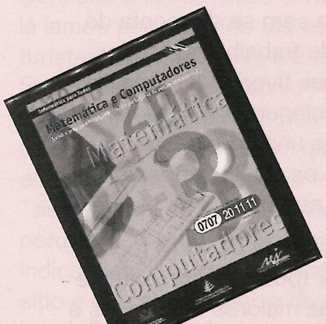
A Relação Professor-Aluno na Realização de Investigações Matemáticas

João Pedro da Ponte, Catarina Ferreira, José Manuel Varandas, Lina Brunheira, Hélia Oliveira

1 700$00

Outras edições disponíveis na APM





Geometria — Temas actuais

Eduardo Veloso

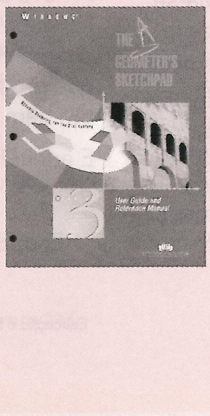
3 500$00

Matemática e Computadores

Actividades e Programa Modellus

António Bernardes e Rita Bastois

750$00



The Geometer's Sketchpad

Sofware didáctico

14 000$00 (sócios); 35 000$00 (escolas)

Relembrar o ProfMat, reconhecendo novos desafios e novas propostas...

Clara Cruz

Quem já foi ao ProfMat sabe bem que fica sempre a vontade de voltar.

É um espaço que nos dá oportunidades únicas de contacto com outros professores, numa troca de conhecimentos didácticos, científicos e, cada vez mais, tecnológicos. É um terreno em que gostamos e queremos cultivar novas culturas de e para a educação matemática.

Como já tinha acontecido no ano passado, quando pela primeira vez participei no ProfMat, resolvi aproveitar a deslocação e prolongar o período de afastamento das actividades lectivas para frequentar um dos cursos que decorrem nos dois dias anteriores ao ProfMat. O curso, orientado pelo José Paulo Viana, abordava alguns assuntos da teoria das probabilidades, dando-nos a oportunidade de experimentar possíveis simulações com a calculadora TI-83. Todos aqueles que participámos, não nos poderemos esquecer do ambiente de envolvimento empenhado e bem humorado com que naqueles dois dias trabalhámos juntos. As surpresas sucediam-se umas às outras e a certa altura já todos duvidavam das suas próprias "previsões" (por mais paradoxal que isso possa parecer!).

Nos corredores iam-se trocando impressões entusiastas sobre os cursos e cada participante parecia sentir-se privilegiado por participar no seu curso. Os dois dias pareceram apenas o início de um trabalho que gostaríamos de continuar.

O convívio estendeu-se às ruas, restaurantes e hotéis e sentiamo-nos reconhecidos, mesmo pelos que não conhecíamos, sendo geral a sensação de acolhimento caloroso de uns pelos outros. Parece-me que os participantes do ProfMat se identificam facilmente, quer pelo entusiasmo, quer pela atitude de razoável, mas descontraído, comprometimento.

No ProfMat 99 estiveram envolvidas mais de duas mil pessoas, o que se de algum modo pode ser simbólico pelo contexto da entrada no novo ano, deve ser, antes de tudo, um motivo de orgulho, de responsalidade e de reflexão. Centenas de pessoas que se (re)unem, que discutem o seu trabalho e que acreditam que isso já vale a pena e compensa também os pequenos e/ou grandes esforços que cada um tem de fazer para poder estar presente e para poder mostrar aos colegas aquilo que vai fazendo.

Na quarta-feira de manhã a sessão de abertura começou com muito atraso, e teve uma menor participação do que no ano passado. A tenda, montada relativamente perto da escola, não oferecia as melhores condições contra o frio que a manhã algarvia nos trouxera. Na sessão esteve presente, entre outros, Ana Benavente, actual Secretária de Estado da Educação, que fez um discurso bastante claro e objectivo. De certo modo, este discurso mostrou bem o seu reconhecimento pessoal pelo trabalho da APM e um manifesto interesse pelas questões que se têm vindo a discutir desde os primeiros ProfMat.

Seguiu-se uma conferência muito interessante, na qual Maria Emília Brederode Santos começou por recordar o "como" e o "porquê" do aparecimento dos computadores e da internet, ou seja, das *TIC* (tecnologias da informação e da comunicação). Com esta conferência deu-se início ao debate e à reflexão — que foi aliás transversal ao longo dos quatro dias de encontro — de inúmeras questões relacionadas com a utilização dos computadores e da internet no ensino.

Nesta conferência foi referida a responsabilidade que a escola deve assumir na construção de uma literacia tecnológica em todos os cidadãos. Apesar de uma prática crescente em nos comunicarmos por *e-mail*, a passagem desse tipo de utilização a uma utilização mais centrada no processo de ensino-aprendizagem envolvendo os alunos e outros professores, exige interesse, formação e empenho. Exigirá certamente abertura por parte dos que encontramos mais cépticos, dentro e fora da escola.

Durante o encontro assisti à apresentação de diversas razões que justificam a necessidade da utilização das *TIC* no ensino e foi diversas vezes relembrado, que são os próprios programas a requerer que se desenvolvam estratégias e metodologias sustentadas por abordagens mais experimentais, ou seja de carácter mais laboratorial. É, no entanto, difícil encontrar um professor que não reconheça dificuldades, por vezes grandes, na sua utilização e gestão na sala de aula.

Poder-se-ia concluir dos diversos discursos que basta lutar para que existam mais computadores nas escolas? Ou que a solução está no exigir que os computadores que já existem sejam (mais) acessíveis? Estas interrogações fizeram parte da discussão que teve lugar num painel a que ainda assisti ao fim da manhã de quarta-feira. Nesse painel, em que se discutiu a função dos laboratórios de Matemática e as repercursões no modo de trabalho com e dos alunos, falou-se também na importância de um tipo de "experimentação matemática" só possível através dos computadores. Foram referidos, a título de exemplo, os programas de geometria dinâmica (tais como o *Cabri* ou o

Sketchpad), sendo também abordada por Eduardo Veloso a questão da importância da demonstração, ou antes, das diversas formas de demonstração que este tipo de abordagem parece induzir. As *TIC* permitem que se façam investigações matemáticas mais "poderosas" e criam novas possibilidades de experimentação. Foi bem visível durante a discussão a importância que as nossas experiências de ensino vão tendo nas nossas concepções e naquilo que defendemos, sendo por isso a possibilidade de troca que o ProfMat oferece extremamente importante para compreensão recíproca. Achei ainda muito positivo o facto de num anfiteatro cheio, bem em cima da hora de almoço, a discussão ter sido tão participada, quer pelos intervenientes no painel, quer por parte da assistência.

Impressiona-me sempre a intenção de intervenção que muitos dos participantes do ProfMat têm. Os participantes procuram recolher e dar contribuições para as questões relacionadas com o ensino e com a aprendizagem da Matemática. Sente-se que não é indiferente, quer para quem apresenta as sessões ou as conferências, quer para quem nelas participa, a mútua colaboração (o trabalho conjunto, *co - laborare*).

À tarde começaram as sessões práticas, que todos os anos se diversificam, e que parecem constituir um dos pontos de interesse prioritário dos participantes. Como a inscrição deve realizar-se com alguma antecedência e por a escolha ser, quase sempre, feita de modo criterioso, há uma grande expectativa pessoal em relação a estas sessões. Com alguma pena, ficou-me a impressão de que as sessões práticas não correspondem sempre ao que se esperaria depois da leitura dos resumos. Em particular, no que diz respeito à falta de sugestões sobre formas de abordagem e exploração na sala de aula. Penso que seria importante que os dinamizadores das sessões tivessem em conta o facto de muitos professores verem este tipo de sessão, como uma oportunidade de anual de descoberta e experimentação de novas propostas para o ensino.

A anuidade do ProfMat faz com que sejam também esperados (devo dizer, com alguma expectativa) os reencontros. Relações amigáveis, que parecem multiplicar-se, entre professores de escolas, cidades e regiões, por vezes bem distantes. As relações parecem fazer parte de uma cadeia, e a minha experiência é de que em cada encontro a cadeia se estende e se fortifica. Assim, com grande satisfação da minha parte, retomou-se este ano o jantar de quinta-feira. Julgo que esta é, quase sempre, a noite que deixa mais recordações aos participantes do ProfMat. Umas vezes com nostalgia, outras entre comentários mais ou menos humorísticos, os momentos de convívio e partilha são invocados nos anos seguintes e em encontros ocasionais.

O jantar realizou-se num edifício visivelmente recuperado, pertencente à antiga fábrica de cortiça de Silves. O percurso de carro até lá, entre curvas apertadas e estradas mal alcatroadas, fez-me recordar a distância de Lisboa. Quando cheguei, com um ligeiro atraso, tive a sensação que muita gente tinha chegado ao local muito antes da hora marcada. Não fosse uma amiga nos ter guardado lugar, seria difícil encontrar uma mesa livre! Os três diferentes espaços onde se encontravam as centenas de mesas tinham ambientes muito diferentes, todos eles com música ambiente. Na enorme marisqueira onde fiquei, a deliciosa comida e o bom vinho iam sendo servidos, sem pressas, e a música já parecia ir fazendo parte da ementa…servindo de condimento especial e tornando particular todo o jantar.

A maior animação musical foi, sem dúvida, a da enorme tenda, onde um grupo insistia em tornar o jantar num espaço onde se podia comer, mas onde se tornava difícil e desagradável comunicar devido ao volume e à qualidade do som. Na altura da sobremesa, altura em que me encontrava lá, já as pessoas exprimiam esperanças de mudança, ou pelo menos de que aquele som e ambiente ficasse por ali! Mas as espectativas foram logradas, e assim que o jantar acabou afastaram-se as mesas e abriu-se uma pista de dança, na outrora sala de jantar improvisada. O volume da música aumentou, ainda mais, e entraram em palco diversos artistas afro-brasileiros que iam lançando supostos sucessos (por vezes desconhecidos). Foi uma surpresa ver tantos professores aos pulos, a dançar e a gritar os refrões das músicas. O ambiente já era de alguma excitação, em particular dos professores mais jovens (mas não só!), quando apareceram umas dançarinas que pareciam saídas do carnaval brasileiro! Tive que me ir embora e tentar acreditar que era apenas um típico fenómeno de massas. Percebi também que não havia intenções de acabar com aquele disparate. Não digo que ao ProfMat só devam ir artistas reconhecidos pela sua qualidade e talento, como foi o caso do Sérgio Godinho em Almada, mas deve haver algum cuidado em relação a alguns critérios essenciais. Felizmente, um espectáculo de luz e som interrompeu as actuações, e foi com algum fascínio que assistimos juntos a um espectáculo altamente tecnológico, com momentos muito interessantes. As horas iam entrando pela noite, muitos despediam-se e regressavam a casa. E já o dia algarvio estava para despontar quando, só então, alguns se foram deitar.

Na sexta-feira poucos são aqueles que aparecem cedo nas sessões. Nota-se que só ao fim da manhã as pessoas retomam o ritmo do encontro e os rostos revelam algum cansaço. O facto da conferência plenária desse dia ter uma audiência muitíssimo reduzida (o que segundo me disseram foi uma pena) e muitas sessões estarem quase vazias, faz-me questionar se a manhã de sexta-feira não poderia ter outro formato. Para quem imagina o trabalho que está por trás da preparação e da apresentação de uma sessão, não é difícil de perceber alguma frustração que possa ser sentida pela falta de participação.

Na sexta-feira são também as eleições da APM, que este ano tiveram uma maior participação, mas que ainda me parece passar bastante despercebidas durante o encontro. Também acho que para muita gente os candidatos são pessoas relativamente desconhecidas, fazendo falta uma informação sobre o percurso pessoal na profissão, em particular (e como é natural) na APM.

Procurei organizar previamente os meus dias para aproveitar o tempo, e julgo ter valido a pena esse trabalho de leitura de resumos e de encaixe das "escolhas". Assisti a sessões muito interessantes, nas quais fui tirando apontamentos e fui repensando as minhas práticas e as minhas concepções acerca do que é ensinar, mas também, fazer Matemática. Às vezes, por incompatibilidades, ia tendo intervalos, nos quais ia espreitando livros, encontrando amigos, e procurando ouvir impressões sobre as sessões a que não pude assistir.

Extraordinariamente, a verdade é que no ProfMat não existem momentos mortos, mas existe sim a possibilidade de aproveitar as "meias-horas livres" ou o espaço entre duas conferências para espreitar espaços que estão sempre abertos ao longo do dia e nos quais se poderiam perder horas. É o caso da sala onde se apresentava o projecto Atractor e se mostravam diversos materiais pouco usuais de aplicação na sala de aula. Para além desta, existiam outras oito exposições espalhadas quer pela escola ao lado, quer pelo Museu de Portimão. Praticamente todas elas me pareceram ter em comum um aspecto importante de dar a ver como a Matemática está intimamente ligada à actividade de compreensão da natureza e do real.

Apesar de muita gente já não assistir às sessões de sábado, este ano notei uma participação maior do que no ano passado. Esta mudança positiva dever-se-á talvez ao facto de, em oposição ao ano passado, a conferência do José Paulo Viana ter sido apresentada neste último dia. As conferências do Zé Paulo geram sempre um ambiente agradável e de algum fascínio, quer pelo modo como são apresentadas, quer pelo seu conteúdo pouco usual.

A finalizar o encontro, a conferência do Fernando Nunes sob o título *O professor de Matemática enredado*, mais uma vez focou o papel da internet na educação matemática, referindo em particular a página da APM. Foi realçada a importância das relações directas e indirectas, entre professores, entre escolas e alunos, entre associações, etc. Relações que se devem considerar intermináveis e complexas. Reconhecendo a impossibilidade de um consenso relativamente ao que deverá ser o processo ensino/aprendizagem, parece-me ser reconhecida a necessidade, que sinto, de troca de informação e de experiências.

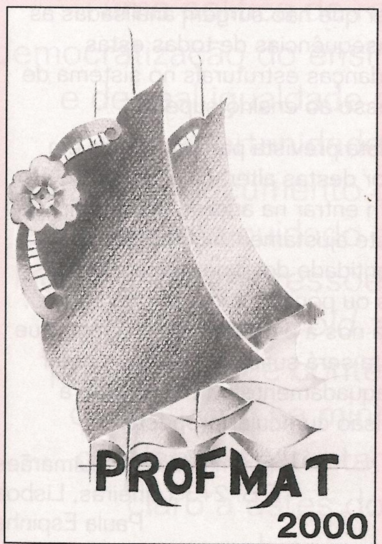
Julgo que só a partir de uma reflexão conjunta, se poderá constituir uma comunidade actuante e capaz de enfrentar os problemas do ensino da Matemática, sendo no ProfMat bem visível o trabalho (e o sonho) de centenas de pessoas para que essa comunidade se desenvolva e acompanhe as mudanças quer sociais, quer ao nível da educação e da própria Matemática.

Ainda que faça parte da APM há poucos anos, sinto que herdei frutos de um trabalho aliciante, mas que não julgo fácil, por parte daqueles que foram insistindo em acreditar na possibilidade de mudança. Deixo aqui a minha gratidão e admiração, aos mais corajosos de 1986 e aos que foram acreditando neles.

Em Novembro espero que nos reecontremos todos na Madeira, com confiança e com o orgulho de mantermos vivas as palavras e as experiências do ProfMat durante o resto do ano! Certamente existirão novas interrogações e não teremos respostas definitivas para as que se têm vindo a discutir, mas continuar-se-á a apostar no processo de formação e mudança, em que uns mais, outros menos, nos envolvemos.

Escrever sobre o ProfMat 99 é um prazer, porque me faz reviver momentos importantes e me faz recordar amigos. Perante os (novos) desafios que vão surgindo são relembradas novas propostas.

Clara Moura Cruz
Esc. Sec. Quinta do Marquês, Oeiras



ProfMat 2000

Este é o logotipo do ProfMat 2000.

Ainda não começou a planear a sua viagem até ao ProfMat 2000 que se realizará em Novembro, na ilha da Madeira?

Então, entre na página da APM, *www.apm.pt*, clique em ProfMat 2000 e inicie desde já uma viagem, através do planeta Terra, até ao Funchal.

Actualidades

Currículos do Secundário de 2001

O DES fez sair, em Novembro, um documento de trabalho que constitui uma proposta de revisão curricular para Ensino Secundário actual. No ajustamento curricular proposto, é preconizada uma clara divisão entre os cursos tecnológicos e os cursos gerais estes vocacionados para a continuação dos estudos e os primeiros virados para a inserção no mercado de trabalho. Nesta proposta são enunciadas medidas que se traduzem em alterações dos planos de estudo e dos programas, da organização e funcionamento das escolas, das práticas dos professores e da avaliação dos alunos . Prevê-se a criação de mais cursos (7 cursos gerais e 14 tecnológicos) todos possuindo um conjunto de disciplinas comuns e obrigatórias tendo em vista a formação geral de todos os alunos. Este tronco comum a todos os cursos, que se diz pensado para tornar possível aos estudantes mudanças a meio do percurso, é constituído da seguinte maneira: Língua Portuguesa; Língua Estrangeira; Filosofia; Educação Física (e Educação Moral e Religiosa que é de caracter facultativo). Em todos os cursos é criada, ainda, uma área de projecto (disciplina presente nos 3 anos com 3 horas semanais) que se afirma pretender o desenvolvimento de capacidades de natureza transversal e permitir a utilização de uma metodologia de projecto. No que se refere à componente específica, visando a formação cientifica-tecnológica do aluno, nos cursos gerais aparece constituída por 5 disciplinas, sendo 3 de carácter obrigatório (uma trienal e duas bienais) e 2 opcionais (uma delas com um programa definido a nível da escola). Nos cursos tecnológicos a parte específica, virada para o aprofundamento de conhecimentos orientados para o sector de actividade a que se destina o curso, tem um caracter assumidamente prático: as 3 disciplinas trienais e 2 bienais que a formam ocupam mais de 50% do total de horas curriculares. Dos planos de estudo desaparecem várias disciplinas, nomeadamente o Desenvolvimento Pessoal e Social e os Métodos Quantitativos e a Matemática surge em moldes diferenciados em função dos destinatários, passando a ter programas diferentes nos cursos gerais e tecnológicos.

Das mudanças na organização e funcionamento da escola, salientamos as seguintes: diminuição da carga horária semanal dos alunos, não ultrapassando as 30 horas semanais (organizadas em unidades lectivas mais longas — 1,5 horas); a organização do ano lectivo em semestres e não em três períodos, bem como a sua redução de 35 para 30 semanas; e a criação de um 13° ano com o objectivo de permitir a permeabilidade entre os vários cursos e a correcção do percurso formativo dos alunos. Este é um dos vários pontos da proposta criticados devido à falta de clareza. Outros aspectos estão, a nosso ver, omissos. Por exemplo, estão previstas disciplinas novas e fala-se no encurtamento dos programas das disciplinas que se mantêm, porém, os programas ainda são desconhecidos; não vimos equacionados aspectos críticos como a formação dos docentes e a edição de manuais e outros materiais de suporte; sobre as mudanças estruturais no sistema de avaliação dos alunos, as provas globais parecem


11 DEZEMBRO 99

EXPRESSO, 11 DEZEMBRO 99

Secundário com novos currículos em 2001-02

MONICA CONTRERAS*

PORTUGUÊS igual para todos, filosofia mais atractiva, uma língua estrangeira, educação física e uma «área de projecto» são o tronco comum de uma proposta governamental de revisão curricular do ensino secundário para entrar em vigor no ano 2001-02. O Executivo passou agora a bola para os sindicatos, que em breve se deverão pronunciar.

A reformulação defendida passa pela criação de sete cursos gerais (para os alunos que querem prosseguir estudos universitários) contra os actuais quatro e de 14 cursos tecnológicos (11 actualmente), orientados para o mundo do trabalho.

Além do «tronco comum», destinado a dar uma formação de carácter geral a todos os estudantes, os alunos que seguirem os cursos gerais (ciências naturais, ciências e tecnologias, artes visuais, artes do espectáculo, ciências sociais e humanas, ciências socioeconómicas e línguas e literaturas) terão uma parte específica constituída por três disciplinas obrigatórias em função da área escolhida e outras duas de carácter opcional.

Nos 10.° e no 11.° anos a carga horária semanal será de 28,5 (actualmente há cursos com mais de 30 horas) enquanto no 12.° será de 22,5 horas (agora são cerca de 28 horas). Aquelas poderão ser acrescentadas mais hora e meia por semana se os estudantes tiverem escolhido educação moral e religiosa, disciplina facultativa.

A «área de projecto», comum a todos os cursos e com três horas semanais, pretende que o aluno desenvolva um trabalho associado às saídas profissionais. Esta área permite desenvolver **«capacidades e atitudes de natureza transversal, relacionadas com a utilização de novas tecnologias e com a educação para a cidadania»**, lê-se no documento do Ministério da Educação.

13.° ano permite corrigir escolhas

Os cursos tecnológicos (construção civil, electrotecnia/electrónica, informática, mecânica, química, «design», artes gráficas, imagem e comunicação audiovisual, administração, técnicas comerciais, acção social, comunicação e docu-

Luiz Carvalho

Os cursos tecnológicos (com sentido prático) são privilegiados

estar para continuar e afirma-se querer diversificar-se a avaliação, porém, para além disso pouco mais se sabe…. Da mesma forma podemos dizer que não surgem analisadas as consequências de todas estas mudanças estruturais no sistema de acesso ao ensino superior.

A data prevista para a entrada em vigor destas alterações é 2001-02. Sem entrar na análise dos predicados deste ajustamento curricular, a quantidade de aspectos ainda omissos ou pouco claros no documento, leva-nos a perguntar se o tempo que resta será suficiente para preparar adequadamente o terreno para a revisão curricular proposta.

Fátima Alonso Guimarães
E.B. 2+3 Telheiras, Lisboa
Paula Espinha
Esc. Sec. Linda-a-Velha

"Revolução" no secundário? Esta não, obrigado!

Eduardo Veloso

No próximo mês de Setembro faz 15 anos que no primeiro ProfMat, em 1985, a APM foi lançada. Sem o 25 de Abril, a APM nunca teria existido. Sempre me pareceu que, naturalmente, a APM deveria defender, em educação, uma política de real democratização do ensino e de real igualdade de oportunidades. Embora o documento do DES tenha o cuidado de incluir estas expressões, e até em *bold*, as propostas que contém constituem, na minha opinião, um atentado claro a estes dois objectivos.

Contra-reforma

As mudanças anunciadas para o secundário não são na verdade uma revolução, nem isso seria preciso ou conveniente. Constituem em vez disso mais uma etapa na espécie de contra-reforma que se tem vindo a desenvolver contra os avanços democráticos na educação que ocorreram logo após o 25 de Abril. Que seja um governo PS, quase com maioria absoluta, a lançar mais esta acha nesse processo restaurador, não nos deveria surpreender, se usássemos a memória e tivéssemos o bom hábito de enquadrar historicamente os vaivens da política educativa. Com efeito, foi o I Governo Constitucional (do "PS sozinho") que descaracterizou, "licealizando-o", o Ensino Secundário Unificado (ESU), um projecto de prolongamento do "tronco comum" até ao 9º ano. O ESU fora aprovado pelo IV Governo Provisório, tendo sido seu principal promotor Rui Grácio, então Secretário de Estado da Orientação Pedagógica. Avivemos então a nossa memória, recordando brevemente o que se passou.

A ideia do "tronco comum" surgiu em França, depois da segunda grande guerra, e teve a sua expressão concreta no célebre plano Langevin-Vallon. A criação de um Ensino Secundário Unificado (ESU) (7º, 8 e 9º anos), na linha desse tronco comum, foi apenas possível em Portugal, por razões óbvias, depois do 25 de Abril. Nas palavras de Rui Grácio

> [...] unificar não é fazer coabitar cursos diferenciados, como nas escolas "polivalentes", nem sequer "misturar " elementos de cursos diferentes [ensino liceal e ensino técnico]. É fundir, para utilizar uma linguagem oficinal, por forma a que a liga resultante seja qualitativamente diferente e susceptível de utilização diversa, e superior, com referência aos elementos originais.[...] É evidente o significado político e socialmente igualitário da unificação, ou seja: da horizontalização das estruturas escolares, até agora orientadas pela justaposição de vias paralelas de desigual prestígio social, umas mais longas conduzindo ao ensino superior, e aos quadros de direcção política e social, outras mais curtas desembocando no mundo do trabalho e da sujeição social e política. A ordenação vertical das estruturas ao nível considerado, que exprime, reproduz e reforça a hierarquia do corpo social, é psicopedagogicamente agravada pela necessidade de o aluno escolher prematuramente — pelos 12/13 anos — o *cursus* escolar, se não mesmo o rumo profissional, quando é sabido que os interesses, as atitudes e os valores ainda se não encontram fixados, mudam ainda rapidamente a partir dos 15 anos, aproximadamente, para se estabilizarem cerca de 10 anos depois.
>
> *Obra Completa*, vol. II, pp. 408-409

Rui Grácio alertou repetidamente que para atingir os objectivos sociais do "tronco comum" não chegaria a unificação formal, mas a transformação substancial das estruturas do sistema educativo, e a proposta original do ESU incluí propostas nesse sentido (integração das ciências, área das ciências sociais, trabalhos oficinais, educação cívica politécnica).

No entanto, poucos meses depois, como já referimos, essa proposta original foi completamente descaracterizada. Não houve "fusão" entre o ensino liceal e o ensino técnico.

Deixou-se que o primeiro, marcado por "um saber académico e enciclopedístico divorciado da prática social" ganhasse preponderância total. Essa "licealização" acentuou um facto já indicado por Rui Grácio: os alunos provenientes de meios desfavorecidos "estão munidos de um equipamento cultural e mental incongruente com os estímulos, solicitações e exigências dominantes em um ensino cujo discurso e cujos valores são próprios ou afins de classes, estratos e categorias diferentes".

Todos os professores atentos das escolas das periferias de Lisboa, por exemplo, reconhecerão facilmente a justeza desta afirmação e como as condições se agravaram ainda mais de há 25 anos para cá. Conhecem também as consequências: exclusão, abandono.

Na situação presente, o nosso 3° ciclo do ensino básico, com os mesmos problemas fundamentais ainda por resolver, é uma consequência directa da falta de coragem e determinação em prosseguir a via original do ESU.

Quanto ao actual secundário, digamos de maneira rápida e simplista que foi evoluindo ao sabor de decisões *ad hoc*, conduzindo a uma situação que o próprio Ministério considera "complexa": ensino secundário diurno (cursos gerais e tecnológicos), ensino recorrente, cursos das escolas profissionais, cursos das escolas especializadas de ensino artístico e ainda cursos em vias de extinção, em regime nocturno. (*Desenvolver, Consolidar, Orientar*, pág. 9).

Finalmente, é aquela situação "complexa" que o ME, através do DES, vem agora alterar, com a publicação de mais um documento de trabalho intitulado *Proposta de Revisão Curricular/Ensino Secundário* (PRC/DES).

É em última análise este texto que comentaremos aqui, apenas em dois pontos:

- de que modo se situa relativamente à problemática do "tronco comum";
- que modificações são introduzidas na disciplina de Matemática.

Um passo atrás de consequências nefastas

Reconhecido o fracasso dos cursos tecnológicos e o absurdo de reduzir o ensino secundário a uma preparação para ingresso no ensino superior, duas vias afiguravam-se possíveis.

Uma delas, que eu defendo, e que naturalmente implicava uma coordenação com o ensino básico, consistia em simultaneamente reconhecer e emendar os erros da licealização do 3° ciclo (e em certos aspectos dos documentos da Gestão Flexível, o caminho parece entreabrir-se para isso) e estender para o secundário, com naturais adaptações, o tronco comum. Num ponto mais à frente deste artigo retomarei mais longamente a descrição desta opção.

Não foi esta a via do ME. No texto que estou a comentar, propõe-se um "ajustamento curricular" em que se estruturam "os cursos gerais como **claramente orientados para o prosseguimento de estudos** e os **cursos tecnológicos como claramente orientados para a integração no mundo do trabalho**" (PRC/DES, pág. 4, *bolds* no original). Concretamente, é proposto que existam 7 cursos gerais e 14 cursos tecnológicos, dividindo *claramente* os alunos, *à entrada do secundário*, em dois grupos — os que vão para cursos superiores e os que vão para o mundo do trabalho. Os autores do texto, certamente conscientes do clamoroso passo atrás que este dito "ajustamento" irá representar, se for adoptado, tratam logo em seguida, num passe de mágica, de enunciar os diversos factores que contribuem nesta medida para a "**democratização do ensino** e da **sociedade** e para uma real **igualdade de oportunidades**" (PRC/DES, pág. 4, *bolds* no original).

Um dos factores é a famosa "permeabilidade". Interrogado sobre este ponto pela *Educação e Matemática* n° 55, Domingos Fernandes (DF) é suficientemente claro: "Haverá certamente medidas [para um aluno mudar de curso]. Uma delas passará por um certo tipo de equivalências, um certo tipo de permeabilidade que **nunca é fácil, é bom que tenhamos essa noção**.

Portanto, **introduzir a permeabilidade possível**, mas sobretudo a ideia de criar um ano pós 12° ano que permita aos alunos "corrigir" os seus percursos formativos e educativos" (Entrevista, E & M, pág. 54, *bolds* acrescentados por mim).

Examinemos mais de perto em que poderá consistir essa "correcção". Quem irá frequentar esse ano pós 12 ° ano? Vejamos o que diz exactamente DF: "Alunos que estão nos cursos tecnológicos e que tiveram sucesso e que se entusiasmaram [...] terão ao nível desse ano pós 12° ano a possibilidade de receber os complementos de formação que lhes permitam estar em pé de igualdade [no acesso a um curso superior]" Inventarei um caso concreto, sob forma caricatural, para vermos o absurdo em que estamos a cair. Suponhamos então que um aluno frequentou os três anos do Curso Tecnológico de Documentação, um dos 14 cursos profissionais da "revolução". Isso foi certamente porque aos 15 anos tinha uma *vocação irresistível* para as técnicas de documentação. Segundo DF, se este aluno tem sucesso (entende-se, direi eu, no curso de documentação) e se se entusiasma (certamente pelas técnicas da documentação), poderá então decidir mudar de curso e ir frequentar o ano pós 12°. Ou seja, será o sucesso e o entusiasmo adquiridos num curso profissional — o que lhe augurava um futuro risonho como técnico de documentação — que fazem este aluno decidir mudar de curso (e de vida...!!!).

A história verdadeira é outra. Este aluno foi mal sucedido no 3° ciclo, teve classificações baixas, e os pais ou um orientador psicológico qualquer, convenceram-no que mais valia ir trabalhar do que estar com veleidades de ir para um curso superior. E foi para técnico de documentação muito provavelmente porque era a opção oferecida pela escola da vila do interior de Portugal onde vivia. Mas depois passa a ter melhores notas e odeia a documentação.

E resolve, à custa de muito esforço, energia e independência — que faltará à maior parte dos seus colegas —, prosseguir estudos e ingressar no tal ano pós 12°.

Aí irá preparar-se para um estúpido exame a ver se consegue a tal permeabilidade (que não é, como confessa DF, coisa fácil...). E é isto "a democratização de ensino e da sociedade e uma real igualdade de oportunidades"!

Este "ajustamento", se for para a frente, vai acarretar com o tempo outras consequências nefastas.

Pode prever-se que se dará, mais tarde ou mais cedo, *uma separação das escolas* — as dos cursos gerais (para os meninos que vão prosseguir estudos) e as dos cursos profissionais (para os mal sucedidos no 3° ciclo, e já sabemos qual é a sua principal proveniência). O próprio DF, com a sua estimável franqueza, já apontou o caminho, ao dizer na mesma entrevista: "Nós conhecemos escolas que têm uma orientação clara para que os seus alunos ingressem no ensino superior. Mas também temos escolas cuja vocação principal é o mercado do trabalho, e que têm protocolos com empresas."

Por outro lado, as propostas do DES não deixarão de ter *consequências negativas no ensino básico*. Sabe-se como no nosso sistema educativo as opções de um nível de escolaridade condicionam os níveis anteriores — não havia uma educadora de infância que queria generosamente preparar as crianças ao seu cuidado por forma a que não estranhassem quando mais tarde fossem submetidas a testes de avaliação? A separação das águas no nível secundário vai ter consequências no básico. Em primeiro lugar ao nível do comportamento dos professores, que não deixarão de prever (e em consequência diminuir as suas expectativas, com os resultados conhecidos) que certos dos seus alunos "irão com certeza para os cursos (mais tarde dirão para as escolas) profissionais". Além disso, julgo que não teremos que aguardar muito tempo para ouvir algum Secretário de Estado mais corajoso ou franco, dizer:

> Francamente, será preciso esperar pelo 9° ano para perceber que um determinado aluno está destinado aos cursos profissionais? Então isso não se vê logo no 5° ou no 6°? Às vezes, basta olhar...

Porque havemos então de andar a massacrá-los com teorias, se eles são mesmo feitos é para trabalhar? Nem todos podem ser doutores, e até há muitos doutores desempregados.

As "chamadas ideologias ocidentais", na expressão de DF — julgo que se está a referir à economia de mercado e à concepção "racional" da escola como empresa de produção de mão de obra —, que já nos obrigam aos exames (Entrevista, pág. 57) não nos irão obrigar a germanizar o nosso ensino e a ter escolas de tipo diferente desde os 12 ou mesmo 10 anos de idade?

Más notícias também para a Matemática

À primeira vista, a maior implicação na disciplina de Matemática parece ser a criação de uma Matemática B para os cursos tecnológicos. Se é apenas uma Matemática B ou várias Matemáticas B, conforme os diferentes cursos tecnológicos, não é claro do documento de trabalho.

Por outro lado, também a Matemática actual, chamemos-lhe A, parece poder ser uma ou várias.

Na entrevista, a hipótese que parece agradar mais a DF é a existência de uma Matemática A (a actual) chamada "estruturante" e depois a partir daqui a criação (por cortes de capítulos, desconfio eu) de algumas Matemáticas A' e de várias Matemáticas B. Só desta maneira podemos imaginar que um aluno possa num ano ficar "em pé de igualdade" com os meninos dos cursos gerais, pois "apenas" terá que estudar os capítulos que foram retirados da Matemática A para a transformarem na sua Matemática B.

Tudo isto são evidentemente más notícias. Gostava apenas de salientar uma consequência perversa desta proposta. Mesmo que o texto do programa fique imutável, apenas aparentemente a Matemática A fica na mesma.

Na realidade muitos de nós temos argumentado que, não se destinando muitos alunos que frequentam o secundário a prosseguir estudos, não há qualquer razão para reduzir a Matemática a um treino de técnicas que os professores universitários gostavam de não ter que ensinar nos primeiros anos da universidade.

Esta argumentação cai pela base, na medida em que a Matemática A passa a ser *exclusivamente* para prosseguir estudos superiores. Porque não há-de ser isso mesmo, portanto? De resto, também aqui DF usa de franqueza, ao falar da Matemática A como "a Matemática pura e dura, para ingresso na Universidade". Porquê "dura"? Que concepção da Matemática e do seu ensino estará por trás deste adjectivo?

A criação destas duas ou mais "Matemáticas" não deixará também de acarretar consequências no básico. Hoje em dia, fala-se muito em flexibilidade, e em currículos alternativos, mas sempre no pressuposto de que não há matemáticas de primeira e de segunda, de que é possível e desejável oferecer uma matemática de qualidade para *todos* os alunos. Mas naturalmente e logicamente, uma questão vai colocar-se: se *já sabemos* que muitos destes alunos vão ter uma Matemática B, e se até é possível prever, logo desde o início do 3° ciclo, se não mais cedo, quem são esses alunos, porque não simplificar (no sentido real de empobrecer) a Matemática para eles? Porque não começar a criar Matemáticas B mais cedo?

Poderia ser de outra maneira?

Julgo francamente que sim. Já apontei a via de prolongamento de um tronco comum não "licealizante" para o secundário. Mas é necessário explicar melhor do que se trata, antecipando mal entendidos, dado que é um caminho ainda por abrir, pelo menos entre nós.

a) Penso que está certamente próximo o tempo em que todos os alunos prosseguirão estudos de nível secundário.

E que este nível, não sendo

- nem terminal — pois por um lado não deve ter carácter profissionalizante e por outro será desejável que a melhoria das condições sociais permita o prosseguimento dos estudos para uma percentagem crescente de todos que o desejarem fazer;

- nem de preparação específica para determinados estudos superiores — pois ainda será cedo para a generalidade dos alunos fazer escolhas quase definitivas,

deverá ter como objectivo prosseguir e aprofundar a formação geral iniciada nos anos anteriores, em todos os domínios — humanísticos, científicos, técnicos, artísticos, e para a cidadania.

b) Sendo esta formação geral oferecida a *todos os alunos*, deverá existir um curso único (o tronco comum), contemplando todos aqueles domínios. No entanto, esta universalidade não se obtém justapondo as disciplinas dos vários agrupamentos do actual secundário, o que seria não só absurdo mas incomportável. Terão que ser criadas disciplinas novas, com objectivos novos, e alterando grandemente, no sentido da redução, as cargas horárias dessas disciplinas. Entretanto, ao mesmo tempo que será oferecido esse curso único a todos os alunos, serão também oferecidas opções que complementarão, nos vários domínios e em diversas direcções, aquela formação geral. Portanto, mediante a escolha em cada ano dessas opções, os alunos acabarão por fazer percursos diferenciados mas com uma base de formação comum. Ao longo dos três anos, e correspondendo à variação rápida de interesses, valores e atitudes que os caracterizam, como afirmava Rui Grácio, os jovens nas idades correspondentes ao ensino secundário vão por assim dizer *tacteando a sua vocação*. Explicitarei mais à frente (ponto d), para o caso da Matemática, que nos interessa mais e sobre o qual nos percebemos uns aos outros mais facilmente, em que poderia consistir o curso único e as correspondentes opções.

c) A expectativa que devemos ter é que, idealmente, a totalidade dos alunos prosseguirá a sua formação geral no ensino secundário, aproximando-nos assim dos períodos de escolaridade praticados já em outros países. Isso não quer dizer, no entanto, que alguns alunos, logo no início do secundário ou em anos subsequentes, não decidam interromper ou terminar a sua escolaridade e aprender uma profissão. Nessas circunstâncias, não tem sentido *prender esse aluno à escola* e obrigá-lo a frequentá-la até ao fim do secundário. A escola nunca deve ser uma prisão! Esse aluno deve ter, também em condições de gratuitidade, direito a aprender uma profissão, pelo que terão de existir escolas profissionais. Tal como deve ter direito e lhe devem ser dadas condições para regressar aos estudos mais tarde (mas isso são outras questões que não vamos abordar aqui).

d) A finalidade da formação em matemática — *para todos os alunos* — é a compreensão da natureza da matemática e da sua relevância para o desenvolvimento da sociedade. Essa compreensão atinge-se através de uma experiência matemática intensa e variada, e da reflexão sobre essa experiência, que deve existir ao longo de toda a escolaridade. O que distingue e identifica a este respeito o secundário é que deverá ser possível aí, devido ao progressivo amadurecimento intelectual dos alunos, fazer experiências e reflexões mais dirigidas e organizadas incidindo em particular sobre

- a história da matemática;
- os seus processos próprios de desenvolvimento — modelação matemática, procura de invariantes, descoberta de conexões dentro da matemática e utilização da analogia, generalização e abstracção;
- as suas características como ciência — o papel da intuição e da dedução em matemática, a importância e carácter das definições e da demonstração, e a estrutura axiomática.

Nesta perspectiva, portanto, a aquisição de técnicas e de proficiência de cálculo, ou mesmo de conhecimentos específicos de conceitos ou resultados matemáticos, não constitui finalidade do ensino em si mesma, mesmo no ensino secundário, mas apenas na medida em que seja estritamente necessária para aquela formação geral, que tem portanto um carácter eminentemente cultural, do meu ponto de vista.

A formação geral matemática assim entendida (*para todos os alunos*) não ocuparia certamente mais do que duas horas por semana. Os alunos mais interessados e com maior gosto pela matemática, no entanto, poderiam completar a sua formação escolhendo, ao longo dos três anos do secundário, opções de matemática — geometria, análise, probabilidades, geometria descritiva, informática para matemática, etc. — bem como, natural e desejavelmente, poderiam juntar algumas destas opções com outras noutros domínios — música, história da arte, literatura inglesa, atletismo de competição, etc. — tal como outros alunos, mais inclinados para as letras, poderiam escolher opções no domínio da literatura e porque não, história da ciência ou história da matemática.

Nota

Já depois de escrito este artigo tomei conhecimento de um número notável da revista Colóquio/Educação e Sociedade, dedicado ao Ensino Secundário (nº 5, Nova Série, Março 1999, ed. Fundação Gulbenkian).

Aos colegas que justificadamente não se satisfazem com as ideias expostas neste artigo em forma de desabafo e apenas fundamentadas numa opinião individual, recomendo a leitura dessa revista.

Bibliografia

Grácio, Rui. *Obra Completa*. Vol. I, II e III. Fundação Gulbenkian, 1995.

Eduardo Veloso

Se até a Barbie diz que não gosta de Matemática...

Elsa Fernandes

O ensino/aprendizagem da Matemática depende em grande parte da ideia que dela se tem e, consequentemente, da sua epistemologia.
(Piaget, 1970)

Talvez o insucesso em Matemática, não tenha como principais causas, aquilo que todos acreditamos e criticamos... talvez o sucesso em Matemática passe também por uma mudança de mentalidades, não apenas dos professores de Matemática, mas também da sociedade em geral.

Uma das minhas preocupações, enquanto professora de Matemática, é perceber o que é, realmente a ciência que ensino. As minhas concepções acerca da Matemática, têm evoluído (acredito eu) com o passar dos anos. Hoje, para mim, a Matemática, tal como a Música e a Ciência (em geral), é um produto cultural, é uma actividade socialmente definida. As fronteiras daquilo que é ou não Matemática são estabelecidas pela sociedade. São os matemáticos que validam aquilo que é Matemática. Mas até que ponto, nós professores, não validamos também o que é Matemática? Quantas vezes aceitamos um processo e não outro, por acharmos que esse é matemático e o outro não? E com que base é que fazemos essa distinção? Matemática será o mesmo para todos nós?

- A Matemática é um tipo especial de actividade e mais nenhuma outra actividade é, por definição, Matemática;
- a Matemática aprende-se na Escola — consequentemente as pessoas que nunca foram à Escola, não sabem Matemática;
- a Matemática é abstracta e não se aplica no dia-a-dia — assim sendo não se aprende Matemática na vida prática;
- a Matemática é difícil; poucas pessoas têm boas notas em Matemática — isto significa que poucas pessoas sabem Matemática.
- a Matemática é usada pelos matemáticos, alguns cientistas e por algumas pessoas altamente qualificadas tecnicamente (a maioria deles homens) — portanto são estas as pessoas que sabem Matemática.

Estas são, segundo Nunes e Bryant (1996), algumas das concepções da sociedade acerca da Matemática.

A actividade matemática é realmente um tipo de actividade, socialmente definida, tal como comprar e vender, construir casas, etc., o são. Talvez as concepções acerca da Matemática, supra citadas advenham do facto de se considerar a Matemática como um tipo especial de actividade. De facto a Matemática tem sido considerada como um conhecimento independente da cultura. Mas estudos recentes (Bishop, 1988; D'Ambrósio, 1985) têm demonstrado que a Matemática tem uma história cultural e social (porque terá estado Einstein tão ligado à Teoria da Relatividade e não Newton? porque terá sido Newton a inventar a lei da gravitação universal e não Galileu?). Além disso, a aprendizagem da Matemática "não se limita à aquisição de algoritmos, vindos dos matemáticos via escola. Aprender e fazer Matemática é um acto de dar sentido e envolve tanto o aspecto cultural como o cognitivo, não podendo estes dois serem separados" (Schoenfeld, 1989).

Reuben Hersh (1997), argumenta que "a Matemática deve ser vista como uma actividade humana, um fenómeno social, parte da cultura humana, que tem lugar num contexto histórico, inteligível somente num contexto social" (epílogo).

Mas será verdade que a Matemática só se aprende na Escola? Não haverá nada sobre a Matemática que aprendamos com as outras actividades socialmente definidas?

Segundo Nunes e Bryant (1996), a Matemática tem um duplo *status* — é um tipo particular de actividade mas é também uma forma de conhecimento. Isto significa que pode ser aprendida e usada fora da Escola e fora daquilo que 'definimos' como Matemática. A Matemática não é só uma disciplina, é também um modo de pensar. Por esta razão, tal como a literacia, a Matemática deve ser algo ao alcance de todos. Na Escola aprendemos certas formas de conhecimento matemático, e ficamos incapacitados de ver a importância de outras que não são aprendidas escolarmente. O vendedor de lenha, que procura a melhor maneira de arrumar na sua carrinha a maior quantidade de lenha, não saberá Geometria? Não saberá Matemática?

Nas últimas duas décadas, antropólogos, psicólogos e educadores matemáticos, começaram a preocupar-se crescentemente com outras formas de conhecimento matemático, como sejam por exemplo as usadas pelos vendedores de rua, para quem a Escola simplesmente não existiu, ou se existiu foi para eles um lugar de insucesso.

Segundo Boaler (1997), na comunidade dos educadores matemáticos parece acreditar-se que as pessoas não são capazes de usar a Matemática que aprendem na Escola, fora desse contexto. Em vários projectos de investigação (Lave et al, 1984; Lave 1988; Nunes et al, 1993; Abreu, 1995) observaram-se situações reais que envolviam Matemática, tais como vendas de rua, compras num supermercado, etc., e constatou-se que os métodos e processos matemáticos aprendidos na Escola, raramente eram usados. Mais ainda verificou-se que, no caso dos pequenos vendedores de rua[2] (Nunes, 1993), estes eram capazes de, na sua actividade de venda, resolver problemas bastante elaborados. Quando se lhes pedia para resolver um problema semelhante, mas agora com papel e lápis e utilizando um algoritmo, estes eram incapazes de resolver.

Lave (1988) usou os resultados da investigação que fez sobre a actividade de fazer compras num supermercado[3], para criticar a concepção tradicional de que a Matemática é uma ferramenta abstracta e poderosa, que é facilmente transferida de uma situação para outra. Na sua perspectiva, o ensino da Matemática na Escola, é usualmente concebido como a aquisição de capacidades que subsequentemente podem ser transferidas para outras práticas. Mas Lave (1988), critica esta concepção e consequentemente as teorias de 'transferência de aprendizagens' e apresenta a sua tese de que a aprendizagem é 'situada' e intrinsecamente ligada à situação ou ao contexto em que acontece. Argumenta que os alunos não conseguem utilizar, fora da Escola, a Matemática que aprendem na Escola porque o seu conhecimento matemático está enraizado e fortemente ligado à situação de sala de aula.

Os pequenos vendedores de rua que Nunes (et al, 1993) estudaram, têm sucesso quando usam a Matemática na rua, na sua actividade de venda (da qual dependem para sobreviver), mas falham na Matemática da Escola. E este facto não é apenas uma curiosidade sobre a Matemática, ele é decisivo nas oportunidades futuras destas crianças e consequentemente nas suas vidas. A Escola atribuiu-lhes o rótulo de 'incapaz', muitas vezes não porque não saibam pensar matematicamente, mas sim porque não falam essa linguagem silenciosa da Escola. Através da ocultação da coerção social e do poder da Escola para impor normas, valores e crenças, os grupos dominados são levados a encarar como normal, a inferioridade da sua cultura. A Escola, ao considerar natural, aquilo que de facto é social, funciona como uma instituição conservadora e reprodutora da hierarquia social, tendo por base o princípio da (falsa) neutralidade. Ao mesmo tempo que se apresenta como neutra, e obedecendo a certas regras internas, a Escola desempenha com singular eficácia o seu papel de perpetuação da estrutura de classes.

Estaremos nós a dirigirmo-nos para uma escola de sucesso? Ao tentar responder a esta questão, Pombo (1999), questiona se será o sucesso da escola ou o sucesso dos alunos da escola. Parece óbvio que o sucesso da escola é o sucesso dos alunos. "Será sempre assim? Não é verdade que, tantas vezes, o que interessa é que o ano escolar se passe, que se dêem as aulas, que tudo corra bem, que tudo suceda como sempre?" Foi o sucesso da escola, mas e os alunos? O sucesso da escola resultou do sucesso dos seus alunos? Não haverá também insucesso nos alunos bem sucedidos? E os que tiveram insucesso? Serão eles incapazes de aprender Matemática? Estou convicta de que a resposta a esta questão é claramente não? Não defendo que todas as pessoas, devam ser capazes de fazer ou ensinar Matemática. Também eu não conseguiria desenhar a Gioconda, mas era com certeza capaz de aprender a pintar. Pois é, mas e se não fosse capaz de aprender a pintar? Isso funcionaria como um elemento seleccionador para o ingresso em muitos dos cursos do ensino superior? É óbvio que não. Já alguma vez ouviu um encarregado de educação desculpar a negativa do seu educando na disciplina de Biologia, porque também ele não era 'bom' em Biologia? Provavelmente não. Mas já ouviu muitos dizerem "o meu filho não 'dá' para Matemática. Já eu não me entendia com os números", como se ser capaz de aprender Matemática fosse algo hereditário. Já ouviu alguma publicidade que querendo realçar o facto de a taxa de juro, para comprar um automóvel ser 0%, começar do seguinte modo: "Quanto é que tiveste em História? — Zero". Pois não. Não ouviu. Mas se é um ouvinte atento de rádio, já ouviu com certeza: "Quanto é que tiveste em Matemática?" Zero — é a resposta. Já ouviu alguma Barbie dizer que a Química é difícil? Pois não. O que esta Barbie dizia era "I hate Mathematics. Mathematics is difficult".

Por tudo o que foi dito, parece tornar-se claro que a Matemática é conotada socialmente com algo muito difícil e que é só para uns quantos malucos. Nada mais errado. Não é difícil nos apercebemos que estas ideias vão 'entrando' nas mentes dos alunos, com grande facilidade. É fácil percebermos que quando vamos aprender algo que é considerado difícil, à partida, criamos as nossas próprias resistências.

Talvez o insucesso em Matemática, não tenha como principais causas, aquilo que todos acreditamos e criticamos... talvez o sucesso em Matemática passe também por uma mudança de mentalidades, não apenas dos professores de Matemática, mas também da sociedade em geral.

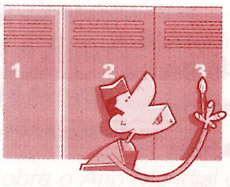
Se até a Barbie diz que não gosta de Matemática...

(continua na pág. 25)

O problema do ProfMat 99

José Paulo Viana

O concurso proposto aos participantes no ProfMat99 de Portimão consistiu na resolução do problema



Pintores de Números:

Dois operários vão pintar os números dos cacifos de uma escola.

Enquanto o mais velho pinta cinco algarismos, o mais novo só consegue pintar quatro.

O mais novo começou pelos cacifos de números mais baixos: 1, 2, 3, ...

O mais velho começou pelo último cacifo e foi pintando por aí abaixo, ao encontro do mais novo.

No final, duas coincidências se verificaram:

- *Acabaram os dois ao mesmo tempo, cada um em seu cacifo.*
- *Os dois pintaram o mesmo número de cacifos.*

Quantos cacifos há na escola?

Tivemos um número recorde de respostas: 57, das quais 19 colectivas.

A maneira mais simples, elegante e surpreendente de resolver o problema é, sem dúvida, a do Jorge Manuel Ferreira, o vencedor incontestado do concurso. Ora vejam:

> Pensemos do seguinte modo: eles pintam ao mesmo ritmo, mas o pintor mais novo descobre que pode pintar o mesmo número de cacifos não pintando um algarismo "desnecessário" de cada vez! Esse algarismo desnecessário é o zero à esquerda.
>
> De 1 a 99 há $2 \times 9 + 1 \times 90 = 108$ zeros à esquerda.
>
> Então, o pintor mais novo pinta 4 algarismos 108 vezes e o mais velho pinta $5 \times 108 = 540$ algarismos. Como cada cacifo do mais velho tem 3 algarismos, estes 540 algarismos que ele pintou correspondem a 180 cacifos. Logo, a escola tem 360 cacifos.

Três equipas, as do José Manuel Duarte, do Luís Pinheiro e da Ana Machado, resolveram o problema por um processo também muito curioso. Primeiro mostraram que o mais novo tem de pintar pelo menos 100 cacifos. Depois, nas palavras da primeira equipa:

> Vejamos quantos cacifos pintou o mais velho enquanto o mais novo pintou os 100 primeiros.
>
> A estes 100 cacifos correspondem $9 + 2 \times 90 + 3 = 192$ algarismos.
>
> O mais velho pintou então $192 \times \frac{5}{4} = 240$ algarismos, a que correspondem $\frac{240}{3} = 80$ cacifos.
>
> Assim, o pintor mais novo leva um avanço de 20 cacifos.
>
> A partir desta altura, ambos os pintores pintam cacifos com o mesmo número de algarismos, pelo que, enquanto o mais velho pinta 5 cacifos, o mais novo pinta 4.
>
> Ou seja, em cada 5 cacifos, o mais velho recupera um.
>
> Ao fim de 20×5 cacifos, o mais velho recuperou o atraso que levava.
>
> Cada um deles pintou portanto 180 cacifos.
>
> A escola tem 360 cacifos.

Vários concorrentes partiram à procura de outras soluções "matemáticas" do problema mas que correspondiam a um número de

(continua na página 18)

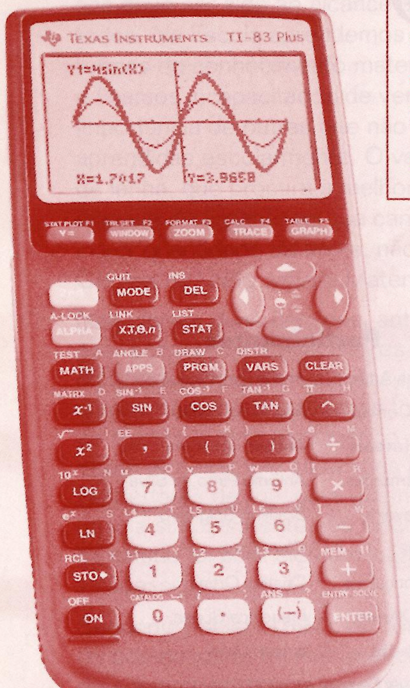
Participantes

Ana Cristina Assis	Ana Isabel Carvalho
Ana Luísa Correia	Ana Sofia Nobre
Ana Sofia Tavares	António Abrantes
António Bernardes	António Pinto da Silva
Augusto Taveira	Braulino Salgueiro
Carlos Faria	Clara Cruz
Cristina Gonçalves	Cristina Ortins
Fernanda Oliveira	Francisca Sousa
Helena Valadão	Isabel Viana
Jorge Manuel Ferreira	José Manuel Oliveira
José Paulos	Laura Guerra
Luís Malheiro	Mª João Lopes
Mónica Valadão	Olga Correia
Olívia Sousa	Orlando Sá Couto
Pedro Oliveira	Pedro Torres
Renato Agostinho	Rita Basto
Sandra Gomes	Sérgio Macias Marques
Sócio nº 1448	Susana Fernandes
Vidal Minga	Vasco Carvalho

Equipas:

- AAH (António Pinto Leite, Armando Fernandes & Heitor Surrador)
- Adriana Costa & Eva Matias
- Alice Pinto & Cristina Sapariti
- Ana Cristina Costa & Ana Sofia Henriques
- Ana Machado, Célia Lobo, Manuel Lago & Mário Roque
- Ana Morais, Avelino Costa & Rui Costa
- Ana Paula Júlio & Paulo Correia
- Ana Serrazina & Glória Serrazina
- Aurélia Freire, Cristina Piedade & Amélia Albuquerque
- Carla Dias & Paulo Lameira
- Celina Pereira & Elsa Ferreira
- Isabel Alves, Raquel Azevedo & Susana Ribeiro
- Isabel Guerreiro & Júlio Guerreiro
- Iva Angelino & Nuno Angelino
- José Manuel Duarte, Fátima Delgado, Pedro Girão & Sérgio Valente
- Jacinto Salgueiro & Luis Miguel Ferreira
- Lourdes Sequeira & Leonel Taveira
- Luis Pinheiro & Sónia Matos
- Mónica Conde & Matilde Rebelo

Nova "TI-83 Plus" com Menus em Português



TI-83 Plus pode ser adaptada à língua Portuguesa! Carregue o software de localização (incluído em disquete!) na sua calculadora usando o TI-GRAPH LINK ™ ou o cabo calculadora-a-calculadora para obter os menus e mensagens de erro em português!!

TEXAS INSTRUMENTS
v1.02
Português
1:Português
2:English
© 1999 TEXAS INSTRUMENTS

A calculadora perfeita para o ensino secundário, agora com 192 KB de memória e tecnologia Flash ROM para actualização electrónica.

- **192 KB de memória.**
- **A tecnologia Flash ROM, garante a capacidade de actualização electrónica para novas versões de software e novas aplicações - Prolongamento da vida da sua calculadora.**
- **Menus em Português incluídos em disquete.**
- **A TI-83 Plus já inclui uma aplicação CBL/CBR para recolha, visualização e análise de dados.**
- **Tem todas as funções, capacidades e potencialidades da tradicional TI-83!**
- **Garantia 2 anos.**

1. Algumas aplicações TI-83 PLUS disponíveis em www.ti.com/calc/flash/83p.htm

- **Gráficos Interactivos**
- **Tabela Periódica**
- **Agenda Electrónica**
- **Aplicação Chem/Bio da Vernier**

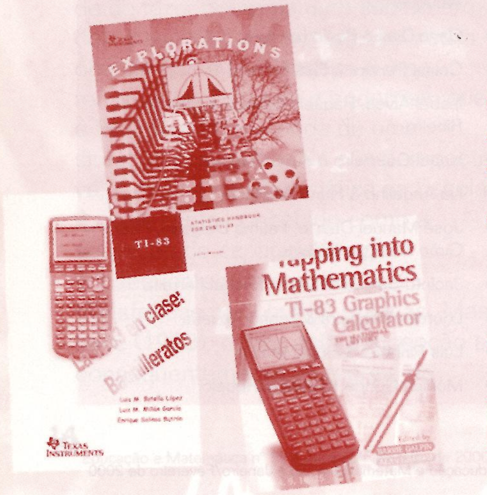
FLASH ™

O TI-GRAPH LINK ™ permite a comunicação entre a calculadora TI e o seu PC: é possível transferir programas e dados, criados ou editados no ecrã, entre a calculadora e o computador. Os dados podem ser copiados e colados directamente nos ficheiros de processamento de texto do Windows™ e impressos. TI-GRAPH LINK™ inclui um CD ROM de Recursos. Download grátis do software TI-GRAPH LINK™ da Internet: http:/www.ti.com/calc/docs/Link.htm

Apoio Programa Educacional

Programa de Empréstimo de Calculadoras • Acções de Formação
Bibliografia de Apoio à Calculadora • TI-MAT, a revista das Calculadoras no Ensino da Matemática

Deseja receber as nossas publicações, o TI-MAT, TI-Produtos, TI-Apoio?
Contacte-nos!



Rua do Molhe, 616 – AQ
4150-500 Porto
Tel: 02 616 23 98 Fax: 02 616 62 19
e-mail: xØtomasm@ti.com

TEXAS INSTRUMENTS
http://www.ti.com/calc/portugal

CSC - Centro de Suporte ao Cliente:
Tel: 0800 832 627

Bibliografia em Português

- Equações...
- Análise...
- Estatística...
- ... com as calculadoras TI-80/82/83/92
- Modelação TI-92 - Da geometria às funções passando pela estatística
- Programação no ensino Secundário TI-80/82/83/86

Ano mundial da matemática

O ano 2000 foi declarado, em 6 de Maio de 1992, pela União Internacional dos Matemáticos como Ano Mundial da Matemática. Os principais objectivos apontados relacionam-se com:

- *os grandes desafios que se colocam à matemática no séc. XXI*
- *a matemática como uma das importantes chaves do desenvolvimento*
- *a imagem da matemática*

A direcção da APM, como é do conhecimento geral, considerando como aspecto mais importante as iniciativas desenvolvidas nas escolas, considerou no entanto a vantagem do desenvolvimento de iniciativas comuns nomeadamente a actividade intitulada "Um poliedro na escola". Esta actividade passa pela construção de um poliedro de grandes dimensões a colocar em local de grande visibilidade na escola.

Para saber mais sobre o Ano Mundial da Matemática, as iniciativas da APM e tantas outras consulte a página da APM em www.apm.pt.

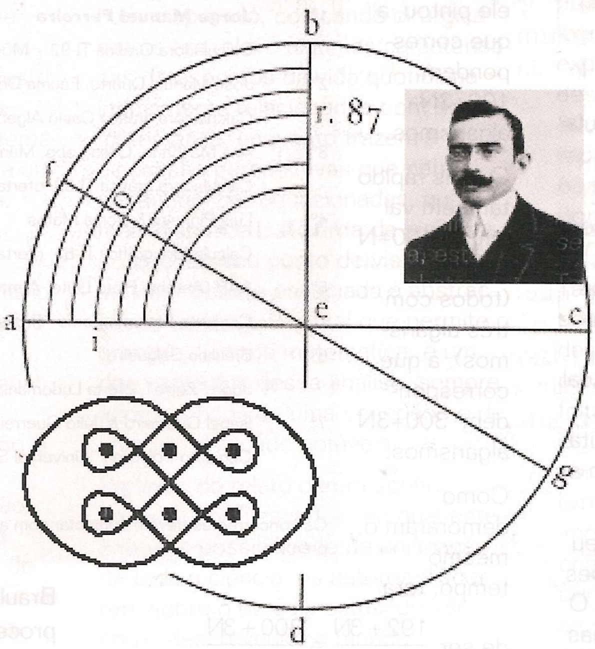
A revista Educação e Matemática durante este ano vai dedicar um espaço às iniciativas que se forem realizando. Contamos com a colaboração dos leitores e lançamos o desafio de nos enviarem pequenos artigos ou notícias que possam ser incluídas nesta secção.

Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática — uma entrevista por e-mail

Através de correio electrónico a Educação e Matemática contactou Jaime Carvalho e Silva, um dos elementos da Comissão organizadora do III Encontro Luso-Brasileiro de História de Matemática, que se irá realizar em Coimbra de 7 a 12 de Fevereiro de 2000 cujos temas são: 2000 — Ano Mundial da Matemática, 500 anos de relações Portugal — Brasil.

Educação e Matemática (EM) — Quais os principais objectivos deste III Encontro Luso-Brasileiro de História de Matemática?

Jaime Carvalho e Silva (JCS) — Os estudos de História da Matemática em língua portuguesa eram raros até há cerca de uns 10 anos. Várias iniciativas em Portugal e no Brasil têm vindo a aumentar o interesse pela História da Matemática em língua portuguesa (e não só em Portugal e no Brasil). Isto inclui oestudo da História da Matemática dos países de língua portuguesa, das



utilizações educacionais da História da Matemática e também da História da Matemática em geral.

Espera-se que com este encontro essa actividade se consolide e que se criem condições para que se justifique um IV Encontro.

(EM) — Qual a importância do encontro no contexto do ano Mundial da Matemática?

(JCS) — A ideia de organizar este evento já andava no ar há um certo tempo, mas a decisão de o realizar em 2000 foi tomada exactamente por causa do Ano Mundial da Matemática e da simultaneidade com os 500 anos da chegada dos portugueses ao Brasil.

Este parece ser um princípio geral: um evento comemorativo pode potenciar muito mais as actividades em qualquer área do que se poderia esperar de uma mera comemoração. Espera-se que o interesse pela História da Matemática, a um nível para além de uma mera iniciação, seja cimentado com mais esta iniciativa.

Um encontro na sede da APM, à volta do "poliedro na escola"

Por iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria, realizou-se no dia 11 de Dezembro, às 14.30, na sede da APM, uma sessão aberta de trabalho sobre o projecto "Um Poliedro na Escola". A convocatória foi enviada a perto de 70 escolas que haviam já declarado a sua intenção de participar nas iniciativas da APM.

A redacção da Educação e Matemática esteve lá, tirou fotos e assistiu à troca de ideias e informações sobre os projectos a desenvolver ou já em andamento, os materiais a usar nas construções, os problemas técnicos e matemáticos a resolver... para que poliedros de grandes dimensões apareçam em muitas escolas, para que também muitos professores e alunos se envolvam no seu estudo e na sua construção...

Os participantes na reunião, para além de falarem sobre os seus projectos, levantaram questões, pediram informações ao grupo de Geometria, deram outras. Trocou-se bibliografia, tiraram-se fotocópias, falou-se das planificações, da história, e também de outras iniciativas que estão ainda a ser pensadas.

Entretanto várias escolas foram dando notícias sobre os seus poliedros, os seus planos de actividades, a semana da Matemática, ...

Para ter acesso a estas informações basta entrar na página da APM e pressionar o símbolo

O Problema do ProfMat 99

(continuação da pág. 15)

cacifos impossível de existir numa escola. A equipa do José Manuel Duarte demonstrou que existem mais quatro soluções:

22 212, 179 230, 2 389 644 e 71 508 952.

A equipa AAH fez notar uma particularidade extremamente curiosa da solução 22 212.

Se considerarmos como unidade de tempo o tempo necessário para o pintor mais lento pintar 4 algarismos (e o mais rápido pintar 5), o número de unidades de tempo gastas para pintar os cacifos é precisamente igual ao número de cacifos pintados por cada um dos pintores. Isto possibilita um novo problema engraçado, com as devidas alterações de enunciado.

A maioria dos concorrentes resolveu o problema com a ajuda de equações ou fazendo tentativas organizadas. O processo mais utilizado foi, em linhas gerais o seguinte:

Nos primeiros 100 cacifos, o pintor mais lento pintou:

$9 + 90 \times 2 + 3 = 192$ algarismos.

Seja 100+N o número de cacifos que ele pintou, a que correspondem 192+3N algarismos.

O mais rápido também vai pintar 100+N cacifos (todos com três algarismos), a que correspondem 300+3N algarismos.

Como demoraram o mesmo tempo, terá de ser $\frac{192+3N}{4} = \frac{300+3N}{5}$

Resolvendo a equação, vem N = 80

Logo, cada um pintou 180 cacifos e portanto a escola tem 360 cacifos.

Prémios

1º	**Jorge Manuel Ferreira**
	Calculadora Gráfica TI-92 + Módulo Plus, oferta Texas Instruments
2º	José Manuel Duarte, Fátima Delgado, Pedro Girão & Sérgio Valente
	Calculadora gráfica Casio Algebra FX 2.0, oferta Beltrão Coelho
3º	Ana Machado, Célia Lobo, Manuel Lago & Mário Roque
	Calculadora gráfica TI-89, oferta Texas Instruments
4º	Luis Pinheiro & Sónia Matos
	Calculadora gráfica TI-83, oferta Texas Instruments
5º	AAH (António Pinto Leite, Armando Fernandes & Heitor Surrador)
	Conjunto Sistema Zome "Pioneer Kit"
6º	Braulino Salgueiro
	Jogo "Zatre", oferta Ludomania
7º	Isabel Guerreiro & Júlio Guerreiro
	Conjunto Polydron "Universal Set"

Os concorrentes devem contactar com a sede da APM a fim de receberem os prémios.

Braulino Salgueiro apresentou três processos diferentes de resolução a que chamou Anos 60, Tentativas, e Tecnomatemática.

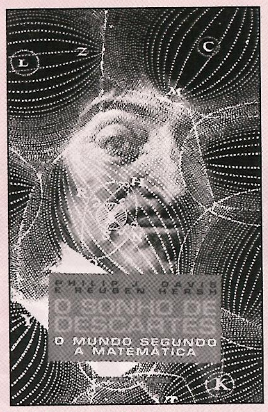
Nota: O 7º prémio foi atribuído por sorteio entre cinco concorrentes em pé de igualdade.

O Sonho de Descartes — o mundo segundo a matemática

"Fazer matemática" é uma experiência ímpar. Numa viagem apaixonada – e apaixonante – os autores visitaram tão estranho universo, assumindo-se inequivocamente como actores de um vasto elenco, interpretando entusiasticamente uma peça que também ajudaram a criar. O relato de tal aventura, que poderia ser lida como a «crónica do país da matemática, visto por dentro», foi publicado em *A Experiência Matemática*, editado, na sua tradução portuguesa, em 1995, pela Gradiva. Porventura impelidos por alguma inquietude, eis que decidem lançar-se numa espécie de prolongamento da saga, adoptando agora, de forma bem mais arriscada, um ponto de vista exterior à própria matemática. Esta segunda parte de tão arrojada empresa pode ser seguida no *Sonho de Descartes*, publicado em 1997 pela Difusão Cultural.

A abordagem da matemática "de fora", por dois matemáticos, é uma tarefa algo paradoxal. Como é que alguém que está "dentro" se aproxima "do exterior"? Conscientes deste facto, os autores preocuparam-se com as consequências que a matemática desencadeia ao ser aplicada a um domínio que se estende fora dela, tanto no mundo natural como em diversas actividades humanas. Durante o livro, procuram transmitir o que pensam sobre a validade dessas aplicações, em que medida são portadoras de bem estar, qual a sua relevância e mesmo que perigos apresentam. Confessando que não o escreveram com um espírito "neutral", até porque talvez tal não fosse possível, conseguem que a obra apresente uma unidade que de imediato se impõe ao leitor, apesar de ter resultado de artigos, comunicações ou entrevistas realizadas em vários momentos distintos.

Algumas descrições são simplesmente deliciosas e dá gosto observar os autores, armados de um sentido de



O Sonho de Descartes — o mundo segundo a matemática

Autores: Philip J. Davis e Reuben Hersh

Editora: Difusão Cultural

Colecção Ciência Hoje

Fevereiro 1997

318 pp.

Preço: 3 320$00

humor apurado, colocando cirurgicamente em relevo algumas características de aspectos da vida quotidiana intimamente relacionados com a matemática, enquanto trazem à discussão perspectivas que nem costumam ser equacionadas, quanto mais discutidas. A perda de significado que, do seu ponto de vista, está inevitavelmente associada à abstracção, a operação mental que permite o grande poder da matemática, é um dos exemplos dessa análise, sempre acompanhada de uma seriedade e de uma profundidade notáveis.

Partindo do relato de um sonho, descrito por Descartes, no qual este antevê a possibilidade de unificação de toda a ciência, os autores discorrem sobre o estádio actual do «sonho», descrevendo o mundo matematizado em que vivemos e analisando algumas aplicações da matemática, já comuns na nossa vida. O computador ocupa o centro da cena, sendo eleito como o objecto paradigmático das aplicações da matemática. Computador, tecnologia e o mundo dos negócios, (uma nova santíssima trindade?), são extensivamente analisados, sobretudo a essência da experiência computacional e como é que a informatização, à escala mundial, poderá afectar a civilização, tanto material como intelectualmente. A parte final do livro debruça-se sobre aspectos éticos, pessoais e sociais relacionados com as aplicações da matemática, sendo particularmente notável a aproximação, que deliberadamente é feita, com o fenómeno religioso. Concluem, obviamente, com o facto inelutável da mudança que existe na matemática e no papel que está a desempenhar no nosso mundo, defendendo que é urgente desenvolver uma consciência crítica sobre a relação entre os humanos e a matemática por eles criada, etapa necessária para nos proteger das consequências que nos podem atingir. Não é por acaso que, logo no, prefácio, são tornadas explícitas as justificações e finalidades deste livro: *"Os mundos físico e social estão a ser cada vez mais rapidamente matematizados (...) É bom que fiquemos bem atentos, porque isso, em excesso, pode não ser bom para nós."*

Talvez alguns leitores sejam levados a pensar que se trata de uma obra desencantada, demasiado implacável para com a utilização que está a ser feita da matemática, e até para com alguns dos seus aspectos usualmente considerados tabus – afirma-se no livro que o míssil destrutivo está impregnado da matemática que criámos... Mas não será realmente perigoso não nos preocuparmos com as consequências de algo que tanto poder exerce sobre nós?

Fernando Nunes
EB 2,3 Marquesa de Alorna
Fernando Bensabat
ES Sebastião e Silva

Spira Mirabilis
Uma curva notável

Paulo A. J. Oliveira

Bernoulli chamou-lhe espiral maravilhosa, outros designaram-na por logarítmica, equiangular, geométrica ou logística, mas todos se referiram à mesma curva, aquela que no seu tempo desafiou o pensamento de Descartes a ponto de este a banir da geometria.

Qual é a trajectória de um corpo em queda livre, atendendo ao movimento de rotação da Terra? Este problema, enunciado por Galileu na sua obra *Duas Novas Ciências,* teve eco em França através de Marin Mersenne. Descartes, em 1638, admitiu que a dita trajectória seria uma curva que designou como espiral equiangular. Em coordenadas polares esta curva tem equação $r = k.e^{a\theta}$. Curiosamente, apenas um ano antes, ao publicar a sua obra prima *La Géométrie*, Descartes tinha banido curvas como esta da geometria, nos seguintes termos:

> Provavelmente, a explicação real da recusa dos geómetras antigos em aceitarem curvas mais complexas que as secções cónicas, reside no facto de que as primeiras curvas para as quais a sua atenção foi atraída, foram a espiral, a quadratriz, e curvas semelhantes, que realmente pertencem apenas à mecânica, e não estão entre aquelas curvas que eu penso que devem ser incluídas aqui, porque se devem conceber como descritas por dois movimentos separados cuja relação não admite determinação exacta.

Mais adiante afirma:

> Por outro lado, a geometria não deveria incluir linhas que são como cordas, sendo por vezes rectas e por vezes curvas, porque as razões entre linhas rectas e curvas não são conhecidas, e eu acredito que não possam ser descobertas por mentes humanas, e sendo assim nenhuma conclusão baseada em tais razões pode ser aceite como rigorosa e exacta.

Deste modo, Descartes agrupava as curvas em duas classes: as curvas geométricas (recta, circunferência, secções cónicas, cissóide, conchóide) e as curvas não geométricas, ou mecânicas (quadratriz e espiral). Sendo um geómetra por excelência, não admira que Descartes se escusasse a fazer investigações profundas sobre as curvas mecânicas (nomeadamente as espirais, a de Arquimedes e a equiangular) que considerava como casos patológicos. No entanto, o multifacetado matemático suíço Jakob Bernoulli deixou-se maravilhar pela curva que Descartes banira da geometria. Deve-se-lhe a descoberta de propriedades espantosas, intrigantes e singulares da curva a que chamou espiral logarítmica, uma vez que na sua época a equação típica desta curva era apresentada na forma $\ln r = a\theta$ (equivalente a $r = e^{a\theta}$) visto que a exponencial de base e não era ainda considerada como função. Bernoulli desejou expressamente que fosse gravada uma espiral logarítmica no seu túmulo. Na pedra tumular de Jakob Bernoulli está de facto gravada uma espiral... de Arquimedes! Ignorância ou inabilidade do artífice, certamente.

Coordenadas polares e rectangulares

Como vimos, a espiral logarítmica é descrita pela equação $r = e^{a\theta}$, em coordenadas polares. Por simplicidade, e sem perda significativa de generalidade, muitas vezes toma-se $k = 1$.

Consideremos um ponto P(x,y) do plano, pertencente à espiral logarítmica (ver figura 1 da página seguinte).

Então, $r^2 = x^2 + y^2$ e $tg\theta = \dfrac{y}{x}$, ou,

de outro modo, $\theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

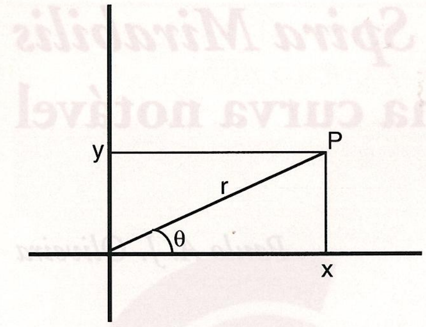


figura 1

Ora, sendo $r = e^{a\theta}$, tem-se sucessivamente:

$$r^2 = e^{2a\theta} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^{2a.\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Esta é a equação da espiral logarítmica em coordenadas rectangulares. Claro que a expressão da curva em coordenadas polares é mais natural, rica e simples, pelo que será aqui adoptada em tudo o que se segue.

Determinação da constante *a*

Na equação $r = k.e^{a\theta}$, a constante *a* é característica de cada espiral particular e pode ser determinada em função do ângulo que o raio vector faz com a tangente à curva num dado ponto.

Como $r = k.e^{a\theta}$ obviamente

$$\frac{dr}{d\theta} = ake^{a\theta} = ar. \text{ Mas } ctg\alpha = \frac{dr}{r.d\theta}$$

como se pode concluir a partir da figura 2.

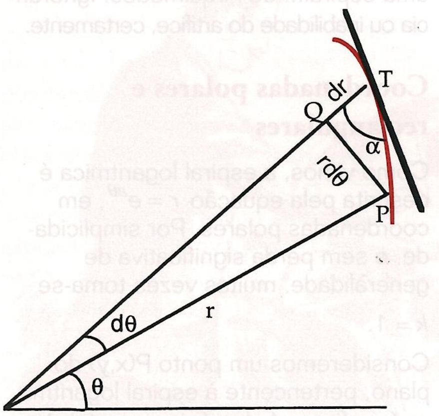


figura 2

Logo, $\frac{dr}{d\theta} = r.ctg\alpha$. Assim,

$ar = r.ctg\alpha$, ou seja, $a = ctg\alpha$, em que α é o ângulo que o raio vector faz com a tangente à curva em T.

Equiangularidade

Como referimos na introdução, Descartes designou a espiral logarítmica como espiral equiangular, em virtude de ser constante o ângulo determinado por um raio vector que intersecte a curva em qualquer ponto e a tangente à curva nesse ponto. Com vista a provar esta propriedade, suponhamos que OP, OQ, OR,... são raios igualmente espaçados numa secção arbitrária da curva. Os valores correspondentes de θ, digamos, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...$ estão em progressão aritmética.

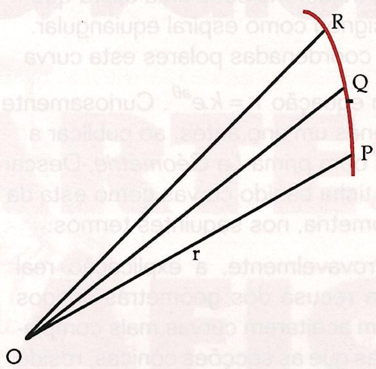


figura 3

Ora, os raios respectivos, digamos, r_1, r_2, r_3,... estão em progressão geométrica (por esta razão, a curva também se designa como espiral geométrica). De facto,

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{k.e^{a\theta_{n+1}}}{k.e^{a\theta_n}} = e^{a(\theta_{n+1}-\theta_n)}.$$

Como $\theta_{n+1} - \theta_n$ é constante (porque os ângulos estão em progressão aritmética) também aquele quociente é constante. Portanto, os triângulos OPQ, OQR,... são semelhantes. Se tomarmos P, Q e R suficientemente próximos, os ângulos OPQ e OQR aproximar-se-ão arbitrariamente dos ângulos entre as tangentes à curva e os raios OP, OQ, OR,... Mas os ângulos OPQ, OQR,... são iguais. Logo, no limite, o ângulo entre a tangente à curva e o raio vector é constante.

Rectificação

Em 1645, Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileu, rectificou a logística (outro nome da espiral logarítmica!). Mostrou que o comprimento do arco da espiral de *P* até ao pólo, *O*, é igual ao comprimento do segmento *PT* da tangente à espiral em *P*.

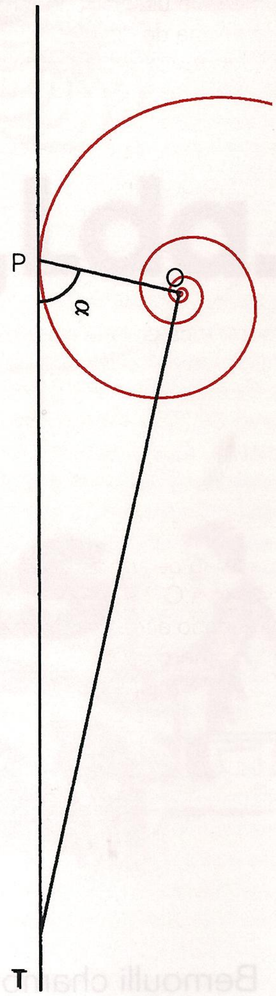


figura 4

Este resultado foi verdadeiramente espantoso na época. Recorde-se que o próprio Descartes havia afirmado apenas sete anos antes que "as razões entre linhas rectas e curvas não são conhecidas, e eu acredito que não possam ser descobertas por mentes humanas". Ainda hoje nos deleitamos nesta aparente aporia: o comprimento de um arco de espiral, definido por um dos seus pontos e pelo pólo, é finito embora se exijam infinitas revoluções para se "atingir" o pólo! Esta situação motivou o seguinte comentário a John Wallis, em 1698:

> *Habes itaque curvam interminabilem terminatae rectae aequalum*, quer dizer, tens assim que uma curva interminável é igual a uma recta determinada.

Vejamos uma "prova" informal desta propriedade usando uma argumentação próxima da de Torricelli. Podemos dividir a curva em unidades de ângulo, pelo que, sendo *c* o comprimento de uma parte, as partes sucessivas têm comprimentos ck, ck^2, ck^3,... Assim sendo, o comprimento deste arco de espiral até ao pólo será dado pela soma da série $\sum_{j\geq 0} ck^j$. Ora, esta série é geométrica porque $k<1$ (estamos a dividir a curva em secções em que os arcos são progressivamente mais pequenos, até ao pólo). Logo, a série é convergente.

Gnomones

Para Herão de Alexandria (cerca do 1° século a.C.), um gnomon é aquilo que, quando acrescentado a qualquer coisa, número ou figura, torna o todo semelhante àquilo a que é acrescentado. Herão mostrou que em qualquer triângulo *ABC*, o triângulo *ABD* é um gnomon do triângulo *BCD* se $\angle CBD = \angle A$.

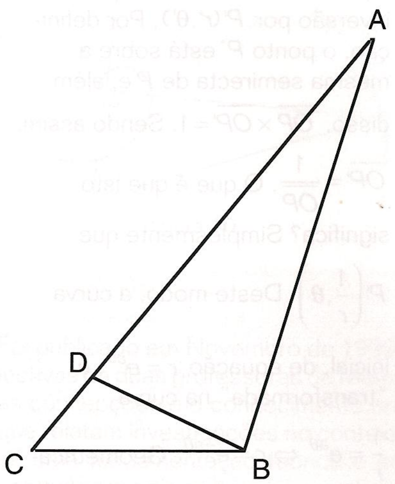


figura 5

Gnomones rectangulares

Consideremos o rectângulo de ouro *ABCD* (i.e. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\phi}{1}$) e o corte de ouro *E*. O rectângulo *EBCF* é, ele mesmo, um rectângulo de ouro, sendo *G* um corte de ouro, e assim sucessivamente. Deste modo, podemos construir uma infinidade de rectângulos de ouro. Esbocemos os quartos de circunferência nos quadrados associados aos sucessivos rectângulos de ouro.

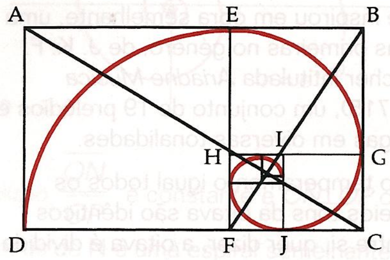


figura 6

Obtemos assim uma espiral logarítmica de pólo *O* (o rectângulo limite!) formada pela adjunção dos quartos de circunferência. Informalmente, podemos constatar que:

(i) a espiral passa pelos cortes de ouro

(ii) os lados do rectângulo não são tangentes à curva (apenas aproximadamente)

(iii) as diagonais [*AC*] e [*BF*] são perpendiculares

(iv) os pontos *E*, *O* e *J* são colineares, bem como os pontos *G*, *O* e *D*

(v) [*EJ*] e [*DG*] são perpendiculares

(vi) a espiral é invariante por dilatação ou contracção de escala

(vii) $\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OF}} = \ldots$ e existem infinitos triângulos semelhantes: [*AOB*]~[*BOC*]~[*COF*]~... ou [*ABC*]~[*BCF*]~[*CFH*]~...

Neste caso, as áreas dos triângulos são iguais a metade das áreas dos rectângulos de ouro correspondentes.

Construção (aproximada) da espiral com régua e compasso

Seja a espiral logarítmica de equação $r = k.e^{\theta.ctg\alpha}$, de pólo *O*. Tomemos os raios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ separados entre si de $\frac{\pi}{2}$ radianos i.e.

$$\overline{OA} = k.e^{\theta.ctg\alpha}$$

$$\overline{OB} = k.e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).ctg\alpha}$$

$$\overline{OC} = k.e^{(\theta+\pi).ctg\alpha}.$$

Então:

$$\overline{OB}^2 = \left(k.e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)ctg\alpha}\right)^2 =$$

$$= k^2.e^{(2\theta+\pi)ctg\alpha} = \overline{OA}.\overline{OC}$$

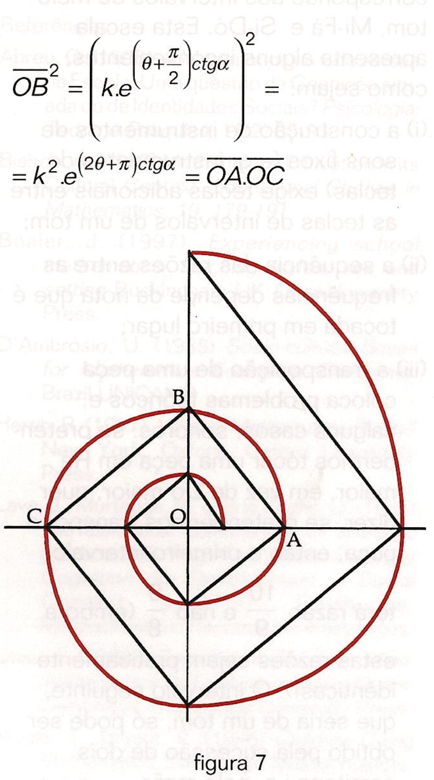


figura 7

Donde, [*OB*] é meio proporcional entre [*OA*] e [*OC*], o que significa que o ângulo *ABC* é recto. Por conseguinte, a espiral rectangular é um bom "esqueleto" para a espiral logarítmica em que os arcos de espiral são arcos de circunferência.

A escala bem temperada

A escala musical denominada diatónica é composta por cinco intervalos de um tom e dois intervalos de meio tom. Para o diapasão de $Lá_3$ = 440 Hz (trata-se do Lá acima do Dó central no piano) temos as seguintes frequências para esta oitava:

Dó - 264 Hz	Sol - 396 Hz
Ré - 297 Hz	Lá - 440 Hz
Mi - 330 Hz	Si - 495 Hz
Fá - 352 Hz	Dó - 528 Hz

Aos intervalos de um tom, correspondem as razões (entre as frequências dos extremos do intervalo) $\frac{9}{8}$, para os intervalos Dó-Ré, Fá-Sol e Lá-Si, e $\frac{10}{9}$, nos restantes dois casos, ou seja, Ré-Mi e Sol-Lá. A razão $\frac{16}{15}$ corresponde aos intervalos de meio tom, Mi-Fá e Si-Dó. Esta escala apresenta alguns inconvenientes, como sejam:

(i) a construção de instrumentos de sons fixos (e.g. instrumentos de teclas) exige teclas adicionais entre as teclas de intervalos de um tom;

(ii) a sequência das razões entre as frequências depende da nota que é tocada em primeiro lugar;

(iii) a transposição de uma peça coloca problemas teóricos e, nalguns casos, sonoros: se pretendermos tocar uma peça em Ré maior, em vez de Dó maior, quer dizer, se pretendermos transpor a peça, então o primeiro intervalo terá razão $\frac{10}{9}$ e não $\frac{9}{8}$ (embora estas razões sejam praticamente idênticas!). O intervalo seguinte, que seria de um tom, só pode ser obtido pela sucessão de dois semitons i.e. pela razão $\frac{256}{225}=\frac{16}{15}\times\frac{16}{15}$. Porém, esta razão subentende um intervalo que não pertence a esta escala!!

Em 1691, Andreas Werckmeister, construtor de órgaos, sugeriu uma escala alternativa à diatónica para contornar os seus inconvenientes: a escala bem (ou igualmente) temperada. No entanto, Werckmeister não foi o inventor desta escala já que em 1590 o príncipe chinês Isai-yu expôs correctamente os princípios do temperamento igual. O mesmo fez Mersenne em 1635. No entanto, foi Johann Sebastian Bach (1585-1750) quem popularizou o temperamento igual na composição musical pelo célebre *Das Wohltemerierte Clavier*, usualmente traduzido como *Cravo Bem Temperado*, colectânea de 24 prelúdios e fugas em todas as tonalidades maiores e menores. Os dois cadernos em que estavam agrupados estes 24 prelúdios e fugas datam de 1722 e 1744, embora tenham sido publicados postumamente em 1801. Refira-se de passagem que J. S. Bach se inspirou em obra semelhante, uma das primeiras no género, de J. K. F. Ficher intitulada *Ariadne Musica* (1715), um conjunto de 19 prelúdios e fugas em diversas tonalidades.

No temperamento igual todos os meios tons da oitava são idênticos entre si, quer dizer, a oitava é dividida em 12 intervalos iguais de meio tom. Deste modo, a razão das frequências dos semitons é $\frac{\sqrt[12]{2}}{1}$. Naturalmente, a oitava obtém-se "adicionando" os 12 semitons: $\left(\frac{\sqrt[12]{2}}{1}\right)^{12}=\frac{2}{1}$.

Adoptando um determinado diapasão (e.g. Lá = 440 Hz) pode-se estabelecer um quadro de notas com as respectivas frequências a partir do factor $\sqrt[12]{2}=1{,}059463094$.

Por exemplo,

$$440\times\sqrt[12]{2}=466Hz\ \ (Lá\#_3\ ou Sib_3)$$
$$466\times\sqrt[12]{2}=494Hz\ \ (Si_3)$$
$$440\div\sqrt[12]{2}=415Hz\ \ (Sol\#_3\ ou Láb_3)$$

Pelo que foi dito anteriormente, fica claro que as notas da escala bem temperada se podem representar

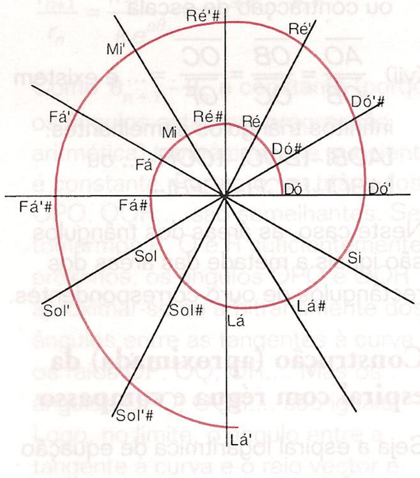


figura 8

numa espiral logarítmica. Uma vez que a oitava compreende 12 intervalos iguais, o ângulo giro tem que ser dividido em 12 partes iguais, pelo que, as notas estão separadas entre si por intervalos de 30°. Assim, para fazer a transposição de uma peça basta efectuar uma rotação da espiral de modo a que a tonal coincida com o eixo horizontal.

Qual é o ângulo característico desta espiral? Ora, sabe-se que para a oitava $\frac{r_1}{r_2}=2$ e $\theta_1-\theta_2=2\pi$.

Donde, $\frac{r_1}{r_2}=e^{(\theta_1-\theta_2).ctg\alpha}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2=e^{2\pi.ctg\alpha}\Leftrightarrow tg\alpha=\frac{2\pi}{\ln 2}$$

Logo, o ângulo α é aproximadamente igual a 83° 42'.

Curvas derivadas da espiral equiangular

Uma das maravilhas notáveis da espiral logarítmica é a sua invariância relativamente a alguns métodos clássicos para obter curvas a partir de curvas. Vejamos dois exemplos significativos.

(i) Inversa. A transformação geométrica denominada inversão foi apresentada por Steiner em 1824. Consideremos, em coordenadas polares, um ponto $P(r,\theta)$ e designemos o seu transformado pela inversão por $P'(r',\theta')$. Por definição, o ponto P' está sobre a mesma semirecta de P e, além disso, $\overline{OP}\times\overline{OP'}=1$. Sendo assim, $\overline{OP'}=\frac{1}{\overline{OP}}$. O que é que isto significa? Simplesmente que $P'\left(\frac{1}{r},\theta\right)$. Deste modo, a curva inicial, de equação $r=e^{a\theta}$, é "transformada" na curva $\frac{1}{r}=e^{a\theta}\Leftrightarrow r=e^{-a\theta}$. Geometricamente (ver figura 9 da pág. ao lado), admitindo que a>0, temos

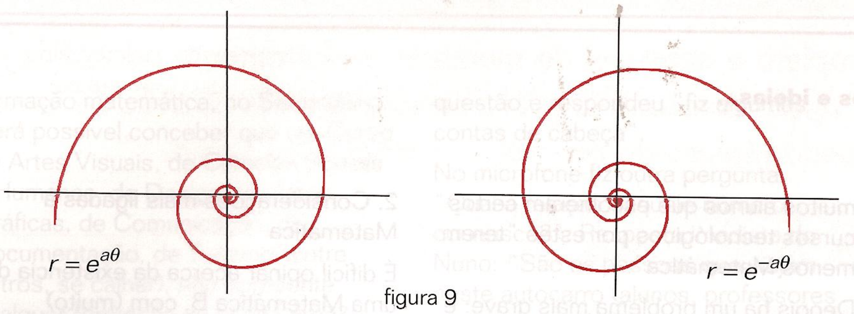


figura 9

que: A espiral logarítmica é, pois, uma curva *analagmática*, ou seja "coincide" com a sua inversa.

(ii) Evoluta. Foi Huygens (1673) quem primeiro estudou este método de obter uma nova curva a partir do *locus* do centro de curvatura de uma dada curva. Tucker (1864) prolongou as investigações de Huygens.

Tomemos um ponto *P* na espiral. Seja α o ângulo (constante) entre *OP* e a tangente à curva em *P*; *PN* a normal à curva em *P* (quer dizer, *PN* é perpendicular à tangente) de tal modo que $ON \perp OP$. Então $ONP = \alpha$. Como a razão $\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$ é constante e $ON \perp OP$ o *locus* de N é uma espiral semelhante (logo igual) à original. Como o ângulo $ONP = \alpha$, PN é tangente à "nova" espiral e normal à original. Portanto, a nova espiral é a evoluta da primeira, sendo *N* o centro de curvatura da primeira relativamente a *P*.

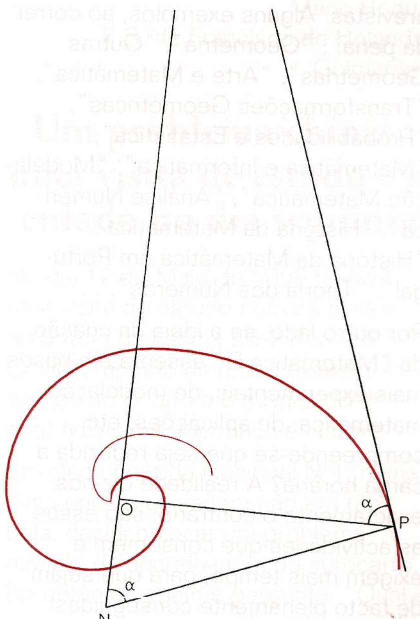


figura 10

Na pedra tumular de Bernoulli pode ler-se a respeito da espiral, *Eadem Mutata Ressurgo*, quer dizer, "embora mude ressurjo imutável". Esta é uma alusão evidente a essa invariância relativamente a transformações que, no caso de outras curvas, modificam tremendamente a curva original. Não admira, pois, que *Bernoulli* tenha designado esta curva como *spira mirabilis*, forma latina de "espiral maravilhosa"!

Nota:

As figuras nº 4 e 9 são extraídas do livro "Geometria - Temas actuais" de E. Veloso

Referências bibliográficas

Fauvel, John e Gray, Jeremy (1987). *The History of Mathematics - A Reader*. Open University.

Ghyka, Matila (1977). *The Geometry of Art and Life*. Dover Pub.

Huntley, H. E. (1970). *The Divine Proportion*. Dover Pub.

Lawrence, J. Dennis (1972). *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Pub.

Lockwood, E. H. (1961). *A Book of Curves*. Cambridge University Press.

Maor, Eli (1994). *e - The Story of a Number*. Princeton University Press.

Paulo A. J. Oliveira
Dep. Educação da FCUL

Se até a Barbie... (cont. da pág. 14)

Notas

1 Acrescentado pela autora, à frase de Jean Piaget.

2 Investigação realizada no Brasil, por Nunes e outros (1993), com miúdos de rua que vendem chocolates e frutas como meio de sobrevivência.

3 Lave (1988) investigou a Matemática usada por adultos que faziam compras num supermercado.

Referências

Abreu, G. (1995). A Matemática na vida versus na Escola: Uma questão de Cognição situada ou de Identidades Sociais? *Psicologia: Teoria e Pesquisa*. 11(2):85-93.

Bishop, A. (1988) Mathematics Education in its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics, 19, 179-191*

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting*. Buckingham, UK: Open University Press.

D'Ambrósio, U. (1985) *Socio-cultural Bases for Mathematics Education*. Campinas, Brazil.UNICAMP

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics Really?* New York. Oxford. Oxford University Press.

Lave, J., Murtaugh, M. e de la Rocha, O. (1984) The dialectical construction of aritmetic practice, in B. Rogoff e L J (eds) *Everyday Cognition :Its Development in Social Context*, pp.67-97. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everydat life*. Cambridge. Cambridge University Press.

Nunes, T., Bryant, P. (1996) *Children Doing Mathematics*, Cambridge, Massachusetts, T.J. Press.

Nunes, T., Schliemann, A., e Caraher, D.(1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. New York: Cambridge Unversity Press.

Pombo, O. (1999). A Escola, a Recta e o Círculo, *Educação e Matemática*, 50, 3-10.

Schoenfeld, A. (1989).Problem Solving in Context(s). In R. I. Charles and E. A. Silver, (Eds). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. pp. 82-92. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Elsa Fernandes,
Universidade da Madeira

Quadrante

Foi publicado em Novembro de 1999 o Volume 7, nº 1 da Quadrante. Neste número pode ler um artigo sobre as práticas lectivas de duas professoras de Matemática (3º ciclo e secundário) num contexto de reforma curricular e a sua relação com as concepções e o conhecimento profissional sobre a disciplina, o currículo, a aprendizagem e a instrução. Dois artigos que relatam investigações no contexto de disciplinas de Matemática no 1º ano de cursos superiores. Num deles procura-se uma fundamentação teórica e empírica de que as actividades de aplicação e modelação matemática constituem contextos propícios a uma aprendizagem significativa da matemática. No outro procura-se entender o discurso de alguns professores sobre o tema taxas de variação. A revista contém ainda a recensão do livro "Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas".

Pontos de vista, reacções e ideias...

P'ra melhor, está bem, está bem ...

Este texto surge na sequência da discussão relativa ao pedido de parecer da APM, acerca da proposta de Revisão Curricular do Ensino Secundário. O tempo que foi dado ao grupo responsável pela elaboração desse parecer foi bastante curto e não possibilitou uma discussão alargada no seio da nossa associação, como seria desejável. Mas daqui a nada, o texto estará nas nossas Escolas e a discussão deve prosseguir e ninguém se deve colocar à parte da mesma. Por isso aceitei colocar estas pequenas achegas na Revista, esperando contribuir para o despoletar de uma discussão entre os sócios, que se deseja ampla e sobretudo fértil.

Como ponto prévio gostaria de dizer que não consigo situar-me claramente num dos lados da "barricada" que parece erguer-se relativamente ao Secundário: diversificar ou não, de forma bem vincada, os percursos dos alunos? Sou sensível a alguns argumentos que tenho visto serem utilizados na defesa de um e de outro ponto de vista. Mas aqui o que nos é pedido é "apenas" uma discussão em torno de uma proposta e a minha contribuição vai nesse sentido.

1. Considerações de carácter mais geral:

As linhas orientadoras para o ajustamento curricular enfermam, do meu ponto de vista, de um pressuposto profundamente errado: no fim do 9º Ano, com 14 ou 15 anos, um aluno estará pronto a dizer: "Quero ir trabalhar daqui a 3 anos!" ou "Quero ir para a Universidade!". Quem acredita nisto, ainda?

A minha experiência diz-me que as opções precoces, não sustentadas por um amadurecimento psicológico pelo qual a idade é bastante responsável, são muitas vezes motivadas por experiências pessoais potencialmente enganadoras; por exemplo, conheço muitos alunos que escolheram certos cursos tecnológicos por estes "terem menos Matemática".

Depois há um problema mais grave: e se o aluno é tão consciente que ... não se quer decidir tão cedo? Irrita-me sobremaneira a forma como o documento parece fazer uma leitura do universo dos nossos alunos, como uma mistura distinta de "azeite/água", separados de forma "natural" e a conviverem de forma estanque num mesmo "recipiente".

Se se pretende um Ensino Secundário que não esteja desfasado do mundo que o rodeia, o percurso dos alunos deverá ser tendencialmente mais "híbrido" - o que os espera "lá fora" é um mundo onde o "trabalho" e a "formação" andam sempre de mãos dadas e as mudanças constantes com que se vão confrontar não se compadecem com uma excessivamente restrita formação numa dada área. A abertura à aprendizagem permanente e a formação, ainda que básica, num largo domínio de saberes, será mais útil que uma especialização de sentido único, se calhar numa área e com ferramentas que pouco tempo depois estão completamente ultrapassadas!

Neste contexto, será para mim completamente descabida a "disciplina de especificação" do 12º ano dos cursos tecnológicos.

Admitindo como intocável a separação preconizada no texto entre os percursos académicos dos alunos, penso que seria preferível que ela fosse feita mais tarde (a partir do 11º ano), sempre com um tronco comum e baseada em disciplinas de opção, respeitando sempre as opções individuais e garantindo pontes entre os vários percursos, que permitissem "correcções" ao longo do Ciclo e não apenas no seu termo, como é sugerido.

Aliás, sobre este ponto surgem-me várias dúvidas: que "permeabilidade" está prevista, no tal ano "mais um", para além do 12º? Apenas entre cursos gerais - cursos tecnológicos? Ou de uns para os outros?

2. Considerações mais ligadas à Matemática

É difícil opinar acerca da existência de uma Matemática B, com (muito) menor carga lectiva, para os Cursos tecnológicos, sem saber o que se pretende - é a "A" mais curta, ou "outra" completamente diferente?

Uma vez mais admitindo como intocável a separação preconizada, parece-me que ela ocorre cedo demais e penaliza em excesso os alunos que pretendam seguir os cursos tecnológicos. Uma "cadeia" de disciplinas opcionais, em cada ano, poderia contribuir para um atenuar dessas diferenças e, uma vez mais, permitir eventuais "correcções" de percursos sem drásticas consequências no trajecto dos alunos. É difícil, mas possível, ajustar estas opções respeitando as cargas horárias previstas. Alguns exemplos, ao correr da pena: : "Geometria", "Outras Geometrias", "Arte e Matemática", "Transformações Geométricas", "Probabilidades e Estatística", "Matemática e Informática", "Modelação Matemática", "Análise Numérica", "História da Matemática", "História da Matemática em Portugal", "Teoria dos Números", ...

Por outro lado, se a ideia da criação da "Matemática B" assenta em bases mais experimentais, de modelação matemática, de aplicações, etc., compreende-se que seja reduzida a carga horária? A realidade diz-nos exactamente o contrário: são essas as actividades que consomem e exigem mais tempo, para que sejam de facto plenamente conseguidas!

E já agora: qual a lógica de, num mesmo documento, ser defendida a criação da Matemática A e B e da extinção do Português A e B? Se esta separação não resultou, faz sentido transportar o "modelo" para outras disciplinas? Ou então, terá aquela disciplina um "estatuto" diferente da nossa? E porquê?

Inadmissível, incrível, incoerente ... o retirar a certos cursos toda e qualquer formação matemática, no Secundário. Será possível conceber que um Curso de Artes Visuais, de Ciências Sociais e Humanas, de Design, de Artes Gráficas, de Comunicação, de Documentação, de Turismo (entre outros, se calhar), não apresente qualquer formação na nossa área? Será que ainda se confunde Matemática com Aritmética? Que lindo "enterro" fizeram aos "Métodos Quantitativos"... quando se falou que iam acabar, sempre pensei que isso se referia ao modo como funcionavam.

Que seja dada pelo menos a estes alunos a possibilidade (em cada ano) de opcionalmente frequentarem disciplinas ligadas à Matemática. Alguns exemplos, ao correr da pena: "Geometria", "Arte e Matemática", "Transformações Geométricas", "Probabilidades e Estatística", "Estatística", "História da Matemática", "História da Matemática em Portugal", ...

Mário Roque
E.S. de Francisco de Holanda, Guimarães

Um problema chinês, uma visita de estudo e o enfado no dia seguinte

No dia 12 de Maio de 1999 realizei uma visita de estudo com os alunos do 9º ano da Escola EB 2 Pêro da Covilhã (apesar do nome existem 4 turmas do 8º ano e 3 turmas do 9º ano) à Batalha, Alcobaça e Nazaré.

Em plena Estrada Nacional Nº1, numa zona onde a paisagem não era tão bela, decidi colocar um problema através da aparelhagem do autocarro. Fiz então a seguinte pergunta: "Qual é o menor número que dividido por 5 dá resto 4, por 6 também dá resto 4 e por 7 dá resto 1?"

Alguns alunos manifestaram que "não queriam pensar em problemas de Matemática", outros pediram que repetisse o problema.

Depois de algumas respostas ao acaso e após poucos minutos (4 ou 5), o Nuno deu a resposta correcta. Perguntei-lhe como tinha resolvido a questão e respondeu "fiz algumas contas de cabeça".

No microfone fiz outra pergunta: "Qual a relação daquele número connosco?". Resposta imediata do Nuno: "São as pessoas que viajam neste autocarro (alunos, professores e o motorista)". Durante a viagem não falámos mais do problema.

Chegámos à Covilhã por volta da 1 hora do dia 13. Na manhã desse dia, na turma do Nuno, o 9º 2 (que não é considerada a melhor turma da escola) propus alguns exercícios sobre os conteúdos que estávamos a tratar, mas como os alunos (e o professor) não se encontravam nas melhores condições físicas, o trabalho não avançava. Começámos a falar do problema resolvido pelo Nuno na véspera (aí notei algum orgulho da turma em relação ao colega), e entre alguns bocejos e espreguiçadelas disfarçadas, passou-se resumidamente o que se segue.

Verificámos que o número indicado pelo Nuno era realmente o menor naquelas circunstâncias, testando os números 4, 9, 14, ..., 59, 64 que são aqueles que satisfazem a primeira condição (o resto da divisão por 5 ser 4).

Então perguntei: "Haverá outros?". Vários alunos responderam afirmativamente. Em seguida lancei a questão de se haveria poucos, ou muitos, e quantos. O Nuno respondeu imediatamente: "Uma infinidade deles". Ficámos então com uma afirmação que merecia ser explorada e pedi para me indicarem, pelo menos, mais um número naquelas condições. O Solano (ao qual os colegas chamam Chico, sem ser Francisco), disse 128, logo os outros colegas disseram que o resto da divisão por 5 é 3 e por isso o número não servia. Eu ajudei: "O 274". Feitas as divisões houve sorrisos no ar. Pedi-lhes outro, houve silêncio. Ajudei novamente: "O 484". Aí seguiu-se um coro 694, 904, 1114, etc. Perguntei à turma como obtiveram os números: "Adicionámos 210", disseram eles. Sobre o significado 210 responderam que era o produto de 5 por 6 e por 7, e o Nuno disse: "É o mínimo múltiplo comum de 5, 6 e 7". Ambos tinham razão.

O desafio seguinte foi encontrarem uma expressão matemática (com uma variável) que gerasse estes números. Com alguma dificuldade chegámos a $64+210x$, $x=0,1,2,3,...$ Disse-lhes que, preferencialmente, se costumava usar a letra n para representar uma variável que toma apenas valores inteiros e então escrevi $64+210n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Estávamos perante o termo de ordem n de uma sucessão, assunto que os alunos tratarão no Ensino Secundário.

Aqui poderia/deveria ter provado que os termos desta sucessão estão nas condições do problema, pois

$64+210n=5(12+42n)+4$
$64+210n=6(10+35n)+4$
$64+210n=7(9+30n)+1$.

Um outro problema que se pode colocar é o de como mostrar a estes alunos que os termos desta sucessão são os únicos números que divididos por 5 e por 6 dão resto 4 e divididos por 7 dão resto 1.

Pedi para verificarem se entre 64 e 274 não haveria outro número com aquelas propriedades.

Listámos possíveis candidatos 69, 74, ... 264, 269. Aqui dividimos tarefas e cada aluno testou dois destes números. Alguns alunos, mais preguiçosos, quiseram fazer os testes usando a calculadora. Discutimos, então, como encontrar o resto de uma divisão inteira com a calculadora.

No final referi que estivémos a tratar aquilo que em Matemática é denominado por "Teorema chinês dos restos" e que o professor deles não conheceu enquanto aluno. Sobre o trabalho árduo para uma só pessoa ou máquina falei-lhes da resolução do problema RSA-129, para a qual foi necessário o trabalho de centenas de pessoas e máquinas, e das recentes descobertas de números primos que foram e continuam a ser fruto do trabalho de milhares de pessoas e seus computadores.

Carlos Farias
Esc. Sec. Frei Heitor Pinto, Covilhã

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível na revista

Eduardo Veloso

Páginas APM e Fórum Pedro Nunes

Breve entrevista por e-mail

Há mais de dois anos a APM apresentou-se a um dos concursos do Nónio Séc. XXI com um projecto relativo às suas páginas na Internet e ao projecto Fórum Pedro Nunes. O projecto da APM foi aprovado e todo um trabalho de planeamento, instalação do site e sua manutenção tem vindo a ser desenvolvido. Os resultados estão à vista de todos no endereço http://www.apm.pt. Embora um conjunto de sócios da APM tenha contribuído, com as suas opiniões, sugestões e trabalho para a situação actual, e o Grupo de Trabalho da Internet tenha sido recentemente reforçado, é indubitável que sem o entusiasmo e trabalho continuado da Alexandra Pinheiro e do Fernando Nunes dificilmente poderíamos entrar em tão boas condições no último ano do projecto. Foi portanto a estes dois colegas que colocamos algumas questões sobre a presença da APM na Internet.

E.M. Está a fazer dois anos que a APM concorreu e ganhou o concurso do Nónio Séc. XXI e avançou para um projecto de páginas na WEB e para a criação do Fórum Pedro Nunes. De uma maneira geral, qual o balanço que fazem do trabalho realizado nestes dois anos, em relação às expectativas e ao projecto apresentado ao Nónio?

Fernando e Alexandra. Quando o projecto se iniciou, sabíamos que se iria trabalhar num campo que ainda estava, e está, por desbravar. Este facto relativiza as espectativas existentes à partida, em relação à actividade desenvolvida e aos resultados obtidos. De facto, é isso mesmo que temos verificado. A par com alguns atrasos na realização de intenções expressas no projecto, temos "descoberto" outras acções que se impuseram como importantes na sua execução. De qualquer modo, pode afirmar-se que o essencial das páginas www e do Fórum Pedro Nunes está em funcionamento, de acordo com o estabelecido no projecto inicial. Parece-nos que a utilização das várias hipóteses de trabalho que as páginas proporcionam está em constante evolução e foi um passo qualitativo e significativo no aumento de interacção entre os que se interessam pela Educação Matemática, em Portugal ou no estrangeiro. No entanto, ainda estamos longe de ver todas as suas potencialidades rentabilizadas, a nível da informação e comunicação entre os professores de Matemática. Por outro lado, tem sido muito gratificante verificar a quantidade de colegas que contribuem, de modo esporádico ou sistemático, para a vida do local virtual da APM.

E.M. Quais as principais linhas de trabalho para este ano?

Fernando e Alexandra. No geral, podemos dizer que vamos procurar dinamizar e expandir os espaços já existentes nas nossas páginas (espaços dos Núcleos e Grupos de Trabalho, Pergunta Agora, Fóruns de Discussão...) e criar outros (espaços de histórias na sala de aula, propostas de tarefas matemáticas, tradução de páginas www, glossário Português/ Inglês de Matemática e Educação Matemática,...).
Como este ano é o Ano Mundial da Matemática, assume particular importância a actividade que pode ser realizada via Internet relacionada com este assunto. Além da disseminação de informação e da acessibilidade a recursos na rede, estão a ser equacionadas várias iniciativas complementares que podem passar pela realização de eventos específicos, divulgados a partir da rede. Também está em desenvolvimento a criação de condições para o local da APM ser um espaço de trabalho associativo, permitindo que os Núcleos e Grupos de Trabalho o possam utilizar e os sócios tenham à sua disposição um meio rápido de contacto e informação.

foto: Eduardo Veloso

Uma cena habitual na sala dos computadores da sede nacional da APM: Alexandra e Fernando Nunes discutem as alterações a fazer nas páginas web da associação.

E.M. Tencionam concorrer de novo ao Nónio Séc. XXI? Apenas para aprofundamento do trabalho nas mesmas linhas ou existem outras ideias?

Fernando e Alexandra. Se existir um concurso que possa acolher o continuar do projecto "Local virtual da APM e Forum Pedro Nunes", achamos de todo o interesse apresentar uma proposta nesse sentido. Por um lado, o aprofundamento de potencialidades já existentes é importante. Por outro, sabemos já que vamos prosseguir novas ideias decorrentes do normal desenvolvimento do local virtual e de aspectos que irão surgir. Neste caso está a nova responsabilidade da APM em garantir as páginas da Federação Europeia das Associações de Professores de Matemática. A juntar a tudo isto, parece evidente que neste campo irão inevitavelmente surgir oportunidades que ainda não entrevimos, mas para as quais devemos estar sempre atentos. ■

Ensino da Matemática

perspectivas de professores do 2º ciclo do ensino básico

António Manuel Guerreiro

Os professores perspectivam uma maior ligação do ensino da Matemática à Matemática Aplicada e os alunos esperam encontrar na sala de aula de Matemática um clima favorável à aprendizagem e a utilização de estratégias diversificadas.

Contexto de pesquisa

Na continuação do artigo apresentado na revista Educação e Matemática nº 53 e inserindo-se no mesmo contexto de pesquisa a relevância dos estudos agora apresentados reside no trabalho de campo desenvolvido junto de professores (e nalguns casos de alunos) do 2º ciclo do Ensino Básico, relativamente a um conjunto de temáticas relacionadas com a utilização de Recursos no Ensino da Matemática, com as Histórias de Vida, com as Concepções e Atitudes relativas à Matemática e ao seu Ensino e, ainda, relativamente à Relação Pedagógica.

A utilidade da Matemática na vida quotidiana parece ser um dos factores que mais influenciam as perspectivas dos professores. Estes, preocupam-se em ligar a Matemática à vida quotidiana e a reforçar o carácter utilitarista da Matemática, neste nível de ensino.

As deficiências relacionadas com o ensino/aprendizagem da Matemática são atribuídas, pelos professores, às condições de ensino/aprendizagem, nomeadamente à escassez de material didáctico, à natureza das turmas (numerosas e heterogéneas) e aos insuficientes conhecimentos dos alunos. Apesar desta responsabilização exterior, parecer existir, por parte dos professores, um elevado nível de auto-conhecimento e de autocrítica em relação à falta de formação específica e motivação para a inovação das práticas.

Pareceu-nos oportuno divulgar alguns aspectos dos resultados de trabalhos realizados, no âmbito da disciplina de Seminário Científico Pedagógico do Curso de Formação de professores (2º Ciclo), variante Matemática/ Ciências da Natureza, no final do ano lectivo 1997/98, que se centravam nas perspectivas dos professores sobre o ensino da Matemática.

Inovação e eficácia profissional

Os trabalhos têm como denominador comum a recolha de informação junto de professores de Matemática e alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico. Desenvolveram-se segundo contextos diferenciados. O trabalho realizado por Ana Luísa Gonçalves (1998) procurou conhecer as perspectivas de professores do 2º Ciclo do Ensino Básico acerca da relação professor/ aluno, com incidência na disciplina/ indisciplina, no contexto da sala de aula. Aplicou uma entrevista semi-estruturada a uma professora e a um professor e efectuou uma análise de conteúdo dos dados obtidos. Este estudo mostrou que ambos os professores, apesar de encararem a profissão de modo diferente, se encontram motivados para a docência, manifestando orgulho do seu trabalho e preocupação ao nível da eficácia pessoal e profissional do seu desempenho. Para promover a disciplina na sala de aula, procuram manter os alunos ocupados. Apesar disso, existem alunos indisciplinados, que têm como principal objectivo "chatear". Para contrariar estas atitudes, utilizam como estratégia a mudança de lugar na sala por forma a deixar o aluno isolado. Em termos afectivos, a professora tenta conquistar os alunos progressivamente, o que leva os alunos a considerarem-na "fixe". O professor mantêm uma relação distante ao longo de todo o ano lectivo, assumindo uma relação fria com os alunos.

Ambos os professores, parecem reflectir sobre a sua acção em termos de relação disciplinar, assumindo alguma autocrítica, quer em relação a algumas atitudes mais autoritárias, quer em relação a algumas estratégias utilizadas em situação real de indisciplina.

Num outro estudo, Maria Leonel Abreu (1998) procurou compreender a perspectiva dos professores em relação à utilização de recursos (entendidos de forma abrangente) na aula de Matemática. Para tal entrevistou uma Professora do 2° Ciclo com 5 anos de serviço. Tentando caracterizar profissionalmente a professora participante neste estudo, saliente-se que não faz parte de qualquer associação ligada à Matemática, nem demonstra muito interesse pelo trabalho, de outros professores, apresentado em revistas e outros meios de comunicação, embora costume assistir a acções realizadas no Algarmat. Não utiliza materiais manipuláveis, nem tecnológicos. Utiliza, nas suas aulas, fichas, jogos (em fichas) e acetatos. Refere utilizar do Tangram, sem especificar a situação ou situações em que o faz. A utilização de algum deste tipo de material processa-se por imitação do modo como a professora ou um dos alunos exemplificou. Relativamente à avaliação destas actividades salientou a dificuldade em a fazer. Demonstra pouco interesse pelo trabalho interdisciplinar e pelo projecto da Área Escola. Considera a sua formação inicial positiva, apesar de sentir deficiências relativamente aos conhecimentos científicos, e valoriza a formação contínua se esta for sinónimo de novos "saber-fazer" e de conhecimentos articulados à prática.

Para justificar o seu desinvestimento em relação à utilização de recursos (manipuláveis e tecnológicos) a professora aponta causas exteriores, a configuração horária, a leccionação de diferentes níveis e a instabilidade profissional, bem como, a falta de recursos existentes na escolas ou a dificuldade de utilização dos mesmos, nomeadamente em relação aos recursos tecnológicos. Em termos globais, parece existir uma grande falta de motivação da professora face à utilização de recursos. Esta parece estar associada às dificuldades inerentes à falta de estabilidade profissional e à falta investimento profissional do professor relativamente à utilização de materiais manipuláveis e tecnológicos.

Tendo por base a longa experiência profissional da professora participante neste estudo, João José Eusébio (1998) procurou conhecer as perspectivas dos professores relativamente às suas práticas, às suas concepções e crenças. Para tal entrevistou uma professora de Matemática do 2° ciclo com 29 anos de serviço, formada em Engenharia Química pelo I.S.E.L.. A professora que gosta de Matemática desde miúda, principalmente de resolver problemas, optou pelo ensino da Matemática devido à inexistência de laboratórios de química no Algarve. Defende que a Matemática surgiu de necessidades históricas relacionadas com a medição, comparação e avaliação. Dentro da Matemática não tem preferência específica por nenhuma área, apesar de revelar alguma paixão pela álgebra. Diz que tenta não ser uma professora tradicional, mas defende a capacidade de memorização e o tipo de exigência do ensino tradicional. Esforça-se no entanto, por implementar situações de aprendizagem envolventes e criar um clima democrático na sala de aula. Actualmente preocupa-se com o baixo nível de preparação que os alunos trazem do 1° ciclo e com o baixo nível de exigência no 2° ciclo. Para esta professora o ensino/aprendizagem da Matemática caracteriza-se pelo desenvolvimento de capacidades de raciocínio, através da resolução de problemas e das actividades de manipulação. A avaliação é o campo que entende ser mais difícil no seu trabalho. Apesar de atribuir um peso elevado aos testes, defende que o sucesso dos alunos passa, essencialmente, pela atenção que estes dispensam nas aulas. Em termos globais, parece ser possível caracterizar esta professora como uma pessoa predisposta a implementar aulas centradas nos alunos e envolvendo um conjunto diversificado de estratégias. Contudo, a sua prática de muitos anos e as suas concepções sobre os conhecimentos dos alunos, leva-a a constantemente implementar aulas mais directivas, segundo os modelos tradicionais. Os diferentes testemunhos destes quatro professores reflectem uma vontade permanente de inovação e de eficácia profissional, apesar das, sempre difíceis, condições de implementação da mudança nas práticas educativas, quer por falta de equipamentos, quer por falta de formação.

Ligação da matemática ao quotidiano

Num outro conjunto de trabalhos, os alunos tentaram comparar as perspectivas dos alunos com as perspectivas dos professores de Matemática ou as perspectivas dos professores e alunos/futuros professores de Matemática com outros profissionais. Por exemplo Ana Paula Moreira (1998) tentou comparar as concepções dos alunos com as dos professores em relação à Matemática. Para tal entrevistou uma professora de Matemática do 2° ciclo e dois alunos de uma turma do 6° Ano. Relativamente à natureza da Matemática, quer a professora quer os alunos têm uma perspectiva utilitarista da disciplina. De acordo com a professora, no ensino da Matemática, devem ser implementadas estratégias variadas. Contudo esta diversificação não acontece devido à falta de equipamentos e às características das turmas (numerosas e heterogéneas). Quer para a professora quer para os alunos a avaliação em Matemática é o resultado de um conjunto de procedimentos: testes, caderno diário, assiduidade, pontualidade, comportamento, participação e relação aluno/aluno. Questionados sobre a aula de Matemática ideal, os alunos manifestarem uma grande aceitação da realidade actual e a professora perspectivou o funcionamento de laboratórios de Matemática, apetrechados com uma grande variedade de materiais didácticos, e turmas com menos alunos, agrupados segundo o seu desempenho.

Neste trabalho, as perspectivas dos alunos parecem coincidir com a perspectiva da professora. Num outro trabalho a autora Célia Barriga (1998) procurou caracterizar o modo como os professores entendem ensinar

Matemática e o modo como os alunos entendem aprender Matemática. Também parece existir alguma similitude entre perspectivas de professores e alunos. Para este trabalho foi elaborado um questionário, de respostas abertas, aplicado a 3 professores de Matemática e a 15 alunos de uma turma do 5º Ano. Tanto os professores como os alunos consideram a Matemática fácil. Para os professores, a Matemática não é difícil se os alunos se aplicarem e praticarem os exercícios. Para ensinar Matemática é necessário relacioná-la com o quotidiano, desenvolver as capacidades de análise, raciocínio, interpretação e organização, e ter em conta o relacionamento professor/aluno. Para os alunos, a Matemática é sempre o mesmo: números. Para aprender basta o livro, o caderno, estar com atenção às aulas e praticar em casa.

O insucesso escolar a Matemática deve-se, segundo a perspectiva dos professores, a vários aspectos: concepções transmitidas de geração em geração, extensão dos programas, assuntos que ficam por esclarecer e à falta de bases do 1º ciclo. Na perspectiva dos alunos, o insucesso escolar a Matemática deve-se à falta de atenção nas aulas, à falta de estudo e à dificuldade de alguns conteúdos. Para motivar os alunos, os professores defendem a ligação da Matemática ao quotidiano, mas os alunos esperam do professor a utilização dos materiais tecnológicos: vídeo e computador.

Muitos destes estudos, parecem apontar, como forma de motivar os alunos, a ligação da Matemática à vida quotidiana e aos interesses profissionais. Foi atendendo a este pressuposto que Ana Sofia Grosso (1998) estudou as perspectivas de três professores de Matemática, três alunos/futuros professores de Matemática, três alunos do curso de Línguas e Literaturas Modernas Português/Inglês e três profissionais da indústria hoteleira. Todos os participantes neste estudo entenderam ser a Matemática fundamental porque é útil para o dia a dia e desenvolve o raciocínio. Também consideraram que o insucesso na disciplina está associado à forma como é ensinada. Os alunos de Português/Inglês acham a Matemática detestável, demasiado exacta, não permitindo liberdade e só a utilizam ocasionalmente. Os profissionais da indústria hoteleira consideraram a Matemática indispensável, no entanto, na sua profissão afirmaram só a utilizar ocasionalmente. Os actuais e futuros professores de Matemática consideram a disciplina interessante. Do professor depende a percepção desse interesse. Por outro lado consideraram-na essencial para a sua actividade profissional.

Deste conjunto de trabalhos parece ser possível concluir que as representações, a propósito da Matemática, dos alunos, professores de Matemática e outros profissionais está bastante associada à utilidade na vida das comunidades. Os professores perspectivam uma maior ligação do ensino da Matemática à Matemática Aplicada e os alunos esperam encontrar na sala de aula de Matemática um clima favorável à aprendizagem e a utilização de estratégias diversificadas.

Referências

Abreu, M. L. (1998). *A motivação do Professor de Matemática face à utilização de recursos.* Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

Barriga, C. (1998). *O que se entende por ensinar/aprender Matemática?*. Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

Eusébio, J. J. (1998). *Concepções, Percurso e Práticas de um Professor de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico – Um Estudo de Caso.* Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

Gonçalves, A. L. (1998). *Relação Pedagógica.* Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

Grosso, A. S. (1998). *A Matemática – Diferentes Perspectivas.* Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

Moreira, A. P. (1998). *Confronto entre as Concepções dos Alunos e Professores sobre a Matemática.* Faro, Universidade do Algarve (texto policopiado)

António Manuel Guerreiro
Escola Superior de Educação
Universidade do Algarve

Materiais para a aula de Matemática

Vamos colorir mapas

Esta actividade pode ser um bom pretexto para, neste ano Mundial da Matemática, se falar de Matemática enquanto ciência.

Oa alunos podem ser encorajados, durante algum tempo, a colorir diversos mapas propostos pelo professor ou inventados por eles, a descobrirem quantas cores precisam para os colorir, a investigar em que condições é possível colorir só com duas cores, com três…, a sistematizar os processos encontrados para colorir com o menor número de cores.

A actividade pode ser apresentada a alunos de todas as idades, no 1º ciclo apenas a primeira página da ficha, no 3º ciclo e secundário a investigação pode ir mais além.

Após a investigação é possível tratar com os alunos o Problema das quatro cores relacionando-o com a história recente da Matemática.

Há muita informação disponível na Internet sobre o teorema das quatro cores e mesmo algum software que facilita as investigações. A partir do *MathForum* ou de *Math Archives* pode chegar até lá. Na ficha apresentamos um endereço que nos pareceu interessante como fonte de informação e recurso quer para os professores quer para os alunos mais velhos que tiverem acesso à Internet:

O livro *A experiência Matemática* da Editora Gradiva, apresenta, na página 351, de uma forma simples, o teorema das quatro cores e a discussão que lhe está associada da "validade" da utilização de computadores na demonstração matemática.

Na contra-capa desta revista refere-se de forma muito resumida a história e problemática deste teorema.

Adelina Precatado
Helena Amaral

Escola ....

Ano/Turma................ Data........................ Aluno(a)...

Vamos colorir mapas

1. Este é o mapa dos distritos de Portugal. Pinta o mapa de modo que 2 distritos com fronteiras comuns não tenham a mesma cor. Utiliza o número mínimo de cores.

Quantas cores foram precisas?

2. Experimenta com outros mapas, por exemplo o mapa de países da Europa ou mapas inventados por ti.

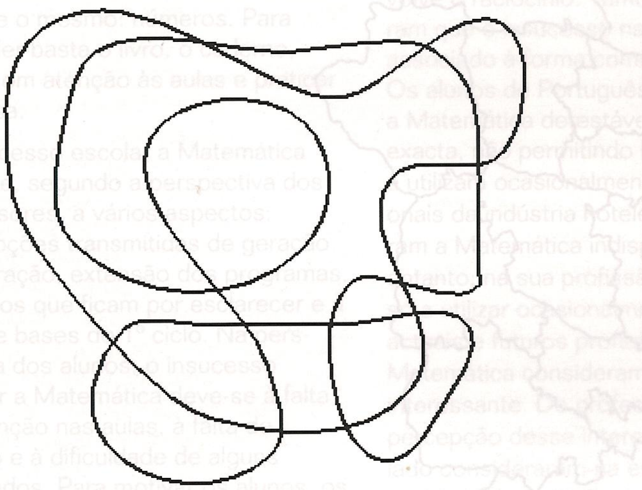
De quantas cores precisas em cada caso?

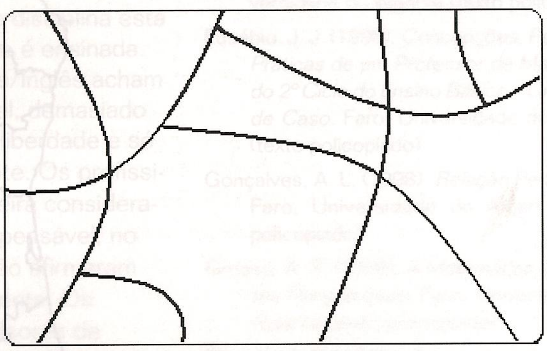
3. Investiga mais:

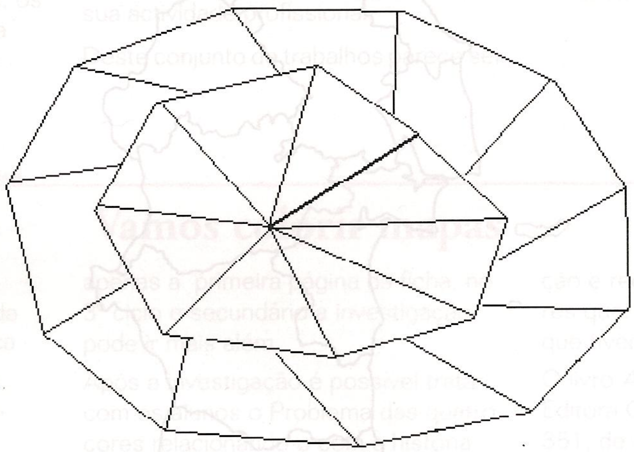
Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir qualquer mapa de modo que "países" com fronteiras comuns não tenham a mesma cor?

Sugestão:

- Pinta os mapas
- Desenha outros mapas que possam ser coloridos só com uma cor, com duas cores, com 3 cores...
- Desenha mais mapas e tenta descobrir e descrever uma estratégia para os pintares utilizando o menor número de cores.







Mas o que é que a coloração de mapas tem a ver com Matemática?

O problema do número mínimo de cores necessárias para colorir mapas ocupou matemáticos durante mais de um século até que em 1976 foi demonstrado o famoso "Teorema das 4 cores". Para saberes mais acerca deste Teorema podes consultar a Internet em http://www.c3.lanl.gov/mega-math.

Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas

Telma Souza Gracias
Marcelo C. Borba

Neste artigo, vamos apresentar como características da calculadora gráfica foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/ pesquisadora sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*. Isto nos impulsiona a discutir a eficiência de *softwares* educacionais, partindo do *software* da calculadora gráfica.

Vários estudos têm sido feitos com o objetivo de analisar a utilização das calculadoras gráficas no ensino e na aprendizagem de Matemática. As pesquisas, com diferentes ênfases, têm analisado o impacto da presença da calculadora gráfica na "cultura de sala de aula", o efeito no que diz respeito a professores e estudantes de diversas faixas etárias, e as possibilidades de utilização como ferramenta para o estudo de conteúdos matemáticos, tais como geometria, polinómios e funções. Provavelmente devido à sua principal característica, traçar gráficos de funções definidas por expressões algébricas, grande parte dos estudos[1] envolvem as possibilidades de utilização das calculadoras gráficas no estudo de funções, apesar das diferentes preocupações apresentadas, sem se deter, contudo, nas características que são usualmente tratadas como limitações desta *mídia*. Por outro lado, há estudos que se dedicam às limitações deste tipo de calculadora vendo-as como um obstáculo à aprendizagem da "matemática correta", que é aquela, do ponto de vista de alguns, desenvolvida somente com lápis e papel. Acreditamos que tanto o lápis e papel, visto enquanto *mídia*, quanto os computadores, quando associados a seres humanos, permitem a produção de matemática com aspectos diferentes.

Neste artigo, vamos apresentar como características da calculadora gráfica, vistas usualmente como obstáculos, foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/ pesquisadora (a primeira autora deste artigo) sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*. Isto nos impulsiona a discutir a eficiência de *softwares* educacionais, partindo do *software* da calculadora gráfica.

Apresentaremos excertos de um estudo que envolveu o estudo de funções quadráticas segundo uma proposta didático-pedagógica elaborada com ênfase em aspectos visuais e empíricos. Em Souza (1997) é feita uma discussão mais ampla sobre tal proposta e suas aplicações. Antes de apresentarmos a proposta e os exemplos que nos interessam discutir neste artigo, cabe realçar que no Brasil, local de realização deste estudo, ainda é muito raro a utilização de calculadoras gráficas na sala de aula. Embora haja alguns grupos de pesquisa que desenvolvam práticas em sala de aula, poucos têm publicado resultados sobre estudos ou relatos de experiências nos periódicos da área. Acreditamos, entretanto, que esse artigo é relevante não só para professores do Brasil, mas também para professores de Portugal, onde a calculadora gráfica já é usada com mais regularidade, pois há exemplos que ilustram situações que o professor pode encontrar em sala de aula, indicando possíveis formas de se lidar com elas.

Uma proposta didático-pedagógica e sua aplicação

Uma proposta didático-pedagógica foi elaborada para o estudo de funções quadráticas com o auxílio da calculadora gráfica. Esta proposta é constituída por uma sequência de atividades que envolvem o estudo de funções quadráticas, e esta sequência materializa uma perspectiva de estudar o conteúdo segundo um enfoque predominantemente visual e "empírico". Convém esclarecer que por visualização entendemos o processo de formar imagens, quer seja mentalmente, quer seja com o auxílio de lápis e papel ou tecnologia. Quanto ao aspecto "empírico", referimo-nos à possibilidade de se trabalhar com testes, por meio de tentativas e erros, onde o estudante tem a oportunidade de elaborar hipóteses, testar conjecturas, refutá-las ou chegar a generalizações. Tais aspectos são possibilitados pelo fato da calculadora gráfica produzir rapidamente os gráficos e apresentá-los em uma mesma tela, e, quando empregados com o objetivo de estimular o processo de investigação matemática, pode oferecer uma maior compreensão matemática.

Cabe ressaltar também que não esperamos que neste enfoque os estudantes trabalhem exclusivamente com gráficos e com visualização, embora tais aspectos sejam enfatizados.

Este enfoque abre novas opções no estudo da Matemática para aqueles que têm dificuldade em relação à Álgebra. Os estudantes que têm mais dificuldade ou resistência em trabalhar algebricamente com os conceitos podem encontrar na visualização uma outra opção de investigação matemática.

Na sequência da atividade elaborada, os estudantes começavam explorando o plano cartesiano e funções do 1° grau escritas na forma $f(x)=ax+b$. Nesta série de atividades, enquanto os estudantes se familiarizavam com os comandos básicos da calculadora gráfica, a entrevistadora podia observar o que os estudantes sabiam sobre este conteúdo. A seguir, os estudantes trabalhavam com diferentes funções a fim de identificar as funções quadráticas como uma família de funções dentre muitas, e acabavam envolvidos com questões mais fechadas e específicas sobre funções quadráticas.

Segundo o enfoque proposto, esperávamos que os estudantes trabalhassem com funções quadráticas estabelecendo relações entre as representações, sendo capazes, por exemplo, de associar mudanças no gráfico com mudanças nos coeficientes da expressão algébrica e vice-versa.

Gustavo e Alessandra, estudantes com então 14 anos de idade, foram entrevistados individualmente ao trabalharem com as atividades da proposta didático-pedagógica, fazendo uso da calculadora gráfica. Cada estudante foi entrevistado por cerca de dez horas, em 5 sessões de duas horas aproximadamente. Este estudo se enquadra na modalidade "experimento de ensino" (Cobb & Steffe, 1983), que consiste basicamente de uma série de encontros individuais com um estudante por um certo período de tempo. No "experimento de ensino" o pesquisador deve estar constantemente tentando "ver" as ações sob o ponto de vista do estudante, o que lhe permite compreender melhor as estratégias utilizadas.

Embora reconheçamos que há uma grande diferença entre o ambiente de sala de aula e o ambiente de uma entrevista, ressaltamos que, ao entrevistar um estudante, podemos dar a ele o tempo que quiser para trabalhar em uma determinada questão, e além disso, criar modelos mais detalhados sobre a forma de raciocinar. Esses fatores não são possíveis em sala de aula, pois além da grande quantidade de estudantes, há uma diversidade muito grande entre o ritmo de trabalho de cada um deles. Acreditamos que os exemplos sobre como os estudantes trabalharam com a calculadora gráfica descritos neste artigo possam servir de parâmetros para seu uso em outros contextos educacionais. Tais exemplos podem dar indicações aos professores de como lidar com situações similares quando estas emergirem.

Calculadora gráfica e funções quadráticas

Nesta seção apresentamos exemplos de como características das calculadoras gráficas, usualmente vistas como obstáculos, foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/pesquisadora sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*.

No início das entrevistas os estudantes Gustavo e Alessandra praticamente nada sabiam sobre funções quadráticas. As atividades da proposta didático-pedagógica permitiram que os estudantes trabalhassem com os coeficientes *a*, *b* e *c* de $y=ax^2+bx+c$ e tivessem sua própria compreensão sobre esta família de funções.

Vale ressaltar que o estudo de tais coeficientes da função quadrática não é comum nas aulas de Matemática no Brasil. Em geral, os coeficientes *a* e *c* são os mais abordados nos livros didáticos brasileiros, de forma superficial, enquanto o coeficiente *b* recebe pouca ou nenhuma atenção.

Para situar o leitor diante dos exemplos que apresentaremos na próxima seção, vamos descrever brevemente e de forma geral as conclusões às quais os estudantes chegaram ao trabalhar com as atividades da proposta didático-pedagógica com o auxílio da calculadora gráfica.

Além de estudar o coeficiente *a*, que é, em geral, o mais abordado nos livros didáticos brasileiros, Gustavo associou o coeficiente *c* a translações verticais e o coeficiente *b* ao vértice da parábola. Gustavo verificou que mantendo *a* e *c* fixos, basta mudar o sinal do coeficiente *b* para que o vértice da parábola mude de lado em relação ao eixo *y*, ou seja, associou a mudança de sinal de *b* à reflexão da parábola em torno do eixo *y*. O coeficiente *b* foi estudado por Gustavo num ambiente de investigação com o auxílio da calculadora gráfica.

Assim como Gustavo, Alessandra também chegou a várias conclusões sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática escrita na forma $y=ax^2+bx+c$. Em ambos os casos, o processo de associar mudanças nos coeficientes com mudanças no gráfico envolveu um processo de levantamento de conjecturas, formulação de hipóteses, testes e reformulação de conjecturas.

No caso de Alessandra, sua experiência visual com os gráficos das funções quadráticas permitiu a elaboração de uma conjectura que envolve x_v e raizes da função quadrática: "esse ponto vai estar sempre na metade dos dois, né?!", ou seja, $x_v=(x'+x'')/2$, sendo x' e x'' raizes da função. Alessandra ainda elaborou uma outra conjectura[2] sobre o coeficiente *b*, que também envolve x_v: *b* como o dobro de x_v. Alessandra, na verdade, pensava no valor absoluto de *b* e verificou que essa relação é válida no caso de *a* valer 1 ou −1. Passaremos a descrever como a estudante chegou a essa conclusão.

Janela de visualização da calculadora gráfica

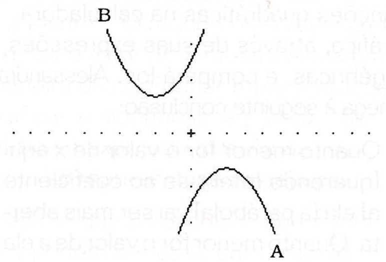
Quando um gráfico é traçado na tela da calculadora gráfica, ele aparece na janela de visualização ajustada anteriormente à entrada da função, ou seja, a calculadora não apresenta o gráfico da função na tela com o seu melhor ajuste. Esta limitação da calculadora foi explorada em algumas atividades.

Em uma das atividades os estudantes tinham, por exemplo, que falar sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* das três parábolas traçadas na calculadora gráfica, estando apenas duas delas visíveis na janela de visualização da calculadora. As funções eram:

A: $y = -x^2 + 2x - 2$

B: $y = x^2 + 2x + 2$

C: $y = x^2 - 4x + 20$ (que não aparece na tela da calculadora gráfica)



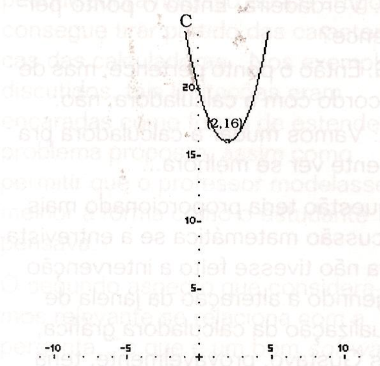
Alessandra, após encontrar as fórmulas dos gráficos A e B, empenha-se em descobrir a fórmula do gráfico C, elaborando uma conjectura sobre o coeficiente *b*.

Alessandra primeiramente teve que encontrar o gráfico da função na tela da calculadora gráfica. Ela observou uma dica da atividade que dizia que o sinal da função era sempre positivo, então, utilizando as teclas da calculadora gráfica que alteram a janela de visualização, Alessandra começou a percorrer o subconjunto do plano cartesiano onde as ordenadas são positivas, até que encontrou o gráfico.

Ao encontrar o gráfico da função[3], Alessandra falou que *a*>0, por causa da concavidade voltada para cima.

A fim de determinar o *c*, Alessandra utiliza o *Trace* e encontra o ponto onde a parábola corta o eixo *y*.

Utilizando ainda o comando *Trace*, Alessandra passa pelo vértice, que é



o ponto (2,16), e afirma:
(E=entrevistadora; A=Alessandra)

A: O *b* é dois. Eu acho que é.

E: Você acha que o vértice coincide com o *b*?

A: É.

A idéia de Alessandra era que $b=x_v$. A entrevistadora pergunta de onde vem esta idéia, se nos gráficos anteriores o "vértice" (referindo-se ao x_v) coincidia com o *b*.

Alessandra observa os gráficos e elabora uma explicação de *b* como o dobro do *x* (referindo-se ao x_v).

Ela diz que neste caso o *b* tem que ser menor que zero, que *b* é negativo para dar do lado certo (referindo-se ao fato do gráfico ter o vértice do lado direito do eixo *y*).

Assim, a estudante conclui que $b = -4$ e traça, então, o gráfico procurado: $y = x^2 - 4x + 20$.

E: Como é que você viu que é 4?

A: O *x* (referindo-se ao x_v) é... Aqui (referindo-se ao *b*) é o dobro do *x*.

E: Agora vamos só ver uma coisa. É... você falou que o *b*... Como é que você escolheu o *b*?

A: Porque ele é o dobro do valor de *x*.

E: Isso: o dobro do valor de *x*. Onde? Em que ponto?

A: No vértice, nesse aqui. Aqui, olha, ele corta o... porque é 2.

E: Porque é o vértice dele, né?!

A: É.

E: Vamos ver se isso vale em outros casos.

Ao pedir para verificar se a relação encontrada, $b=2x_v$, vale em outros casos, Alessandra traça vários gráficos de funções quadráticas na calculadora gráfica. Em vários casos, Alessandra verifica que a relação é válida. Somente quando traça o gráfico de $y = 4x^2 - 4x + 1$ Alessandra encontra um exemplo onde a relação não vale. Ela conclui que isto acontece porque neste caso $a=4\neq1$.

Esta idéia, de *b* ser o dobro do x_v, é retomada em uma outra atividade quando Alessandra está procurando a fórmula de uma função quadrática, cujas raizes são 3 e -1.

É importante ressaltar aqui que, ao associar *b* como dobro do x_v Alessandra está, na verdade, pensando no módulo de *b*, pois ela determina o sinal deste coeficiente olhando para o vértice da parábola: se a parábola tiver concavidade voltada para cima, então *b*>0 se o vértice estiver à esquerda do eixo *y* e *b*<0 se o vértice estiver à direita do eixo *y*. Em relação à validade desta relação, as investigações de Alessandra permitiram que ela concluísse que a relação só é válida quando *a*=1 ou *a*=−1.

De fato:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow -b = 2ax_v \rightarrow b = -2ax_v$$

se $a = \pm 1$ então $| b | = | 2x_v |$

Podemos dizer, no caso que acabamos de descrever, que o fato de um dos gráficos traçados na calculadora através de sua expressão algébrica não aparecer imediatamente na tela, fez com que Alessandra tivesse que explicitar as conjecturas que estava elaborando sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática escrita na forma $y=ax^2+bx+c$. Ou seja, o que pode ser considerado como uma limitação da calculadora gráfica, que é o fato de não apresentar os gráficos com o melhor ajuste na janela de visualização, pode se constituir em possibilidade de discussão de determinados conteúdos matemáticos. Neste caso, a entrevistadora pôde entender como Alessandra estava compreendendo os coeficientes de funções quadráticas, principalmente o coeficiente *b*.

Resolução da tela da calculadora gráfica

Em outra atividade a resolução da tela da calculadora poderia também ter gerado alguma discussão, se a intervenção da entrevistadora não tivesse acabado com a aparente discrepância entre o resultado encontrado algebricamente pelo estudante e o resultado fornecido pela calculadora.

A questão pedia para verificar se o ponto (40,42) pertencia à reta $y=x+2$. Gustavo, que já tinha o gráfico da função traçado na tela da calculadora, ajusta o campo de visão de forma que o retângulo de visualização da calculadora contenha o ponto (40,42). A seguir ele utiliza o comando *Trace* para ver se o ponto pertence à reta. Devido aos mecanismos de aproximação utilizados pela calculadora, o ponto mostrado na tela é (40.091,42.012) ao invés de (40,42). Gustavo conclui, então, que o ponto não pertence à reta. Esta conclusão do estudante está baseada no resultado fornecido pela calculadora gráfica. A entrevistadora intervém sugerindo a Gustavo que verifique se este mesmo resultado é encontrado algebricamente. Logo, a álgebra só foi utilizada devido a essa intervenção.

Gustavo substitui o x por 40 e encontra y=42, concluindo então que o ponto pertence à reta. Aí Gustavo se depara com a discrepância entre os resultados apresentados pela calculadora gráfica e o resultado que encontrou algebricamente. Neste momento, a entrevistadora faz outra intervenção sugerindo ao estudante que altere a janela de visualização da calculadora gráfica. Essa intervenção não foi adequada porque a alteração na janela de visualização permitiu que Gustavo encontrasse o ponto (40,42) utilizando o comando *Trace*. Portanto, a intervenção resolveu a aparente contradição entre os resultados, impedindo Gustavo de escolher sozinho a forma de lidar com a discrepância entre o resultado que encontrou algebricamente e o resultado apresentado pela calculadora gráfica (E=entrevistadora; G=Gustavo):

> E: E olhando para essa expressão aqui [referindo-se a $y=x+2$] daria para saber?
>
> G: Que nem, se eu puser 40 aqui e 42 aqui [substituindo x por 40 e y por 42], é, vai dar certo, né?!
>
> E: Vai dar uma sentença o quê? Uma sentença falsa ou verdadeira?
>
> G: Vai dar verdadeira.
>
> E: Verdadeira. Então o ponto pertence?
>
> G: Então o ponto pertence, mas de acordo com a calculadora, não.
>
> E: Vamos mudar a calculadora pra gente ver se melhora...

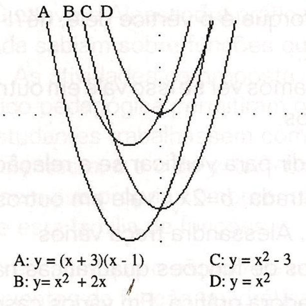
A questão teria proporcionado mais discussão matemática se a entrevistadora não tivesse feito a intervenção sugerindo a alteração da janela de visualização da calculadora gráfica, pois Gustavo, provavelmente, teria elaborado conjecturas ao coordenar as representações algébrica e gráfica.

Este exemplo mostra que a resolução da tela da calculadora gráfica também pode vir a ser explorada na elaboração de atividades, além de ressaltar a importância da postura da entrevistadora e/ou professora envolvida no contexto educacional, pois, neste caso, a intervenção ruim da entrevistadora prejudicou o trabalho do aluno em sua investigação matemática. Este é um exemplo de como não se deve agir.

O tamanho da tela da calculadora gráfica

O terceiro episódio aqui relatado se refere ao tamanho da tela da calculadora gráfica, que permite a visualização de apenas uma parte dos gráficos. Este aspecto também pode ser considerado como uma limitação, na medida em que pode ter sido responsável por ilusões visuais, como aconteceu com Alessandra ao identificar parábolas de mesma abertura como tendo aberturas diferentes.

Ao analisar as funções abaixo, Alessandra conclui inicialmente que quanto menor for o b a parábola vai ser mais fechada. O coeficiente b não é o responsável por este fato, e, mesmo que o fosse, as parábolas abaixo não têm concavidades diferentes: elas têm a mesma abertura.



Olhando para os gráficos das funções como aparecem na tela da calculadora gráfica, é compreensível esta interpretação de Alessandra. Tal fato já foi apontado por diversos autores (e.g. Goldenberg, 1988): estudantes pensam que parábolas de mesma abertura têm aberturas diferentes quando algumas funções aparecem acima de outras na tela. Um dos fatores responsáveis por provocar estas ilusões é o tamanho da tela, a qual permite a visualização de apenas uma parte dos gráficos.

Como Alessandra, no exemplo acima, estava apenas iniciando a elaboração de conjecturas sobre os coeficientes a, b e c de $y=ax^2+bx+c$, a entrevistadora optou por não interferir neste momento, esperando que em outras atividades Alessandra identificasse o coeficiente a como o responsável pela abertura da parábola. Isso aconteceu em uma das atividades seguintes, onde após traçar vários gráficos de funções quadráticas na calculadora gráfica, através de suas expressões algébricas, e compará-los, Alessandra chega à seguinte conclusão:

> Quanto menor for o valor de x aqui [querendo referir-se ao coeficiente a] ela [a parábola] vai ser mais aberta. Quanto menor for o valor de a ela vai ser mais aberto, quanto maior for o valor de a ele vai ser mais fechado.

É importante ressaltar que Alessandra não estava confundindo, neste momento, a variável com o coeficiente, pois com o lápis apontava o coeficiente e não a variável. A dificuldade estava apenas em se expressar. Outro fato que deve ser explicitado é que ao usar a expressão "quanto menor for o valor de x aqui", Alessandra está, na verdade, se referindo ao valor absoluto de a, pois já havia analisado gráficos de funções quadráticas com valores de a positivos e negativos. Assim, o que Alessandra está querendo dizer é que quanto menor for o valor absoluto de a, mais aberta vai estar a parábola, e quanto maior for o valor absoluto de a, mais fechada.

Alessandra identificou a relação entre o coeficiente a e o gráfico da função traçado na calculadora gráfica.

Coordenar aspectos gráficos e algébricos pode ser uma forma de analisar gráficos que não permitem que conjecturas sejam elaboradas com base apenas nos aspectos visuais.

Considerações finais

Neste artigo, apresentamos exemplos de como características da calculadora gráfica, que podem ser vistas como limitações desta *mídia*, podem ser exploradas como possibilidades.

Os exemplos indicam que as conclusões obtidas pelos estudantes foram fruto de sua experiência visual com os gráficos e da possibilidade oferecida pela calculadora gráfica de testar rapidamente hipóteses para que conjecturas sejam reformuladas. A visualização teve um papel importante na compreensão da relação entre os coeficientes de uma função quadrática e seu gráfico, uma vez que serviu de guia para as investigações dos estudantes. O modo como Alessandra explica o valor de *b* mostra ainda uma maneira de coordenar representações gráficas e algébricas: a posição do vértice é explicada através de relações na representação algébrica.

Mas em que os excertos apresentados podem ser úteis para educadores matemáticos?

Acreditamos que os exemplos apresentados podem ser úteis em dois aspectos. Em primeiro lugar, eles podem ser úteis para professores que estejam engajados em usufruir de vantagens de características que são normalmente vistas como limitações de *mídias* eletrônicas. Entendemos que não devemos nos prender ao tipo de matemática que era aprendido quando as *mídias* eletrônicas não estavam disponíveis na sala de aula. Devemos, como sugerido por Tikhomirov (1981), pensar nos problemas que podem ser trabalhados por alunos quando eles formam, juntamente com *mídias* informáticas como as calculadoras gráficas, unidades de conhecimento. Pretendemos, portanto, mostrar como problemas abertos, adequados a esses sistemas alunos-calculadoras-gráficas, podem se tornar ainda mais relevantes quando um professor (professora/pesquisadora no caso desse artigo) consegue tirar partido das características das calculadoras. Nos exemplos discutidos, tais limitações eram encaradas como forma de estender o problema proposto, assim como permitir que o professor modelasse melhor a forma como o estudante pensava.

O segundo aspecto que consideramos relevante se relaciona com a pergunta: "o que é um bom *software* educacional?" Embora não pretendamos responder de forma mais abrangente esta pergunta, entendemos que tanto *designers* de *software*, assim como professores ou administradores que escolhem os *software* que vão utilizar, devem ter em mente que nem sempre o aplicativo mais eficiente é o mais apropriado do ponto de vista educacional.

Um *software* com ajuste de janela automático poderia ser considerado mais eficiente, entretanto não permitiria que os exemplos aqui apresentados, que foram catalisadores de aprendizagem, pudessem acontecer. Não queremos com isso, nenhum tipo de volta à noção de que somente programando tudo o que o computador fará, haverá aprendizagem. Queremos, todavia, argumentar que encontrar um balanço entre o que o *software* faz e o que não faz, é fundamental para os educadores matemáticos.

No caso desse estudo, um *software* da calculadora gráfica, que não era tão completo, ou seja, que não fazia todos os melhores ajustes automaticamente, mostrou-se eficiente ao permitir que os estudantes chegassem a generalizações através da elaboração de hipóteses e testes de suas conjecturas. O *software* eficiente não é apenas aquele que é completo, com todas as suas operações automatizadas, mas é aquele que permite que professor e estudantes o explorem de modo a gerar discussão e compreensão de conceitos. Neste processo o professor tem um papel fundamental ao conduzir as atividades. Não basta fazer uso das calculadoras gráficas nas aulas de Matemática. Como mostramos neste artigo, uma intervenção ruim pode prejudicar o trabalho do aluno na sua investigação matemática, o que aponta para a necessidade do professor reconhecer as características do *software* que deseja utilizar, preparar cuidadosamente cada atividade, e questionar constantemente sua postura na sala de aula.

Bibliografia

Borba, M.C.; Meneghetti, R.C.G.; Hermini, H.A. (1997). Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. *Educação Matemática.* Ano 5, nº 3, (pp. 63-70). São Paulo: SBEM.

Cobb, P. and Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14 (2), (pp. 83-94). Reston: NCTM.

Fernandes (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática.* nº 46, (p.33-6). Lisboa: APM.

Gracias, T.A. Souza e Borba, M.C. (1998). Calculadoras gráficas e funções quadráticas. *Educação Matemática.* Ano 6, nº. 4. (p.27-32) São Paulo: SBEM.

Goldenberg, P.E. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour,* 7, (pp. 133-173).

Smart, T. (1995). *Visualising quadratic functions: a study of thirteen-year-old girls learning mathematics with graphic calculators.* Anais do PME 19, vol. 2, (pp. 272-9). Recife.

Souza, T.A. (1997). *Calculadoras gráficas: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas.* Dissertação de Mestrado, UNESP. Lisboa: APM.

Notas

[1] Fernandes (1998), Borba et al. (1997), Smart (1995), por exemplo.

[2] Uma descrição mais detalhada de como a estudante chegou a esta conclusão pode ser encontrada em Gracias e Borba (1998).

[3] Ao modificar a janela de visualização da calculadora gráfica apenas o gráfico da última função traçada ficou disponível, ou seja, o gráfico da função $y=x^2-4x+20$, o qual Alessandra estava procurando. Esta é uma característica da calculadora gráfica utilizada, a Casio fx 8700GB: dependendo do modo como os gráficos das funções são criados, apenas o gráfico da última função armazenada na calculadora fica disponível na tela.

Telma Souza Gracias
Marcelo C. Borba
UNESP, Rio Claro, SP, Brasil

José Paulo Viana

O elevador caprichoso

Um prédio de 11 andares tem um elevador muito caprichoso: só consegue subir 2,3 ou 5 andares de cada vez e apenas desce 4 ou 11 andares.

A porteira, que vive no rés-do-chão, todas as noites tem de passar em todos os andares a recolher o lixo. Ao fim de algum tempo conseguiu descobrir uma forma de parar uma única vez em todos os andares e regressar ao rés-do-chão.

Como faz a porteira?

Respostas até 15 de Março

Toilette Matinal

No número 54 de *Educação e Matemática* propusemos este problema:

Todas as manhãs visto umas cuecas, umas calças, uma T-shirt, um par de meias e um par de sapatos.

Por uma questão de higiene, só calço os sapatos depois de ter as calças vestidas.

Quando calço um sapato, calço logo o outro, porque me faz impressão estar só com um sapato.

Claro que tenho muitas maneiras diferentes de me arranjar, tudo depende da ordem com que visto as coisas. Quantas são as maneiras diferentes de me vestir?

Chegaram respostas de Ana Luísa Correia (Lisboa), António Moura (Cascais), Carlos Andrade (Lisboa), Mário Roque (Guimarães) e José Manuel Oliveira (Amora), para além dos alunos Ana Xavier, Bruno Rocha, Elissaveta Nikolova, Joana Oliveira, Joana Neves, Joana Silva, João Paulo, José António Silva, Rui Diniz, Rui Gonçalves, Tiago Daniel e Alexandrina, Diana, Isabel e Mónica, todos do 12º ano da Escola Secundária Francisco de Holanda (Guimarães).

Para resolver este problema temos de considerar algumas regras. Uma delas é que se trata de uma pessoa "normal", que veste as cuecas antes das calças, as calças e as meias antes dos sapatos, e calça os dois sapatos seguidos.

José António Silva

Ou, como diz o António Moura:

é bom tomar o princípio não topológico, mas corrente e normal, de vestir as cuecas antes das calças. Ainda é bom distinguir as meias porque, Diabos!, direita e esquerda devem ser sempre distintas, em todos os campos!

Dos vários processos de resolução seguidos, o que nos parece mais simples é o apresentado pelos Carlos Andrade, com a notação do Mário Roque.

Representemos as peças de roupa da seguinte forma:

C (cuecas), CA (calças), T (T-shirt), ME (meia do pé esquerdo); MD (meia do pé direito), SE (sapato esquerdo), SD (sapato direito).

A estratégia é ir vestindo a personagem peça a peça e verificar para cada peça de quantas formas ela pode entrar no processo. No fim, basta multiplicar os valores encontrados.

As restrições do problema impõem esta ordem para as cuecas, calças e sapatos: C – CA – SE – SD.

Mas os sapatos podem ser calçados pela ordem inversa. Logo temos aqui 2 casos.

Passemos à meia esquerda. Pode entrar: antes das cuecas, entre estas e as calças ou entre as calças e os sapatos. São 3 casos.

Admitamos, sem perda de generalidade, que foi a seguir às cuecas:

C – ME – CA – SE – SD

Passemos à meia direita. Tem de entrar no início ou entre duas das peças anteriores mas antes dos sapatos. Logo, pode ocupar 4 posições.

Admitamos que foi depois da outra meia:

C – ME – MD – CA – SE – SD

Finalmente a *T-shirt* vai ter 6 posições possíveis: no início, no fim de tudo, ou entre duas das peças anteriores excepto os sapatos.

O total de formas diferentes de vestir é então:

$2 \times 3 \times 4 \times 6 = 144$

Mas o José Manuel Oliveira levanta uma nova questão:

E se fosse diferenciável o facto de vestir a *T-shirt* começando por introduzir o braço esquerdo ou o direito ou ainda a cabeça? Ou o facto de enfiar primeiro a perna esquerda nas calças, ou a direita? Muito provavelmente daria para uma pessoa se vestir de forma diferente todos os dias durante mais de um ano... ainda que com a mesma roupa.

O crescimento das populações*

Francisco Silva, Gonçalo Marçalo, Marco Paulo Jesus

Em matemática, a designação *crescimento de populações* não se restringe à evolução de conjuntos de pessoas ou animais; pode ser aplicada à evolução de um capital, à difusão de boatos ou doenças, às vendas de carros ou outros bens, à concentração de uma droga (em sentido lato) no sangue, etc...

O termo crescimento também não quer dizer, necessariamente, aumento; tanto pode ser utilizado como um aumento da população (crescimento positivo) ou diminuição da população (crescimento negativo).

Populações financeiras

Começaremos por estudar o crescimento de populações *financeiras* e de entre os vários modelos, analisaremos os mais importantes, isto é, os que são habitualmente utilizados nas instituições bancárias.

Teoricamente, uma população financeira pode crescer infinitamente; este crescimento é positivo quando temos o dinheiro no banco a render a uma determinada taxa e é negativo quando, por exemplo, pedimos um empréstimo bancário e neste caso o capital está a render negativamente. Como é óbvio, o dinheiro só rende até ao momento em que ou levantamos o dinheiro ou saldamos a dívida.

Vamos começar o nosso estudo a partir de um capital inicial de 1000 contos, com um crescimento anual de 10%. Existem duas maneiras de calcular o crescimento desta população: o método dos juros simples e o método dos juros compostos.

O crescimento através do juro simples é sempre constante, isto é, o juro é sempre calculado a partir do capital inicial, que no nosso exemplo é 1000 contos. Por isso, o seu crescimento será constante ao longo de todo o período em que o dinheiro estiver depositado, que neste caso será de 100 contos.

A fórmula geral para esta situação é:

$N = C + kCt \Leftrightarrow N = C(1+kt)$

em que C é o capital inicial, t é o número de anos e k é a taxa anual de juros.

A fórmula particular para este caso concreto é a seguinte:

$N = 1000(1+0{,}10t)$

No caso dos juros compostos, o crescimento é proporcional ao capital actual. O que quer dizer que quanto maior for a população inicial maior será o seu crescimento. Assim, no primeiro ano, o crescimento é 100 contos, porque é 10% de 1000 contos; no segundo ano o capital inicial é de 1100 contos e o seu crescimento será na mesma de 10%, só que neste ano o capital vai crescer 110 contos, porque é 10% de 1100 contos. O que significa que no segundo ano a população vai crescer mais 10 contos do que no primeiro ano.

No caso geral, teremos, então:

$$N_1 = N_0 + kN_0 = N_0\,(1+k)$$
$$N_2 = N_1 + kN_1 = N_1\,(1+k) = N_0\,(1+k)(1+k)$$
$$N_3 = N_2 + kN_2 = N_2\,(1+k) = N_0\,(1+k)(1+k)(1+k)$$
$$\ldots$$
$$N_t = N_0\,(1+k)^t$$

onde t é o tempo em anos, N_t é o capital, ao fim de t anos, N_0 é o capital inicial e k é a taxa de juro.

* Este texto é um dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos da Escola Superior de Gestão Hoteleira e Turismo da Universidade do Algarve, na disciplina de Matemática leccionada por Leonor Moreira, e que esta professora refere no seu artigo publicado no número anterior da revista, com o título *Algumas reflexões sobre a democracia a propósito de currículos e vice-versa*.

No nosso caso particular, temos:

$$N_t = 1000(1+0,10)^t$$

Para melhor compararmos estes modelos, elaborámos um quadro que mostra a diferença de saldos entre os dois modelos (quadro 1). Verifica-se que, ao fim de 10 anos, o método dos juros compostos tem claramente um saldo superior ao método dos juros simples; esta diferença aumentaria ainda mais se o tempo fosse aumentado.

quadro 1

	Capital ao fim de *t* anos (em contos)	
Anos	J. Simples	J. Compostos
0	1000	1000
1	1100	1100
2	1200	1210
3	1300	1331
4	1400	1464,1
5	1500	1610,51
6	1600	1771,561
7	1700	1948,717
8	1800	2143,589
9	1900	2357,948
10	2000	2593,742

Ainda com os 1000 contos na conta bancária, a uma taxa de juro de 10% ao ano, podemos considerar que o juro vence duas vezes por ano, ou trimestralmente, ou mensalmente ou diariamente.

Se considerarmos, por exemplo, o juro composto semestralmente, teremos o ano dividido em duas partes iguais. Neste caso, teremos que dividir os 10% (agora designados por taxa nominal) em duas partes, ou seja, 5%. Assim, a cada semestre, o capital aumenta de um factor

$$\left(1+\frac{0,10}{2}\right) = 1,05$$

Ao fim de 10 anos, haverá 20 (10x2) composições e, portanto, o capital final será dado por

$$1000\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{20} = 1000\times 1,05^{20} = $$
$$= 2653,298$$

Se considerarmos, agora, o juro composto trimestralmente, teremos o ano dividido em quatro partes iguais. Neste caso, teremos que dividir os 10% em 4 partes, ou seja, 2,5%. Assim, a cada trimestre, o capital aumenta de um factor

$$\left(1+\frac{0,10}{4}\right) = 1,025$$

Ao fim de 10 anos, haverá 40 (10x4) composições e, portanto, o capital final será dado por

$$1000\left(1+\frac{0,10}{4}\right)^{40} = 1000\times 1,025^{40} =$$
$$= 2685,064$$

Contudo este valor poderia ser ainda superior se os juros fossem calculados em períodos de tempo ainda mais pequenos — dias, horas ou minutos. Como podemos verificar no quadro 2. Para o cálculo dos valores inscritos no quadro, usámos a fórmula geral

$$C_n = C_0\left(1+\frac{k}{T}\right)^n$$

em que C_0 é o capital inicial, k é a taxa nominal e T o número de vezes que o capital é composto, anualmente.

Hoje em dia e devido à diminuição frequente das taxas de juro, os depósitos a prazo deixaram de ter expressão na actividade bancária. As poupanças são investidas noutros produtos que oferecem taxas de rendimento mais atraentes. Mas os empresários continuam a recorrer a empréstimos, por períodos de tempo curtos, cujos juros compostos são, muitos vezes, calculados mensal ou mesmo diariamente.

Nos modelos de crescimento anteriores, as funções eram todas descontínuas, uma vez que os seus domínios eram conjuntos discretos de pontos. Em seguida, vamos apresentar um modelo de crescimento ilimitado em que a função também não é contínua, mas pode admitir-se que seja (grandes populações).

quadro 2

Capital, ao fim de *t* anos, com juros compostos, à taxa nominal de 10%					
Anos	Anual	Semestral	Trimestral	Mensal	Diário
1	1000	1102,5	1103,812891	1104,713067	1105,156
5	1610,51	1628,895	1638,61644	1645,308935	1648,608
10	2593,742	2653,298	2685,063838	2707,041491	2717,91

Vamos considerar o caso em que o crescimento da população é proporcional ao tamanho actual, o que é expresso matematicamente por:

$$\frac{dN}{dt} = kN \Leftrightarrow \frac{dN}{N} = kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem:

$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln N = kt + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = e^{kt}e^{C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = Ce^{kt} \Leftrightarrow N = N_0e^{kt}$$

em que N é a população actual, N_0 é a população inicial, k é uma constante e t é o tempo decorrido.

A este modelo, chama-se modelo de crescimento exponencial. Se aplicássemos este modelo ao nosso capital de 1000 contos, com $k = 10\%$, e t o número de anos, o capital cresceria segundo a função

$$N(t) = 1000e^{0,1t}$$

obtendo-se valores tanto mais próximos dos valores calculados anteriormente, quanto maior for o número de períodos em que o ano é dividido (1105,171 para 1 ano, 1648,721 para 5 anos e 2718,282 para 10 anos).

O crescimento com constrangimentos

Nas populações de seres vivos, o modelo exponencial tem limitações. Se no início de vida de uma população, a taxa de crescimento pode ser proporcional ao tamanho da população, a partir de certa altura, a taxa de crescimento começa a abrandar, quer por falta de comida, quer por falta de espaço.

Um exemplo mais razoável para explicar o crescimento de uma população biológica, a longo prazo, passa, então, por admitir que existe uma população máxima viável, a população máxima sustentada. Admite-se que, para estas populações, a taxa de crescimento é proporcional à diferença entre esse máximo M e a população actual, isto é,

$$\frac{dN}{dt}=k(M-N)$$

em que N é a população actual, M a população máxima sustentada e t o tempo decorrido a partir do momento em que se fez a primeira contagem.

A equação anterior é equivalente a

$$\frac{dN}{M-N}=kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem: $\int \frac{dN}{M-N}=\int kdt$

Para calcular o integral do lado esquerdo, podemos fazer a substituição $u=M-N$ que diferenciando conduz a $du=-dN$.

$$\int\frac{dN}{M-N}=-\int\frac{du}{u}=$$
$$=\ln|u|+C_1=-\ln(M-N)+C_1$$

Por outro lado, $\int kdt=kt+C_2$

Então,

$$-\ln(M-N)+C_1=kt+C_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\ln(M-N)=kt+C_2-C_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\ln(M-N)=kt+C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(M-N)=-kt-C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M-N=e^{-kt-C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M-N=e^{-kt}.e^{-C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N=M-e^{-kt}.e^{-C}$$

Fazendo $t=0$ e admitindo que a população inicial é zero, vem

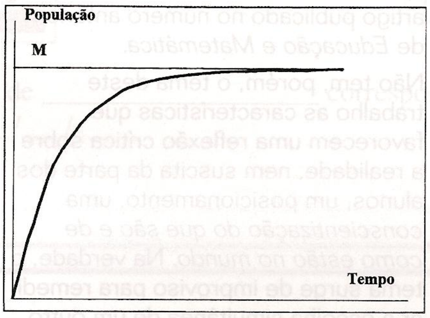
$$M-e^{-C}=0 \Leftrightarrow M=e^{-C}$$

Então, $N=M(1-e^{-kt})$

Este modelo de crescimento, tal como o modelo logístico que analisaremos em seguida, descrevem a aceitação de um bem ou serviço no mercado, a partir do seu lançamento. A função dá-nos o número de pessoas, neste caso os consumidores, que ao longo do tempo vão adquirindo o bem.

Neste caso, o lançamento do bem é acompanhado de uma campanha publicitária através dos media, o que faz com que seja logo conhecido (e comprado) por muita gente. A partir desse impacto inicial, o ritmo de crescimento abranda e, é claro, tende a aproximar-se do tal máximo que, neste caso, se chama *capacidade de mercado*.

O gráfico seguinte é um gráfico típico da evolução da população de consumidores.



Crescimento logístico

Quando o lançamento de um bem, não é acompanhado de uma campanha publicitária, a sua divulgação é feita pelos próprios consumidores. As vendas crescem com a divulgação dos próprios consumidores que inicialmente são poucos. Estes poucos é que depois vão falar a outros consumidores deste bem que, por sua vez, irão comprá-lo e, se gostarem dele, divulgá-lo a outros consumidores. Inicialmente o crescimento é lento, depois o ritmo de crescimento aumenta, para voltar a diminuir quando o número de consumidores se aproximar do potencial máximo de vendas, ou seja, a capacidade de mercado.

Admite-se que a população de consumidores cresce segundo o modelo logístico que é aquele em que a taxa de variação é proporcional, quer à da população actual, quer à diferença entre a capacidade de mercado e a população actual, isto é,

$$\frac{dN}{dt}=kN(M-N) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{N(M-N)}=kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem: $\int \frac{dN}{N(M-N)}=\int kdt$

Para integrarmos o termo esquerdo, faremos agora a substituição $u=1/N$ com $dN=-\frac{1}{u^2}du$. Teremos, então:

$$\int\frac{dN}{N(M-N)}=$$
$$=-\int\frac{1/u^2}{1/u(M-1/u)}du=$$
$$=-\int\frac{1/u^2}{1/u^2(Mu-1)}du=$$
$$=-\int\frac{du}{Mu-1}$$

Fazendo, agora, $Mu-1=v$, vem $Mdu=dv$ e teremos:

$$-\int\frac{dv}{Mv}=-\frac{1}{M}\int\frac{dv}{v}=$$
$$=-\frac{1}{M}\ln|v|+C_1=-\frac{1}{M}\ln|Mu-1|+C_1$$

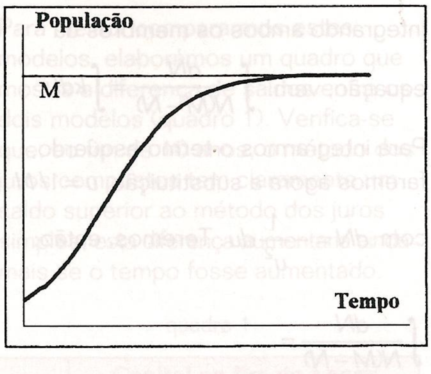
A integração do segundo membro é idêntica à que se fez anteriormente, ficando, portanto,

$$-\frac{1}{M}\ln|Mu-1|+C_1=kt+C_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{M}\ln|Mu-1|=kt+C_2-C_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{M}\ln\left(\frac{M}{N}-1\right)=kt+C_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{M}{N}-1\right)=-Mkt-MC_3 \Leftrightarrow$$ [1]
$$\Leftrightarrow \frac{M}{N}-1=e^{-Mkt}e^{-MC_3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{M}{N}=1+Ce^{-Mkt} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N=\frac{M}{1+Ce^{-Mkt}}$$

Fazendo $t=0$, chega-se a

$$C=\frac{M}{N_0}-1.$$

O gráfico seguinte ilustra uma situação deste tipo.



Como já vimos, este crescimento diferencia-se do anterior, na medida em que, no primeiro caso, o lançamento de um produto é apoiado por um meio de uma campanha publicitária para divulgar o bem ou serviço no mercado e, nesta última situação, a divulgação faz- se pelos próprios consumidores. É evidente que um empresário só pode confiar nesta forma de divulgação se o produto for realmente bom e também não pode esperar lucros rápidos – tem de esperar que a marca se consolide no mercado. Enquanto aqui é a qualidade que vende, no outro caso quem vende é a publicidade que cria no consumidor apetência pelo produto. Vale mais a fama do que a qualidade, é mais ou menos este o lema utilizado no primeiro caso.

Nota

[1] M/N>1 Por ser M a capacidade de mercado. Logo, o modulo é dispensável.

Bibliografia

Fife, J. (1994) Calculus for Business and economics. New York: Macmillan College Publishing Company.

Arya, J & Lardner, R. (1993) Mathematical Analysis for Business, Economics and the Life and Social Sciences. London: Prentice Hall.

Francisco Silva, Gonçalo Marçalo, Marco Paulo Jesus
Estudantes da ESGHT da Universidade do Algarve

Nota da professora

Este trabalho foi realizado por alunos de um primeiro ano do Curso de Gestão, no âmbito da cadeira de Matemática, de que, em traços largos, apresentei as linhas de força, em artigo publicado no número anterior de *Educação e Matemática*.

Não tem, porém, o tema deste trabalho as características que favorecem uma reflexão crítica sobre a realidade, nem suscita da parte dos alunos, um posicionamento, uma *conscientização do que são e de como estão no mundo*. Na verdade, o tema surge de improviso para remediar a escolha simultânea de um outro, a SIDA, por grupos diferentes.

Na altura, os alunos haviam já estudado a evolução de populações biológicas reais e fictícias e tinham-se confrontado com uma situação artificial de difusão de boatos — estava aberto o caminho para abordar o crescimento de populações de um outro género. Saliente-se que os alunos estudarão, em anos subsequentes, os vários aspectos da promoção de um produto — em cadeiras de Marketing — sem, contudo, aí, se preocuparem com o aspecto matemático da questão. Por outro lado, terão uma cadeira de Matemática Financeira em que lhes são fornecidas as ferramentas acabadas para tratarem situações da banca, dos seguros, etc., em que o objectivo é mais escolher a(s) técnica(s) adequada(s) ao tratamento de uma situação realista particular, do que, propriamente, compreenderem os modelos matemáticos subjacentes. O trabalho foi, totalmente, realizado fora da sala de aula. Em dois momentos, apenas, os alunos trocaram comigo opiniões sobre o esquema do trabalho ou esclareceram dúvidas.

Note-se que: 1) Os alunos deduzem a fórmula que permite calcular o capital, ao fim de um certo tempo, quando se trata de juros compostos, mas não o fazem no caso de juros simples porque acharam, nas suas palavras, "demasiado simples"; 2) tratam as constantes de integração, com critérios diferentes. Assim, fazem $e^C=C$, porque "se trata ainda de uma constante; tanto faz escrever C como D". Isto, quando, se trata de calcular o capital com juros compostos tratando a função como contínua. Mas, quando tratam o crescimento com constrangimentos ou o crescimento logístico fazem questão de utilizar C_1, C_2 e C_3, porque "é mais difícil".

Leonor Moreira

Educação e Matemática

Número Temático/ Ano 2000 — Apelo à colaboração dos nossos leitores

Neste Ano Mundial da Matemática, o número temático da nossa revista será dedicado à Matemática. O conteúdo desse número, como é habitual, será constituído em grande parte por artigos pedidos expressamente para esse efeito. No entanto, como sempre, a colaboração dos nossos leitores é essencial para assegurar que a revista se afirma como orgão da APM e dos seus membros, sendo um veículo de toda a sua rica experiência de professores. Apelamos por isso aos nossos leitores no sentido de nos enviarem pequenos relatos, episódios, etc., significativos da relação que os seus alunos têm com a Matemática, e dos factores que podem contribuir positiva (ou negativamente) para essa relação. O número será publicado no próximo mês de Novembro, pelo que necessitamos de ter todas as propostas de contribuições até fins do próxmo mês de Junho.

Quota de 2000

No ano de 2000 o valor da quota é de **7 500$00** para professores, 5 500$00 para estudantes(só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 8 500$00 para sócios a residir no estrangeiro. Pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1549-003 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou Mastercard , preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐   MasterCard ☐

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ____________
____________ Data __/ __ / __

Assinatura ______________________________

Nome:______________________________ Sócio N°:________

Morada:______________________________

Código Postal:______________ Distrito:______________

Telefone:______________ E-Mail:______________

Data de Nascimento__/__/__ N° Contribuinte:______________

N° do B.I.:______________ Arquivo:__________ Data de Emissão__/__/__

Ano em que começou a leccionar:__________ Nível de Ensino:__________

Categoria Proffissional:______________

Escola:______________________________

Morada:______________________________

Telefone:______________ E-Mail:______________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo e-mail:apm@mail.telepac.pt.

Índice