Educação e Matemática

N.º 52

Março/Abril de 1999

Preço: 850$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

"25 de Abril" - 25 anos

A revista Educação e Matemática não podia deixar de registar os 25 anos do 25 de Abril. Esse tempo tão vivido por tantos de nós e tão inimaginável para outros, simultaneamente tão perto e tão distante, esse tempo em que, como refere Eduarda Dionísio "Não foi pouco o que nos aconteceu. E não foi pouco o que fizemos. Até porque tínhamos pela frente, uma imensidão de coisas a aprender que nunca nos tinham ensinado, havia que de repente ensinar o mundo todo, descobrir outra justiça, usar a razão, refazer os hábitos, trabalhar democraticamente".

Para além da capa alusiva ao 25 de Abril incluímos nesta revista o artigo da Eduarda Dionísio *"Pelo poder nas escolas" - uma memória difícil* ", um depoimento de um jovem do 10° ano e, como ilustrações, duas pinturas murais do pós 25 abril.

Sobre a capa

A capa da revista é um quadro de Vieira da Silva, também dedicado ao 25 de Abril.

A reprodução foi autorizada por Rui Guy Weelen.

A pelicula foi cedida gratuitamente pelo Centro de Arte Moderna da Gulbenkian.

Tecnologias na Educação Matemática

A secção Tecnologias na Educação Matemática está já online, nas páginas da APM. Pode encontrá-la no endereço http://www.apm.pt/apm/edutec.htm.

A propósito da Revista 50

Em carta da Sociedade Portuguesa de Autores de Fevereiro fomos informados que a obra "Os Anos Felizes", transcrita nessa revista é uma co-autoria com António Domingues. Pelo facto de não ter sido devidamente identificada apresentamos as nossas desculpas.

Neste número também colaboraram

Alzira Cardoso, Ana Luísa Correia, António Bernardes, António Costa, Arlete Manicas, Cláudio Lopes de Jesus, Cristina Loureiro, Eduarda Dionísio, Elvira Ferreira, Filipe André, Helena Calaxa, Hélia Oliveira, João Pedro da Ponte, Jorge Barros, José Manuel Varandas, Maria Fernanda Cunha, Mário Jorge Lima, Maria do Rosário Machado, Nuno Candeias, Pedro Paulo Scandiuzzi, Renato J. C. Valladares, Rita Bastos.

Data da publicação

Este número foi publicado em Abril de 1999.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Nota

nº 52
Mar/Abr
de 1999

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Fonseca
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Lina Brunheira
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
4700 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Geometria no currículo e pensamento matemático

Rita Bastos

Um dos temas discutidos no seminário Ensino e Aprendizagem da Geometria, promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa nos dias 4 e 5 de Fevereiro, foi a Geometria no Currículo de Matemática. E contrariamente a outros aspectos bastante polémicos, no que diz respeito ao grande peso da Geometria nos programas introduzidos pela reforma curricular, todos estiveram de acordo que foi um progresso. Mas, se por um lado é mais ou menos consensual que a geometria é de grande importância na formação básica e secundária, e que o peso que lhe foi atribuído nos novos programas reflecte uma evolução muito positiva, por outro lado não há qualquer tipo de consenso quanto aos conteúdos de geometria a incluir nos currículos, à organização desses currículos, à forma de os levar à prática, etc.. E, apesar de termos programas a nível nacional, penso que não estarei muito longe da verdade se afirmar que as formas de implementação desses programas, no que respeita ao ensino da geometria, variam enormemente, desde as que adiam sempre os capítulos referentes a este tema, às que lhe dedicam mais tempo e aprofundam mais do que o previsto, passando pelas que a reduzem a um conjunto de procedimentos tipo que os alunos treinam e mecanizam.

Parece-me que é muito claro para todos nós que a geometria tem que ocupar um lugar fundamental no currículo de matemática, mas parece-me também que ninguém sabe muito bem como se deve organizar esse currículo. Pensar na geometria no currículo de matemática implica repensar o currículo de matemática e as finalidades deste. Do meu ponto de vista, devemos ensinar matemática em primeiro lugar porque ela faz parte de um património cultural que é determinante na organização da nossa sociedade. Como tal, a geometria que se deve ensinar deve ser principalmente, e ao longo de toda a escolaridade, a geometria que nos permite interpretar e intervir no espaço em que vivemos. Esta inclui a visualização de objectos, a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objectos; inclui também a resolução de problemas de aplicação da geometria a situações da vida real, a sua ligação à arte, etc..

Mas há outras perspectivas que devem estar presentes no ensino da geometria: a geometria é também uma forma de representação de outros conceitos e ideias matemáticas e um saber unificador que estabelece as conexões entre as várias formas de pensamento matemático. São inúmeros os exemplos, ao longo da história do pensamento matemático, de ideias matemáticas que surgiram de tentativas de resolução de problemas geométricos e de problemas não geométricos que se resolvem por métodos geométricos.

Finalmente, desde o tempo de Euclides que as geometrias são também teorias matemáticas com estruturas lógicas — axiomas, noções primitivas, definições, teoremas, demonstrações, etc.. É importante que, ao longo da escolaridade, os alunos se vão gradualmente familiarizando com a formalização, com os processos dedutivos e demonstrativos tão próprios da geometria, para que fique mais completo o seu conhecimento acerca deste património cultural que é a matemática.

É de acordo com estas perspectivas que devemos pensar na organização de um currículo. Organizá-lo em torno de objectos ou conceitos geométricos, como tem sido feito até aqui (polígonos, circunferência e círculo, áreas e volumes, etc.) parece-me extremamente redutor e inútil na medida em que não só não revela ao aluno a natureza do conhecimento matemático em causa, como também não tem utilidade nenhuma quando não foi aprendido num contexto de aplicação, intervenção no espaço em que vive.

É então urgente que se mude a organização dos currículos, pondo o foco naquilo que é realmente importante: na natureza do conhecimento matemático. Uma proposta é que se organize um currículo de geometria em torno de ideias unificadoras como Visualização e Representação, Simetria, Forma e Dimensão, etc.. Os objectos geométricos sobre os quais se trabalhariam as ideias não seriam necessariamente os mesmos para todos — o que importa se uns alunos conhecem melhor os trapézios e as suas propriedades, e outros estudaram e classificaram outras famílias de polígonos? Não são os objectos que importam, mas a qualidade do pensamento matemático que o aluno desenvolve até porque, como diz Goldenberg, não é possível "ensinar a pensar" sem ter qualquer coisa sobre a qual valha a pena pensar*.

Rita Bastos
Escola António Arroio

* Ver Educação & Matemática nº 48.

Encontros 99

Divulgamos nesta página alguns dos encontros que se realizarão em 1999. O destaque, neste número,vai para as 9AS JAEM que se realizam em Espanha, na Universidade de Santiago.

9AS JAEM

As *9AS Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, são promovidas pela Federação Espanhola de Sociedades de Professores de Matemática e realizam-se en Santiago, na Galiza, de 9 a 11 de Setembro de 1999. A data limite para inscrição é 30 de Junho. Os temas são variados indo desde o ensino da matemática nos primeiros anos até ao ensino na universidade, à utilização de tecnologias no ensino da matemática e à formação de professores. Os sócios interessados podem contactar a APM para mais informações sobre o programa e boletim de inscrição.

ICTMA 9

O ICTMA 9 — *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* — já foi divulgado na última revista Educação e Matemática mas merece de novo uma referência pelo facto de se realizar este ano no nosso país.

Contacto: João Filipe Matos - joao.matos@fc.ul.pt
ou ictma9@fc.ul.pt

Página na Internet:http//www.fc.ul.pt/educacao/ictma9

1º Encontro Nacional de Investigação e Formação

Este encontro realiza-se na Escola Superior de Educação de Lisboa, de 25 a 27 de Novembro de 99. O Tema é "Globalização e Desenvolvimento Profissional do Professor".

Contacto: encif@mail.eselx.ipl.pt

Página na Internet: http://www.eselx.ipl.pt/encontro

ICTMT4

A ICTMT4 — *International Conference on Tecnhology in Mathematics teaching* - realiza-se em Plymouth, Em Inglaterra, de 9 a13 de Agosto de 1999. Trata sobretudo da utilização da tecnologia no ensino da matemática e aplicações à indústria e comércio. Realiza-se no momento em que vai decorrer um eclipse solar e irão ser desenvolvidas actividades relacionadas com o eclipse ligando a matemática à astronomia.

Contacto: Karen Eccles — Keccles@plymouth.ac.uk

Página na Internet: http://www.tech.plym.ac.uk/maths/CTMHOME/ictmt4.html

CIAEM51

CIAEM51 - Cultural Diversity in Mathematics (Education) — realiza-se em Chichester, Inglaterra de 21 a 26 de Julho de 1999.

É um encontro internacional, temático que trata as perspectivas sócio-culturais e a sua influência na educação matemática.Serão apresentadas experiências que sublinham a importância dos factores sócio-culturais a serem investigados e tidos em conta na prática e que mostram a forma como podem ser integradas as dimensões social e cultural.

Contacto: maths@chihe.ac.uk

Página na Internet: http://www.chihe.ac.uk

ICME9

O ICME9 realiza-se em Tokyo, no Japão, no ano 2000.

O primeiro anúncio pode já ser visto na Internet: http://www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

ICME 9
TOKYO/MAKUHARI 2000

"Pelo poder das escolas" - uma memória difícil

Eduarda Dionísio

1. Março de 99. Abro a televisão já tarde. Quase no fim de um programa sobre a "violência nas escolas". Ainda vou a tempo de ver umas fardas da polícia entre os participantes: uma verdadeira (da PSP) num conjunto de personalidades à civil, autoridades na matéria (Governo, Ensino, Investigação); duas "a fingir", envergadas por duas crianças do "povo" assistente, assim "mascaradas". Ao que pude perceber, o primeiro era o responsável máximo pela operação policial "Escola Segura"; os segundos, militantes-missionários de organizações humanitárias implantadas nas escolas, que usam os "sinais exteriores de polícia" para actuarem em nome da "Paz" contra a "Violência".

Mas que é isto? - pergunto. A polícia já é (já voltou a ser...) uma componente constitutiva, necessária, imprescindível, desejável, da educação? Passou a ser consensual que não é possível ensinar sem o concurso dos "agentes da ordem"? Ou deixou pura e simplesmente de se tratar de aprendizagem? Ou ...

São imagens assim que me emperram a memória. Dos discursos, neste caso, não posso falar, quase não os ouvi, porque, oh ironia!, me tinha embrenhado tempo de mais a escrever (a pedido, como aqui) sobre esse longínquo 25 de Abril...

Tenho, de facto, cada vez mais dificuldade em reconstituir tudo o que acabou e começou nas escolas há 25 anos, tudo o que imaginámos e quisemos sem que tivesse chegado a existir, e sobretudo tudo o que arrancou e ficou pelo caminho, hoje imerso num jargão técnico, cruzamento de siglas cabalísticas, cálculos de fórmulas várias, formulários, vocabulário financeiro onde se misturam algumas palavras (re)descobertas nesse tempo tão outro, entretanto esvaziadas. Campo de morte mais que certa das ideias transformadoras que tivemos então: "autonomia", currículos "alternativos", ensino "recorrente", unidades capitalizáveis, "abertura ao meio", "interdisplinaridade", formação contínua, unidades de crédito, médias de acesso, "flexibilidade", etc., etc....

2. E, no entanto, não foi pouco o que fizemos.

Digo "fizemos" - e falo sobretudo de professores e alunos, os principais "habitantes" das escolas (como se chegou a dizer) - porque nesses tempos (cuja imagem hoje nos apresentam tantas vezes deformada e degradada), a novidade, quando era "legislada", raramente não tinha já um pequeno tempo de prática nas escolas - das maneiras mais diversas, umas mais interessantes e outras menos, como é natural. E se a prática antecedia a lei era porque, antes dessa prática e ao mesmo tempo, as pessoas se juntavam, em reuniões longas que sabiam servir para alguma coisa. E também sabiam que cada uma dessas longas reuniões (sem "calendarização" possível...) havia de ser um acrescento (de sinal positivo ou negativo) à anterior. E cada um, se quisesse, nelas aprendia.

Nesses tempos, a novidade, quando era "legislada", raramente não tinha já um pequeno tempo de prática nas escolas

Eram tantas as coisas em que, até ao

> Eram tantas as coisas em que, até ao momento, nunca tínhamos pensado que nunca nos tinha passado pela cabeça que pudessem vir a existir, de que nunca se tinha falado nem sequer às vezes suspeitado, tantas as ideias que nunca tinham podido ser postas na mesa . Eram tantas as soluções, de um momento para o outro inventadas, com uma outra sociedade nas cabeças, nos corações e nas vontades.

momento, nunca tínhamos pensado (pelo menos em conjunto), que nunca nos tinha passado pela cabeça que pudessem vir a existir (pelo menos em tempo útil), de que nunca se tinha falado nem sequer às vezes suspeitado, tantas as ideias que nunca tinham podido ser postas na mesa (aliás as "mesas" nasceram ali...). Eram tantas as soluções, de um momento para o outro inventadas, com uma outra sociedade nas cabeças, nos corações e nas vontades. Uma outra sociedade que passava por ali também. E por todo um vocabulário novo que saía sabia-se lá donde. Por ali, digo: pelos nossos saberes e não-saberes, pelos nossos quereres e não-quereres, pelos nossos fazeres e não-fazeres.

Entrar todos os dias na escola foi, nessa altura, para muitos (falo de professores e de estudantes) encontrar o lugar do desafio, onde cada um poderia ser motor de qualquer coisa. A isso chamo experiência da "responsabilidade". Não sisuda, não peso imposto ou consentido, mas vivida na sensação de termos o mundo na mão, com a esperança de podermos vir a ser donos dos nossos destinos - o que, como se sabe, envolve sempre alguma imaginação...

3. Nada foi dado às escolas "de mão beijada". É bom lembrar que essas novas práticas (e de novas práticas escolares, de facto, se tratou) não tiveram nada de "fácil", apesar de decorrerem naturalmente do súbito rompimento com um passado (obviamente decrépito e incómodo) e de se irem instalando em muita gente com todo o gosto. Ao contrário do que por vezes hoje se ouve contar, entre mitos edificados, saudades choradas, desgostos descompensados, desapontamentos e raivas. As novidades conseguiam-se com esforço – das coisas aparentemente mais simples e imediatas (instalações, mobiliários...) às mais complicadas (formas de funcionamento, hábitos...).

Também estávamos longe do "pensamento único" e do seu determinismo implícito e acomodado. Os interesses em jogo eram múltiplos. Os partidos actuavam nos terrenos com visões do mundo e propostas de sociedade diferentes, opostas, e com forças e instrumentos muito variados. Os "acontecimentos" irrompiam pelas escolas dentro a toda a hora. As escolas não eram oásis nem fortalezas. Eram uma parte da Vida, finalmente outra. E – note-se – uma das

Os "acontecimentos" irrompiam pelas escolas dentro a toda a hora. As escolas não eram oásis nem fortalezas. Eram uma parte da Vida, finalmente outra.

"partes da vida" em que a movimentação, a transformação e o desejo de mudança (em conflito, sempre) mais visíveis foram. Basta ler os jornais da época...

Não era a escola uma das sedes mais importantes da "ideologia dominante" (como então se dizia, e "naturalmente" se dizia, e não fazia qualquer impressão ouvir), um dos lugares onde essa ideologia se tornava mais transparente e, portanto, o campo onde ("sem tréguas") ela podia ser combatida? E outras "relações sociais de produção" (era disso que se tratava, mesmo quando não se formulava assim) não pressupunham uma escola onde a "selecção" social não se ampliasse? E, para que isso acontecesse, ela não teria de ser um verdadeiro "serviço público" (o que era isso de "privadas" e seus "negócios"?), gerido pelos "trabalhadores"? Não era de "autogestão" que então se falava? Também as Caixas de Previdência foram tomadas, logo em Maio de 74, tomadas umas pelos sindicatos e outras por comissões de utentes - solução de "mera justiça" retardada...

4. "Democratizar" o ensino. Obviamente. Quem se atreveria a ser contra uma escola "para todos" (ou até "ao serviço dos trabalhadores") em que o "tronco comum" fosse cada vez mais comprido e mais grosso também? Uma escola que não teria, pois, como primeiro objectivo a "preparação para a vida" como ela estava "ainda" (encontrar emprego, um emprego melhor, "subir na vida", aumentar o "sucesso" individual em competição com o vizinho), mas o "apetrechamento" para uma vida que não havia "ainda", abreviando ao mesmo tempo a sua "chegada".

Essa "democratização" era, pois claro, fazer com que todas as crianças em idade escolar tivessem "acesso" à escola, aumentar o tempo de escolaridade "obrigatória" (passemos sobre a incomodidade da palavra), aumentar as possibilidades de todos chegarem à Universidade, se assim quisessem. E era também, para muitos, aprender nessa escola a tomar a palavra, a propor, a discutir, a decidir colectivamente; desenvolver o tal espírito crítico, criar o gosto pelo debate e pela diferença; ficar a saber mais coisas (e sobretudo outras), aprendê-las e ensiná-las de outras maneiras, sobretudo fazendo, aprendendo a usar, desprezando a burocracia como forma de vida, reformulando o conceito de "útil" até surgir como o contrário do "pragmatismo" de hoje... E era (mas para menos talvez) a "disponibilização" – no fundo uma "rentabilização", de sentido oposto à

Uma escola que não teria, pois, como primeiro objectivo a "preparação para a vida" como ela estava "ainda"mas o "apetrechamento" para uma vida que não havia "ainda"

que hoje nos é proposta - do espaço escolar que, de mil e uma formas, se devolveria assim à sociedade: regresso ou ingresso dos milhões que não tinham podido estudar, mas sobretudo espaço (gratuito e autogerido) de outras aprendizagens, de trocas de saberes, de convívio, "centros culturais" para lá das horas de trabalho e de expediente.

Foi com estas convicções (ou com algumas delas) que muitas escolas, muitos professores, muitos estudantes durante uns tempos trabalharam. Mesmo depois da imposição do "numerus clausus", das revisões de programas em nome do "pluralismo" e dos currículos para "adaptar a escola à vida"...

5. E trabalhou-se assim, sem nostalgia nenhuma da "ordem" e da "dignidade escolar" perdidas, dos quadros de honra desaparecidos, dos apontamentos ditados e das sebentas, dos exercícios de "treino", das cerimónias de avaliação, das chamadas ao quadro, das colecções de pontos de

Era o tempo das RGs, meetings, comunicados e jornais de parede - e nunca os alunos (nem os professores) terão falado, ouvido, escrito e lido tanto dentro da escola....

exame compradas na papelaria da esquina, dos castigos e das suspensões, das linhas de caminho de ferro de Moçambique e Angola decoradas em Trás-os-Montes (e vice-versa), dos desfiles da Mocidade Portuguesa, das explicações particulares...

Nas escolas, como no resto, o "regime" tinha mudado. A política estava lá e queria-se que lá estivesse. Não era um demónio, era uma realidade e um instrumento. Ampliava o conflito (o consenso não era um ideal a atingir...) e clarificava-o. As técnicas discutiam-se, mas não as discussões não eram "técnicas".

Tinha passado a haver liberdade de expressão, afixação livre de informações e de propostas. Era o tempo das RGs, meetings, comunicados e jornais de parede - e nunca os alunos (nem os professores) terão falado, ouvido, escrito e lido tanto dentro da escola....

Já havia direito de reunião e de associação: os professores já não eram "servidores do estado" e tinham sindicato. Era o tempo em que cada moção aprovada seguia simultaneamente para o Ministério e para esse Sindicato - e não precisava de resposta para ser posta em prática.

Já não havia reitores e directores com funções policiais, impostos pelo Governo. Tinham-se imediatamente eleito comissões - "directivas", "de gestão", "grupos de trabalho", etc. etc... - com ou sem "paridade" de representação dos vários sectores da escola, onde cada um apresentava propostas, que haviam de perder ou de ganhar.

Já havia "co-educação" - esse bicho de sete cabeças uns dias antes. Já não havia Organização Política e Administrativa da Nação...

As próprias aulas puderam ser outras: "abertas", com uma disposição diferente da secretária e das carteiras, tratando de tudo aquilo de que se podia finalmente falar - e analisar, e estudar, e explicar, e perceber. Não era um pormenor assim tão pequeno. Tratava-se de pedagogia. Pedagogia era política. E a política era a Vida.

6. Não foi pouco o que nos aconteceu. E não foi pouco o que fizemos, repito. Até porque tínhamos pela frente (falo dos professores), uma imensidão de coisas a aprender que nunca nos tinham ensinado, havia que de repente "ensinar o mundo todo", descobrir outra justiça, usar a razão, refazer os hábitos, trabalhar "democraticamente". Com um outro rigor, mais rigor, ao contrário do que é costume dizer-se. As hierarquias deixavam de funcionar e também de ser desculpa. Não tínhamos patrões, ou assim parecia.

Para que serviriam, então, as "faltas", se o aprender parecia ser cada vez mais usar linguagens e instrumentos, fabricar discursos e objectos, pensar, e se a avaliação (portanto) só poderia ser "contínua" e dizer se cada um estava "apto" ou "não apto"? Como (e para quê) traduzir em algarismos as "competências" (e incompetências) de cada um, se não era de "competição" que essa nova vida se fazia ?

É com dificuldade que me lembro desse tempo em que tudo era discutido e em que a discussão não impedia que as coisas se fizessem. Por exemplo: os infindáveis debates à volta dos "organigramas" que foram materializando e racionalizando as descobertas sobre o funcionamento que cada escola começava a ter, queria passar a ter, sem muito se saber "como", mas sabendo-se bastante "para quê".

Foi de "gestão das escolas" que rapidamente se passou a falar, um pouco como se de uma empresa se tratasse. Era um conceito novo então e com uma ambiguidade que se tem arrastado e nos tem arrastado até ao economicismo e à insuportável burocratização de hoje.

Tenho dificuldade em me lembrar da primeira campanha para a direcção do Sindicato dos Professores da Zona da Grande Lisboa, das dezenas de "sessões de esclarecimento" da lista "Pelo Poder das Escolas" em que participei (35% de votos, numa altura em que quase toda a gente era sindicalizada). Falava-se de escolas sobretudo, muito mais do que de "regalias" e quase nada de "carreiras". As escolas eram de quem nelas trabalhava e estudava e de quem as quisesse usar. Tínhamos um vasto campo de transformações à nossa frente: os "conteúdos" (inseparáveis dos métodos e que não queríamos "compartimentados") e, mais ainda, a organização do espaço e do tempo escolares que se tratava de pôr dos pés para a cabeça. "Abertura ao meio" era ligar o saber escolar à

É com dificuldade que me lembro desse tempo em que tudo era discutido e em que a discussão não impedia que as coisas se fizessem

realidade, privilegiando as necessidades e as ciências dos trabalhadores. Não era fazer o levantamento do "folclore" turístico da zona, nem trabalhar com os olhos postos no mercado de trabalho da região, e muito menos encontrar interlocutores nas "forças vivas da terra", paróquias, empresas ou bombeiros...

E já dificilmente me lembro de um projecto à volta do Porto de Lisboa que mobilizou o primeiro 7º ano unificado do Camões, onde a Matemática podia entrar pelo Português dentro, os Estudos Sociais haviam de chegar aos estivadores e a História certamente poria no seu devido lugar as caravelas... Parecia possível pôr toda a gente a organizar, a calcular, a ler, a escrever, a desenhar para essa coisa "inútil" que é perceber o mundo e arranjarmos lugar dentro dele.

Sem "autonomia" decretada, esse foi o tempo da autonomia de cada um e de cada escola. Sem "área escola" regulamentada esse foi o tempo das tentativas de "interdisciplinaridade" e de "abertura ao meio". Um tempo em que a imaginação e a vontade faziam parte da realidade, como os objectos, os números e as ideias, e em que as palavras contavam. Não se "requeria" nem se "solicitava", pouco se "pedia", muito se "exigia". Sobretudo a nós próprios. E "exigir" era pôr em prática.

Sem "autonomia" decretada, esse foi o tempo da autonomia de cada um e de cada escola. Sem "área escola" regulamentada esse foi o tempo das tentativas de "interdisciplinaridade" e de "abertura ao meio"

7. É de facto difícil encontrar as palavras que possam descrever objectivamente um tempo em que a "desobediência civil" era uma forma natural de viver, quando estamos num tempo de obediência, de decretos, regulamentos, créditos e capitalizações. E, ainda por cima, querer que se acredite nele como num momento em que, se a utopia não foi realidade, a realidade se aproximou alguma coisa da utopia. E quando é de "distúrbios", "desordens", "violências" que se fala das poucas vezes em que se chama o 25 de Abril à colação...

O que se vive hoje nas escolas não é uma "herança" directa desse tempo. É uma "estabilização-rentabilização" das "medidas" progressivamente tomadas e aceites, sobretudo a partir do 25 de Novembro, contra uma escola que estava a nascer e que, sabendo que não o podia fazer sozinha, se propunha, por exemplo, contribuir para que o analfabetismo não se transformasse em "iliteracia", a ditadura política em "ditadura do mercado", a censura em "pensamento único", as gritantes desigualdades e discriminações em "exclusão".

Medidas que pouco (ou nada) têm a ver com "pedagogia". Sobretudo se se pensar que as grandes aprendizagens – e não foi pouco o 25 de Abril ter voltado a mostrar isto a quem o quis ver – não se fazem necessariamente nas escolas, mas em qualquer lugar, e colectivamente, e tendo a necessidade e o gosto por razão.

Ao contrário do Prémio Nobel da Literatura, não penso que as escolas, sem 25 de Abril, fossem as que hoje são. Seriam muito piores ainda. Há, apesar de tudo, uma reserva de memória, de imaginação e de resistência, que por mais sumida, resignada e mal orientada que a gente a veja, "sai da casca" às vezes, com o que se aprendeu (e desaprendeu) entretanto, e com as voltas que o mundo deu.

É fácil, como faz o Prémio Nobel da Literatura, entregarmo-nos de baraço ao pescoço à "inelutável" globalização. E é também fácil apelidar de "utopistas" e "irrealistas" aqueles que encontram ensinamentos naquilo que puderam viver há 25 anos – um tempo excepcional e que, aparentemente, poucos contactos tem com a realidade presente. Como Chomsky, penso outra coisa: "*Se vivemos hoje num mundo em muitos aspectos diferente do de Jefferson e dos operários de meados do século XIX, as escolhas intelectuais e práticas que se nos oferecem não são lá por isso radicalmente diferentes*".

Por isso, foi com muito gosto que me dei ao trabalho de escrever este texto.

PS - Recado para os leitores desta revista: uma das muitas coisas que sempre julguei possível (e no 25 de Abril bastante mais) era usar-se a Matemática no ensino do Português e o Português no ensino da Matemática. Não foi ainda possível. Ninguém me diz que nunca será. Também ninguém me diz que esta "impossibilidade" (como tantas outras) não tem nada a ver com a "violência nas escolas". Ou seja a violência da sociedade.

Eduarda Dionísio

Parede de Abril

Encontro sobre ensino e aprendizagem da Geometria

João Pedro da Ponte

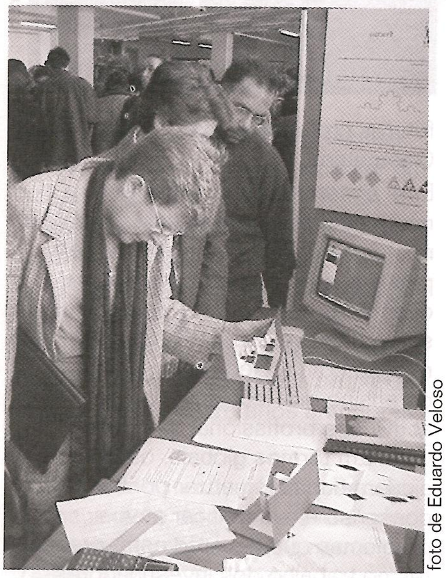


foto de Eduardo Veloso

O Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, com a colaboração da APM, organizou, nos dias 4 e 5 de Fevereiro de 1999, um Encontro sobre Ensino e Aprendizagem da Geometria com a participação de dois especialistas internacionais: James King, professor de Matemática da Universidade de Washington, e Claudi Alsina, professor da Universidade Politécnica da Catalunha.

A Geometria está hoje no centro das grandes preocupações educativas e carece de uma análise cuidada nas suas vertentes de ensino, aprendizagem e formação de professores. Na verdade existem muitas possibilidades quanto ao seu lugar no currículo. A importância crescente das aplicações de cunho geométrico e a emergência de novas ferramentas computacionais têm alargado o leque de escolhas disponíveis, tornando o problema ainda mais difícil de resolver. As alterações curriculares, a prática lectiva dos professores e a sua formação inicial em Geometria têm sido realizadas na ausência de uma reflexão global sobre quais os conteúdos e as metodologias para um ensino renovado deste tema, lacuna que este encontro procurou colmatar.

Os participantes salientaram que tanto a experimentação e a dedução são importantes, desempenhando um papel complementar. O desenvolvimento da intuição deve ser uma preocupação constante do professor do ensino básico ao superior e a dedução com carácter local deve começar a surgir desde relativamente cedo, embora os estudos de cunho estritamente axiomático devam ficar para o fim do ensino secundário.

Nesta linha de pensamento, o trabalho investigativo e a experimentação foram consideradas fundamentais. Os alunos têm de desenvolver as capacidades de resolução de problemas, formular conjecturar e testá-las. Mais tarde devem formalizar e provar as suas asserções. Do mesmo modo, o uso de tarefas que remetem para a visualização constitui uma ideia forte sublinhada por muitos participantes.

As conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e a importância a dar às aplicações mereceram também um consenso significativo. A Geometria não deve ser remetida para um gueto, sendo urgente uma melhor ligação à álgebra e ao cálculo numérico. Deve haver também um melhor uso das aplicações, nomeadamente às artes visuais, arquitectura, astronomia, etc.

Alguns pontos foram identificados como problemáticos. Um diz respeito às novas tecnologias. Estas, para alguns participantes, trazem possibilidades acrescidas para a experimentação e a investigação de numerosos assuntos por parte dos alunos. Para outros, não trazem nada de substancial ao ensino, chocando-se até com a falta de condições nas escolas e o estudo para os exames.

Outra questão bastante discutida refere-se ao currículo. A ênfase em diferentes objectivos envolve distintas opções curriculares, cada uma das quais com as suas consequências para o processo de ensino-aprendizagem. Trata-se de uma questão que merece ser aprofundada no futuro. Na verdade, é muito diferente pensar no ensino para todos ou nos alunos que procuram o ensino superior com vista a tirar um curso de Matemática.

Discutiu-se também se se devem ensinar novos assuntos, de invenção recente ou assuntos desde há muito valorizados. O ponto, a recta, o

foto de Eduardo Veloso

triângulo e o círculo devem continuar no centro das atenções ou dar lugar a outros objectos? Também aqui não houve total acordo. Algumas intervenções sugerem que se entre depressa na Geometria Tridimensional e dê mais ênfase às transformações. Outros sublinham a importância de temas como a digitalização, codificação, reconhecimento e geração de imagens, robótica e estruturas. Mas também há quem defenda que os temas "clássicos" têm uma importância de tal maneira fundamental, que dificilmente podem ser colocados em plano secundário.


foto de Eduardo Veloso

Constatou-se que o currículo da Geometria depende antes de mais do que se entende por currículo, das finalidades (explícitas e implícitas) do ensino da Matemática e, sobretudo, da relação que se estabeleça entre o currículo e os professores. Para alguns participantes, o centro da atenção deve continuar a ser o currículo enunciado, enquanto que outros sublinham que a valorização da autonomia profissional do professor deve fazer deslocar o centro das atenções para o currículo praticado.

No que respeita à formação de professores, vários participantes consideraram que a Geometria deve ter um lugar destacado nas licenciaturas, pós-graduações e mestrados. Os temas a enfatizar incluem, para uns, os assuntos "clássicos" como a Geometria euclidiana plana, a geometria projectiva, hiperbólica e elíptica e a geometria das superfícies. Outros sublinham a importância de novos tópicos e novas aplicações.

Outros ainda indicam que a questão essencial é a dos processos de ensino e aprendizagem, sendo também importante uma boa formação dos futuros professores na Didáctica da Geometria.

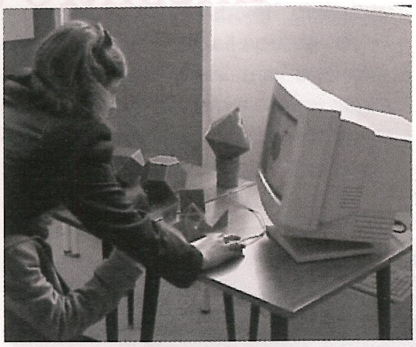


foto de Eduardo Veloso

Este encontro, cujas Actas serão muito em breve publicadas, proporcionou um saudável confronto de perspectivas ente os participantes. As diferenças de ponto de vista podem ser, muitas vezes, explicadas pela sua relação com a Geometria, pelo nível de ensino que leccionam ou pela actividade profissional que desenvolvem. Em termos globais, os trabalhos ajudaram a sistematizar pontos de consenso e a identificar novos problemas que deverão estar presentes no trabalho dos investigadores, professores e responsáveis curriculares.

João Pedro Ponte
F. Ciências da Universidade de Lisboa

25 de Abril visto hoje

25 anos parece bastante tempo, para nós que somos jovens mas não é.

Os mais velhos lembram-se bem dessa data histórica em que se pôs fim a 48 anos de fascismo. Para eles é como se tivesse sido ontem. No entanto, nos dias de hoje só estes – os mais velhos– lhe parecem reconhecer a devida importância, talvez por terem sido eles a vivê-la.

Parece existir um desfasamento da geração mais jovem em relação a esta data. Acho que nos estamos a esquecer que foi aos nossos pais e avós que devemos a liberdade que vivemos neste último quarto de século.

Será que imaginaram o que era viver sem se poder dizer o que se pensava, ser preso e torturado por não se concordar com os ideais impostos pelo regime, não poder escolher os seus governantes nem criticá-los, não poder pertencer a outros partidos senão àquele que estava no poder, viver na ilegalidade, etc.? Ser educado numa ideologia fascista, não poder ver nem ouvir filmes nem músicas que transmitissem ideias contrárias ao sistema? Será que imaginaram isso? Por outras palavras, viver amordaçado, sob o medo, sem poder pensar livremente e sem liberdade.

Será que já reparámos no que ganhámos nestes últimos 25 anos?

Liberdades individuais e colectivas, democracia, direitos humanos, liberdade de pensamento e de expressão – que possibilitaram a actividade política e intelectual que não seguiam os padrões do sistema. Para não falar das colónias que ganharam a independência (mas que estão na miséria).

Será que já notámos que temos uma imensa dívida para a geração mais velha? É bom não esquecer isso. Talvez seja uma dívida que não seja possível saldar. Afinal, foram eles que restituíram a liberdade ao país onde nós vivemos.

Ainda assim, OBRIGADO.

Filipe André,
10º ano 3ª Turma,
Esc. Sec. de Linda-a-Velha.
Trabalho realizado no âmbito da disciplina de Int. Téc. de Informática.

Leituras

Geometria — Temas Actuais

No ano em que se realiza o estágio pedagógico é necessário elaborar um trabalho científico que aborde um tema matemático de uma maneira bastante formal, isto é, com definições, teoremas e demonstrações. É um trabalho que, normalmente, deixa os estudantes bastante apreensivos pois nunca realizaram nada semelhante durante os quatro anos anteriores do curso.

Foi durante o meu estágio que tomei conhecimento de uma versão ainda não definitiva do livro *Geometria, Temas Actuais*, de Eduardo Veloso, que me viria a inspirar para a realização do meu trabalho científico e a despertar o gosto e a curiosidade pela Geometria.

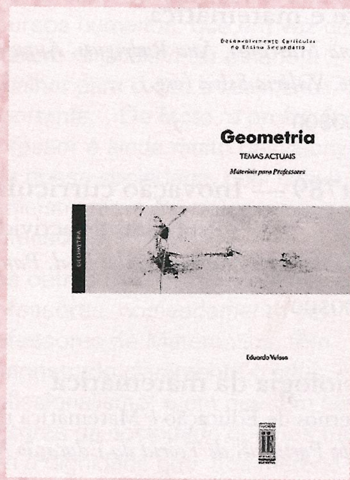
Este livro serviu como um ponto de partida para muitas e frutuosas investigações. Hoje, sempre que pretendo estudar algum tema de geometria, consulto em primeiro lugar o índice deste livro, pois, por certo, deve falar sobre esse tema, ou ter alguma bibliografia onde ele seja desenvolvido.

O autor trata os assuntos de uma forma bastante atraente e compreensiva, apelando sempre para a participação do leitor nas investigações e desafios que vai propondo.

O livro começa por nos dar uma visão sobre o "Passado recente e futuro do ensino da geometria". Depois são abordados os mais variados temas, desde transformações geométricas, visualização e representação, várias perspectivas, simetria, padrões, frisos, pavimentações, poliedros platónicos e não só, forma e dimensão (com uma "breve visita à quarta dimensão", onde o leitor é desafiado a imaginar as secções do hipercubo), geometria fractal, várias geometrias não euclidianas (inversiva, motorista de táxi, esférica, hiperbólica).

A história da geometria surge em todos os capítulos e culmina nas últimas páginas, numa cronologia fantástica, que nos dá uma visão sobre o desenvolvimento que a geometria teve ao longo dos séculos, enquadrando-a na História da Humanidade. É assim que podemos ficar a conhecer os três problemas clássicos da matemática grega; o fascínio do estudo das curvas ao longo dos séculos, incluindo uma passagem pela história das cónicas, mecanismos como o compasso de Descartes "que traça tanto a circunferência como curvas de grau superior", a diferença entre evolutas e involutas, o caracol da Pascal; os prismas e antiprismas, como obter poliedros estrelados, o que é a *stella octangula* ou o método de Durer para o traçado da hipérbole;... e podíamos continuar a enunciar inúmeros assuntos naturalmente desconhecidos de muitos de nós.

Ao longo do livro o autor recorre, frequentemente, a programas de geometria dinâmica, como é o caso do *Geometer's Sketchpad* que, segundo ele, são "instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas actividades de exploração, investigação e descoberta em geometria e na matemática em geral".(p. 92). Há sempre o cuidado de introduzir diversas notas que fornecem numerosas indicações bibliográficas para os leitores que pretenderem saber mais sobre os temas propostos, assim como endereços da Internet.



Geometria

TEMAS ACTUAIS

Materiais para Professores

Autor: Eduardo Veloso

Editor: Instituto de Inovação Educacional

1º edição :Julho 1998

Preço especial na APM : 3500$00

Este livro é indispensável a todos os professores de Matemática. São garantidas agradáveis horas de leitura e a possibilidade de readquirir o gosto pela geometria. É um grande contributo para afugentar os fantasmas que pairam sobre a geometria. É um livro que nos permite olhar a geometria com outros olhos.

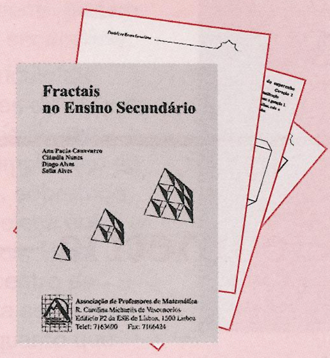
Nuno Candeias
Escola Secundária de Caneças

Últimas publicações APM

Fractais no Ensino Secundário

Ana Paula Canavarro, Cláudia Nunes, Diogo Alves, Sofia Alves

2 000$00

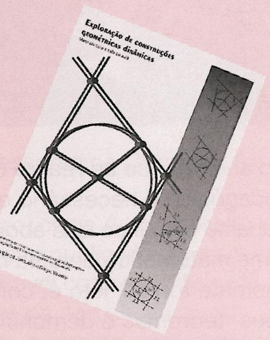


Exploração de construções geométricas dinâmicas

Materiais para a sala de aula

Margarida Junqueira, Sérgio Valente

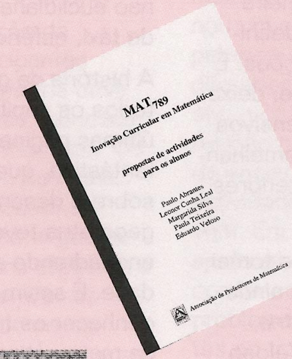
850$00



Arte e matemática

Helena Martinho, Ana Rodrigues, Augusto Barreto, Glória Ferraz, Sandra Martins, Susana Diego, Valéria Silva (org.)

2 000$00



Mat789 — Inovação curricular em Matemática

- Propostas de actividades

Paulo Abrantes, Leonor Cunha Leal, Paula Teixeira, Eduardo Veloso

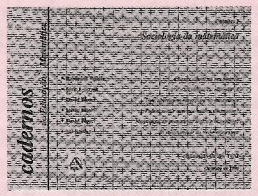
1 200$00

Sociologia da matemática

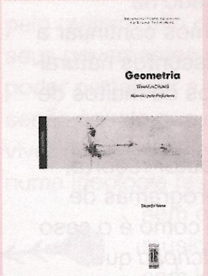
Cadernos de Educação e Matemática nº 3

Grupo Português de Teoria da Educação Matemática (org.)

700$00



Outras edições disponíveis na APM



Geometria — Temas actuais

Eduardo Veloso

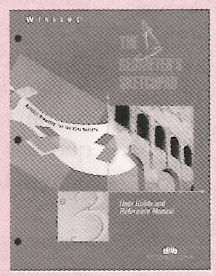
3 500$00

Mat789 — Inovação curricular em Matemática

- Textos de Educação

Paulo Abrantes, Leonor Cunha Leal, Paula Teixeira, Eduardo Veloso

750$00

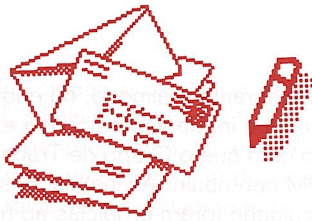


The Geometer's Sketchpad

Sofware didáctico

14 000$00 (sócios); 35 000$00 (escolas)

Pontos de vista, reacções, ideias...



A profissão de professor é ainda muito desvalorizada pela sociedade e pela admnistração

Às vezes penso que isto nunca mais se endireita. Um dia destes fui convocada pelo Departamento do Ensino Secundário para uma reunião de trabalho sobre os exames nacionais. Como eu, na qualidade de responsável pelo programa ENES, foram convocados também o presidente da Comissão Executiva Instaladora, a presidente dos Serviços Administrativos e o coordenador do secretariado de exames da minha escola. O número de participantes na reunião era bem superior a uma centena, representantes das várias escolas do agrupamento. Na mesa da reunião, para além das colegas do DES, estavam a responsável pelo agrupamento, representantes da DREL e do CAE e a coordenadora regional do Júri Nacional de Exames. Era portanto uma reunião de profissionais com bastantes responsabilidades nas nossas escolas e na administração do nosso sistema de ensino.

A dita reunião tinha sido convocada para as três da tarde. Às três e vinte, com a sala completamente cheia, alguns elementos da mesa tentavam ainda colocar um retroprojector e um écran de forma a que do fundo da sala se conseguisse ver umas transparências que tinham preparado. Trabalho inglório! A sala, a bem dizer, não era uma sala. Era um átrio, normalmente utilizado para o convívio dos alunos, no qual tinham disposto umas cadeiras em filas para a reunião. Não havia possibilidade de escurecer o átrio e o tamanho e tipo de letra usada nos acetatos não permitia que se lesse para além da terceira fila. Por outro lado, com uma completa ausência de condições acústicas, agravada por uma frequência considerável de aviões a passar por cima, a comunicação tornou-se impossível na reunião. Isto para não falar das correntes de ar, e da falta de condições para escrever, já que as cadeiras não eram próprias para isso. Enfim, a reunião começou atrasada, e consistiu na leitura e interpretação das instruções constantes no guia de exames, já distribuído às escolas, leitura esta gritada em bicos dos pés para que alguma coisa chegasse aos ouvidos dos que tinham ficado mais atrás.

Tenho que confessar que saí de lá perturbada. Não por causa daquela reunião, mas porque aquela foi só mais uma das muitas que se fazem frequentemente por esse país fora. E sobretudo porque os professores, tanto os convocados como os que convocaram, se comportavam como se aquilo fosse normal! Eu pensava que nunca tinha ido para uma aula sem ter preparado previamente o retroprojector e o écran, ou outro material que fosse usar, e me ter certificado que estava tudo a funcionar quando começasse a aula. Eu seria incapaz de ir para uma aula em que os alunos não tivessem condições para comunicar uns com os outros e comigo, ou para escrever e tirar apontamentos. Finalmente, eu seria incapaz de ir para uma aula ler e interpretar o manual escolar para os alunos acatarem a minha leitura e interpretação! Mas afinal, se nós tratamos os nossos alunos com o respeito e a dignidade que eles merecem, porque é que continuamos a achar natural que nos tratem e nos tratemos da maneira pouco dignificante que descrevi? Será que o DES é assim tão pobre que não pode dispor de uma sala com condições de trabalho? Não me parece, porque se assim fosse também não se daria ao luxo de desperdiçar o tempo de mais de uma centena dos seus melhores recursos humanos, que em vez de estarem ali podiam ter estado a trabalhar para o que é realmente importante... De facto, a profissão de professor é ainda muito desvalorizada pela nossa sociedade, pela nossa administração e até pelos próprios professores.

Mas outras situações há em que os professores, nomeadamente os professores de Matemática, têm demonstrado claramente o seu profissionalismo, e em que tem havido sectores da sociedade que nos tratam com a dignidade que nós merecemos. Estou a pensar concretamente no Seminário sobre Ensino e Aprendizagem da Geometria que decorreu na Faculdade de Ciências nos dias 4 e 5 de Fevereiro, promovido pelo seu Departamento de Educação. A participação dos professores foi muito maior que a esperada - estavam lá cerca de 400 professores dos vários graus de ensino e com as mais variadas experiências, desde os estagiários até aos que já todos conhecemos pelo trabalho que têm desenvolvido. Fomos tratados como deve ser. Houve momentos para ouvir os outros (foram óptimas as conferências a que pude assistir, nomeadamente as dos professores James King, Claudi Alsina e Eduardo Veloso); houve momentos de debate acalorado, os dos dois painéis; houve momentos de reflexão conjunta sobre os problemas do ensino da geometria, momentos esses bastante participados pelos professores presentes; e houve, claro está, os momentos para encontrar colegas com quem gostamos de trocar ideias no intervalo do café, durante o almoço, ou enquanto víamos e interagíamos com a exposição com que o Grupo de Trabalho da APM contribuiu. As instalações da Faculdade foram propícias ao trabalho e à comunicação, tudo funcionou como previsto e nos horários previstos. E não foram só retroprojectores que se usaram: várias conferências fizeram uso de computadores e projectores de dados, a tecnologia esteve sempre presente ao longo do encontro. Foi muito caro organizar uma coisa destas? Foi muito difícil? Quem ganha com isto?

Parece-me evidente que acontecimentos destes proporcionam muito mais ganhos do que custos. Ganham os professores porque se enriquecem e voltam para as escolas com novas perspectivas, mais estimulantes, de trabalho, ganha o sistema e a administração porque dispõem de profissionais cada vez melhores, ganham os alunos porque é para eles que trabalhamos, ganha a sociedade porque os nossos alunos são os seus cidadãos mais recentes. Então, se todos ganham, porque é que não pode ser sempre assim?

Rita Bastos
Esc. Sec. António Arroio

Ensino Recorrente por Unidades Capitalizáveis: efectivamente uma segunda oportunidade?

O tema do Ensino Recorrente, em termos de Encontro Nacional de Professores de Matemática, teve um espaço próprio pela primeira vez no PROFMAT 96, que se realizou em Almada, com o grupo temático "Unidades Capitalizáveis: sabemos rentabilizá-las?", dinamizado por Fátima Ribeiro Guimarães (Escola Secundária D. Pedro V), João Manuel Alves Lima (Escola Secundária D. Pedro V), Luísa Maria Roseira Ramos (Escola Secundária da Parede) e Margarida Junqueira (Escola Secundária de S. João do Estoril).

No PROFMAT 97,que se realizou na Figueira da Foz, teve lugar um painel, em que participaram António Ferreira (Escola Secundária Joaquim de Carvalho), Fátima Ribeiro Guimarães (Escola Secundária D. Pedro V), João Manuel Alves Lima (Escola Secundária de Odivelas), José Manuel Varandas (Departamento de Educação-FC-UL).

O trabalho do painel teve como ponto de partida o visionamento de um vídeo contendo entrevistas realizadas a professores e alunos da Escola Secundária de S. João do Estoril, material preparado por Margarida Junqueiro.

Da experiência dos intervenientes nos debates, incluindo intervenções de professores de todo o país, julgamos continuar a ser válidas e actuais as seguintes recomendações:

- que os responsáveis do M. E., em lugar de tomarem decisões apenas com base em abstrações teóricas ou modelos importados sem adaptação à nossa realidade, aproveitem também experiências válidas de professores e alunos interessados;
- que a formação dos professores do sistema tenha um carácter não só teórico mas também prático, para permitir gerir pelo menos quatro unidades diferentes numa turma com cerca de 30 alunos em que nem todos estão no mesmo ponto da unidade;
- que as matrículas se realizem a tempo dos orgãos de gestão da escola poderem aproveitar os professores já com experiência e provas dadas no sistema;
- que quando os alunos se matriculem tenham a possibilidade de escolher este ou outro sistema, pois conclui-se que muitos dos professores que conseguem algum sucesso desvirtuam o espírito do sistema;
- que o papel dos coordenadores pedagógicos ultrapasse a mera actividade burocrática;
- que as equivalências sejam revistas pois por vezes não fazem paralelismo de conteúdos;
- que se atente a que a sobreposição de todas as turmas do básico tem como resultado que vários professores percam o direito à redução de duas horas e os alunos percam o espírito de turma;
- que, para os alunos assíduos, se tenha efectivamente em conta classificações obtidas noutro tipo de actividades, acertando critérios que minimizem a subjectividade;
- que, em cada escola houvesse um centro de recursos com materiais adequados a este tipo de ensino;
- que as primeiras unidades tanto do 3º ciclo do ensino básico como do ensino secundário sejam revistas de modo a que seja possível a um aluno médio capitalizá-las no decorrer do 1º período;
- que, no ensino secundário, o número de horas semanais esteja de acordo com o cumprimento do programa atendendo às indicações metodológicas;
- que se reorganizem as unidades do programa do ensino secundário de modo que a última tenha actividades de carácter integrador dos vários conteúdos abordados nas outras;
- que, se é verdade que o ensino recorrente é uma segunda alternativa, os programas deveriam estar de acordo com o exame nacional, o que não se verifica, havendo grande compartimentação dia/noite;
- que para o ingresso na vida activa os cursos tecnológicos tenham efectivamente os mesmos efeitos práticos que os técnico- profissionais;

Foi considerado positivo não ter havido prova base no ano lectivo 1996/97, (anteriormente apenas os alunos do ensino recorrente tinham que a realizar), a recente tentativa, da parte do M. E., em dar formação aos professores deste tipo de ensino e a constituição de dois grupos de trabalho, um deles para proceder à avaliação externa global do ensino e outro para elaboração de um documento de estratégia para o desenvolvimento da educação de adultos.

As deficiências que sempre foram sendo apontadas, não podem ser alibi, muito menos quando se fala tanto num novo ciclo, o da qualidade, para a extinção de cursos no ensino nocturno. Não nos parece que aumente a escolaridade dos portugueses, muito menor, em comparação com outros países da Europa.

É causa de espanto que o M. E., tendo criado um grupo de trabalho sobre Educação de Adultos, continue a introduzir alterações avulsas como o que é proposto no ofício-circular nº 121 de 29 Setembro de 1998, antes de repensar globalmente. Assim, por exemplo, o esquema proposto para a aula de apoio, não se compadece com a promoção do sucesso da disciplina de Matemática.

Conhecendo os alunos reais com que trabalhamos como professores de Matemática, questionamos a eficácia dos métodos de ensino à distância na nossa disciplina. Falamos de real sucesso, não sucesso padronizado em qualquer "contrato de formação", artificialmente obtido para que seja renovado o contrato à escola formadora. Basta ver o que se passa em alguns cursos de formação profissional.

Para contemplar o problema da certificação, estamos de acordo com os que defendem que para o ensino recorrente ser equivalente ao regular, não tem que ser obrigatoriamente uma cópia deste nem no ensino nem na aprendizagem, nem no contexto em que isso acontece mas pensamos dever cumprir os seguintes objectivos:

1º) permitir a integração no mercado de trabalho aos que, terminado o ensino básico ou o secundário, não queiram prosseguir estudos;

2º) possibilitar percursos de formação que também permitam ter êxito nas provas específicas exigidas aos que completarem o ensino secundário e pretendam ingressar no ensino superior.

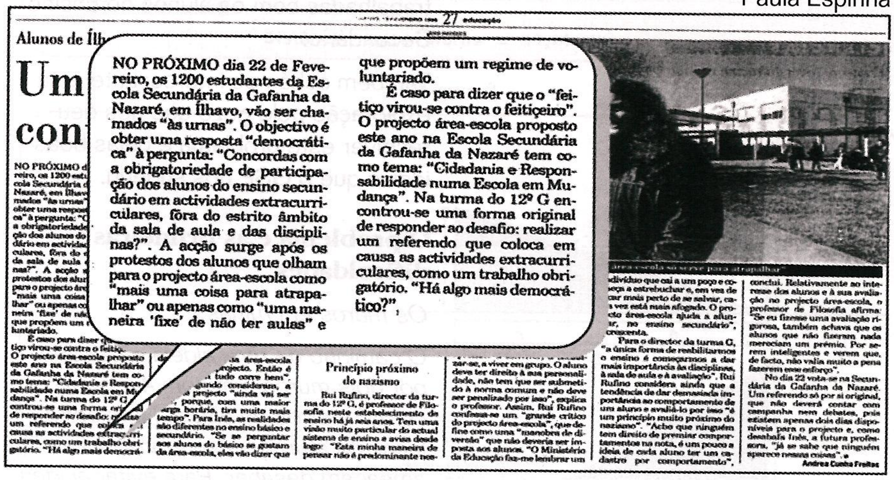
Mas como conciliar estes objectivos com *o partir do* quotidiano e vivências dos alunos adultos, das suas experiências pessoais, para chegar a alguns, mesmo que diversificados, "perfis de saída" que nos parecem ter sempre que existir?

Atendendo a que temos muitas dúvidas esperamos que todos os interessados no Ensino Nocturno de qualidade contribuam com as achegas necessárias à realização dos objectivos que acabamos de referir.

Fátima Ribeiro Guimarães
Escola Secundária D. Pedro V
João Manuel Alves Lima
Escola Secundária de Odivelas

"Um referendo contra a área-escola"?

Hoje em dia apela-se cada vez mais à participação na vida da escola de todos os membros da comunidade educativa. Apregoa-se a necessidade de negociar regulamentos internos, de alargar os debates e de incentivar a colaboração e a interacção entre os diversos intervenientes do acto educativo. O desenvolvimento do espírito democrático é, pois, uma das principais finalidades educativas tendo em vista preparar cabalmente os alunos para a cidadania. De facto, estes aspectos são, actualmente muito valorizados e considerados inerentes ao papel da escola. Igualmente, a aquisição de espírito crítico é uma das capacidades transversais presentes no currículo que compete aos professores desenvolver. Porém, todos estes desafios, que actualmente se colocam à escola e aos professores, têm de ser sempre enquadrados dentro de um discurso ético e não podem entrar em conflito com princípios já definidos.



Isto a propósito da notícia "Um Referendo Contra a Área-escola" vinda no Público do dia 13 de Fevereiro.

Como comentário a esta notícia apresentamos uma pequena citação extraída de "Contradictions and tensions in the professionalização of teaching and the democratization of schools", p.370, de K. Zeichner: "Embora necessitemos de encorajar e apoiar um processo de deliberação democrática no interior das escola que inclua os pais e os alunos, assim como os administradores e os professores, precisamos de encontrar uma maneira de estabelecer determinações relativas à bondade das escolhas que emergem de tais deliberações (...) Em primeiro lugar, o facto de todas as partes interessadas participarem não significa que todos tenham influência no processo deliberativo (...) Em segundo lugar, precisamos de encontrar uma forma de assegurar que as decisões que decorrem destas deliberações não violam certos padrões morais, tais como a justiça social e a equidade".

A estes valores poderíamos acrescentar liberdade, a pluralidade .... e outros.

Fátima Guimarães
Paula Espinha

Concurso "A Matemática é fácil"

O concurso a "Matemática é fácil" foi realizado por mim e pelos colegas do 4º grupo, na Escola E. B. 2,3 de Ferreiras - Algarve, no ano lectivo de 1995/1996, ao longo do 2º e 3º períodos. O objectivo deste concurso era colocar os alunos do 2º ciclo, desta escola, a resolver problemas (um em cada mês).

Assim, em cada mês, rotativamente, cabia a um professor do grupo escolher o problema, divulgá-lo aos alunos do 2º ciclo e corrigi-lo.

Os alunos interessados em participar neste concurso, resolviam o problema numa folha A4 que dobravam e colocavam numa caixa construída para o efeito e que se encontrava na papelaria da escola. (continua pág. 18)

A propósito de muros em ruínas

António Bernardes, Cristina Loureiro

Na secção *Desafios* do jornal *Público* de 15 de Novembro de 1998 é apresentado um problema intitulado *Os muros em ruínas* que, pela riqueza e diversidade de explorações que proporciona, nos mereceu especial atenção. É nesse sentido que aqui propomos três abordagens, diferentes mas complementares, e que nos parecem interessantes para serem trabalhadas com os alunos do Ensino Secundário.

Também achámos interessante esta exploração pelo gozo que nos deu resolver este problema e pelas boas ideias que o GSP nos sugeriu.

O problema e as primeiras dificuldades

Os muros em ruínas

O caminho de uma aldeia é ladeado por dois muros, um com 4 e outro com 7 metros de altura. Num certo local, os muros estão em ruínas e ameaçam desabar. Para evitar acidentes e enquanto os proprietários não efectuam as necessárias reparações, a junta de freguesia colocou umas traves a segurar os muros, conforme se mostra na figura. A que altura do chão se cruzam as traves?

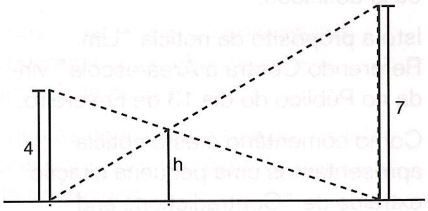


Figura 1

Começámos por identificar na figura algumas medidas desconhecidas.

Recorrendo à semelhança de triângulos podemos retirar da figura duas relações úteis. (Ver figura 2)

$$\frac{a}{d}=\frac{h}{7} \qquad \frac{b}{d}=\frac{h}{4}$$

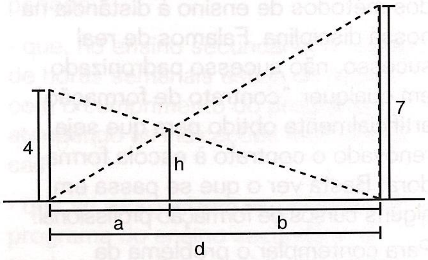


Figura 2

Constatamos que temos apenas duas condições e quatro incógnitas. É pouco para a solução que sabemos ser única. Temos a certeza disto pela representação visual que o problema sugere.

Uma simples manipulação algébrica leva-nos à relação $7a = 4b$.

Uma certa tendência para a manipulação algébrica, que aliás é vulgar neste tipo de problemas, pode fazer-nos identificar mais variáveis e procurar mais relações entre elas. Vamos evitar essa tendência.

Exploração com o programa *The Geometer's Sketchpad*

Podemos começar por simular a situação no *GSP*. (Ver figura 3)

Após alguma experimentação reconhece-se que:

- o comprimento das traves depende da altura dos muros e da distância entre eles;
- a altura a que se cruzam as traves é independente da distância entre muros.

Este último aspecto é o mais interessante de explorar. Não é que não estivessemos à espera de que isso acontecesse, os dados do problema,

Três abordagens, diferentes mas complementares, interessantes para serem trabalhadas com os alunos do ensino secundário, o gozo que deu a resolução do problema e as boas ideias que o GSP sugeriu...

em que nada se dizia sobre a distância entre muros, apontavam no sentido dessa independência. Mas a observação dinâmica da situação fez-nos pensar na existência de um rectângulo, com altura constante e igual a h, que conduziu à resolução geométrica por semelhança de rectângulos.

Resolução geométrica

A exploração com o GSP sugeriu-nos a exploração geométrica, apresentada na figura 4, usando a semelhança de triângulos:

De [1] e [3] obtém-se: $\frac{4-h}{4} = \frac{h}{7}$

De [2] e [4] obtém-se: $\frac{7-h}{7} = \frac{h}{4}$

Usando qualquer uma das igualdades, por exemplo a segunda:

$28 - 4h = 7h \;\Leftrightarrow 11h = 28 \;\Leftrightarrow h = \frac{28}{11}$

$\Leftrightarrow$ h ≈ 2,54 metros.

Mas podíamos ter seguido outro caminho.

Resolvendo a equação $\frac{a}{d} = \frac{h}{7}$ em ordem a a obtém-se: $a = \frac{dh}{7}$

Resolvendo a equação $\frac{b}{d} = \frac{h}{4}$ em ordem a b obtém-se: $b = \frac{dh}{4}$

Como a + b = d então: $\frac{dh}{7} + \frac{dh}{4} = d$

Donde: $\frac{h}{7} + \frac{h}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; h = \frac{28}{11}$

O resultado $h = \frac{28}{11}$ dá para suspeitar que existe alguma relação entre ele e as alturas dos muros e estabelecer a conjectura:

A altura é sempre o quociente entre o produto das alturas dos muros pela sua soma.

Novamente, usando uma das relações anteriores e designando as alturas

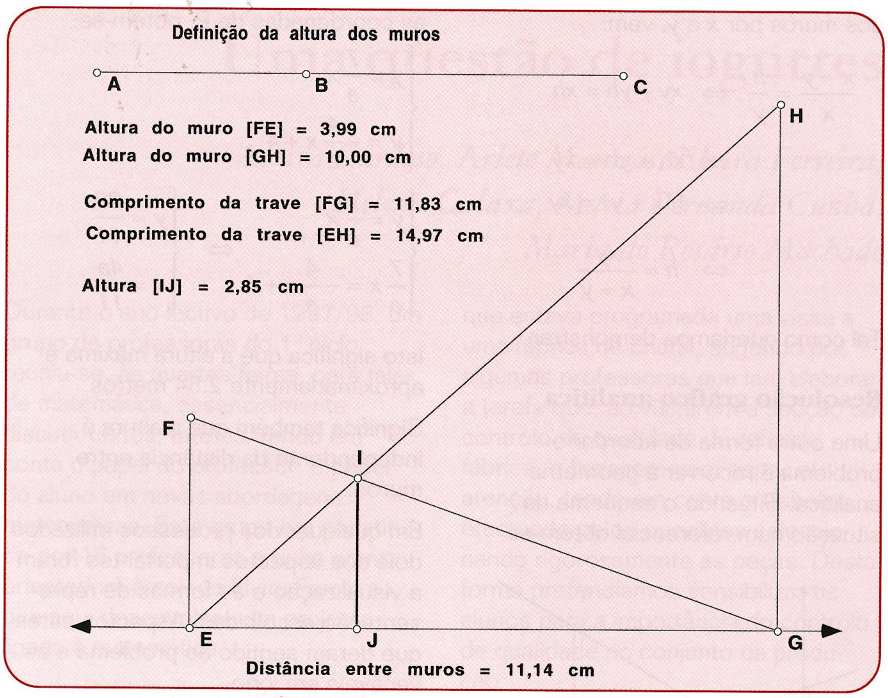


Figura 3

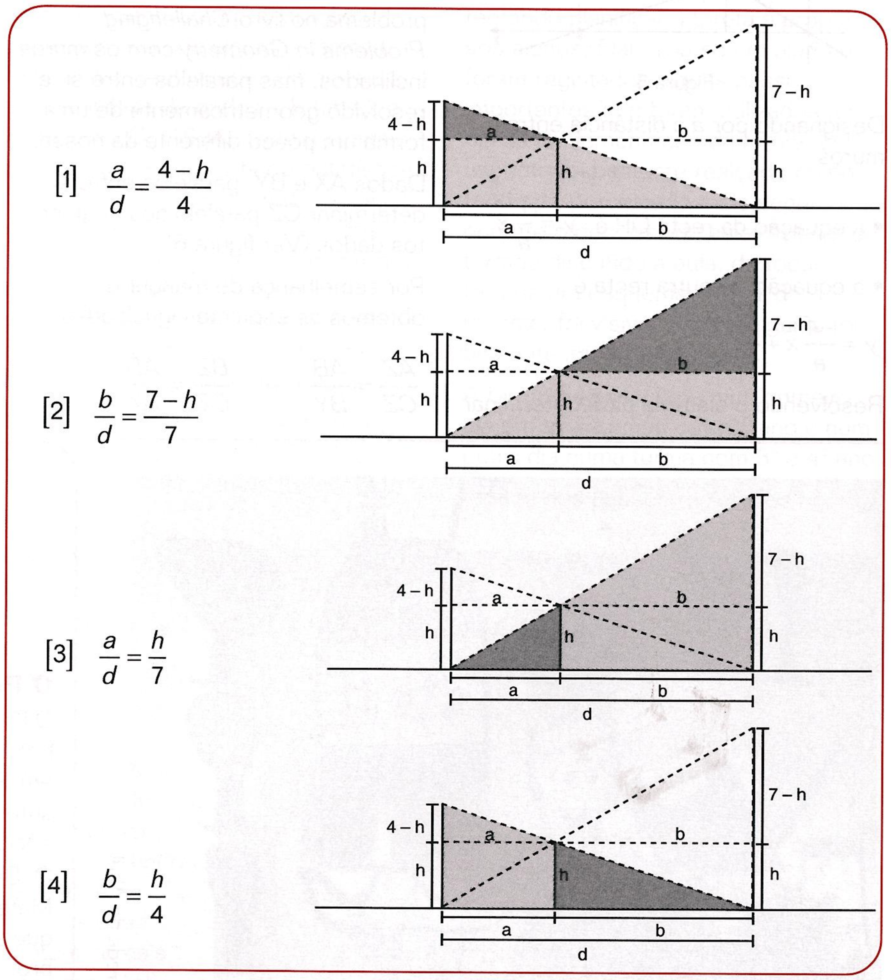


Figura 4

dos muros por x e y, vem:

$$\frac{x-y}{x}=\frac{h}{y} \Leftrightarrow xy-yh=xh$$
$$\Leftrightarrow xh + yh = xy$$
$$\Leftrightarrow h(x + y) = xy$$
$$\Leftrightarrow h=\frac{xy}{x+y}$$

Tal como queríamos demonstrar.

Resolução gráfico-analítica

Uma outra forma de abordar o problema é recorrer à geometria analítica. Situando o esquema da situação num referencial obtém-se

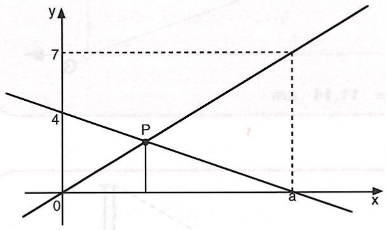


Figura 5

Designando por a a distância entre muros,

- a equação da recta OP é $y=\frac{7}{a}x$
- a equação da outra recta é

$$y=\frac{-4}{a}x+4$$

Resolvendo o sistema para determinar as coordenadas de P, obtém-se:

$$\begin{cases} y=\frac{7}{a}x \\ y=-\frac{4}{a}x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{7}{a}x \\ \frac{7}{a}x=-\frac{4}{a}x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{28}{11} \\ x=\frac{4a}{11} \end{cases}$$

Isto significa que a altura máxima é aproximadamente 2,54 metros.

Significa também que a altura é independente da distância entre muros.

Em qualquer dos processos utilizados dois dos aspectos importantes foram a visualização e as formas de representação escolhidas. Aspectos estes que deram sentido ao problema e às variáveis em jogo.

Mais tarde fomos descobrir este problema no livro *Challenging Problems in Geometry* com os muros inclinados, mas paralelos entre si, e resolvido geometricamente de uma forma um pouco diferente da nossa.

Dados AX e BY, paralelos entre si, determinar CZ paralelo aos segmentos dados.(Ver figura 6)

Por semelhança de triângulos, obtemos as seguintes igualdades

$$\frac{AZ}{CZ}=\frac{AB}{BY} \quad \text{e} \quad \frac{BZ}{CZ}=\frac{AB}{AX}$$

adicionando as duas igualdades obtém-se

$$\frac{AZ}{CZ}+\frac{BZ}{CZ}=\frac{AB}{BY}+\frac{AB}{AX}$$

e como $AZ + BZ = AB$, temos

$$\frac{AB}{CZ}=\frac{AB}{BY}+\frac{AB}{AX}$$

dividindo ambos os membros por AB obtém-se

$$\frac{1}{CZ}=\frac{1}{BY}+\frac{1}{AX}$$

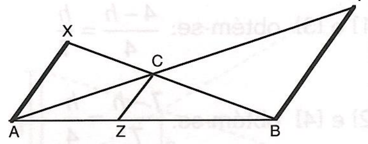


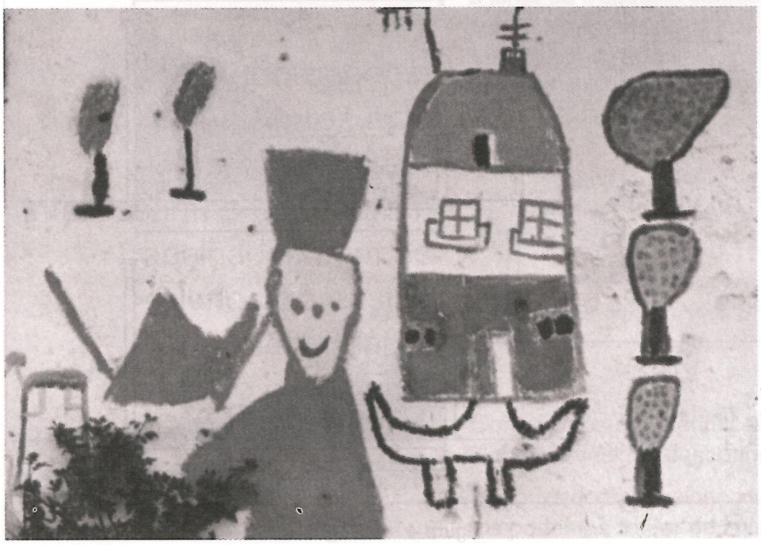
Figura 6

Se forem dados BY e AX a solução do problema decorre imediatamente desta igualdade. Parece-nos que esta generalização do problema a uma posição qualquer dos muros, desde que paralelos entre si, é bastante interessante.

Referências

Posamentier, A. S. e Salkind, C. T. 1988. *Challenging Problems in Geometry*. Dover Publications, Inc., New York.

António Bernardes
Esc. Sec. de Gil Vicente
Cristina Loureiro
Esc. Superior de Educação de Lisboa



Parede de Abril

O ProfMat 99 e SIEM X

O ProfMat 99 realiza-se de 10 a 13 de Novembro na Escola Secundária Poeta António Aleixo, em Portimão, como foi divulgado na revista anterior.O 1º anúncio foi já enviado a todos os sócios da APM e o 2º chegará em breve.

O Seminário de Investigação em Educação Matemática — SIEM X, realiza-se nos dois dias que antecedem o ProfMat — 8 e 9 de Novembro, a par com os cursos.

Uma questão de iogurtes

Alzira Cardoso, Arlete Manicas, Elvira Ferreira, Helena Calaxa, Maria Fernanda Cunha, Maria do Rosário Machado

Desde cedo, os alunos devem participar em tarefas que lhe despertem interesse e motivação. Desde cedo, a escola deve proporcionar experiências diversificadas, em que a aprendizagem da matemática se faça não pela transmissão passiva dos conhecimento e recorrendo a exercícios de repetição em exagero e de memorização, mas sim através da própria experiência, através de tarefas abertas, que proporcionem diálogo e discussão...

Durante o ano lectivo de 1997/98, um grupo de professoras do 1° ciclo reuniu-se, às quartas-feiras, para falar de matemática, essencialmente discutir textos, tarefas, tendo em conta o papel do professor, o papel do aluno em novas abordagens matemáticas. Este grupo era constituído por 16 professoras e tinha como orientadora a colega Elvira Ferreira que aqui desenvolveu um projecto ligado à matemática.

Um dos textos discutidos numa das sessões foi bastante motivante para o grupo e incentivou a preparação e implementação de algumas tarefas. Este texto, "Actividades do dia-a-dia para a análise de dados", Hitch C. e Armstrong G. (1994), trata de várias sugestões para trabalhar a estatística. Em todas as turmas foi feita recolha de dados de vários interesses dos alunos: chocolates preferidos, programas de TV favoritos e desporto praticado. Após esta recolha, foram elaborados gráficos e várias questões foram colocadas para os explorar.

Outro assunto de que o texto fala é do controlo de qualidade. É sobre este assunto que vamos tratar neste artigo.

Logo na sessão, foi levantada a hipótese de elaborarmos uma tarefa para os 3° e 4° anos sobre este tema. A ideia lançada foi de que ela poderia ser feita partindo da análise de iogurtes que contêm cereais e passas. Dado

que estava programada uma visita a uma fábrica de cristal, sugerido por algumas professoras que iam elaborar a tarefa que, ao visitarem a secção de controlo de qualidade da referida fábrica, o fizessem com especial atenção, tendo em conta o trabalho efectuado pelos operários seleccionando rigorosamente as peças. Desta forma pretendíamos sensibilizar os alunos para a importância do controlo de qualidade no conjunto da produção.

No dia combinado, juntámo-nos tentando planificar a tarefa a propor aos alunos. Elaborou-se um plano e foram registados alguns passos importantes que foram utilizados no dia da implementação da tarefa. Este aspecto foi bastante realçado como tendo proporcionado mais segurança durante o decorrer da aula. Apesar de termos discutido a aula, de todas termos um esquema mental da mesma, foi visível que este guião foi bastante importante.

A tarefa foi executada num primeiro dia em três turmas com 3° ano e num outro dia numa turma com 3° e 4° ano.

Alguns dos passos registados no

guião foram:

♦ Propor aos alunos que tragam para a aula o referido iogurte (depois a escola comprou para todos os alunos envolvidos);

♦ Recordar a visita feita à fábrica de cristal, dando grande relevo à secção do controlo de qualidade;

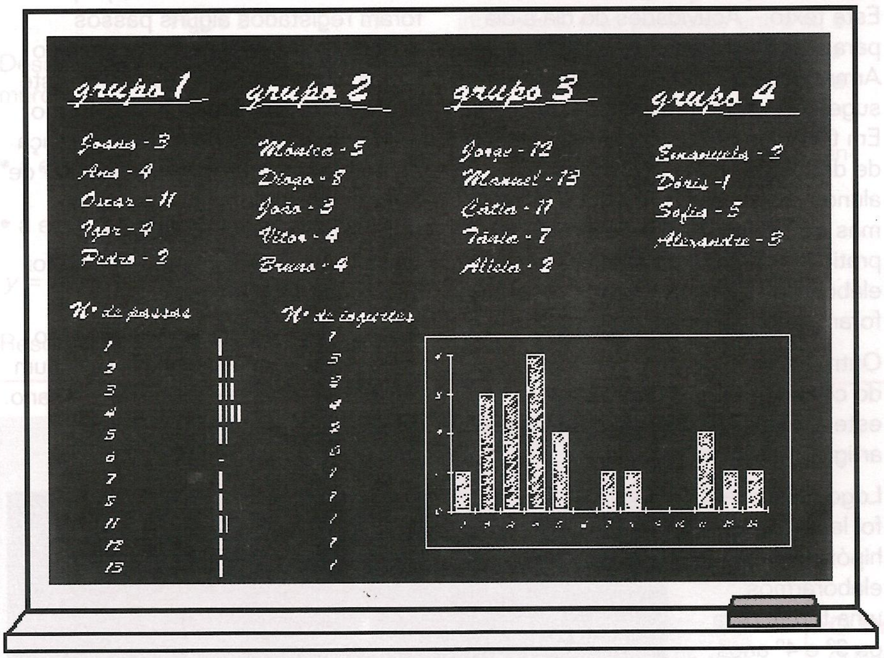
♦ Os alunos observam a embalagem dos iogurtes:

- prazo de validade
- composição do iogurte
- apresentação do produto (publicidade);

♦ Os alunos abrem a divisória que contém cereais e passas;

♦ Registam o número de passas encontrado, primeiro individualmente, e depois no grupo onde estão inseridos.

♦ O professor faz o registo no quadro dos resultados obtidos em todos os grupos



♦ Discussão acerca do controlo de qualidade na fabricação dos iogurtes com base nos resultados obtidos.

♦ Após esta fase, analisar e explorar, oralmente, os dados recolhidos e registados:

1º o professor coloca algumas questões, tendo em conta a estatística e o desenvolvimento do poder matemático dos alunos bem como a importância de aprender a ler e a escrever matemática;

2º os alunos colocam questões aos colegas tentando desenvolver essas capacidades e de acordo com os dados obtidos.

♦ Por grupo, os alunos tentam encontrar o número médio de passas por cada iogurte:

- os alunos podem trocar as passas de uns iogurtes para os outros até que tenham o mesmo número de passas em cada caixa;
- confrontar as várias estratégias de resolução encontradas.

Exemplos:

- Juntámos todas as passas e dividimos igualmente;
- aqui no grupo, repartimos até ficarmos com a mesma quantidade. Tínhamos 14. Demos 3 a cada um, 3x4=12. Sobraram 2. Destas dividimos a meio e portanto deu 3,5 a cada um.

♦ Resposta, em grupo, ao questionário.

♦ Registo no quadro dos problemas formulados pelos alunos.

Exemplos:

- Quantas passas havia nos iogurtes todos?

Uma questão de iogurtes

Tendo em atenção o gráfico construído, responde às seguintes questões:

1. Qual a número de passas, por iogurte, que aparece mais vezes (moda)
2. Quantos iogurtes têm menos de 3 passas?
3. Quantos iogurtes têm pelo menos 4 passas?
4. Quantos iogurtes têm mais de 8 passas?
5. Quantos iogurtes se comeram? Explica como verificaste.
6. Em todos os iogurtes havia passas? Explica como verificaste.
7. Formula um problema de acordo com os dados recolhidos.

Questionário

- Quantos iogurtes têm pelo menos 11 passas?
- Quantos iogurtes têm mais de 5 passas?
- Quantos iogurtes têm menos de 13 passas?

Uma tarefa como aquela que acabámos de descrever requer tempo. Leva certamente mais do que uma manhã. Várias foram as áreas trabalhadas, Estudo do meio, Matemática e Língua Portuguesa, porque até um texto surgiu acerca do impacto da mesma. Dois ou três aspectos é importante realçar:

1º Foi uma tarefa motivante para os alunos e para os professores

2º Foi uma tarefa sem preocupações de resultados únicos, de algoritmos, sem necessidade de memorizações, fora do habitual das nossas salas de aula;

3º Foi uma tarefa em que todos os alunos participaram, ninguém se sentiu diminuído e em que todos saíram muito entusiasmados.

Vários estudos têm revelado que o ensino neste nível de ensino tem sido baseado no cálculo e em exercícios rotineiros e não baseados em tarefas desafiantes e motivadoras que vão muito para além da memorização de procedimentos, mas que permitem que o aluno investigue, ganhe sentido crítico e gosto pelo que fazem e aprendem, ou seja, um maior valorização dos aspectos complexos (Abrantes, Matos e Ponte, 1998).

Este trabalho proporcionou seguramente:
- o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno;
- o incremento de comunicação em matemática;
- desenvolvimento de conceitos matemáticos;
- aprender a dar valor à matemática;
- compreender a importância de resolver e formular problemas num contexto vivido.

Conclusão

Desde cedo, os alunos devem participar em tarefas que lhe despertem interesse e motivação. Desde cedo, a escola deve proporcionar experiências diversificadas, em que a aprendizagem da matemática se faça não pela transmissão passiva dos conhecimento e recorrendo a exercícios de repetição em exagero e de memorização, mas sim através da própria experiência, através de tarefas abertas, que proporcionem diálogo e discussão, onde o aluno adquira confiança, auto-estima, que lhes despertem curiosidade e o gosto pela matemática, afinal a base dos princípios orientadores do programa em vigor.

Novas tarefas necessitam também de algumas alterações no papel do professor. Não vale a pena novas tarefas se elas forem executadas tradicionalmente, ou seja, sem discussão, com salas silenciosas. Tudo isto requer trabalho de grupo dos professores, vontade de mudar e muito envolvimento de todos. Novas tarefas requerem professores mais atentos, mais reflexivos, mais flexíveis e menos dominadores. Novas tarefas requerem mais preparação de aulas, mais atenção às estratégias dos alunos no sentido de proporcionar um maior gosto em ensinar e aprender matemática.

E o currículo? Esse está plenamente integrado se olharmos aos princípios e aos objectivos gerais enunciados. Mas mais importante do que isso é que é possível, neste nível de ensino, começar a criar "hábitos de pensamento nos alunos" e que apesar da escola estar muito voltada para preparar os alunos para o futuro em que os conceitos têm uma grande carga programática, não devemos esquecer que a aprendizagem da matemática deve ter um "valor próprio" na altura em que se desenvolve e não ser encarada como uma mera preparação para o futuro (Abrantes, 1994).

É um desafio muito exigente e ambicioso, onde todos estamos a aprender. Os passos são lentos, mas julgamos estar num bom caminho. Como dizia Pirie (1987, cit. por Mason, 1991), acreditamos que "O objectivo é a viagem, não o destino".

Referências

Abrantes, P. (1994). O trabalho de Projecto e a Relação dos alunos com a Matemática. Lisboa: APM.

Hitch C. e Armstrong G. (1994). Actividades do dia-adia para análise de dados in Arithmetic Teacher, 41 (5).

Mason, J. (1991). "Resolução de problemas Matemáticos nos Reino Unido: Problemas Abertos, Fechados e Exploratórios". In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para Aprender Matemática*, 1996: 73-88. Lisboa: Projecto MPT e APM.

Alzira Cardoso, EB1 de Burinhosa,
Arlete Manicas, Elvira Ferreira,
Helena Calaxa, Mª Fernanda Cunha,
Mª do Rosário Machado, EB1 de Pataias, Alcobaça

Concurso "A Matemática é fácil" (continuação da pág. 13)

Uma vez terminado o prazo para a resolução do problema, o professor responsável recolhia e respondia às respostas. A resolução do problema era depois afixada, bem como a grelha com a pontuação obtida por cada aluno. Essa pontuação variava entre zero e um pontos. quando o raciocínio e a resposta, do aluno, se encontravam mal, eram atribuídos pelo professor zero pontos; se estivessem incompletos obteria 0,5 pontos; pelo contrário, se ambos se encontrassem correctos, ao aluno era atribuído um ponto.

No final do ano lectivo (Junho de 1996), elaborou-se a classificação definitiva. Aos três primeiros classificados, foram atribuídos prémios surpresa (jogos didácticos relacionados com a Matemática).

Em relação a esta experiência, a reacção dos alunos foi positiva, tendo os mesmos revelado um interesse crescente, chegando a haver uma participação na ordem dos 60%.

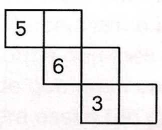
No final do ano lectivo, os professores foram unânimes em considerar que os alunos que participaram neste concurso, revelaram maior facilidade na compreensão e resolução de problemas, ligados ou não à vida real.

A título de exemplo apresentam-se dois dos problemas utilizados.

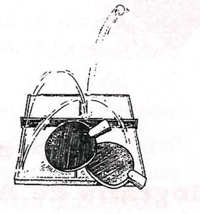
Problema 1:

Na figura está representada a planificação de um dado:

Como colocar os números 1, 2 e 4 nas três faces em branco, de forma que a soma dos pontos em cada par de faces opostas seja sempre igual a 7?



Problema 2:



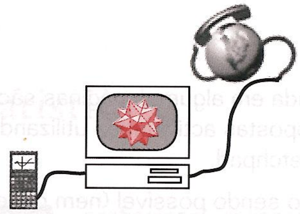
No torneio de ténis de mesa que se vai realizar na Escola do Maurício estão inscritos 92 participantes.

Uma das regras deste torneio é que jogam dois participantes de cada vez, sendo eliminado imediatamente o jogador que perdeu.

Quantos jogos será necessário organizar para se conhecer o vencedor dos vencedores?

Jorge Barros
Escola E. B. 2,3 nº 1 de Quarteira

Tecnologias na educação matemática



Correio electrónico para todos os professores

O correio electrónico é um meio rápido, económico e eficiente de comunicação que já é utilizado por muitos professores. Até relativamente há pouco tempo, a sua utilização exigia a posse de um computador, de um modem e de uma ligação doméstica à Internet Embora estes meios, outrora raros, sejam hoje cada vez mais comuns entre nós, o acesso a este poderoso meio de comunicação ficou mais fácil devido à instalação pelo Min. da Ciência de computadores nas escolas, ligados permanentemente à Internet, e a disponibilização de serviços internacionais gratuitos (como por exemplo o hotmail e o yahoo mail) [1]. A criação de um serviço gratuito de correio electrónico, o Profmail, pelo Ministério da Educação, é mais um passo no mesmo sentido com que nos congratulamos. Do texto de apresentação deste serviço transcrevemos:

> A disponibilização de contas do correio electrónico aos professores que o desejarem pode constituir um passo significativo para uma intensificação do trabalho colaborativo entre docentes de diversas regiões do país possibilitando a constituição de redes específicas de conhecimento.

O serviço está disponível, em fase experimental, no endereço: http://www.nonioxxi.pt/profmail

1. Hotmail — http://www.hotmail.com/
   Yahoo — http://www.yahoo.com e depois clique em Yahoo! Mail

veloso@mail.telepac.pt

Tecnologias: da formação inicial para a escola

Neste relato vamos descrever o surgimento de um *Web site* com páginas criadas por alunos do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa

Até chegarem ao 4º ano do curso os alunos têm, de um modo geral, um contacto muito reduzido com as novas tecnologias. No entanto, estão conscientes do papel decisivo que elas actualmente desempenham na sociedade, manifestando interesse e expectativas muito elevados em relação ao trabalho desenvolvido na área da Didáctica da Matemática.

Respondendo ao apelo que fizemos no último número pedindo relatos de experiências sobre a utilização das tecnologias no ensino da Matemática, recebemos um artigo de Hélia Oliveira e José Manuel Varandas — *Tecnologias: da formação inicial para a escola* — e uma mensagem de Mário Lima — *Página dos Alunos* — que agradecemos.

Na disciplina de ICM (Interdisciplinaridade Ciências-Matemática) procura-se proporcionar uma experiência significativa de utilização destas tecnologias no ensino da Matemática. Com este objectivo foi-lhes proposto que desenvolvessem um projecto de criação de uma página a ser posteriormente publicada na www.

Registou-se um certo receio inicial destes futuros professores face a esta tarefa. Isto era compreensível dado que a grande maioria nunca tinha sequer consultado a Internet e o seu sentimento face às novas tecnologias era de uma grande dose de incapacidade... Os receios foram-se dissipando à medida que o trabalho avançava: surgiam-lhes novas ideias, recolhiam mais informação e ganhavam entusiasmo para ultrapassar os obstáculos (principalmente, técnicos) com que se iam deparando. Observarem a ideia inicial tomar forma deu-lhes confiança, acreditando de que eram capazes e que afinal não era assim tão difícil.

O resultado final deste processo foi a publicação de 24 páginas ligadas ao *site* da disciplina[1], desenvolvidas em torno de diferentes temas relacionados com os programas do 3º ciclo e do ensino secundário. A proposta que lhes foi dirigida sugeria que as páginas fossem direccionadas para futuros ou actuais professores de Matemática mas a sua concretização não se mostrou muito fácil. Assim podemos encontrar páginas que pela linguagem e profundidade dos temas se tornam acessíveis a alunos e ao público em geral, outras integram informação com graus de profundidade muito diversa, e algumas, poucas, são claramente pensadas para professores. De uma forma geral, parece-nos que o professor de Matemática pode encontrar muitos motivos de interesse no conjunto destas páginas, nomeadamente, pelos temas matemáticos tratados: números, geometria, trigonometria, lógica, probabilidades, funções, cónicas, teorema de Pitágoras, sucessões, derivadas. Existem muitas referências à história da matemática, muitos jogos e problemas.

Ainda em algumas páginas são propostas actividades utilizando o Sketchpad.

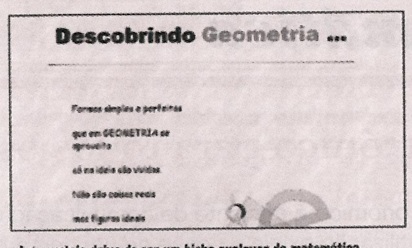
Não sendo possível (nem desejável) descrever neste espaço todas as páginas, seleccionamos algumas que nos parecem mais representativas. O tema "Números" despertou o interesse de vários grupos. Uma das páginas intitula-se exactamente "Os números"[2] e apresenta uma breve história dos sistemas de numeração e dos números naturais, relativos, racionais e irracionais. Destacamos uma secção dedicada a números especiais (que os autores intitulam, sugestivamente, "Qualidades ou defeitos"), por exemplo: amigáveis, cíclicos, perfeitos, poligonais, de Mersenne, de Catalan, de Fermat.

Já se quiser saber as coisas mais importantes sobre números primos visite a "Página dos Números Primos"[3]. Questões tais como "Por que é que se continua a tentar descobrir números primos?" ou "Existem números primos especiais?" ou "O que é a criptografia?" são respondidas de uma forma simples mas completa. Aqui encontra ainda uma lista muito útil de *sites* sobre calculadoras, história da matemática, números, serviços de busca e *software*. Pode também divertir-se um pouco com as anedotas da matemática e ficar a conhecer os matemáticos de *A* a *Z*.

Na "Página do π"[4] ficamos a saber porquê e de que formas este número tem exercido um fascínio sobre os humanos (matemáticos e outros). O *design* gráfico desta página é particularmente bem conseguido, tendo sempre o π como mote, e pode ser muito apelativo para os alunos. Existe muita informação sobre a história e a natureza deste número. A nossa convicção de que a matemática também é arte reforça-se ao visitarmos esta página.

A geometria foi outro dos temas aglutinador de preferências. Uma das páginas, "Descobrindo a Geometria"[5], leva-nos até à origem da geometria, mostra-nos como as formas geométricas se encontram belamente expostas na natureza, fala-nos, também, dos sólidos platónicos, dos problemas clássicos da antiguidade e propõe-nos jogos e problemas geométricos. É de referir que esta página foi incluída nos destaques do mês de Fevereiro da revista PCGuia, sendo-lhe feita uma referência muito favorável: "Descobrindo Geometria é um excelente *site* que, apesar de não ensinar em particular esta matéria, estimula-nos a compreender melhor a geometria".

Descobrindo Geometria
http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21856/



A geometria deixa de ser um bicho qualquer da matemática, passando o *site* a dar-nos outra visão diferente e mais humana

Quando viu este nome, deverá ter pensado Geometria=Matemática ,logo passar à frente. Mas de seguida pensou, não havendo nada mais à frente, só resta mesmo ver o último *site* da secção. De qualquer das formas, Descobrindo Geometria é um excelente *site*, que apesar de não ensinar em particular esta matéria, estimula-nos a compreender melhor a geometria. Feito por estudantes da FCUL, neste *site* poderemos conhecer a origem da geometria, a sua presença no nosso mundo, os três problemas da antiguidade, mais alguns problemas e respostas, curiosidades e actividades.
Um bom *site* que deveria servir de inspiração a todos os que ensinam e a todos os que aprendem a geometria

Destaque na revista PC Guia

Uma outra página "Trigonometria"[6] é algo espacial, tendo o Star Track como uma forte fonte de inspiração. Contém uma componente histórica muito forte mas apresenta, igualmente, muitos problemas. Existe uma secção sobre trigonometria esférica e são referidos diversos *sites* sobre este tema.

O tema "Probabilidades"[7] é abordado por um grupo de alunos de uma forma curiosa: propõem uma visita ao Casino do Marquês. Poderemos deambular pelas salas dos dados viciados, da dama de copas, da máquina diabólica e da roleta russa. Numa outra página sobre este tema, "Probabilidades e Combinatória" (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21849), apresentam-se alguns aspectos históricos, alguma teoria e muitos problemas e exercícios, e são referidos diversos *sites* sobre esta temática. É possível, ainda, conhecer algumas das actividades desenvolvidas nas aulas da disciplina.

A página "Equações na história da matemática"[8] faz uma breve incursão na história deste tema entre diversos povos: egípcios, babilónios, gregos, hindus, árabes, italianos, franceses e portugueses, sendo neste último grupo destacado o contributo de Pedro Nunes. Igualmente sobre história temos uma página a que as alunas deram o título "Galeria dos artistas da matemática"[9], e onde encontramos muitos dados biográficos sobre os matemáticos que têm o seu nome ligado a temas específicos da matemática escolar.

Estes futuros professores aderiram a esta proposta com enorme entusiasmo e encararam-na como uma oportunidade de aprofundar o seu conhecimento sobre temas que irão leccionar em breve. Todas as críticas e sugestões que lhes queiram fazer chegar são muito bem vindas.

Notas

1. http://www.fc.ul.pt/departs/educacao/disciplinas/icm.
2. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l20023)(*2)
3. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21237)
4. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l19660)
5. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21856)
6. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21054)
7. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l19665)
8. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l18296)
9. (http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l21185)

Hélia Oliveira
José Manuel Varandas
Dep. de Educação da FCUL

Estatística na Internet: Rice Virtual Lab in Statistics[1]

Trata-se de um *site* bastante completo sobre Estatística, criado por David M. Lane, professor no Departamento de Psicologia e Estatística da Universidade de Rice.

Aborda uma grande diversidade de temas, desde os aspectos mais elementares da Estatística Descritiva (representações gráficas, medidas de tendência central) até questões mais complexas como testes de hipóteses, intervalos de confiança, ou qui-quadrado.

O *site* é composto por quatro partes:

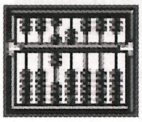
- HyperStat;
- Simulações/Demonstrações;
- Estudos de Caso;
- Laboratório de Análise.

O HyperStat[2] é um livro *online*, organizado em dezoito capítulos temáticos. Cada capítulo apresenta as principais ideias relativas ao tema a que se dedica e proporciona demonstrações para o ensino do tema.

Fornece ainda indicações sobre muitos outros recursos electrónicos a consultar para informação complementar.

As simulações/demonstrações[3] sobre um determinado assunto são uma das

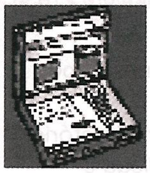
particularidades mais interessantes deste. Por exemplo, relativamente à regressão linear, o site inclui uma simulação denominada "regression by eye", que permite desenvolver a sensibilidade para a localização do gráfico da recta de regressão em relação à nuvem de pontos dada e para a estimativa do valor do respectivo coeficiente de correlação.



Outra componente interessante a referir é o Laboratório de Análise[4], o qual realiza uma análise estatística detalhada em relação às variáveis a estudar, oferecendo a possibilidade de visualizar as medidas, histograma, caixa de bigodes, caule e folhas, t-testes, correlação e regressão, e ANOVA.

Esta análise estatística tanto pode ser realizada a partir de dados que estejam já armazenados como a partir de dados introduzidos no momento pelo utilizador, o que faz com que este site assuma, de alguma forma, o papel de um *software* estatístico específico.

Ainda de referir são o estudo de casos[5], ou seja, exemplos de situações reais, com dados reais (por exemplo, força física e desempenho



profissional, aplicação de campos magnéticos e alívio da dor) as quais podem ser seleccionadas e estatisticamente analisadas e interpretadas.

O *Rice Virtual Lab in Statistics* constitui um recurso importante como fonte de informação sobre tópicos estatísticos (conta com um glossário muito completo), como forma de aceder a outros sites sobre Estatística (disponibiliza vários *links*), e como *software* estatístico de demonstração interactivo (através das simulações) e como *software* de análise estatística, através dos estudos de casos e do Laboratório. É pois um *hipersite* sobre Estatística.

Notas

1. http://www.ruf.rice.edu/~lane/rvls.html
2. http://www.ruf.rice.edu/~lane/hyperstat/
3. http://www.ruf.rice.edu/~ lane/stat_sim/
4. http://www.ruf.rice.edu/~ lane/case_studies/
5. http://www.ruf.rice.edu/~ lane/stat_analysis/

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Consultório tecnológico

Pergunta:

Dado que neste momento tenho mais alguma disponibilidade de tempo (terminaram as frequências por agora !), resolvi retomar a construção do meu *site* sobre geometria, mas continuo com o mesmo problema das demonstrações do *Sketchpad*, uma vez que ainda não consegui as informações sobre os ficheiros de *JAVASketchpad*. Tentei na morada que me enviou, mas o *link* não levava a lado nenhum, a página deveria estar com alguns problemas. [...], gostaria que me desse algumas informações sobre o assunto em questão.

António Costa
antoniofbcosta@hotmail.com

Resposta:

Com a utilização do *JavaSketchpad* podemos incluir em páginas www *sketches* que podem ser vistos, interactivamente, por visitantes das nossas páginas, mesmo que eles não tenham no seu computador o programa *Sketchpad*. O *JavaSketchpad* está ainda em desenvolvimento na *Key Curriculum Press*, a empresa que distribui o *G. Sketchpad*. No *site* desta empresa pode encontrar informação sobre o *JavaSketchpad* e sobre a sua utilização.

Para utilizar o programa *JavaSketchpad* o que há a fazer é :

1. Obter os ficheiros necessários fornecidos pela *Key Curriculum Press*. Para isso:

- criar um directório chamado, por exemplo, *Java;*
- obter por *download* um directório intitulado *JSP*; o *download* é gratuito e faz-se a partir da página: http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/download_center.html
- obter por *download* um programa conversor intitulado *GSP HTML Converter DR3* (se a *release* 4 ainda não tiver sido publicada); o *download* é gratuito e faz-se a partir da mesma página;
- tanto o directório *JSP* como o programa *GSP HTML Converter DR3* devem ser incluídos no directório *Java* que foi criado no primeiro passo.

2. Converter um *sketch* normal em *JavaSketch*. Para isso:

- prepare o *sketch* a ser convertido; não utilize uma janela demasiado grande, pois o tamanho desta vai ser conservado pelo conversor;
- abra o *GSP HTML converter* e, depois, a partir deste programa, o *sketch* que preparou;
- no menu *file*, clique em *Save as HTML*;
- o ficheiro *JavaSketch* assim gravado deve ter a extensão *html* e deve obrigatoriamente ficar incluído no directório *Java* (isto é, no mesmo directório onde está o directório *JSP*).

3. Abra a página *html* assim obtida num *browser* que suporte *applets Java* (*Netscape* 4.0 ou Internet Explorer 4.0, ou superiores). Para colocar este *JavaSketch* num *Server Internet* e assim ficar acessível, deverá fazer o *upload*, juntamente com a página, do directório *Java*. Naturalmente, deverá construir os habituais *links* referenciando a página *html* que resultou da conversão.

Nota. Durante a conversão, poderá ser informado que o seu *sketch* contém partes da programação *Sketchpad* que ainda não estão incluídos na *release 3*.

Na realidade, esta versão ainda é uma versão *beta*, o que quer dizer que ainda tem *bugs* e que não é a versão final do *JavaSketchpad*.

Para informações mais completas, http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/index.html.

Para instruções mais detalhadas e complementos, http://forum.swarthmore.edu/workshops/sum98/java.gsp.explain.html.

Novidades que pode encontrar no *site* APM

O Centro de Formação da APM já faz parte das páginas APM. Pode encontrar o plano de actividades, as acções previstas para 1999, bem como as que decorreram ultimamente, com alguns materiais, sessões de fim de tarde e outras informações relacionadas com a organização do Centro.

Actualmente, o APMInformação está *online*. Está pensado que doravante todos os números do respectivo ano podem ser consultados na íntegra.

Alguns sócios corresponderam ao pedido do último APMInformação, tendo enviado informações sobre *sites* que podem interessar-nos, como professores de Matemática. Poderá utilizar já alguns *links*, de uma lista que esperamos venha a crescer, incluídos na secção "Matemática na Internet".

Logo na página de entrada tem a possibilidade de escolher a secção "Instituições" que apresenta *links* para aceder a universidades e escolas superiores de educação, departamentos de instituições governamentais, do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência e Tecnologia, além de várias bibliotecas.

Aproveite e colabore, enviando sugestões e comentários.

Grupo de Trabalho Internet

Página dos alunos

Conforme o sugerido na revista "Educação e Matemática" - secção das tecnologias - venho dar conhecimento e solicitar a divulgação da "Página dos Alunos". Trata-se de um projecto ainda numa fase inicial.

Ao nível da Matemática, consiste, para já, de ligações a muitos materiais, organizados segundo os currículos, por ano de escolaridade e unidades didácticas:

http://www.portugaljovem.net/mariolima/alunos/matematica.htm

Além disso, também existe uma página com múltiplas referências sobre Educação e/ou Matemática (Sistema Educativo, carreira docente, currículos, Educação Matemática, currículos de Matemática, recursos, divulgação, instituições, eventos), destinada a todos os professores (aos estagiários em particular):

http://www.portugaljovem.net/mariolima/alunos/estagio.htm

As páginas estão em constante evolução, com actualizações mensais.

Renovando o pedido de divulgação, disponibilizo-me para eventuais esclarecimentos.

Mário Jorge Lima
mariolima@hotmail.com

Investigações e relatórios, temos muito que aprender!

Ana Luísa Correia

Em dois dos últimos números da Educação e Matemática surgiram artigos sobre a avaliação de actividades de investigação e respectivos relatórios. Para saber que trabalhos de investigação propor e que parâmetros avaliar talvez seja bom começarmos por sentir essa experiência na pele. Este texto pretende ser um relato breve das fases porque passei e um relatório de uma pequena investigação que me vi obrigada a fazer para pedir aos alunos um determinado trabalho de investigação e respectivo relatório.

Como tudo começou

Em Setembro de 1997 a "minha " escola, Escola Secundária de Ferreira Borges em Lisboa, tinha acabado de montar o Laboratório de Matemática. Grande parte das aulas que iria dar ao 11º ano eram nessa sala a que eu queria dar uso mas que mal sabia usar. Embora não tivesse o 10º ano estava em contacto com todas as "novidades" quanto mais não fosse por ser delegada. Tudo isto e o bichinho que já me roía há algum tempo deu-me coragem para avançar com a proposta de nas turmas de 11º ano se pedirem aos alunos pequenos trabalhos de investigação, um no 1º período e outro no 2º período. A proposta foi aceite embora o problema do peso que teria na avaliação final ficasse por resolver. Entendemos considerar isto como uma experiência e depois logo se veria. Isso mesmo se explicaria aos alunos dizendo-lhes que funcionaria como arredondamento da classificação final. Os trabalhos seriam em grupo, para fazer fora das aulas, com exposições orais e a classificação do trabalho seria qualitativa avaliando globalmente a parte escrita e a oral.

> Ficou-me sempre a impressão de injustiça por não contabilizar devidamente na avaliação final o empenhamento dos alunos nesta actividade. Achei que tanto esforço devia ser compensado de alguma maneira e por isso propus uma apresentação do projecto no ProfMat98

No 1º período propus investigações em trigonometria[1]. Resolvi fazer enunciados com a preocupação de pôr qualquer coisa que indicasse o que se esperava dos alunos. Em qualquer dos três enunciados que preparei podia-se ler:

"Este é um pequeno trabalho de investigação. Para o executar é necessário, além de conhecimentos sobre funções e trigonometria, imaginação e espírito crítico.

Deve ser elaborado um relatório detalhado do que foi feito em termos de investigação. Mais importante que as conclusões a que chegaram é o processo que utilizaram para lá chegar, incluindo os erros que cometeram em termos de conjecturas e o modo como os ultrapassaram. No final do relatório deve ser incluído um pequeno resumo das conclusões.

Além do relatório deve ser preparada uma apresentação à turma das conclusões. É fundamental que todos os elementos do grupo tenham intervenções nessa apresentação, que seja clara e dinâmica. "

Claro que conhecendo os alunos, já eram meus alunos no ano anterior, sabia que não bastava escrever. Provavelmente alguns iriam saltar a "conversa" do início e passar ao que era "importante". Resolvi logo que faria uma breve explicação oral do que era um trabalho de investigação e do que significava fazer um relatório. Passados uns tempos havia alunos a perguntar o que é que eu queria que eles escrevessem mas nessa altura disse-lhes sempre que estava escrito no enunciado. Como os trabalhos pressuponham o recurso às tecnologias existentes no Laboratório disponibilizei horas de atendimento para os orientar no que sentissem necessidade. A verdade é que eu própria precisava de ver como corriam as coisas. Era a 1ª vez nas suas vidas que alguém lhes tinha pedido um trabalho em Matemática. Isso era coisa de outras disciplinas!

Nesta primeira experiência foi determinante o meu acompanhamento para que os alunos percebessem realmente o que se lhes pedia. O que era afinal investigar. Acabaram por se entusiasmar e notou-se alguma mudança de atitude perante a Matemática. Nas aulas apareciam muito mais observações do tipo "e se...?". Quanto aos relatórios foi um fracasso. Os grupos preocupavam-se em escrever as conclusões mas descrever o processo que os tinha levado a elas não estava lá. As apresentações orais foram interessantes. Preocuparam-se de facto em explicar aos colegas o que tinham descoberto e fizeram-no recorrendo a calculadoras gráficas, acetatos e apresentações em *Power Point*.

Chegando ao fim do 1º período senti-me perdida. Seria justo não contabilizar com mais peso o entusiasmo e empenhamento que os alunos tinham demonstrado na realização dos trabalhos? Mas os resultados dos testes não tinham melhorado substancialmente! Na verdade as dúvidas eram mais minhas que deles. Eu tinha explicado que era uma experiência, que só ia servir para arredondar a classificação. Os que se dedicaram fizeram-no porque acharam divertido e não porque isso fosse muito importante para a nota.

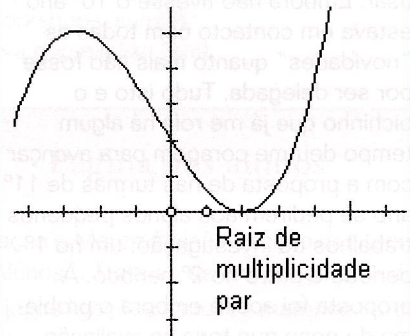
No 2º período, conforme combinado, havia que encontrar temas ligados ao currículo. Estávamos no estudo de funções polinomiais. A verdade é que dizemos que vamos estudar funções polinomiais mas acabamos quase sempre por estudar os polinómios de um ponto de vista algébrico. Pensei que poderia aproveitar esses trabalhos para levar os alunos a fazer conjecturas sobre o que nos podem dizer os gráficos de funções polinomiais sobre a multiplicidade das raízes. Mas afinal o que nos dizem os gráficos nesta matéria? Com esta pergunta, que fiz a mim mesma, iniciei uma pequena investigação para perceber melhor o que poderia pedir aos alunos.

Gráficos e multiplicidade de raízes – uma investigação

Estudamos funções quadráticas e sabemos que o respectivo polinómio do 2º grau tem uma raiz múltipla se e só se o vértice da parábola está sobre o eixo dos xx. Quando acabamos o estudo da função quadrática demos, de uma maneira ou outra, essa noção aos alunos. Fundamentalmente isso significa que a função não muda de sinal numa vizinhança do zero. Pensando um pouco podemos ver que sempre que um polinómio tem uma raiz de multiplicidade par a respectiva função polinomial não muda de sinal numa vizinhança dessa raiz.

Seja $f(x)=(x-\alpha)^{2n}Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal que $Q(x)$, excepto em α onde assume o valor zero.

Como α não é raiz de $Q(x)$ existe uma vizinhança de α onde $Q(x)$ não muda de sinal portanto nessa vizinhança, excluindo α, $f(x)$ também não muda de sinal.



1ª conclusão: Conhecido o gráfico de uma função polinomial podemos ajuizar se uma determinada raiz tem multiplicidade par ou não. Na prática sempre que o gráfico "toca e foge" temos uma raiz de multiplicidade par caso contrário ou é simples ou de multiplicidade ímpar.

Mas não poderemos ir mais longe? O que poderá distinguir graficamente uma raiz simples de uma de multiplicidade ímpar maior que 1?

Tinha a noção, já nem sei porquê, que as raízes de multiplicidade ímpar, maior que 1, correspondiam a pontos de inflexão do gráfico. Experimentei algumas funções polinomiais nestas condições e de facto lá estavam os pontos de inflexão; mas antes que houvesse algum caso especial que eu não estivesse a ver resolvi demonstrar.

Seja $f(x)=(x-\alpha)^{2n+1}Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$,

$f'(x)=(2n+1)(x-\alpha)^{2n}Q(x)+(x-\alpha)^{2n+1}Q'(x)=(x-\alpha)^{2n}P(x)$,

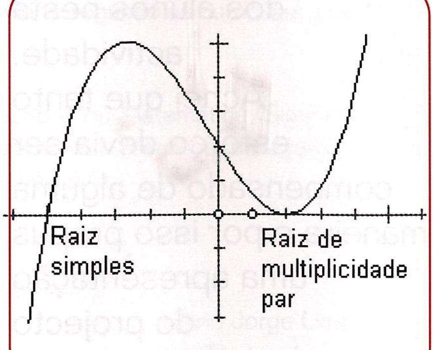
onde $P(x)=(2n+1)Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$f''(x)=2n(x-\alpha)^{2n-1}P(x)+(x-\alpha)^{2n}P'(x)==(x-\alpha)^{2n-1}T(x)$,

onde $T(x)=2nP(x)+(x-\alpha)P'(x)$

Então, como α é raiz de f'' será ponto de inflexão se esta função mudar de sinal neste ponto. $P(\alpha)\neq 0$ porque $Q(\alpha)\neq 0$, portanto $T(\alpha)\neq 0$. Então existe uma vizinhança de α onde $T(x)$ tem sempre o mesmo sinal. Nessa vizinhança $(x-\alpha)^{2n-1}$ assume de certeza sinais contrários, à esquerda e à direita de α, porque o expoente é ímpar portanto o mesmo acontece a f''.

2ª conclusão: Todas as raízes de multiplicidade ímpar maior que três correspondem a pontos de inflexão do gráfico. Podemos então concluir que se o gráfico corta o eixo dos xx sem que haja mudança de concavidade a raiz é de certeza simples.



O passo seguinte parecia ser verificar que se o gráfico apresentasse uma mudança de concavidade coincidente com a raiz então ela seria de multiplicidade ímpar superior a 1. Para tal bastaria demonstrar que se a raiz fosse simples não havia mudança de concavidade, isto é, o recíproco da 2ª conclusão. Mas não é verdade!

Seja $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$.

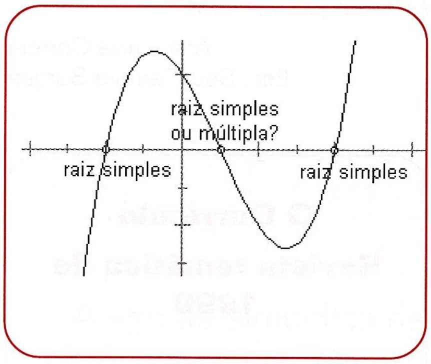
$f'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$f''(x)=Q'(x)+Q'(x)+(x-\alpha)Q''(x)$

Basta que α seja raíz de $Q'(x)$ para que haja uma mudança de concavidade numa raiz simples.

Por exemplo o gráfico da função $f(x)=(x^2-x-5)(x-0.5)$ tem um ponto de inflexão em 0,5 que é uma raiz simples do polinómio.

Conclusão final:



Pelo aspecto do gráfico podemos perceber se uma raiz tem multiplicidade par. Podemos ainda decidir que uma raiz é simples sempre que não há mudança de concavidade. Se nessa raiz houver mudança de concavidade podemos apenas concluir que se for múltipla a multiplicidade é ímpar mas também pode acontecer que seja simples.

Que enunciado propor?

Depois desta investigação adensou-se uma das dúvidas que se me costuma colocar em situações deste tipo: será viável propor uma investigação destas quando os alunos não têm ainda ferramentas suficientes para demonstrar as conjecturas que fizeram?

Respondi a mim mesma que esta era precisamente a situação ideal. As novas tecnologias permitem que os alunos intuam imensas coisas que só muito mais tarde, provavelmente para alguns será nunca, poderão demonstrar. Por outro lado é preciso que eles aprendam que só a intuição não chega ou cada vez mais acharão bizarro que os professores de matemática se dêem ao trabalho de demonstrar o que se está mesmo a ver. Provavelmente eles iriam conjecturar que uma raiz é múltipla se e só se o gráfico tem esse ponto de inflexão, o que como vimos é falso. O meu papel seria esperar que o fizessem e em seguida apresentar uma função que contrariava a conjectura.

A experiência do 1º período tinha-me ensinado que apesar de motivados os alunos tinham ocupado muito tempo com os trabalhos. Talvez fosse melhor indicar sugestões concretas no enunciado.

Foi assim que resolvi propor o enunciado que se apresenta, em baixo, na "Proposta para trabalho de grupo".

Relativamente ao trabalho sobre funções polinomiais tudo correu mais ou menos como eu previra. Este trabalho foi distribuído apenas a dois grupos, os outros tiveram outro do mesmo tipo sobre máximos e mínimos[1] e outro sobre História da Matemática. Tenho a certeza que nem todos os alunos aprenderam a lição principal deste trabalho e que para mim era – a intuição é boa mas é preciso ter cuidado com ela! Lembro-me que na apresentação oral uma das alunas, realmente a minha melhor aluna, conseguiu levar a turma a fazer a conjectura errada para depois

Proposta para trabalho de grupo

Tema : Funções polinomiais

11º ano - 1997/98

O objectivo deste trabalho é tentar responder às seguintes questões:

1. *Em que casos é que sendo **a** um zero de um polinómio a respectiva função polinomial não muda de sinal numa vizinhança de **a**?*

2. *Será que conhecendo o gráfico de uma função polinomial, sem conhecer a sua expressão analítica, podemos concluir se as raízes do polinómio são simples ou múltiplas?*

Para conseguir dar resposta a estas perguntas sugerimos que:

No caso da pergunta1:

Começa por tentar responder à pergunta no caso de uma função quadrática. Em seguida considera funções polinomiais de grau maior que 2 e analisa-as tendo em conta a multiplicidade da raiz. Estabelece uma conjectura.

No caso da pergunta 2:

Começa por analisar gráficos de várias funções polinomiais que tenham raízes simples e raízes de várias multiplicidades. O melhor para isso é "inventar" funções polinomiais escrevendo-as na sua decomposição em factores. Usa uma calculadora gráfica ou software adequado para visualizar os gráficos. Repara que algumas vezes o gráfico muda de concavidade quando há um zero e outras vezes não. Estabelece uma conjectura.

O relatório da investigação deve ser entregue até ao dia 14 de Março de 1998 e a apresentação oral será na semana seguinte

Não deixes para amanhã o que podes fazer hoje

Bom trabalho

desfazer o erro. Pelo menos essa tenho a certeza que aprendeu e só por isso valeu a pena.

A avaliação dos trabalhos foi mais formativa do que sumativa. Emendei com cuidado a construção de frases, observei o modo como foi apresentado tanto do ponto de vista estético como de estrutura e claro que corrigi todas as imprecisões de carácter científico. Classifiquei qualitativamente em insuficiente, suficiente e bom, tendo em conta estes parâmetros.

Os trabalhos do 2º período corresponderam muito mais ao que considero um relatório do que os do 1º período. Já havia uma história antes das conclusões finais.

Ficou-me sempre a impressão de injustiça por não contabilizar devidamente na avaliação final o empenhamento dos alunos nesta actividade. Achei que tanto esforço devia ser compensado de alguma maneira e por isso propus uma apresentação de projecto no Profmat98 onde levaria todos os que conseguissem passar para o 12ºano.

Outras repercussões na formação dos alunos

Na 1ª aula deste ano lectivo, conversando sobre o que íamos fazer durante o ano, uma aluna perguntou-me se também ia haver trabalhos. Eu hesitei e ela acrescentou logo que era muito divertido e aprendia-se muito mas tirava muito tempo e 12º ano tinha exames no fim do ano a todas as disciplinas. Acabei por lhe responder que logo se veria e dei-lhes a novidade de que a apresentação do projecto no Profmat98 tinha sido aprovada. Expliquei-lhes que iam comigo a Guimarães mostrar o que tinham feito no ano anterior e portanto teriam que pelo menos voltar a olhar para o que tinham produzido. O entusiasmo era enorme. Eles sabiam o que era o ProfMat pois nos anos anteriores eu contara-lhes muito do que tinha visto. Acho que consideravam que o ProfMat era um dos grandes responsáveis pelos projectos da escola que levaram ao aparecimento do Laboratório de Matemática e provavelmente tinham razão.

O 1º período foi passando e nunca mais havia tempo para falar das apresentações no ProfMat. Como não houve aulas na primeira semana de Novembro foi só nessa altura que nos reunimos em duas tardes para ver alguma coisa do que iam apresentar e combinar o que iriam dizer. Não valia a pena alongarem-se muito. Também não havia muito tempo para as exposições e tinha decidido que ninguém ficava só a ver.

Fui para Guimarães no Domingo seguinte e eles ficaram a ultimar as apresentações, que seriam todas em power point. Na 4ª feira seguinte, véspera do dia em que eles deviam chegar a Guimarães apostei um jantar com umas colegas. Eu achava que pelo menos um grupo se ia esquecer da disquete com o trabalho em Lisboa. Elas respondiam-me que não. No dia seguinte chegaram. Cada grupo, constituído por três ou quatro alunos trazia tantas disquetes quanto o número de alunos do grupo. Com medo que alguém se esquecesse tinham feito cópias, uma para cada um. Aqueles alunos simpáticos mas pouco responsáveis, que no 12º ano de vez em quando pensam que têm que estudar mas raramente o fazem, assumiram com uma seriedade incrível o que foram fazer a Guimarães. Na apresentação conseguiram imprimir um tom descontraído, apesar de roerem as unhas antes de entrar para a sala. Por causa de uns trabalhos de Matemática estes alunos foram obrigados a crescer como indivíduos. Mesmo que não tenham aprendido muito mais de Matemática, tudo valeu a pena tendo como referência a sua formação integral.

Eu aprendi uma lição e... perdi um jantar!

A agora?

Apesar de tudo não tenho coragem para lhes pedir trabalhos este ano. Estão perdidos a fazer contas e a ver que na maioria dos casos não têm médias para entrar onde querem. Passam tanto tempo a pensar nisso que se esquecem de que para começar era preciso estudar. Num destes dias um aluno perguntou-me se era melhor chumbar este ano para tentar ter a nota que precisa no ano que vem ou fazer melhoria de nota em exame para o ano. Acabo por me preocupar em dar o programa olhando como eles para o exame final. Claro que me "perco" de vez em quando. Não resisto a mostrar-lhes as últimas que aprendi no *Sketchpad* e a usá-lo para dar as cónicas, mas tudo feito por mim. Eles interessam-se mas não há tempo para os ensinar a trabalhar com o *software*. Talvez a culpa seja minha por não saber como é que posso ao mesmo tempo prepará-los para o exame e propor-lhes trabalhos de investigação.

1 Os enunciados dos trabalhos de investigação propostos encontram-se nas actas do ProfMat98 pág. 231 a 235

Ana Luísa Correia
Esc. Sec. Ferreira Borges

Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência*

Hélia Oliveira
João Pedro da Ponte

A história das potências, podendo parecer à primeira vista pouco interessante, evidencia a criatividade de muitos matemáticos ao alargarem e sistematizarem sucessivamente este conceito e ao procurarem símbolos adequados e, ao mesmo tempo, cómodos para a sua representação.

Os primórdios

Uma das primeiras referências à operação de potenciação encontra-se num papiro egípcio que remonta ao final do Império Médio (cerca de 2100-1580 a.C.). Ao ser ali apresentado o cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular, é usado um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número (Ball, 1960).

A noção de potência era, também, conhecida dos babilónios. Recordando o seu sistema de numeração sexagesimal, observe-se o conteúdo de uma antiga tabuinha babilónica de argila conhecida como a *tabuinha de Larsa, na* coluna ao lado, e a respectiva tradução (Fauvel, 1987, p. 22):

2401 é igual a 49 ao quadrado

2500 é igual a 50 ao quadrado

2601 é igual a 51 ao quadrado

. . .

3364 é igual a 58 ao quadrado

3481 é igual a 59 ao quadrado

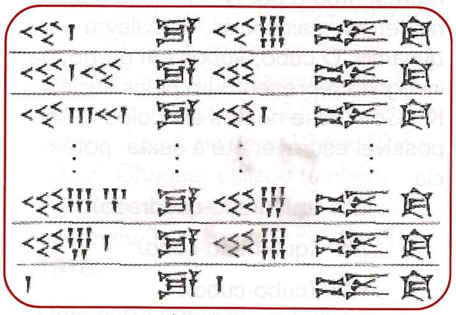
3600 é igual a 60 ao quadrado

Noutras tábuas antigas encontraram-se tabelas contendo as potências sucessivas de um dado número. Estas eram utilizadas para resolver certos problemas de astronomia e de operações comerciais, tais como:

Quanto tempo levará a duplicar certa quantia de dinheiro, a uma taxa anual de 20 % ?

A utilização da palavra 'potência', no contexto da matemática, é atribuída a *Hipócrates* de Quio (470 a.C.), autor que escreveu o primeiro livro de geometria elementar do qual, provavelmente, os *Elementos* de Euclides recolheram uma importante inspiração. Hipócrates designou o quadrado de um segmento pela palavra *dynamis*, que significa precisamente potência. Existem motivos para se crer que a generalização do uso da palavra potência resulte do facto dos Pitagóricos terem enunciado o resultado da proposição I.47 dos *Elementos* de Euclides sob a forma: "a potência total dos lados de um triângulo rectângulo é a mesma que a da hipotenusa". Portanto, o significado original de "potência" era potência de expoente dois, somente passadas algumas décadas se conceberam potências de expoente superior (Ball, 1960).

Arquimedes (250 a.C.) no seu livro *Contador de areia* pretendia determinar o número de grãos de areia



tabuinha de Larsa

A escrita simbólica da potência de um número ou de uma variável é, actualmente, um assunto elementar, cedo introduzido no currículo da matemática escolar. Contudo, a simplicidade do conceito e do respectivo simbolismo esconde um extenso período de construção e desenvolvimento, para o qual contribuiram numerosos matemáticos de diversas civilizações.

* Este texto foi concebido no âmbito do projecto "Matemática para Todos - Investigações na Sala de Aula", no Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

necessários para encher o universo solar, que para ele consistia numa esfera tendo a Terra como centro e a sua distância ao Sol como raio. Obteve a solução 10^{51} que não podia ser escrita na numeração utilizada na altura (alfabética), uma vez que apenas permitia escrever números até 10 000 (uma miríade). Arquimedes criou então um novo sistema: considerou os números de 1 a 10^8, ou seja, até uma miríade de miríade, que se podiam escrever na numeração grega como sendo de primeira ordem; depois, os números de 10^8 até 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10^8, e assim sucessivamente (Boyer, 1989). Arquimedes utilizou, deste modo, uma regra equivalente à propriedade da multiplicação de potências com a mesma base:

$$10^{51} = 10^3 \times 10^3 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8$$

O início da álgebra sincopada

No trabalho de *Diofanto* (Alexandria, cerca do ano 250 d.C.) começa a desenhar-se a álgebra sincopada na qual se faz uso de abreviaturas para designar quantidades e operações. No seu trabalho mais destacado, *Arithmetica*, dá-se um grande avanço na resolução de equações em relação aos egípcios e aos babilónios, uma vez que introduz várias abreviaturas para representar os termos. O símbolo que usou para designar a incógnita foi ς (talvez a contracção das duas primeiras letras da palavra *arithmos*, que significa número) (Katz, 1993). O quadrado da incógnita representou-o por Δ^Y, as duas primeiras letras, maiúsculas, da palavra *dynamis*. O cubo, *kubos* em grego, da incógnita representou-o pelas iniciais K^Y. Com base nestes símbolos foi-lhe possível escrever até à sexta potência:

$\Delta^Y\Delta$ (quadrado-quadrado)

ΔK^Y (quadrado-cubo)

K^YK (cubo-cubo).

Diofanto poderia ter continuado a escrever as potências sucessivas por este processo, mas não o fez porque os problemas com que trabalhou não o exigiam. É de notar que em todas as potências, tanto as bases como os expoentes eram números naturais. Segundo Boyer (1989), Diofanto, contudo, "tinha nomes especiais para os recíprocos das primeiras seis potências da incógnita, quantidades equivalentes às nossas potências de expoente negativo" (p. 204).

Uns séculos mais tarde, na obra do matemático hindu *Bhaskara* (nomeadamente no seu livro *Lilavati* —1150 d.C.), encontram-se referências à construção de potências de ordem superior por recurso ao quadrado e ao cubo. A evidência existente é de que os hindus utilizavam um processo diferente para construir as potências. No caso de Diofanto, Δ^Y seguido de K^Y representava ΔK^Y (tal como para nós n^2 seguido de n^3 representa n^5). Mas para os hindus *varga-g'hana* (quadrado-cubo) indicava a multiplicação dos índices (e portanto n^2 seguido de n^3 significava n^6). Consequentemente, este processo de construção de potências tornava-se inoperativo para representar potências com expoentes primos. Então, por exemplo, n^5 era escrito como *varga-g'hana-gháta*, em que *gháta* significava produto, ou seja, neste caso $n^2 . n^3 = n^5$ (Cajori, 1993).

Dos séculos XIII a XVII observa-se entre árabes e europeus a adopção quer do esquema hindu (multiplicativo) quer do de Diofanto (aditivo). Este constitui um bom exemplo de como o processo de construção da Matemática não foi, nem é, linear. Podem coexistir diferentes notações para o mesmo conceito e, além disso, notações muito semelhantes podem representar conceitos bastante diferentes.

A álgebra sincopada na Europa

A ordem pela qual são hoje abordados nos currículos escolares os diferentes conceitos matemáticos, muitas vezes, não coincide com a sequência em que surgiram ao longo dos tempos. No tema em análise, assiste-se a um período de cerca de mil anos de desenvolvimento da representação simbólica das potências das variáveis antecedendo a introdução dos coeficientes literais e das suas potências. Nos trabalhos dos matemáticos que antecederam *Viète* (Biscaia, 1540-1603), tanto as constantes como as suas potências eram representadas nas equações pelos respectivos numerais. Ao resolver uma equação, não existia, portanto, a necessidade de criar uma notação adequada para as potências de uma constante, o que já não acontecia com as incógnitas (Cajori, 1993).

O conceito de potência e a escrita algébrica estiveram fortemente ligados desde o princípio. Alguns matemáticos dos séculos XV e XVI, tais como Luca Pacioli (1445-1517), Niccolò Tartaglia de Brescia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) e Pedro Nunes (1502-1578), usavam a mesma notação para representar potências das variáveis. A incógnita era representada por *co.*, a abreviatura da palavra italiana *cosa*, por sua vez tradução de *res* em latim, *ce.*, abreviatura de *censo*, representava o seu quadrado e *cu.* (*cubo*) o seu cubo.

Em 1564, *Pedro Nunes* publicou o *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, onde utilizando álgebra sincopada, explica as propriedades das potências de variáveis, apresentando detalhadamente vários exemplos. No excerto seguinte, apresenta as potências sucessivas de *cosa*, as quais designa por *dignidades*:

> La primera quãtidad destas que llamamos dignidades, que assi van ordenadas en proporcion, es la Cosa, y por essa causa le fue dada la vnidad por denominacion. La segunda es el Censo, al qual cupo .2. por denominaciõ. La tercera es el Cubo que tiene .3. por denominacion. La quarta es Censo de censo, que tiene .4. por denominacion. La quinta se llama relato primo, cuya denominaciõ es .5. La sexta es Censo de cubo, o Cubo de censo, y su denominaciõ es .6. Por este modo proceden os Arithmeticos, y van criando las otras dignidades, y tiene cada vna dellas denominacion, que la orden le da.

La qual nos dize quantas proporciones tiene cada vna de las dichas quantidades comparada com a vnidade, de aquellas que la Cosa guarda con la misma vnidade." (p. 31)

E exemplifica para o caso em que a variável assume o valor dois:

Y en exemplo pusimos la cosa ser .2. y conforme a este valor de la cosa, veremos o valor de las outras dignidades, y como suelen ser escriptas.

	Co .2.	Ce .4.	Cu .8.
Denominaciõ	.1.	.2.	.3.
		Ce.ce .16.	Re.po .32.
Denominaciõ		.4.	.5.
			Ce.cu o Cu.ce .64.
Denominaciõ			.6.

(idem)

Tal como Diofanto, Pedro Nunes escreve as potências de grau superior à custa das abreviaturas usadas para designar as de menor grau. No entanto, ao indicar que a *cosa* (x) tem denominação .1., o *censo* denominação .2. e assim sucessivamente, o matemático português está na realidade a representar as potências de x com expoente natural. Podemos confirmar isso, seguidamente, através da regra que ele apresenta para a divisão de monómios.

Documento segundo: Si el partidor fuere vna simple dignidad, y tuuiere menor denominacion que la dignidad que se ha de partir, sacaremos denominacion de denominacion, y lo que quedare sera denominacion de lo que viene en la particion, y partiremos numero por numero, y por esta arte se sabera quantas y quales dignidades vienen en la particion. Exemplo, si queremos partir .20. cubos por .5. cosas de .3. denominacion del cubo, sacaremos la vnidade denominacion de la cosa, y quedaran .2. que es la denominacion del censo. Y partiremos .20. por .5. y vernan .4. y diremos por tanto, que si partieremos .20. cubos por .5. cosas sera el quociente .4.ce. Desto se sigue, que quãdo el partidor fuere numero sin otra dignidad, sera el quociente la dignidad que se partio en menor numero. Exemplo, si queremos partir .30. ce. por el numero .5. porque la denominaciõ del censo es .2. y la de numero es cifra, restara la misma denominacion entera, y el quociente sera .6. censos. (p. 38, 39)

Observa-se que, no caso da divisão de .20.cubos por .5.cosas ($\frac{20x^3}{5x}$), Nunes explica que se subtrai a *denominação* da *cosa* à do *cubo*, ou seja, aplica a regra da divisão de potências com a mesma base. No exemplo seguinte, em que divide .30. *ce* por .5. (ou seja $30x^2$ por 5), mostra conhecer também o expoente nulo ao afirmar que nesse caso a *denominação* do número 5 "es cifra" (ou seja, zero).

No entanto, não aplica as regras para a divisão de potências quando a potência que se encontra no denominador é superior à do numerador. Afirma então:

.3. cosas partidas por .4.ce. vienen $\frac{.3.co.}{.4.ce.}$ Y manifesto es, que no puede venir numero, porque esse numero siendo multiplicado pelos .4. censos, haria censos, y no lo que se parte que son cosas. Ni podra dar dignidad alguna, porque essa dignidad siendo multiplicada por el partidor, hara mayor dignidad que la que se propuso para se auer de partir. Es por estas causas necessario, que lo que viene sea quebrado. (p. 39)

A escrita das potências de grau superior à custa das de menor grau foi o modelo notacional usado por Diofanto, pelos hindus e árabes e pela maioria dos italianos e alemães até ao século XVII. Entretanto, este modelo coexistia com um outro baseado em índices que permitia escrever de imediato uma potência com qualquer expoente.

O modelo com índices

Neste modelo alternativo o símbolo da variável era omitido e colocava-se apenas um número, o índice, correspondente ao seu grau. Esta notação não apresentava problemas desde que apenas figurasse uma incógnita na equação.

Nicole Oresme, bispo da Normandia, apresentou, em 1360, no seu livro *Algorismus proportionum*, uma teoria das proporções onde incluiu a noção de potência de expoente fraccionário racional. Este é referenciado por diversos historiadores como sendo o primeiro uso de expoentes fraccionários (Boyer, 1989). Oresme intenta o uso de notações especiais para as potências fraccionárias, por exemplo, escreve (Cajori, 1993):

$$\boxed{\frac{1.p.1}{4.2.2}} \text{ para designar } \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{e } \boxed{\frac{p.1}{1.2}}4 \text{ para designar } 4^{\frac{3}{2}}$$

No entanto, não usou esta simbologia nos seus cálculos — nesse caso a escrita era retórica. Não obstante numa certa fase já terem sido propostas certas notações, nem todas as suas consequências práticas tinham sido completamente exploradas (Smith, 1958). A teoria sobre os expoentes inteiros e fraccionários continuou a desenvolver-se nos três séculos seguintes.

Nicolas Chuquet, de Lyon, deu mais uma contribuição importante para a notação das potências. No livro *Le triparty en la science des nombres* (1484), apresentou 12^0, 12^1, 12^2 e 12^3 para designar 12, $12x$, $12x^2$ e $12x^3$. Observa-se, ainda, do seu trabalho o domínio da multiplicação algébrica: multiplica $.12.^0$ por $.10.^2$ e obtem $.120.^2$, ou seja, $12x^0 \times 10x^2 = 120x^2$. Chuquet utilizou também expoentes negativos, por exemplo, escreveu $9x^{-3}$ como $.9.^{3.m}$ (NCTM, 1976).

Uma outra notação simbólica para os expoentes foi elaborada por *Rafael Bombelli* (1526-1572). No livro *L'Àlgebra* utilizou um numeral árabe com um pequeno arco por baixo para

representar o expoente da variável (NCTM, 1976):

1 para a incógnita, 2 para o seu quadrado, 3 para o seu cubo, ...

Apresenta nesse livro a equação

$4+\sqrt{24-20x}=2x$, como solução de um certo problema, sob a forma:

4.p.R.q 24.m.$\overset{1}{20}$ Equale à $\overset{1}{2}$

Simon Stevin, em 1585, propõe uma notação semelhante.

Assim, x^4+3x^2-7x seria escrito na forma

$$\overset{4}{1} + \overset{2}{3} - \overset{1}{7}$$

A notação de Stevin, algo popular na época, foi abandonada a favor de outras mais próximas à de Chuquet devido, provavelmente à dificuldade de escrever e imprimir os numerais dentro de um círculo (Cajori, 1993). Com a introdução nas equações de coeficientes literais e de duas ou mais incógnitas, a omissão da letra correspondente à variável começou a mostrar-se inadequada. Surgem então novos desenvolvimentos na notação de potência.

O moderno conceito de potência

Em 1591, *Viète* forneceu uma contribuição importante com uma nova notação que permitia a inclusão, sem ambiguidades, de variáveis diferentes na mesma equação. Escreveu as potências da variável A como A *quad.*, A *cub.*, ..., método este que se mostrava, ainda, pouco prático (Ball, 1960).

A notação actualmente usada surge, finalmente, com o livro *Géometrie* (1637) de *René Descartes* (1596-1650). Ali escreveu: "*aa* ou a^2 para multiplicar *a* por si mesmo e a^3 para multiplicar ainda mais uma vez por *a* e deste modo até ao infinito" (Smith,1958) .

Descartes, todavia, limitou-se a trabalhar com expoentes inteiros positivos. Antes dele, já *Hume* em 1636) e *Hérigone* em 1634 tinham escrito representações bastante próximas da actual: por exemplo, designavam, respectivamente, $5a^4$ por $5a^{iv}$ e $5a4$. Note-se que a notação de Hume seria pouco cómoda devido à utilização da numeração romana. Por sua vez, a notação de Hérigone seria mais económica para o trabalho de tipografia, mas a de Descartes oferecia certas vantagens quanto à interpretação, tal como o seu uso, até aos nossos dias, tem evidenciado (Cajori, 1993).

Durante o século XVII, todas estas notações coexistiram e, curiosamente, ainda foram criadas outras. Ilustremos duas delas:

Huyguens em1751 indica 1024(10)2 para representar $1024=2^{10}$;

Leibniz em 1710 indica $\boxed{3}$(AB+BC) para representar $(AB+BC)^3$.

Gradualmente, a notação de Descartes foi ganhando mais adeptos, mesmo entre aqueles que, como Leibniz, começaram por usar outras. *John Wallis* (1616-1703) foi um dos primeiros a seguir o matemático francês e a exprimir, consistentemente, as potências de expoente negativo e fraccionário. No seu livro *Arithmetica infinitorum*, em 1656, indica que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{têm índice -1/2}$$

(NCTM, 1976).

No entanto, não chega a escrever que a^{-1} é $\frac{1}{a}$ ou que $a^{3/2}$ é $\sqrt[3]{a^2}$.

Deste modo, pode afirmar-se que a notação moderna atinge a sua forma amadurecida com Descartes. Mas neste autor o conceito de potência ainda era algo restritivo. Ele só foi alargado, de modo a que tanto a base como o expoente pudessem ser números racionais quaisquer, em 1676, por *Isaac Newton* (1642-1727). Numa carta dirigida a Oldenburg, secretário da *Royal Society of London*, Newton indica o significado dos expoentes negativos e fraccionários:

Uma vez que os algebristas escrevem a^2, a^3, a^4, etc., para *aa*, *aaa*, *aaaa*, etc, também eu escrevo $a^{1/2}$, $a^{3/2}$, $a^{5/2}$, para $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$; e escrevo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, etc. para $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, etc.

(NCTM, 1976)

Os expoentes generalizados são apresentados, na mesma carta, na fórmula do binómio.

Anteriormente *Viète*, em 1634, tinha já apresentado expoentes generalizados para expressar

$$x^m+\frac{y^m-x^m}{y^n+x^n}.x^n$$

que escreveu, no estilo da álgebra sincopada, como

$$\text{A}\,\textit{potestas} + \frac{\text{E}\,\textit{potestate} - \text{A}\,\textit{potesta}}{\text{E}\,\textit{gradui} + \text{A}\,\textit{gradu}}$$

in A *gradum* (Cajori, 1993).

Após Newton, a notação moderna de potência expandiu-se de forma rápida, tornando-se amplamente aceite. A utilização de variáveis como expoentes é, por exemplo, observada numa carta de *Leibniz* a Huygens, em 1679, onde se apresentam equações da forma: $x^x - x = 24$ e $x^z + z^x = b$ (idem). Com o surgimento da análise infinitesimal, as potências deixaram de ser vistas apenas como o resultado duma operação aritmética para passarem a ser encaradas como funções. Assim, $f(x) = x^n$, para cada valor de n, representava uma função com certas propriedades, conhecida por *função potência*. Por outro lado, $g(x) = a^x$, representava uma outra função, com propriedades muito diferentes, designada por *função exponencial* — função esta que viria a desempenhar um papel fundamental na Matemática a partir daí.

O conceito de potência viria a receber os seus retoques finais quando foi feita uma construção rigorosa do conjunto dos números reais, já no final do século XIX. Nessa altura, colocou-se finalmente a questão de saber em que casos faz sentido definir potência.

Através deste breve resumo histórico podemos observar como tanto o desenvolvimento dos conceitos como a construção da linguagem simbólica da Matemática representam muitas vezes um processo moroso e complexo. Nas suas formas mais primitivas, o conceito precedeu em muitos séculos a sua formalização actual. As diferentes notações que foram surgindo, não se mostraram de igual modo adaptadas para uma aprofundada exploração. A plena generalização do conceito só se conseguiu no momento em que atingiram a maturidade outros conceitos matemáticos com ele estreitamente relacionados. A relevância deste percurso é destacada por Cajori (1993):

> A nossa notação para representar potências foi uma grande ajuda para o avanço da álgebra para um nível que não teria sido possível com as notações alemãs antigas ou com outras notações do passado. Em mais nenhum lado é a importância de uma boa notação para o desenvolvimento da Matemática tão bem evidenciada como no simbolismo das potências usado na álgebra. (p.360)

Bibliografia

Ball, W. R. (1960). *A Short Account of the History of Mathematics* (4ª ed.). New York: Dover Publications.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1989). *A History of Mathematics* (2ª ed.). New York: John Wiley & Sons.

Cajori, F. (1991). *A History of Mathematics* (5ª ed.). New York: Chelsea Publishing Company.

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations* (3ª ed.). New York: Dover Publications (Edição original, em dois volumes, de 1928 e 1929)

Fauvel, J. (1987). *Early Mathematics. Topics in the History of Mathematics — Unit 1.* Milton Keynes: The Open University.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics.* New York: Harper Collins College Publishers.

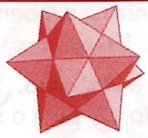
National Council of Teachers of Mathematics (1976). *Historical Topics for the Mathematics Classroom* (31st Yearbook, 3ª ed.). Washington, D. C.: Autor.

Nunes, P. (1956). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria.* Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa. (Edição original de 1567)

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics* (2ª ed.). New York: Dover Publications.

João Pedro da Ponte
Hélia Oliveira
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática



A actividade desta secção (página ao lado) foi proposta aos alunos de uma turma de 11° ano neste ano lectivo. Os alunos trabalharam aos pares, dois por computador. Conheciam já a designação de hipérbole como curva correspondente ao gráfico de determinado tipo de funções, mas desconheciam outras formas de a obter. Quando viram surgir a curva no ecrã, começaram por lhe chamar parábola:

—Oh setora, então porque é que não é uma parábola?

Adiei a resposta, procurei que resolvessem as tarefas propostas até ao fim, que discutissem entre eles, escrevessem as suas conjecturas. A surpresa foi geral quando viram aparecer a elipse.

Na terceira aula discutimos as suas descobertas. Só nessa altura falei da diferença entre a hipérbole e a parábola, e das características comuns a todas as cónicas. Procurei documentar-me sobre um assunto de que pouco sabia, e falei-lhes então dos primeiros estudos das cónicas feitos pelos gregos, de Apolónios, e de que só muitos séculos mais tarde surgiu o conceito de função e se percebeu que alguns gráficos tinham a forma de cónicas ou de partes de cónicas. Falei-lhes de algumas aplicações das cónicas a problemas de engenharia, de óptica, etc.. O interesse foi geral. Os alunos acompanhavam curiosos, faziam perguntas, queriam saber mais. Cuidadosamente tomaram apontamentos nos cadernos. Os eixos de simetria, os vértices, os focos, a ligação entre tudo isto, as diferenças entre tudo isto, a origem do nome, os cortes no cone, improvisaram-se cones em folhas de papel. E surgem sempre aquelas perguntas de que não estou à espera e que no momento não sei responder:

— Porque é que os gregos se interessaram tanto pelas cónicas?

—Como é que conseguiram fazer esses estudos com instrumentos rudimentares, sem computadores?

—Como é que conseguiram descobrir que os cortes do cone davam as cónicas e as suas características?

— ...??

Apesar do desconforto de não saber muito bem responder a tudo, tinha a satisfação de perceber que tinha despertado a curiosidade em alguns e de ouvir comentar por vezes:

—Que giro...!

Parecia correr tudo bem, mas o toque estridente da malfadada campainha não nos deixou esquecer que a aula tinha que acabar. Talvez por isso os alunos se tenham recordado que afinal estavam na escola, e surgiram as perguntas às quais não dei resposta, desta vez não porque não soubesse ou porque queria que fossem os alunos a descobrir, mas unicamente porque me invadiu um sentimento de impotência e uma enorme irritação:

—Isto sai para o teste? É preciso saber os focos e os vértices? Temos que saber os nomes?

É esta a escola que temos. A escola que amestra os jovens para responder a testes escritos, às vezes basta pôr umas cruzinhas, a escola onde eles aprendem que só tem valor o que pode ser perguntado nos testes. E são os alunos como os desta turma, dos melhores alunos da escola, os que interiorizam geralmente melhor este ensinamento: o que interessa é o que pode ser perguntado no teste, só isto têm que saber, tudo o resto não tem grande valor. Pode suscitar uns momentos de curiosidade, mas nada mais, porque o seu futuro não depende disso.

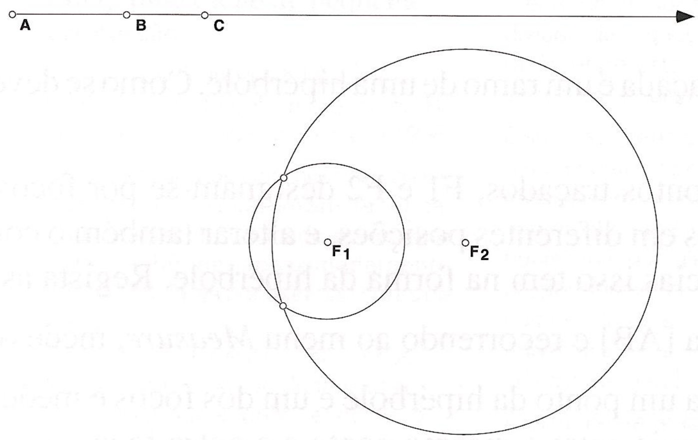
E qual é o meu papel no meio de tudo isto?

Ana Vieira
Esc. Sec. de Linda-a-Velha

Escola ....

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)...

Uma curva chamada hipérbole



1. Constrói um segmento de recta [AB].

2. Selecciona a opção *semi-recta* no menu das ferramentas. Coloca o cursor no ponto B e desenha uma semi-recta na continuação de [AB].

3. Esconde o ponto da semi-recta que ficou assinalado quando a desenhaste. Para isso selecciona o ponto e escolhe *Hide Point* no menu *Display*.

4. Selecciona a semi-recta anterior e escolhe a opção *Point on object* no menu *Construc*t, para desenhar um ponto sobre essa semi-recta (ponto C).

5. Selecciona os pontos B e C e constrói o segmento de recta [BC], escolhendo a opção *Segment* no menu *Construct.* Para isso deve estar previamente seleccionada a opção *segmento* no *menu das ferramentas.*

6. Faz o mesmo para [AC].

7. Desenha dois pontos F1 e F2.

8. Selecciona [BC] e o ponto F1, e escolha *Circle by Centre and Radius* no menu *Construct.*

9. Repete o procedimento anterior para construir uma circunferência de centro F2 e raio [AC].

10. Selecciona as circunferências e escolhe *Point at Intersection* no menu *Construct*, para marcar os pontos de intersecção das duas circunferências.

11. Com os pontos anteriores seleccionados, escolhe *Trace Point* no menu *Display.*

12. Arrasta o ponto C ao longo da semi-recta a que pertence, e observa o que acontece.

13• Para facilitar a investigação, selecciona o ponto C e a semi-recta a que este pertence. No menu *Edit*, escolhe *Action Button*, e em seguida *Animation*. Desta forma, fica visível um "botão" que basta *clicar* duas vezes sempre que se quer activar o deslocamento do ponto C ao longo da semi-recta.

Questões

Q1• A curva traçada é um ramo de uma hipérbole. Como se deve proceder para traçar o outro ramo?

Q2• Os dois pontos traçados, F1 e F2 designam-se por focos da hipérbole. Experimenta colocar os focos em diferentes posições, e alterar também o comprimento de [AB] para ver que consequências isso tem na forma da hipérbole. Regista as tuas descobertas.

Q3• Selecciona [AB] e recorrendo ao menu *Measure*, mede o seu comprimento.

Selecciona um ponto da hipérbole e um dos focos e mede a distância entre eles. Mede também a distância entre o mesmo ponto e o outro foco.

Selecciona as duas distâncias anteriores e escolhe *Calculate* no menu *Measure* para calcular a diferença entre elas. Elas surgirão quando clicares em *values*.

Anima o teu *sketch*, observa o que acontece aos vários resultados e procura tirar conclusões acerca das propriedades dos pontos de uma hipérbole.

Investiga mais:

1• Arrasta o ponto B de forma que fique colocado à direita do ponto C, mas mantendo-se os três pontos alinhados.

2• Selecciona os pontos A e B e constrói o segmento de recta [AB].

3• Cria um botão de animação, para deslocar o ponto C ao longo da [AB].

4• À medida que o ponto C se desloca, surgirá novamente um curva. Se isso não acontecer, arrasta os pontos F1 e F2 para outra posição.

Compara a curva assim obtida com a curva anterior.

Quais as diferenças e semelhanças que encontras?

A divisão e seus "dividendos"

Renato J. C. Valladares

O elemento de humilhação do artista era a proporção de um cachê em relação a outros. O que estava na base da sua insatifação era a proporcionalidade, idéia importantíssima que contrariamente a um bom número de noções da matemática, estende seu campo de abrangência muito além desta ciência. A proporcionalidade é uma noção matemática que se incorporou à cultura humana, sendo muito bem compreendida e utilizada por um número imenso de pessoas, independentemente do nível de formação matemática que elas tenham.

Um grande cachê de pequena proporção

Iniciaremos citando um fato amplamente divulgado pela imprensa do Rio de Janeiro, nos primeiros dias de 1996:

> Nos festejos de ano novo promovidos pela Prefeitura, um artista conseguiu se sentir humilhado ao receber um cachê de aproximadamente 36.000 dólares por algumas horas de apresentação.

Como a quantia é vultuosa, sendo incapaz, por si só, de desmerecer quem quer que a tenha recebido, o próprio artista se incumbiu de explicar o que o havia incomodado: outros artistas haviam ganho mais ou menos o triplo para participar no mesmo show.

Assim, o que humilhou o artista, não foi o valor do cachê, que era grande, mas sim o fato dele ter sido cêrca de três vezes menor que o de outros artistas. Surge assim como elemento de humilhação, a proporção de um cachê em relação a outros.

Este fato mostra de forma muito clara que o artista raciocinou em termos proporcionais para se sentir ofendido. Isto é, o que estava na base da sua insatisfação era a proporcionalidade, idéia importantíssima que contrariamente a um bom número de noções da matemática, estende seu campo de abrangência muito além desta ciência. Isto é, a proporcionalidade é uma noção matemática que se incorporou à cultura humana, sendo muito bem compreendida e utilizada por um número imenso de pessoas, independentemente do nível de formação matemática que elas tenham.

"Dividendos"

A noção de proporcionalidade, tão bem evidenciada no episódio acima e corrente em tantas atitudes humanas é, sem dúvida nenhuma, decorrente da idéia de divisão, que independentemente da grandeza do dividendo e do divisor, dá o quociente como uma razão entre estes números, estabelecendo assim uma proporção entre eles.

Dando sequência a este tipo de pensamento, se observarmos a divisão com um pouco de atenção, vemos que ela é uma operação riquíssima, que além da proporcionalidade, tem um sem número de desdobramentos da maior relevância para a matemática e para a ciência em geral.

Assim, neste artigo falaremos sobre alguns pontos importantes da matemática que podem ser vistos como desdobramentos da divisão. Como estes desdobramentos representam significativos ganhos científicos, não resistimos à tentação de fazer um jogo de palavras e, por isso, adotamos para eles a denominação "dividendos", corrente no mundo das finanças para significar certos ganhos.

Nesta linha de idéias, a proporcionalidade é o primeiro "dividendo" que surge. Para falarmos de outros, enunciaremos três problemas e um fato que nos conduzirão de forma natural a eles.

Três problemas e um fato

Problema 1 - Um agrimensor dividiu uma gleba de 36428m² em cinco lotes iguais. Deseja-se saber a área de cada lote.

Problema 2 - Um português chegou ao Brasil numa quinta-feira há 26324 dias. Deseja-se saber o dia da semana em que esta afirmação foi formulada.

Problema 3 - Uma senhora nasceu há 23431 dias. Sabendo-se que esta afirmação foi formulada em Janeiro de 1996, deseja-se saber o ano em que esta senhora nasceu.

Fato - É impossível dividir por zero.

As soluções

O primeiro problema é muito simples. A área de cada lote será dada pelo quociente da divisão 36428/5, que é 7285,6. Isto é, cada lote terá 7285,6 m^2.

Convém observar que embora a divisão acima não seja exata, a natureza do problema impôs que ela se estendesse, levando a um resultado fracionário. Mesmo que se tivesse chegado a uma dízima periódica, como teria sido o caso da divisão em 6 lotes, onde o quociente seria 6071,33..., o agrimensor, cometendo um erro desprezível, que certamente nem se daria o trabalho de mencionar, diria que cada lote ficou em 6071,33 m^2.

Fica então muito claro que o resto da divisão não ajuda em nada a resolução do primeiro problema, sendo em verdade quase um estorvo do qual quem resolve o problema procura se livrar, estendendo os cálculos e chegando a um quociente fracionário que elimina o resto ou o reduz a proporções desprezíveis.

Já no segundo problema, o que importa é justamente o resto da divisão, como veremos na sequência.

Dividindo o número de dias que o português está no Brasil (26324) pelo número de dias da semana (7), o btemos o resto 4. Assim, a diferença 26324 – 4 é um múltiplo de 7, o que mostra que 4 dias antes da afirmação ser feita, era o mesmo dia da semana em que o homem chegou; isto é, uma quinta-feira. Como o dia da semana que se obtém somando 4 dias a uma quinta-feira, é uma segunda-feira, concluímos que este foi o dia em que a afirmação foi feita.

É interessante notar que se problema 2 fosse modificado, dizendo que a afirmação foi feita em uma segunda-feira e pedindo o dia de chegada, o raciocínio teria de ser invertido, subtraíndo-se (em vez de somar) à segunda-feira os 4 dias que apareceram no resto da divisão. Concluía-se, evidentemente, que a chegada se deu em uma quinta.

O mesmo resultado seria obtido se em vez de subtraír 4, tivéssemos somado 3 dias à segunda-feira. Não é difícil observar que este fato está estreitamente relacionado à igualdade 3 = 7 – 4.

Finalmente, a solução do terceiro problema depende tanto do quociente quanto do resto da divisão, como veremos a seguir.

Como a maior parte dos anos tem 365 dias, iniciemos efectuando a divisão 23431/365, obtendo o quociente 64 que dá o número de períodos de 365 dias e um resto de 71 dias que não são suficentes para formar um destes períodos. Como não foram considerados os anos bissextos, é claro que esta conta não reflete a realidade dos factos, com exatidão.

Não obstante, ela deixa claro que em números redondos de anos, 64 era a idade máxima desta senhora em Janeiro de 96, tendo ela, portanto, vivido 16 ou 17 anos bissextos, o que mostra que voltando ao resto da divisão, pode-se concluir que 54 (=71–17) era, em Janeiro de 96, o número mínimo de dias em que a idade dela ultrapassava os 64 anos (o número máximo era 55). Como estes 54 dias não podem ser absorivdos pelos 31 de Janeiro, segue-se que seu 64° aniversário ocorreu em 1995, o que permite concluir que ela nasceu em 1931.

Se a afirmação tivesse sido formulada em Fevereiro de 96, os dados não seriam suficientes para decidir se o nascimento ocorreu em 1931 ou em 1932, pois como Janeiro e Fevereiro juntos têm 59 ou 60 dias, a absorção por estes meses, dos 54 ou 55 dias restantes poderia ou não ocorrer, dependendo do dia de Fevereiro em que a afirmação tivesse sido formulada.

Já se a afirmação tivesse sido feita em Março, é fácil ver que o nascimento teria ocorrido em 1932.

"Dividendos" mostrados pelos problemas

A atitude adotada na resolução do primeiro problema conduz ao cálculo fraccionário, às dízimas periódicas e em última análise, à construção dos números racionais, que é o conjunto numérico ideal pára as divisões sem resto, nem sempre possíveis no conjunto dos números inteiros.

Assim, o conjunto dos números racionais pode ser visto como um "dividendo" da divisão dado pela impossibilidade de efetuar, no conjunto dos números inteiros, algumas divisões necessárias ao bom equacionamento de certos problemas.

Dentro da mesma linha de raciocínio, a (célebre) verificação da incomensurabilidade de raíz de 2 se traduz na impossibilidade de encontrar uma unidade de comprimento que divida em número inteiros de partes, o lado e a diagonal de um mesmo quadrado. Como esta impossibilidade é muito comummente usada como disparador da construção do conjunto dos números reais, podemos considerar este conjunto como também sendo um "dividendo" da divisão, que sem a menor dúvida, é um dos mais importantes.

O segundo problema usou o resto da divisão, somando ou subtraindo-o aos dias da semana para chegar à solução. Assim, surgem como "dividendos" da divisão evidenciados por este problema, as teorias das congruências e das classes residuais, importantes no estudo das estruturas algébricas tão adequadas à compreensão dos fenômenos cíclicos ou periódicos, como a contagem do tempo pelo relógio ou pelo calendário, as marés, as estações do ano, trigonometria, diversos tópicos da astronomia, dos sistemas mecânicos e elétricos, etc.

Se tivesse sido usada a regra da divisibilidade por 7 (que existe, embora pouco difundida) a determinação do resto acima fica bem simplificada. Surgem assim através deste problema, a divisibilidade e suas regras como "dividendos" da divisão.

Cabe, aqui, observar que embora a determinação do quociente da divisão 26324/7 não tenha sido necessário na resolução do problema 2, o seu conhecimento é de grande utilidade para resolvê-lo com auxílio de uma calculadora, pois efetuando esta conta na máquina, obtém-se um quociente fracionário cuja parte inteira é 3760. Aplicando a igualdade fundamental da divisão, D = dq + r, onde D é o

(continua na pág. 40)

O problema deste número

Uma matrícula "quadrada"

O problema nº 50 foi este:

Antigamente as matrículas dos automóveis eram formadas por duas letras, um número de dois algarismos e outro número de dois algarismos. Por exemplo:

RB - 49 - 64.

A matrícula do meu velho carro é extremamente curiosa (pelo menos para um matemático) porque:

- *o primeiro número é um quadrado perfeito,*
- *o segundo número é um quadrado perfeito,*
- *se juntarmos estes dois números num só obtemos um quadrado perfeito,*
- *se substituirmos as letras pelos números correspondentes à ordem que ocupam no alfabeto e as juntarmos ao número anterior obtemos ainda um quadrado perfeito.*

Nenhum dos números começa por 0.

Qual é a matrícula do meu velho automóvel?

Nota: se a matrícula fosse a do exemplo acima indicado, os três primeiros números seriam 49, 64 e 4964. Como R é a 18ª letra e B a 2ª, o último número seria 1824964. E todos teriam de ser quadrados perfeitos.

Desta vez, tivemos um bom número de respostas: 19. Foram enviadas por Alice Martins (Torres Novas), Ana Luisa Correia (via e-mail), António Amaral (via e-mail), António Ruiz Lozano (Lisboa), Carla Reis (Azambuja), Cristina Ramos (Damaia), Fernanda Melo (Rio de Mouro), Helena Rocha (Lisboa), Isabel Mateus (Celorico da Beira), Isabel Moreira (Vila do Conde), Iva e Nuno Angelino (V. F. Xira), J. Orlando Freitas e Egídio Pereira (Funchal), João Alves (Chaves), João Barata (Castelo Branco), Jorge Barata e Rosalina Santos (Alcains), Luis Vaz Pato e Ana Maria (Oliveira do Hospital), Tiago Martins (Braga), Tiago Osório (Galizes), Vidal Minga (Carcavelos).

Gostávamos de começar por transcrever parte de uma das resoluções:

> Eu sou o Tiago José Martins, tenho quase 9 anos e ando no 3º ano da Escola de S. Victor nº 7 - Braga.
> O meu pai é assinante da vossa revista há algum tempo.
> Tudo começou ao folhear a revista. Encontrei um problema curioso que

(Continua na página 40)

Problema proposto

O Tesouro dos Piratas

Há muitos anos, o pirata Barba-Ruiva resolveu enterrar o seu tesouro. Escolheu uma ilha onde a única praia tinha duas grandes rochas junto à água, a 100 metros uma da outra, e uma enorme palmeira entre as rochas mas a 80 metros da linha de água. Mandou um dos piratas do seu bando para cada uma das rochas e deu-lhes as seguintes instruções: olhar em direcção à palmeira, rodar 90° e andar uma distância igual à distância a que a respectiva rocha estava da palmeira. Nenhum dos piratas se molhou. Os dois piratas ficaram parados e o pirata Barba-Ruiva enterrou o tesouro exactamente a meio de caminho entre eles.

Por acaso , encontrámos o documento onde isto estava descrito e resolvemos ir até à ilha à procura do tesouro. Lá encontrámos as rochas junto à água mas infelizmente a palmeira tinha desaparecido, provavelmente derrubada por um furacão.

Como a praia agora é um destino turístico conhecido, não podemos andar a escavar por todo o lado. A única hipótese é aproveitar uma noite antes de amanhecer e fazer apenas um buraco.

Onde devemos escavar para termos boas hipóteses de descobrir o tesouro?

(Respostas até 30 de Junho)

(Continuação da página 39)

tinha como título "Uma matrícula quadrada".

Perguntei ao meu pai o que era um número quadrado perfeito.

Ele disse-me que era o resultado de uma multiplicação de um mesmo número duas vezes.

Li novamente o problema.

Para começar escrevi todos os quadrados perfeitos inferiores a 100 e superiores a 16.

Somei um número quadrado perfeito com outro, por exemplo 16+25=41.

Se desse um número superior a 81 ia ver à máquina de calcular a raiz quadrada desse número e se o resultado fosse um número sem vírgula, esse número era um quadrado perfeito, mas se o resultado tivesse vírgula não era.

Depois escrevi o alfabeto e numerei-o com os números ordinais por baixo.

Quando acabei, peguei na máquina de calcular e comecei a multiplicar um mesmo número duas vezes. O número tinha de acabar em 3664 ou em 6436.

Achei o número 153664. (...)

Pensámos que valia a pena partilhar com os leitores de Educação e Matemática a belíssima descrição que o Tiago Martins faz do processo que seguiu para resolver o problema.

Repare-se que deu uma interpretação diferente ao enunciado do problema: admitiu que "juntar dois números num só" era somar os números, quando o que tínhamos em mente era formar um único número de quatro algarismos.

Os outros leitores seguiram esta segunda interpretação e, para resolver o problema, usaram vários processos, desde a folha de cálculo ou um pequeno programa de computador até à utilização das congruências (António Lozano).

Mas a maioria começou por pôr os quadrados perfeitos de dois algarismos:

16, 25, 36, 49, 64, 81

e agrupá-los dois a dois. Há 36 possibilidades, desde 1616 até 8181, que facilmente se testam com uma calculadora. O único quadrado perfeito é 1681.

Estão descobertos os algarismos. Faltam as letras. Para isso temos de descobrir um novo quadrado perfeito terminado precisamente em 1681.

Agora pode ajudar uma pequena pesquisa sobre as terminações dos quadrados perfeitos e o respectivo número base.

Para terminar em 1, os números base têm de terminar em 1 ou 9 e aparecem em duas séries, espaçados de 10 em 10:

1, 11, 21, 31, ... e 9, 19, 29, 39, ...

Para terminar em 81, os números base aparecem de 50 em 50:

41, 91, 141, ... e 9, 59, 109, ...

Para terminar em 681, aparecem de 250 em 250:

41, 291, 541, ... e 209, 459, 709, ...

Experimentando os quadrados destes números encontramos:

$1209^2 = 1461681$

$3791^2 = 14371681$

$4959^2 = 24591681$

$5041^2 = 25411681$

A única hipótese que serve é a primeira: 1461681.

146 corresponde às letras e só há uma possibilidade: 14–6.

A 6ª letra é o F mas qual é a 14ª?

João Barata esclarece todas as dúvidas:

Como antigamente a letra K não era incluída nas matrículas, a 14ª letra correspondia ao O.

A matrícula do velho carro é:

OF – 16 – 81

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

A divisão e seus "dividendos" (continuação da pág. 38)

dividendo (agora sem aspas), d o divisor, q o quociente e r o resto, vemos que este último será dado por

$r = D - dq = 26324 - 7 \times 3760 = 4$.

Contrariamente ao problema 2, onde a igualdade fundamental da divisão embora útil, é dispensável, a resolução do problema 3 depende diretamente dela. Surgem assim, como "dividendos" através deste problema, os domínios euclidianos, que são as estruturas algébricas onde é possível falar nesta igualdade e nas suas consequências, tais como divisibilidade, MMC, MDC, elementos primos e primos entre si, etc. Os anéis mais gerais, onde esta igualdade não seja válida, também não deixam de ser "dividendos" que são mostrados por este problema.

O "dividendo" da impossibilidade do divisor nulo

Finalmente, a impossibilidade de dividir por zero, não obstante o fato de impôr uma enorme limitação a esta operação, termina por dar origem a um dos mais promissores de seus "dividendos", como veremos a seguir.

Um dos desdobramentos da proporcionalidade e, portanto, outro "dividendo" da divisão, que é a variação média de certos fenômenos precisa, em algumas situações, ser calculada com denominadores muito pequenos, tendentes a zero. É aí que entra o recurso do limite e contorna a impossibilidade aritmética da divisão por zero, criando a derivada, que com todos os seus desdobramentos surge como um "dividendo" da divisão que dá uma dimensão quase infinita à matemática.

Estes exemplos evidenciam bem como a operação divisão e os seus muitos desdobramentos são ricos em dividendos da maior relevância em importantes campos da Matemática.

Referências bibliográficas

Ávila, Geraldo, Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais, RPM, Vol. 5, pp. 6 a 11.

Lima, Elon, Grandezas Proporcionais, Meu professor de Matemática, pp. 127 a 141.

Valladares, Renato J.C., Intuição e Proporcionalidade, Bol. GEPEM nº 33, pp. 50 a 59.

Renato J. C. Valladares
Mestrado em Ed. Mat. da Univ. de Santa Úrsula

Pense nisto

Utilização de materiais — resultados do Matemática 2001

No ProfMat 98 foi distribuído em primeira mão o relatório final do projecto Matemática 2001. *Esse relatório, com que culmina o trabalho desenvolvido durante mais de dois anos por um grupo de trabalho da APM, contém muita informação relacionada situação do ensino da Matemática em Portugal e também um conjunto de recomendações decorrentes da análise efectuada. Muita matéria, portanto, sobre muitos assuntos e sob vários aspectos, e que merece a nossa reflexão.*

	Nunca ou Raramente (%)	Em algumas aulas (%)	Em muitas aulas (%)	Sempre ou quase sempre (%)
Manual adoptado	2	14	33	**49**
Fichas de trabalho	2	38	**50**	8
Calculadora	11	**37**	33	17
Jogos didácticos	**48**	45	4	0
Materiais manipuláveis	35	**53**	8	1
Computador	**88**	7	1	0

Para este *Pense Nisto*, escolhemos uma pequena parte relacionada com a utilização de materiais na sala de aula. As respostas obtidas no inquérito realizado junto dos professores do 2° ciclo, do 3° ciclo e do ensino secundário forneceram os dados constantes tabela aqui ao lado. Estes dados permitem traçar um quadro relativamente à utilização de materiais nestes ciclos de escolaridade que, de um modo simples e sintético, pode ser descrito do seguinte modo:

- O Manual escolar tem uma presença dominante nas aulas de Matemática, sendo também muito significativa a frequência com que são utilizadas as Fichas de trabalho.
- No conjunto dos três ciclos a Calculadora têm uma utilização significativa.
- Os Jogos didácticos e Materiais manipuláveis são pouco utilizados.
- A utilização do Computador é quase inexistente.

Para além do inquérito nacional, foram realizadas reuniões nas escolas e informação obtida através do contacto directo com os professores nessas reuniões, de um modo geral, corrobora o quadro atrás traçado.

No que se refere à utilização do Manual escolar e das Fichas de trabalho existe grande uniformidade entre os vários ciclos. Também no 1° ciclo uma grande maioria de professores (90%) declarou usar um manual e, com muita frequência, fichas de trabalho. Igualmente uniforme nos vários ciclos de escolaridade, é o que se passa com a utilização do computador, onde a grande maioria dos professores indica nunca ou raramente os utilizar.

A situação não é, no entanto, uniforme em relação a outros aspectos e podem identificar-se algumas diferenças entre os ciclos em que vale a pena reparar. Sobre a máquina de calcular, a frequência com que é utilizada da vai decrescendo com o nível de escolaridade. É de salientar que, no 2° ciclo, cerca de 25% dos professores declararam nunca ou raramente a utilizar e as respostas no 1° ciclo apontam também para uma baixa frequência de utilização. Também a frequência de utilização de Materiais manipuláveis e Jogos didácticos, sendo globalmente sempre muito baixa a partir do 1° ciclo, não é uniforme ao longo da escolaridade, e é diminuta nos últimos anos.

Com base nos recolhidos, recomenda-se no relatório do *Matemática 2001* a respeito desta matéria:

"A prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam (...) materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadoras e computadores."

"O manual escolar deve ser usado de modo a promover a capacidade de auto-aprendizagem e o espírito crítico dos alunos, por exemplo, através da leitura e análise do texto a propósito do estudo de um conceito ou assunto matemático, da realização de sínteses escritas pelos alunos a partir do estudo no manual, ou da preparação de um tópico (ou actividade) a realizar pelos alunos, seguida da sua apresentação em aula."

Fica aqui, então, para pensar:

Que reflexão faz sobre o diagnóstico realizado relativamente à utilização de materiais na aula de Matemática?

As recomendações apresentadas apontam para as principais mudanças que julga necessário introduzir na prática lectiva dos professores a este respeito?

Que condições e acções concretas acha necessárias para tais mudanças. Que sugestões tem a fazer a este respeito, para o trabalho a desenvolver ao nível da APM?

Henrique M. Guimarães

Uma escada usada como ferramenta de prática pedagógica

Cláudio Lopes de Jesus
Pedro Paulo Scandiuzzi

Esta é a prática do povo índio do médio e baixo Xingu, observado por professores de Matemática. As crianças aprendem que tudo lhes é permitido, os adultos ensinam que nada é proibido, mas que é necessário limitações, essas limitações colocadas são formas de estratégias educacionais para que não ausentem as regras daqueles que mandam, daqueles que exercem um poder sobre. É uma estratégia informando que existe um obstáculo, ele deixará de existir quando crescer, mas não é proibido subir se conseguir.

Este trabalho relata a estratégia de ensino usada por povos indígenas e os dados colectados foram observados durante o "V Curso de Formação de Professores Indígenas no Parque Indígena do Xingu" realizado em Novembro de 1996, onde ministramos como assessores do curso, a disciplina de Matemática. O parque indígena do Xingu é uma área indígena demarcada com 30.000 quilômetros quadrados, localizada ao norte do Estado de Mato Grosso. Nela vivem 17 nações indígenas. Estes povos falam 17 línguas de diferentes troncos linguísticos.

O Parque é dividido em duas regiões: o Alto Xingu e o baixo/médio Xingu. Para abranger todo o parque de modo que todas as nações indígenas pudessem participar, a área geográfica do parque foi dividida em duas partes:

A primeira parte foi desenvolvida no Posto Indígena Pavuru onde, pela localização, concentra os índios da região do alto Xingu. Este posto Pavuru localiza-se a 1 km da aldeia Ikpeng, povo indígena falante da língua Karib. A segunda, no Posto Indígena Diauarum, onde concentra os índios da região do baixo e médio Xingu, não se localiza muito perto de aldeia e esses povos já têm muito contato com os Caraíbas (não-índios).

Cada Posto Indígena possui uma casa de alvenaria intitulada por eles "Casa da saúde", onde recebem um acompanhamento médico-odontológico básico e próximo a este tem uma caixa d'água, no alto, que serve para abastecimento de água do posto.

Num certo final de tarde depois de tomar banho no rio Xingu, que passa em frente ao posto indígena de Pavuru, enxugamo-nos para voltar ao alojamento. No caminho de volta observamos um índio que estava carregando um tronco de árvore com aproximadamente 15 centímetros de diâmetro. Encostou uma ponta do tronco do lado da caixa d'água e a outra ponta do tronco apoiado no chão.

Para que serve um tronco de árvore encostado à caixa d'água? Servirá para fazer um outro apoio à caixa d'água ou teria uma outra utilidade?

Não encontrando resposta que nos satisfizesse, por algum tempo ficamos parado, pensando o que poderia ser feito com aquele tronco. Caminhamos até ele e perguntamos o que iria fazer com aquele tronco de árvore encostado na caixa d'água. Com dificuldade na pronuncia da língua portuguesa, e dentro do seu universo de tempo e espaço, de pressa e lentidão, vagarosamente nos disse que iria fazer uma escada pois precisaria limpar a caixa d'água. A recomendação da necessidade de limpeza da caixa d'água, havia sido feita por umas enfermeira que tinha passado por ali há dois dias atrás. O índio voltou-se para o tronco, deu mais uma ajeitada e foi embora.

Continuamos nosso caminho para o alojamento pensando naquela situação. Apesar dele não explicitar como aquele tronco se transformaria numa escada ficamos imaginando as várias maneiras que poderia ser construído. De que forma seria? Qual o processo de construção? Em nações com diferenças tão acentuadas tudo se espera.

Era tamanha nossa curiosidade que no dia seguinte procuramos ficar atentos entre um intervalo e outro das aulas, até que no final da tarde avistamos o mesmo índio trazendo mais um tronco semelhante ao primeiro. Da mesma maneira que fez com o primeiro tronco, encostou do outro lado da caixa d'água esse segundo tronco e voltou para a mata para trazer alguns galhos.

Havia no local então, dois troncos e alguns galhos.

Pegou o facão e começou a limpar os galhos. Quando todo material já fora preparado para a construção da escada chamou uma criança com idade aproximadamente entre 2 e 3 anos e colocou um destes galhos ao lado da criança na vertical tirando assim sua altura. Com essa medida voltou-se para a escada e usou-a para marcar a distância de um degrau ao outro. Depois da escada pronta, sentimos uma vontade de fazer uma conversão de medidas, daquela existente para o centímetro, então pegamos uma régua para medirmos a distância entre os troncos e a distância entre os degraus e aproximadamente obtivemos 103 centímetros entre os troncos e 68 centímetros entre os degraus.

Uma surpresa: disseram que índio não sabe medir! Onde ele aprendeu este conceito, de que medir é escolher uma unidade de medida e ir colocando-a lado a lado? Porque será que a unidade de medida era a de uma criança de 2 a 3 anos de idade?

Naturalmente, para nós, despontava uma curiosidade, que segundo Freire (1997) é o que gera/produz conhecimentos. Como se tratava de medidas, tivemos em nós o seguinte problema: qual seria a necessidade de escolher para unidade uma criança? Tem a ver com o processo educacional? Podemos chamar de uma estratégia quotidiana onde a matemática se dá?

Foi quando fomos até ele e perguntamos porque tirou aquela medida na altura da criança. Ele nos respondeu dizendo que era para a criança não subir até à caixa d'água.

Não seria mais fácil construir degraus menores e "educar" a criança, reprimindo-a com os "não" da vida sem explicação, como fazem nas escolas dos Caraíbas?

Apesar de sermos formadores de professores indígenas, de sermos matemáticos, nossa atenção e nossa curiosidade neste momento não estava na arte ou técnica de construção de escadas por povos indígenas e nem no conhecimento de medidas dos povos indígenas. Nossa preocupação estava em querer saber porque as distâncias entre os degraus das escadas dos Postos não eram iguais à medida das escadas convencionais dos não-índios.

Para dar resposta a estes problemas, passamos a observar em redor o que ocorre com as crianças, pais e chefes dos postos.

Os pais nunca chamam à atenção de uma criança. Eles vão banhar-se com os filhos, conversam com eles, brincam o dia inteiro e também participam de eventos que envolvem o costume da aldeia. Para exemplificar: ir pegar içá para comer. A festa nesta "colheita" tão generosa, faz com que todos se sintam motivados a socializar formas de busca do içá, delimitação de área, que cada família pode dar a busca, e poder falar sobre o que observa em relação a outra época do içá. Depois, ao retornar à casa, o preparar, o comer, o dividir, com aqueles que não tiveram a sorte de catar içá... O quotidiano tem tramas e nestas tramas se aprende um viver. Por isso Freire (1997) nos diz que aprender antecede o ensinar, ou, em outras palavras, ensinar se dilui na experiência realmente fundante de aprender.

Os chefes também são amigos destas crianças e eles têm liberdade de dialogar com elas. Nesse diálogo pessoa/família/chefia a criança cresce.

Por isso, a criança dificilmente ouvirá "não sobe aí que é perigoso", "não faça isto ou aquilo" pois é ruim para você. A criança poderá experimentar tudo o que ela desejar, mas no caso da escada ela terá uma barreira a transpor: a medida dos degraus, e estes degraus exigirão que as crianças já tenham mais de 5 anos, idade que já tem certa observação da realidade e que pode tomar certos cuidados, idade que já tem firmeza nas mãos e nos pés, idade cuja altura da criança já excede a altura do líquido que está no interior da caixa d'água.

Este processo educacional difere do nosso. Nesse podemos ver alguns conceitos de matemática que foram pensados, sistematizados e executados. Processo aparentemente insignificante mas que nos revela um saber construído, um conhecimento matemático, uma prática educacional, que usando estratégias significativas, respeita e enaltece o aprendiz.

Este saber é construído a partir da introdução de um objecto da cultura dominante, ele foi reelaborado, reconstruído a partir dos eventuais perigos que pudessem surgir com os mais pequenos e com escadas de degraus menores. Foi necessário reelaborar o quotidiano, a partir do problema apresentado: uma caixa d'água, que pode tirar a vida dos nossos filhos, e esta reelaboração se dá no diálogo na aldeia.

É um conhecimento matemático, pois classifica por idade as crianças, exigindo na prática potencialidade de subir escadas, utiliza conceitos de medidas para a construção de escadas, medidas dos paus para que não fique sem a estética (os indígenas prezam pela beleza e pela estética), troncos com a mesma altura, que mesmo inclinados vão do chão à caixa d'água para processar a limpeza.

Sendo assim, temos uma prática educacional porque ensina um saber onde o aprender vem antes do ensinar. As crianças aprendem fazendo as experiências que desejam e os adultos ensinam que se deve respeitar as etapas do crescimento biológico. As crianças aprendem que tudo lhes é permitido, os adultos ensinam que nada é proibido, mas que é necessário limitações, essas limitações colocadas são formas de estratégias educacionais para que não ausentem as regras daqueles que mandam, daqueles que exercem um poder sobre. É uma estratégia informando que existe um obstáculo, ele deixará de existir quando crescer, mas não é proibido subir se conseguir.

Uma simples escada, um objeto utilitário pode trazer-nos uma forma de se fazer prática pedagógica.

Referências:

Freire, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Paz e Terra. São Paulo. 1997.

Cláudio Lopes de Jesus
Pedro Paulo Scandiuzzi

Quota de 1999

No ano de 1999 o valor da quota é de **6 750$00** para professores, 4 750$00 para estudantes(só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 7 250$00 para sócios a residir no estrangeiro. Se ainda não pagou a sua quota, pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1548-003 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa ou Mastercard , preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número _ _ _ _   _ _ _ _   _ _ _ _   _ _ _ _

Visa ☐ VISA   MasterCard ☐ MasterCard

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ____________
____________ Data __/__/__

Assinatura ____________________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ____________

Nome ____________________________

____________________________ Tel: ____________

Morada ____________________________

Código Postal ____________ Ano em que começou a leccionar: ____________

Data de nascimento ______ / ______ / ______ Nível de ensino: ____________

Escola ____________________________

Localidade ____________ Distrito ____________

Categoria Profissional ____________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa ou MasterCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo E-mail:apm@mail.telepac.pt.

Índice