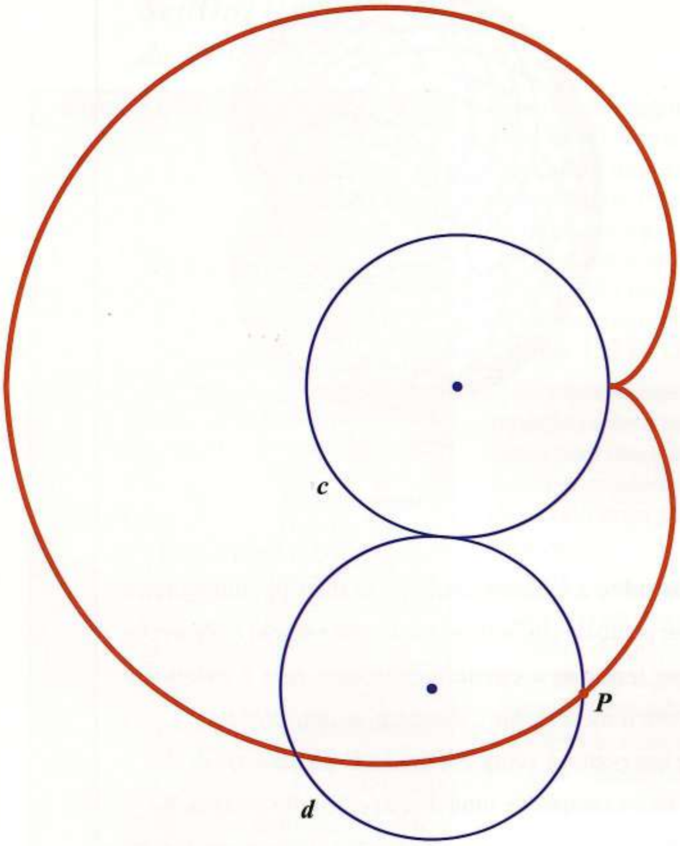
Educação e Matemática

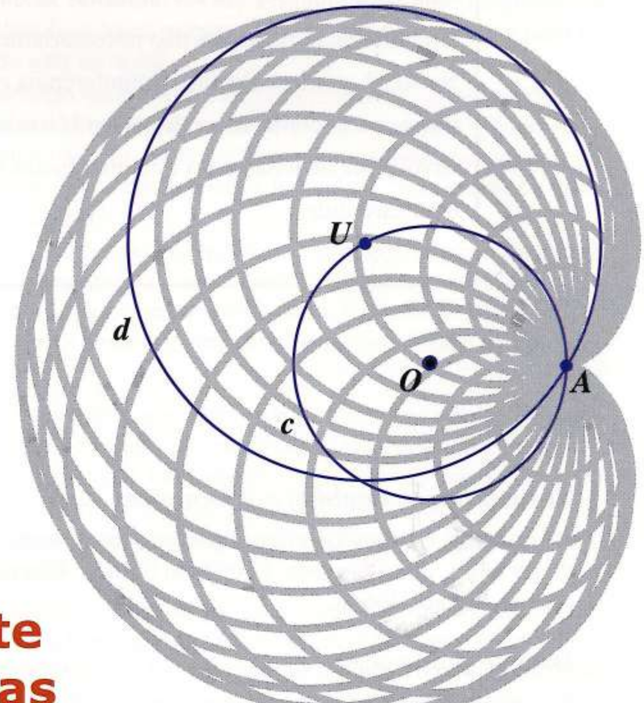
Nº 49

Setembro/Outubro de 1998

A cardióide



Como epiciclóide



Como envolvente de circunferências

Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

A nossa capa

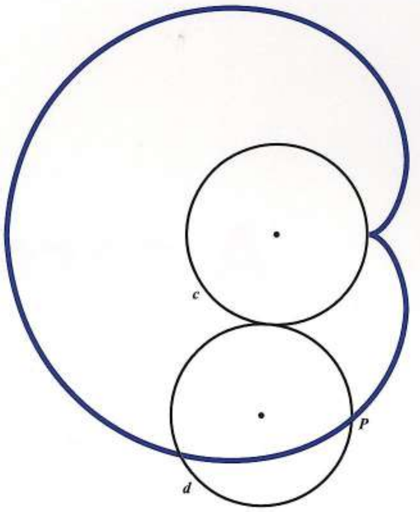


fig. 1

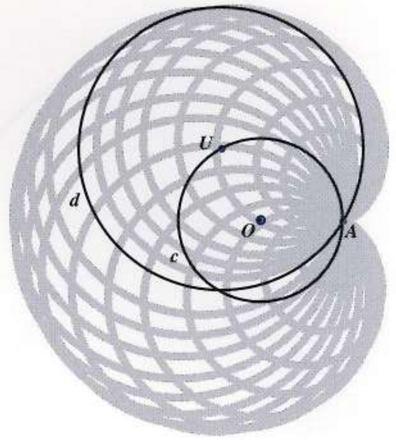


fig. 2

Na fig. 1, a circunferência *d* rola sem escorregar sobre a circunferência *c*. As duas circunferências têm o mesmo raio. Nestas circunstâncias, qualquer ponto da circunferência *d*, por exemplo *P*, descreve uma cardióide. As curvas descritas desta forma, em que a circunferência que rola é exterior à circunferência fixa (mas não necessariamente com o mesmo raio), chamam-se epiciclóides.

Na fig. 2, parte-se de uma circunferência *c* e de um ponto *A* sobre *c*. Para cada ponto *U* de *c*, traça-se a circunferência de centro *U* e raio *UA* (*d* é exemplo de uma dessas circunferências). A envolvente de todas estas circunferências (isto é, a curva tangente a todas estas circunferências) é uma cardióide.

Eduardo Veloso

Neste número também colaboraram

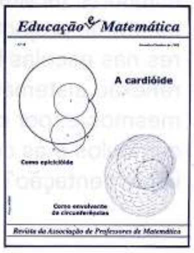
Clara Alves, Cristina Loureiro, Fernanda Neto, Isabel Paula, João Filipe Matos, Joaquim Rocha, Jorge Barros, Jorge Filipe, José Almeida, Madalena Santos, Manuela Ribeiro, Manuel Lourenço, Maria Adelaide Peixoto, Mário Afonso, Paulo Afonso.

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 1998.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt



nº 49
Set/Out de 1998

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director interino
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Lopes
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
4200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Acompanhar para renovar

Adelina Precatado

Estamos no segundo ano de implementação do programa ajustado do ensino secundário. Entre as medidas do DES para apoiar a "leitura e melhor gestão do programa" destaca-se a criação do acompanhamento local. Temos neste momento, no terreno, um conjunto de professores que "vivem ao mesmo nível de todos os seus colegas os problemas da leccionação dos programas" e que "promovem o encontro de professores de escolas vizinhas para efeito exclusivo da aplicação do programa, impulsionando estudos e debates, para além da troca de ideias sobre diferentes planificações e experiências de várias escolas" (circular 132 do DES, de 16.9.98).

O acompanhamento é sem dúvida uma medida positiva e inovadora, mas que impacto poderá ter na Matemática que os alunos vão ou não aprender? No gosto pela disciplina que pretendemos desenvolver nos alunos? Nas alterações que necessariamente serão introduzidas no currículo a curto e a médio prazo? Que contributo poderá dar o acompanhamento local para discutirmos e percebermos:

- Qual a natureza da actividade matemática dos alunos, na sala de aula? Que espaço temos para o trabalho experimental e investigativo, para o desenvolvimento de projectos? Que metodologias prevê este ajustamento e que condições é preciso criar ou alterar? A ideia de que aprender matemática é fazer matemática reúne hoje largo consenso, como levar esta ideia para a realidade concreta da sala de aula?
- Qual o papel da tecnologia no currículo de Matemática? Que alterações foram ou estão a ser de facto introduzidas com o ajustamento? Quais se avizinham? Como caminhar, sem sobressaltos mas decididamente para um ensino da matemática e um currículo mais adequado à "sociedade da informação" de que tanto se fala?
- O que tem de mudar na avaliação? O que introduz o ajustamento de novo? Como levar à prática a orientação " o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação a testes escritos, antes deve diversificar de modo a que cerca de metade seja feita usando outros instrumentos..." São os exames adequados?

Evidentemente que não se espera que o acompanhamento por si resolva os problemas do ensino e aprendizagem da matemática, mas o desafio de sermos capazes de aproveitar e aprofundar este espaço facilitador de debate e de troca de experiências para, numa atitude crítica e reflexiva, influenciarmos as condições necessárias à implementação do programa mas também, porque não, a própria evolução do currículo.

Não podemos por isso correr o risco de ver os acompanhantes locais como "a face visível do ministério" que tenta passar para as escolas umas tantas directivas conducentes ao cumprimento (dos conteúdos) de um programa que continua a ser extenso para o número de horas semanais que lhe é atribuído. Os acompanhantes locais são professores, a leccionar numa escola o mesmo programa que nós mas que têm oportunidades de formação próprias e uma situação de privilégio no contacto com os professores e escolas da sua zona e com os acompanhantes do resto do país, conhecem como ninguém a realidade. Devemos esperar que sejam interlocutores reflexivos e críticos entre professores, escolas, autores do programa e ministério (Departamento do Ensino Secundário). Do nosso envolvimento colectivo depende também a sua capacidade de intervenção.

Um outro desafio que está colocado é o de sabermos como aproveitar e aprofundar esta experiência. O hábito de reflexão e de trabalho conjunto que se começa a criar entre professores de diferentes escolas bem como a formação e a experiência adquirida pelos acompanhantes não podem ser desperdiçadas.

Não estará na altura de se pensar na criação a nível institucional, por exemplo, de Centros de Apoio Local que, em articulação com os Centros de Formação, poderiam proporcionar espaços de recursos, materiais e humanos, facilitadores do desenvolvimento de projectos comuns inovadores nas escolas bem como uma reflexão sistemática e crítica sobre os mesmos e, por consequência, sobre currículos e as condições para a sua implementação?

Adelina Precatado
Esc. Sec. Camões, Lisboa

Leituras recomendadas

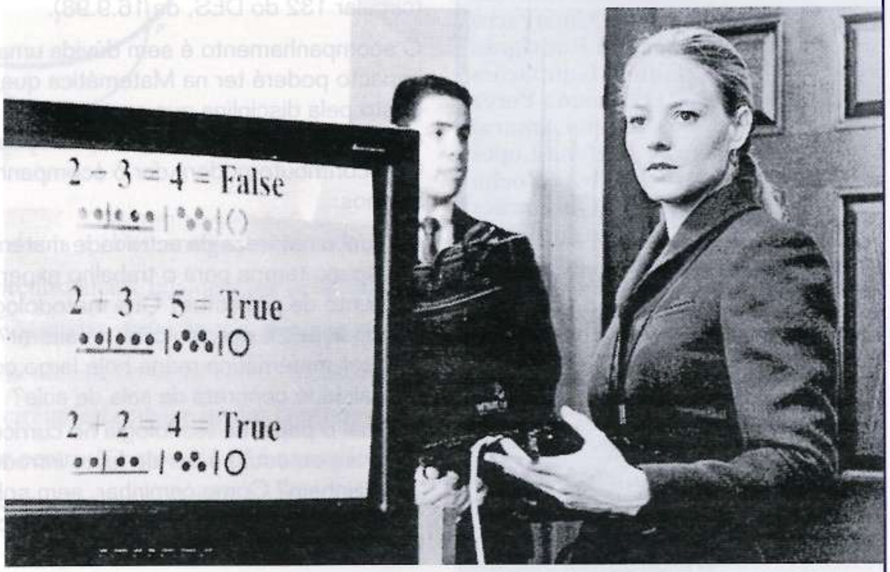
Contacto de Carl Sagan (1985)

Romance de ficção científica publicado pela Gradiva em 1997

Aparentemente pode parecer um pouco despropositado recomendar aqui, numa revista lida sobretudo por professores de Matemática, um romance de ficção científica.

Em *Contacto*, Carl Sagan utilizou brilhantemente a liberdade da ficção para imaginar a maior de todas as aventuras: o primeiro encontro da espécie humana com outros seres inteligentes e, nada mais universal para estabelecer esse contacto que a Matemática[1].

Desde a Geometria às Probabilidades, passando pela Teoria dos Números e pela Lógica, todos estes assuntos percorrem o romance, tratados com a sólida inteligência e cultura científica de Sagan.



Aqui ficam pois, a título de exemplo, duas passagens que espero possam aguçar a curiosidade e o interesse de todos.

"Portanto, com algumas linhas de texto, eles ensinaram-nos quatro palavras: *mais, igual, verdadeiro* e *falso*. Quatro palavras muito úteis. Depois ensinam divisão, dividem um por zero e dão-nos a palavra que significa *infinidade*. Ou talvez seja apenas a palavra que significa *indeterminado*. Ou dizem: A soma dos ângulos internos de um triângulo é dois ângulos rectos. Depois observam que a afirmação é verdadeira se o espaço é plano, mas falsa se o espaço é curvo. Aprendemos assim a dizer a palavra *se* e..."

"O desenho geométrico da Máquina era simples. Os pormenores eram extremamente complexos. A área tripulada tinha a forma de um dodecaedro. Rodeando o dodecaedro ficavam os três anéis concêntricos, dispostos com os eixos perpendiculares uns aos outros e concebidos para girar a altas velocidades. À primeira vista, os anéis ficariam suspensos - pelo menos as instruções incluíam um potente gerador de campo magnético e o espaço entre os anéis e o dodecaedro seria um grande vácuo. Quando completada, a Máquina pareceria, vista de fora, uma daquelas esferas armilares dos astrónomos da Renascença. Que teria Johannes Kepler pensado de tudo aquilo?"

Nota: No ano passado foi produzido o filme "Contacto", baseado neste romance, realizado por Robert Zemeckis e com Jodie Foster no papel principal (já disponível em vídeo). Carl Sagan, entretanto falecido, não chegou a assistir à estreia.

[1] Entre o material que seguiu na sonda Voyager 2 que se prepara para deixar o nosso sistema solar, contam-se vários tratados de matemática

Manuel Lourenço
Esc Sec. Dr. Ginestal Machado
Santarém

Calculadoras gráficas e avaliação

Helena Rocha

A utilização das calculadoras durante os momentos de avaliação leva-nos a avaliar novos aspectos. Vamos querer saber se o aluno sabe quando é conveniente utilizar a calculadora e quando não é, se a usa de forma eficiente, se interpreta correctamente os resultados obtidos e se os descreve adequadamente em linguagem matemática. E isto leva-nos inevitavelmente a introduzir alterações nos instrumentos de avaliação.

Um aspecto aparentemente inevitável, mas ao mesmo tempo importante e delicado, de qualquer processo de ensino/aprendizagem é a avaliação. E, na minha opinião, este tem sido precisamente o ponto mais polémico na utilização das calculadoras gráficas. A avaliação assume obviamente muitas formas, mas aquela que costuma suscitar mais preocupações é a avaliação formal que, de um modo geral, assume a forma de um teste ou exame. O argumento mais forte dos que se opunham (e provavelmente ainda se opõem) à utilização desta tecnologia parecia estar claramente ligado à avaliação. Inicialmente porque receavam as consequências de uma aprendizagem baseada na calculadora que fosse testada sem esta, mas também porque temiam as desigualdades a que poderiam ter de se submeter os alunos que não tinham possibilidades económicas para adquirir uma calculadora. Actualmente as calculadoras já são permitidas nos exames, as escolas já começam a ter calculadoras que podem emprestar aos alunos com menos poder económico mas...

O facto das calculadoras serem instrumentos portáteis, individuais e que se encontram actualmente a preços que permitem a muitos alunos disporem de uma, fez surgir a questão da sua utilização em momentos de avaliação. Repare-se que apesar de frequentemente se efectuarem paralelismos entre as calculadoras gráficas e os computadores, atendendo ao facto de terem potencialidades comuns, a questão da utilização de computadores durante a avaliação nunca se colocou efectivamente. Com efeito, as condições em que de um modo geral era feita a utilização da tecnologia, tanto no que respeita à frequência da utilização, como à quantidade de computadores disponíveis, praticamente impedia a questão de surgir. Pelo contrário com as calculadoras gráficas a questão surge naturalmente.

As calculadoras gráficas, pela simplicidade e rapidez com que efectuam cálculos e gráficos, permitem libertar os alunos dessas tarefas deixando-os disponíveis para actividades mais enriquecedoras. Estas máquinas permitem que as anteriores expectativas de levar os alunos a memorizar factos e procedimentos isolados e a tornarem-se exímios em manipulações e cálculos efectuados com papel e lápis, dêem lugar a uma aprendizagem da Matemática como um todo interligado, em que a ênfase é colocada na compreensão dos conceitos, na familiarização com múltiplas representações e nas ligações entre estas, na modelação matemática e na resolução de problemas (NCTM, 1995).

As calculadoras gráficas são pois instrumentos poderosos, que proporcionam oportunidades de aprendizagem dinâmicas e interactivas, mas não conseguiremos que alunos e professores lhes prestem a devida atenção enquanto não as enquadrarmos por completo no processo de ensino aprendizagem. E isto inclui obviamente a avaliação.

Diversos autores que se têm dedicado a esta temática, realçam precisamente este aspecto ao referir que a importância que estas calculadoras vão acabar por assumir depende muito de permitirmos, ou não, que os alunos recorram a elas a qualquer momento. Defendem assim a permissão de utilização da calculadora em todos os momentos e consideram fundamental que os alunos sejam avaliados precisamente nas mesmas condições em que efectuaram a sua aprendizagem.

A utilização das calculadoras durante os momentos de avaliação em certa medida leva-nos a avaliar novos aspectos. Vamos querer saber se o aluno sabe quando é conveniente utilizar a calculadora e quando não é, se a usa de forma eficiente, se interpreta correctamente os resultados obtidos e se os descreve adequadamente em linguagem matemática. E isto leva-nos inevitavelmente a introduzir alterações nos instrumentos de avaliação.

Mas existem ainda problemas adicionais. Com efeito, nem todas as calculadoras são iguais. Existem diversas diferenças, tanto entre marcas como entre modelos, não sendo difícil encontrar exemplos de potencialidades de um determinado modelo que não estão presentes noutros. Ora este facto pode levar a que uma determinada actividade se torne mais simples, ou mais complexa, consoante a calculadora a que se recorre. Como forma de superar estas desigualdades, Kissane, Kemp e Bradley (1996) sugerem que os professores disponibilizem pequenos programas, por forma a que as calculadoras menos sofisticadas adquiram novas potencialidades. Uma espécie de upgrade para calculadoras. Só que este recurso à programação é, na minha opinião, um problema ainda mais complexo. E considero-o mais complexo por várias razões. Primeiro porque não me parece razoável esperar que os professores conheçam a calculadora ao ponto de elaborarem programas que ultrapassam frequentemente o conceito de simples rotinas. E depois porque ao ritmo a que actualmente a tecnologia evolui isso implicaria uma actualização constante por parte dos professores. E essa actualização, independentemente de empenhamento e tempo, requereria apoio económico por forma a permitir sempre a aquisição do último modelo, uma vez que, mesmo dentro da mesma marca, existem diferenças consideráveis em termos dos comandos disponíveis na programação. E é impensável programar uma calculadora sem a conhecer bem e isso não se consegue se não a tivermos sempre ao dispor.

Claro que existem sempre outras possibilidades. Esses programas poderiam ser desenvolvidos pela própria marca das calculadoras, ou até mesmo por um grupo de professores que se dedicasse exclusivamente a essa tarefa, ou... Mas isso não resolveria o problema! Não nos podemos esquecer que de um modo geral as calculadoras com menos potencialidades são também as que têm menor capacidade de memória e, como tal, o número de programas que é possível instalar e executar é consideravelmente limitado.

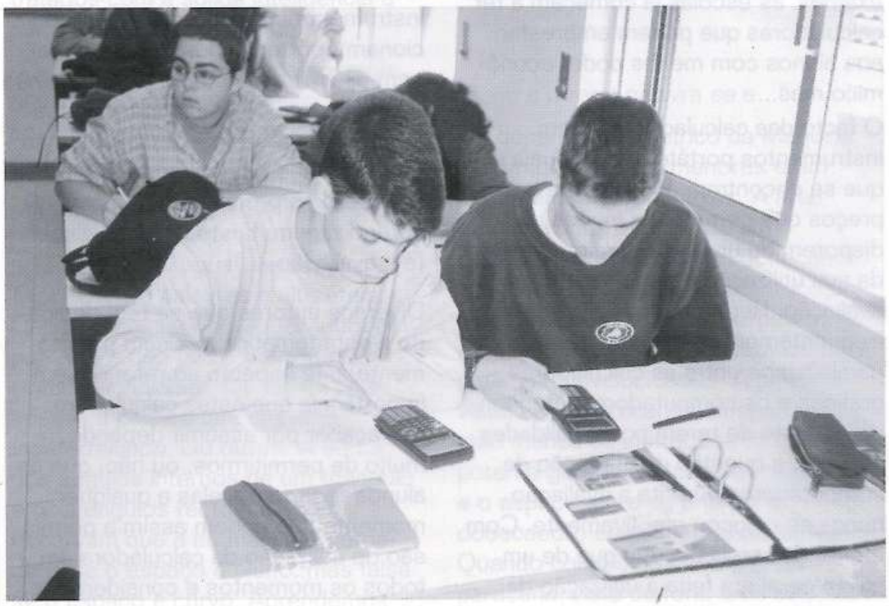


foto de Helena Lopes

Além disso, mesmo que resolvessemos instalar alguns programas, como decidíamos quais as características fundamentais e quais as dispensáveis? E o problema da existência de desigualdades mantinha-se já que, mesmo perante uma actividade concreta, não é fácil garantir que uma determinada característica da calculadora, apesar de aparentemente desnecessária, não possa vir a revelar-se de alguma utilidade.

No entanto talvez este problema não seja tão preocupante quanto parece. Com efeito, baseando-se na sua experiência, Kissane, Kemp e Bradley (1996) afirmam que os alunos tendem a usar preferencialmente as partes menos sofisticadas da calculadora, em virtude de se sentirem algo inseguros na utilização de potencialidades mais sofisticadas. Não nos podemos no entanto esquecer que, apesar da maioria dos alunos se poder comportar dessa forma, nem todos o fazem e, como tal, o problema persiste... pelo menos aparentemente.

Na verdade parece-me haver uma relação entre o tipo de utilização que se faz da calculadora e o nível de conhecimentos matemáticos. E Kissane, Kemp e Bradley (1996) parecem partilhar uma opinião semelhante ao afirmarem que as potencialidades de uma calculadora mais sofisticada só são verdadeiramente úteis para um utilizador experiente e igualmente sofisticado. Segundo estes autores quem passa muito tempo a trabalhar com uma calculadora mais sofisticada estará provavelmente em melhor posição para lidar com a maioria das situações matemáticas. "Por outras palavras, não é só a calculadora que tem mais potencialidades; é também a pessoa que opera a calculadora" (Kissane, Kemp e Bradley 1996, p. 103).

Este recurso à programação da calculadora também tem consequências. Se programamos a calculadora torna-se inadmissível a ideia de limpar a memória da máquina antes de um teste ou exame (não o seria em qualquer dos casos?!). O que por seu turno implica que os alunos podem introduzir texto na memória da máquina. Mas se o que valorizamos na matemática é a capacidade de raciocinar, de formular abordagens aos problemas, de argumentar matematicamente e não de memorizar, então isso não constitui de modo algum um problema.

O que já constitui um problema é distinguir os alunos que sabem matemática dos que apenas sabem utilizar a calculadora (Kissane, Kemp e Bradley, 1996). Com efeito, como avaliamos se um aluno compreende os conceitos envolvidos ou se apenas sabe em que botões carregar? E como separamos os erros motivados por enganos ao pressionar as teclas, dos erros ao nível dos conceitos? (Hooper, 1993)

Talvez conhecendo todo o raciocínio efectuado pelo aluno. Mas isso coloca-nos uma nova questão: O que devem os alunos registar quando usam uma calculadora? Que informação indica verdadeiramente ao professor como é que o aluno resolveu o problema? (Burril, 1992)

Não é fácil responder a estas questões, mas isso não significa de modo algum que a melhor resposta seja proibir a calculadora. Pelo menos o argumento geralmente apresentado a favor dessa proibição, de que os alunos compreendem melhor o que estão a fazer se o fizerem à mão, sem recorrer à tecnologia, é difícil de defender. Não é credível que os alunos compreendam melhor, por exemplo, a noção de raiz quadrada, pelo simples facto de serem obrigados a executar o respectivo algoritmo com papel e lápis (Kissane, Kemp e Bradley, 1996).

A utilização de calculadoras gráficas nos momentos de avaliação pressupõe no entanto que os instrumentos a utilizar foram cuidadosamente desenvolvidos tendo isso em atenção. E isto obriga-nos a ter uma noção exacta do que queremos avaliar, bem como do papel que a calculadora poderá ter nessa avaliação (Kissane, Kemp e Bradley 1996). Por outras palavras teremos que re-equacionar a forma como elaboramos testes ou, como diz Jennifer Hooper (1993), teremos que reaprender a elaborar testes uma vez que os métodos anteriormente utilizados estão obsoletos.

Há mesmo quem considere que a utilização de calculadoras gráficas em momentos formais de avaliação pode até ser uma forma de levar os educadores matemáticos a analisar atentamente quais são efectivamente os aspectos fundamentais do trabalho matemático e ter assim um impacto bastante positivo.

Mas a avaliação não são só testes e exames. Optei por me referir à avaliação formal por ser nesta que a utilização das calculadoras gráficas parece ser mais questionada. E isso coloca-nos uma questão interessante: porque é que as grandes objecções de utilização da calculadora respeitam fundamentalmente aos momentos de avaliação formal? É só neste tipo de avaliação que a utilização da calculadora gráfica levanta problemas? Ou existirão outros factores? Será porque para muitos professores essa é a principal forma de avaliação?

Os actuais programas do ensino secundário são muito concretos ao abordar a questão do peso relativo que deve ser atribuído à avaliação formal. Com efeito referem que "o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que cerca de metade seja feita usando outros instrumentos que não testes clássicos" (DES, 1997, p. 13).

E as calculadoras gráficas abrem-nos imensas possibilidades para outras formas de avaliação.

Vamos pois repensar a forma como efectuamos a avaliação, procurando alterar as formas tradicionais de modo a adequá-las às novas metodologias e à nova realidade.

Bibliografia

Burrill, Gail (1992). The graphing calculator: a tool for change, in James Fey e Christian Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, pp. 14-22. Reston, Va.: NCTM.

DES (1997). Matemática – programas 10°, 11° e 12° anos. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Hooper, Jennifer (1993). Issues of Mathematics classroom use of graphing calculators, in *The Mathematics Educator 4* (2), pp. 45-50.

Hopkins, Martha (1992). The use of calculators in assessment of Mathematics achievement, in James Fey e Christian Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, pp. 158-166. Reston, Va.: NCTM.

Kissane, B., Kemp, M., Bradley, J. (1996). Graphics calculators and assessment, in P. Gómez e B. Waits (Eds.), *Roles of Calculators in the Classroom*, pp. 97-124.

NCTM (1995). *Algebra in a technological world – addenda series*. Reston, Va.: NCTM.

Silva, Jaime (1996). Are graphing calculators the catalyzers for a real change in mathematics education?, in P. Gómez e B. Waits (Eds.), *Roles of Calculators in the Classroom*, pp. 21-30.

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres
Lisboa

Relatórios na disciplina de Matemática?! Como se fazem? Como se avaliam?

Maria José Costa

Recentemente entrou na linguagem da disciplina de Matemática a palavra "relatório": o aluno deve fazer *relatórios* e o professor deve corrigir *relatórios*. Mas quem ensina o aluno a fazê-los e o professor a corrigi-los? Este texto, resultado da experiência adquirida ao longo dos últimos anos de trabalho, procura constituir uma base de trabalho para simultaneamente se construir o conceito de relatório na disciplina de Matemática e se definirem critérios de classificação de relatórios.

Relatório – exposição de todos os factos de uma actividade [...].
(Moreno, A. in *Dicionário Complementar da Língua Portuguesa*. (8ª edição). Editora Educação Nacional. (Porto)

Há alguns anos a esta parte que se ouve falar com alguma insistência em "Matemática Experimental", "Laboratório de Matemática", "Testes em duas fases", "Trabalho de projecto", por exemplo, termos que de modo algum pertenceram aos meus tempos de aluna (e outros, mudaram literalmente de significado, como é caso da "Resolução de problemas"). Mas tem havido, também, alguma preocupação em trocar experiências, por vezes sob a forma de cursos, documentos e até artigos de divulgação de experiências realizadas.

Mais recentemente entrou na linguagem da disciplina de Matemática, tanto para o aluno como para o professor, a palavra "relatório": o aluno deve fazer *relatórios* e o professor deve corrigir *relatórios*. Desconheço a existência de qualquer apoio sobre esta temática, em particular não me lembro de ter encontrado ajuda ou dúvida posta na *Educação e Matemática*. Penso que é tempo de o fazer. Mas quem ensina o aluno a fazê-los e o professor a corrigi-los? Aqui reside o problema e será bom abordá-lo o mais cedo possível para não se correr o risco tradicional: com a preocupação de dar resposta a mais esta "modernice", cada um dos utilizadores a quem tal é exigido se apressa, com as melhores das intenções, a conferir-lhe um significado, que é por vezes tão pessoal quanto impossível de generalização. Mas o significado a atribuir a tal tarefa tem de ser o mesmo de Norte a Sul do país, os critérios de correcção dos mesmos também, uma vez que a questão já entrou no foro nacional, pois a situação já alastrou aos exames de 12º ano.

Este texto não deverá ser extrapolado para além das suas próprias intenções: ele resulta de aplicações no concreto ao longo dos últimos anos de trabalho, exactamente dentro das tais tentativas de dar resposta às imposições do programa. Longe de pretender que ele seja encarado como um produto acabado, ou como uma proposta de relatório a seguir, o que se propõe é precisamente que sirva como uma base de trabalho para simultaneamente construir o conceito de relatório na disciplina de Matemática e definir critérios de classificação de relatórios.

Necessariamente se começará por perguntar quando se deverá exigir ao aluno a apresentação de um relatório. A experiência dirá que se são muitos os momentos em que tal se justifica, há, contudo aqueles em que ele é imprescindível. Aqui são incluídas, sem dúvida alguma, actividades de investigação, fundamentais na resolução de problemas, seja com a calculadora ou sem ela.

Centremo-nos, particularmente, na calculadora gráfica. A utilização da calculadora gráfica está autorizada quer em ambiente de aula quer em ambiente de exame. Há quem defenda a existência de questões específicas para avaliar a capacidade de utilizar a calculadora gráfica. Será difícil vislumbrar a utilização de qualquer auxiliar na disciplina de Matemática, sem envolver conteúdo matemático. Imaginemos, por isso, um problema matemático que vai ser resolvido com o auxílio da calculadora gráfica: o aluno terá de descrever no seu relatório as fases segundo as quais a investigação progrediu, desde o enunciado até à solução apresentada. Ao fazê-lo, passará, indubitavelmente, por aspectos que exibem o seu domínio da parte técnica da calculadora bem como do conhecimento matemático associado ao problema. Haverá, assim, como que duas partes a considerar dentro do conteúdo do relatório: o conteúdo relativo à parte técnica da calculadora (PTC) e o conteúdo específico da questão em causa (CEQ). Qualquer que seja a tarefa a realizar, cada uma destas partes do relatório poderá ser apreciada dos mesmos pontos de vista. Alguns deles poderão ser, respectivamente:

PTC

- Teclas/funções utilizadas e parametrização da máquina (rectângulo de visualização, definição da tabela pelo ponto de partida e pela diferença tabular)
- Adequação das funções e dos valores escolhidos à situação em estudo
- Concordância entre as conclusões tiradas e as condições de trabalho definidas.

CEQ

- Definições
- Tradução dos conceitos em linguagem gráfica ou de tabela
- Tradução das conclusões na linguagem do enunciado
- Apresentação da resposta
- Cumprimento das exigências ou restrições impostas pelo enunciado (grau de aproximação, por exemplo)

Acresce recordar que, sendo o relatório um texto produzido em Língua Portuguesa, não será de descurar a forma que o reveste: a composição em si deverá ser reveladora da sequência das fases do trabalho, das decisões tomadas ou das opções feitas tanto a nível da calculadora como de conhecimentos matemáticos, tornando possível seguir o percurso efectuado pelo seu autor desde que recebeu a tarefa até que a deu como concluída. Essa forma, à imagem e semelhança do que se passa na disciplina de Português, poderá ser classificada segundo os seguintes critérios:

- Estrutura da redacção
- Coerência do texto produzido
- Evidência da articulação das etapas do trabalho realizado revelada pelo recurso a conectores do discurso (*em seguida, depois*, etc.) ou por um esquema
- Variedade e pertinência (adequado) vocabular
- Correcção linguística da frase
- Aplicação de regras de pontuação e ortografia

A pontuação final a atribuir ao relatório resultará da percentagem estabelecida para cada uma destas partes: Pesos iguais? Pesos diferentes? Nesta hipótese, qual a parte com maior peso? Poderemos ter ponderações diferentes para relatórios diferentes, consoante a finalidade da respectiva tarefa é avaliar a capacidade de utilizar a calculadora gráfica ou a de resolver problemas, por exemplo.

O modelo de relatório aqui descrito, apesar (ou precisamente por isso!) de repousar sobre situações vividas e criadas de acordo com o tal significado pessoal, poderá ser tão particular que está longe do que seria ideal; não obstante a falta de certezas, servirá de base a uma discussão. Por isso se propõe que a revista *Educação e Matemática* abra um espaço de debate sobre o modelo de relatório a adoptar para as actividades realizadas na aula de matemática e no qual surjam sugestões para o criar, nomeadamente no que respeita

- às partes em que o compõem,
- aos parâmetros para avaliar cada uma dessas partes,
- ao peso relativo de cada uma das partes que o compõem,
- ao apoio do professor da disciplina de Português com vista à avaliação da parte escrita (anteriormente referido como *forma*)
- à aferição de critérios com os professores das outras disciplinas nas quais o aluno tem, eventualmente, de elaborar relatórios.

O facto de os alunos do Ensino Secundário praticarem a elaboração de relatórios na disciplina de Português, permitirá o envolvimento desses nossos colegas na definição e no aperfeiçoamento da forma a atribuir ao relatório; o facto de alguns dos nossos alunos também terem de apresentar relatórios noutras disciplinas, ajudará a definir a estrutura do relatório.

Motivar a comunidade matemática para a definição de critérios de classificação de um relatório para a disciplina de Matemática do Ensino Secundário, "mataria vários coelhos com uma só cajadada":

- aprenderíamos a classificar relatórios,
- uniformizaríamos critérios de correcção de relatórios,
- conferiríamos significado aproximadamente único à palavra "relatório",
- praticaríamos interdisciplinaridade no Ensino Secundário,

além de, obviamente, aprendermos a fazer relatórios.

Maria José Costa
Escola Secundária de Augusto Gomes
Matosinhos

Neste artigo, a autora propõe que se abra um espaço de debate na revista sobre a elaboração e avaliação de relatórios em matemática. A Redacção acolhe com agrado esta proposta, pela importância e actualidade do tema. Apelamos por isso aos leitores para que nos enviem os seus contributos — textos, relatos de experiências ou simples comentários e reacções ao artigo.

A Redacção

A estrofóide

Manuela Ribeiro

Pteróide, kukumaeide e *logocyclique* são três designações de uma mesma curva. A primeira deve-se a Roberval (1602-1675), provavelmente o primeiro geómetra a ocupar-se do seu estudo (1645). Só mais tarde Montucci dá a essa curva o nome de *estrofóide recta*. A *estrofóide oblíqua* foi pela primeira vez, em 1669, considerada por Barrow (1630-1677), tendo este precursor do cálculo infinitesimal determinado as suas tangentes. Posteriormente Quetelet (1796-1874) estudou-a com o nome de *focal com nó*, daí o nome de *focal de Quetelet*.

Definições e métodos de construção

A) Definição geral

Sejam dados

- uma curva *s*;
- um ponto *O*, chamado pólo;
- um ponto *A*, o chamado ponto fixo;

consideremos (fig. 1)

- uma recta passando por *O*, seja *r*;
- o ponto de intersecção de *r* com *s*, seja *Q*;

os pontos *P* e *P'* sobre r tais que $\overline{QP} = \overline{QP'} = \overline{QA}$.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'*, quando *r* toma todas as posições possíveis, designa-se por estrofóide de *s* relativa ao pólo *O* e ao ponto fixo *A*.

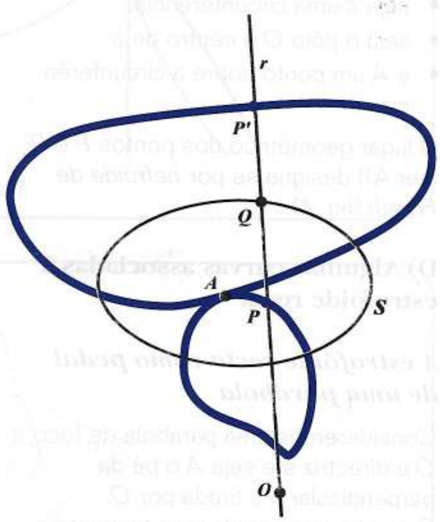


Figura 1. A curva s é neste exemplo uma elipse e a estrofóide é uma curva com dois ramos.

B) Estrofóide recta e estrofóide oblíqua

Se a curva *s* é uma recta e o pólo *O* um ponto qualquer, temos dois casos a considerar:

- o ponto *A* é o pé da perpendicular à recta *s* tirada pelo ponto *O*;
- o ponto *A* é um ponto de *s* distinto do pé da perpendicular a *s* tirada pelo ponto *O*.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'*, obtidos pelo processo descrito em A), designa-se respectivamente por:

- *estrofóide recta* de *s*, relativa ao pólo *O* (fig. 2);
- *estrofóide oblíqua* de *s* relativa ao pólo *O* e ao ponto fixo *A* (fig. 3)

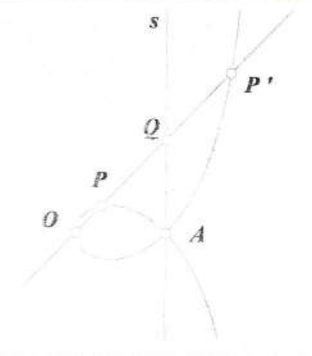


Figura 2

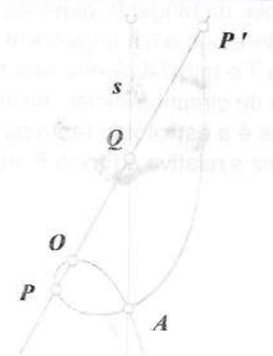


Figura 3

C) Estrófoide de uma circunferência/Nefróide de Freeth

Vejamos agora a estrofóide de uma circunferência no caso particular do pólo ser o centro da circunferência e o ponto fixo ser um ponto da circunferência. Assim:

- seja *s* uma circunferência;
- seja o pólo *O* o centro de *s*;
- e *A* um ponto sobre a circunferência.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'* (ver A)) designa-se por *nefróide de Freeth*.(fig. 4).

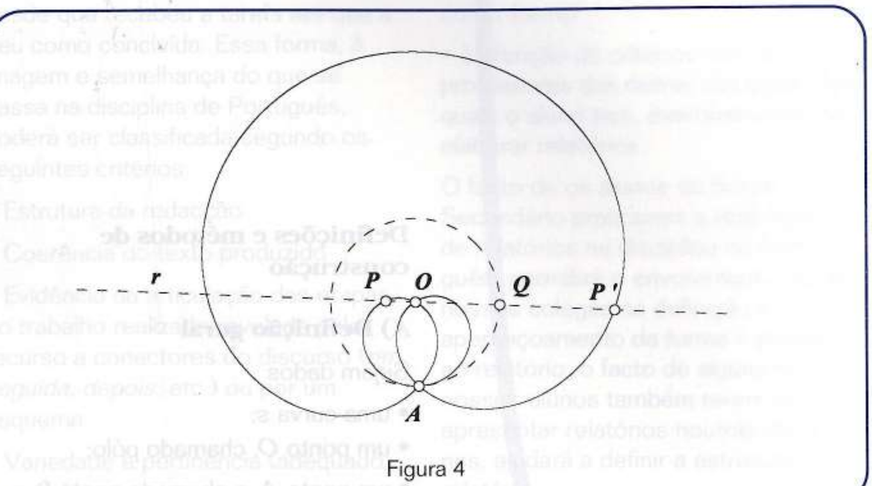


Figura 4

D) Algumas curvas associadas à estrofóide recta

A estrofóide recta como pedal de uma parábola

Consideremos uma parábola de foco *O* e directriz s e seja *A* o pé da perpendicular a *s* tirada por *O*. Consideremos ainda uma tangente genérica *t* à parábola e seja *V* o pé da perpendicular a *t* tirada pelo ponto *A*. É possível demonstrar (ver bibliografia) que a estrofóide recta da directriz *s* relativa ao pólo *B* (vértice da parábola) é a curva pedal da parábola relativa ao ponto *A* (fig. 5).

Esta conjectura é relativamente fácil de formular utilizando o *Geometer's Sketchpad*.

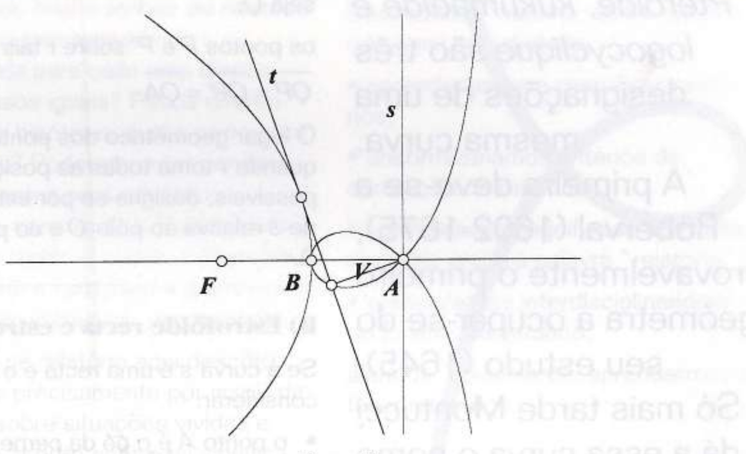


Figura 5

A estrofóide como envolvente de circunferências

Seja *T* o ponto de tangência, na parábola, da tangente genérica t, e consideremos a circunferência de centro *T* e raio *TA*. A envolvente das família de circunferências assim obtidas é a estrofóide recta da directriz *s* relativa ao foco *F*. (fig. 6)

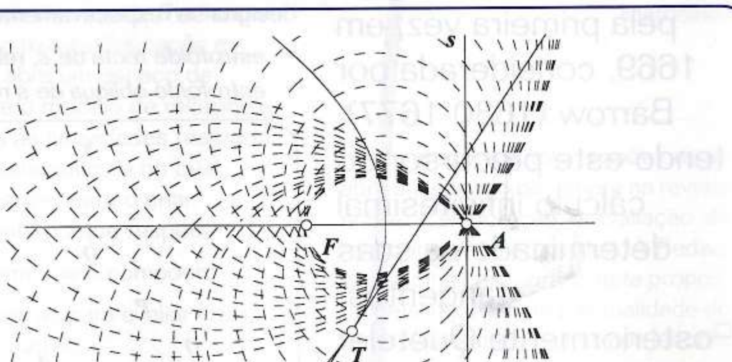


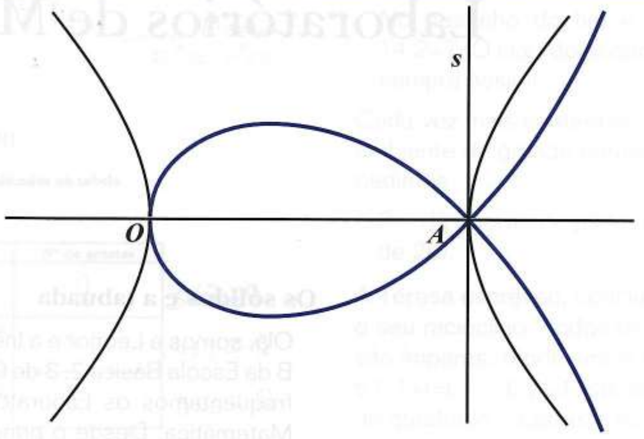
Figura 6. Apenas com algumas circunferências traçadas, a estrofóide começa a surgir.

Estrofóide recta e hipérbole equilátera como curvas inversas

Consideremos a estrofóide recta relativa à recta *s* e ao pólo *O* (fig. 7). Tomemos como centro de inversão o ponto *A* e raio da circunferência de inversão o segmento *OA*. Pode demonstrar-se (ver bibliografia) que a inversa da estrofóide é a hipérbole equilátera de vértices *O* e *A*.

Esta conjectura é relativamente fácil de formular utilizando o *Geometer's Sketchpad*.

Nota. O inverso de um ponto *P* relativo a uma circunferência *c* de centro *O* e raio *r* é o ponto *P'*, situado na semirecta *OP* e verificando $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.



Fgura 7

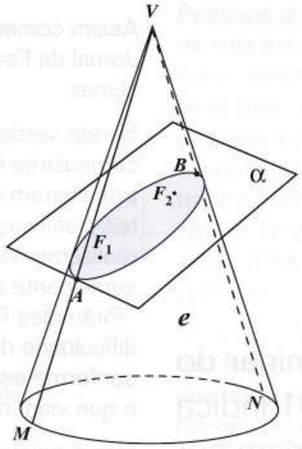


Figura 8

A focal de Quetelet e a estrofóide

Consideremos uma superfície cónica de revolução e uma secção por um plano α intersectando todas as geratrizes, isto é, uma elipse (fig. 8). Na figura 9 a superfície cónica está representada pelo triângulo *VMN*, o plano da secção pela recta *α* e a elipse pelo segmento *AB*. Podemos imaginar que o plano da secção roda em torno de um eixo e que é a recta do plano α tangente à elipse no ponto *A*. Para cada posição do plano α, obtemos uma elipse diferente (e mesmo outras cónicas) e portanto a posição dos focos F_1 e F_2 (que para certas posições do plano se reduzem apenas a um foco, quando a secção é uma parábola) também varia, embora se situe sempre no plano do triângulo *VMN*. Se procurarmos determinar o lugar geométrico dessas posições dos focos, utilizando o *Sketchpad*, chegaremos à conjectura (que é possível demonstrar) que se trata de uma estrofóide oblíqua, desenhada na figura 9. É a focal de Quetelet.

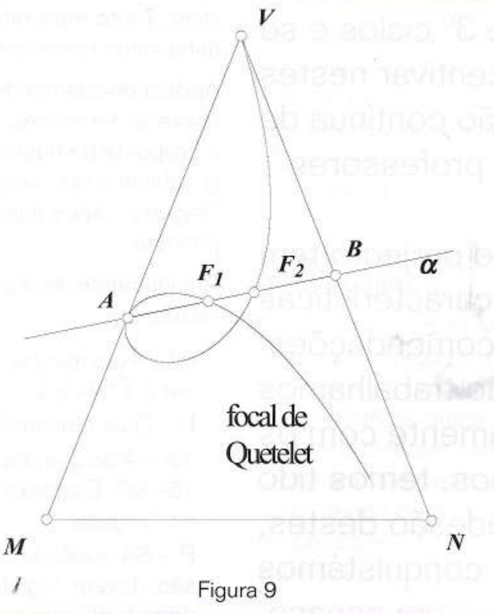


Figura 9

Bibliografia

Lockwood, E. H.(1961). *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, F. Gomes (1908). *Traité des Courbes Spéciales Remarquables*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Manuela Ribeiro
Esc. Sec da Cidade Universitária

Laboratórios de Matemática no 2º Ciclo

Clara Alves
Fernanda Neto
Isabel Paula

O relatório preliminar do Matemática 2001 indica que "deveriam ser criados Laboratórios de Matemática nas escolas dos 2º e 3º ciclos e se deveria incentivar nestes a formação contínua de professores".

Este projecto tem algumas características dessas recomendações: não trabalhamos isoladamente com os alunos, temos tido sempre adesão destes, conquistámos um espaço.

Os sólidos e a tabuada

> Olá, somos a Leonor e a Inês do 5º B da Escola Básica 2, 3 de Oeiras e frequentamos os Laboratórios de Matemática. Desde o princípio de Outubro temos trabalhado com polidrons para estudar sólidos geométricos.

Assim começava um artigo para o Jornal da Escola relatado por duas alunas.

Sendo verdade que nas suas aulas curriculares (com outra professora) trabalharam com polidrons as diferentes planificações do cubo, aqui realizaram inicialmente uma proposta semelhante à da figura 1, denominada "Pirâmides Piramidais". A principal dificuldade de todos os alunos, conforme esperávamos, foi descrever o que viam na tabela.

Não é habitual os alunos exprimirem as suas ideias, em grupo na sala de aula, nem que interpretem resultados, apesar de ser um dos objectivos do 2º ciclo. Tanto mais difícil para quem tinha vindo recentemente do 1º ciclo.

Após a discussão de vários grupos sobre as Pirâmides, passámos então à proposta da figura 1, onde os alunos já sabiam o que se pretendia com o "regista", após a construção dos prismas.

Rapidamente as duas alunas nos chamaram.

> AA – Nas arestas o que estamos a ver é a tabuada.
>
> P – Qual tabuada?
>
> AA – A do 3, então 9=3x3, 12=3x4, 15=3x5. E agora o que escrevemos no "regista"?
>
> P – Se vocês tiraram essa conclusão devem registá-la, logo se vê, depois discute-se com os outros grupos. Já agora verifiquem se há mais tabuadas na vossa tabela.
>
> AA – S'toras, venham cá! Aqui nos vértices há a tabuada do dois, porque 6=2x3, 8=2x4 e 10=2x5 (as alunas estavam eufóricas pela descoberta até porque foram mais rápidas que as restantes colegas).
>
> P – Só nesse caso?
>
> AA – Vamos ver! Olha, aqui nas faces há a tabuada de mais: 5=3+2, 6=4+2 e 7=5+2.

As professoras ao elaborarem a proposta nunca pensaram que os alunos desta idade fossem capazes de formalizar deste modo as suas conjecturas, deixando-os expressarem-se na sua linguagem ao partilharem os resultados com os outros colegas. Era impossível calá-las e aguardar a altura de comunicar aos colegas.

> P – Já agora, olhem para a 1ª linha e observem-na toda. Porque será que obtiveram 3+2, 2x3 e 3x3? Comparem com os valores das linhas abaixo.
>
> AA – Hum... Já sabemos! É que em cada linha o prisma é triangular, quadrangular e pentagonal, daí o 3, o 4 e o 5!

A alegria das alunas foi muito grande, queriam cada vez fazer mais e ficaram curiosas por descobrir dados sobre os sólidos geométricos, o que fizeram, investigando sólidos platónicos na biblioteca da Escola. A aprendizagem de Matemática ocorreu então em locais muito diferentes na escola e não só na sala de aula.

Este episódio aconteceu depois das alunas terem tido alguma experiência manipulativa com sólidos geométricos e polidrons e estarem num contexto que fosse favorável a fazerem conjecturas.

Laboratório de Matemática
1997/1998
Escola Conde de Oeiras

Leonor Madeira
5º B nº17

PRISMAS ...FENOMENAIS!!!

1- Utilizando os polidrons constrói cada um dos modelos indicados na tabela.

2- Preenche a tabela

	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas	
Prisma triangular	5 3+2	6 3x2	9	3x3=9
Prisma quadrangular	6 4+2	8 4x2	12	4x3 = 12
Prisma pentagonal	7 5+2	10 5x2	15	5x3 = 15

3-Observa com atenção os valores que preencheste na tabela e regista as "curiosidades" que encontraste.

Multiplicando o número de arestas da base por 3 vai dar o nº de arestas do prisma
Escrevemos na tabela

4-Sem construíres os modelos, preenche a tabela:

	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Prisma hexagonal	8	12	18
Prisma octogonal	9	14	21

4- Adivinhas...

Sou um prisma "prismático" e tenho de base um polígono com 15 lados.

Quantas faces tenho? 17

Quantos vértices? 30

Quantas arestas? 45

Explica como pensaste Primeiro pensei no polígono da base e depois nas faces laterais e da outra base e depois foi fácil

Fig. 1

Números, Figuras e Letras

Uns meses mais tarde ... colocámos ao mesmo grupo de alunas a proposta reproduzida na pág. 15.

Fizeram sem dificuldade as questões 1a) e 1b). Após terem desenhado a terceira figura, registaram como conclusão que se obtinham quadrados. Após terem concluído a ficha, desenhando a última figura e representando como expressão 7x7, houve o seguinte diálogo.

P – Agora voltem atrás e pensem como escreveriam outras expressões para as figuras 1, 2 e 3.

Surgiu então num grupo: 1+3=2x2, 1+3+5=3x3 e 1+3+5+7=4x4 que foi aceite pelas outras alunas sem qualquer dúvida.

P – Já não há mais espaço na folha, mas se quiséssemos representar a soma dos números ímpares até 19, como ficaria a figura?

A – Era um quadrado de lado 20.

P – Porquê?

AA – Não percebo a ideia dela!

A – Somei 1+19=20

P – Verifiquem se é assim que estão os desenhos.

A – Já sei! O lado do quadrado é 10. Porque tenho de dividir 20 por 2.

AA – Não estou a ver como pensaste.

AA – Não percebi nada!

P – Explica às tuas colegas, devagarinho, como pensaste.

A – Vi assim nos desenhos:

1+3=4 4:2=2 O lado do quadrado é 2

1+5=5 6:2=3 O lado do quadrado é 3

1+7=8 8:2=4 O lado do quadrado é 4

No desenho do fim é 1+13=14, 14:2=7. O lado do quadrado é 7. É sempre assim!

Cada vez mais contentes, num ambiente de grande entusiasmo, pedimos:

P – Já agora completem o registo de 2b).

A Teresa escreveu, concluindo assim o seu raciocínio "todos os números são ímpares, o primeiro é 1 e o último é I. 1+I=L L:2=J isto vai dar o lado do quadrado". Letras e números no 5º ano!!!

O espanto foi enorme! Se não vissemos dificilmente acreditaríamos. Pedimos autorização à aluna, saímos da sala em direcção à sala de professores mostrar aquele acontecimento às professoras de Matemática que lá se encontravam e que ficaram tão espantadas quanto nós. Não encontramos resposta para esta formalização da Teresa a menos que a visualização desempenhasse um papel tão poderoso.

Uma das alunas, precisamente a que nas aulas apresenta muitas dificuldades, disse então: "É pena não ser também assim nas aulas, é sempre uma atrapalhação para saber qual a conta para o problema e se a conta está certa, deste modo não me atrapalho a pensar".

Mais uma vez nos interrogamos sobre as características do programa do 2º ciclo de modo a valorizar e desenvolver capacidades em todos os alunos e o que é afinal ensinar e aprender Matemática.

Funcionamento dos Laboratórios de Matemática

Os Laboratórios de Matemática começaram nesta escola em 93, inicialmente para alunos do 3º ciclo. A partir de 95 os quadros da escola (2º e 3º ciclos) foram separados, e as professoras dinamizadoras do laboratório, sendo do 2º ciclo, deixaram de ter possibilidade de trabalhar com alunos do 3º ciclo. Assim decidimos actuar este ano só com alunos do 2º ciclo, num total de cerca de 45.

Continuamos com o mesmo modelo, que na altura funcionava bem – duas professoras na mesma sessão para um máximo de 15 alunos - , tendo feito alguns ajustamentos ao critério de selecção de alunos. Já não são só os nossos, mas também os de outros professores e não só os alunos com fracos resultados em Matemática.

A observação participada no episódio ocorrido nas sessões anteriores foi feita com "quatro olhos", e foi analisada e reflectida pelas três professoras que integram a equipa na escola.

Não temos encarado os Laboratórios de Matemática como espaço meramente de tempos livres dos alunos, mas que ele em simultâneo pudesse contribuir para a formação dos professores. Ninguém aprende sozinho, nenhum professor arrisca levar para a sua sala de aula material cujas potencialidades educativas desconhece, só por ser recomendado por alguém, num livro ou numa reunião de grupo.

Como afirmam Bogdan e Biklen (1991, pág. 284), "quando se apresenta aos professores alguma inovação a ser experimentada nas aulas eles afirmam que não vai funcionar, que não tem nada a ver com o mumdo real, como se o mundo real fosse algo de absoluto, impossível de modoficar e a realidade não fosse construída pelos alunos e professores pela forma como interagem na sala de aula".

As professoras analisaram também a forma como são colocadas, no manual adoptado, as questões sobre propriedades dos sólidos geométricos no 5º ano, tendo verificado que estas solicitam aos alunos que generalizem por "memorização anterior", sem serem ajudados a estabelecer conjecturas e sem apelo a experimentação. Isso levou-as a introduzir alterações quanto à forma como essas questões eram exploradas nas suas aulas.

Temos partido deste espaço para as nossas aulas e temos feito a ligação entre os dois espaços através de:

Propostas de trabalho já experimentados e que sentimos necessidade de divulgar a outros alunos;

Privilegiar na selecção de actividades para as aulas aquelas que permitam trabalhar em grupo e tenham carácter investigativo;

Alunos que pertencem simultaneamente aos laboratórios e às nossas turmas fazem de alunos-monitores, dinamizando e colaborando com os seus colegas de turma na resolução de actividades, o que contribui para um aumento de auto-estima;

Maior valorização dos alunos nas aulas, incitando-os a verbalizar o modo como pensam, aceitando as suas propostas, mesmo que em linguagem pouco formal, diminuindo o discurso do professor no "corte" do seu raciocínio. Isto apesar dos constrangimentos da extensão do programa e de estarmos "ansiosas" por acelerar ...

O trabalho nos laboratórios tem-nos permitido ter um contacto mais profundo e pessoal com cada aluno. Alguns alunos envolvem-se de tal modo nas actividades propostas que transferem esse entusiasmo para o decorrer das aulas, melhorando bastante o seu aproveitamento. Este ano tivemos uma aluna que tinha obtido o nível 3 no primeiro período e acabou o ano com nível 5.

Já discutimos alguns textos teóricos e documentação do ProfMat, onde só uma das professoras vai, por vezes aparecem outros professores do grupo para trocar ideias, ou para fazer pequenos relatos de preocupações, de alegrias, partilhar, enfim o que é pouco comum fazer-se entre os professores, reduzidos a trocar testes ou a falar a correr nas raras reuniões de disciplina.

É também um espaço onde fazemos muitas vezes a ligação com as nossas aulas.

Formação de professores

Com características diferentes, a equipa de professores tem sabido gerir as suas diferenças, respeitando as suas disponibilidades. Colaborámos em algumas iniciativas na escola, nomeadamente na dinamização de uma sessão para o grupo disciplinar do 2º ciclo sobre Geometria, a partir de materiais que elaborámos para os Laboratórios de Matemática, havendo divisão equitativa de tarefas na equipa.

É inegável que só se aprende o que é interiorizado e todas nós consideramos que este projecto, já com a duração de dois anos, nos tem ensinado algo. Trabalhar em equipa não é fácil, criar situações de maior exploração para os alunos, diminuir a nossa informação aumentando as interacções dos alunos na sala de aula e até experimentação de alguns materiais (como espelhos, polidrons, geoplanos e outros do Centro de Recursos da APM, etc.), que depois utilizamos nas nossas aulas, tem sido algumas das suas características.

O relatório preliminar do projecto Matemática 2001 indica que "deveriam ser criados Laboratórios de Matemática nas escolas do 2º e 3º ciclos e se deveria incentivar nestes a formação contínua de professores".

Este projecto tem algumas características dessas recomendações: não trabalhamos isoladamente com os alunos, temos tido sempre adesão destes, conquistámos um espaço.

Mas nem tudo têm sido facilidades: só com muita dedicação e negociação temos conseguido desenvolver estas actividades na nossa escola.

Bibliografia

APM (1998), Matemática 2001: Relatório Preliminar. Lisboa: APM.

Bodan, R e Biklen, S. (1991). Investigação Qualitativa em Educação, Porto Editora.

Lopes, A. V. et al. (1997). Geometria 10º ano. Porto: Afrontamento.

Clara Alves
Fernanda Neto
Isabel Paula
E.B. 2, 3 Conde de Oeiras

Materiais para a aula de Matemática

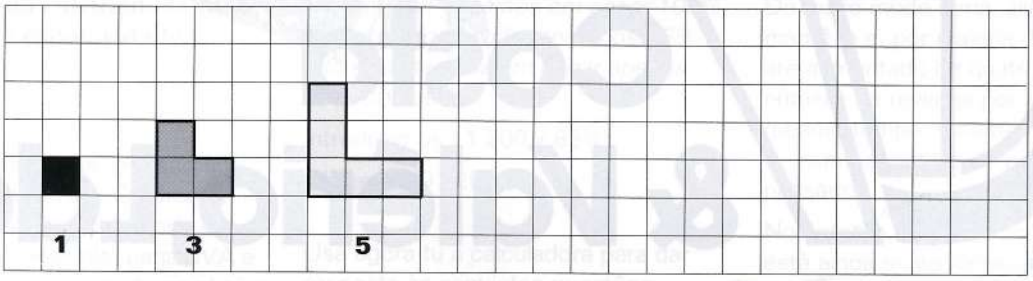
A actividade apresentada é uma das propostas comentadas no artigo "Laboratórios de Matemática no 2º Ciclo", da autoria de Clara Alves, Fernanda Neto e Isabel Paula

Escola ....

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)..

Números e figuras

1.a) Desenha a sequência de L's e escreve os números obtidos



b) Que tipo de números formam a sequência de L's?

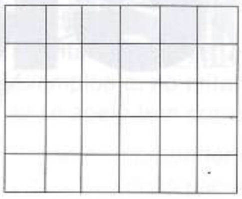
2) Juntando vários L's obténs outras figuras.

Exemplos:

Fig. 1

Fig. 2

a) Constrói a figura que se segue às dos exemplos

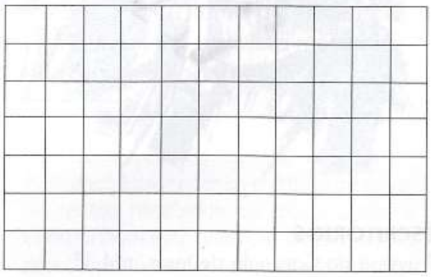


b) Descreve as figuras anteriores

c) Escreve para cada figura uma expressão que a represente

Fig. 1 ______________________ Fig. 2 ______________________ Fig. 3 ______________________

d) A partir de L's desenha a figura que poderias obter a partir de 1+3+5+7+9+11+13.



Que outra expressão a poderia representar?

Pontos de vista, reacções, ideias...

A utilização da calculadora no 6º ano de escolaridade

O Preço certo

Muitas vezes, nas lojas, o preço final precisa de ser ajustado. Os preços são ajustados para cima quando é necessário, por exemplo, pagar IVA e ajustados para baixo quando se obtém um desconto. A calculadora pode ser usada para determinar esses preços finais. Podemos usar dois métodos que ilustramos a seguir com dois exemplos.

Um exemplo de *impostos:*

Um relógio custa 12 000$00. Sabemos que o IVA é de 17%. Qual o preço do relógio já com IVA?

Método 1: *Pensamos em adicionar 17% ao preço original.*

Introduzimos 12000 x 17% +

A calculadora mostra 2040 (o imposto) quando a tecla % é pressionada e o preço final de 14 040$00 quando a tecla + é pressionada.

Método 2: *Pensamos em pagar 100% do preço do relógio e um adicional de 17%, ou seja, 117% de 12000$00.*

Introduzimos 12000 x 117%

Obtemos o preço final de 14 040$00

Um exemplo de *descontos*:

Um vestido custa 11 200$00. Como a loja está em saldo, fazem-nos um desconto de 15%. Qual é o preço final do vestido?

Método 1: *Pensamos em subtrair 15% ao custo do vestido.*

Introduzimos 11200 x 15% - .

Obtemos 9 520$00.

Método 2: *Pensamos em pagar 100% do preço do vestido menos os 15%, isto é, pensamos em pagar apenas 85% do vestido.*

Introduzimos 11 200 x 85% .

Obtemos 9 520$00.

Usa agora tu a calculadora para dar resposta às seguintes questões:

1. Um relógio custa 26 000$00 sem IVA. Sabemos que, neste caso, o imposto é de 17%. Qual é o preço de venda do relógio já com o IVA?

2. Paguei por um frasco de xarope para a tosse 947$00. Sabendo que o IVA é de 5%. Qual é o preço do xarope, sem o IVA?

3. Um vídeo custou-me 65 800$00, já com um desconto de 20%. Quanto economizei na sua compra?

Para pensar

Um desconto de 15% seguido de um desconto de 10% é igual a um desconto de 25%?

Jorge Manuel da Silva Barros

Seria muito importante...

Não é difícil verificar que o número de professores que colaboram com a revista *Educação e Matemática* tem aumentado consideravelmente ao longo destes 12 anos de publicação. De outro modo seria, aliás, impossível mantê-la e, por maioria de razão, ter até aumentado de quatro para cinco o número de revistas por ano e, ao mesmo tempo, o número de páginas — como aconteceu a partir do ano passado.

No entanto, a colaboração na revista está ainda muito longe do que seria desejável, sobretudo num aspecto: a falta de debate ou de simples interacção entre os professores.

Há alguns números atrás, a revista lançou um debate sobre a diversificação dos programas do secundário. Esse debate acabou rapidamente por falta de contributos.

Em diversos artigos, os autores solicitam reacções, comentários, exemplos e, no entanto, raramente esse apelo tem correspondência.

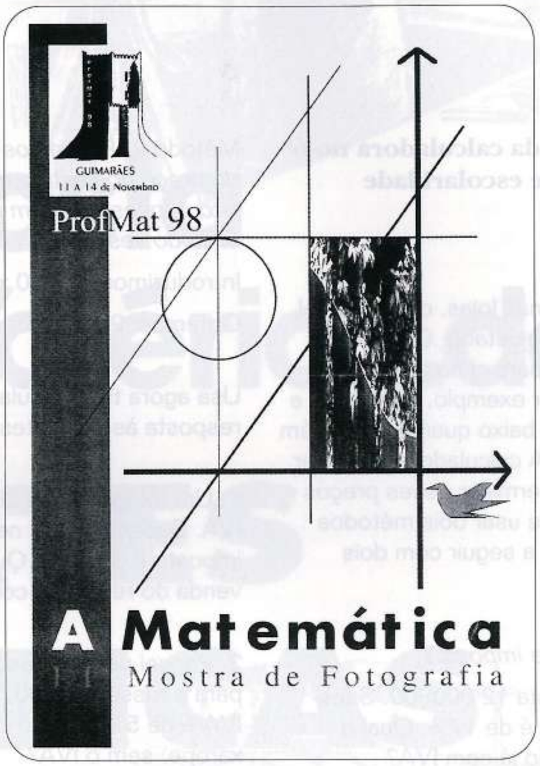
Posso compreender que escrever um artigo de várias páginas requer tempo e, por vezes, até recursos de que nem sempre se dispõe. Mas já me é mais difícil aceitar que seja tão difícil reagir a um artigo que foi publicado — concordando e apresentando exemplos, ou discordando e explicando porquê ou propondo outra forma de encarar o problema — ou referir uma questão que merece reflexão e que tem estado esquecida, ou enviando uma ideia para a sala de aula que parece prometedora ou...

Podem ser dois ou três parágrafos mas um grande número desses contributos faria a revista melhor. E seria muito importante...

Paulo Abrantes

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível na revista

A MATEMÁTICA
II Mostra de Fotografia - Profmat 98



Depois da espectacular adesão no ProfMat 97, vai-se realizar a II Mostra de Fotografia subordinada ao tema "A Matemática".

Uma fotografia pode ser vista sob diferentes perspectivas: vê-se uma casa mas também se vêem quadriláteros; é uma menina ao espelho ou é uma simetria; é a imagem de uma rua mas também pode ser um caso de paralelismo... É o olhar que revela a mensagem da fotografia.

A Associação de Professores de Matemática propõe-lhe que apresente as sua fotografias nas quais se sinta a Matemática e que em cada uma delas se revele uma visão da Matemática.

Os trabalhos apresentados serão expostos na Escola Secundária Francisco de Holanda, em Guimarães, de 11 a 14 de Novembro de 1998, durante o ProfMat 98.

Regulamento da II Mostra de Fotografia

Art.1º Tema

1.1 Os trabalhos a apresentar, a preto e branco ou a cores, subordinar-se-ão ao tema "A Matemática".

Art.2º Trabalhos

2.1 Os participantes apresentarão os seus trabalhos em fotografia com o formato 15x20 sem margens nem molduras.

2.2 A organização reserva-se o direito de ficar com os trabalhos de modo a poder utilizá-los em outras actividades da APM.

Art.3º Participantes

3.1 Poderão participar amadores ou profissionais com as suas fotografias.

3.2 Cada participante poderá entregar qualquer número de trabalhos.

Art.4º Pseudónimos/Textos

4.1 As fotografias poderão ser acompanhadas de um comentário.

4.2 Cada fotografia deverá ter escrito no verso o título, o pseudónimo e o nome do participante.

Art.5º Calendário

5.1 As remessas pelos CTT devem ser endereçadas como a seguir se indica:

II Mostra de Fotografia ProfMat 98
A/C de Paulo Saraiva
R. Cova do Portão, 18, Cv. Esq.
Vale Gemil - Santa Clara
3040 Coimbra

5.2 A data limite de entrega dos trabalhos é 30 de Outubro de 1998, verificada no carimbo dos CTT caso as fotografias sejam enviadas por este meio.

5.3 Os trabalhos serão expostos, entre 11 e 14 de Novembro de 1998, na Escola Secundária Francisco de Holanda, Guimarães.

Art. 6º Certificado

6.1 Os participantes receberão via CTT ou outra, um certificado de participação.

Art. 7º Outros

7.1 As fotografias apresentadas poderão fazer parte de uma exposição itenerante subordinada ao mesmo tema a organizar posteriormente pela APM.

7.2 Compete à organização resolver todos os casos omissos no presente regulamento.

7.3 Os pedidos de esclarecimento ou o presente regulamento poderão ser solicitados para a morada acima.

Ó Stor, para que é que isto serve?

Mário Afonso
Paulo Afonso

Qual o professor de Matemática que não terá sido já confrontado, pelos seus alunos, com esta pergunta? Muitas vezes, somos levados a dar respostas como "mais tarde vais perceber" ou "esta matéria é necessária para aprenderes outros conceitos matemáticos". Mas há exemplos susceptíveis de provocar um debate interior de ideias sobre se, de facto, temos tido para com os alunos um ensino desligado ou centrado em situações da vida real, isto é, temos ou não contribuído para que a Matemática seja vista como algo fechado sobre si próprio ou, pelo contrário, como uma porta aberta à descoberta e à formação de cidadãos pensantes e actuantes?

Qual o professor de Matemática que não terá sido já confrontado, pelos seus alunos, com a questão que dá título a este artigo, isto é, *"ó Stor, para que é que isto serve?"*. Muitas vezes, perante esta pergunta pertinente, somos levados a dar como resposta, por exemplo, *"mais tarde vais perceber essa importância"* ou *"esta matéria é necessária para aprenderes, no futuro, outros conceitos matemáticos"*.

Este tipo de respostas poderão deixar no aluno a sensação de que determinados conteúdos matemáticos não têm qualquer utilidade e aplicabilidade. Têm-se que se saber e pronto!

Este tipo de respostas poderão ser o reflexo de como, enquanto docentes, (a) encaramos a Matemática, (b) encaramos a forma de ensinar Matemática e (c) encaramos a postura ou o papel dos alunos no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina.

Exige-se hoje à Escola e ao professor de Matemática outro tipo de funções que não o de mostrar o saber como algo acabado, estático, onde os que muito sabem (os professores) têm por obrigação transmitir esse saber aos que nada sabem ou sabem muito pouco (os alunos). Hoje, a Sociedade não perdoa à Escola, se ela não for capaz de preparar e formar sujeitos capazes de conseguirem vencer os muitos desafios profissionais que a própria Sociedade tem inerentes.

Poder-se-á, neste contexto, perguntar qual o papel da Matemática e do Professor de Matemática, neste desafio que a Sociedade lança à Escola. Pensamos que a disciplina de Matemática pode ser um espaço privilegiado de intervenção, onde se promovam nos alunos atitudes e capacidades indispensáveis a uma certa mobilidade social e profissional que os esperará no futuro. Cabe, neste sentido, falar na capacidade de pensar, de resolver problemas, de agir e de intervir de forma capaz e crítica sobre os desafios que surgirem.

Ao professor de Matemática exige-se-lhe que seja capaz de, assumindo a postura de um chefe de orquestra, propiciar todas as condições para que cada um dos seus alunos se especialize num "certo instrumento musical", mas de forma a que, no global, a "orquestra" funcione como um todo harmonioso. Isto é, exige-se ao professor de Matemática que conheça ao máximo cada uma das potencialidades dos seus alunos, numa perspectiva de ensino diferenciado, não abdicando, por outro lado, de uma perspectiva global da turma, onde a sua principal missão poderá ser a promoção de seres pensantes, ou seja, práticos reflexivos. Assim sendo, é nossa convicção, que o professor de Matemática, entre outras estratégias, deveria mostrar, em todo o momento, aos seus alunos que Matemática é Vida, e, como tal, deverá estar associada à realidade.

Enquanto alunos, recordamo-nos de que muitos conceitos matemáticos importantes que nos foram transmitidos, davam-nos uma visão da Matemática como um edifício estruturado, complexo, organizado e acabado. Parecia não haver lugar para a descoberta. Importava sim, decorar regras práticas ou algoritmos para serem aplicados em exercícios rotineiros. Lembremos alguns exemplos:

- "o Pi é um número com muitas casas decimais, contudo, para nós será 3,14";

- *"o quadrado da soma é igual ao quadrado do primeiro, mais o dobro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo"*;

- "a diferença entre dois quadrados (a^2- b^2) é o produto da soma de "a" com "b" pela diferença entre "a" e "b";

- "num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos";

- " a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180 graus";

- *"qualquer número elevado a zero é um"*.

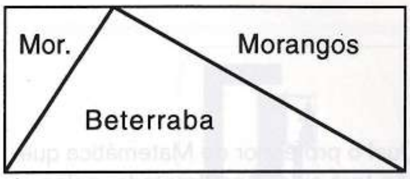
Não admirava, pois, que nos questionássemos sobre a utilidade dessas coisas esquisitas, cheias de números e símbolos. Não víamos, de facto, nenhuma consequência prática na memorização daqueles conceitos, a não ser o de termos que ser capazes de os utilizar na resolução de exercícios rotineiros das aulas ou nos testes de avaliação sumativa.

Perguntar-se-á, então, como dar a volta à situação. Parece-nos que a resposta não andará muito distante da seguinte reflexão: exige-se hoje, trabalhar as ideias ou conceitos matemáticos numa perspectiva de resolução de problemas, que retratem situações da vida real, para que, enquanto resolvedores reflexivos ou metacognitivos, os alunos possam ser capazes de atribuir sentido às suas próprias aprendizagens e possam tirar ilações para a vida, sobre o que aprendem em Matemática.

Vejamos a título de exemplo algumas situações susceptíveis de desencadearem aprendizagens significativas para os alunos. Refira-se que os enunciados poderão e deverão ser adaptados ou ajustados ao tipo de turmas com que se trabalham, atendendo-se, nomeadamente, ao seu grau de maturidade, sob pena de enunciados demasiado infantilizados ou demasiado exigentes serem logo o primeiro factor de desmotivação para os assuntos a desenvolver.

Situação A

José Pancrácio, proprietário agrícola, resolveu fazer uma experiência em agricultura biológica. Assim, na sua quinta seleccionou uma parcela de terreno, de forma rectangular, para produzir morangos e beterrabas, tal como mostra a figura:



Marcolina Pancrácia, quando viu a forma como o marido havia dividido o terreno, deitou as mão à cabeça:

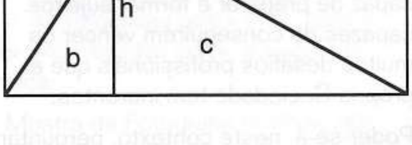
- Tinha-te pedido para ocupares a mesma área de terreno com os morangos e as beterrabas, mas não fizeste caso. Vejo duas parcelas com morangos e apenas uma com beterrabas.

- Mulher nem tudo o que parece é! Olha que cumpri o prometido. A área de terreno é a mesma para ambas as culturas, sendo cada uma delas metade da área do terreno destinada para estas duas culturas. Toma atenção, vou explicar-te melhor...

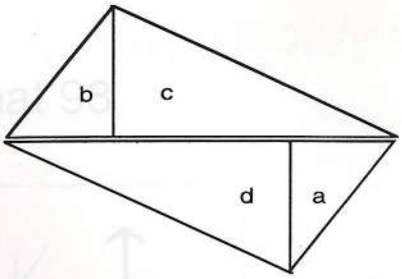
Como terá sido a explicação usada por José Pancrácio?

Se tentarmos que os nossos alunos consigam resolver esta situação problemática, talvez percebam a relação entre a área de um triângulo e a de um rectângulo, com a mesma base e mesma altura. Note-se na seguinte possível resolução:

Possível Resolução:



Se desenharmos uma linha (h) correspondente à altura do triângulo e perpendicular à base do rectângulo, vemos que obtemos quatro triângulos, iguais dois a dois. Se juntarmos os triângulos (b) e (c) por um lado, e (a) e (d) por outro, obter-se-ão duas figuras equivalentes, tal como se pode observar na figura:



Conclui-se, pois, que a área de qualquer destas figuras é metade da área do rectângulo original. Logo,

A área de um triângulo é metade da área de um rectângulo com a mesma base e a mesma altura.

Situação B

O Sr. José queria oferecer uma casa de bonecas à sua filha Mariana como prenda de anos. Comprou o material, montou a casa e começou a pavimentá-la pela cozinha. Verificou que utilizando um determinado tipo de mosaicos quadrados que tinha no sótão, o chão da cozinha, também de forma quadrada, levava 3 mosaicos de lado.

Como os mosaicos que tinha não chegavam para pavimentar o resto da casa, resolveu descobrir o número exacto de mosaicos que precisava comprar.

Para a pavimentação do chão da casa-de-banho, também quadrado, necessitava de 4 mosaicos.

Para a pavimentação do corredor, que possuía forma rectangular, teria que ter em conta:

- o comprimento coincidia com a soma dos comprimentos do chão da cozinha e da casa-de-banho;

- *a largura coincidia com a diferença das larguras do chão da cozinha e da casa-de-banho.*

a) Quantos mosaicos encomendou?

b) Qual a relação entre as áreas do chão da cozinha e do chão da casa-de-banho com a área do corredor?

Este é mais um possível exemplo, onde os alunos poderão perceber que quando se abordar o estudo do conceito "diferença entre quadrados", no fundo, estar-se-á a referir à área de um rectângulo, cujas medidas dos lados se relacionam com as medidas dos lados de dois quadrados.

Possível Resolução:

a) Encomendou:

comprimento: 3 + 2 = 5

largura: 3 - 2 =1

1 x 5 = 5 mosaicos

b) Área da cozinha: $3^2 = 9$

Área da casa-de-banho: $2^2 = 4$

Área da cozinha - Área da casa de banho: 9 - 4 = 5 = Área do corredor.

Por outro lado,

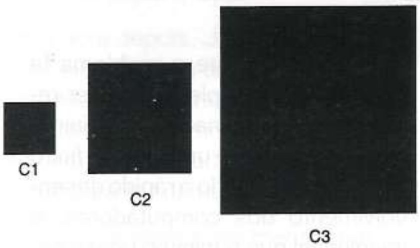
$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$$

$$9 - 4 = 5 \times 1$$

$$5 = 5$$

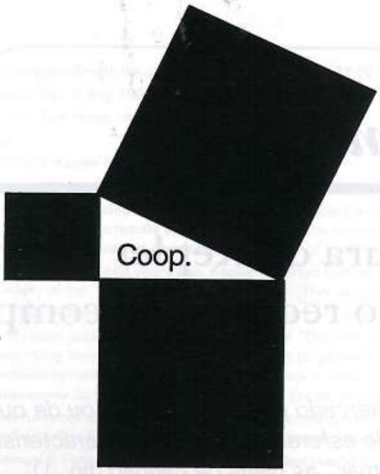
Situação C:

No Alentejo existem três campos que produzem centeio. Os campos apresentam a seguinte forma quadrada:



Os donos dos campos C1 e C2 juntaram esforços no sentido de concorrem juntos contra o proprietário do terreno C3, dono de uma belíssima propriedade, a propósito de um subsídio que a Cooperativa Agrícola iria conceder.

Curiosamente, esses três terrenos são anexos ao terreno da Cooperativa (forma de um triângulo rectângulo), tal como mostra a figura seguinte.



O Presidente da Cooperativa depois de avaliar as propostas concluiu que seria boa política atribuir o subsídio ao dono do terreno que tivesse maior área, isto é, o que poderia produzir mais.

Atendendo a que se estava num período de eleições, o Presidente aconselhou-se com um engenheiro agrário. Este perguntou as dimensões dos terrenos e foi-lhe referido que o terreno C1 tinha 300 metros de lado e o terreno C3 tinha 25 hectares de área. Contudo, as dimensões do terreno C2 não estavam legíveis, devido a um borrão de tinta que se espalhara naquela parte da folha de candidatura.

O engenheiro, num conselho de prudência eleitoral, sugere que se deveria equacionar a possibilidade do subsídio ser entregue da seguinte forma: dividia-se em duas fatias iguais, cabendo ao proprietário do terreno C3 metade desse subsídio e a outra metade seria para a candidatura dos proprietários dos terrenos C1 e C2.

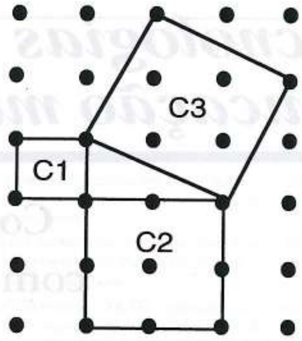
Qual teria sido o motivo deste tipo de sugestão por parte do engenheiro agrário?

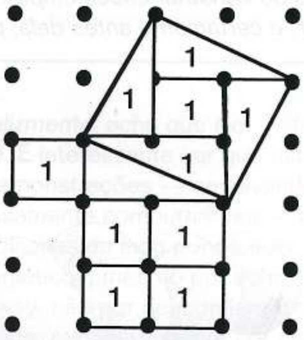
Entendemos que problemas deste género podem motivar o estudo do Teorema de Pitágoras. Uma possibilidade é utilizar o geoplano para representar a situação e para descobrir alguma relação entre as dimensões dos terrenos.

Possível Resolução:

Observem-se as figuras seguintes. Podemos decompor a primeira em função da unidade de área, obtendo a segunda. Assim, verifica-se que:

- a área do terreno C1 é igual a 1 unidade de área;
- a área do terreno C2 é igual a 4 unidades de área;
- a área do terreno C3 é igual a 5 unidades de área.





Logo, **o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.**

Fica assim justificada a sugestão do engenheiro agrário.

Entendemos que exemplos como estes poderão ser susceptíveis de provocarem um debate interior de ideias sobre se de facto temos tido para com os alunos um ensino desligado ou centrado em situações de vida real, isto é, temos ou não contribuído para que a Matemática seja vista e entendida como algo fechado sobre si próprio ou pelo contrário é uma porta aberta à descoberta e à formação de cidadãos pensantes e actuantes?

Estamos convictos que uma Matemática mais bela e útil é aquela que em vez de ser transmitida insípida e unicamente pela abstracção, o seja pela aplicabilidade a situações concretas da vida, situações essas que consigam promover um espírito crítico e reflexivo nos alunos de hoje, cidadãos do amanhã.

Mário Afonso e Paulo Afonso
Escola Superior de Educação de Castelo Branco

Tecnologias na educação matemática

Conjectura de Kepler demonstrada com amplo recurso aos computadores!

Certamente que o leitor já encontrou num mercado pilhas de laranjas ou de outros frutos esféricos. Existem muitos modos de construir esses empilhamentos de esferas. Um dos mais característicos é o que era usado, na época de Kepler, e certamente antes dela, para "arrumar" as balas de canhão (fig. 1).

Fig. 1. Três fases do empilhamento tipo "balas de canhão".

Um pouco de história

Kepler, em 1611, descreveu este tipo de empilhamento e acrescentou:

> Este empilhamento é o mais compacto possível, de tal modo que em nenhum outro arranjo pode um maior número de esferas ser metido no mesmo recipiente.

Esta é a chamada conjectura de Kepler sobre empilhamentos de esferas. No Congresso Internacional de 1900, Hilbert incluiu esta conjectura de Kepler no nº 18 da sua famosa lista de problemas em aberto, que iria dominar grande parte da matemática do séc. XX. A formulação de Hilbert é naturalmente mais precisa:

Como podemos arranjar, de modo a obter a maior densidade no espaço, um número infinito de sólidos iguais, da mesma forma, por exemplo, esferas com um raio dado..., isto é, como podemos "empilhá-las" de modo que a razão do espaço ocupado para o espaço por ocupar seja a maior possível?

Existem infinitos empilhamentos diferentes de esferas, mas no entanto equivalentes, do ponto de vista da densidade, ao empilhamento da figura 1.

A razão referida por Hilbert é, para estes empilhamentos, $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Já neste século, alguns resultados foram sendo obtidos. Assim, diversos matemáticos determinaram majorantes da densidade dos empilhamentos no espaço tridimensional. O limite superior foi reduzido sucessivamente de 0.828 para 0.7731.

Em 1953 L. Fejes Tóth reduziu a demonstração da conjectura de Kepler a um cálculo finito mas impossível (na época) devido à sua dimensão. Segundo refere Thomas Hales (que acaba de apresentar finalmente uma demonstração), Fejes Tóth imaginou que os computadores viriam mais tarde a ser usados para finalizar a demonstração:

> Assim, parece que o problema [a conjectura de Kepler] pode ser reduzido à determinação do mínimo de uma função de um número finito de variáveis... Dado o rápido desenvolvimento dos computadores, é imaginável que o mínimo possa ser determinado com grande exactidão.

O anúncio da solução e reacções

Hales seguiu precisamente a sugestão de Fejes Tóth, recorrendo ao poder dos computadores actuais. Em 1994, propôs um verdadeiro plano de batalha em cinco passos para demonstrar a conjectura. Resultados parciais foram obtidos por Hales e pelo seu discípulo Sam Ferguson desde então. Finalmente, em Agosto passado, Hales enviou um e-mail, anunciando a solução, a vários matemáticos e instituições (ver parte na caixa na página seguinte).

No dia 26 de Agosto, Lee Rudolph envia uma mensagem para a lista de discussão do Math Forum chamada geometry-research, perguntando:

From hales@math.lsa.umich.edu Wed Aug 19 02:43:02 1998
Date: Sun, 9 Aug 1998 09:54:56 -0400 (EDT)
From: Tom Hales <hales@math.lsa.umich.edu>
To:
Subject: Kepler conjecture
Dear colleagues,

I have started to distribute copies of a series of papers giving a solution to the Kepler conjecture, the oldest problem in discrete geometry. These results are still preliminary in the sense that they have not been refereed and have not even been submitted for publication, but the proofs are to the best of my knowledge correct and complete.

Nearly four hundred years ago, Kepler asserted that no packing of congruent spheres can have a density greater than the density of the face-centered cubic packing. This assertion has come to be known as the Kepler conjecture.

In 1900, Hilbert included the Kepler conjecture in his famous list of mathematical problems.

In a paper published last year in the journal "Discrete and Computational Geometry," (DCG), I published a detailed plan describing how the Kepler conjecture might be proved. This approach differs significantly from earlier approaches to this problem by making extensive use of computers. L. Fejes T'oth was the first to suggest the use of computers.) The proof relies extensively on methods from the theory of global optimization, linear programming, and interval arithmetic.

The full proof appears in a series of papers totaling well over 250 pages. The computer files containing the computer code and data files for combinatorics, interval arithmetic, and linear programs require over 3 gigabytes of space for storage.

Samuel P. Ferguson, who finished his Ph.D. last year at the University of Michigan last year under my direction, has contributed significantly to this project. [...]

O que é que Thomas Hales acaba de demonstrar acerca de empilhamentos? É impossível perceber, a partir das notícias dos jornais, o que foi demonstrado. Alguém tem uma informação garantida? E acrescenta: aqui estão os primeiros parágrafos de um telegrama da Associated Press:

" **Matemático resolve um problema com 400 anos**

Ann Harbor, Michigan — Um matemático de Michigan gastou 10 anos e três gigabites de espaço em computador para demonstrar aquilo que qualquer marçano de uma mercearia já sabe: a melhor maneira de empilhar fruta é numa pirâmide.

'O problema parecia-me simples — disse Hales — mas quanto mais o estudava, mais via as suas complexidades.'

Mas testar todas as diferentes possibilidades de empilhamentos ultrapassou as possibilidades dos métodos de papel e lápis."

Uma hora depois, John Conway, o célebre geómetra de Princeton, responde a esta mensagem explicando a todos os participantes da lista o que era a conjectura de Kepler que Hales dizia ter demonstrado.

Uns dias depois, nova mensagem para a lista de um outro assinante:

Sim, mas alguém vai verificar a demonstração? Será que a comunidade matemática vai aceitar esta demonstração como válida? Penso que vamos ver muitas demonstrações deste tipo no futuro.

A resposta de John Conway é significativa. Por um lado, diz que

Existe um grande interesse em verificar esta demonstração [e acrescenta que], uma reunião vai ser convocada, de várias semanas, exactamente para isso, [e que] quando a demonstração tiver sido verificada [e corrigida de eventuais gralhas], estou convencido que vai ser aceite.

Mas quanto a haver muitas demonstrações deste tipo no futuro, diz que "*infelizmente*, acho que sim." (itálico meu). É interessante ver que este tipo de demonstrações — envolvendo intensamente computadores — ainda são olhadas de lado por muitos matemáticos, mesmo por John Conway, não por desconfiarem da sua validade, mas certamente por estarem a compreender que um certo estilo de fazer matemática está lentamente a ser substituído por outro, em que parte do trabalho, mas não certamente o principal, acrescentamos nós, é feito "por máquinas".

Eduardo Veloso

Para mais informações sobre a conjectura de Kepler e a sua demonstração, visite o *site*: http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/

Matemática na Internet para o 7º ano

Um exemplo positivo quanto ao apoio aos professores de Matemática na utilização dos computadores — e em particular da Internet — é a distribuição de um "livro do professor" para o 7º ano contendo, entre outros recursos, numerosas indicações de locais na rede onde é possível encontrar propostas e informação matemática adequadas ao ensino básico[1]. A presença entre os autores de Jaime Carvalho e Silva, autor da melhor página pessoal portuguesa sobre matemática, é desde logo uma garantia de qualidade. Entre as páginas recomendadas escolhemos as seguintes:

- http://www.eseset.pt/ip/ — uma página do Forum Pedro Nunes, da APM, com propostas de actividadades de investigação;
- http://www.ies.co.jp/math/java/panta.html — uma página japonesa (em inglês!!) com um pantógrafo interactivo; faz parte de um conjunto muito interessante sobre geometria elementar (ângulos e rectas paralelas, figuras congruentes, semelhança, quadriláteros, etc.).
- http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/consulta.html — uma página brasileira onde se podem colocar perguntas de matemática ao Dr. Consultão (com arquivo de perguntas anteriores). Contém também outras informações e referências.
- http://softciências.ccg. pt/mocho/matematica/index.html — uma página com inúmeros links para outros recursos na Internet: em língua portuguesa, noutros idiomas, lista de páginas seleccionadas, etc.

Embora os recursos nas escolas ainda precisem naturalmente de melhorar, muitos professores dispõem já hoje de informação e meios que urge começar a aproveitar.

1. Autores: Domingos Fernandes, Isabel Vale, Lina Fonseca, Jaime Carvalho e Silva, Teresa Pimentel. Areal Editores.

Calculadoras no Ensino - Ano Lectivo 96/97

É natural a adopção das calculadoras no ensino, e tem vindo a processar-se a adopção de matérias, processos e programas a esta nova ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. Nada melhor para um Educador que poder contar na sua sala com o maior número possível de alunos com a mesma calculadora, facilitando assim enormente o evoluir da matéria e sua explicação. A **CASIO**. possui a melhor linha do mercado, este ano renovada com ainda melhores modelos e a preço mais acessível.

Básicas

CASIO. SL 450

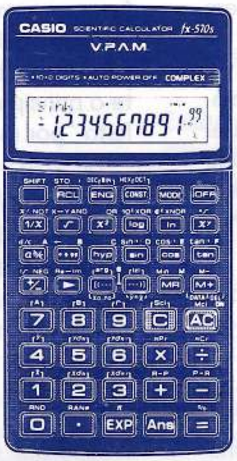
O modelo ideal concebido para o ensino. Outros modelos disponíveis mais acessíveis HL 820 D e HS 5 D.

Científicas

CASIO. FX - 82 SX

A FX 82 é a máquina mais vendida no mundo, agora renovada para maior conforto e durabilidade. Cálculo com fracções e 139 funções.

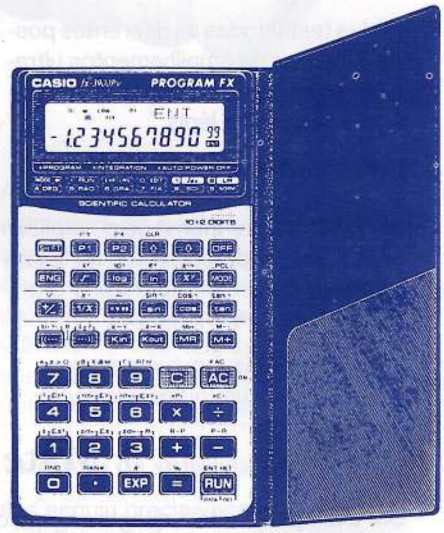
Científica Avançada



CASIO. FX - 570 S

Uma calculadora sem rival, excepcionalmente completa, simples e acessível. Utiliza o novo sistema de cálculo V.P.A.M.

Programável



CASIO. FX - 3900 PV

A calculadora programável mais fácil e acessível. 300 passos de programa, integrais, estatística a 2 variáveis. Já à venda novo modelo. FX 4800 P com 4500 passos de programa.

CALCULADORAS GRÁFICAS CIENTÍFICAS PROGRAMÁVEIS

CASIO. FX 6300 G

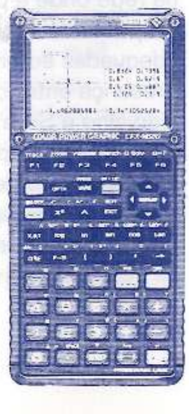
A gráfica mais económica do mercado ! Os gráficos ao alcance de todos. Todas as funções necessárias.

CASIO. FX 7400 G

A nova 7400 G é a calculadora gráfica por excelência. Todas as funções, fácil de usar e programar, visor grande e 7 Kbytes de memória. Mantém preço acessível.

CASIO. CFX 9850

A gráfica super completa com o visor a cores, 32 Kb de memória, linguagem Tipo Basic, estudo das cónicas, sucessões, tabelas e gráficos.



Programação Linear: relato de uma experiência

Jorge Filipe

Este texto relata uma experiência conduzida numa turma do 11° ano em que uma sequência de aulas foi dedicada à resolução de problemas de programação linear. Dirigidos à compreensão de situações reais, estes problemas de optimização proporcionam o estabelecimento de conexões entre o estudo analítico e o estudo gráfico de funções. O balanço destas aulas, principlamente das duas em que os alunos trabalharam em grupos, foi muito positivo.

A experiência decorreu no ano lectivo de 95/96, numa turma do 11° ano da Escola Secundária da Cidade Universitária.

O objectivo era o de, retomando o capítulo Geometria II iniciado mas não concluído no 10° ano, explorar assuntos como intersecção de rectas, resolução de sistemas de equações lineares e domínios planos definidos por rectas.

Ocorreu-me a ideia de explorar problemas que têm uma função objectivo a optimizar. Estes problemas são geralmente muito interessantes pela ligação que têm à vida corrente. Permitem, por exemplo, estudar o plano de produção óptimo de uma fábrica de modo a maximizar o lucro e/ou minimizar a despesa ou ainda calcular a quantidade máxima de determinado produto que se pode produzir com certas quantidades existentes dos seus componentes.

Sebastião e Silva (1975) considerava que a inclusão de problemas de optimização no ensino liceal "está a tornar-se cada vez mais imperiosa" pois "é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em Investigação Operacional, no domínio da Economia" (p. 75).

O tema aparece oficialmente, pela primeira vez, no programa do então criado Ano Propedêutico (1978-1980). Com a sua substituição pelo 12° ano, o tema é suprimido. Actualmente faz parte do programa do ensino secundário como tema facultativo.

O aspecto mais inovador destes problemas prende-se com o facto de poderem ser resolvidos por via geométrica à custa do traçado de rectas. A fase inicial da escolha das variáveis e definição das condições ou restrições é porventura aquela onde o aluno poderá sentir mais dificuldades, como aliás acontece em qualquer outro tipo de problemas. No entanto, estes problemas permitem, por um lado, desenvolver capacidades como a criatividade, o espírito de pesquisa e a abstracção, bem como as capacidades de formular e validar conjecturas e de argumentar com base no racíocinio matemático. Por outro lado, são problemas dirigidos à compreensão de situações reais no domínio da matemática e proporcionam o estabelecimento de conexões entre o estudo analítico e o estudo gráfico de funções.

Relativamente aos objectivos específicos, são problemas que envolvem múltiplos conhecimentos sobre funções lineares e rectas:

- interpretar e equacionar problemas
- representar rectas em referenciais cartesianos do plano
- identificar regiões do plano limitadas por rectas
- identificar a posição relativa de rectas e determinar pontos de intersecção de rectas
- identificar geometricamente pontos do plano como solução óptima dum problema
- verificar analiticamente que determinados pontos são solução óptima dum problema
- escolher, analisar e validar a solução de um problema.

Metodologia de trabalho

Nas duas primeiras aulas pensei expôr um problema de maximização e outro de minimização. Colocaria uma variante deste segundo problema mudando apenas uma condição (uma recta). Esta variante teria várias soluções.

Para facilitar que os alunos se empenhassem apenas na interpretação e resolução do problema sem estarem preocupados em escrever e em desenhar rectas (que só resultam se forem traçadas com todo o rigor), achei oportuno fornecer-lhes uma ficha com a explicação e resolução do problema *A encomenda do comerciante* (ver abaixo). À medida que ia fazendo a explicação no quadro, íamos também seguindo a ficha. Posteriormente propus outros problemas que elaborei, entre os quais *As caixas de balões* e *A papa do bebé* (ver abaixo). Em duas das aulas considerei interessante organizar os alunos em trabalho de grupo.

Pensei também em pedir-lhes que fizessem um balanço ou comentário sobre este projecto, referindo-se, nomeadamente, aos seguintes itens: interesse do tema, aspectos mais relevantes e dificuldades encontradas.

Problema *A encomenda do comerciante*

Um comerciante pretende adquirir uma quantidade não superior a 5 toneladas de certo producto que pode encomendar a duas fábricas. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada mas não pode fornecer mais de 3 toneladas do produto. A fábrica B pode fornecer toda a quantidade pretendida mas apenas garante um lucro de 2 contos por tonelada.

Investigar qual a melhor maneira de o comerciante fazer as encomendas de modo a obter o lucro máximo.

Resolução do problema fornecida aos alunos

A finalidade do problema é determinar quais as quantidades, em toneladas, a encomendar a cada uma das duas fábricas, nas condições dadas, de modo a que o lucro obtido na venda da totalidade da mercadoria encomendada pelo comerciante, seja máximo.

Vamos então designar:

x - toneladas a encomendar à fábrica A

y - toneladas a encomendar à fábrica B

sendo portanto o par (x,y) a solução do problema.

Há duas questões distintas no enunciado do problema: uma em que se estabelecem restrições acerca das encomendas a fazer; outra que se dirige ao lucro a obter.

Vamos começar por analisar as *restrições*.

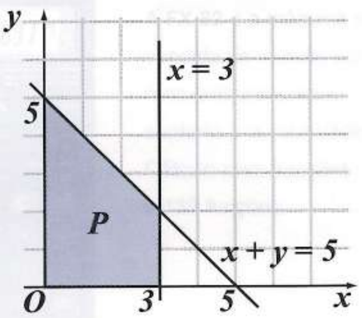
Como o comerciante pretende uma quantidade de produto não superior a 5 toneladas, então será $x+y\leq5$ a primeira restrição.

A fábrica A não pode fornecer mais de 3 toneladas, logo $y\leq3$ é outra restrição.

Uma vez que as quantidades x e y se referem a valores em toneladas, terá de ser $x\geq0$ e $y\geq0$.

Restrições ao problema:

$$\begin{cases} x+y\leq 5 \\ x\leq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



Conjunto das soluções admissíveis:

$$P=\left\{(x,y)\in R^2 : x+y\leq 5 \wedge x\leq 3 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0\right\}$$

Passemos à questão do lucro — a *função objectivo*.

Quatro contos por tonelada encomendada à fábrica A e dois contos à fábrica B dá o lucro Z definido pela função linear $Z=4x+2y$ que, geometricamente, representa uma família de rectas paralelas entre si e que se designam por *rectas de nível*.

Pretende-se então tornar máximo o valor de Z, sujeito às restrições estabelecidas. Assim, a solução óptima será um ponto que pertença simultaneamente a uma das rectas de nível e ao polígono que representa o conjunto P.

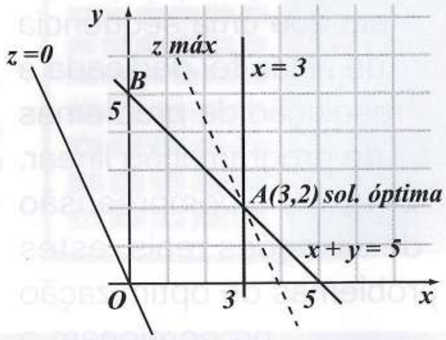
Fazendo por exemplo Z=0 (que não será certamente o máximo de Z pois assim o lucro seria nulo), vem

$$Z=0 \Leftrightarrow 4x+2y=0 \Leftrightarrow y=-2x$$

(1ª recta de nível, passando pela origem do referencial: solução (0,0)).

Deslocando-a paralelamente a si própria sobre o polígono, vamos encontrando soluções cada vez "melhores" até chegarmos à "última recta" que definirá a solução óptima.

Graficamente é fácil, neste caso, concluirmos que se trata do ponto A=(3,2) — ponto de intersecção das rectas x=3 e x+y =5.



Poderíamos ter dúvidas acerca do ponto que representa a solução óptima. Pode demonstrar-se que esta se encontra em um, pelo menos, dos vértices do polígono que representa o conjunto de soluções admissíveis. A via analítica vai permitir tirar as dúvidas:

Para a solução A(3,2) vem o lucro Z=4x3+2x2=16

Para a solução B(0,5) vem o lucro Z=4x0+5x2=10

Temos portanto a resposta a dar ao problema. O comerciante deve encomendar 3 toneladas à fábrica A e 2 toneladas à fábrica B, garantindo um lucro de 16 contos.

Problema *As caixas de balões*

A Mimi precisa de enfeitar uma sala com pelo menos 80 balões grandes (G) e 120 balões pequenos (P). Num supermercado encontra dois tipos de caixas contendo balões:

Caixa A - contém 6 balões G e 8 balões P - 100$00 cada caixa.

Caixa B - contém 2 balões G e 4 balões P - 40$00 cada caixa

Quantas caixas de cada tipo deverá comprar de modo a fazer a despesa mínima?

Variantes no preço dos balões

Como deverá ser feita a compra, supondo as seguintes variantes de preços:

a) Caixa A - 100$00 cada ; Caixa B - 60$00 cada

b) Caixa A - 90$00 cada ; Caixa B - 30$00 cada

Problema *A papa do bebé*

Uma mãe tem à sua disposição duas marcas diferentes de farinha láctea, A e B, para preparar o pequeno almoço do seu bebé e deseja obter as seguintes quantidades mínimas de nutrientes:

ferro - 600 mg; sódio - 400 mg; cálcio - 600 mg

As quantidades destes nutrientes existentes em 1 gr de cada tipo de farinha são dados pela tabela:

	Farinha A	Farinha B
Ferro	30 mg	10 mg
Sódio	10 mg	10 mg
Cálcio	10 mg	30 mg

Os preços são os seguintes: farinha A - 20$00 por grama; farinha B - 10$00 por grama.

Ajuda esta mãe a planear o pequeno almoço do seu bebé, de modo a que a despesa seja mínima.

Como decorreram as aulas

Na primeira aula fiz uma abordagem do problema *A encomenda do comerciante*.

A resolução correu bem, os alunos estavam interessadíssimos e o facto de não terem de escrever ajudou muito. É de referir que o problema tem uma solução óbvia da qual os alunos se aperceberam (compra-se o máximo possível na fábrica que dá mais lucro e o restante na outra). Este valor foi registado no quadro. Os alunos foram informados de que o método analítico e gráfico que se seguia para a resolução do problema era aplicável a outras situações, pelo que não perderam o interesse.

O mais difícil ou onde eles mostraram alguma "desconfiança", foi o considerar-se na função objectivo, a recta Z=0, e depois a família de rectas paralelas que se imaginou para se chegar à solução óptima. Com a resolução do problema *As caixas de balões*, ainda distribuído na primeira aula, esta dificuldade foi superada. Na segunda aula (hora seguinte) já este problema foi mais rapidamente resolvido, desta vez já com a ajuda dos alunos. Passou-se, depois, às questões relacionadas com *Variantes no preço dos balões*. Os alunos resolveram facilmente a alínea a). Começaram também a resolver a alínea b) e quando concluíram da

(continua na página 32)

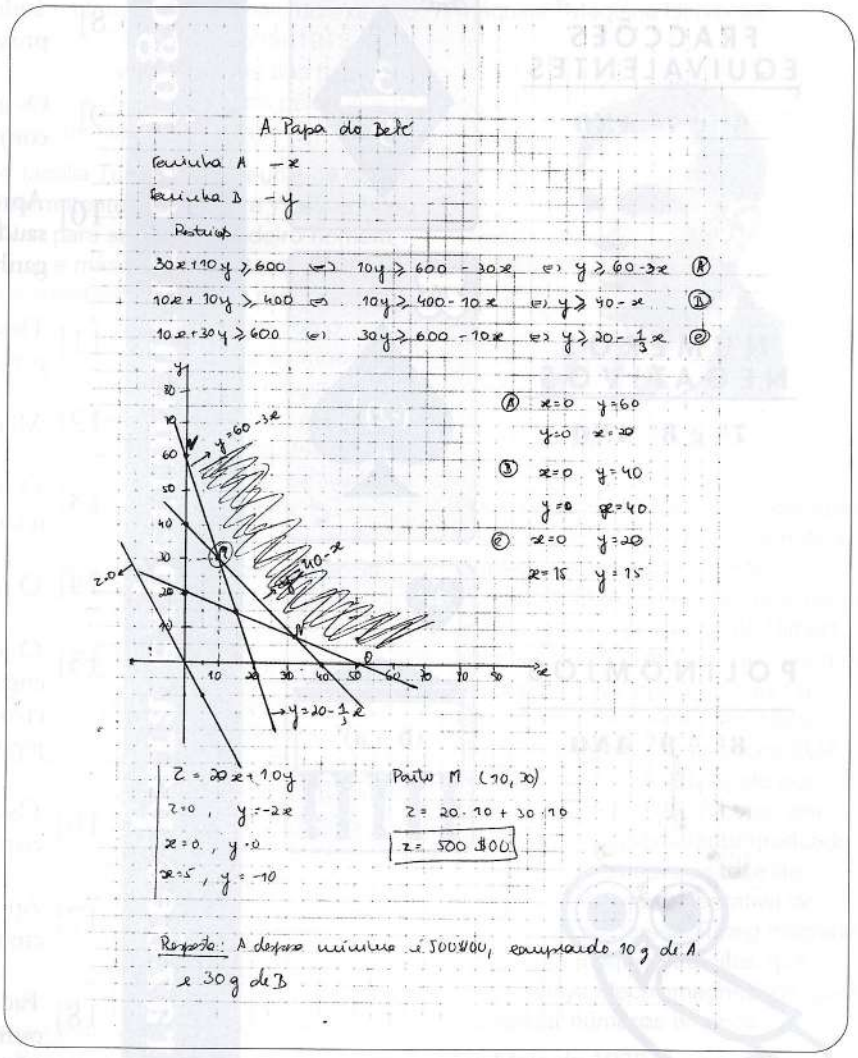


Figura 1 — Resolução do problema *A papa do bebé*, apresentada por um grupo de alunos

DÊ UMA AULA DIFERENTE

ADIÇÃO E SUBTRACÇÃO
2º e 3º ANO

TABUADA DA MULTIPLICAÇÃO
3º e 4º ANO

FRACÇÕES EQUIVALENTES
6º e 7º ANO

NÚMEROS NEGATIVOS
7º e 8º ANO

POLINÓMIOS
8º e 9º ANO

18 razões para experimentar os jogos de cartas TIO PAPEL

1] Os jogos foram concebidos especificamente para as aulas de matemática.

2] As regras do jogo são muito simples e de fácil aplicação (tipo dominó).

3] Os alunos gostam.

4] Os jogos são um projecto que visa estimular nos jovens o gosto pela matemática.

5] Os jogos servem para avaliar e consolidar conhecimentos.

6] Os conhecimentos são importantes para ganhar o jogo mas não são decisivos - todos podem ganhar ou perder.

7] Alunos que apresentam dificuldades participam facilmente.

8] Todos se interajudam para que o jogo prossiga.

9] Os alunos aprendem a organizar-se em conjunto.

10] Aprendem a competir de uma maneira saudável, isto é, a perder sem se queixar e a ganhar sem se vangloriar.

11] Desenvolvem o cálculo mental e o pensamento lógico.

12] Memorização rápida de conceitos básicos.

13] O material dos jogos é fácil de manipular recolher e guardar.

14] O projecto gráfico é excelente.

15] O jogo está concebido de forma a detectar enganos (ou batotas), isto é, em caso de erro este pode ser detectado uma vez que o jogo "fecha".

16] Os alunos evoluem na descoberta de estratégias para ganhar o jogo.

17] Após uma aula podem jogar na escola ou em casa sem a presença do professor.

18] Facilita aos alunos a posterior utilização dos outros jogos Tio Papel - **a progressão na carreira de aluno de matemática está prevista.**

[Francisco Aranda]

Alan Turing : a Bomba, a lógica, a matemática e a cifra

José Maria Fernandes de Almeida

Uma vida dominada pelo segredo, o último dos quais só foi revelado após a NASA — The National Seccurity Agency — dos Estados Unidos da América, em 2 de Abril de 1996, ter desclassificado os documentos referentes à máquina Enigma e processos de cifragem e decifragem utilizados durante a II Guerra Mundial.

Alan Turing nasceu em Paddington, Londres, no dia 23 de Junho de 1912. O seu pai Julius Mathison Turing era funcionário civil do governo inglês em Madastra, India, onde casara com Ethel Stoney pertencente à burguesia colonial. Considerando que o clima de Madrasta não era favorável à saude das crianças entregou Alan e o seu irmão mais velho John aos cuidados de uma família de coronéis do exército britânico. Em Setembro de 1913 Alan e John foram separados dos pais e começaram a ser criados pelos Ward perto de Hastings, Inglaterra.

A família Turing só se reunia de modo intermitente e a senhora Ward educou Alan para ser um verdadeiro homem duro e másculo. No entanto Alan não se adaptava ao modelo preconizado pela senhora Ward assim como também não se adaptou ao modelo victoriano praticado no colégio privado de Sherborne, onde entrou em 1926. Aliás foi neste colégio que Alan se apercebeu da sua atração exclusiva por rapazes. Um seu amigo Christopher Morcon, um ano mais velho que Alan, teve uma influência determinante na sua paixão pelas ciências.

Em 1930 é-lhe atribuída uma bolsa de estudos para o King's College, em Cambridge. No King's College encontra matemáticos notáveis e decide dedicar-se à matemática pura. Dois anos mais tarde apresenta à London Mathematical Society um artigo sob o título *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* [problema da possibilidade de decisão por meios matemáticos, formulado por Hilbert no final da década de 1920]. Neste artigo, que só foi publicado em 1936, Turing descreve uma máquina abstracta muito simples que seria capaz de efectuar, de modo automático, um cálculo desde que a sua configuração fosse definida por uma tabela de instruções. A cada algoritmo corresponde uma tabela de instruções particular. Nada impede a concepção de uma máquina que seja capaz de executar o conjunto das operações realizadas por uma outra determinada máquina. Turing denominou essa máquina "Máquina Universal".

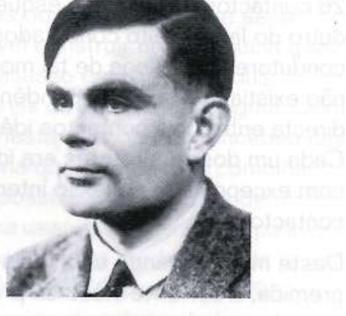


fig. 1 - Alan Turing

Pouco depois de Turing ter submetido o seu artigo à *London Mathematical Society* Alonzo Church, em Princeton, EUA, apresenta uma outra solução para o problema de Hilbert. Max Newman, professor de Turing em Cambridge, Inglaterra, escreve a Church recomendando-lhe o seu aluno. Turing embarca para os EUA em Setembro de 1936 tendo por objectivo frequentar um curso em Princeton como estudante graduado. Enquanto prepara a sua tese de doutoramento, numa tentativa de concretização da sua *Turing machine* utiliza uma máquina de cifra, que usava relays electromagnéticos, para multiplicar números binários.

Em Maio de 1938 Jhon von Neumann convida Turing para ser seu assistente em Priceton, mas Turing recusa esse convite e regressa a Inglaterra.

Em Setembro de 1939 Turing entra ao serviço da *Government Code and Chypher School*, recém instalada em Bletchley Park. O objectivo prioritário em Bletchley Park é quebrar as chaves da cifra da máquina alemã *Enigma*.

A máquina *Enigma* tinha sido construída pelo alemão Arthur Scherbius em 1923 e era um produto comercial destinado a garantir comunicações que necessitassem de um certo grau de confidencialidade. A *Enigma* original dispunha de um teclado com 26 letras, um painel com 26 letras iluminadas cada uma por uma lâmpada eléctrica e um dispositivo denominado "scrambler". Este dispositivo era constituído por três rotores que giravam num mesmo eixo. Cada rotor possuia dois conjuntos de 26 contactos, um do lado esquerdo e outro do lado direito conectados por condutores eléctricos de tal modo que não existia nunca correspondência directa entre dois contactos idênticos. Cada um dos três rotores era idêntico com excepção da conexão interna dos contactos.

Deste modo, quando uma tecla era premida, a corrente eléctrica proveniente do teclado entrava num contacto direito do primeiro rotor. Através do circuito interno do rotor a corrente eléctrica saía por um contacto do lado esquerdo do rotor que não correspondia à letra afecta ao contacto do lado direito. O primeiro rotor do lado direito denominava-se "rotor rápido", o seguinte "rotor médio" e o da esquerda "rotor lento".

Considerando, por exemplo, que era premida a letra Q no teclado, à saida do "rotor rápido" a letra seria, por exemplo, Y a qual seria transformada, por exemplo, na letra S à saida do "rotor médio" e finalmente, à saida do "rotor lento", obter-se-ia, por exemplo, a letra N que seria iluminada no painel.

O operador anotava a mensagem cifrada a qual era enviada ao destinatário por correio, telégrafo ou telefone. O receptor utilizando uma *Enigma* com configuração idêntica digitava a mensagem cifrada e, tomando nota das letras iluminadas no painel, obtinha a mensagem decifrada.

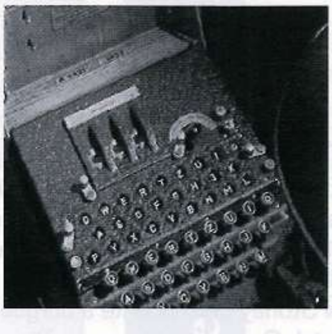


fig. 2 - *Enigma*

Qualquer um dos rotores podia ser rodado à mão de modo a posicionar-se numa letra inicial diferente. Os rotores eram permutáveis de modo que poderiam ser posicionados em 26 x 26 x 26 (17.576) estados. No entanto, este sistema não era suficientemente seguro para garantir que a chave de cifra não fosse rapidamente identificada. Assim, cada vez que uma tecla era premida o "rotor rápido" avançava uma posição. Quando o "rotor rápido" atingia uma dada posição o "rotor médio" avançava por sua vez uma posição que poderia causar o avanço de uma posição no "rotor lento"; o "scrambler" funcionava de modo semelhante ao odómetro de um automóvel. Este processo reduzia o total de combinações possíveis em 26 x 26 (676), pelo que o quantitativo total de combinações possível era 16.900, na máquina base.

A simplicidade de utilização da *Enigma* e o quantitativo de combinações possível atraiu a atenção das Forças Armadas alemãs que impuseram a sua retirada do mercado e o seu fabrico, sucessivamente aperfeiçoado, para seu uso exclusivo.

Cada rotor passou a poder ser ajustado com um anel de caracteres diferente — "ring setting". A alteração do anel de caracteres provocava dois efeitos: primeiro, a correspondência entre letras num mesmo rotor era alterada; segundo, a posição do grampo de avanço que movia o "rotor médio" e o "rotor lento" passava a corresponder a uma letra diferente. Assim adicionavam-se 676 combinações possíveis dos anéis de caracteres para os "rotores médio e lento". Por outro lado a permutação dos rotores acrescentava seis possibilidades diferentes de posicionamento. Como existia um conjunto de cinco rotores dos quais três podiam ser utilizados o quantitativo de combinações possível era 10 x 6 = 60. Deste modo o quantitativo de combinações inicial seria 17.576 x 60 = 1.054.560. Considerando as combinações possíveis para os anéis de caracteres dos "rotores médio e lento" o conjunto de estados passava a ser de 1.054.560 x 676 = 712.882.560. Considerando agora os 26 estados possíveis para o anel de caracteres do "rotor rápido" o conjunto de estados possível era 26 x 712.882.560 = 18.534.946.560.

Por *encomenda* das Forças Armadas alemãs, foi acrescentado à *Enigma* um quarto rotor denominado "reflecting" que recebia o sinal do "rotor lento", o transformava e reenviava de novo para o "rotor lento" e o processo de cifragem descrito continuava a ser realizado agora em sentido inverso até atingir o "rotor rápido" e era o sinal que saía deste que iluminava a lâmpada no painel. A introdução do reflector produziu a restrição de nenhuma letra poder ser encriptada por ela própria.

As Forças Armadas alemãs acrescentaram ainda à *Enigma* um dispositivo denominado "Stecker" que permitia trocar pares de letras para além das trocas já conseguidas com a utilização dos rotores. Por exemplo se no "Stecker" a letra A fosse trocada com a letra Z, a conversão inversa era também verdadeira, isto é, Z era sempre trocado com A. Este aparente aperfeiçoamento realçava ainda mais uma fraqueza do sistema: nenhuma letra poder ser encriptada por ela própria.

Uma *Enigma* de três rotores, com todos estes aperfeiçamentos, era possível atingir a ordem dos 150.000.000.000.000.000.000 de combinações.

Para complicar ainda mais o sistema de cifra os submarinos alemães (U-boat) utilizavam máquinas *Enigma* com quatro rotores e conjuntos de oito rotores em vez dos cinco utilizados pelos outros ramos das Forças Armadas alemãs.

O quantitativo de combinações possíveis e a sofisticação da *Enigma* convenceu as Forças Armadas alemãs que dispunham de um sistema de chaves de cifra "inquebrável".

No entanto, por engano os alemães enviaram, em 1928, para a sua delegação em Varsóvia uma *Enigma* por correio normal. Detectado o erro, os funcionários da delegação alemã em Varsóvia realizaram rapidamente inquéritos sobre o paradeiro da encomenda. Este procedimento chamou a atenção das autoridades alfandegárias polacas e o resultado foi que o departamento de cifra polaco — BS4 — examinou a máquina *Enigma* durante um fim de semana e só entregou a encomenda, cuidadosamente igual à original, na segunda feira seguinte.

O matemático polaco Marian Rejewski decifrou a chave das *Enigma* alemãs partindo de uma dedução muito simples: para que o receptor da mensagem cifrada a pudesse decifrar tinha que saber exactamente qual era a posição inicial dos rotores na *Enigma* do emissor. Para uma *Enigma* de três rotores a chave era uma sequência de três letras visíveis pelo operador na superfície do tronco de cilindro de cada um dos rotores. O processo utilizado em todos os sistemas de cifragem na época era o de incluir a chave de descodificação no texto da mensagem repetindo-a no início do texto.

Deste modo, o operador emissor da *Enigma* colocava os seus três rotores numa posição conhecida por todos os operadores, por exemplo ZUG, em seguida digitava duas vezes a chave do dia, por exemplo TAGTAG, obtendo uma sequência cifrada de seis letras, por exemplo ARBGMW. Em seguida, colocava os seus três rotores na posição TAG e codificava a mensagem.

O operador receptor colocava os seus três rotores na posição ZUG e em seguida digitava ARBGMW obtendo a chave do dia TAGTAG. Em seguida colocava os seus três rotores na posição TAG e descodificava a mensagem.

Os decifradores polacos desenvolveram um procedimento dedutivo para determinar as chaves de cifragem baseado no pressuposto que os alemães não utlizavam o "Stecker" quando digitavam a chave. Assim, por exemplo, se uma mensagem começasse pela letra A seguida de quatro letras adiante pela letra R, as letras A e R eram o resultado da cifragem da mesma letra. Realizaram a mesma dedução para a segunda e quinta e terceira e sexta. Construiram tabelas a partir de conjuntos de mensagens alemãs e descodificaram todas as mensagens alemãs entre o dia 30 de Abril e 8 de Maio de 1937. O sucesso foi efémero: a partir dessa data todas as *Enigma* passaram a utilizar uma posição inicial escolhida pelo operador ao invés de uma posição fixa.

Quando Turing entra ao serviço da Government Code and Chypher School, em Setembro de 1939 dispõe do conhecimento adquirido pelos decifradores polacos, mas não lhe é possível construir a totalidade das combinações usadas nas novas versões mais complicadas da *Enigma*.

Os decifradores polacos e, posteriormente, os decifradores ingleses tinham verificado que os alemães cometiam algumas falhas nos procedimentos adoptados para cifrar as mensagens. Algumas falhas eram facilmente detectadas.

Uma das falhas detectada era a reutilização dos livros de código para um determinado mês. O livro de código continha a posição inicial em que os rotores da *Enigma* eram posicionados durante um período de 24 horas. Se uma mensagem pudesse ser decifrada num determinado dia, a posição inicial dos rotores era conhecida e todas as outras mensagens cifradas nesse dia eram decifradas.

Outras falhas eram menos óbvias, mas sabia-se que o texto das mensagens alemãs era sempre muito formal. Uma mensagem era sempre iniciada por uma cadeia de caracteres que identificava o destinatário, por exemplo "PARAOGENERALLUIS" (obviamente em alemão). Esta cadeia de caracteres denominava-se crib. Quando os decifradores ingleses pensavam que tinham um crib útil podiam determinar quais as combinações possíveis utilizadas no posicionamento dos rotores da *Enigma*. No entanto o quantitativo de combinações possíveis era da ordem do trilião.

Turing, comparando determinado *scrib* com a respectiva cifra verificou que existiam pares de letras que formavam uma sequência iniciada e terminada pela mesma letra constituindo um loop. Concluiu que existia um quantitativo reduzido de sequências de rotores no scrambler e que seria possível construir uma máquina que pesquisasse estas sequências possíveis de rotores da *Enigma*. Com base nesta descoberta concebeu uma máquina que testasse as combinações possíveis dos rotores de uma *Enigma* usando o método da palavra provável. Deste modo bastaria testar 26 x 26 x 26 x 60 = 1.054.560 sequências de rotores.

Turing e o matemático Gordon Welchman construiram a máquina utilizando *relais* rotativos — idênticos aos usados nos antigos aparelhos telefónicos com marcador circular —, rotores *Enigma*, visores luminosos e quadros eléctricos de conexão de circuitos. A máquina foi denominda *the Bombe*, provavelmente por semelhança com a denominação Bomba atribuida pelos decifradores polacos a uma máquina mecânica construída para apoiar a descriptação das mensagens encriptadas pelos alemães nas máquinas *Enigma*.

A *the Bombe* comportava-se como uma colecção de máquinas *Enigma* trabalhando em conjunto. Segundo Welchman existiam doze conjuntos de rotores *Enigma* na *the Bombe*. No entanto, apesar das onze *the Bombe*, instaladas em Bletchley Park entre

Maio de 1940 e o final da Segunda Guerra Mundial (1939-1945) terem sido destruídas pelos serviços secretos ingleses, há notícia que algumas deveriam dispor de um quantitativo superior a doze rotores *Enigma*.

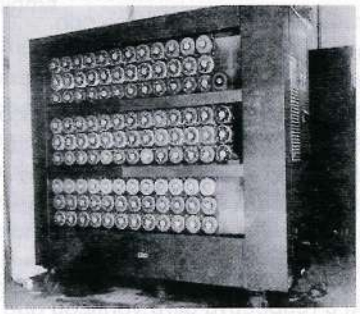


fig. 3 - *the Bombe*

Turing aplicou o processo clássico de "redução ao absurdo" para testar qual a sequência correcta para um determinado crib. Os rotores, na *the Bombe*, eram posicionados segundo uma sequência assumindo que era a correcta para cifrar o *crib*. A máquina começava a trabalhar e tentava provar que não era aquela a sequência correcta. No caso de não ser a sequência correcta a máquina passava automaticamente à segunda sequência que deveria ser testada e tentava provar que esta não era a sequência correcta. Se a máquina não conseguisse provar que a sequência era incorrecta, a sequência era anotada como boa, mas a máquina continuava a trabalhar pesquisando outras sequências correctas possíveis.

A máquina utilizava um sistema binário que podia realizar os testes lógicos muito rapidamente.

Deste modo os decifradores ingleses utilizaram a máquina para determinar qual o conjunto reduzido de combinações possível para um determinado *crib*. Se o *crib* era bom a mensagem era rapidamente decifrada, se não, também rapidamente, seriam encontradas contradições.

No entanto, neste processo não era considerada a utilização do "Stecker" que equipava as *Enigma* e permitia trocar pares de letras. Welchman concebeu então um dispositivo denominado "diagonal board" que fisicamente era construído segundo uma matriz quadrada de 26 x 26 terminais. Cada linha da matriz correspondia aos 26 conectores A a Z do "Stecker". Utilizando as 26 colunas era possível realizar fisicamente, através de conexões eléctricas, todas as trocas de pares de letras. Este aperfeiçoamento eliminava falsas sequências "verdadeiras" e reduzia a pesquisa das sequências de rotores a 26 x 26 x 26 = 17.576.

Com a utilização da *the Bombe*, em finais de 1940 as mensagens de rotina da Luftwaffe eram descriptadas pelos ingleses. A decifragem regular das mensagens dos U-Boat começou a ser realizada nos meados de 1941, mas em 1 de Fevereiro de 1942 as *Enigma* que equipavam os U-boat foram modificadas e perdeu-se a capacidade de decifragem que só foi recuperada no início de 1943.

Em Novembro de 1942 Turing regressa aos EUA, oficialmente como membro de ligação com os aliados, mas efectivamente foi construir, em colaboração com os Bell Laboratories, um sistema electrónico para cifragem das comunicações telefónicas entre Roosevelt e Churchill. Regressa a Inglaterra em Março de 1943 e dedica-se a um projecto de construção de uma máquina para cifrar comunicações telefónicas.

Alan Turing faleceu no dia 7 de Junho de 1954 em Manchester, Inglaterra, e presumivelmente cometeu suicídio.

Uma vida dominada pelo segredo o último dos quais, as suas realizações práticas, só foi revelado após a NSA — The National Seccurity Agency — dos EUA ter desclassificado os documentos referentes à máquina *Enigma* e processos de cifragem e decifragem utilizados durante a Segunda Guerra Mundial em 2 de Abril de 1996.

José Maria Fernandes de Almeida
Univ. Évora

Programação linear (conclusão)

existência de rectas paralelas, expliquei que isso conduzia a que o problema tivesse várias soluções.

No final da aula fiquei com a sensação de que os alunos tinham percebido bastante bem o método de resolução. Aguardei com expectativa as próximas aulas.

Nas duas aulas seguintes trabalharam em grupo com bastante entusiasmo. Levei para estas aulas uma calculadora gráfica TI82, para o caso de quererem comparar gráficos. Entretidos que estavam nos seus trabalhos, ninguém recorreu à máquina.

Pedi-lhes que entregassem os trabalhos feitos e que escrevessem um comentário exprimindo a sua opinião quanto a este tema. A fig. 1 representa a resolução do problema *A papa do bebé* apresentada por um grupo de alunos.

Balanço

Fazendo um balanço destas quatro aulas e principalmente das duas em que trabalharam em grupo, depois de analisar os trabalhos que apresentaram e os comentários que escreveram, acho que este projecto foi inteiramente positivo. Os alunos trabalharam em bom ritmo, três grupos resolveram todos os problemas propostos, dois grupos resolveram três problemas e um grupo apenas resolveu um problema. Todos os grupos expressaram uma opinião positiva sobre estas aulas, consideraram os problemas muito interessantes e motivadores e gostaram sobretudo do facto de terem trabalhado em grupo. Embora em dois grupos a opinião fosse a de que os problemas eram difíceis, nos restantes grupos foram considerados simples e acessíveis.

Referências

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática.* 1º Volume. Lisboa: GEP

Jorge Filipe
Esc. Sec. da Cidade Universitária

Bento de Jesus Caraça 1901-1948

Cristina Loureiro

Bento de Jesus Caraça foi um dos mais carismáticos matemáticos portugueses. Este ano comemorou-se o cinquentenário da sua morte, e esse facto foi objecto de várias jornadas e eventos, em alguns pontos do país e organizadas por entidades tão diversas como a Universidade Popular de Setúbal, a Intersindical e o Instituto e Escola Profissional Bento de Jesus Caraça. A APM também se associou a essas comemorações.

Estas comemorações, que tiveram sempre como mote três vertentes da personalidade de Bento Jesus Caraça, o humanista, o matemático e o professor, vieram destacar um homem muito maltratado pelo antigo regime, que foi afastado do ensino público e ignorado durante muito tempo. Embora precocemente desaparecido, deixou obra notável que nos permite ver a profundidade e o impacto dos seus ideais.

Tive assim o privilégio de participar em algumas desses momentos evocativos, e digo privilégio porque pude ficar a conhecer melhor uma personalidade tão marcante como a deste professor cujas ideias sobre a matemática e sobre a educação ficaram registadas em obras notáveis como "Conceitos Fundamentais da Matemática" e "Conferências e Outros Escritos".

"A actualidade e adequação das suas palavras quando falamos de escola para todos e de educação matemática fazem-nos recordar aqui Bento de Jesus Caraça através de alguns trechos das referidas obras. É a melhor forma de recordar aqui este professor e de divulgar a sua obra.

Eduquemos e cultivemos a consciência humana, acordemo-la quando estiver adormecida, demos a cada um a consciência completa de todos os seus direitos e de todos os seus deveres, da sua dignidade, da sua liberdade. Sejamos homens livres, dentro do mais belo e nobre conceito de liberdade — o reconhecimento a todos do direito ao completo e amplo desenvolvimento das suas capacidades intelectuais, artísticas e materiais."

As Universidades Populares e a Cultura, p. 8 [1]

"Caracterizado, assim, o sistema escolar que estamos estudando — igualdade de todos perante a cultura — vejamos agora quais as condições da sua realização.

Essas condições serão, evidentemente, aquelas condições necessárias para que desapareçam as situações de privilégio. Não há, portanto, mais que investigar quais as circunstâncias que ocasionam divisão dos seres humanos perante a Escola, e fazer desaparecer essas circunstâncias."

Escola Única, p. 105 [1]

"A separação total que existe, como na nossa Universidade, entre formação literária e científica, deve desaparecer também. Os nossos licenciados, em Letras ou em Ciências Matemáticas por exemplo, estudam fragmentos de uma mesma coisa, mas não a *coisa*. Como se pode estudar a sério a história da Filosofia sem conhecer os problemas levantados pela teoria dos números irracionais, pelo conceito de infinito, pelo conceito de limite? Como se podem conhecer bem os fundamentos da Análise Infinitesimal, o que eles significam, na marcha do pensamento, sem aprofundar, na história da Filosofia as questões levantadas à volta do conceito de *devir*?"

Humanismo e Humanidades, p. 288, [1]

"A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira com foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.

Descobre-se ainda qualquer coisa mais importante e interessante: — no primeiro aspecto, a Ciência parece *bastar-se a si própria*, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um *organismo vivo*, impregnado de *condição humana*, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo *entendimento* e pela *libertação*, aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.

Será esta a atitude que tomaremos aqui."

Prefácio do Autor à 1ª edição, xxiii [2]

[1] Conferências e Outros Escritos, Lisboa 1978, edição particular.

[2] Conceitos Fundamentais da Matemática, Gradiva, 1998.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Simetrias axiais no 1º ciclo*

Maria Adelaide Gomes Peixoto

As actividades propostas foram desenvolvidas por alunos duma turma com 15 crianças do 3ºano, numa escola rural, do concelho de Braga. A idade média das crianças era de 8 anos. A autora não era a professora titular da turma mas apoiava dois alunos com necessidades educativas específicas.

O programa constou, para além da visualização de dois vídeos sobre simetrias axiais, de actividades com problemas em que era necessária a aplicação do conceito de simetria axial e a manipulação de materiais (papéis lisos e quadriculados, espelhos, lápis, cores, tintas, tesouras e picos).

Alguns dos problemas propostos faziam mais apelo ao raciocínio-lógico-matemático que outros. Todos eles estavam imbuídos de uma componente lúdica que constituiu motivo de empenhamento e interesse das crianças.

Faz-se aqui o relato de como decorreram essas actividades.

A visualização de um vídeo sobre simetrias axiais, permitiu ver, de princípio, apenas metade de figuras próprias de um jardim que depois se completavam por meio de magia. Puderam também observar nessas e outras figuras, que as suas metades coincidiam, quando dobradas por um eixo. O vídeo terminava com uma questão sobre a simetria das letras do alfabeto, que serviu para uma futura actividade.

De seguida foi-lhes proposta uma actividade lúdica - O Borrão. Dobraram uma folha a meio, salpicaram com tinta de várias cores uma metade, dobraram em seguida pelo vinco, pressionaram-na para que a tinta se espalhasse e quando voltaram a abrir a folha, observaram as figuras simétricas que obtiveram por este processo. Os alunos foram convidados a redigir a sua impressão sobre o vídeo e sobre o borrão. É interessante reflectir sobre a tendência realista e naturista das suas impressões:

"Saiu-me uma bailarina". "Saiu-me um rato"...

Outra proposta apresentada consistia numa folha onde apareciam desenhados os contornos de meias figuras e o eixo de simetria (fig.1). Teriam que dobrar as folhas pelo eixo e recortar pelo contorno as figuras apresentadas.

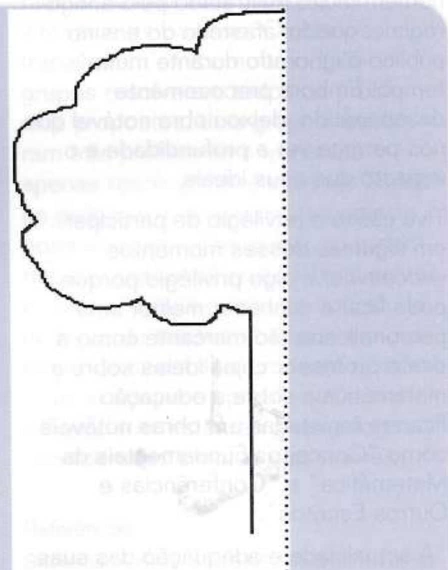


figura 1

Partindo da visualização de vídeos sobre simetrias axiais, de actividades com problemas em que era necessária a aplicação do conceito de simetria e da manipulação de materiais, procurou-se depertar as crianças para o sentido estético presente na simetria. Procurou-se ainda despertar o gosto e respeito pelo património cultural e artístico português, sobretudo no que respeita à arte da azulejaria.

* Extraído do relatório do projecto "Simetrias Axiais" de um curso de Estudos Superiores Especializados (CESE) em Educação Infantil e Básica Inicial, ramo de "Didáctica do Meio Físico e da Matemática"

Em seguida pedia-se para imaginar um objecto, desenhar o contorno duma metade e pelo mesmo processo obter figuras que permitissem construir um painel de modo a compor uma paisagem.Todos conseguiram imaginar e reproduzir figuras interessantes: insectos, sinais de trânsito, arbustos, etc.

No outro vídeo apresentado foi possível observar imagens incompletas de edifícios que se completavam com a ajuda de um espelho.

Os alunos interiorizaram a mensagem do vídeo uma vez que mostraram facilidade em reconhecer simetrias nas fotografias de monumentos pertencentes ao património da nossa região que lhes foram apresentadas e onde, com a ajuda de um espelho, tinham que verificar se, a partir de uma parte da figura, conseguiam obter a figura global.

Outra das actividades propostas consistia em verificar e marcar, com a ajuda do espelho, o número de eixos nas seguintes figuras geométricas: triângulo isósceles, triângulo equilátero, rectângulo, quadrado, e pentágono e hexágono regulares (fig.2).

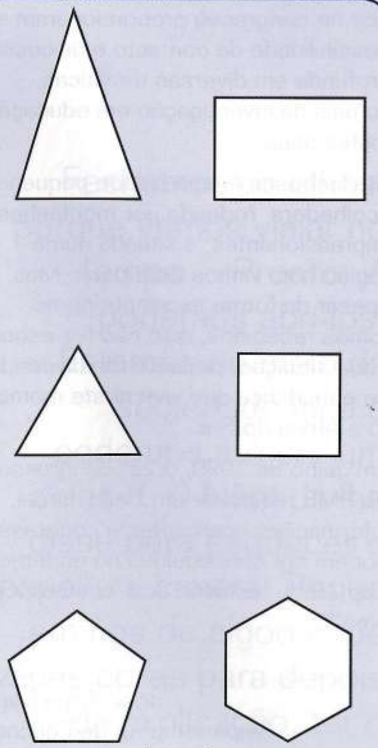


figura 2

Foi fácil determinar todos os eixos de simetria do triângulo isósceles, do rectângulo e do quadrado, onde todos acertaram. Outro tanto não aconteceu com o triângulo equilátero, relativamente ao qual algumas crianças apenas consideraram ter um eixo de simetria. Também, em relação ao pentágono regular, as opiniões não foram concordantes e nenhuma conseguiu identificar os cinco eixos de simetria. Em relação ao hexágono regular continuou a não haver concordância nos resultados e houve apenas nove alunos que identificaram todos os seus eixos.

A actividade a que demos o nome de "Reconstrução de objectos", apelava às capacidades visual, lógica e de aplicação. Foram apresentados seis rectângulos, cada um dos quais com um eixo de simetria marcado na vertical,onde apareciam figuras do lado direito e esquerdo do eixo que não eram simétricas relativamente ao mesmo. Contudo, era possível, recortando essas figuras e deslocando-as, produzir novas figuras, essas sim, simétricas em relação aos eixos (fig.3).

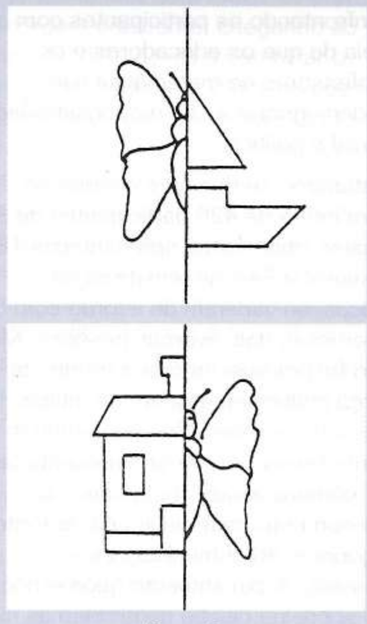


figura 3

Por recorte e recomposição era possível reconstituir uma casa, uma borboleta, etc.

Quando os alunos visualizaram o primeiro vídeo ficou em aberto uma questão - São todas as letras simétricas? Ao tentar encontrar a resposta para esse problema foram apresentadas as letras do alfabeto maiúsculo (fig 4):

A B C D E F
G H I J K L M
N O P Q R S
T U W Y Z

figura 4

Com a ajuda do espelho, os alunos verificaram a simetria. As letras que ofereceram às crianças algumas dificuldades no que se relaciona com os seus eixos de simetria foram o **O**, em que nove crianças contaram um número superabundante de eixos de simetria, pois imaginaram-no circular e era oval, e o **B** em que duas crianças contaram um eixo de simetria quando a figura lhes sugeria a metade superior mais pequena que a inferior. Num caso e noutro a percepção da criança sobrepôs-se ao observável.

A actividade, a que demos o nome de "Azulejos", fazia apelo às capacidades visual, verbal, gráfica e de aplicação. O objectivo pretendido era sensibilizar para a estética dos azulejos como forma de Arte. Através de algumas ilustrações de azulejos e observação de azulejos verdadeiros, os alunos analisaram a forma, o desenho e as cores. Chamou-se a atenção para as cores dos azulejos dos séc. XVII e XVIII.

Foram entregues, aos alunos, algumas folhas em branco e outras onde estavam desenhados quadrados com 10 cm de lado. Foi-lhes proposto recortar um quadrado, dobrá-lo ao meio, depois na vertical e em seguida na diagonal. Nesta dobragem fizeram recortes livres e abriram. Com o molde obtido fizeram, por meio de contorno, uma composição numa das folhas em branco, repetindo o motivo quatro vezes, de modo que se gerassem novas simetrias na vertical e na horizontal. Os azulejos obtidos foram depois pintados.

Por fim conjecturaram sobre figuras simétricas. Entregaram-se aos alunos duas folhas divididas em quatro partes iguais por meio de um eixo vertical e outro horizontal. Na parte superior esquerda havia desenhada uma figura não convexa com seis lados, em forma de **L**. Propôs-se que desenhassem as simétricas da figura dada nas restantes três partes, atendendo aos eixos e que pintassem o interior das figuras obtidas.

Numa segunda folha, dobrada de igual modo, picotaram ou recortaram a gravura pela fronteira destacando o interior. Desdobrando esta segunda folha e sobrepondo-a anterior verificaram se as gravuras coincidiam com as pintadas.

Um dos objectivos destas actividades foi despertar as crianças para o sentido estético presente na simetria. Também se apelou para o despertar nas crianças do gosto e respeito pelo património cultural e artístico português, sobretudo no que diz respeito à arte da azulejaria.

A maioria das crianças conseguiu conjecturar correctamente as imagens de uma dada figura por aplicação de simetrias axiais com eixos horizontais, verticais ou por composição das mesmas simetrias.

Maria Adelaide Gomes Peixoto
Professora do 1º Ciclo do Ensino Básico

Em Julho passado, dois importantes congressos de educação matemática na África do Sul...

De repente, em Julho passado, dois congressos de educação matematica na Africa do Sul tornaram-se muito importantes na maneira como encaro os problemas do ensino da matemática.

O Encontro Anual da Association for Mathematics Education in South Africa teve lugar na University of North em Pietersburg, uma pequena cidade do norte do país. Cerca de 6 centenas de professores participaram com uma alegria e entusiasmo contagiante em sessões práticas e comunicações num ambiente de trabalho inacreditavelmente sereno. Numa das tardes do congresso foi possível fazer uma incursão à Africa do Sul profunda - como dizia uma das colegas professoras com quem viajei - numa visita inédita à Rain Queen e um contacto com uma cultura riquíssima que é fonte permanente de aprendizagem.

Na semana seguinte, uma descida desde Pietersburg até ao sul do país à cidade de Stellenbosch, perto de Cape Town, em cuja universidade decorreu o 22º congresso do PME (Psychology of Mathematics Education). Aqui foi ainda mais visível a natureza dos problemas com que este país se debate e o reflexo e as formas que esses problemas adquirem no campo da educação. Recentemente saídos oficialmente do apartheid, os sul-africanos têm agora entre mãos problemas muitíssimo complexos de integração e de organização social e económica, nomeadamente no campo da educação. Foi neste ambiente que, sob o tema Diversidade e Mudança na Educação Matemática, as intervenções de Michael Apple, de Cyril Julie, de Steve Lerman e de Jill Adler assumiram uma dimensão política muito forte confrontando os participantes com a ideia de que os educadores e os professores de matemática não podem ignorar a sua responsabilidade social e política.

Naturalmente que num congresso com cerca de 420 participantes de 37 países, onde foram apresentadas 185 comunicações, as temáticas de discussão variaram de acordo com os interesses das diversas pessoas. Mas não foi possível ignorar a tremenda força política emergente de muitas das intervenções. Pode ser interessante referir que foram apresentadas 61 comunicações no domínio do pensamento matemático na vertente algébrica, 46 comunicações no domínio do pensamento geométrico, 30 sobre resolução de problemas, 57 sobre formação de professores e cerca de duas dezenas em cada uma de diversas áreas tais como factores afectivos, avaliação, concepções de alunos e professores, uso da tecnologia, epistemologia, linguagem, modelação, métodos de demonstração, etc.

A par destas actividades decorreram ainda três Forums de Investigação sobre os seguintes temas: Matemática dentro e fora da escola, Aprendizagem através da resolução de problemas e Aprender e ensinar Análise de dados. Os 10 Grupos de Trabalho e os 4 Grupos de Discussão organizados no congresso proporcionaram a possibilidade de contacto e discussão profunda em diversas temáticas actuais da investigação em educação matemática.

Stellenbosch é uma cidade pequena e acolhedora, rodeada por montanhas impressionantes, e situada numa região com vinhos deliciosos. Mas apesar da forma excelente como fomos recebidos, isso não fez esquecer a situação, de facto, de diversidade e mudança que vive neste momento a Africa do Sul.

Em Julho de 1999, o 23º congresso do PME realiza-se em Haifa, Israel. Informações acerca deste congresso podem ser conseguidas no endereço http://edu.technion.ac.il/conference/pme23

João Filipe Matos
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Os *khipus* como mensageiros do sistema de numeração da sociedade Inca

Joaquim José Silva Rocha

Fechemos os olhos, porque vamos viajar no tempo... Pronto, já podemos abri-los! Estamos no meio da sociedade Inca e podemos até ser um deles. (...) Não! Já lhe disse para esquecer o papel e a caneta! Pegue em fios de algodão de várias cores para depois da explicação, ter o prazer de fazer um *khipu*.

O que é o *khipu* e qual o seu "habitat"

Os *khipus* são mensageiros do sistema de numeração da sociedade Inca. Com esta frase curta e pouco explícita apresento-vos um artefacto que constitui uma obra que tem tanto de original como de perspicaz. Mergulhemos então nesta frase chave, começando por procurar o significado de sistema de numeração. Comecemos com o que hoje usamos que, parecendo-nos muito lógico e simples, demorou milénios a criar-se.

O nosso sistema é posicional de base 10 — só usa dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e joga com estes símbolos em ciclos: começa por apresentá-los em ordem crescente, ao atingir o último (o nove) combina o segundo (o um) com todos os outros por ordem crescente, chegando ao último (0 19), passa a combinar o terceiro (o dois) com todos os outros, e assim sucessivamente; atingindo o noventa e nove, passa a combinar o segundo com duas "listas", em que a mais à direita vai-se desenvolvendo até atingir o nove (9), em seguida a "lista" do meio passa de zero para um, e a mais às direita começa tudo de novo até alcançar o nove e na "lista" do meio um passa a dois, etc. O processo vai-se repetindo indefinidamente.

Um outro exemplo é a numeração romana usada em Portugal durante muito tempo. Os símbolos que usa são: I, V, X, L, C, D, M (significando: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000) jogando com as operações adição e subtracção para os combinar, por exemplo:

- a adição: à direita de um símbolo não se podem colocar mais do que três símbolos repetidos de valor inferior ao seu (XIII = 10+1+1+1+1);
- a subtracção: à esquerda de um símbolo não se pode colocar mais do que um símbolo de valor inferior ao seu (XC = 100-10).

Assim, não devemos escrever XXC = 100-10-10, mas LXXX = 50+10+10+ +10. E agora um exemplo em que ambas as operações são usadas: MCMLXXXIV=1000+(1000-100)+(50+10+10+10)+(5-1). Além destas operações usa-se, neste sistema, a multiplicação por mil: 30000 escreve-se $\overline{\text{XXX}}$.

Depois destes dois exemplos podemos fazer um rascunho da definição de sistema de numeração: trata-se de um conjunto de símbolos e combinações destes que permitem fazer a contabilidade no dia-a-dia de uma sociedade; contabilidade é aqui dita, no sentido de podermos contar e registar para guardarmos e transmitirmos.

Dada esta definição de sistema de numeração, podemos ver o *khipu* como folha de registo, o balanço que deixa transparecer um sistema de numeração — apesar dos Incas não terem escrita. É neste sentido que se pode dizer que os *khipus* são mensageiros que nos dão a conhecer o sistema de numeração da sociedade Inca.

Resta descrever, agora, o seu "habitat". Como já foi dito é uma herança do povo Inca.

A sociedade Inca tinha uma cultura complexa que englobava três a cinco milhões de pessoas que viveram por volta de mil e quinhentos DC. A região que habitaram é hoje o Perú, partes do Equador, Bolívia, Chile e Argentina. Dada a extensão e a densidade populacional, subentende-se a necessidade de uma organização e rigor de que os *khipus* são exemplo.

Vamos estudar o *khipu*

Fechemos os olhos, porque vamos viajar no tempo... Pronto, já podemos abri-los! Estamos no meio da sociedade Inca e podemos até ser um deles. Suponhamos que, era habitual e exigido pelo nosso chefe que o informássemos da quantidade de batatas consumidas pelas famílias do nosso grupo. Não! Já lhe disse para esquecer o papel e a caneta! Pegue em fios de algodão de várias cores para depois da explicação seguinte, ter o prazer de fazer um *khipu*.

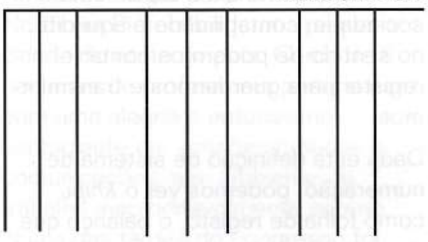
Para analisarmos e apreendermos o que é o *khipu*, começamos por considerar este quadro:

Família A			Família B			Família C		
H	M	F	H	M	F	H	M	F

H: Homens; M: Mulheres; F: Filhos

Agora, com os fios que tem amarre-os num fio mais grosso, como ilustra a figura 1.

corda principal



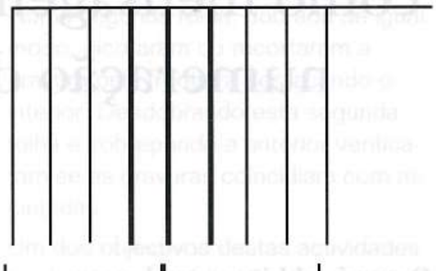
fios pendentes

figura 1

Repare que os fios foram postos em três grupos — três famílias — em que cada grupo é composto por três fios — homem, mulher e filhos. Neste caso basta-nos uma cor, uma vez que os grupos distinguem-se pelos espaços que os separam. No entanto, poderíamos atribuir uma cor por grupo, representada, na figura 2, por espessuras diferentes.

Estas duas configurações permitem-nos comparar o consumo de batatas entre grupos, com facilidade. Podemos ainda fazer de outra maneira: uma cor por cada elemento da família (fig. 3).

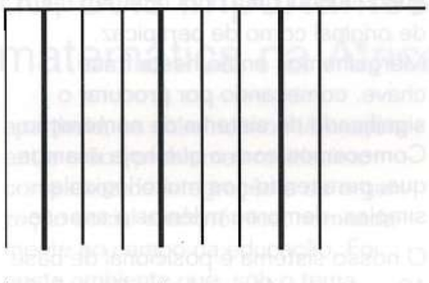
corda principal



Família A Família B Família C

figura 2

corda principal



Família A Família B Família C

Figura 3

Ao repetir-se uma cor sabemos que se trata de um novo grupo. Além dos grupos se distinguirem facilmente é-nos possível comparar, por exemplo, o consumo entre os homens de cada família.

Os nós

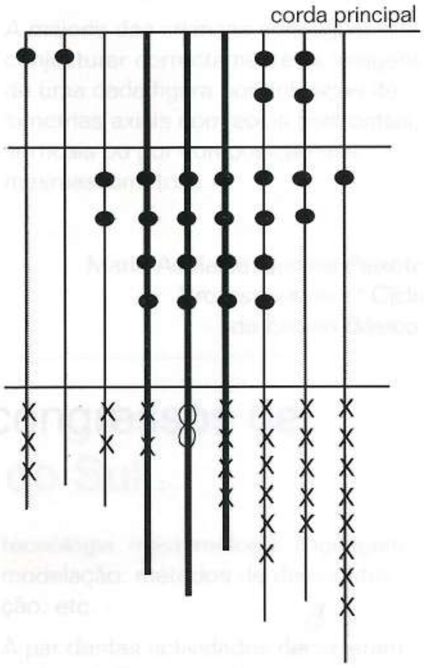
Depois disto, o leitor deve ter uma pergunta a fazer. Pois, muito bem, mas como é que eu sei quantas batatas consumiu cada família? Calma! Já lá vamos! Vamos analisar primeiro este exemplo:

Família A			Família B			Família C		
H	M	F	H	M	F	H	M	F
1	1	0	0	0	0	2	2	0
0	0	2	4	4	4	H	M	F
3	0	2	2	1	4	6	5	8

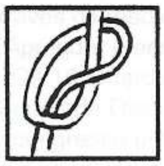
Este quadro lê-se: o homem da família A, consumiu 103 unidades, a mulher 100, ...

O *khipu*[1] correspondente seria:

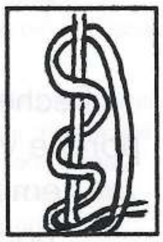
corda principal



● nó singular:



X nó longo: cada X é uma volta no nó longo



8 nó figura de oito:

figura 4

Olhando para a figura 4 podemos concluir que um *khipu* está dividido em três partes (note linhas horizontais): a primeira a das centenas, a segunda a das dezenas e a terceira das unidades, a contar desde o topo. Os nós são usados para representar valores em cada uma destas posições: o nó singular, o nó longo e nó figura-de-oito. O nó figura-de-oito é usado, porque as unidades, tal como se vêem na figura, são marcadas por um nó longo que tem tantas voltas quantas as unidades. Ora, se se trata de um número que tem só uma unidade, o nó longo teria apenas uma volta e confundir-se-ia com o nó singular. Para evitar isto, foi criado o nó figura-de-oito, que representa uma unidade.

Zero, é o símbolo escolhido para significar o "nada". No nosso sistema posicional de base dez, ele tem muita importância, basta ver três exemplos: 32, 302, 3002. O zero nos *khipus* pode ser visto de várias maneiras e com interpretações diferentes:

- se tivermos em conta, as três partes em que o *khipu* está dividido, quando o número pertencente a uma delas, num dos fios é zero, nota-se pela ausência de nós. É o caso dos dois primeiros fios da figura anterior; o primeiro não tem nós na parte do meio e o segundo na do meio e na última.
- um fio sem nós significa que o membro da família em questão, não consumiu batatas.
- a ausência de um fio, o relativo aos filhos, por exemplo, significa que a família não tinha filhos.

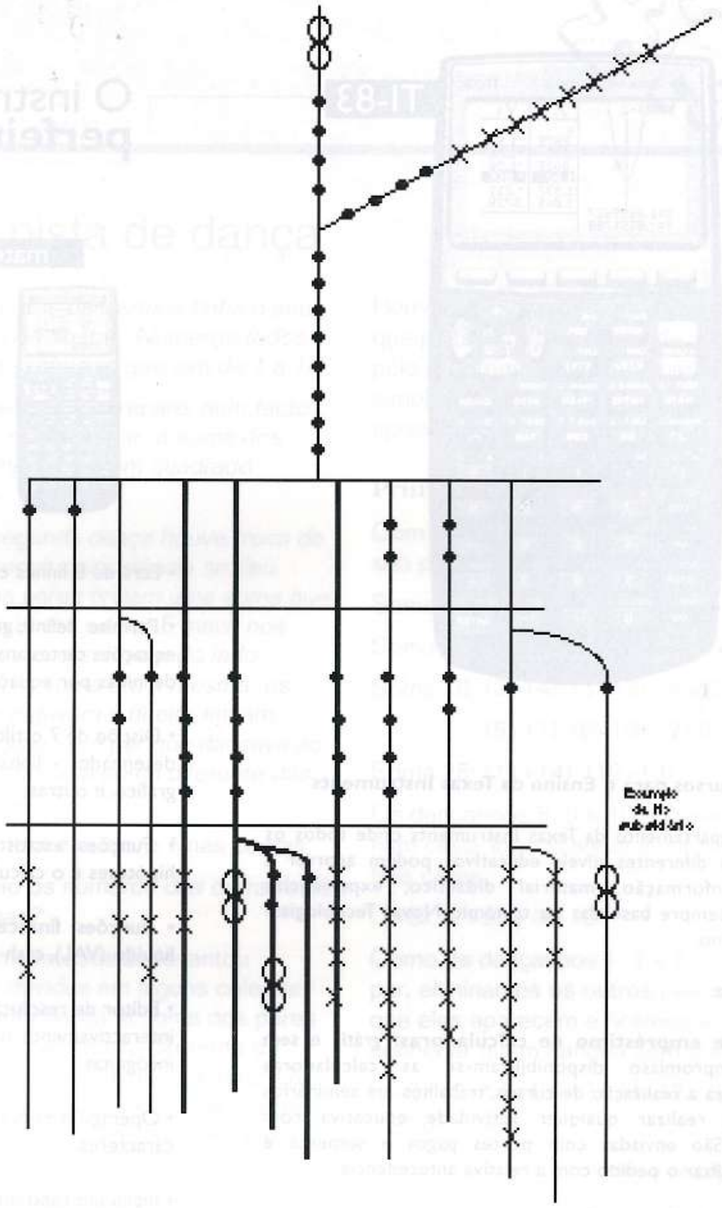


figura 5

Mais alguns fios

Se o leitor está fascinado com o que até aqui foi dito, então está, desde já, convidado a continuar esta aventura pelo mundo da organização com coisas tão humildes como fios de algodão. Vamos supor que para além de querermos registar o número de batatas consumidas, pretendíamos informar o chefe das batatas consumidas pelos convidados de um certo membro da família.

No *khipu* da figura 5, é possível ver que os filhos da família A, quando já tinham consumido vinte e duas unidades de batata, convidaram uma pessoa que consumiu treze. A mulher da família B, depois de ter consumido uma unidade, convidou duas pessoas que consumiram: uma, vinte e uma, e outra, dez unidades. Por fim, as crianças da família C deram a consumir três unidades, quando já tinham consumido oito, e depois convidaram outra que se agradou de onze, quando eles já tinham gasto dezoito. Além destes, os Incas ainda usavam mais dois fios, que funcionavam como dois somatórios: um para os totais dos pendentes (fio de topo) e outro para os dos subsidiários (ver fig. 5).

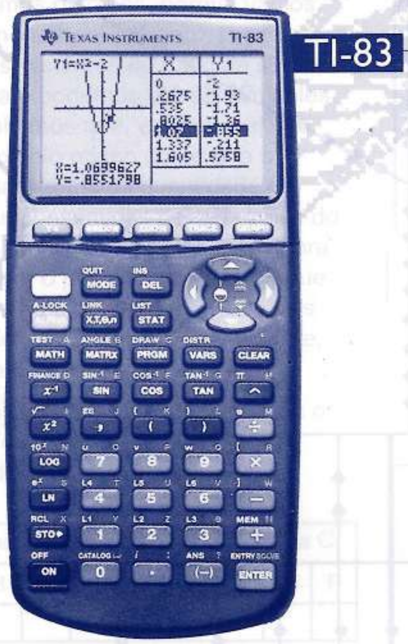
Várias questões se podem agora colocar: como liam os Incas os totais dos *khipus*? Ou como conseguiam subtotais? Será que conseguimos ver como eles somavam através da forma como organizavam os *khipus*? Isto será assunto para pensar e escrever depois, mais tarde…

Referências

Asher, M. (1991), *Etnomathematics a Multicultural View of Mathematical Ideias*. Pacific Grove. Califórnia: Brooks/Cole Publishing Company

Joaquim José Rocha
Esc. Leonardo Coimbra, Porto

Matemática mais Viva



O instrumento perfeito

para o estudo da

matemática

A TI-83 trabalha lado a lado com a TI-82

- Ecrã de 8 linhas com 16 caracteres por linha.
- Permite definir, guardar e construir o gráfico de 10 funções definidas por equações cartesianas, 6 funções definidas por equações paramétricas, 6 funções definidas por equações polares e 3 sucessões definidas recursivamente.
- Dispõe de 7 estilos de gráficos para melhor distinguir, os diferentes gráficos desenhados - linha contínua grossa, sombrear a parte acima ou abaixo do gráfico, e outras.
- Funções estatísticas avançadas, incluindo testes de hipóteses e o cálculo de intervalos de confiança.
- Funções financeiras, incluindo o valor actualizado líquido (VAL), cash flows e amortização.
- Editor de resolução de equações que permite resolver interactivamente uma equação em relação a diferentes incógnitas.

- Operações com números reais e complexos, listas, matrizes e sequências de caracteres.
- Inclui um cabo que permite partilhar informação com outra T1-83 e de uma T1-82 para uma T1-83.
- Funciona com o Sistema de Laboratório Baseado na Calculadora™ (CBL™) e com o detector ultra sónico de movimento™ (CBR™) Sistema para a análise de dados reais.
- Disponível, como opção em separado, o T1 - GRAPH LINK™.

Centro de Recursos para o Ensino da Texas Instruments

O CRE é o Departamento da Texas Instruments onde todos os professores dos diferentes níveis educativos podem acorrer à procura de informação, material didáctico, experiências pedagógicas,... sempre baseadas no trinómio Novas Tecnologias-Matemática-Ensino.

OCRE dispõe de:

Programa de empréstimo de calculadoras: grátis e sem nenhum compromisso disponibilizam-se as calculadoras necessárias para a realização de cursos, trabalhos em seminários e, em geral, realizar qualquer actividade educativa com calculadoras. São enviadas com portes pagos e somente é necessário realizar o pedido com a relativa antecedência.

Assistência de formação: proporciona-se assistência na formação de professores na aprendizagem e utilização de novas tecnologias...

Perante qualquer dúvida ou explicação estamos à sua completa disposição em:

TEXAS INSTRUMENTS

Programa Educacional,
Rua Brito Capelo, 822 1° Frt. 4450 Matosinhos
Tel: 02 938 64 76 Fax: 02 939 99 99
E.mail:xøtomasm@ti.com
Para mais esclarecimentos e encomenda de bibliografia de apoio ligue com linha ajuda Texas Instruments: 0505 32 96 27

CALCULADORA GRÁFICA - T1-83

A pensar nos novos programas do Ensino Secundário

Calculadora gráfica polivalente concebida para o 10.°, 11.°, 12.° Anos e Ensino Superior

10.° Ano	11.° Ano	12.° Ano	Universidade
- Estatística	- Funções	- Probabilidades	- Estatística
- Funções	- Cálculo	- Funções	- Probabilidades
- Cálculo	- Cálculo Financeiro	- Cálculo	- Funções
- Cálculo Financeiro		- Cálculo Financeiro	- Matemática Financeira
			- Cálculo

TEXAS INSTRUMENTS

http://www.ti.com/calc

O problema deste número

Na pista de dança

E foram batidos todos os recordes! Recebemos 21 respostas ao problema proposto no número anterior da revista. E vieram de todo o lado:

Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios e Francisco Estorninho (Lisboa), Ana Cristina Silva (Almeirim), Ana Luisa Albuquerque (Alcobaça), Ana Luisa Correia (via Internet), António Amaral (via Internet), António Moura (Cascais), António Ruiz Lozano (Lisboa), Armando Fernandes (Vila das Aves), Carlos Roque (Coimbra), Eduarda Pereira (via fax), Graça Oliveira (Feira), Heitor Surrador (via Internet), Isabel Viana (Porto), João António Alves (Chaves), Mário Lima (via Internet), Paulo Coelho (Câmara de Lobos), Paulo Correia (Portimão), Sandra Pires (Oliveira de Azeméis), Sérgio Macias Marques (Lisboa) e Vidal Minga (Carcavelos).

Era este o problema "Na pista de dança":

Outro dia fui a um clube de dança. Estavam lá sete pares a treinar para os próximos campeonatos de tango. Cada um dos dançarinos tinha o seu número nas costas. Números todos diferentes, claro, e que iam de 1 a 14.

Na primeira dança reparei num facto curioso: em cada par, a soma dos dois números era um quadrado perfeito.

Para a segunda dança houve troca de pares e nova coincidência se deu. Todos os pares tinham uma soma que era um número primo. E mais: nos três pares que estavam do lado esquerdo a soma era a mesma, os três que estavam à direita tinham somas iguais, e o par que dançava ao centro tinha uma soma diferente das anteriores.

A Isabel tem o número 1 nas costas.

Quais são os números das outras seis dançarinas?

Uma primeira questão levantou algumas dúvidas em alguns colegas: na segunda dança, a soma dos pares do lado esquerdo era diferente da soma dos que estavam à direita? Ou podiam ser iguais? Bem, o problema foi pensado, e é mais interessante, para somas diferentes.

Houve vários processos de resolução, que passaram pela teoria de grafos e pelo programa Modellus, mas a mais simples (e maioritária) foi a que se apresenta.

Primeira dança

Com a soma a ser quadrado perfeito são possíveis estes pares:

Soma 4: (1+3)

Soma 9: (1+8), (2+7), (3+6), (4+5)

Soma 16: (2+14), (3+13), (4+12), (5+11), (6+10), (7+9)

Soma 25: (11+14), (12+13)

Os dançarinos 8, 9 e 10 só aparecem num caso, logo ficamos a conhecer três pares:

(1+8), (7+9) e (6+10)

Como os dançarinos 1, 7 e 6 já têm par, eliminamos os outros casos em que eles aparecem e ficamos a conhecer quem dançou com quem:

(1+8), (2+14), (3+13), (4+12), (5+11), (6+10), (7+9).

(continua na página 44)

Problema proposto

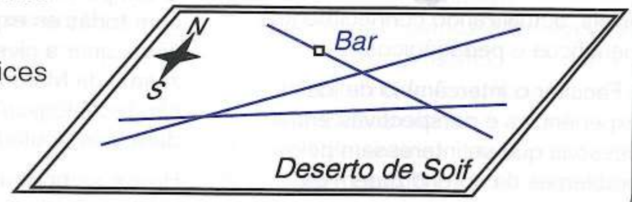
Os bares do deserto de Soif

O deserto de Soif é perfeitamente plano e é atravessado por três estradas em linha recta que se cruzam em pontos diferentes.

Existem apenas quatro bares onde os viajantes podem matar a sede e reabastecer os automóveis. Claro que em cada estrada há pelo menos um bar.

Por coincidência, estes quatro bares estão nos vértices de um quadrado perfeito.

Quantas soluções existem? Como determiná-las?



(Respostas até 5 de Janeiro de 1999)

MINHOMAT 98: Uma experiência única em Arcos de Valdevez

Homem é, naturalmente, um ser livre e sociável.

Livre, porque pode optar pela utilização de vários meios; porque pode, de entre vários caminhos, escolher o que o leva a atingir uma certa finalidade ou a alcançar um determinado objectivo.

Sociável, porque vive em sociedadfe e só da harmonização entre o que é próprio e o que é comum, entre personalidade e comunidade, é possível a existência organizada, ou seja, a convivência entre pessoas.

Por isso, houve sempre normas ou regras sociais para regular essa mesma convivência.

E, assim, não necessitando fugir à regra de todos os anos e ao longo de todo o país, nas diversas regiões; realizou-se nos dias 20 e 21 de Abril, na Escola Secundária de Arcos de Valdevez, o Encontro Regional de Professores de Matemática, designado Minhomat98.

A iniciativa teve a cargo de três jovens professoras, Cristina Maria Alves Garcia, Elvira Maria Azevedo Mendes, e Isabel Maria Lopes Pinheiro, elementos do Núcleo Regional de Viana de Castelo, fundado em 4 de Junho de 1997, com sede na referida escola.

Com efeito, se as normas ou regras referidas num parágrafo anterior, servem para nos dar a medida dos princípios (morais, éticos, jurídicos e de desenvolvimento da aprendizagem) pelos quais uma comunidade organizada se rege, então o conjunto de princípios da realização do evento não se afastaram de:

- Aprofundar o desenvolvimento do ensino da Matemática a todos os níveis, actualizando conhecimentos científicos e pedagógicos;
- Facultar o intercâmbio de ideias, experiências e perspectivas entre pessoas que se interessam pelos problemas da aprendizagem da Mastemática;

- Promover a participação activa dos professores de Matemática de todos os graus de ensino na discussão e implementação de novas práticas pedagógicas;
- Fomentar o interesse e participação em projectos de investigação e inovação pedagógica;
- Descentralizar as acções pedagógicas;
- Promover o concelho e a região do Minho

Quanto a nós, foi uma experiência bem sucedida devido essencialmente ao empenho de todos os participantes e intervenientes. A curiosidade foi muito grande. Estava a decorrer pela primeira vez, na Escola Secundária de Arcos de Valdevez, e desde há muitos anos, também pela primeira vez no distrito de Viana do Castelo e de Braga.

O tempo era escasso para contactar com todas as experiências e inovações, quer a nível do ensino-aprendizagem da Matemática, quer na inovação tecnológica/científica — calculadoras, computadores e internet.

Houve sempre um grande espírito de equipa e a equipa organizadora do evento mostrou-se incansável durante estes dias, dando força e apoio desde o início até ao final.

Reconhecemos que existiram condições favoráveis à concretização do Minhomat 98, nomeadamente no que se refere à concepção das sessões de trabalho, debates, conferências e exposições, com a participação de 160 professores de Matemática.

Para finalizar, gostaríamos aqui de partilhar algumas ideias de reflexão:

Acreditamos no trabalho efectivo de todos os professores dedicados e empenhados em levar a educação a acompanhar o ritmo acelerado de desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

Para que este acompanhamento/desenvolvimento se concretize é necessário que os professores de Matemática tenham espírito de grupo e realizem experiências conjuntas na sua disciplina em ligação com as outras disciplinas.

Alguma vez professores e alunos sentiram necessidade de mais tempo para continuar.

A Comissão Organizadora

Mathematics Education and Society: a Educação Matemática com os pés na Terra dos seres humanos!?

Em Nottingham (terra do Robin dos Bosques mas também do escritor D. H. Lawrence) decorreu entre o dia 6 e o dia 11 de Setembro último uma conferência internacional (a primeira) subordinada ao tema Educação Matemática e Sociedade. Não sei se o local (físico e histórico) influenciou ou inspirou esta conferência mas o certo é que as questões em debate, as pessoas envolvidas e o ambiente que todos criámos (organizadores e participantes) se revelaram algo de especial e de quase raro. Alguns dados "normais" temperados com uns quantos pormenores menos "objectivos" são a minha tentativa de vos transmitir um pouco do espírito que lá se viveu.

Na apresentação dos objectivos desta conferência podíamos ler:

"Recentemente a educação tem-se tornado em todo o mundo mais abertamente politizada. Em muitos casos, isto tem sido parte de uma recuperação conservadora fazendo sistematicamente recuar reformas ganhas há décadas, noutros casos é uma forma de colonialismo com democracias em desenvolvimento voltando-se para as academias ocidentais à procura de respostas para os complexos problemas educativos. A educação matemática pode ser vista como fulcral nesta política de educação. Uma política que em muitos casos está a conduzir a discriminações e injustiças sociais cada vez maiores (...) A conferência tem como objectivo juntar educadores matemáticos de todo o mundo para proporcionar um forum de debate e oferecer uma plataforma para a construção de actividades colaborativas futuras."

Na organização da conferência cada dia foi dedicado a um tema distinto: (i) Justiça social e educação matemática, (ii) A política da educação matemática, (iii) A sociologia da educação matemática, (iv) Os aspectos sociais e culturais da aprendizagem da matemática.

Imaginem-se a viver (dormir, comer, passear, trabalhar e até passar pelo Pub ao fim do dia) numa Universidade inglesa daquelas que nós vemos nos filmes: espaços verdes que nunca mais acabam, os departamentos em edifícios antigos à dimensão humana, com um grupo de pessoas de várias partes do mundo (Brasil, África do Sul, Dinamarca, Colômbia, Holanda, Austrália, Inglaterra, Portugal, USA, Líbano, Hong-Kong) interessadas em pensar, questionar-se e aprender com outros.

A face mais visível da organização desta conferência era corporizada por dois professores ingleses da referida Universidade — Peter Gates (conhecido de muitos de nós e que até já participou em ProfMats) e Tony Cotton — mas o seu "corpo/mente" era prolongado num comité de mais alguns ingleses (em que se incluiam explicitamente tanto os que se dedicaram aos aspectos científicos como, por exemplo, os que nos ajudaram a manter os quartos confortáveis). Todo este grupo conseguiu manter uma organização suficientemente estruturada mas simultaneamente aberta a reajustes que eram propostos, debatidos e aceites por todos. Criou desta forma um bem estar e uma base de trabalho muito propícia e coerente com o tema em debate. Outro aspecto inovador foi o facto de se ter tido acesso a todos os textos das comunicações (via Internet) com bastante antecedência, tendo sido fomentado (no dito e na prática das sessões) que as pessoas os lessem previamente.

Participaram perto de 60 pessoas (dos quais 9 portugueses) e foram apresentadas 9 sessões plenárias, 38 comunicações e dois simpósios. No entanto, estes números dizem pouco e talvez seja mais significativo falar da sua organização e temas.

Começámos a trabalhar de uma forma mais formal ao entardecer do primeiro dia motivados por Ubiratan D'Ambrósio (convidado a "trazer-nos" Paulo Freire) que nos propôs algumas ideias para reflexão durante a sua plenária intitulada "*Literacy, Matheracy and Technocracy, the new trivium for the era of technology*".

Em cada um dos restantes dias começávamos a manhã em plenária provocados por algumas ideias fortes de dois convidados que serviam de ponto de partida para os grupos de discussão (que se mantinham com as mesmas pessoas ao longo dos dias). De novo, em plenária, os dois convidados respondiam a algumas das questões levantadas nos grupos e o debate abria-se a todos. Os conferencistas e títulos destas plenárias foram: (i) Leone Burton (Pensando acerca do Pensamento Matemático - Heterogeneidade e as suas Implicações de Justiça Social) e Jill Adler (Distribuição de Recursos = Equidade?); (ii) Ole Skovsmose (Aporisma e o Problema da Democracia na Educação Matemática) e Marilyn Frankenstein (*O Critical Mathematics Educators Group* (CMEG): Tentando Ligar o Trabalho Anti-capitalista com a Educação Matemática); (iii) Sal Restivo (Matemática, Mente e Sociedade: Uma Teoria Anarquista de Investigação e a Educação) e Paul

Dowling (Porquê a Sociologia da Educação Matemática?); (iv) Steve Lerman & Anna Tsatsaroni (Porque é que as Crianças Falham e o que é que os Estudos da Educação Matemática Podem Fazer. O Contributo/ Papel da Sociologia) e Alan Bishop (Conflitos Cognitivos e Mudança Social: Conceptualizando as Possibilidades e as Limitações da Educação Matemática).

Nas actividades da tarde (comunicações e Simpósio) a metodologia proposta também privilegiou a discussão tirando o máximo proveito de se ter tido acesso prévio e efectivo aos textos respectivos. Nas comunicações reflectiu-se e debateu-se a partir de trabalhos de investigação (já terminados ou em curso) relativos aos quatro temas da conferência. Os dois Simpósios realizados — Etnomatemática e a Matemática Crítica; Destradicionalizando a Matemática, Metodologia de Investigação e Justiça Social — revelaram-se igualmente momentos fortes de debate de ideias e auto-questionamento.

As refeições e os fins do dia não eram desperdiçados e por isso continuavam-se as discussões, estabeleciam-se contactos e bases

Mathematics Education and Society

de trabalho conjuntas mas também se saboreavam outras valências daquele espaço (o verde, o pub, a música).

Em suma, uma conferência em que nos encontrámos, confrontámos e ajudámos durante uma semana desafiadora, rica e "bonita". E não posso deixar de me lembrar da resposta de Sal Restivo (com o qual concordo plenamente) a um comentário de alguém sobre o que aprendemos nesta semana, *"Learning is a function of intimacy"*. Continuo a achar que é fundamental manter esta ideia presente no nosso dia a dia de professores.

Nota: Informações sobre este congresso, incluindo os textos das conferências, podem ser obtidos via Internet, no seguinte endereço: www.nottingham.ac.uk/csme/meas/meas3.html

P.S. A próxima conferência terá lugar em Fevereiro de 2000 em Portugal... Daremos notícias.

Madalena Pinto dos Santos
Escola Básica 2-3
Paço d' Arcos

O problema deste número (conclusão)

Segunda dança

As somas vão ser números primos e, à partida, as possibilidades são: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23.

A listagem total dos pares possíveis para cada soma é enorme. Para evitar todo o trabalho que daria fazê-la e analisá-la podemos raciocinar da forma que se segue.

A soma de todos os números dos dançarinos é

$1 + 2 + ... + 13 + 14 = 105$

Seja E a soma de cada par do lado esquerdo, C a do par central e D a dos que estão à direita. Então:

$3E + C + 3D = 105$

O número 105 é divisível por 3, logo a soma $3E + C + 3D$ também. Para isso, C tem de ser múltiplo de 3, mas como é primo vem obrigatoriamente $C = 3$.

Então, o par central é (1+2).

Conclui-se ainda que

$3E + 3D = 102$ ou $E + D = 34$.

Dois números primos diferentes a somar 34, só podem ser 11 e 23.

Com soma 11 só há três pares possíveis: (3+8), (4+7) e (5+6).

E com soma 23 temos (9+14), (10+13) e (11+12).

Os pares da segunda dança são (1+2), (3+8), (4+7) e (5+6), (9+14), (10+13) e (11+12).

Quem são as raparigas?

A Isabel tem o nº1. Quem dançou com ela é rapaz: o 2 e o 8. Quem dançou com estes é rapariga: 14 e 3. E assim sucessivamente.

As raparigas tinham os números 1, 3, 5, 7, 10, 12 e 14.

Bom, esperamos que todos tenham a opinião da Sandra Pires: Este é um dos problemas que cativam qualquer pessoa logo após uma primeira leitura.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

Quota de 1998

No ano de 1998 o valor da quota é de 6.500$00 para professores, 4.500$00 para estudantes(só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 7.000$00 para sócios a residir no estrangeiro. **Se ainda não paga** a sua quota por **desconto bancário** pode enviar a declaração de autorização de desconto bancário até 28 de Fevereiro. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando cheque ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Assoc. de Prof. de Matemática - ESE de Lisboa-Edif.P2 -
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos -1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão **Visa, Mastercard** ou **EuroCard**, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐ MasterCard ☐ EuroCard ☐

Validade ______________ o valor de ______________ correspondente a ______________

______________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Ficha de Inscrição/Actualização na Associação de Professores de Matemática

Nome: ______________________________ Sócio Nº ________

Morada: ______________________________

Código Postal: ______________ Distrito: ______________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Data de nascimento: __/__/__ Nº de Contribuinte: ______________

Nº do B.I.: ______________ Arquivo: ______________ Data de Emissão: __/__/__

Ano em que começou a leccionar: ______________ Nível de Ensino: ______________

Categoria Profissional: ______________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:até 2.500$00 - 20%; de 2.501$00 a 5.000$00 - 15%; mais de 5.000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo E-Mail: apm mail.telepac.pt.

Índice