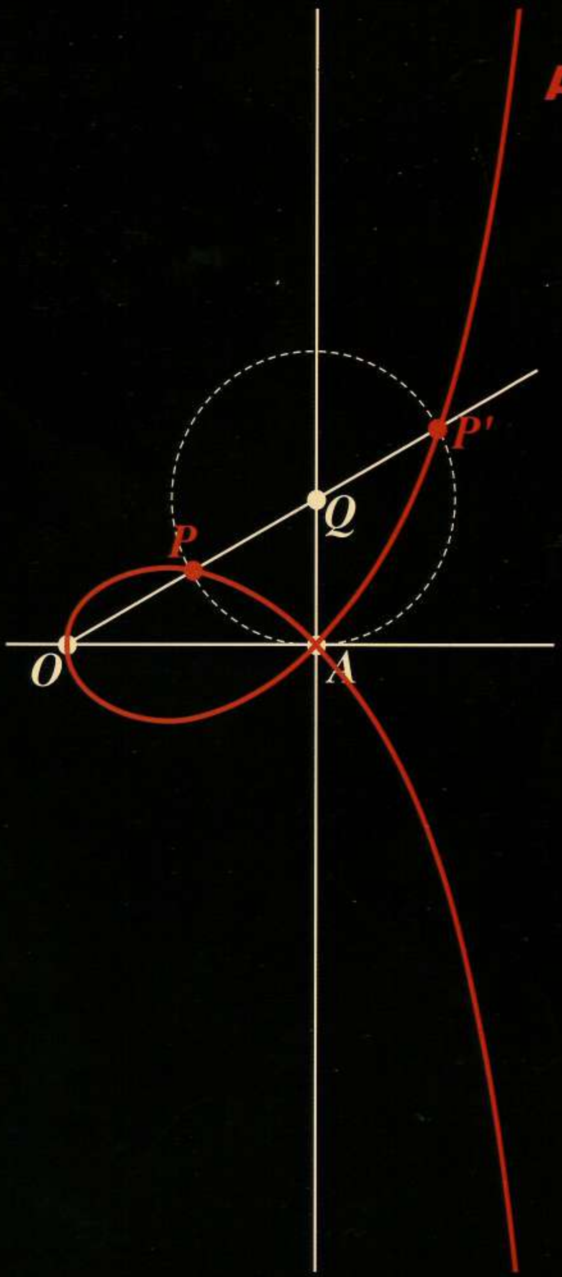
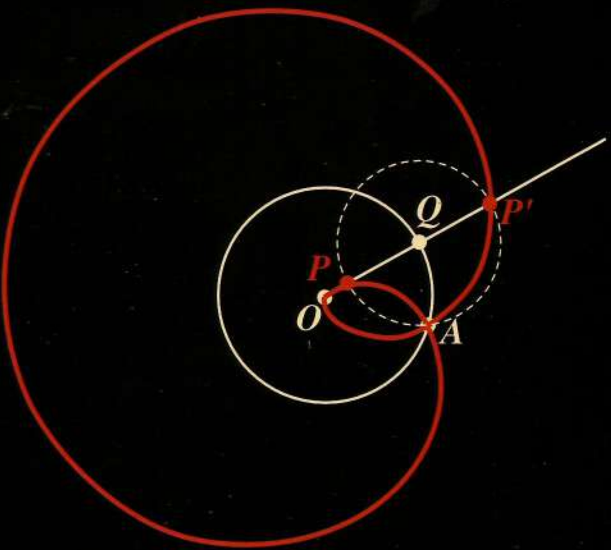
Educação e Matemática

N.º 48

Maio/Junho de 1998



A estrofóide recta



Nefróide de Freeth como estrofóide de uma circunferência

Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

A capa deste número

A estrofóide

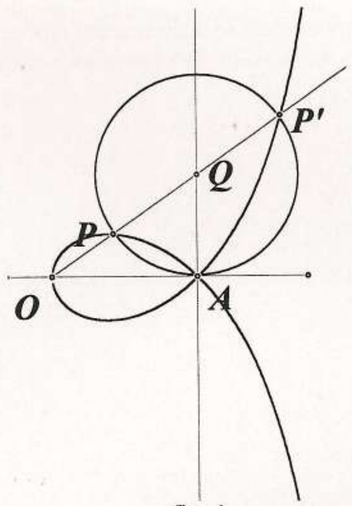


fig. 1

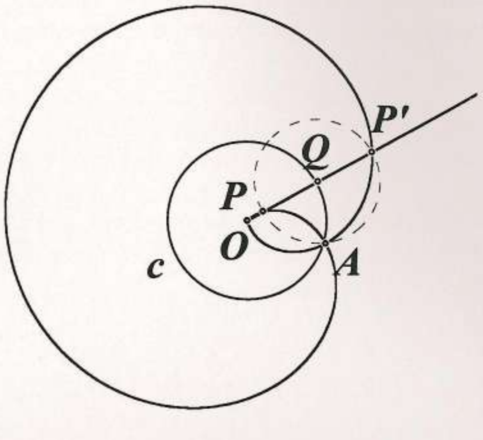


fig. 2

Na fig. 1 pode ver-se o processo de construção da estrofóide recta. Dada uma recta e um ponto exterior O, traça-se a perpendicuar à recta passando por O e constrói-se a intersecção A. O ponto Q é móvel sobre a recta e sobre a semirecta OQ traçam-se os pontos P e P', à mesma distância de Q que o ponto A. A estrofóide recta é o lugar geométrico dos pontos P e P'.

Na fig. 2 está construída a estrofóide relativa à circunferência c e ao seu centro O. A é um ponto sobre a circunferência e o processo de construção é análogo ao anterior. Obtém-se como estrofóide a nefróide de Freeth.

Eduardo Veloso

Alterações na Redacção

O director da revista é eleito pelos membros da Redacção por um período de três anos. Paulo Abrantes tem estado a exercer essa função desde o início de 1994, tendo acedido a prolongar o seu mandato até agora. Estamos-lhe por isso muito gratos, bem como por todo o seu desempenho e contribuição durante estes anos na coordenação dos trabalhos da Redacção. Por dificuldades de diversa natureza, não se conseguiu eleger já um director para a revista. Para ultrapassar a situação criada, a Ana Vieira aceitou ocupar esse cargo a título interino, o que, naturalmente, muito lhe agradecemos.

Entretanto podemos também anunciar que dois novos elementos passaram a integrar a Redacção *da Educação e Matemática*, Conceição Rodrigues e Paula Espinha. Para elas as nossas boas vindas.

Neste número também colaboraram

Adília Ribeiro, Admur Pamplona, Alfredo Dias, Dilma Gomes, Ercílio Mendes, Fernando Nunes, Helena Torres, Isolina Oliveira, Maria Alice Inácio, Pedro Scandiuzzi, Professores de Matemática da ES n° 1 de Loures, Vidal Minga, Wanderleya Costa.

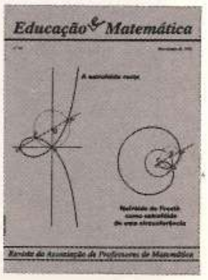
Data de publicação

Este número foi publicado em Junho de 1998.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Nota



nº 48
Maio/Junho
de 1998

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director interino
Ana Vieira

Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Conceição Rodrigues
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Lopes
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia
Paula Espinha
Paulo Abrantes

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Tiragem
4200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Desafiar a diversidade

Isolina Oliveira

Aí está mais um final de ano, para professores e alunos. E mais uma vez tantas interrogações ficam no ar. Experimentaram-se metodologias, construíram-se materiais, pôs-se em prática a interacção social, discutiram-se os porquês, ouviram-se opiniões diferentes, argumentou-se e, no fim, onde estão os resultados? Os alunos ganharam algo? Para além de investigarem e desenvolverem ideias matemáticas, evoluíram como pessoas e a Matemática já não é um "túnel sem saída"? Ou ficou tudo igual? Estariam no mesmo ponto de partida se não me tivessem tido como professor(a)?

Gosto de pensar o período escolar, não como uma passagem, como apenas um tempo em que se preparam os alunos para a vida futura, mas como um tempo e um espaço que fazem parte das suas próprias vidas, integradas já no cenário de uma estrutura complexa.

Naturalmente, o que pensamos sobre a escola, sobre os alunos, sobre a Matemática, como deve ser ensinada e aprendida, condiciona toda a análise e reflexão que possamos fazer num final de ano lectivo. Agimos como veículos de uma dada cultura; os julgamentos e as escolhas que fazemos sobre os aspectos da cultura nos quais os alunos são inseridos, não são independentes das nossas crenças e valores para a educação e, nomeadamente, para a educação matemática.

No nosso imaginário prevalece ainda a imagem do bom professor como sendo exigente e distante, acompanhando os bons alunos porque os outros não "davam para a escola". Hoje, ser um bom professor exige muito mais! Como dizia a Cristina Loureiro na última *Educação e Matemática*, o professor não só tem que gerir os currículos, mas também as aprendizagens que são bem diversas. Que o digam os professores de Matemática que lidam todos os dias com a diversidade de processos de aprendizagem. Numa sala de aula têm alunos motivados, ou não, para trabalhar e aprender; alunos com diferentes idades e ritmos de aprendizagem; com diversos modos de pensamento e de raciocínio, de comunicação e de expressão; conhecimentos anteriores em fases distintas; alunos que pertencem a quadros sócio-culturais e psico-familiares diferentes, com as suas próprias energias psíquicas e físicas.

A motivação é a base da aprendizagem, isto é, o desejo de agir e de aprender depende do sentido que o aluno encontra na aprendizagem, da necessidade em realizar algo, do prazer que sente em fazer, do grau de energia de que dispõe e da imagem de si e dos outros que vai construindo e interiorizando.

A heterogeneidade que está presente nas salas de aula, está também presente na sala dos professores. Ouvimos dizer com frequência que "tudo se tornou mais complicado". Mas a sociedade não é hoje mais complexa do que há uma década? Por que é que a Escola iria escapar a essa complexidade?

Num tempo em que, segundo o filósofo italiano Bodei, se vive a "crise da palavra", e se verifica uma "desertificação das linguagens comuns", a Escola não pode fugir a este signo. Num tempo que corre tão veloz que não deixa tempo para ensinar o passado, para fazer passar a experiência, a Educação tem que assumir outras finalidades.

Que pensar? Que fazer? Continuar a fazer da mesma maneira? Entre a lógica massificadora que conduz muitas vezes ao desânimo e à repetição, e a necessidade de optar pela inovação, não há escolha possível. O desafio de conquistar *alguém* para a Escola, de ajudar os alunos a realizarem experiências educativas que contribuam para a definição de um projecto de vida, é a meta a atingir.

Neste desafio, os professores e os alunos não podem estar sós. Os professores *sentem* que a legitimidade do sistema educativo não passa apenas por eles. Na verdade, a Escola não possui ainda o multiprofissionalismo necessário para fazer frente à diversidade e, principalmente, às dificuldades mais sérias de integração escolar. É, no entanto, da escola que deve partir a procura de outras soluções. É neste território que se encontram os problemas e as energias inovadoras capazes de os resolver. As alternativas curriculares começam a gerar consensos. Contudo, há necessidade de ir avaliando e reflectindo sobre o que vai sendo construído, para, a partir daí, começar a construir outro modelo educativo, outra Escola.

Isolina Oliveira
EB2,3 Damião de Góis, Lisboa

Construir páginas para a Internet

Foto de Adelina Precatado

No dia 23 de Maio, realizou-se, na ESE de Lisboa, um curso sobre a produção de *páginas* da WEB. O curso foi dinamizado pelo professor Mário Baía da ESE de Setúbal, a pedido do Grupo de trabalho da Internet da APM, no âmbito do projecto *Local Virtual APM* e *Forum Pedro Nunes* e era dirigido aos colegas que faziam parte de todos os núcleos e grupos de trabalho da associação.

O objectivo desta realização era que os professores aprendessem a construir as páginas dos seus núcleos e grupos de trabalho para as incluirem no *site* da APM. Participaram 15 professores dos Açores, Évora, Lisboa e Viseu.

Há sempre um certo entusiasmo e satisfação nestes encontros, mesmo que as pessoas presentes não se conheçam bem. Parecem todas bem dispostas, apesar de ser sábado e de lá fora haver sol a lembrar, por exemplo, a possibilidade de um bom passeio. Duas características comuns parecem existir nestes professores: o prazer de aprender um assunto que ainda não dominam e a possibilidade de um convívio que por vezes parece escassear nas escolas.

O Mário tem uma maneira calma de explicar que nos faz crer que o que vamos ouvir tem uma lógica indiscutível. E tem mesmo. Não precisámos de escrever as nossas páginas em código HTML. Usámos o programa *Frontpage do Explorer 4.0* e, a qualquer momento, podíamos avaliar da sua vantagem, visualizando a tradução do nosso trabalho em código. Do que nos livrámos!

Todos os grupos construíram uma folha sob um tema livre onde havia alguma informação. As ligações criadas em algumas palavras (*links*) conduziam-nos a outras informações e estas podiam conduzir-nos a outras, podendo sempre, em cada passo, regressar à página anterior ou à inicial.

Alguns dos trabalhos realizados assumiram um aspecto sóbrio e cuidado, certamente já próximo do que um destes dias poderemos ver nas páginas da Internet. Outros tinham um aspecto mais ligeiro e despreocupado, próprio de uma tarde de sábado. Todos saímos com a sensação de que, apenas com um pouco mais de treino e alguma discussão dentro do grupo, sobre o conteúdo e disposição das páginas, poderíamos avançar, sem receio, para a sua construção. É portanto de esperar que, dentro de algum tempo, se notem resultados deste trabalho nas páginas da APM.

Maria José Bóia
EB 2, 3 Prof. Noronha Feio, Queijas

Desenho de isabel machado

Currículos Alternativos... com um cheirinho a Matemática

Alfredo Dias

A experiência dos Currículos Alternativos tem mostrado algumas potencialidades, não obstante todas as dificuldades e necessidades que são manifestas e reconhecidas por todos. Mas estas não podem ser o motivo que nos leva a desistir.

Escrever sobre Currículos Alternativos nem sempre é fácil, se bem que este meu envolvimento que já dura alguns anos facilite um pouco a tarefa. Tudo se complica quando se pretende pôr o acento tónico numa disciplina mais específica, neste caso a Matemática. Esta tarefa assemelha-se a uma "Missão Impossível" quando a pessoa que escreve tem uma formação em História e ocupa uma fatia importante do seu tempo a estudar e a reflectir sobre problemas do passado.

Partilho contudo a ideia de que a História é algo vivo e não relíquias mumificadas de tempos remotos, que hoje são vistas apenas para satisfazer curiosidades ou dar prazer a uma espécie animal cada vez mais em vias de extinção, o "rato de biblioteca".

Quanto maior é o nosso conhecimento do passado mais longe podemos imaginar e construir o nosso futuro. Porque acredito no futuro e na capacidade que cada um de nós tem de se transformar, acredito nos projectos de Currículo Alternativo, enquanto estratégia facilitadora para que cada jovem não se conforme com um futuro que surge aos seus olhos com contornos mais ou menos pré-determinados.

Porque os Currículos Alternativos têm a ver com a Vida, tenho de ser levado a concluir que a Matemática desempenha um papel importante em todo este processo.

Como é evidente, partilho da ideia que nos dias de hoje está mais ou menos aceite por todos que não pode haver áreas privilegiadas de saber. E se isto é uma verdade generalizada, assume um particular relevo quando pensamos em projectos de Currículo Alternativo que devem usar as áreas "fortes" dos alunos como alavanca para a motivação e a integração numa escola que se habituaram a rejeitar.

Mas, apesar de tudo isto, permitam-me dar um cheirinho particular à Matemática nesta minha reflexão, o q.b. indispensável para que este pequeno artigo seja digerido com o prazer de um bom manjar.

***

Como todos sabemos mas muitos esquecemos, a Matemática está presente nos actos mais simples do nosso quotidiano: o troco que se dá ou recebe numa loja, a explicação que damos a um transeunte perdido, o cálculo que o automobilista faz para saber o consumo do seu carro ou o cheque que preenchemos para adquirir um artigo são exemplos que todos conhecemos.

Neste sentido, não obstante as dificuldades que ainda podemos encontrar nalguns professores em ligar os currículos ao quotidiano, pensamos que lentamente esta está a ser uma das "boas práticas" que se tem generalizado nas aulas de Matemática.

Por outro lado, esta vertente relaciona-se com uma outra que está subjacente ao trabalho de um projecto de Currículo Alternativo, isto é, a tão apregoada interdisciplinaridade que é sempre tão difícil de pôr em marcha.

Sendo o Currículo Alternativo fundamentalmente uma "turma de projecto", reúne uma condição mínima mas preciosa para que esta articulação interdisciplinar se concretize, a saber: duas horas no horário comum de todo o Conselho de Turma para acompanhar o projecto.

As dificuldades têm a ver com hábitos de trabalho individual de muitos anos e um sentimento de posse exacerbado, que se traduz na linguagem de todos os dias: "a minha aula", "a minha Direcção de

Turma", "os meus alunos". Enfim, ou "é tudo nosso" ou tudo isto não passa do insustentável peso de uma ilusão. O reverso da medalha é a responsabilidade que carregamos nos ombros por ter de encontrar uma resposta (se possível rápida e eficaz, tipo super-aspirina) misturada com sentimentos de culpa porque estes nossos desejos teimam em não se concretizar.

Por outro lado, sou muitas vezes confrontado com a dificuldade que os professores de Matemática experimentam em cruzar os seus conteúdos com os de outras disciplinas. Não se pode exigir que todos tenham uma fértil imaginação, mas penso que o que está por detrás desta dificuldade é um pouco mais profundo que isto. Dificuldade em partilhar saberes, dificuldade em nos confrontarmos com as nossas insuficiências e as do grupo, dificuldade em negociarmos objectivos comuns. Em suma, dificuldade em nos relacionarmos.

Uma outra área, mais complexa e difícil de trabalhar, pode ser protagonizada de uma forma particular pelos professores de Matemática. Uma área que diz respeito à socialização dos nossos jovens, às suas competências pessoais e sociais. Uma área que tem a ver com os valores, as atitudes e os comportamentos.

Mas o que é que a Matemática tem a ver com isto?

Como muito bem sublinha Bernard Defrance[1] todos hoje sabemos, na sequência dos estudos desenvolvidos por Jean Piaget e outros psico-pedagogos, que as estruturas mentais usadas nas operações matemáticas são as mesmas que o sujeito utiliza para a cooperação social.

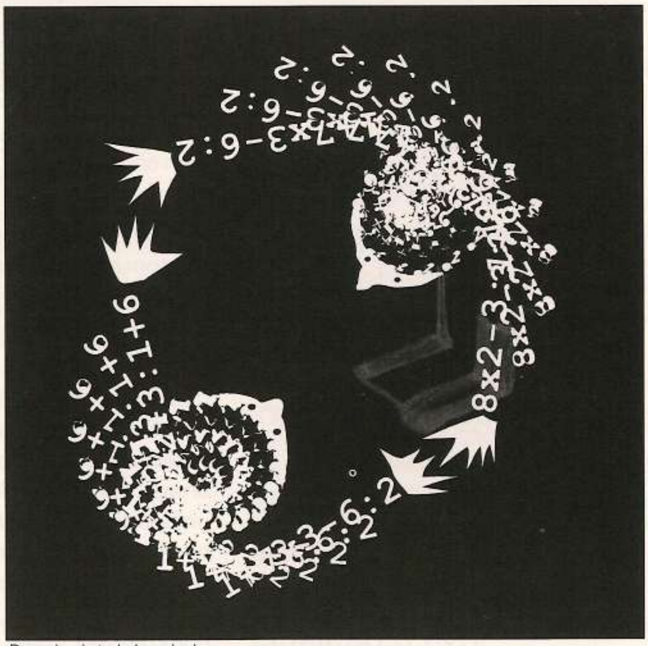
Deste modo, as situações do nosso quotidiano que já tivemos ocasião de exemplificar exigem que a pessoa utilize esses mecanismos operatórios, onde sobressaem a reciprocidade, a reversibilidade e a descentração. Mecanismos fundamentais para sermos também competentes nas nossas relações sociais.

Quando os mecanismos de cooperação não são trabalhados na escola, e particularmente na sala de aula, a compensação é feita na família. Quando trabalhamos em turmas de Currículo Alternativo sabemos que, geralmente, esta compensação não está assegurada, competindo então à escola complementar, educativamente, a função da estrutura familiar.

Neste âmbito, torna-se para todos evidente o papel que o professor de Matemática pode desempenhar, surgindo como *pivot* de uma equipa que assume como um dos seus objectivos de trabalho, a educação para os valores da cidadania que estão tão bem definidos na Lei de Bases do Sistema Educativo e que nós tão mal conhecemos ou tão facilmente esquecemos, porque nos deixamos afogar por conteúdos que os manuais (às vezes à revelia dos próprios programas) nos impõem.

Trabalhar a pares ou em grupo, descobrir soluções para problemas do dia-a-dia, ensinar a respeitar o saber e a ignorância de cada um, são formas de ensinar matemática e, simultaneamente, estamos a ir um pouco mais além. Estamos a tentar ajudar a crescer, pois não se ensina a solidariedade e a cooperação através de discursos mais ou menos bonitos ou empolgados. Esta aprendizagem faz-se através de gestos e de comportamentos vividos e partilhados por todos no nosso quotidiano. E a sala de aula, onde cada jovem passa cerca de 30 horas por semana, pode também ser utilizada para proporcionar essa aprendizagem.

Desconheço a raiz quadrada da solidariedade. Não sei elevar ao cubo o respeito pelo outro. Creio, todavia, que é possível compreender o que é a raiz quadrada e aprender a potenciação em momentos de partilha onde aqueles valores estejam presentes.



Desenho de isabel machado

E tudo isto se inscreve no currículo da Matemática...

***

Os projectos de Currículo Alternativo visam proporcionar o 9º ano de escolaridade a alunos que, por motivos vários, acumularam repetências sucessivas e encontram-se em risco de abandonar o Sistema Educativo. Há muito tempo que as escolas sentiam que a resposta disponível (o ensino recorrente nocturno) não era a mais adequada, quer porque aquele tipo de ensino não foi concebido para este tipo de jovens, quer porque a frequência do ensino nocturno agrava a situação de risco em que eles já se encontram.

Ao contrário do que muitos poderão pensar, os projectos de Currículo Alternativo não nasceram com o Despacho 22/SEEI/96 de 19 de Junho. Muito antes, algumas escolas, na busca de soluções mais adequadas, começaram a construir projectos de Currículo Alternativo, tendo por base o Despacho 178-A/ME/93 de 30 de Julho.

Foi para regulamentar este tipo de projectos avulso que foram surgindo nas escolas e ainda para garantir algumas condições mínimas de funcionamento (duas horas de reunião semanal para o Conselho de Turma e turmas com o máximo de 15 alunos), que surgiu o Despacho 22/SEEI/96.

Penso que, a pouco e pouco, esta experiência tem mostrado algumas potencialidades, não obstante todas as dificuldades e necessidades que são manifestas e reconhecidas por todos. Mas estas não podem ser o motivo que nos leva a desistir. Pelo contrário, são a razão pela qual devemos pugnar por um maior e melhor acompanhamento dos projectos, onde a formação dos professores assume um papel de destaque. Neste sentido, o convite recentemente endereçado pela DREL à Associação de Professores de Matemática, no sentido de garantir a formação dos seus professores envolvidos em turmas de Currículo Alternativo, tem um significado especial. Merecendo esta associação toda a credibilidade do ponto de vista científico e pedagógico, pensamos que este caminho é o mais indicado para garantir uma formação de qualidade aos professores.

Mas, hoje, passados dois anos de implementação do Despacho 22/SEEI/96, é possível passar a uma segunda fase do nosso trabalho, pugnando por uma maior qualidade de todos os projectos. Esta depende do Sistema, na medida em que este deve melhorar as condições de trabalho dos projectos (particular realce para a atribuição de um reforço orçamental às escolas que assumem este desafio), mas depende também da forma como cada escola assume estas turmas de Currículo Alternativo (particularmente, os Conselhos Directivos e os Conselhos de Turma).

Estamos longe da situação ideal. Assim esperamos continuar, pois é sinal que vamos elevando os nossos graus de exigência. Mas continuamos a acreditar que este é um caminho possível para contribuir para o sucesso educativo dos nossos jovens. Com os Currículos ligados à Vida.

Notas

[1] Defrance, Bernard (1992). *La violence à l'école*. Paris: Syros Alternatives.

Alfredo Dias
Assessor da DREL

InforMAT

Começou a ser editada uma folha informativa da responsabilidade do Departamento do Ensino Secundário — *InforMat* — de periodicidade trimestral, dirigida por Domingos Fernandes, Director Geral do Ensino Secundário. O lançamento desta folha informativa, como consta na sua nota de apresentação, insere-se "no âmbito do conjunto de medidas destinadas a apoiar o desenvolvimento dos programas de Matemática" deste nível de ensino. O número 1, relativo a Janeiro/Março, foi já distribuído pelas escolas e, entre outros, contém textos como "Autoformação contínua - forma e função", "Descobrindo Geometria" e "Matemática na Internet", da autoria de, respectivamente, Arsélio Martins, Graziela Fonseca e Jaime Carvalho e Silva, autores que, conjuntamente, assinam ainda um artigo de opinião "O cumprimento e o comprimento do programa".

Número temático de 1998

Não quer colaborar?

O número temático deste ano da revista Educação e Matemática sairá, como habitualmente, durante o ProfMat e incidirá desta vez sobre Educação — Escola — Matemática. Com certeza que ao longo do seu percurso profissional já viveu situações que o levaram a interrogar-se e a reflectir sobre esta trilogia. Vimos agora convidá-lo a partilhar essas vivências.

Envie-nos um texto relatando uma experiência que considere especialmente significativa. Poderá ser, por exemplo, a descrição de uma descoberta que fez, ou de um episódio que agradou especialmente aos seus alunos, ou de uma actividade que considere particularmente relevante para a sua formação global. Poderá ser também uma opinião sobre como outros professores vêem a disciplina de Matemática, ou pontos de vista dos seus alunos relacionados com a utilidade de aprender Matemática, ou ainda um testemunho sobre como equaciona o papel da Matemática na Educação e na Escola.

Não podemos, à partida, garantir a publicação no número temático, de todas as contribuições que surgirem, mas dê largas à sua criatividade e não deixe de escrever e de nos enviar a sua até ao próximo dia *5 de Setembro*.

Revendo o ensino de Matemática: uma proposta de trabalho interdisciplinar a partir da etnomatemática

Wanderleya Nara Gonçalves Costa
Admur Severino Pamplona

A Etnomatemática é o estudo que busca revelar, analisar e compreender os conceitos e práticas matemáticas geradas por um grupo cultural e a matemática gerada por outros grupos mas apreendida e/ou utilizada por aquele grupo segundo a sua visão do mundo, seus valores, linguagem, sentimentos, acções e desejos.

Introdução

Em muitos países se convive com dados inaceitáveis relacionados com repetência e evasão escolar e, em grande parte das vezes, tais problemas estão intimamente ligados ao desempenho em Matemática. Ainda hoje, em várias escolas, a Matemática é considerada neutra, infalível, acima de qualquer dúvida ou crítica. Ora, esta visão não tem ajudado a superar os problemas acima colocados.

Talvez um caminho que minimize as dificuldades habitualmente encontradas no ensino/aprendizagem da Matemática seja o questionamento da própria visão da matemática. Não podemos mais, ao avaliarmos o seu ensino/aprendizagem, ficarmos restritos às explicações pedagógicas acerca da habilidade dos professores e da utilização dos materiais didácticos; tão pouco nos bastam explicações psicológicas a respeito das habilidades dos alunos. Precisamos encarar a matemática como um conhecimento sócio e culturalmente construído e, por isso mesmo, passível de dúvidas e críticas. E, também por isso, não completamente abstracto, mas sim firmemente ligado aos problemas quotidianos de diferentes povos, vivendo em diferentes meios. Esta visão, que é a da Etnomatemática, baseia-se nas ideias sobre o multiculturalismo que, nascidas na Antropologia, encontraram reflexo na educação fazendo com que, nos últimos vinte anos, em vários países, crescesse a tendência de se analisar e teorizar a educação, inclusive a educação matemática, através da Teoria Cultural.

A Etnomatemática é o estudo que busca revelar, analisar e compreender os conceitos e práticas matemáticas geradas por um grupo cultural e a matemática gerada por outros grupos mas apreendida e/ou utilizada por aquele grupo segundo a sua visão do mundo, seus valores, linguagem, sentimentos, acções e desejos.

O movimento culturalista e a Etnomatemática conduziram ao desejo de criar propostas educacionais alternativas, propostas estas que pusessem a descoberto as variadas tradições culturais dos estudantes e que levassem a sério os conhecimentos matemáticos adquiridos na vida quotidiana. Tais propostas, além de expor a multiplicidade de saberes e valorizar o saber matemático quotidiano devem, ainda, ampliar o debate acerca das formas tradicionais de conceber as diversas áreas do conhecimento.

Contudo, formular estas propostas educacionais alternativas não tem sido fácil pois torna-se necessário expor o saber dos vários grupos culturais, o que implica a execução de várias pesquisas. Isto é especialmente verdade quando se trata do Brasil, um país de dimensões gigantescas, possuidor de vários grupos culturais diferenciados. Assim, não se pode esperar que tais pesquisas fiquem a cargo somente das universidades; é necessário que os professores de primeiro e segundo grau tomem a iniciativa de fazê-las. Mas eles, na maioria das vezes, possuem um certo receio em executar pesquisas e, também, em formular e pôr em prática propostas educacionais alternativas.

Algumas dúvidas e receios

A primeira coisa a fazer, cremos, é acabar com o receio de executar as sugestões que as propostas educacionais alternativas colocam. Só depois é que os professores deverão pensar em executar pesquisas e formular propostas. No que se refere a colocá-las em prática, uma das primeiras preocupações do professor surge com a pergunta "Como fica o conteúdo com a implementação de uma proposta de ensino alternativa?" Ora, sem dúvida, o conteúdo não será mais decidido somente pelo professor que estará baseando-se nos livros e nas propostas curriculares. O tipo de ensino que se deseja alça o aluno e seus pais a uma nova posição, não mais são "receptores" mas sim "co-responsáveis", eles também deverão participar da determinação do conteúdo.

É claro que não se espera que alunos e pais surjam com uma lista do conteúdo matemático que desejam que se ensine na escola e sim que "indiquem" ao professor o que é importante para eles. Esta "indicação" se fará através do contacto entre o professor, os alunos e seus pais. Ou seja, através do conhecimento das histórias de vida do aluno e de seus pais e de seus problemas quotidianos, o professor deverá seleccionar conteúdos que, além de visarem o estudo do conhecimento acumulado, satisfaçam as necessidades sociais e culturais dos seus alunos. Na verdade, a sua cultura deverá, mais do que constituir uma fonte, tornar-se o próprio conteúdo. Mas, o mais importante, é que, ao pensar qual será o currículo, o professor reflicta sobre o propósito de formar o cidadão e de reforçar a sua identidade cultural. Esta reflexão profunda indicará o conteúdo mais importante.

Uma preocupação que também se faz presente refere-se ao método de trabalho. Neste item deve-se pensar que quando se deseja formar cidadãos, os alunos devem ser encarados como sujeitos activos, como objecto do conhecimento. O professor e seus alunos precisarão trabalhar com pesquisas junto à comunidade, histórias de vida e problematização do quotidiano. Deve-se lembrar que, além da preocupação em estudar o saber matemático acumulado, existe a necessidade de se evidenciar a construção do conhecimento, e os seus aspectos histórico, cultural e social e, desse modo o próprio aluno registre e valorize os conhecimentos da sua cultura. Também não podemos esquecer outros aspectos que deverão ser privilegiados, pois como D'Ambrosio (1986) coloca, é necessário permitir/incentivar o aluno a desenvolver sua capacidade de matematizar situações reais, a desenvolver a capacidade de criar teorias adequadas para as situações mais diversas, e identificar o tipo de informação para utilizar os conteúdos e métodos adequados nas situações e condições que encontrarem, em qualquer nível.

Mas, como não poderia deixar de ser, além de se preocupar com o conteúdo e o método de trabalho, o professor preocupa-se também com a avaliação. E também esta terá uma conotação diferente. Não deverá existir uma preocupação em classificar o aluno, mas sim, em avaliar, junto com ele, o seu progresso em matematizar situações, a sua participação nas pesquisas e o seu interesse em ensinar e aprender.

Por falar em pesquisar e aprender, uma outra preocupação externada pelo professor é "O que faremos se aparecer alguma pergunta que não sabemos responder?" Esta preocupação revela que ao fazer do aluno não um sujeito passivo mas sim um co-responsável, o professor acredita que sua criatividade se expandirá. Suas perguntas não ficarão restritas ao que está escrito nos livros didácticos ou à má interpretação ou entendimento do que foi dito pelo professor, elas levarão a novas pesquisas, a novos conhecimentos. Mas, a esta preocupação, devemos lembrar ao professor que assim como no que se refere ao conteúdo, ao método, e à avaliação, a responsabilidade de encontrar respostas deve ser dividida. Aqui o papel do professor também é outro, ele não é um "sabe-tudo", ele é um pesquisador que nem sempre tem as respostas. Deve ter sim, disposição para, junto com os alunos, as procurar e deve ter também o conhecimento dos "caminhos" para as encontrar, seja através de livros, periódicos, conversas com especialistas, consultas às universidades, etc.

Além dessas dificuldades, o professor, num primeiro momento, sente-se apreensivo, julga-se incapaz de problematizar o quotidiano. Daí a necessidade de se lembrar que o nosso conhecimento não está compartimentado em disciplinas, como na escola. Ao resolver nossos problemas do dia-a-dia, nós não dizemos: "para resolver esse problema usarei matemática, aquele outro resolverei utilizando os meus conhecimentos de história ou ciências, etc." Talvez, se assim fizéssemos, não os conseguíssemos resolver. É necessária uma "integração" dos conhecimentos o que, no caso da escola, poderá ser chamado de "interdisciplinaridade". Mas, geralmente, esta palavra também traz dúvidas e anseios e, o que podemos dizer, é que problematizar o quotidiano na escola, junto aos colegas professores de outras disciplinas, pode não ser tão difícil assim. O mais importante é que se tente, se façam propostas que se estudem, se executem e melhorem.

Formulando uma proposta: elementos para reflexão

Num primeiro momento, antes de o professor tentar formular uma proposta alternativa para as suas aulas de matemática, é necessário que exista a preocupação de se construir uma competência teórica e de se reflectir, face a esse fundamento, a visão de matemática e de professor que se tem. Com este objectivo, o professor poderá fazer uma reflexão fundamentada em textos sobre propostas educacionais que se baseiam nas ideias do multiculturalismo, particularmente, em textos de Etnomatemática (nas referências bibliográficas, encontram-se algumas sugestões de leitura sobre este tema). Eles ajudarão o professor a responder a algumas indagações que colocarão a descoberto as suas concepções e o farão reflectir sobre a sua prática pedagógica; estas indagações poderão ser do tipo:

- De onde vem a matemática? Ela é descoberta ou criada?
- Para que serve a matemática?
- Quem sabe matemática? Como aprende?
- Como é o bom aluno de Matemática? E o bom professor?

Estas indagações, seguidas de outras que buscam explorar as percepções, os movimentos e emoções vividas pelo aluno farão com que o professor comece a pensar no conhecimento prévio com que o aluno vem para a escola; conhecimento este baseado na sua experiência como membro de um grupo sócio-cultural e económico. Assim, é importante que o professor coloque questões tais como:

- Quem é o meu aluno? De onde vem?
- Qual tem sido a sua história de vida?
- Quais são os seus propósitos? Para onde quer ir?
- Ele precisa saber Matemática para quê?
- Tenho ensinado o que ele precisa? Ele tem aprendido? Como ele se sente em relação à Matemática?

Estas reflexões levam à explicitação da necessidade da contextualização do conhecimento matemático escolar e a pensar num tipo de ensino que, mais do que ensinar o conhecimento acumulado pela humanidade, o faça de maneira crítica e de forma a incorporar as experiências, conhecimentos, esperanças e anseios dos alunos e de seus pais. Ou, seja, as questões de reflexão acima colocadas, provavelmente, levarão o professor a perceber o que de D'Ambrosio (1990) coloca, isto é, que o passado cultural do educando deve ser respeitado pois isto lhe dará confiança em seu próprio conhecimento e também uma certa dignidade cultural ao ver a sua família e a sua cultura serem aceites por seu mestre. Além do mais, como salienta este educador, a utilização, na escola, dos conhecimentos que o educando e seus familiares utilizam no seu quotidiano, dá segurança aos alunos e faz com que eles reconheçam que têm valor por si mesmos e por suas decisões.

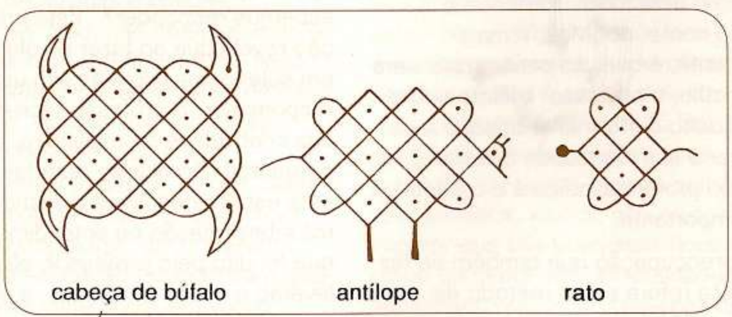
Acontece porém que algumas destas questões não podem ser respondidas a contento somente com uma pesquisa em sala de aula; o professor conhecerá melhor o aluno, sua família, seu grupo cultural e o seu quotidiano se conhecer os problemas, desejos e anseios da comunidade na qual o educando vive. Para tanto ele poderá fazer pesquisas observando e entrevistando os pais dos alunos e outras pessoas da comunidade. Nesta ocasião, o professor deverá assumir a postura de quem aprende; ele deverá observar/ouvir as pessoas com respeito e atenção; deverá se lembrar que, para resolver os problemas do seu quotidiano tais pessoas criaram um saber e o sistematizaram, tornaram-se mestres naquele assunto. E com esta postura, o professor deve tentar compreender o que é a matemática para os seus alunos e para as pessoas da sua comunidade, deverá também tentar conhecer melhor as relações entre o saber e o saber-fazer, entre a teoria e os métodos de trabalho, entre a matemática e as várias disciplinas e entre elas e os problemas quotidianos para então, se lançar à elaboração de uma proposta de trabalho que incorpore os resultados deste conhecimento e compreensão.

Exemplo de uma proposta de trabalho

Desde Janeiro de 1995 a primeira autora deste trabalho vem realizando uma pesquisa no Vale do Jequitinhonha, uma região brasileira considerada uma das mais pobres do mundo e que possui altos índices de analfabetismo. Neste trabalho, o principal objectivo é conhecer, compreender e analisar a utilização e (re)criação do conhecimento matemático no quotidiano de um grupo de produtores de cerâmica artesanal. Paralelamente, preocupa-se com a melhoria do ensino de matemática na região.

Trabalhando neste sentido, ela realizou, numa escola da região, um mini-curso que tinha como principal objectivo fazer com que o professor reflectisse sobre as suas concepções e a sua prática pedagógica, levando-o a pensar propostas alternativas para o ensino de matemática. Contudo, tal mini-curso contou com a presença de todos os professores de todas as séries ministradas na escola (1ª à 6ª séries), portanto, estavam presentes, além de professores de Matemática, professores de outras disciplinas tais como Língua Portuguesa, História, Ciências e Horticultura (a escola fica na área rural e, por este motivo, possui um professor que ensina como preparar e cuidar de hortas), entre outras. Estes professores foram capazes de, a partir de pesquisas e reflexões, montarem várias propostas de trabalho interdisciplinar, uma das quais apresentaremos a seguir.

O Vale do Jequitinhonha é uma região carente não só de recursos



Desenhos do povo Tchokwe do Nordeste de Angola (in P. Gerdes, "Etnomatemática: cultura, matemática, educação") económicos e educacionais mas também de profissionais especializados em diversas áreas, entre elas a saúde. Ora, este é um problema social grave que, segundo a avaliação dos professores participantes do mini-curso, merece ser debatido na escola, já que é algo importante para a comunidade onde a escola está inserida. Um outro problema comum é a necessidade que a escola tem de tomar a seu cargo a educação sexual dos educandos e ainda de fazer com que os pais, que muitas vezes não sabem como abordar o assunto, aceitem que a escola assuma este papel. E foi pensando assim que os professores decidiram tomar o parto como tema de pesquisa para uma proposta de trabalho. Partindo inicialmente de uma entrevista com uma parteira, profissional ainda comum na região, eles começaram a vislumbrar novos caminhos a ser explorados na sala de aula. Assim, a partir deste tema, os professores avaliaram que, em Matemática, nas diversas séries, é possível fazer levantamento de dados — número de médicos, enfermeiros e parteiras na região, número de pessoas nascidas nos últimos anos, população total da área, etc. — e que o tema também possibilita a elaboração de gráficos, o estudo de números naturais e percentuais, bem como de razão e proporção, regra de três e outros.

Em Ciências, segundo os professores, poderia entre outras coisas, explorar-se estudos sobre reprodução humana, medicina caseira, etc. A parte de medicina caseira também seria um tópico explorado na aula de Horticultura onde os alunos poderiam estudar as técnicas de produção, em horta, das ervas utilizadas.

O tema também se revelou riquíssimo para o estudo da Língua Portuguesa pois, para os professores, além de estimular leituras sobre o tema e produção de textos, permite um estudo acerca dos termos regionais utilizados pelas parteiras. Também permite estudos sobre os aspectos gramaticais implícitos no conteúdo abordado, bem como a preparação de entrevistas e a análise (compreensão do texto) dos dados obtidos.

Os professores de História consideraram que talvez fosse bastante estimulante para os alunos estudar os costumes e tradições que, ao longo dos tempos, em diversos povos e regiões, têm sido relacionados à gravidez e ao parto. Entre outras coisas, seria possível fazer um resgate histórico sobre os primeiros habitantes da região e suas moradias e, também, os problemas e transformações ocorridas na área de saúde.

O importante é que professores de todas as áreas, analisando juntos um fato do quotidiano, verificaram a possibilidade de sua problematização e que, em nenhum momento, eles pensaram haver esgotado as possibilidades de exploração do tema. Parece-nos fácil crer que experiências parecidas poderiam ser vividas por vários professores em diversas escolas a partir do momento em que tivessem espaço para reflectir sobre as suas concepções, a sua postura em sala de aula e sobre as necessidades dos alunos e da sua comunidade.

Considerações finais

Se por um lado é fácil acreditar que os professores podem, com certa facilidade, problematizar o quotidiano, devemos salientar que colocar em prática a Etnomatemática implica uma alteração radical no conceito que o professor tem de si mesmo. O papel do professor será ajudar os alunos a ver, compreender e a expressar a realidade, a exprimir-se, a descobrir e a assumir a responsabilidade de ser elemento de mudança na realidade. O professor estará, portanto, assumindo um papel mais rico, amplo e dinâmico. E isso só poderá acontecer a partir de reflexões e diálogos com outros professores que, sem dúvida, são necessárias para que sua prática não se fossilize na mesmice do "estou ensinando do mesmo jeito que me ensinaram"; o que de forma alguma implicará a melhoria do ensino, do aluno e da sociedade.

Bibliografia

Anastácio, M. Q. A. (1993). Etnomatemática: a busca de uma conceituação ao longo dos Boletins do Grupo Internacional de Estudos sobre Etnomatemática. *SBEM*, Nº1, 2º Semestre 59-60, FURB, Blumenau.

Borba, M. C. (1987). *Um estudo de Etnomatemática: sua incorporação na elaboração de uma proposta pedagógica para o Núcleo escola da Favela de Vila Nogueira e São Quirino*, Unesp - Rio Claro.

Borba, M. C. (1988). Etnomatemática: o Homem também conhece o mundo de um ponto de vista matemático, *Bolema*, nº5, 1988, 9-35, UNESP, Rio Claro.

Costa, W.N.G. & Borba, M.C. (1996). O porquê da etnomatemática na educação indígena. Zetetiké, Campinas, SP, v.4, nº 6, 87-95, jul./dez.

Costa, W. N. G. (1997). A educação, o multiculturalismo e a questão do saber matemático. *Revista Educação*, Porto Alegre, nº 33. jun/dez. (no prelo)

D'Ambrosio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*, São Paulo: Summus.

D'Ambrosio, U. (1986). Etnomatemática. *Revista Nova Escola*, ano VIII, nº 68, 10-17.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas, São Paulo: Papirus.

D'Ambrosio, U.. Etnomatemática: um programa. *Revista SBEM*, Ano I, 1, 2ºsemestre.

Ferreira E. S. (1986). Etnomatemática: a matemática incorporada à cultura de um povo. *Revista de ensino de Ciências*, nº15.

Ferreira E. S. (1987). A Etnomatemática: um método de ensino de matemática. *Por uma educação indígena diferenciada*, Projeto CNRC/FNPM, 77-78.

Ferreira E. S. (1991). Etnomatemática. *Congresso Iberoamericano De Educación Matemática. Sevilla*. Paris: UNESCO.

Ferreira E. S. (1993). *A "matemática materna" de algumas tribos indígenas brasileiras*. Conferência no 1º Encontro Luso-Brasileiro-História da Matemática. Coimbra.

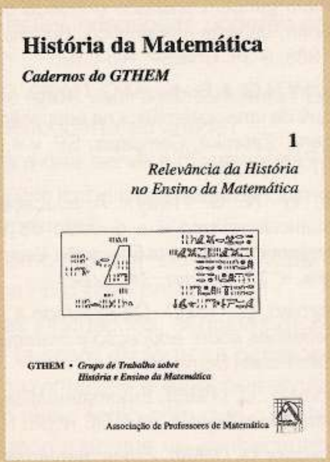
Knijnik, Gelsa. (1993). O saber popular e o saber acadêmico na luta pela terra: uma abordagem etnomatemática. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, Blumenau, nº 1.

Gerdes, P. (coord.) (1989). *Estudos Etnomatemáticos*, ISP (Maputo), KMU (Leipzig).

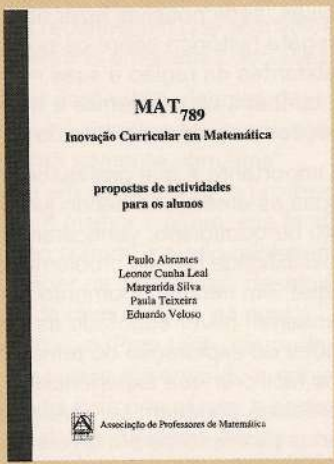
Gerdes, P. (coord.) (1993). *A numeração em Moçambique: uma contribuição para uma reflexão sobre cultura, língua e educação matemática*. Maputo; ISP.

Wanderleya Costa e Admur Pamplona
ICLMA/UFMT - Brasil

NOVAS Publicações APM



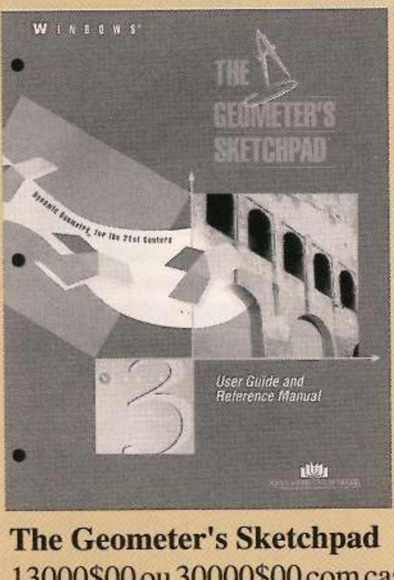
História da Matemática
Caderno do GTHEM
Preço500$00



MAT_{789}
Inovação Curricular em Matemática
Preço1200$00

Histórias da aula de Matemática
Preço700$00

Edições disponíveis na APM



Software didáctico

The Geometer's Sketchpad
13000$00 ou 30000$00 com cassete de vídeo

MAT_{789}
Inovação Curricular em Matemática
Preço750$00

Eu escuto etnomatemática. Que é isto?

Pedro Paulo Scandiuzzi

Na América latina existem muitas pessoas que sobrevivem com pequenos salários ou estão desempregados. Na maioria, mais de 90 % vive em uma situação de extrema miséria. É necessário que as crianças de idade próxima de dez anos, abandonem a escola para procurar trabalho e assim ajudar seus pais no orçamento doméstico. Os alunos que permanecem na escola encontram um ensinamento muito diferente de sua realidade e apesar de seus esforços eles não vão bem. É muito difícil para nós, educadores matemáticos, buscar e incentivar estes alunos. Por isso, perguntamos: que se fará com as crianças em idade escolar que abandonam a escola para ajudar os pais? Que se fará para ajudar as crianças a permanecerem na escola? Na realidade destas crianças, não existe matemática? Que podemos fazer para que as crianças permaneçam na escola e que matemática podemos nós oferecer para que elas possam demonstrar os conhecimentos socio-histórico-culturais que elas vivem?

Alguns matemáticos estão preocupados, porque os alunos que vêm para a escola não são compreendidos por seus professores e pela instituição escolar. No contexto mundial, existe um movimento que estuda a realidade cultural, social, histórica, mitológica... do povo que vive em diferentes situações.

Ubiratan D'Ambrosio, um brasileiro, apresentou o nome e o conceito da etnomatemática no quinto congresso internacional de educadores matemáticos, Austrália-1988. Ele diz: "Etnomatemática não é um estudo de matemática de diferentes etnias" Mais que isso, é um estudo de muitas maneiras, técnicas, habilidades (tchnés ou ticas) de explicar, de compreender, de trabalhar e viver com (matema) os diferentes contextos naturais e socio-económicos, espacial e temporalmente diferenciados, da realidade (etno).

A disciplina reconhecida como matemática é, na verdade, uma etnomatemática que teve origem e fez o seu desenvolvimento até à forma atual na Europa e que recebeu algumas contribuições das civilizações hindu-islâmicas e foi levada e imposta em todo o mundo a partir do período colonial.

D'Ambrosio apresentou a etnomatemática por causa das interrogações de alguns matemáticos que já há algum tempo se questionavam sobre ela e por causa da experiência já começada neste campo.

Eu conheço, no nosso país Brasil, que existem experiências com pessoas que vivem nas favelas, nas tribos indígenas, na zona rural, com os ceramistas, com os pescadores, e apesar de pouca literatura sobre este tópico nós partilhamos nossas experiências de vida e todas as descobertas.

Trabalho com tribos indígenas no centro oeste do meu país. Dou aulas para os indígenas que serão professores na sua tribo. Trabalho como assessor para dezassete tribos e como pesquisador com somente duas tribos. Meu trabalho com as dezassete tribos é muito interessante porque é possível olhar os sistemas de numeração que os livros de história da matemática trazem e muitos conhecimentos de figuras geométricas. É possível olhar a história do número e da geometria a partir deles. Eles pensam muito diferente porque eles são diferentes

O meu trabalho com as dezassete tribos é muito interessante (...) Em cada descoberta partilhamos e procuramos um método pedagógico para ajudar a compreensão da matemática dos povos que estudamos e para ajudar a compreensão da matemática dos povos que vivem próximo deles.

mas sobrevivem alegres, sabem organizar sua sociedade, sabem partilhar seus pertences e fazer o comércio entre as outras tribos e entre eles num sistema de troca, com muita festa, dança e oração e na socialização de cada saber que eles aprendem no quotidiano.

Sua geometria é muita viva porque ela é dada por Deus que eles chamam de Taunguy e Alocumã (o Deus masculino e o Deus feminino). Como D'Ambrosio tem dito: "A geometria indígena é colorida enquanto a geometria grega eliminou a cor. A aritmética indígena é qualitativa, enquanto a aritmética do povo branco é pura codificação quantitativa."

Em cada descoberta partilhamos e procuramos um método pedagógico para ajudar a compreensão da matemática dos povos que estudamos e para ajudar a compreensão da matemática dos povos que vivem próximo deles. Nós sabemos que cada dia a sociedade hegemónica está mais próxima e por isto nós damos a possibilidade deles escolherem o melhor para seu povo e para a boa compreensão da realidade.

Também tentamos encontrar métodos e estratégias para mostrar a realidade destes povos e levar para a sala de aula dos alunos que fazem parte da instituição escolar. Por isso, para finalizar, apresento um primeiro esforço realizado por mim a partir da contagem usada pelos indígenas com quem trabalho.

Índios e matemática

Acabo de voltar da aldeia Kuikuro. Os índios Kuikuro vivem no Parque Nacional do Xingu e falam a língua do tronco Karib. São 285 índios numa aldeia e 38 numa outra próxima. São fortes, alegres, inteligentes e vivem um mundo muito diferente do nosso. Têm como prioridade principal a de serem pacientes. Um velho da aldeia contou a história dos números:

Taungui (Deus homem) chamou Alocumã (Deus mulher):

— Vem aqui, vamos conversar. Aí a irmã dele saiu a casa e falou:

— Você quer falar comigo?

— Sim. Porque a gente está sem saber nada. Quando a gente vai sair noutro lugar, quando a gente vai dormir, vamos saber agora. E falou assim:

— Quando a gente vai dormir noutro lugar, vai contando: 1 (mostrou o dedão da mão direita), quando vai dormir mais, 2 (mostrou o indicador da mão direita), quando vai dormir mais 3 (mostrou o dedo médio da mão direita), etc. ...

— Tá bom assim? Falou Taungui.

A irmã Alocumã falou:

— Você quem sabe.

— Então vamos passando para outra mão e pegar os dedos 6, 7, 8, 9 e 10 assim:

Aí, Taungui falou:

—Tá bom assim.

Alocumã disse:

— Tá bom, para quando vai longe dá a conta da mão. Taungui falou:

— Vamos contar o pé agora. No pé direito, pelo dedão começou: 11, 12, 13, 14 e 15.

Aí ficou um pé. Contou um pé. Aí Taungui falou:

— Vamos pegar o outro pé. Foi assim: 16, 17, 18, 19 e 20. Aí ficou 10 na mão e 10 no pé. Aí ele falou:

— Vamos parar. Quando a gente vai bem longe, vai contar sua mão, seu pé, e aí é muito, e não contou mais. Aí Taungui falou:

— Vamos juntar agora. Se precisar de mais conta, vamos chamar todos os que estão na casa. Aí vai ficar muito. Aí Taungui pensou: Contou todos os dedos das mãos das pessoas e aí ele contou até ao fim dos números (que branco conta). Aí ele falou:

— Tá bom Alocumã.

(A gravação foi feita por mim com o vovô Agassipá Kuikuro e a tradução foi feita por Ibene Kuikuro)

Vamos escrever agora como os Kuikuros dizem:

Zero - inhalu (não tem)

Um - aetsi

Dois - takiko

Três - tilako

Quatro - tatakegeni

Cinco - nhatui (contei todos os dedos de uma mão)

Seis - aetsi ingugetoho (um dedo de outra mão)

Sete - takiko ingugetoho (dois dedos de outra mão)

Oito - tilako ingugetoho (três dedos da outra mão)

Dez - timuho (as duas mãos)

Doze - takiko ituhugu iheke (dois dedos do pé)

Quinze - heine itapUgU (contei toda a mão e um lado do pé)

Dezasseis - actsi utapUgU iheke (peguei um dedo do outro meu pé)

Vinte - tatute utapugu ituhugu iheke (toda a mão e todo o pé)

Vamos agora comparar a maneira dos Kuikuros de contar e fazer contas e a nossa maneira de não índios (ver quadro 1).

E assim por diante. Podemos entender também aqui que quando se fala

Quadro 1 - Contagem dos Kuikuros

Explicação dada pelo aluno	Tradução da contagem usando símbolos hindu-arábicos	Contagem no sistema de numeração decimal
1 dedo	1	1
2 dedos	2	2
3 dedos	3	3
4 dedos	4	4
5 dedos (uma mão completa)	10	5
1 mão e um dedo da outra	11	6
1 mão e dois dedos da outra	12	7
1 mão e três dedos da outra	13	8
1 mão e quatro dedos da outra	14	9
2 mãos completas	20	10
2 mãos completas e um dedo do pé	21	11
2 mãos completas e dois dedos do pé	22	12
2 mãos completas e três dedos do pé	23	13
2 mãos completas e quatro dedos do pé	24	14
2 mãos completas e um pé completo (3x5)	30	15
1 pé completo e um dedo do outro pé (3x5+1)	31	16
1 pé completo e dois dedos do outro	32	17
1 pé completo e três dedos do outro	34	18
2 pés e duas mãos completas (4x5)	40	20
Toda a mão e todo o pé e um dedo de outra pessoa	41	21
Toda mão e todo pé e dois dedos de outra pessoa	42	22
Completou uma mão	100	25

de dois dedos subentende-se 1+1 dedos.

O sistema de numeração dos índios Kuikuros é um sistema de numeração de base 5 pois ocupa cinco numerais: 0, 1, 2, 3, 4. O nosso sistema de numeração é o sistema decimal, base 10, pois ocupa dez numerais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Como será que eles fazem a conta de adição?

Vamos somar 6+8?

O seis deles é:

O oito deles é:

O resultado é:

O resultado deu duas mãos completas e quatro dedos do pé direito que é representado por nossos numerais como 24, na base 5, e na nossa maneira de somar, como 14, na base 10.

Os índios que conheço gostam muito de matemática. Não sabem a nossa matemática escolarizada tal como é dada nas nossas escolas, mas eles sabem muita matemática.

Agora tentem fazer as adições abaixo à maneira Kuikuro:

a) 3+4; b) 6+42; c) 4+0;

d) 5+12; e) 18+6

Bibliografia

D'Ambrosio, U. (1994). *Lições da educação indígena: Educação Multicultural.* Palestra proferida no plano Decenal de Educação. Brasília. DF. Brasil.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática.* São Paulo. Ed. Ática.

Pedro Paulo Scandiuzzi
Unicamp - SP, Brasil

A propósito de *contexto*

Ercílio Mendes

As vivências das diferentes situações originam diferentes contextos, o que faz que ao nível da aula de Matemática possam existir durante o tempo de duração da aula contextos específicos e distintos mas ambos geradores de aprendizagens mais ou menos significativas dependendo do modo como os intervenientes intervêm e vivem as situações.

Um termo que surge frequentemente em numerosos trabalhos de investigação e comunicações no âmbito da Educação Matemática é o de contexto. Ao folhear, por exemplo, o programa do ProfMat 97 na Figueira da Foz surgem expressões como as seguintes:

> "... no contexto do projecto de investigação de etnomatemática ..." (p. 5), "... contextos familiares e naturais ..." (p. 7), "... neste contexto o painel analisará ..." (p. 10), "... em contextos escolares... " (p. 17), "...contexto em que se aprende..." (p. 19), "...contexto de situações físicas..." (p. 25), "...num contexto social determinado..." (p. 25), "...em qualquer contexto educativo..." (p. 32), "...num contexto de sala de aula..." (p. 45), "...o contexto do estudo..." (p. 47) e "...contextos de ensino/aprendizagem..." (p. 57).

Este panorama dá a entender que o conceito de contexto é algo onde cabe tudo e onde se encontra explicação para a total interpretação dos fenómenos. É uma pequena contribuição para a clarificação do conceito que este *A propósito de* ... pretende efectuar.

A escola é o local onde os alunos desenvolvem grande parte das suas actividades em ambientes de aprendizagem, porventura, específicos de disciplina para disciplina. Toda a vasta gama de actividades executadas e participadas pelos alunos e professores nas diferentes disciplinas, não permanecem indiferentes, nem podem ser desprendidas de realidades concretas, por vezes, pouco conhecidas, mas que moldam o ambiente que rodeia os acontecimentos.

Numa aula de Matemática, por exemplo, dedicada a actividades investigativas em geometria no domínio de áreas e perímetros de diferentes figuras planas, a presença do geoplano ou de outros materiais específicos pode suscitar um ambiente favorável ao interesse de observar, manipular e experimentar por parte dos alunos. A simples utilização do material indicado, poderá promover um ambiente de trabalho totalmente diferente do habitual, em que o centro de interesse da aula deixou de ser o professor, mas um conjunto de práticas que, com o envolvimento de todos os participantes, professor e alunos, com linguagem específica, posturas diferenciadas e críticas perante as situações criadas, tende a promover a produção de novos saberes. A sala de aula formal, pode assim dar origem a um espaço menos formal, isto é, um ambiente de trabalho com determinadas características foi transformado num ambiente com outras características através da introdução de determinados materiais. O cenário passou a ser diferente do inicial, com a presença de duas novas realidades, uma visível, (o geoplano) e outra invisível (o interesse dos alunos). Da vivência e envolvimento dos intervenientes nas diferentes experiências pode-se concluir que diferentes cenários caracterizam diferentes contextos, para os personagens envolvidos, podendo, deste modo, cada um dos intervenientes efectuar a sua própria leitura da situação.

Analisando com algum detalhe os ambientes de trabalho e as interacções que ocorrem no interior da sala de aula, um termo aparece repetidas vezes para caracterizar e evidenciar algo. Este termo é o contexto. No exemplo anterior existia um contexto inicial com características específicas que foi modificado através da introdução na sala de aula de materiais que partilhados por alunos e professor originaram um novo contexto com aspectos e dinâmicas diferentes do contexto inicial.

Segundo uma definição fornecida por uma enciclopédia (Delta Larrousse, 1974) o contexto é "o conjunto de circunstâncias e detalhes que acompanham um facto e contribuem para aclará-lo". Esta noção revela e evidencia duas facetas: (i) um conjunto de especificidades externas à situação, em que este conceito é entendido como sendo o estado como as pessoas ou as coisas estão arrumadas de modo a serem vistas como um todo, e (ii) estas especificidades e aspectos têm uma influência importante para a análise e explicação da situação. Esta definição converge com outra referida em Santos (1996, p.82-83) e permite dar força à ideia de que o contexto tem a ver fundamentalmente com aspectos exteriores à situação, assim como os indivíduos que nela intervêm e destaca o conjunto de particularidades e pormenores específicos que acompanham a situação e que fornecem elementos importantes para a sua caracterização. Isto é, a significância da situação é definida pelo investigador em função da análise que pretende efectuar e não pelos intervenientes directos na situação.

No caso específico das actividades escolares, existe um conjunto de factores e aspectos exteriores à sala de aula que corporizam contextos distintos, como o familiar, o social, o cultural e o económico, com influência significativa no contexto escolar e, mais especificamente, na sala de aula, onde diferentes tarefas e actos pedagógicos são levados a efeito. O contexto escolar engloba a escola com todos os seus espaços físicos e recursos materiais utilizados nas diferentes disciplinas, todos os alunos, professores e funcionários e um vasto conjunto de actividades e projectos que, agregados por temas, áreas ou disciplinas, envolvem no todo ou em parte a comunidade escolar e cujas linhas mestras são, anualmente, materializadas no Plano Global de Escola.

Evans & Harris (1991) ao analisarem diferentes contextos consideram que:

> Diferentes contextos, tais como a casa e a escola, são caracterizados por - na verdade são constituídos por - diferentes práticas e conjuntos de significados relacionados; por esse motivo chamamos-lhes *práticas discursivas* (itálico do autor). Os assuntos são assim colocados em *lugares* (itálico do autor) através das práticas em que tomam parte ou estruturalmente (por exemplo, através do tipo de sexo ou pela proveniência de classes sociais ou étnicas) (p. 209).

Contextos distintos, como a vida em casa e a vida na escola, podem fazer evidenciar uma grande quantidade de situações, com práticas e protagonismos diferentes de situação para situação, quer num local, quer no outro. Cada conjunto de significados conexos e afins é arrumado num local específico em função do modo como o observador analisa a situação.

A vida escolar dos alunos, segundo os autores é influenciada/formada : (i) pela proveniência de classes sociais mais ou menos favorecidas; (ii) pelo facto de habitarem perto da escola ou em locais mais distantes, consumindo largos minutos com os transportes; (iii) pela formação escolar e profissional dos pais e familiares; e (iv) pela vivência e envolvimento em organizações com características exclusivas e localizadas, assimilando e cultivando uma cultura própria. Essencialmente a pertença a comunidades com determinados hábitos sociais, culturais e artísticos fornece e permite que os seus membros adquiram e partilhem um conjunto de princípios e preceitos que vão deixar marcas e influências nas diferentes comunidades onde se vão inserindo, desde a turma da escola que frequentam, até à colectividade onde praticam a modalidade desportiva preferida. Assim, o modo de estar e de agir ao envolverem-se em determinadas actividades é influenciado por outro quadro normativo, invisível, sempre presente nas diferentes situações em que os alunos interagem e/ou assumem protagonismo.

Evidencia-se deste modo uma noção de contexto, associada à junção ou união das porções de um todo que é organizado e construído pelos intervenientes nas situações. No contexto escolar, existem situações porventura diferentes nas mesmas disciplinas consoante se efectua a aglutinação de

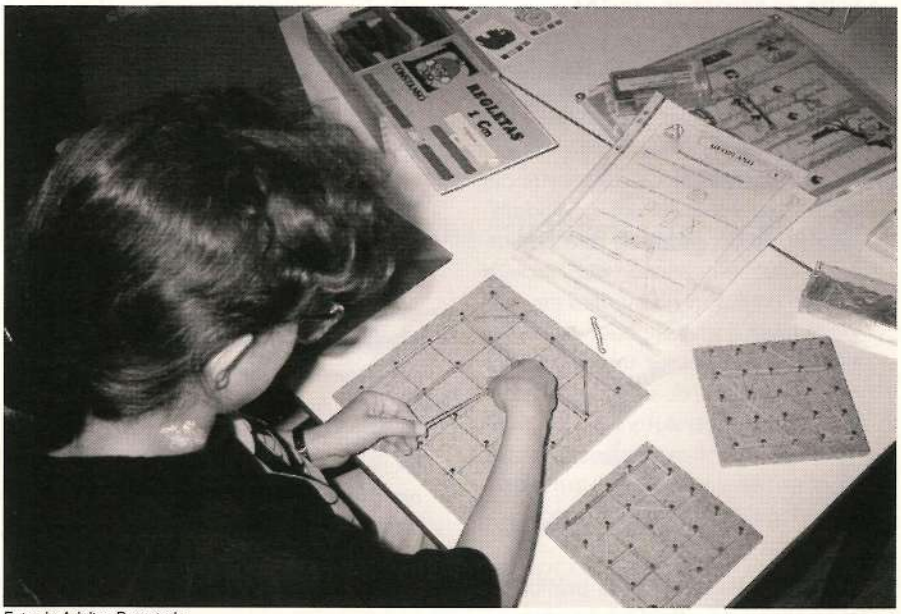


Foto de Adelina Precatado

atitudes, ideias e actos dos intervenientes. No caso específico da matemática escolar, os alunos ao envolverem-se em trabalho de projecto, em actividades de investigação ou de resolução de problemas, adoptam posições e expressões convergentes, terminologia adequada e utilizam determinados procedimentos e artefactos conforme as práticas em que estão envolvidos. Ao participarem numa das propostas de actividades indicadas, existe uma união de propósitos, análise e tomadas de decisão, um acesso a recursos e materiais específicos para entrarem dentro do problema ou situação problemática apresentada, de modo a poderem retirar conclusões.

Existe assim, um conjunto de experiências e actividades práticas aparentemente segmentadas, mas que estão englobadas num conjunto de partes dependentes umas das outras, mais ou menos extensivas, conforme as encaramos com reflexos e impactos diferentes em cada um dos intervenientes nas situações. Deste modo, sobressai, algo com um papel mais organizável e constitutivo conforme é evidenciado em trabalhos de Lave (1993). A autora, considera que o contexto não deve ser encarado como algo estável e constante mas "deve ser visto como historicamente formado por relações estabelecidas dentro e entre as situações" (p.18).

Matos e al (1995) ao analisarem a importância e relevância do contexto na investigação em educação matemática sublinham que:

> a ideia de contexto, e a importância deste ser tomado em consideração, pode constituir (e tem constituído nalguns casos) uma *ratoeira* (itálico do autor) na medida em que pode levar o investigador ou investigadora a procurar uma demonstração empírica dos *efeitos do contexto* (itálico do autor) ou, mesmo numa perspectiva não positivista, a contentar-se com resultados empíricos ligados a contextos específicos (p. 151).

Ao procurarem analisar as práticas matemáticas na sala de aula, dos alunos e do professor, estes autores consideram que o conceito de contexto é essencial para observar o que se passa quotidianamente na sala de aula. Contudo, ele não deve considerado a capa onde se abrigam e cabem todas as acções, diálogos, situações e outros actos pedagógicos ocorridos no interior do espaço, sala de aula, dentro e durante o tempo de uma aula ou de uma sequência de aulas. Também não pode ser tomado como um vaso cheio com uma mistura homogénea de várias substâncias, umas que se dissolvem integralmente no líquido e outras que permanecem imutáveis no seu estado original. A análise da mistura, isolando todas as suas partes, pode não explicar completamente o papel de cada um dos componentes iniciais ou da própria solução, do mesmo modo que a análise de um contexto particular, não pode servir para evidenciar aspectos, características de uma determinada situação e dos seus intervenientes, visto não poderem ser tomados como partes isoladas de um todo mas partes inter-relacionadas e integradoras de um todo, isto é, o contexto.

As vivências das diferentes situações originam diferentes contextos, o que faz que ao nível da aula de Matemática possam existir durante o tempo de duração da aula contextos específicos e distintos mas ambos geradores de aprendizagens mais ou menos significativas dependendo do modo como os intervenientes intervêm e vivem as situações.

Em síntese

O *Contexto* é um conceito que não tem uma definição exacta e precisa mas é algo de mais vasto que acompanha e envolve detalhamente as situações e contribui para esclarecê-las para o exterior. Tem a ver fundamentalmente com o quê (métodos, técnicas, estratégias e processos) e em que circunstâncias (atitudes, comportamentos e posturas) os intervenientes protagonizam uma determinada situação.

Referências

Evans, J. & Harris, M. (1991). Theories of Practice. In Harrys, M,.(Eds.). *School, Mathematics and Work* (p. 202-210). Hampshire: Falmer Press.

Delta Larrouse, Grande Enciclopédia (1974). Rio de Janeiro: Editora Delta.

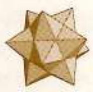
Lave, J., (1993). The practice of learning. In Lave, J. & Chaiklin, S., (Eds). *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (p. 3 - 32). Cambridge: Cambridge University Press.

Matos J. F., Carreira, S., Santos, M. & Amorim, I., (1995). Matemática e Realidade: Pensar a Aprendizagem. In *Actas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (p. 149-172). Évora: APM.

Santos, M. (1996). Na aula de Matemática fartamo-nos de trabalhar. *Aprendizagem e Contexto da Matemática Escolar* (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Departamento de Educação da F.C.U.L.

Ercílio Mendes
Esc. Sec. Jácome Ratton, Tomar

Materiais para a aula de Matemática



A actividade proposta foi elaborada pelo colega Fernando Nunes, da Escola 2, 3 Marquesa de Alorna, com base numa proposta publicada no boletim informativo do NCTM. Destina-se preferencialmente a ser trabalhada com alunos do 2º ciclo do ensino básico.

Escola ....

Ano/Turma.................... Data........................ Aluno(a)...

Quem tem dinheiro pode utilizar palavras "caras"

Antes de começarem, assegurem-se que no vosso grupo há um dicionário de português e uma calculadora.

1. Se a letra "a" valer 1$00, a letra "b" 2$00, ... e a letra "z" 23$00, quantas palavras portuguesas conseguem encontrar no vosso grupo, que possam ser compradas por menos de 36$00?

2. Com os mesmos valores das letras, procurem arranjar palavras que custem mais de 35$00 e menos de 90$00.

3. Descubram agora palavras mais caras do que 89$00.

4. Quais as palavras portuguesas que valem menos de 5$00?

5. Discutam em que pergunta foi mais difícil arranjar palavras, pensando em possíveis razões que justifiquem a vossa conclusão.

6. Se tiverem tempo, tentem fazer o mesmo para uma língua estrangeira que conheçam.

(proposta adaptada das tarefas incluidas no boletim informativo do NCTM de Janeiro de 1997)

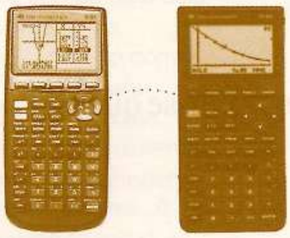
Matemática mais Viva

TI-83

O instrumento perfeito

para o estudo da

matemática



A TI-83 trabalha lado a lado com a TI-82

- Ecrã de 8 linhas com 16 caracteres por linha.
- Permite definir, guardar e construir o gráfico de 10 funções definidas por equações cartesianas, 6 funções definidas por equações paramétricas, 6 funções definidas por equações polares e 3 sucessões definidas recursivamente.
- Dispõe de 7 estilos de gráficos para melhor distinguir, os diferentes gráficos desenhados - linha contínua grossa, sombrear a parte acima ou abaixo do gráfico, e outras.
- Funções estatísticas avançadas, incluindo testes de hipóteses e o cálculo de intervalos de confiança.
- Funções financeiras, incluindo o valor actualizado líquido (VAL), cash flows e amortização.
- Editor de resolução de equações que permite resolver interactivamente uma equação em relação a diferentes incógnitas.

- Operações com números reais e complexos, listas, matrizes e sequências de caracteres.
- Inclui um cabo que permite partilhar informação com outra TI-83 e de uma TI-82 para uma TI-83.
- Funciona com o Sistema de Laboratório Baseado na Calculadora™ (CBL™) e com o detector ultra sónico de movimento™ (CBR™) Sistema para a análise de dados reais.
- Disponível, como opção em separado, o TI - GRAPH LINK™.

Centro de Recursos para o Ensino da Texas Instruments

O CRE é o Departamento da Texas Instruments onde todos os professores dos diferentes níveis educativos podem acorrer à procura de informação, material didáctico, experiências pedagógicas,... sempre baseadas no trinómio Novas Tecnologias-Matemática-Ensino.

OCRE dispõe de:

Programa de empréstimo de calculadoras: grátis e sem nenhum compromisso disponibilizam-se as calculadoras necessárias para a realização de cursos, trabalhos em seminários e, em geral, realizar qualquer actividade educativa com calculadoras. São enviadas com portes pagos e somente é necessário realizar o pedido com a relativa antecedência.

Assistência de formação: proporciona-se assistência na formação de professores na aprendizagem e utilização de novas tecnologias...

Perante qualquer dúvida ou explicação estamos à sua completa disposição em:

TEXAS INSTRUMENTS

Programa Educacional,
Rua Brito Capelo, 822 1° Frt. 4450 Matosinhos
Tel: 02 938 64 76 Fax: 02 939 99 99
E.mail:xøtomasm@ti.com
Para mais esclarecimentos e encomenda de bibliografia de apoio ligue com linha ajuda Texas Instruments: 0505 32 96 27

CALCULADORA GRÁFICA - TI-83

A pensar nos novos programas do Ensino Secundário

Calculadora gráfica polivalente concebida para o 10.°, 11.°, 12.° Anos e Ensino Superior

10.° Ano	11.° Ano	12.° Ano	Universidade
- Estatística	- Funções	- Probabilidades	- Estatística
- Funções	- Cálculo	- Funções	- Probabilidades
- Cálculo	- Cálculo Financeiro	- Cálculo	- Funções
- Cálculo Financeiro		- Cálculo Financeiro	- Matemática Financeiro
			- Cálculo

TEXAS INSTRUMENTS

http://www.ti.com/calc

Os professores e os erros dos alunos

Maria Alice Inácio

A forma como os professores lidam com os erros dos alunos é um dos aspectos da relação professor-aluno que merece uma atenção especial. Efectivamente, ela vai moldar, em grande medida, a maneira como o aluno lida com os seus próprios erros e com o seu processo cognitivo.

Se considerarmos que o desenvolvimento cognitivo é, no fundamental, feito por auto-propulsão (Vygotsky, 1934, citado por Schneuwly, 1994), num processo de selecção natural dos procedimentos ajustados (Bickhard, a publicar), em interacção com o meio que cerca o sujeito, o erro tem, necessariamente, que ser visto como uma etapa natural.

Por vezes, deve mesmo ser encarado como indispensável ao desenvolvimento: quando o desenvolvimento se faz através de pequenas revoluções qualitativas — abandonando ideias pré-estabelecidas, relativizando conhecimentos antes considerados universais, por exemplo — é muitas vezes necessário passar pelo erro para ser possível avançar no conhecimento.

Tem sido assim a nível do desenvolvimento do conhecimento científico e é, em boa parte, assim a nível do desenvolvimento cognitivo individual (Bickhard, a publicar).

Ao procurar resolver uma situação problemática, o sujeito vai tentar mobilizar os conhecimentos/esquemas cognitivos que lhe pareçam isomórficos dessa situação. As condições em que esta tentativa se faz, são bastante diferentes na criança e no adulto: este tem o seu campo cognitivo bem organizado, em domínios com fronteiras relativamente estanques, e com relações organizadas entre os vários domínios.

É muitas vezes necessário passar pelo erro para ser possível avançar no conhecimento. Tem sido assim a nível do desenvolvimento do conhecimento científico e é, em boa parte, assim a nível do desenvolvimento cognitivo individual.

Assim, ao pretender resolver um problema de decimais, irá mobilizar esquemas cognitivos próprios deste domínio. A criança ainda não tem estes domínios organizados, pelo que facilmente pode mobilizar conhecimentos não ajustados à situação em causa. Facilmente funciona, então, por deslizamento (Vergnaud, 1990), utilizando esquemas que se encontram mais activos do que os ajustados.

É o que se passa quando o aluno responde às questões que a seguir se apresentam, do modo indicado nos quadros 1, 2 e 3, na página seguinte (Inácio, 1997)[1]:

1° item (quadro1)

Assinala o valor que está mais próximo do resultado de 5,271 + 3,2.

2° item (quadro2)

Em cada um dos pares, diz qual é maior:

2.1	*a) 6*	*b) 6 x 0,87*
2.2	*a) 6*	*b) 6 x 8,7*
2.3	*a) 6*	*b) 6 : 0,3*
2.4	*a) 6x 0,2*	*b) 6 : 0,2*

3° item (quadro 3)

Diz qual é maior:

a) 6 – 0,7 ; b) 6 – 0,3

No item 3, o aluno interpreta o sinal " – " de uma forma válida em muitas situações da vida corrente, como sinal de ligação, e não como sinal de subtracção.

Nos restantes itens, o aluno mobiliza processos ajustados à resolução de exercícios semelhantes no campo dos inteiros, mas que conduzem ao erro no campo dos decimais.

Quadro 1 (%)

	Turma 1	Turma 2	Global
5,303	10	19	14
8,471	90	71	81
530,3	0	5	2
0,5303	0	5	2

Quadro 2 (%)

		Turma 1	Turma 2	Turma 3
1º Par	6	81	43	62
	6x0,87	14	57	36
2º Par	6	33	33	33
	6x8,7	62	67	64
3º Par	6	48	71	60
	6:0,3	48	29	38
4º Par	6x0,2	38	76	57
	6:0,2	52	19	36

Quadro 3 (%)

	Turma 1	Turma 2	Global
6 - 0,7	10	57	33
6 - 0,3	86	43	64

Noutros momentos, a integração incorrecta dos conhecimentos que o aluno vai adquirindo leva-o a "inventar" regras processuais que o levam ao erro, como no caso do seguinte:

4º item (quadros 4a e 4b)

Considera os números: 3,021; 3,2; 3,009; 3,25.

a) Qual é maior?

b) Qual é menor?

Quadro 4a (%)

	Turma 1	Turma 2	Global
Resp. certa (3,25)	76	12	48
Resp. errada esperada (3,021)	5	0	2
Outras resp. err. 3,2 3,009 3,0009 e 3,21*	 19 0 —	 67 10 5	 43 5 2
Não responde	0	0	0

Quadro 4b (%)

	Turma 1	Turma 2	Global
Resp. certa (3,009)	76	71	74
Resp. errada esperada (3,021)	14	15	14
Outras resp. err. 3,021 3,25 3,2 e 3,25*	 10 0 —	 5 5 5	 7 5 2
Não responde	0	0	0

* foi o mesmo aluno que deu estas respostas às alíneas a) e b).

Ao analisarmos as respostas a cada uma destas alíneas de forma independente, obtivemos o resultado incompreensível de a maioria dos alunos que erraram considerar 3,2 como sendo o maior e o menor número de entre os números dados! Resolvemos, então, analisar as respostas às duas alíneas conjugadamente (ver quadro 5).

Tornou-se, agora, claro que parte das crianças raciocinava com base na regra (1ª regra) *quanto mais dígitos tem o número decimal depois da vírgula, menor ele é* (respostas erradas tipo B), enquanto que outros raciocinavam com base na regra (2ª regra) *quanto menos dígitos tem o número decimal, menor ele é* (Respostas erradas tipo A).

Segundo a investigação de L. Resnick (1987), estes últimos alunos têm um conhecimento dos números decimais menos elaborado do que os que raciocinam com base na 1ª regra, pois que utilizam uma regra válida nos inteiros mas não nos decimais, enquanto que os outros integram já no seu raciocínio o conhecimento de que, quanto mais dígitos há depois da vírgula, mais pequena é cada uma das partes em que a unidade é dividida.

Evidentemente que, quando o aluno tiver o campo dos números decimais bem estruturado e bem clarificadas as relações existentes entre este campo e o dos números inteiros, estes erros deixarão de ocorrer. Como é que isto se consegue, é a pergunta que se impõe e é bastante questionável que a repetição de regras, a automatização de processos ou a repetição da introdução aos números decimais — mesmo que por processos bastante inovadores, do ponto de vista metodológico — sejam métodos que conduzam os alunos ao sucesso.

De acordo com Booker (1988), não chega construir um processo correcto ao lado do que o aluno costuma utilizar, é necessário que este seja destruído. Qual deve, então, ser a forma de os professores lidarem com estas situações? Uma resposta cabal a esta questão está longe, de poder ser dada - se é que uma questão como esta, relativa, ao fim e ao cabo, às relações interpessoais, pode, algum dia, ter uma resposta cabal. Parece, contudo, valer a pena chamar a atenção para alguns aspectos fundamentais.

Quadro 5

Tipo de resposta	Maior	Menor	Turma 1 (%)	Turma 2 (%)	Global (%)
Resp. certa	3,25	3,009	67	14	40
Resp. errada tipo A1	3,2	3,009	10	57	33
Resp. errada tipo A2	3,2	3,25	0	5	2
Resp. errada tipo A3	3,2	3,21	10	5	7
Resp. errada tipo B1	3,25	3,2	5	5	5
Resp. errada tipo B2	3,021	3,2	5	0	2
Resp. errada tipo B3	3,009	3,2	0	10	5
	3,025	3,2	5	0	2
	3,0009 e 3,021	3,2 e 3,25	0	5	2

Um primeiro aspecto é a necessidade de o professor se descentrar do campo matemático estruturado que, naturalmente, é o seu, por inerência da sua formação académica. O professor precisa colocar-se na posição do não-conhecedor, procurando perceber os seus processos e quais as suas possibilidades de sucesso. Para isto, será necessário que consciencialize a teoria da construção do conhecimento matemático que utiliza, de forma a melhor interpretar as dificuldades sentidas pelos alunos e a estruturar metodologias de intervenção na sala de aula coerentes com a sua teoria de ensino-aprendizagem.

Segundo Booker (1988), estas metodologias deverão ter em consideração os seguintes passos:

1. identificar a estratégia da criança;
2. determinar a origem da dificuldade da criança;
3. conduzir a criança a ver que a sua estratégia é inadequada;
4. guiar a criança para a estratégia apropriada;
5. proporcionar prática que leve à generalização desta estratégia para situações mais complicadas.

A finalidade é ajudar o aluno a consciencializar o seu processo cognitivo. O problema que, penso, se põe é como conseguir isto com crianças de 10 - 11 anos, ou menos.

Vários autores (Meissner, 1986; Sierpinska, 1988) referem estudos com metodologias baseadas no conceito de conflito cognitivo: a ideia é pôr o aluno perante dois resultados contraditórios ou perante os limites dos seus próprios conceitos. Sierpinska chama a atenção para que só é possível tomar consciência de uma contradição se ela existir no campo cognitivo do sujeito, isto é, se o fundamental para ela deixar de existir já tiver sido alcançado; há, pois, todo um trabalho que tem que ser feito de forma a que o conhecimento tido pelo sujeito como absoluto seja relativizado. A autora descreve e analisa uma sua experiência sobre os conceitos de infinito, de infinitamente pequeno e de limite, com a finalidade de o aluno consciencializar a sua forma de ver estes conceitos, perceber que há outras formas de os olhar e quais são as consequências de uma ou de outra forma.

Borasi (1987, 1988) aponta para uma outra forma de olhar e explorar o erro na sala de aula, a partir da concepção de que todo o erro é relativo a um determinado quadro de referência :

$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}$ é um cálculo errado no domínio das fracções, mas não o é no das razões. Segundo esta autora, esta perspectiva potencializa a possibilidade de se explorarem diferentes campos matemáticos e leva o aluno a olhar para o que faz de forma diferente – mais como o resultado do seu ponto de vista sobre o assunto do que como fruto de uma qualquer incapacidade sua.

Vergnaud (1981) considera fundamental que o professor saiba quais são os teoremas e conceitos em acto que o aluno precisa dominar de forma a adquirir o conhecimento visado e que os saiba tornar acessíveis aos alunos. Brissiaud (1994) mostra claramente como isto pode ser feito no que respeita à aprendizagem da resolução de problemas cujo enunciado fale de aumentos, mas cuja solução algébrica é uma subtracção, como sejam:

"O João tem 5 berlindes; comprou mais alguns e ficou com 13. Quantos comprou?" ou

"A Maria tem 13 cromos e a Ana tem 7. A Ana quer ter tantos cromos como a Maria. Quantos cromos deve a Ana comprar?".

Depois de analisar o problema, estudando vários trabalhos relativos ao grau de sucesso de crianças do Ensino Primário neste tipo de problemas e ao tipo de estratégias de resolução utilizadas, Brissiaud postula que um maior número de crianças conseguirá resolver este tipo de problemas com sucesso se:

1. não forem obrigadas a resolver este tipo de problemas utilizando uma operação aritmética;
2. lhes fôr permitida e valorizada a resolução com base em desenhos e/ou objectos;
3. forem "ensinadas" a resolver subtracções utilizando a estratégia "de avanço": a finalidade é conseguir que o Sistema de Representação e Processamento Aritmético da criança seja completo, incluindo, além do esquema de resolução de subtracções, conhecido como "estratégia de recuo" (para resolver 13 – 7, fazem: 13, tira-se 1, ficam 12, 11 — tirou-se 2 , ... , 6 – tirou-se 7, resposta 6), o esquema baseado numa "estratégia de avanço": para calcular 32 – 29, fazem: 29 mais 1, 30; mais 2, 31; mais 3, 32; resposta 3. Segundo Brissiaud, as crianças podem ser levadas a construir este último esquema se lhes forem propostos problemas de subtracção com números escolhidos de tal forma que as leve a vivenciar um conflito entre os custos de utilizar uma estratégia mais elaborada – a de "avanço" – e os de utilizar uma estratégia mais simples, porque mais natural, mas mais trabalhosa – a de "recuo".

Este trabalho parece-nos dar pistas muito importantes para o que pode ser um trabalho que efectivamente venha a contribuir para alterar em profundidade a situação do Ensino/Aprendizagem da Matemática.

[1] Estes resultados foram obtidos pela autora ao aplicar uma ficha sobre decimais a duas turmas de 6º Ano de escolaridade de uma escola dos arredores de Lisboa.

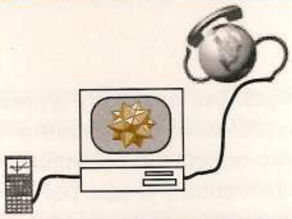
Referências

Bickhard, M. H. (para publicação). Critical principles: on the negative side of rationality. In W. Herfel & C. A. Hooker (eds) *Beyond ruling reason: non formal approaches to rationality.*

Booker, G. (1988). The role of errors in the construction of mathematical knowledge. In CIEAEM(org.) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la Mathématique*. Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.

(continua na página 30)

Tecnologias na educação matemática



Apenas à distância de um ou dois clics...

No passado dia 18 de Maio, às cinco e meia da tarde, Diana Funke, professora de Matemática da Escola Básica 2+3 de Davisville, em North Kingstown, Rhode Island, enviou uma mensagem para a *mailing list* "geometry-puzzles", do Math Forum, dizendo o seguinte:

> Estive a observar o valor de π com 10000 casas decimais e descobri que os dígitos não são assim tão ao acaso. Bom, são, excepto o 7, que aparece significativamente menos vezes que o resto dos dígitos. Alguém tem alguma informação, ou ideias, sobre por que razão isto acontece? Estou agora a tentar observar as primeiras 100000 casas, para ver se a ocorrência do 7 torna a ser menor. Sou professora de Matemática de uma escola básica, e isto é o tipo de coisas que fascina alguns dos meus alunos. Obrigado!
> Diana

Pouco horas depois, um grego, Antreas P. Hatzipolakis, respondeu assim:

> Bom, Diana, deves estar interessada em observar os primeiros 50 mil milhões de dígitos de π!
> Aqui está a tabela de distribuição dos dígitos:
> '0' : 5000012647; '1' : 4999986263;
> '2' : 5000020237; '3' : 4999914405;
> '4' : 5000023598; '5' : 4999991499;
> '6' : 4999928368; '7' : 5000014860;
> '8' : 5000117637; '9' : 4999990486;

Antreas aconselhava depois Diana, para mais informações recentes sobre π, a ir ver os endereços

http://combi.agri.ch/lucky/PiSites/Pi-Rekord.html

e http://www.ast.univie.ac.at/~wasi/PI/pi_normal.html

Se a Diana fosse portuguesa, eu também lhe teria dito para ir ver, no último número de *Educação e Matemática*, o interessante e informativo artigo de Joaquim Eurico Nogueira, "O número π: curiosidades e história".

É raro o dia em que não deparo, quando leio o correio electrónico, com episódios deste tipo. Pessoas, em particular professores de Matemática, interessados em saber mais, com suficiente iniciativa, simplicidade e energia para perguntar. E, por outro lado, pessoas generosas, em particular professores e especialistas nos vários ramos da matemática, que respondem com prontidão. Um dos factores principais da iniciativa dos professores, está claro, é a curiosidade própria, o interesse em saber mais do que o que está nos manuais escolares. Outro factor é a compreensão de que os seus alunos acabam realmente por ficar prejudicados se eles próprios não acompanham a evolução tecnológica, se, num mundo que evolui vertiginosamente, e em que a informação está apenas à distância de um ou dois clics... o horizonte informativo que está ao alcance dos alunos é o do manual adoptado.

Há um ano, ainda podíamos dizer: a Diana é americana, tem computador na escola ligado à Internet, tem a lista do Math Forum em inglês, *assim também eu*... Mas, embora existam algumas, ou mesmo muitas, dificuldades e insuficiências materiais, a situação mudou radicalmente no último ano. Existem computadores ligados à Internet nas escolas, a APM tem um *site*, uma das três componentes (Investiga & Partilha) do Forum Pedro Nunes está disponível, um consultório tecnológico está à espera de perguntas nesta revista, uma *mailing list* sobre tecnologias no ensino da geometria (GEOMTIC) foi criada — isto para referir apenas algumas inicativas em que a APM participa. Que faltará então para que isto tudo comece a ser mais utilizado? Reunimos nesta página indicações já anteriormente fornecidas sobre o modo como se pode aceder a esses recursos.

veloso@mail.telepac.pt

Páginas da APM. Esperam a sua visita (www.apm.pt). Quando começar a utilizá-las, notará certamente erros e insuficiências. Escreva-nos para apm@mail.telepac.pt.

Investiga & Partilha (I&P). Estimule os seus alunos a responder às tarefas de investigação propostas, do 2º ciclo ao secundário. Vá ao I&P pela APM ou directamente ao endereço: http://www.eseset.pt/ip/

Novas actividades são propostas periodicamente. Podem ser respondidas individualmente ou em grupo.

GEOMTIC. Lista de discussão (*mailing list*) para questões relativas à utilização de tecnologias (computadores, Internet, etc.) no ensino da geometria. Pergunte tudo o que quiser sobre este tema: "Como se resolve um dado problema com o Sketchpad, ou com o Cabri?" ou "Como posso obter determinado software?", ou... e obterá resposta! Para se inscrever na lista GEOMTIC envie um *e-mail* para listproc@fc.ul.pt *apenas* com a frase, no corpo da mensagem,

subscribe GEOMTIC René Descartes

ou o seu nome, no caso de não se chamar René Descartes.

Consultório tecnológico. Para qualquer questão ou problema que tiver sobre a utilização das tecnologias em educação matemática, envie à apm@mail.telepac.pt ou a veloso@mail.telepac.pt um *e-mail* e tentaremos responder-lhe nesta secção permanente da revista, pois as suas questões e as respostas poderão interessar outros colegas.

O Cabri na demonstração do Teorema de Pitágoras

Vidal Minga

É provável que num futuro próximo a aplicação ou a utilização do Cabri e de outras tecnologias modernas venham a modificar a didáctica das demonstrações, ou a introduzir uma nova didáctica neste domínio. É provável que os processos de aplicação destas potencialidades venham a transformar-se no equivalente das demonstrações, nessa didáctica futura. Mas por enquanto, este domínio ainda se encontra muito impermeável a tais modificações, resistindo fortemente à infiltração de processos cuja natureza não é intrinsecamente matemática.

No artigo "A minha experiência com o Cabri" publicado na revista de Educação e Matemática, nº 37, 1º trimestre de l996, (pp. 9-13), ficou a promessa de um novo trabalho com o intuito de clarificar melhor algumas questões que surgem a propósito das demonstrações e da sua necessidade, aquando da utilização das tecnologias avançadas, já que estas, como o Cabri e outras cada vez mais poderosas, evidenciam quase instantaneamente, aquilo que a demonstrar é de um modo geral, difícil e moroso.

Aqui estou eu, passado algum tempo, a tentar cumprir a promessa.

Desta vez, com uma outra figura construída no Cabri, e que foi utilizada para apresentar uma das muitas demonstrações do Teorema de Pitágoras. É uma figura dinâmica, que se pode modificar constantemente, por manipulação directa, dentro dos limites do écran, mantendo sempre a invariância das suas propriedades, como por exemplo a forma e as relações entre as suas diferentes áreas.

Por estas razões a figura transforma-se num campo adequado para nele observar e identificar algumas questões relacionadas com o uso das novas tecnologias, com a aplicação das suas potencialidades, com a tradição, e para ver como é que estas questões interagem entre si. Para não ir muito longe, faremos alguma reflexão apenas sobre as evidências instantâneas que as novas tecnologias nos proporcionam, as demonstrações matemáticas e os resultados destas demonstrações.

Não se pode, ou não se deve confundir evidência tecnológica com demonstração matemática. A evidência tecnológica apenas é comparável com o resultado da demonstração e não com a demonstração.

Este ponto de reflexão, bem como outros pontos com ele relacionados, têm como base a figura já anunciada para o teorema de Pitágoras, que descrevemos e apresentamos a seguir, e uma outra figura suplementar que apresentaremos mais adiante, sobre o fim do artigo.

1ª figura:

Sobre um triângulo rectângulo qualquer [ABC], fig. 1, construíram-se os 3 quadrados [AFPB], [BHJC] e [AGIC], correspondentes aos 3 lados do triângulo.

Para fazer a demonstração do teorema há necessidade de utilizar como auxiliares, os dois segmentos de recta [PG] e [GQ], este último,

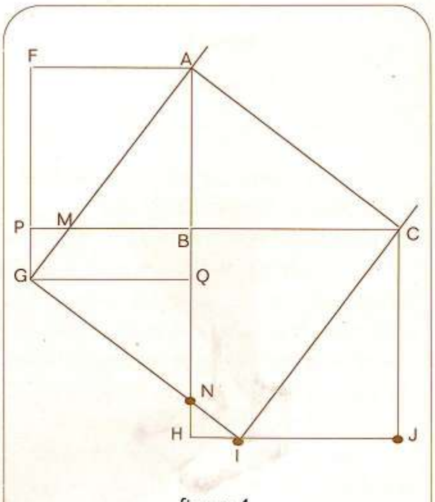


figura 1

paralelo ao segmento de recta [FA].

A demonstração é concretizada numa sequência de figuras onde se mostra ordenadamente o processo de cobertura de toda a superfície do quadrado da hipotenusa, quadrado [AGIC], com a totalidade das porções integrantes das superfícies dos quadrados dos catetos [AFPB] e [BHJC], convenientemente deslocadas de um sítio para o outro, da figura anterior para a figura seguinte. (fig.s 2, 3, 4, 5 e 6).

Esta sequência de figuras pode ser obtida quase de imediato, pela aplicação de uma "Macro" conveniente sobre dois segmentos de recta, traçados em ângulo recto, como elementos iniciais de qualquer uma das figuras. (fig.s 7 e 8)

Até aqui não se usou nunca a propriedade dinâmica da figura, mas o teorema ficou demonstrado, já que o triângulo inicial foi escolhido de modo arbitrário. Não se trata de nenhum triângulo especial em particular, o que confere generalidade à demonstração.

Na grande exposição de Matemática aberta à população que tem acompanhado os últimos ProfMat, encontra-se um outro exemplo de demonstração geométrica do mesmo teorema. Este exemplo mostra um outro enquadramento das áreas dos quadrados dos catetos, na área do quadrado da hipotenusa, a partir de uma figura de madeira, em que os seus elementos integrantes, triângulo e quadrados respectivos permanecem sempre iguais a si mesmos. É uma figura estática. Contudo ninguém duvidará que está ali uma demonstração generalizada, porque a escolha do triângulo que serve de base neste exemplo não obedeceu a nenhum critério especial em particular. Foi uma escolha arbitrária. Escolheu-se aquele triângulo como se poderia ter escolhido outro qualquer.

Numa sessão do Cabri no ProfMat de Évora, em 1996, referi este exemplo de demonstração geométrica, numa

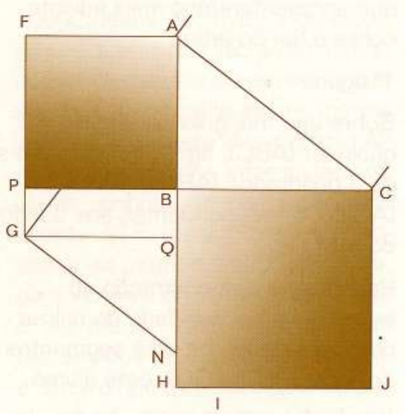


figura 2

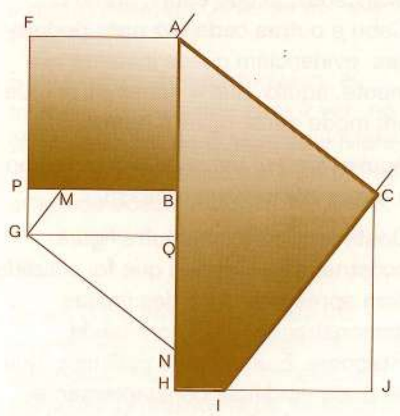


figura 3 — $\Delta[IJC] = \Delta[ABC]$

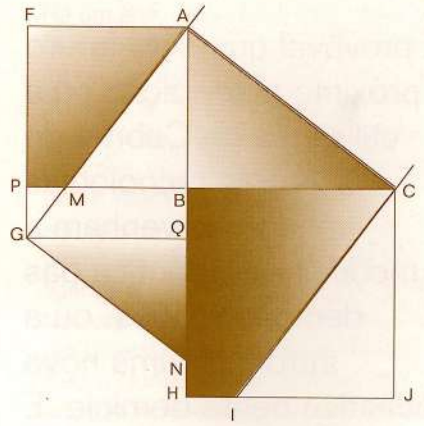


figura 4 — $\Delta[ABM] = \Delta[GQN]$

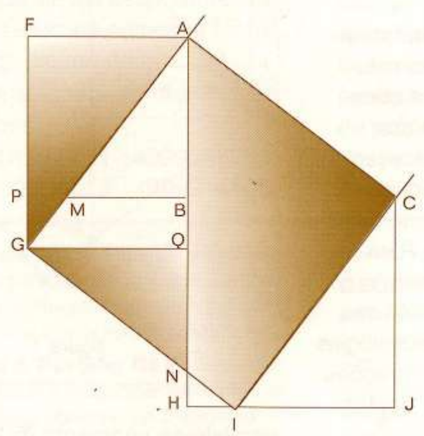


figura 5 — $\Delta[IHN] = \Delta[GPM]$

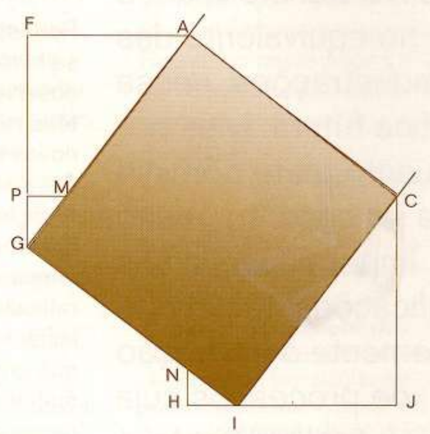


figura 6 — $\Delta[AFG] = \Delta[AQG]$

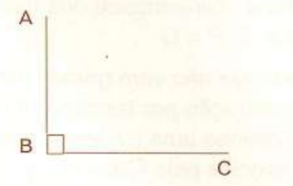


figura 7 — Elementos inicias

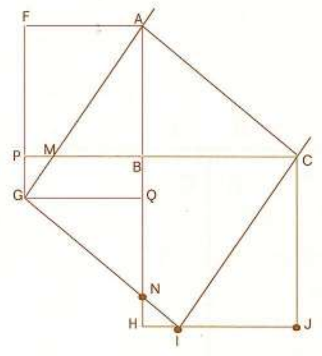


figura 8 — Resultado final

altura em que acabava de apresentar uma figura bastante semelhante, construída no Cabri para o mesmo fim. Dizia eu que "aquilo" era uma demonstração. Alguém comentou logo de imediato: "para aquele caso". Comentário que me deixou alguma perplexidade, porque a meu ver, "aquele caso", pelas razões já apontadas acima, é na verdade, uma demonstração autêntica.

A demonstração de Pitágoras foi com certeza uma demonstração do género, dado que a geometria era relevante no meio de todos os outros ramos da matemática da época.

É fácil de imaginar Pitágoras extremamente satisfeito quando descobriu a verdade do seu teorema, a propósito de um triângulo rectângulo qualquer, isto é, quando descobriu um processo engenhoso de comparar as áreas dos três quadrados do triângulo rectângulo e precisou com rigor a relação entre eles. Não havia dúvida. Estava diante de um triângulo particular, mas tinha descoberto uma lei geral. Um pensar diferente, o de Pitágoras ! E no entanto, apesar da sua certeza não terá deixado de multiplicar a experiência com outros triângulos, para concluir sempre a mesma coisa. O Cabri teria facilitado imenso esta tarefa a Pitágoras, mas ao tempo, o Cabri não existia e a tecnologia mais avançada da época estava na régua e no compasso.

Mesmo assim, Pitágoras deve ter andado entretido durante alguns dias, para gozo da sua curiosidade, a experimentar mais alguns triângulos. Poucos com certeza, uma meia dúzia se tanto!

Hoje com o Cabri nós podemos multiplicar as experiências de Pitágoras, por dezenas, centenas, milhares, por uma infinidade de triângulos rectângulos em escassos centésimos de segundo.

A figura com que iniciámos este trabalho é uma figura dinâmica construída pelo Cabri. Sendo dinâmica, leva algumas vantagens sobre as outras, as estáticas.

Podemos fazer observar a demonstração para outros triângulos rectângulos, para muitos outros, mesmo para uma infinidade deles, e tudo isto, dentro de um instante. Basta para isso, arrastar um qualquer dos vértices do triângulo, A, B ou C, para ver passar no écran, uma infinidade de triângulos rectângulos, onde a relação entre as áreas do quadrado da hipotenusa e as áreas dos quadrados dos catetos se mantém invariante, dentro da fórmula algébrica que traduz o teorema:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

A possibilidade de modificar uma figura por manipulação directa, mantendo invariantes a forma e as relações entre os seus elementos, é uma virtualidade do Cabri, cuja importância é de elevado alcance no ensino e na aprendizagem e geometria.

Assim, sobre a mesma figura, podemos fazer observar de imediato a validade do teorema nalguns casos particulares e até em casos limite, como aqueles em que se pode levar qualquer um dos lados do triângulo até ao anulamento.

A figura 9 obtida por arrastamento de um dos vértices do triângulo, mostra claramente a relação do teorema, no caso do triângulo rectângulo ser um triângulo isósceles.

Do mesmo modo se pode ainda exemplificar a mesma relação, verificando o que acontece quando se procede ao anulamento de um dos lados do triângulo, o que se consegue facilmente com o Cabri. Claro que esta relação se podia intuir racionalmente, mas poder vê-la, podê-la observar, é melhor.

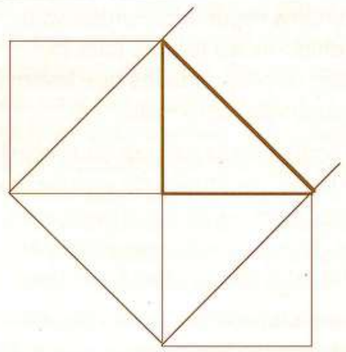


figura 9

É fácil de ver que, ao anular por exemplo, um dos catetos, a área do quadrado do outro cateto assume por si só, a área do quadrado da hipotenusa. Com efeito, o Cabri pode simular facilmente o comprimento de um dos catetos a tender para zero, e nós podemos observar perfeitamente a área deste cateto a anular-se igualmente, e a do outro a tender precisamente para a área do quadrado da hipotenusa, o que ainda confirma a relação do teorema de Pitágoras, neste caso-limite. (fig. 10 e11).

Com o Cabri, estas figuras podem ser construídas e apresentadas directamente aos alunos na própria aula. Sem o Cabri, era obrigatório construir

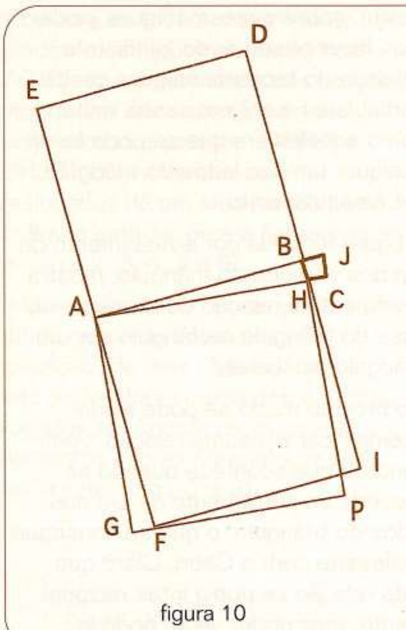


figura 10

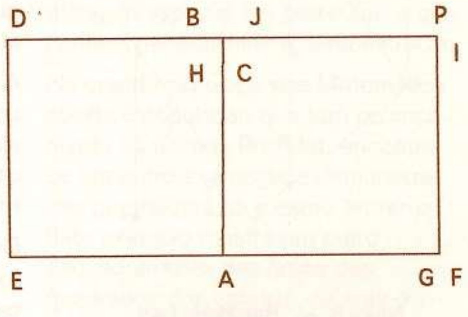


figura 11 — $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 0^2$

a figura antes, com o máximo de rigor, utilizando a régua e o compasso e sobretudo muito tempo, para lhe estudar as propriedades que levam à demonstração com êxito.

Não conhecendo a figura de antemão e tentando construí-la de improviso no quadro, iriam surgir inevitavelmente erros de construção que acabariam por tornar a demonstração inviável.

Na verdade, não era ponto assente, que o vértice I viesse a ser localizado exactamente no lado [HJ] e que o vértice G caísse exactamente no prolongamento rectilíneo do segmento de recta [FP], isto é, que os pontos F, P e G ficassem alinhados.

Estas condições cumprem-se pela natureza da figura, são óbvias, mas não se descortinam de imediato, numa construção improvisada. Usando o Cabri não há desvios de construção e não são necessárias correcções. A figura fica imediatamente pronta a utilizar com um vasto conjunto de possibilidades de transformação, de medição, de verificação, de repetição e de alterações, que muito facilitam o desenvolvimento da demonstração.

Na demonstração aqui apresentada utilizámos alguns destes recursos possibilitados pela tecnologia do Cabri. Todos os passos do seu desenvolvimento constituem uma sequência lógica, e aparentemente, a demonstração está correcta. Mas se reflectirmos um pouco sobre o modo como a figura foi preparada para dar início à demonstração, encontraremos nos traços auxiliares, nomeadamente no segmento de recta [PG], um pequeno pormenor que pode dar origem a alguns reparos.

Efectivamente, o passo da demonstração em que se substitui o Δ [AFG] pelo Δ [AQG] assenta a sua validade no facto de se considerar que o quadrilátero [AFGQ] é um rectângulo de diagonal [AG]. Este quadrilátero é um rectângulo se [FG]||[AQ] e estes dois segmentos de recta são paralelos se for garantido que os segmentos de recta [FP] e [PG] são colineares. Esta colinearidade não ficou garantida quando se traçou o segmento de recta [PG], unindo simplesmente os seus extremos. No entanto partimos para a demonstração, seguros de que os pontos F, P e G estavam alinhados e que o polígono [AFPG] era um triângulo e não um quadrilátero. Esta certeza assenta numa evidência fornecida pela tecnologia do Cabri, ou se quisermos, num resultado fácil de observar e de verificar manualmente utilizando uma simples régua. Se traçarmos o segmento de recta [FG] com o Cabri, verificamos que P $\in$ [FG] e se unirmos os pontos P e G com uma régua, verificamos que F $\in$ PG, o que mostra a colinearidade dos três pontos F, P e G.

É claro que não vem grande mal à demonstração por termos utilizado no seu caminho uma evidência tecnológica fornecida pelo Cabri ou um resultado fornecido por uma técnica mais rudimentar como a da régua. Todos sabemos como em matemática os conjuntos axiomáticos que fundamentam as diferentes teorias são constituídos por princípios evidentes, por resultados que se "vêem" e não se demonstram, por coisas simples e primitivas cuja verdade se aceita sem demonstração. E não se demonstram, porque é difícil demonstrar o que é evidente, o que é simples, básico e elementar como são os axiomas.

Mas demonstrar que [FP] e [PG] são colineares é possível, e por conseguinte, a demonstração deve ser feita. Para que a demonstração do teorema de Pitágoras por este processo fique completamente escorreita penso que é mesmo necessária esta demonstração prévia.

Visto que há com certeza mais do que uma demonstração e não querendo nós influenciar os leitores, deixamos este trabalho ao seu cuidado.

Para relevar ainda mais estas questões que foram sendo reflectidas ao longo destas linhas, permitam-me os leitores um pequenino problema, exclusivamente seleccionado para evidenciar melhor a diferença entre a verificação imediata de um resultado pelo Cabri e a demonstração matemática do mesmo resultado pelas propriedades matemáticas da figura.

O problema baseia-se numa figura dinâmica, a 2ª figura, construída também pelo Cabri, e foi recolhido do livro "Mathématiques, 2de , Nouveau Fractale", BORDAS, PARIS, 1994, pag. 43.

No Δ [ABC] da figura 12, I é o ponto médio de [AB], D e E os pontos definidos por:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC}$

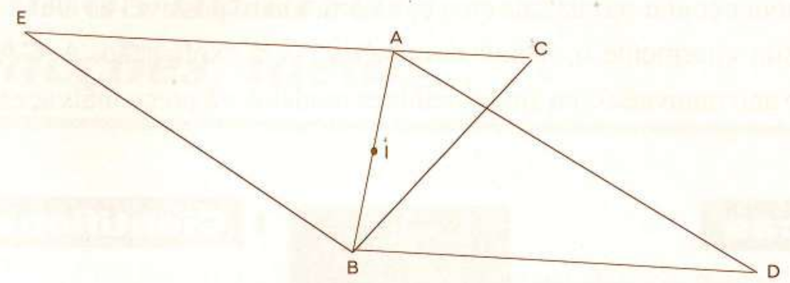


figura 12

Demonstre que os pontos D, I e E estão alinhados.

Se utilizarmos a tecnologia avançada do Cabri, basta traçar o segmento de recta [ED] e verificar que $I \in [ED]$; utilizando a técnica rudimentar da régua e seguindo uma estratégia idêntica, obtém-se o mesmo resultado. Contudo o Cabri leva uma pequena vantagem sobre a régua que é esta: como a figura construída com o Cabri é dinâmica, podemos verificar o alinhamento dos três pontos para cada um dos infinitos triângulos que se obtêm deslocando qualquer dos vértices do triângulo [ABC], para qualquer outro ponto do plano. Podemos até realizar esta operação levando, por exemplo, o vértice B até ao vértice C e verificar o alinhamento dos pontos E, I e D, para todos os triângulos [ABC]com o vértice B em cada um dos pontos do lado [BC], que são em número infinito como sabemos. Teremos assim uma demonstração por meio de uma verificação exaustiva da propriedade em questão para todos os elementos do conjunto de triângulos possíveis, ou seja, para todos os triângulos. É esta capacidade de levar as verificações de uma propriedade até ao último elemento de um conjunto, ainda que infinito, que não está ao alcance da régua. No entanto, neste caso, traduzi esta capacidade do Cabri numa pequena vantagem sobre as possibilidades da régua, pelo facto de que a única verificação feita com a régua sobre uma figura estática, com um triângulo [ABC] rígido, não nos deixaria muitas dúvidas sobre a colinearidade dos três pontos para qualquer outro triângulo, visto que o triângulo escolhido, foi escolhido arbitrariamente. Ficaríamos numa posição de certeza igual à de Pitágoras com o seu teorema, e só por mera curiosidade iríamos repetir a experiência, com outros triângulos. Para tranquilizar a consciência.

Em matemática a escolha arbitrária de um elemento ou de um conjunto de elementos para verificar propriedades fundamenta a estratégia de muitas demonstrações.

Penso porém, que aquelas demonstrações em cujo processo as componentes técnica ou tecnológica são predominantes em relação aos processos exclusivamente matemáticos são de certo modo demonstrações estranhas à natureza da matemática. Demonstrações bastardas. A demonstração matemática é algo para além da simples verificação de um resultado e consiste em provar a verdade desse resultado por meios exclusivamente matemáticos. Só esta demonstração é verdadeiramente superior.

Relativamente ao problema enunciado, a observação da figura sugere que se utilize o método seguinte: *três pontos estão alinhados se um deles é o ponto médio do segmento definido pelos outros dois.* Aqui demonstraremos que I é o ponto médio do segmento [DE].

Uma solução:

Pela definição de adição de vectores:
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$, donde:
$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$. Sendo $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AC}$,
vem $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
Então $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}$.

Daqui se deduz que o quadrilátero [AEBD] é um paralelogramo, e por conseguinte, as suas diagonais [AB] e [DE] têm o mesmo ponto médio.

O ponto médio de [AB] é I, e por isso é também o ponto médio de [DE].

Em consequência, os pontos D, E e I estão alinhados como se queria demonstrar.

O Cabri ajuda de uma forma extraordinária a descobrir os resultados, a pô-los em evidência, mesmo antes de os demonstrar. Mas se ao Cabri cabe descobrir resultados, cabe depois ao matemático demonstrá-los. O Cabri não dispensa as demonstrações. As evidências que surgem como consequência da aplicação das potencialidades do Cabri só podem ser comparadas aos resultados das demonstrações.

É provável que num futuro próximo a aplicação ou a utilização do Cabri e de outras tecnologias modernas venham a modificar a didáctica das demonstrações, ou a introduzir uma nova didáctica neste domínio. É provável que os processos de aplicação destas potencialidades venham a transformar-se no equivalente das demonstrações, nessa didáctica futura. Mas por enquanto, este domínio ainda se encontra muito impermeável a tais modificações, resistindo fortemente à infiltração de processos cuja natureza não é intrinsecamente matemática.

Notas para uma demonstração da colinearidade de dos três pontos F, P e G, da figura do teorema de Pitágoras.

1. $\overline{FA}=\overline{AB}$ e $\overline{AG}=\overline{AC}$
2. $F\hat{A}G = B\hat{A}C$
3. $\Delta[ABC] = \Delta[AFG]$
4. $F\hat{A}G + FGA = 90^\circ$ e
   $F\hat{A}G + G\hat{A}Q = 90^\circ$
5. $FGA = G\hat{A}Q$
6. FG II AQ

c.q.d.

Vidal Augusto Minga
Esc. EB 2+3
Paço de Arcos

Pontos de vista, reacções, ideias...

Uma Gincana

Todos nós, professores de Matemática, lidamos diariamente com alunos desmotivados para quem esta disciplina continua a ser algo aborrecido, sinónimo de falhanços sucessivos e pertença de pessoas sobredotadas. Cabe-nos mostrar que a matemática pode ser divertida e a resolução de problemas matemáticos pode proporcionar momentos nada enfadonhos. Foi com este objectivo em mente que concebemos uma gincana.

A gincana era composta de seis provas "matemáticas" e cinco provas "físicas", que serviam de ligação entre as primeiras. Nas provas "matemáticas" as equipas completaram quadrados mágicos, decifraram o valor de símbolos presentes em operações, resolveram problemas e puzzles com fósforos. Na última prova "matemática" as equipas revelaram a sua veia poética, elaborando uma quadra onde apareciam, obrigatoriamente, as palavras Gincana e Matemática. Eis os três resultados mais inspirados:

Estamos nesta Gincana
Para brincar
Jogando com a Matemática
Vamos ganhar

Agora que estamos na Gincana
Pensamos que vamos ganhar
Mas com a Matemática
Só nos conseguimos baralhar

Na Gincana da Matemática
Vamos participar
O nosso nome é Incógnita
E viemos para ganhar

As equipas de quatro elementos, podendo ser um deles um professor, entenderam no final que a matemática não é só resolver exercícios rotineiros e desprovidos de prazer. Foi gratificante observar o empenho das equipas e a sua satisfação quando conseguiam ultrapassar as provas, bem como, a participação de vários professores da escola, nomeadamente os de Educação Física e uma colega do 5º Grupo. Por tudo isto, pensamos que é uma actividade a repetir nos próximos anos. No final foi cantado em coro (desafinado é certo!) o "hino" da gincana - "Carta de um aluno à professora de Matemática" - criado pela Maria de Fátima Tomé também professora desta disciplina. A letra foi acompanhada pela música da canção "Bilhete postal" dos Rio Grande. Apresenta-se a seguir as primeiras quadras:

Qu'rida prof. eu queria agradecer
Este dia tão cheio de emoções
Mas também lhe quero fazer um [pedido
Por favor, acabe com as funções

Mas não pense que tenho aversão
Nesta disciplina que é pr'a pensar
A verdade é que não entendo nada
Dê-me 10 para eu poder passar.

Hoje sei resolver uma equação
Algumas já dão muito que fazer
Quanto ao resto, eu tenho muita [esperança
Sei que um dia eu irei aprender

Professores de Matemática, ES Nº 1, Loures

Da janela da Matemática penso a Língua Portuguesa

Nos inícios da década de 80, principiava a minha carreira de professora. Já não me lembro como, mas a verdade é que chegou às minhas mãos um texto intitulado "A evolução do ensino através da evolução de um problema de matemática. O texto tinha sido escrito por um grupo de professores da Escola Normal de Grenoble e fora publicado na revista *Science & Vie*. Com um enunciado de um problema, ao longo dos tempos, eram traduzidas e ridicularizadas a onda de facilitismo e as arbitrariedades que o ensino atravessava, terminando-se com uma previsão para a década de 90. Mas vejamos o texto.

Ensino de 1960: Um componês vende um saco de batatas por 100 francos. As suas despesas de produção elevam-se a 4/5 do preço de venda. Qual é o seu lucro?

Ensino tradicional de 1970: Um componês vende um saco de batatas por 100 francos. As suas despesas de produção elevam-se a 4/5 do preço de venda, ou seja 80 francos. Qual é o seu lucro?

Ensino moderno de 1970: Um componês troca um conjunto B grande de batatas por um conjunto M de moedas. O cardinal do conjunto M é igual a 100 e cada elemento b $\in$ M vale um franco. Desenha 100 pontos que representem os elementos do conjunto M. O conjunto C dos custos de produção compreende menos 20 pontos que o conjunto M. Representa o conjunto C como um subconjunto de M e responde à seguinte pergunta: qual é o cardinal do conjunto L do lucro (escreve-o a vermelho)?

Ensino renovado de 1980: Um agricultor vende um saco de batatas por 100 francos. Os custos de produção elevam-se a 80 francos e o lucro é de 20 francos. Trabalho a realizar: sublinha a palavra "batatas" e discute-a com o teu colega de carteira.

Ensino reformado de 1990: Um kanpunez kapitalista privilejado enriquesse injustamente em 20 francos num çaco de batatas, analiza u testo e procura os erros de kontiudo, de gramatica, de ortugrafia, de pontuassão e em ceguida dis o que penças desta maneira denriquesser.

Hoje estamos nos finais da década de 90 e, já sem a graça de outrora, podemos ficar apreensivos quanto às previsões que foram, feitas, não por terem sido excessivas, mas por terem ficado aquém da realidade. Se limitar a minha reflexão ao 3° ciclo do ensino do básico, ciclo em que a resolução do problema não deveria oferecer qualquer dificuldade, sei que uma grande parte dos alunos não corresponderia às expectativas, quer no domínio da Matemática, quer no domínio da Língua Portuguesa. Frases como:

"O meu resultado foi negativa ambos dois"

"Eu fiz sempre o tabalho de casa, mas copiei pelas soluções muito pouco"

"Fis quase sempre os trabalhos de casa ao primeiro copiei"

"Resultados dos testes —> insuficiente quase positiva 2 insuficiente eu desci correi-me mal"

"Ficha de auto avaliação — eu ás vezes a stora estava a por no quadro a escrever e eu não escrevia"

"Prenchi a ficha mas não me lembro do que lá puz. Porque esqueci-me dela"

"Os resultados dos meus testes não sei se são baixos ou altos mas apesar de tirar 2as negativas mas vou tentar me esforçar cada vez mais"

"tenho feito o trabalho de casa mas quando é raro não fazer peço ajuda a outra pessoa, que os tenha feito"

"o resultado dos textes não foram lá muito bons"

"acho que não foram mau de todo

são extraídas de algumas das auto-avaliações dos meus alunos. Nem sequer são das piores, mas chegam para mostrar o mau estado em que se encontra a língua portuguesa. Sei que a luta não é apenas dos professores de Língua Portuguesa. Todos nós, professores, devemos dar o nosso contributo para reduzir o insucesso escolar na língua materna. Cada batalha ganha é também uma vitória para os campos específicos que leccionamos.

Dilma Gomes
E.S. de Paços de Ferreira

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível na revista

IX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Vai realizar-se antes do ProfMat, nos dias 9 e 10 de Novembro próximo mais um seminário de investigação. Irá decorrer na E. S. Francisco de Holanda em Guimarães e, como já foi divulgado, está previsto o tratamento de temas diversificados, nomeadamente, Pensamento matemático, Desenvolvimento profissional, Internet na educação e Funções semióticas. Como habitualmente constarão do programa sessões plenárias — conferências e um painel, este dedicado à divulgação de projectos de investigação a nível nacional — comunicações orais e em cartaz

As inscrições estão já a decorrer — embramos que o primeiro prazo de é até dia 31 de Julho — e são bem vindas todas as propostas de participação, em forma de comunicação oral eu em cartaz.

Para qualquer informação contactar:

José Portela ou Isabel Vale
Dep. de Matemática, Ciências e Tecnologia, Esc. Sup. de Educação
Apart. 513 - 4900 Viana do Castelo

Os professores e os erros dos alunos

(continuação da p. 21)

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7, 3, pp 2 – 8.

Borasi, R. (1988). Alternative perspectives on the educational use of errors. In Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (Org.) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la Mathématique*. Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Brissiaud, R. (1994). Teaching and development: solving "missing addend" problems using subtraction. *European journal of Psychology of Education*, vol. IX, 4, pp 343 – 365.

Inácio, M. A. (1997). *Como os professores lidam com os erros dos alunos*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: ISPA.

Meissner, H. (1986). Cognitive conflicts in Mathematics learning. *Jornal europeu de Psicologia da Educação*, Vol. 1, n.° 2, pp 7 – 15.

Resnick, L. (1987). Constructing knowledge in school. In L. Liben (Ed.) *Development and Learning*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Schneuwly, B. (1994). Contradiction and Development: Vygotsky and paedology. In *European Journal of Psychology of Education*, IX, 4, pp 281 – 291.

Sierpinska, A. (1988). Sur la relativité des erreurs. In Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (Org.) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la Mathématique*. Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Vergnaud, G. (1981). *L'Enfant, la Mathématique et la Réalité*. Berna: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol 23, pp 133 – 170.

Vygotsky, L. S. (1934). Il problema della periodizzazione dello sviluppo infantile. In L. Mecacci (Ed.) *La psicologia sovietica* 1917 – 1936, pp 315 – 329. Roma: Riuniti, 1976.

Maria Alice Inácio
Esc. Sec. Eça de Queirós, Olivais

A lemniscata de Bernoulli

Adília Ribeiro e Helena Torres

A lemniscata foi descoberta por Jacob Bernoulli (1654/1705), em 1694. Neste ano publicou um artigo sobre uma curva em forma de oito ou de um laço dado com uma fita (*lemniscus*). Não estava no entanto convencido que a curva por ele descrita fosse uma curva de Cassini (ver caixa no texto). As propriedades gerais da lemniscata foram descobertas por Giovanni Fagnano em 1750.

Alguns métodos de construção

1º Método

- Desenhar uma circunferência de centro *C* e raio *r*. (fig. 1)
- Assinalar o ponto *O* (centro da lemniscata) de modo a que a sua distância a *C* seja $r\sqrt{2}$.
- Traçar uma recta *m* que passe pelo ponto O e intersecte a circunferência nos pontos *Q* e *Q'*.
- Na recta *m* assinalar os pontos *P* e *P'* equidistantes de *O* a uma distância igual a *QQ'*.
- Quando a recta *m* ocupa todas as posições possíveis, os pontos *P* e *P'* descrevem a *lemniscata de Bernoulli*.

Este método foi a base para uma construção com o *Sketchpad* (fig. 2)

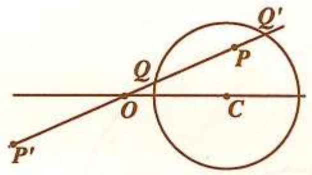


fig. 1

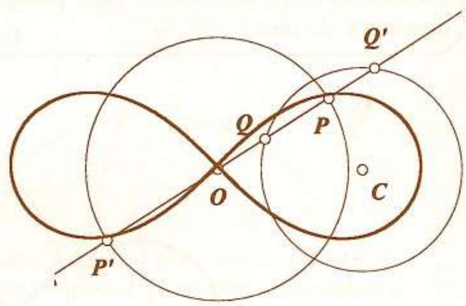


fig. 2

2º Método

- Desenhar duas circunferências, C_1 e C_2, de raio *r*, e cujos centros distem $r\sqrt{2}$. (fig. 3)
- Traçar um segmento de extremidades *M* e *M'*, de comprimento $r\sqrt{2}$ e tal que *M* e *M'* sejam pontos respectivamente de C_1 e C_2.
- Construir o ponto *P*, médio do segmento *MM'*.
- Quando o segmento *MM'* percorre todas as posições ppossíveis, *P* descreve a lemniscata de Bernoulli.

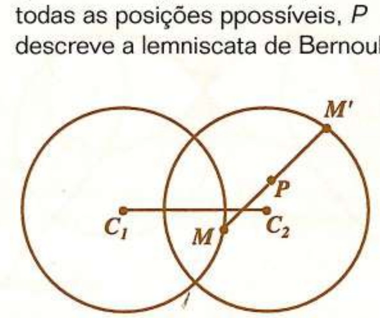


fig. 3

Nota: o segmento *MM"* nunca poderá estar paralelo a C_1C_2.

Este método fundamenta a construção de um mecanismo (fig. 7) para desenhar a lemniscata. Serve também de base para uma construção da lemniscata com o Sketchpad (fig. 5). Note-se que nesta construção foram necessários dois mecanismos (a cheio e a tracejado, para traçar a curva completa.

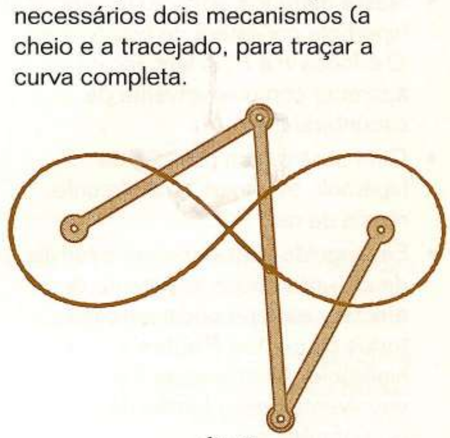


fig. 4

Ovais de Cassini

Giovanni Cassini (1625-1725), que dedicou grande parte da sua vida à astronomia, estudou em 1680 umas curvas, com forma oval, que julgava corresponderem aos movimentos relativos da Terra e do Sol. Ficaram conhecidas como as ovais de Cassini ou cassinianas. Caracterizam-se como o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante. Se a distância entre os focos é $2a$ e a constante b^2, a lemniscata de Bernoulli obtém-se quando $a = b$. As ovais de Cassini podem obter-se como secções planas de um toro por planos paralelos ao seu eixo (fig. 5). A lemniscata de Bernoulli é a secção por um plano paralelo ao eixo e tangente ao "equador interior" do toro. Na fig. 6, tirada da pág. da Internet http:/ www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/ CassinianOval_dir/cassinianOval.html, mostram-se as sucessivas ovais de Cassini para planos a distâncias diferentes do eixo.

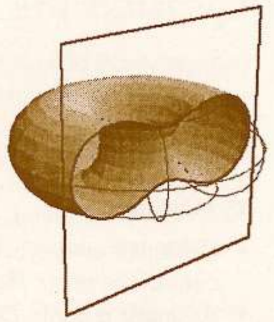


fig. 5

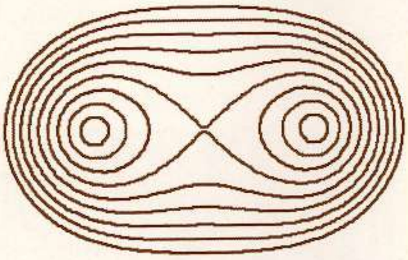


fig. 6

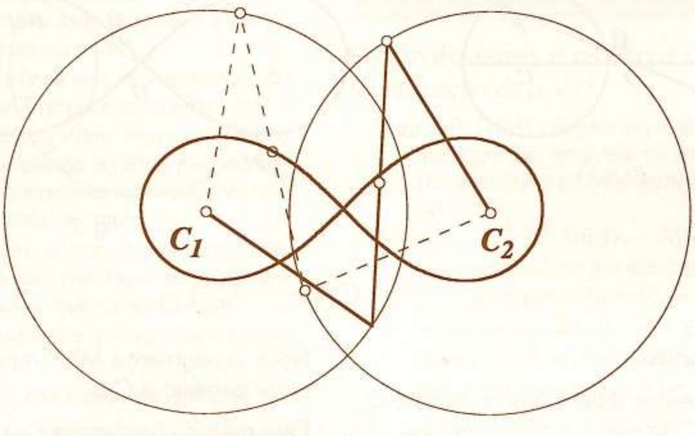


figura 7

3º Método

- Neste método partimos de uma hipérbole equilátera de centro em O e focos F e F'. A lemniscata vai aparecer como envolvente de circunferências.
- Com centro num ponto P da hipérbole traçamos uma circunferência de raio PO.
- Em seguida consideramos a família de circunferências resultante de efectuar este procedimento para todos os pontos P sobre a hipérbole. A lemniscata é a envolvente dessa família de circunferências.

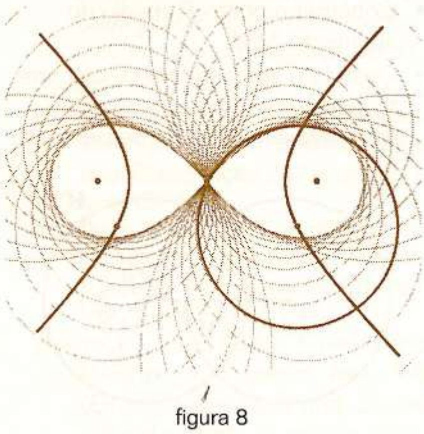


figura 8

Equações cartesiana e polar e algumas propriedades

Partindo de um dos métodos anteriores de construção e escolhendo um sistema apropriado de eixos coordenados (fig. 8), pode deduzir-se a seguinte equação da lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

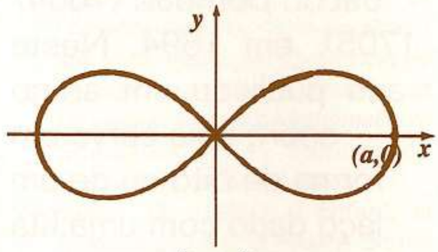


figura 9

Na teoria das curvas planas são estudadas dois tipos de lemniscatas, a lemniscata elíptica e a lemniscata hiperbólica, de equações respectivamente

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \text{ e}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2.$$

Como se vê, a curva estudada por Bernoulli é um caso particular de uma lemniscata hiperbólica, em que $b = a$.

Substituindo x e y, na equação (1), respectivamente por $\rho cos\theta$ e $\rho sen\theta$ e simplificando, obtemos a equação polar da lemniscata

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

Algumas propriedades

A lemniscata de Bernoulli tem simetria bilateral em relação aos dois eixos coordenados e simetria central em relação à origem *O*.

Consideremos os pontos F_1 e F_2, de coordenadas respectivamente $(a\sqrt{2}/2,0)$ e $(-a\sqrt{2}/2)$ (fig. 8). Podemos notar que estes pontos correspondem aos pontos C_1 e C_2 da fig. 3. Pois bem, estes dois pontos F_1 e F_2 gozam da seguinte propriedade:

> É constante o produto das distâncias de um ponto *P* qualquer, sobre a lemniscata de Bernoulli, a F_1 e a F_2.

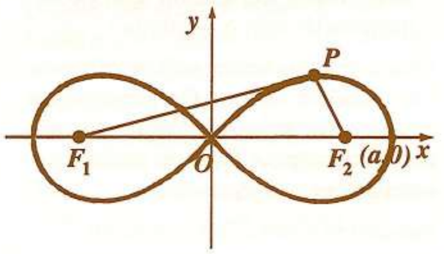


figura 10

Naturalmente, os pontos F_1 e F_2 são os chamados *focos* da lemniscata. A propriedade que enunciámos prova-se considerando as duas distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ e determinando o seu produto, em que *P* é um ponto de coordenadas (x,y) verificando a equação $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$. Conclui-se que esse produto é igual a $a^2/2$.

Lemniscata e hipérbole rectangular

Já encontrámos um método de definir a lemniscata a partir de uma hipérbole rectangular. Vamos referir-nos agora à lemniscata como inversa e como pedal em relação à origem de uma hipérbole rectangular (*inversa* e *pedal*: ver glossário na pág. 27 do número anterior da revista).

Inversa

Seja *c* uma curva cuja equação em coordenadas polares é $\rho = f(\theta)$. A curva *c'*, de equação $\rho = g(\theta)$, será a inversa de *c* em relação a uma circunferência de centro na origem e raio *k* se $f(\theta)g(\theta) = k^2$, para qualquer θ. Se a equação da curva c é da forma $\frac{\rho}{k} = f(\theta)$, então é fácil ver que a inversa tem por equação $\frac{k}{\rho} = f(\theta)$.

No caso da lemniscata, cuja equação em coordenadas polares é, como vimos, $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$, então a inversa tem por equação $a^2 = \rho^2 \cos(2\theta)$. Mas esta é precisamente a equação da hipérbole equilátera ou rectangular (assímptotas ortogonais)[1].

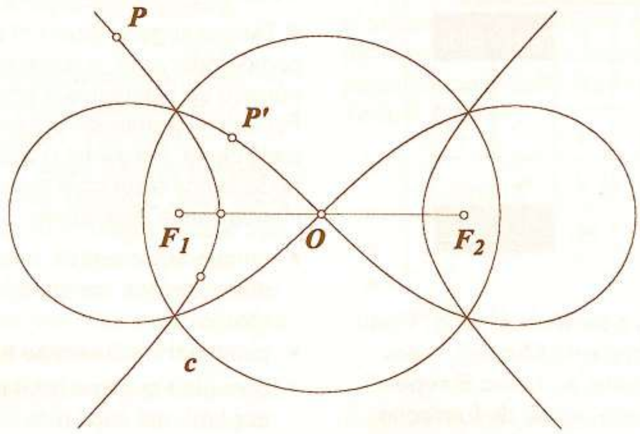


figura 11. F_1 e F_2 são os focos da hipérbole rectangular. *O* é o centro da hipérbole e *c*, de centro em *O*, é a circunferência de inversão. *P* é um ponto da hipérbole e *P'* o seu inverso.

Pedal

Outra relação entre a lemniscata e a hipérbole rectangular consiste no facto da lemniscata ser a pedal desta hipérbole em relação ao seu centro.

Isto quer dizer que se a partir do ponto O tirarmos perpendiculares às tangentes à hipérbole, o lugar geométrico dos pés das perpendiculares é a lemniscata de Bernoulli.

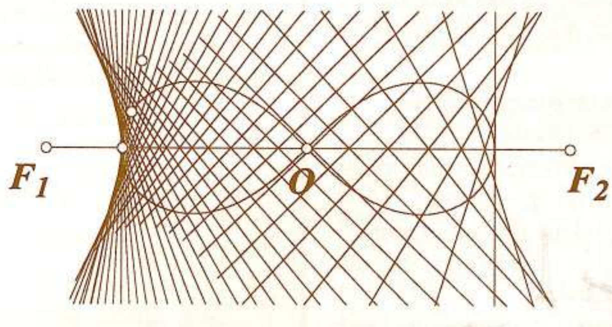


figura 12

Notas

1. Os desenhos das figuras 11 e 12 foram feitos recorrendo ao programa *Sketchpad*.

Bibliografia

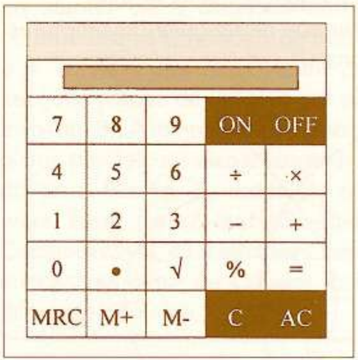
Lockwood, E. H.(1961). *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, F. Gomes (1908). *Traité des Courbes Spéciales Remarquables*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Adília Silva
Esc. Sec. Pedro Nunes
Maria Helena Torres
Esc. Sec. D. João V

Um trabalho com a calculadora

Mabilda Maria Neto Familiar



Estávamos a terminar o tema "Portugal na Europa e no Mundo", mais concretamente, a "União Europeia", quando, numa acção de formação que frequentei, Metodologias do Ensino da Matemática no 1° ciclo do ensino básico, foram propostas actividades onde se podia utilizar a máquina de calcular. Pensei que seria o momento de a utilizar com mais frequência, com os meus alunos.

Lecciono um grupo de 16 alunos de 4° ano e desenvolvi com eles um trabalho sobre a utilização da calculadora na sala de aula que tinha os seguintes objectivos:

- fazer e utilizar estimativas em situações de cálculo;
- explicar e confrontar as suas ideias com as dos companheiros;
- explicitar oralmente e representar por escrito os passos seguidos ao efectuar cálculos;
- procurar estratégias diferentes para efectuar um cálculo;
- fazer a cobertura de superfícies com a mesma unidade.

Depois de alguns dias de consultas e recolha de informação em livros, revistas, enciclopédias e jornais, fizemos, sobre cada país, o registo da moeda, da língua, número de habitantes e área em km^2.

Seleccionámos estes dois últimos temas (número de habitantes e área) e trabalhámo-los mais em pormenor.

A Tatiana sugeriu fazer um quadro no computador com: o nome do país, número de habitantes e área (fig.1). Foi feito e distribuído um exemplar a cada aluno. Perguntei o que é que poderíamos fazer com aqueles dados. Houve várias sugestões:

- comparar tamanhos: qual é o maior, menor, compará-los entre si, etc;
- comparar o número de habitantes;
- descobrir quantos habitantes havia por km^2 em cada país.

Todo o trabalho ia ser realizado tendo como base a utilização da máquina de calcular, pois tratava-se de cálculos com números grandes.

Então, olhando para o mapa diziam qual o país que lhes parecia maior, menor, este maior do que aquele... Em grupos de dois, faziam as verificações visuais. Pela observação do quadro concluíram qual era o maior (França) e o menor (Luxemburgo, pois é tão grande como o Algarve, disseram eles). Seguidamente perguntei:

- Quantos km^2 tem a França mais do que Portugal?

Depois deste cálculo, seguiram-se vários exemplos com outros países.

A Ana perguntou-me se podiam fazer exercícios com áreas. Respondi afirmativamente, perguntando quantas vezes o Luxemburgo cabe em Portugal. O André respondeu logo:

- É fácil!... Então, se o Luxemburgo é tão grande como o Algarve, cabe doze vezes porque há províncias maiores do que o Algarve.

Alguns concordaram, outros não. Passaram ao cálculo. Concluíram que cabia quase 36 vezes. Seguiram-se outros exemplos, fazendo sempre estimativas e registando-as.

Passámos à actividade seguinte sugerida por mim, calcular o número de habitantes por km^2 e verificar qual dos países tinha mais ou menos, comparando-os entre si.

Hesitaram e pediram "uma ajudinha". Após várias tentativas e em grande grupo, conseguiram calcular o primeiro exemplo. O cálculo dos exemplos seguintes tornou-se assim mais fácil.

Apesar de já anteriormente ter utilizado a máquina de calcular na sala de aula, usava-a apenas para fazer a verificação dos algoritmos. Agora a sua utilização era mais frequente e atractiva porque permitiu resolver as situações mais facilmente e com maior rapidez, não pondo de parte também o treino do algoritmo.

Claro que a Tatiana, mais uma vez, pôs à prova a sua habilidade com o computador e fez uma síntese dos resultados obtidos (fig. 2) que também distribuiu aos seus colegas.

A UNIÃO EUROPEIA

PAÍSES	ÁREA/KM^2	POPULAÇÃO
PORTUGAL	92.082	9.832.000
ESPANHA	504.782	38.820.000
FRANÇA	551.000	55.800.000
ITÁLIA	301.225	57.320.000
ALEMANHA	357.020	77.709.700
ÁUSTRIA	83.853	7.540.000
INGLATERRA	244.119	56.400.000
IRLANDA	70.283	3.030.000
BÉLGICA	30.513	9.860.000
HOLANDA	41.548	14.620.000
LUXEMBURGO	2.586	367.400
DINAMARCA	43.030	5.100.000
SUÉCIA	449.793	8.340.000
FINLÂNDIA	338.142	4.910.000
GRÉCIA	131.986	10.000.000

figura1

(continua na página 36)

O problema deste número

Da Europa à América, e volta

O problema do número anterior da revista foi este:

Devido aos ventos constantes que sopram de Oeste, a viagem de avião da Europa até à América demora mais tempo do que em sentido contrário.

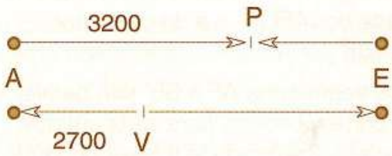
A Air Sky tem dois aviões iguais e faz carreira entre dois aeroportos, um em cada continente. Certo dia da semana, os aviões partem cada um de seu lado do Atlântico exactamente no mesmo instante. Quando se cruzam sobre o mar estão a 2700 quilómetros de um dos aeroportos. Chegados ao outro lado, fazem uma paragem de 2 horas para reabastecimento e regressam aos respectivos pontos de origem. Quando se voltam a cruzar estão a 3200 quilómetros do mesmo aeroporto considerado anteriormente.

Qual é a distância entre os dois aeroportos?

Chegaram 6 respostas: António Amaral (Lamego), António Ruiz Lozano (Lisboa), Francisco Estorninho & Alice Bárrios (Lisboa), Heitor Surrador (Aveiro), João Paulo Afonso (Mafra) e Teresa & Luis Vaz Pato (Galizes). O que mais nos agradou foi ver como o problema foi resolvido por tão diferentes métodos. Mas demos a palavra ao Heitor:

"Este é um daqueles problemas que parecem difíceis e que por vezes o são mesmo se os tentarmos resolver pelos métodos tradicionais. Mas, se nos abstrairmos das técnicas habituais e conseguirmos ter uma reacção a que Martin Gardner chama "Ah Ah!", alcançamos imediatamente a solução."

E segue-se um esquema e um raciocínio que foram também seguidos pelo João Paulo e pela Teresa & Luis:



À ida, os aviões encontram-se em P, a 3200 quilómetros do aeroporto americano (o enunciado não o diz, mas se admitíssemos que era do europeu, as conclusões seriam as mesmas).

À volta encontram-se em V.

O tempo que demoraram desde a partida até P tem de ser igual ao tempo que vão demorar desde V até à chegada, visto que as viagens terminam à mesma hora nos aeroportos de destino.

Como os tempos são iguais, as distâncias percorridas pelos aviões que vão contra o vento têm de ser iguais, logo a distância de P a E é igual à distância de A a V, ou seja, 2700 quilómetros. O mesmo se passa para os aviões a favor do vento: AP = VE = 3200.

Logo, a distância entre os aeroportos é 3200 + 2700 = 5900 quilómetros.

O António Amaral é grande adepto do programa Modellus e, é claro, usou-o de uma forma bastante criativa, pondo inclusive os aviões em movimento. E, ao "ver-se" tudo a andar, percebe-se logo qual é a solução.

Problema proposto

Na pista de dança

Outro dia fui a um clube de dança. Estavam lá sete pares a treinar para os próximos campeonatos de tango. Cada um dos dançarinos tinha o seu número nas costas. Números todos diferentes, claro, e que iam de 1 a 14.

Na primeira dança reparei num facto curioso: em cada par, a soma dos dois números era um quadrado perfeito.

Para a segunda dança houve troca de pares e nova coincidência se deu. Todos os pares tinham uma soma que era um número primo. E mais: nos três pares que estavam do lado esquerdo a soma era a mesma, os três que estavam à direita tinham somas iguais, e o par que dançava ao centro tinha uma soma diferente das anteriores.

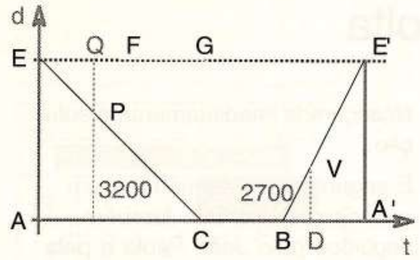
A Isabel tem o número 1 nas costas.

Quais são os números das outras seis dançarinas?

(Respostas até 15 de Setembro

As resoluções gráficas vieram do António Lozano e do Francisco & Alice.

Veja-se como tudo é claro. Queremos saber a distância de A a E.



A viagem de um avião está representada por AFGA' e a do outro por ECBE'.

Os segmentos AF e BE' são paralelos e correspondem, para cada um dos aviões, à velocidade a favor do vento. À viagem contra o vento correspondem os segmentos paralelos EC e GA'.

Os triângulos EPA e E'VA' são iguais (ângulos iguais e um lado igual).

Como EP é igual a VA', os triângulos PEF e VA'B são iguais. Logo, as alturas PQ e VD são iguais, e portanto a distância total é 5900.

Repare-se que é absolutamente indiferente o tempo que os dois aviões estiveram parados para reabastecimento.

Por fim, a Teresa e o Luis ainda resolveram o problema analiticamente. Há muitas variáveis e incógnitas, mas também se lá chega.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira, Lisboa

Visite a sede da APM

Encontros 98

III CIBEM

O 3° Congresso Ibero-americano de Educação Matemática decorrerá em Caracas, de 26 a 31 de Julho, na Universidade Central de Venezuela.

Este congresso realiza-se de quatro em quatro anos e tem como objectivos, entre outros: consolidar os laços científicos e culturais entre os profissionais da docência em matemáticas da comunidade iberoamericana; estabelecer espaços de intercâmbio de experiências na docência e investigações educativas matemáticas; analisar segundo uma perspectiva global os problemas que se abordam no terreno multidisciplinar da Educação Matemática; Intercambiar propostas para reconsiderar o impacto que tem a Educação Matemática no cidadão das nossas nações; analisar o impacto das comunicações e dos desafios do fim do século nos elementos básicos do acto educativo: professores, alunos, conteúdos, contexto, recursos, actividades e avaliação.

O encontro inclui conferências centrais feitas por professores e/ou investigadores convidados, conferências paralelas, painéis, comunicações breves, grupos de trabalho e cartazes.

Contacto: Prof. Cipriano Cruz, e-mail: cruzc@merlin.rect.ucv.ve

MEAS I

Esta primeira Conferência de Educação Matemática e Sociedade decorrerá de 6 a 11 de Setembro, em Nottingham, na Inglaterra. O encontro é organizado e patrocinado pelo novo Centro para o Estudo da Educação Matemática (CSME) da Universidade de Nottingham. Como convidados para as sessões plenárias deste encontro vão estar: Ubiratan d'Ambrosio, Stephen Lerman, Anna Tsatsaroni, Leone Burton, Ole Skovsmose, Alan Bishop, Jill Adler, Paul Dowling e Sal Restivo. Para mais informações visite as páginas da Internet:

http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/conf.html, ou, caso o seu browser não suporte frames, http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/meas2.html

Contacto: Peter Gates, e-mail: peter.gates@nottingham.ac.uk

Um trabalho com a calculadora

(continuação da p. 34)

PAÍSES	HABIT/KM2
PORTUGAL	106
ESPANHA	76
FRANÇA	100
ITÁLIA	190
ALEMANHA	217
ÁUSTRIA	89
INGLATERRA	231
IRLANDA	51
BÉLGICA	323
HOLANDA	349
LUXEMBURGO	142
DINAMARCA	118
SUÉCIA	18
FINLÂNDIA	14
GRÉCIA	75

Conclusão

Este trabalho foi desenvolvido ao longo de uma semana, e foi, para mim, um trabalho dinâmico e com muito interesse, pois, para além dos objectivos definidos, esteve sempre presente a interdisciplinaridade. Foi aliciante fazê-lo ao nível de todas as áreas. Notei desde o início grande entusiasmo, porque sentiram que com a utilização da calculadora, o cálculo e a resolução de problemas seria mais fácil, como de facto aconteceu. Tudo terminou com a elaboração de um álbum com todo o material recolhido, trabalhado e elaborado.

Mabilda Maria Neto Familiar
Escola nº 4 da Falagueira

Para este número seleccionámos

"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II)[1]

E. Paul Goldenberg

Publicamos a segunda parte do artigo de Paul Goldenberg, de que puderam ler a parte inicial no último número da revista. Enquanto na primeira parte o autor descreve o que pode ser um currículo em que o eixo central são os "hábitos de pensamento", no presente texto são descritos e exemplificados alguns deles.*

Alguns "hábitos de pensamento matemático" apropriados para o desenvolvimento curricular antecedente à especialização em matemática.

Os modos de pensar em matemática descritos a seguir, e os respectivos exemplos ilustrativos, são todos extraídos da colecção *Connected Geometry*.

A tendência para visualizar

Existe um grande conjunto de capacidades, relacionadas com este hábito de pensamento, e que não são ensinadas. Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de: criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; re*ver* e analisar passos anteriormente dados com objectos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objectos ou ideias que nunca foram vistos. Vem a propósito dizer que a habilidade para imaginar o que nunca foi visto é importante não apenas para abstrações matemáticas como pontos. Não podemos cortar o tecido para coser uma manga, ou desenhar os planos de uma estante, sem "ver" primeiro, na nossa cabeça, o que ainda não pôde ser visto com os próprios olhos.

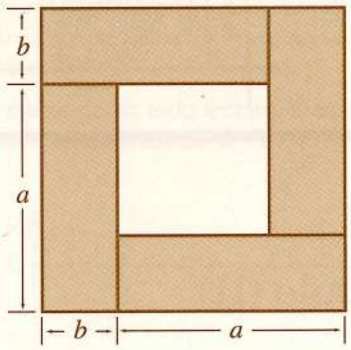
Tal como todas as destrezas, estas exigem aprendizagem, e devem ser sistematicamente construídas e exercitadas se se pretende que sejam adquiridas. As tarefas que contribuem para essa aprendizagem incluem propostas "não-matemáticas" como criar e ler imagens mentais para responder a perguntas do tipo "quantas portas tem a própria casa" (ou "de que cor estava vestido o companheiro do pequeno almoço"), ou analisar aspectos visuais (por exemplo, uma face ou uma "figura geométrica impossível") de modo que se torne possível desenhá-las. Também incluem tarefas reconhecidamente mais matemáticas como imaginar a sombra de um cubo iluminado obliquamente ou os tamanhos e disposição de quadrados (ou cubos) que utilizam dois pontos específicos do espaço como vértices, ou os sólidos que se obtêm quando se empilham camadas finas de material ou quando se rodam figuras planas. Estas destrezas têm larga aplicação. Para desenhar uma cena a partir da nossa imaginação, devemos ser capazes de imaginar as sombras correctamente; para fazer o *design* de uma peça de roupa, devemos ser capazes de imaginar o resultado final, e inferir correctamente a forma plana de partida e as transformações para a tornar na forma correcta tridimensional; para analisar um sólido em cálculo infinitesimal, ajuda a possuir algum sentido da natureza e carácter do sólido.

A visualização, talvez especialmente a componente da re*visão*, é também um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajudam a construir conexões lógicas e demonstrações. As destrezas que apoiam a visualização têm um preço: o seu desenvolvimento deve constituir uma parte explícita da aprendizagem do estudante.

Interpretação de diagramas

Para utilizar bem a visualização em matemática, devemos respeitar o seu poder, reconhecer as suas limitações e conhecer as suas formas e aplicações. A comunicação corrente em assuntos como comparações quantitativas ou diagramas de estruturas empresariais, faz uso intensivo de representações visuais de informação que é basicamente não-visual. O mesmo acontece em matemática. Para um matemático, um diagrama como o da fig. 1, é uma "demonstração visual" da relação algébrica que o acompanha.

* Este artigo é traduzido e publicado com autorização do autor. Foi publicado em 1996, com o título "'Habits of mind' as an organizer for the curriculum" no *Journal of Education* 178 (1):13-34, da Boston University.



$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

figura 1

Mas isto não é, e *não deve* ser de todo, uma demonstração para quem tenha falta de preparação e perspectiva para saber (1) que aspectos do desenho são específicos demais e devem ser ignorados (o desenho mostra tanto os tamanhos absolutos como relativos de *a* e *b*, que são irrelevantes), e também (2) que aspectos do desenho não estão suficientemente específicos e devem ser assumidos (enquanto os tamanhos são arbitrários e podem ser ignorados, os ângulos não são arbitrários e devem ser tomados como rectos mesmo se, num desenho executado sem muito cuidado, eles não o sejam). Por outro lado, os que estão mais maduros em matemática compreenderão (mesmo que possam não detectar a "falha" por si próprios) que o diagrama *apenas* é uma abreviatura de uma demonstração válida da identidade descrita pela equação quando *a* e *b* são ambos números reais positivos. Muitos currículos usam diagramas como este, mas não fornecem suficientes oportunidades explícitas aos alunos para aprender melhor como produzir ou transformar estes diagramas, ou para compreender o seu conteúdo e limitações. Uma vez mais, estas capacidades não são naturais e necessitam ser aprendidas.

A tendência para descrever, formal e informalmente, relações e processos

Para fazer matemática, deve-se ter tendência para detectar e ter em atenção relações (quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, estruturais, etc), processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter capacidades para as descrever. Deve-se ser capaz de dizer com clareza o que estas coisas significam. A linguagem natural (informal) é boa para esta última tarefa: exprimir o significado geral de uma situação, as linhas mestras de uma argumentação, ou dizer "do que se trata". Para exprimir o restante significado matemático, precisamos de diversas linguagens formais — sistemas simbólicos como a notação algébrica para exprimir relações quantitativas, entre outras, linguagens de computador como o Logo, para exprimir algoritmos e processos, e os vocabulários e estilos específicos que se usam no discurso matemático para argumentar com clareza. Embora os detalhes e a necessidade de rigor possam ser específicos da comunicação matemática, as mesmas capacidades de expressão são importantes na comunicação, num sentido amplo: devemos ser capazes de exprimir o sentido geral do que queremos dizer de modo não-técnico, e devemos ser capazes de acrescentar precisão de modos variados, incluindo quantitativos, relativos a procedimentos, e outros. Um currículo, ao mesmo tempo que comunica uma selecção de conteúdos matemáticos, deve estar organizado de modo a ajudar os alunos a desenvolver estas capacidades essenciais da comunicação matemática.

Podemos notar, a propósito deste ponto, que temos aqui um outro caso em que as capacidades e a tendência para as utilizar estão interrelacionadas. Uma pessoa *pode* reparar em coisas que está mal preparado para descrever, mas está em melhor posição para tornar mais acutilante a sua percepção se for capaz de falar sobre ela. Do mesmo modo, uma pessoa pode aprender um vocabulário, sem ter muito que dizer com ele, mas, tendo alguma coisa de valor sobre a qual falar, torna a tarefa mais fácil. Uma das coisas não compensa a outra, neste caso. Um currículo atingirá certamente melhor cada um dos objectivos se tiver os dois em conta.

O papel das definições na linguagem matemática merece menção especial. Um aspecto importante do bom uso da linguagem matemática é o cuidado que se tem com as definições. No uso corrente, a maior parte das palavras tem muitas definições diferentes. Definir os termos que se usam tem um papel extremamente importante no pensamento matemático, mas uma tal sensibilidade às *nuances* ou ambiguidades é também importante em direito, e para falar e escrever. Para desenvolver este tipo de preocupação em matemática, os alunos devem ter oportunidade não apenas para usar definições, mas também para as analisar e para criar as suas próprias definições. Para comunicar com clareza — e mesmo, em certas circunstâncias, para pensar com clareza — os alunos necessitam de ter ocasião para dar conta e reflectir sobre aquilo que querem dizer com os termos matemáticos que usam, e ver como o contexto afecta o significado.

Por exemplo, consideremos a definição de circunferência. Esta é habitualmente definida como lugar geométrico dos pontos (do plano) equidistantes de um dado ponto, mas raramente temos tendência para pensar muito sobre o que queremos dizer com distância. Se somos obrigados a deslocarmo-nos apenas em duas direcções perpendiculares (no reticulado de rectas perpendiculares característico da "geometria do motorista de táxi", usando a "métrica de Manhattan"), então um conjunto de pontos que estão todos à mesma distância de um dado ponto (ou seja, uma circunferência, pela nossa definição), tem, na geometria do motorista de táxi (e não do corvo voador) a forma de um quadrado com uma diagonal horizontal.

Na fig. 2, cada um dos pontos da "circunferência" dista do centro, para o motorista de táxi, três quarteirões.

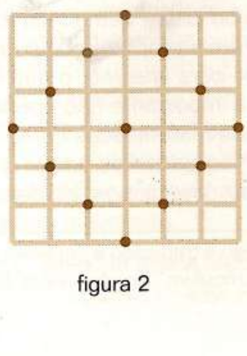


figura 2

Outras definições de circunferência — por exemplo, "uma curva de curvatura constante" — conduz a diferentes conjuntos generalizados. Mesmo no plano euclidiano, este conjunto inclui tanto circunferências como rectas; não é óbvio o que curvatura possa significar no plano da geometria do motorista de táxi.

Em alternativa, e com uma mensagem em parte diferente, imagine o que seria uma lista de cilindros pouco vulgares. A imagem de cilindro está tão ligada à forma e tamanho de uma lata de refrigerante que as pessoas têm que fazer um esforço para pensar em casos extremos: cilindros quase planos como numa moeda ou estreitos como um pedaço rígido de esparguete.

Um tal exercício tem muito mais consequências do que estender a nossa imagem de cilindro. É um dos primeiros exercícios para nos tornarmos conscientemente atentos à *independência* dos atributos que definem a forma: neste caso, reconhecer que o diâmetro da base e a altura são distintos, e que podem ser manipulados independentemente.

A tendência para traduzir informação apresentada verbalmente em informação visual (e vice-versa)

Em geometria, é muitas vezes pedido aos alunos que dêem sentido visual a descrições verbais (por exemplo, "Seja o ponto *M* a intersecção de duas medianas do triângulo *ABC* inscrito na circunferência *k*..."), e reciprocamente.

A capacidade de efectuar tais traduções tem muito valor também fora da matemática, não apenas para dar indicações claras ao viajante, mas também para descrever verbalmente uma bonita paisagem. De novo, situações matemáticas e outras que o não são tanto diferem, mas mais no pormenor do que em essência.

A tendência para fazer experiências (*tinker*)

Tal como ficamos a conhecer melhor os cilindros ao reparar nos seus atributos independentes e fazendo ensaios com eles, também ficamos a conhecer melhor um problema quando procuramos os seus atributos independentes, os mudamos e observamos os resultados. Os alunos devem aprender a fazer experiências e explorações. Um problema que é colocado a duas dimensões pode ser reexaminado a uma ou a três. Um problema que diz respeito a rectas pode ser reexaminado com linhas curvas. Um problema que é proposto no plano pode ser reexaminado numa esfera, num cilindro ou num toro. Um problema de números inteiros pode ser reexaminado com números reais. Um problema proposto em geometria euclidiana pode ser reexaminado na geometria do motorista de táxi. Quando os alunos fazem os seus próprios ensaios, ficam a reconhecer os factores independentes de uma situação problemática. Quando o currículo promove tais experiências, está a fornecer o contraponto necessário para que as ideias importantes se distingam nitidamente.

A tendência para procurar invariantes

Está aqui, em conjunto com a predisposição para encontrar argumentos lógicos (demonstração), o coração da matemática. Portanto esta procura de invariantes deve estar no centro do curso de matemática. Na medida em que a matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes: coisas absolutas ou relativas que permanecem fixas enquanto o que as rodeia ou partes delas variam. Arranjos visuais "mostram um padrão" quando alguma coisa (por exemplo, relações locais) permanece constante apesar da mudança numa outra coisa (por exemplo, a região particular onde estamos a focar a nossa atenção); os esquemas de classificação e as definições exprimem o que há de comum ou de equivalente entre elementos que não são idênticos; as funções são relações invariantes entre objectos matemáticos. O facto da invariância *estar* no centro da matemática significa que *qualquer* conteúdo pode ser usado para ajudar os alunos a criar este hábito de pensamento: e no entanto o conteúdo pode ser ensinado de um modo que não torna visível para os alunos este aspecto globalizante .

Para vermos o que pode significar a procura de invariantes, consideremos este exemplo da geometria. No interior de uma circunferência dada, colocar um ponto *P*. Por esse ponto *P* fazer passar uma corda a partir de um ponto *A* sobre a circunferência. Proceder agora à experiência mental de mover o ponto *A* sobre a circunferência, fazendo-o dar uma volta completa.

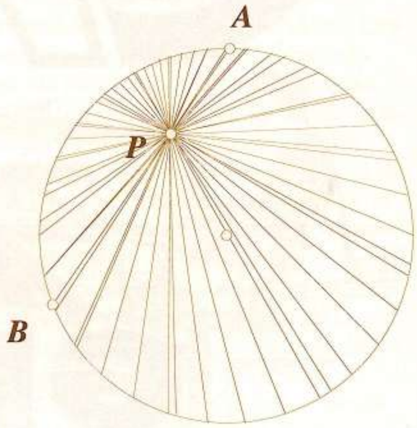


figura 3

Quando *A* se move, a outra extremidade da corda move-se também, e variam o comprimento (a não ser que *P* seja o centro da circunferência) e o declive da corda. As duas áreas em que a corda dividem o círculo também variam. Tudo parece variar, excepto aquilo que fixámos de princípio — uma circunferência e um ponto *P* fixos. Mas uma mente matemática sente-se infeliz se ficar por aqui. É uma característica da predisposição para a matemática perguntar se haverá alguma coisa nesta situação que *não* varie. De facto, há: uma relação funcional simples existe entre as duas partes da corda — o seu produto é constante —, sendo a distância entre *P* e o centro da circunferência um parâmetro desta função.

Até que tornemos este facto "óbvio", pela descoberta da razão porque tal acontece (por meio de uma boa demonstração), ele permanece inesperado.

Até termos encontrado essa demonstração, ainda não fizemos tudo o que um matemático faz, mas o acto de procurar invariantes é o início da matemática.[1]

Não esqueçamos de salientar que a noção de invariância é também essencial fora da matemática. Não podemos falar com inteligência sobre a história de uma língua, de um país ou de uma pessoa, sem identificar o que foi preservado e o que mudou. (Apenas posso falar sobre o meu próprio crescimento se assumir a existência de um Eu, através de mudanças em, virtualmente, todas as células do meu corpo e todos os pensamentos da minha mente). As categorias são também afirmações do que é invariante e o resultado da procura de invariantes. O dialecto "cockney" é uma abstracção das características comuns linguísticas de numerosas pessoas que têm vozes diferentes, falam sobre coisas diferentes, gaguejam ou não, e assim por diante. A língua inglesa é ainda uma abstracção maior — um conjunto invariante de propriedades de uma amostra muito maior de exemplos de modos de falar — e a família de línguas "germânicas" ou a reconstrução "indo-europeia" dizem respeito a invariantes ainda mais abstractos.

A tendência para misturar experimentação e dedução

A descoberta de padrões não é matemática (a matemática não é descoberta com base em dados), mas esta não é também feita apenas pela lógica. Mesmo antes da invasão dos computadores, os matemáticos sempre fizeram experiências. Muitas vezes estas experiências forneciam não apenas a conjectura, mas também alguma indicação sobre como poderia ser alcançada uma demonstração, ou alguma estrutura que mais tarde podia ser aperfeiçoada de modo a constituir uma demonstração. De modo semelhante, a procura lógica de uma demonstração sugere muitas vezes novas experiências. Para adquirir a compreensão da matemática tal como é feita, os alunos devem poder experimentar ambos os tipos de actividade, e ver como interagem. Um centro sério de incidência sobre a demonstração e sobre as suas partes constituintes (por exemplo, construir, e não apenas utilizar, definições) deve existir no currículo de Matemática e ser sistematicamente desenvolvido. Uma possível estratégia é ajudar os alunos a ver como podem (cuidadosamente) traduzir uma experiência em palavras, de modo a construir uma demonstração. (Para um exemplo, ver o ponto relativo aos algoritmos, mais à frente).

A tendência para construir explicações sistemáticas e demonstrações para invariantes observados

Um currículo razoável de matemática deve ter demonstração (adaptada à maturidade dos alunos) em todos os níveis e em todos os temas matemáticos, não apenas no curso de geometria do secundário. O que interessa não é a forma de uma demonstração, mas o acto de construir demonstrações e o conhecimento da estrutura de boa demonstração são essenciais em matemática.

Ao mesmo tempo que a demonstração é característica única da matemática, por causa dos critérios cuidadosos e do elevado nível que a matemática impõe ao seu raciocínio, o subjacento hábito de pensamento — mostrar como uma ideia deriva de outras — é uma disciplina central na literatura, na argumentação jurídica, na ciência e em geral, quando se pensa com clareza. *Todos* os alunos necessitam ter esta ideia básica. Os alunos não devem, certamente, confundir a indicação que dão das suas fontes e do seu raciocínio num trabalho de inglês com a apresentação dos dados e dos teoremas numa demonstração matemática e, por isso, para serem matematicamente "letrados", os alunos precisam mais do que a ideia básica. Mas é bom ser salientada a ideia de que podemos encadear os nossos pensamentos coerentemente, em qualquer disciplina, quando apresentamos e analisamos uma demonstração em matemática.

A tendência para construir algoritmos e raciocinar acerca deles (uma das muitas conexões com a álgebra)

Um princípio inicial no planeamento de *Connected Geometry* — de onde deriva mesmo o seu nome — era ajudar os alunos a construirem para si próprios uma imagem mais unificada da matemática. Em consequência, os problemas, o estilo, a estrutura e os conteúdos que seleccionámos deveriam, ao longo do currículo, fazer conexões entre a incidência central geométrica do curso e as ideias mais importantes da álgebra (o estudo de algoritmos, estrutura, cálculos, contagem, ...) ou da análise (o estudo da mudança contínua...).

A matemática analisa frequentemente algoritmos. Contrastando com isto, a experiência típica dos alunos é aprender algoritmos mas raramente inventá-los ou mesmo analisá-los. Um exemplo flagrante é a aritmética da escola elementar. A proficiência na execução do algoritmo da divisão com números grandes pode ter relativamente pouca importância nesta era da calculadora, mas compreender como funciona o algoritmo (e não meramente como obter na calculadora o resultado) explica, por um lado, porque se obtém um padrão de repetição na expressão decimal de 1/7, e porque se obtém o mesmo padrão de repetição (embora "deslocado") na expressão de 4/7. A análise do algoritmo está bem dentro das capacidades dos alunos da escola elementar — enquanto alcançar proficiência na sua execução pode requerer trabalho compulsivo enfadonho — e mesmo assim fornece certos conhecimentos que são a base para estudos em álgebra e em teoria dos números. O mesmo se pode dizer em relação à compreensão do algoritmo da multiplicação.

Os alunos que seguem o currículo *Connected Geometry* aprendem muito sobre a construção e análise de algoritmos num contexto geométrico. Alguns exercícios pedem aos alunos que escrevam algoritmos em Logo e que os comparem para descobrir invariantes geométricos; e depois, a partir da análise dos algoritmos, para construir demonstrações para esses invariantes. Outros requerem apenas a "tecnologia pobre" do papel e das tesouras.

É bem instrutivo estudar um exemplo com algum detalhe.

Veremos como a análise de um algoritmo conduz à análise da demonstração. A proposta inicial feita aos alunos pede-lhes que resolvam o problema de encontrar um processo seguro de transformar, por dissecção (dividir em partes e reuni-las de novo noutra figura), um triângulo num paralelogramo. Depois é-lhes pedido que transformem, do mesmo modo, um trapézio num rectângulo. Normalmente os alunos descobrem rapidamente soluções para o primeiro problema (por exemplo, cortar segundo uma mediana e rearranjar as duas partes), mas é um desafio maior para eles mostrar porque razão funciona o processo — isto é, demonstrar que as duas partes se podem unir de forma a obter um quadrilátero, não um pentágono, e que todas as outras propriedades dos paralelogramos se verificam.

Quando mais tarde transformam trapézios em rectângulos, de novo encontram rapidamente um algoritmo, mas tipicamente este algoritmo exige que se veja o trapézio como um rectângulo "ensandwichado" entre dois triângulos (fig. 4), da seguinte forma:

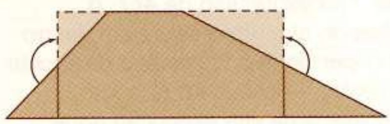
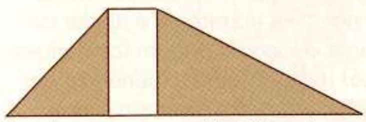


figura 4

Construa os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio. A partir destes pontos, trace perpendiculares aos lados paralelos, cortanto dois pequenos triângulos do trapézio. Rode os triângulos 180° em torno dos pontos médios criando um rectângulo.

Quando se pede aos alunos para justificar este procedimento como um algoritmo geral — para transformar qualquer trapézio num rectângulo — eles recorrem frequentemente aos algoritmos que construíram e provaram para os triângulos.

Esta solução tem elegância, no sentido em que se apoia em trabalho anterior já demonstrado. O facto de conduzir também a uma fórmula correcta para a área do trapézio parece confirmar que este processo é um algoritmo seguro para fazer a dissecção de um trapézio de modo a transformá-lo num rectângulo.



Resolve-se para os dois triângulos; a forma exacta do rectângulo intermédio não interessa.

figura 5

No entanto, tem uma falha importante. Nada garante que um trapézio geral possa ser decomposto em dois triângulos ladeando um rectângulo central.

Se se faz a dissecção do trapézio da figura 6

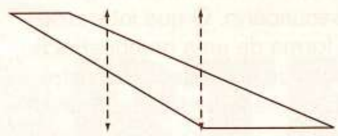


figura 6

de acordo com o algoritmo apresentado, o resultado é esta baralhada:

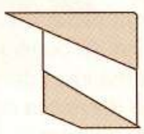


figura 7

É fácil ver que cortes adicionais deveriam ser feitos para resolver a situação, mas o algoritmo, tal como foi apresentado, falha. Este problema ilustra vários princípios, mas o foco aqui é a análise do algoritmo — que é equivalente à análise da demonstração.

A tendência para raciocinar por continuidade (uma das muitas conexões com a análise)

Tal como o Logo é uma tecnologia que centra a atenção na estrutura algorítmica, instrumentos para geometria dinâmica como o *Geometer's Sketchpad*, *Cabri* ou o *Geometry Inventor* ajudam a ampliar a ideia de funções num domínio contínuo e a construir conexões entre a geometria e a matemática da mudança contínua.

Com estes instrumentos dinâmicos, os alunos criam construções, e arrastam um ponto sobre o ecrã ao mesmo tempo que observam o efeito que isso tem num outro objecto (ponto, segmento, medição, ...) ou relação entre objectos. Isto é a imagem de uma função num domínio contínuo em que a variável independente não é um número, o valor da função não é necessariamente um número e a definição é expressa não em notação algébrica mas geométrica. O livro *Optimization: A Geometric Approach* (EDC, 1996) desenvolve e usa muitas ideias do cálculo (por exemplo o teorema do valor intermédio, mas também ideias sobre curvas de nível e condições de tangência para encontrar extremos, e outras ainda) sem utilizar a maquinaria algébrica. Além de construir ligações conceptuais entre estes dois ramos da matemática, esta abordagem ajuda os alunos a desenvolver ideias que depois a linguagem algébrica pode exprimir e ampliar, em contraste com a abordagem tradicional de estudar uma linguagem sem ter ideias para exprimir com ela e depois, mais tarde, basear essas ideias numa linguagem ainda mal dominada.

Repensar a organização curricular de modo mais amplo

Argumentei a favor de que os modos de pensar, e não os produtos desses modos de pensar, devem orientar a organização do currículo de matemática. As razões que adiantei eram basicamente uma argumentação a favor da igualdade de oportunidades (*equity*), ou seja que esta era uma forma de servir *todos* os alunos e não apenas uma parte.

O conceito de procura de invariantes é um primeiro exemplo de uma ideia matemática, central e de nível elevado, que pode ser considerada de uma forma que permite a aprendizagem de bons princípios de pensamento que transcendem as disciplinas. A literatura sobre a "transferência" espontânea não é encorajadora, mas porque razão devíamos esperar que a transferência ocorra quando os temas são pensados de modo completamente isolado?

Quando a incidência central é o conteúdo matemático e ficam na rectaguarda os modos de pensar — as ideias que na realidade estão mais livres para ser transferidas —, estes podem perder-se. Quando o foco é nos modos de pensar, e especialmente quando os exemplos salientam a possibilidade de transferência, existe uma maior probabilidade de que sejam feitas as conexões correctas — conexões que servem a matemática de modo admirável, mas são úteis a *todos* os alunos independentemente dos seus interesses específicos.

De facto, existe um outro conjunto de razões que torna esta causa ainda mais defensável. Pode argumentar-se que utilizar factos e procedimentos na organização do currículo em lugar dos modos como as pessoas descobrem os factos e inventam os procedimentos *não* serve nenhum aluno adequadamente. A verdade é que pensar no futuro é simplesmente um negócio arriscado. A experiência ensina-nos que quando os alunos da primeira classe de hoje sairem da escola secundária, vão encontrar muito provavelmente problemas que ainda não existem. Dada a incerteza sobre as necessidades da próxima geração de jovens adultos, não podemos decidir que matemática ensinar baseados nos problemas actuais ou mesmo na nossa melhor previsão dos problemas de amanhã. Questões como "Devemos ensinar teoria dos grafos ou geometria no espaço? fazer modelação com álgebra ou com folha de cálculo? O teorema do binómio é parte do núcleo central do currículo ou é apenas para alguns alunos?" são as perguntas erradas a fazer, e, planear novos currículos em torno das respostas a estas questões é uma má ideia.

Durante gerações, os alunos do ensino secundário estudaram na escola qualquer coisa a que se *chamava* matemática mas que tinha pouco a ver com o modo como a matemática é criada ou aplicada fora da escola. Uma razão para este facto tem sido uma visão do currículo em que os cursos de matemática são apenas vistos como mecanismos para comunicar resultados e métodos. Os alunos aprendem a resolver equações, a calcular áreas e a determinar os juros de um empréstimo. Nesta perspectiva da matemática, a reforma do currículo significa simplesmente substituir um conjunto de resultados já estabelecidos por outro (talvez mais novo ou mais na moda). Assim, em vez de análise, os alunos estudam matemática discreta; em vez de geometria euclidiana, estudam geometria fractal; em vez de probabilidades, estudam análise de dados. Mas o que fazem com árvores binárias, com curvas flocos de neve e com diagramas de dispersão é a mesma coisa que faziam com hipérboles, triângulos e distribuições binomiais: aprendem algumas propriedades, resolvem alguns problemas aplicando as propriedades, e passam à frente. Os contextos em que trabalham podem ser mais modernos, mas os métodos que utilizam estão tão longe da matemática como há vinte anos.

Um modo alternativo de pensar o currículo volta às avessas as prioridades. Muito mais importantes que resultados específicos da matemática são os hábitos de pensamento que foram utilizados pelas pessoas que criaram esses resultados. Mas esta maneira de ver o currículo tem uma aplicação muito mais ampla do que apenas na matemática. O problema da transferência, que parece sempre escapar às nossas abordagens, estaria mais perto de ser resolvido se *todos* os currículos começassem por perguntar "Que 'hábitos de pensamento' precisamos para viver em segurança, com saúde, com emprego e produtivos, socialmente conexos...?" e, especialmente, "Que hábitos de pensamento precisamos de modo que nos saibamos adaptar a obstáculos imprevistos e novos problemas que tenhamos que enfrentar para viver seguros, com saúde, produtivos, etc.?"[2] (Esperem! Devemos também perguntar que capacidades secundárias e conhecimentos precisamos, mas deixemos isso para um pouco mais tarde). As categorias de que nos lembramos são um pouco mais amplas do que as que listámos acima, mas não essencialmente diferentes. Para matemática, poesia, política ou direito, ou a gestão da própria saúde, precisamos de ser capazes de comunicar com clareza; para a gestão financeira pessoal, questões jurídicas, ecologia, gestão dos negócios ou matemática, necessitamos ter capacidade para raciocinar sob um conjunto de condições restritivas; para tudo o que requeira diagnóstico, desde detectar os males de um carro até detectar os males de uma pessoa, precisamos de saber como testar e experimentar, como procurar relações de dependência e como raciocinar logicamente. E assim por diante. Nenhum item deste *tipo* de lista pertence exclusivamente a uma disciplina actual. A Matemática pode ajudar a ensinar estes itens, mas o mesmo podem fazer outras disciplinas.

A segunda questão deveria, provavelmente, ser a seguinte: "Que contribuições especiais para tal hábito de pensamento pode dar a *minha* disciplina?" Dado que o nosso mundo é cada vez mais interdisciplinar e dada a minha preferência para pensar em ideias que atravessam as disciplinas, poder-se-ia perguntar porque razão continuo a pensar em termos de disciplinas. Existem duas razões. De um ponto de vista prático, as pessoas especializam-se, seja por interesse seja por limitações de tempo e oportunidade. Por isso, não é razoável esperar que muitas pessoas sejam ao mesmo tempo amplamente interdisciplinares e sejam profundas em várias áreas. A segunda razão é que não apenas as pessoas mas os próprios domínios especializados dependem de uma atenção sustentada e centrada. A distinção biologia-química-física dos meus anos no secundário deu lugar à bioquímica, biologia-molecular, química física, biofísica e muitas outras áreas que atravessam aquela distinção, mas não são tanto áreas interdisciplinares como disciplinas novas e ainda mais especializadas. Para fazerem progressos, elas não podem estar isoladas, mas também não podem ser difusas ou diluídas. Para ser mais específico, se a matemática deve permanecer uma disciplina, então não pode ser dissolvida até ao desaparecimento.

Assim, pode *ainda* fazer sentido as escolas terem departamentos de Matemática, Arte, Ciência, História, Música, Línguas Estrangeiras, e Inglês, apesar de lhes ser pedida uma organização do currículo que não consista nos conteúdos que as distinguem. Além disso, cursos nestes departamentos devem também ser fieis à natureza, aos métodos e aos conteúdos referentes a cada caso, tal como afirmei que os cursos de matemática devem ser. Mas a razão de tal fidelidade não é que se pretenda formar historiadores, investigadores matemáticos ou artistas, nem é sequer a organização por assuntos justificável por "largueza de vistas". Se qualquer destas razões fosse verdadeira, devíamos então perguntar por que não existem departamentos de linguística, psicologia, ciência política ou economia nas escolas públicas. Existem demasiados assuntos para aprender — muito que *vale a pena* aprender — que possa caber na educação geral.

Por um lado, desenvolver com mais profundidade algumas áreas faz-se à custa das outras; mas, por outro, a tentativa de expor os alunos a demasiada matéria torna impossível alcançar profundidade em *qualquer* delas, o que, pode argumentar-se, prejudica *todas* as áreas, dado que os alunos não chegam a experimentar o que é pensar continuadamente ou prestar mais do que uma atenção superficial a determinado tema. Uma parte da aprendizagem para enfrentar um futuro que apenas pode ser fracamente previsto requer saber que é possível adquirir proficiência num domínio, seja de uma disciplina intelectual, seja uma capacidade manual ou mesmo um passatempo (*hobby*). Isto quer dizer, num certo sentido, que escolher departamentos da forma tradicional *não* prejudica disciplina alternativas. Pode ser que se venha a perguntar, na base de outras considerações independentes, se a organização tradicional nos departamentos habituais é a melhor, mas a perspectiva dos hábitos de pensamento não fornece, por si mesma, base para isso.

Só depois de termos perguntado, em primeiro lugar, quais são os hábitos de pensamento que precisamos e qual é a melhor contribuição que a nossa disciplina pode dar para o seu desenvolvimento, chega o momento de colocar questões sobre conhecimentos e capacidades. "Que conhecimentos e capacidades, na minha disciplina, ajudam melhor a transmitir a mensagem sobre o pensamento (que o currículo comporta)?", e, considerando a lista que obtemos como resposta à primeira questão, "Quais podem transmitir da melhor forma o gosto (*flavour*) da minha disciplina?" e, no fim de tudo, "Quais podem ser mais amplamente úteis aos alunos?". Haverá muitos conteúdos na lista final, como afirmei anteriormente, dado que não é possível fazer um curso para "ensinar a pensar" sem ter qualquer coisa sobre a qual valha a pena pensar — mas a perspectiva é diferente.

Vem a propósito dizer que esta mudança de perspectiva deve conduzir-nos a uma situação confortável. Todos costumamos divertir-nos acerca daquelas coisas que costumavamos saber, que esquecemos e sem as quais passamos perfeitamente. Como as pessoas esquecem coisas como que ao acaso — mesmo aquelas que *precisam* realmente de saber e têm um dia que aprender outra vez porque *não podem* passar sem elas — a incidência central nos hábitos de pensamento fornece alguma coisa mais difícil de esquecer. Porque razão é mais difícil de esquecer? Porque, se os hábitos de pensamento seleccionados *são* verdadeiramente tão amplamente úteis como afirmei, então estarão a ser experimentados, exercitados e usados constantemente, contrariamente aos nomes das capitais dos estados, que podemos aprender na escola primária e realmente necessitar para o nosso trabalho muitos anos mais tarde, mas não tiveram que ser recordados no período intermédio. E existe ainda outro facto reconfortante. A nossa experiência, quando testámos os materiais da *Connected Geometry*, revelou que quando as ideias matemáticas se tornaram os veículos pelos quais os alunos compreenderam que podiam *pensar* bem, e podiam reinventar as ideias sempre que precisavam delas, mesmo os conteúdos eram provavelmente menos esquecidos. Parece razoável supor que o mesmo é verdadeiro também noutras áreas.

Notas

1. Uma mensagem adicional deste exemplo é que a matemática não diz respeito a situações arbitrárias! Substituir a circunferência por um quadrado ou uma elipse pode ser interessante, ou não. Podemos *sempre* encontrar *alguma coisa* que não varie, mas só raramente é alguma coisa que valha o tempo de ser comunicada ou o papel para ser escrita. Como reconhecemos os resultados importantes? Em parte, vendo se o resultado conecta bem com outras ideias matemáticas. A demonstração estabelece estas conexões, e esta é uma razão porque os matemáticos por vezes procuram mais do que uma demonstração para o mesmo resultado.

2. Pessoalmente, acredito que aquilo que nós apelidamos "inteligência" é, em circunstâncias normais, mais uma questão de oportunidade e aprendizagem que de nascimento. Por isso, também pergunto "Que hábitos de pensamento distribuirão melhor a inteligência?" ou mais simplesmente " Como podemos ajudar as pessoas a ser mais espertas?" mas isto deve esperar até ser o assunto de outro artigo.

Referências bibliográficas

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., and J. Mark. 1994."Habits of Mind: an organizing principli for mathematics curriculum" Journal of Mathematical Behavior (no prelo).

Education Development Center, 1996. *Connected geometry* (colecção de cinco volumes. *Habits of Mind: An Introduction to Geometry. The Cutting Edge: Congruence, Area, and Proof. A Matter of Scale: Pathways to Similarity and Trigonometry. Coordinates and vectors: Connecting Algebra and Geometry.* E *Optimization: A geometric Approach.* Dedham, MA: Janson Publications.

E. Paul Goldenberg
Education Development Center, Inc.
(Tradução de Eduardo Veloso)

Quota de 1998

No ano de 1998 o valor da quota é de 6.500$00 para professores, 4.500$00 para estudantes (só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 7.000$00 para sócios a residir no estrangeiro. **Se ainda não paga** a sua quota por **desconto bancário** pode enviar a declaração de autorização de desconto bancário até 28 de Fevereiro. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando cheque ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Assoc. de Prof. de Matemática - ESE de Lisboa-Edif.P2 -
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos -1500 Lisboa

Os sócios que residentes no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou através do cartão **Visa, Mastercard** ou **Eurocard**, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐ MasterCard ☐ EuroCard ☐

Validade ________ o valor de ________ correspondente a ____________

____________ Data ___/___/___

Assinatura ____________________

Ficha de Inscrição/Actualização na Associação de Professores de Matemática

Nome: ____________________ Sócio Nº ________

Morada: ____________________

Código Postal: ____________ Distrito: ____________

Telefone: ____________ E-Mail: ____________

Data de nascimento: __/__/__ Nº de Contribuinte: ____________

Nº do B.I.: ____________ Arquivo: ________ Data de Emissão: __/__/__

Ano em que começou a leccionar: ________ Nível de Ensino: ________

Categoria Profissional: ____________

Escola: ____________________

Morada: ____________________

Telefone: ____________ E-Mail: ____________

Publicações - Envio pelo correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:até 2.500$00 - 20%; de 2.501$00 a 5.000$00-15%; mais de 5.000$0-10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa , MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo E-Mail: apm mail.telepac.pt.

índice

1 **Desafiar a diversidade**
Isolina Oliveira

3 **Currículos Alternativos... com um cheirinho a Matemática**
Alfredo Dias

6 **Revendo o ensino de Matemática: uma proposta de trabalho interdisciplinar a partir da etnomatemática**
Wanderleya Costa e Admur Pamplona

11 **Eu escuto etnomatemática. Que é isto?**
Pedro Paulo Scandiuzzi

14 **A propósito de *contexto***
Ercílio Mendes

17 Materiais para a aula de Matemática
Quem tem dinheiro pode utilizar palavras caras

19 **Os professores e os erros dos alunos**
Maria Alice Inácio

22 Tecnologias na educação matemática

23 **O Cabri na demonstração do teorema de Pitágoras**
Vidal Minga

29 Pontos de vista, reacções, ideias...

31 **A lemniscata de Bernoulli**
Adília Ribeiro e Helena Torres

34 **Um trabalho com a calculadora**
Mabilda Maria Familiar

35 O problema deste número

37 Para este número seleccionámos
"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II) - Paul Goldenberg