Educação e Matemática

N.º 3

Julho de 1987

Utopia? Muito provavelmente...

Os programas do nosso descontentamento

Aplicações da Matemática na Escola Secundária. Porquê?

Alguns obstáculos para a aprendizagem e para o ensino da Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Capa: Fotografia de Henrique M. Guimarães

Editorial

Utopia? Muito provavelmente...

Eduardo Veloso, colaborador do Projecto Minerva

Há dias, numa reunião de professores de Matemática, foi levantada a questão de ser ou não corrente os professores emitirem opiniões sobre o currículo ou participarem na sua transformação. No relativo silêncio que se seguiu, ouviu-se uma voz que dizia: «Bom, nós todos dizemos mal dos programas...»

Na realidade, se existe um tema capaz de fazer a unanimidade entre os professores de Matemática, noutras questões tão salutarmente diferentes, é o currículo: «está uma lástima, precisa de levar uma volta!». Mas a diversidade torna-se logo manifesta quando se avança, por pouco que seja, na discussão das questões fundamentais: com que fim existe uma disciplina de Matemática na escola? que princípios devem orientar um novo currículo?

Deveria mesmo colocar-se uma pergunta prévia: que têm a ver os professores com a definição do currículo?

Na concepção vulgar de educação como preparação para a vida futura dos jovens — a escola é uma «fábrica de homens»... — é até estranho que se possa levantar a hipótese de os professores terem algo a dizer sobre o currículo ou os programas.

Assim, os professores não são mais do que profissionais que preparam os jovens para a sua actuação futura na sociedade. Ora, da mesma forma que são os estudos de mercado que determinam o sabor e o aspecto que uma pasta de dentes deve ter — e não, como é óbvio, os operários que a fabricam — também serão estudos sobre as necessidades e preferências dos vários utilizadores dos jovens — universidades, empresas e outros — que deverão especificar a sua preparação matemática e os objectivos a atingir — e não, como é óbvio, os professores...

Muitos não hesitarão em rejeitar aquela concepção de educação, sobretudo ao ver assim exposta tão brutalmente uma das suas consequências lógicas. E no entanto torna-se claro que continua subjacente a muitas das críticas e propostas de alteração dos programas, como por exemplo a quase consensual «necessidade de rapidamente introduzir computadores nas escolas, **pois** os jovens têm que se preparar para as suas futuras profissões, onde certamente os vão encontrar».

Também é notório que a mesma concepção tem sido, sob uma forma ou outra, o motor principal das transformações curriculares. Nesta perspectiva, a introdução da chamada Matemática Moderna apenas representa, talvez, o resultado da iniciativa de um dos «utilizadores» dos jovens, a instituição universitária.

Se uma das consequências da concepção de educação e de escola a que nos estamos referindo é a exclusão dos professores, e com mais forte razão dos alunos, dos processos de decisão sobre o currículo, outras consequências igualmente graves decorrem quanto à Matemática como disciplina escolar e quanto ao papel dos professores. Fundamentalmente o que se exige destes é que recebam uns tantos alunos no princípio do ano e que os **preparem** para o ano seguinte, ou seja que lhes transmitam a dose de conhecimentos e técnicas necessárias e suficientes para poderem «assimilar» a dose do professor que se segue. E uma das queixas mais frequentes e reveladoras dos professores refere-se à sua dificuldade em alcançar uma alta produtividade porque os alunos «vêm mal preparados do ano anterior».

No entanto, a educação pode ser encarada de um ponto de vista diametralmente oposto. Em lugar de vida adiada, a educação deve consistir em formas de vida e actividades com pleno significado, experiências com valor próprio e consonantes com os interesses e características dos alunos e professores que nelas estão envolvidos. Que dessas actividades com um fim em si próprias estão sempre a resultar reais «aprendizagens» e «preparações», é evidente. Mas o mesmo acontece quando o bebé gatinha e depois anda para ir apanhar uma bola: ele não está a «preparar-se para a vida» nem a «aprender a andar», está pura e simplesmente a «apanhar uma bola» e esse é o seu **único** interesse e desejo naquele momento.

Na medida em que esta concepção de educação consiga ganhar terreno em relação à anterior, as consequências para a transformação do processo educativo e em particular da Matemática escolar serão muito grandes.

Antes de mais, as actividades de matemática na escola não seriam definidas em função da aquisição pelos jovens de um mínimo de técnicas necessárias ao seu futuro. De resto, é inimaginável que essas técnicas, que se resumem para a grande maioria dos adultos às quatro operações e talvez à interpretação de gráficos simples, não sejam adquiridas, como subproduto, em oito a dez anos de experiências interessantes e ricas em conteúdo matemático. Então que objectivo teria a Matemática escolar?

Muito simplesmente, a Matemática na escola destinar-se-ia a que os jovens tomassem contacto, participando e experimentando, com uma actividade que se tem revelado tão importante e decisiva no progresso cultural, científico e técnico da humanidade. E como se pretendia que os jovens vivessem a **experiência matemática,** ou seja o modo como a Matemática tem sido construída e utilizada, entre as actividades e projectos sugeridos teriam lugar privilegiado a resolução e formulação de problemas, a exploração e a descoberta, formação e discussão de conceitos e estruturas e a construção de modelos matemáticos para situações da realidade concreta.

Finalmente, se a educação é um «processo de vida», e se alunos e professores **vivem** esse processo na escola, como poderiam ser alheios à escolha dessas actividades e projectos? Torna-se então óbvio que as condições locais e as características particulares dos alunos e professores determinariam as actividades e projectos a desenvolver em cada momento e em cada local.

Utopia? Muito provavelmente...

Mas se alguns alunos da Escola Preparatória da Brandoa choraram ao perceber que no próximo ano tinham que mudar de escola, foi porque sentiram que uma parte importante **da sua vida** estava a acabar. À semelhança dos professores da Brandoa e de tantos outros, que conseguem na situação adversa actual tais «milagres», não poderiam os professores de Matemática fazer ouvir a sua voz e tudo tentar para que a sua disciplina, em lugar de objecto de medo e instrumento de selecção, se transforme numa fonte de actividades estimulantes e verdadeiramente educativas?

OPINIÕES • CRÍTICAS • NOTÍCIAS • OPINIÕES

Horizontes Matemáticos em Bragança

Como anunciávamos no número anterior de *Educação e Matemática,* tem estado entre nós, primeiro em Coimbra e depois, sucessivamente em Braga, no Porto e em Lisboa, a exposição Horizontes Matemáticos. Esta exposição está sediada em La Vilette *o maior parque de Paris... lugar de criação e de lazer..., um novo território onde lado a lado se encontram o passado, o presente e o futuro,* ou, como também consta num dos folhetos que acompanha a referida exposição: *La Vilette — uma nova maneira de abrir os olhos, da aprender, de nos espantarmos, de escutar e de nos emocionarmos.*

Horizontes Matemáticos foi concebida e realizada no início da década de 80 por professores e investigadores em Matemática do IREM e da APMEP da região Orleães-Tours. Desde 1982 que percorre a França e visita países estrangeiros entre os quais, agora, se inclui Portugal. Colocar à disposição dos professores de Matemática, *material variado de modo a permitir uma outra forma de acesso à Matemática,* proporcionar *um encontro entre os produtores científicos da Matemática, os professores e o grande público, criar lugares e momentos de cultura matemática,* levar a Matemática à cidade e aproximá-la da vida: *ver e amar, manipular e jogar, interrogarmo-nos e compreender,* são alguns dos objectivos a que esta exposição se propõe.

A novidade, agora, é que a Direcção da APM, contactando os responsáveis dessa exposição em Portugal, conseguiu, graças ao apoio da ESE de Bragança, que Horizontes Matemáticos possa ir em Setembro a essa cidade, pelo que os participantes no PROFMAT/87 terão oportunidade de a visitar, caso não o tenham podido fazer.

Uma Semana Diferente na Josefa de Óbidos

Por iniciativa do núcleo de estágio, e tal como já acontecera em outros anos, realizou-se na Escola Secundária Josefa de Óbidos mais uma *Semana de Matemática.*

Divertir, fazer pensar, estimular a criatividade e a imaginação, desenvolver o gosto pela Matemática, estabelecer ligações desta com outras disciplinas, despertar nos alunos o espírito de investigação eram, para os organizadores, os principais objectivos das actividades que haviam decidido propor: realização de trabalhos para uma exposição, resolução de problemas, trabalho com microcomputadores (jogos, processamento de texto, folha de cálculo, base de dados), manipulação de materiais...

Campeonato de Matemática

Esta foi mais uma das realizações do tipo «concurso» ou «semana» de problemas que algumas escolas organizam durante o período lectivo. Esta, em particular, foi organizada pelos professores do núcleo de estágio da Escola Secundária Machado de Castro e decorreu durante todo o ano lectivo que agora terminou. No final houve distribuição de prémios e até deu para uma fotografia no *Diário de Notícias.*

Promover a resolução de problemas de carácter não curricular... o desenvolvimento das capacidades hipotético-dedutivas e do raciocínio flexível... o desenvolvimento da capacidade de matematizar situações da vida real e de as resolver... a persistência perante as dificuldades... Eis como aqueles professores enunciaram as suas capacidades motivações e objectivos.

(continua na pág. 19)

Os programas do nosso descontentamento

Leonor Moreira, colaboradora do Projecto Minerva

A Matriz Cultural

O actual programa de matemática do Ensino Preparatório é uma herança bolorenta do movimento estruturalista que, no campo da Matemática, teve a sua expressão com a Escola de Bourbaki[1]. A subordinação de todo o corpo de conhecimentos matemáticos à ideia de estrutura, e a utilização da abordagem axiomática e do formalismo lógico, bem como a adopção de um ponto de vista sincrónico[2] tiveram repercussões na investigação em Matemática e no ensino da mesma que, ainda hoje, se fazem sentir.

A introdução do ponto de vista estruturalista no ensino foi defendida e apoiada por numerosos matemáticos e investigadores da craveira de um Piaget que afirma existir um isomorfismo entre as estruturas operatórias do pensamento e as estruturas fundamentais da Matemática (Piaget, 1980).

No ensino básico e ao nível dos conteúdos, este movimento caracteriza-se pela adopção da Teoria dos Conjuntos para base de todo o edifício matemático e pela algebrização quer da aritmética quer da geometria. No plano didáctico, afirma-se a necessidade de recorrer ao «método da descoberta», isto é, de partir da actividade do aluno para, numa fase posterior, chegar às definições e sistematizações rigorosas.

No início dos anos 70, passados cerca de dez anos sobre a implantação dos programas de Matemática Moderna, de inspiração Bourbakista, começam a conhecer-se os primeiros reveses. Piaget vem a terreno apontar, como culpados, os métodos baseados na transmissão verbal e o uso prematuro da formalização. «O que está mal não é o carácter moderno dos programas, mas a metodologia e a psicologia usadas (...) a formalização não está fora de causa, mas não se pode impor coercivamente; tem de se esperar o amadurecimento da sua necessidade» (Piaget, 1980). De facto, em vez de uma metodologia da descoberta, prevalecia um ensino expositivo e repetitivo.

Por outro lado, as investigações sobre o ensino da Matemática apontavam para uma fraca assimilação dos conceitos, para uma grande incapacidade de utilizar os conhecimentos em situações da vida real ou na resolução de problemas. O próprio conteúdo matemático começa, então, a ser posto em causa (Pellerey, 1983). Contesta-se, sobretudo, o excessivo peso dado à Teoria dos Conjuntos, a introdução meramente axiomática dos entes matemáticos, a exigência precoce dum raciocínio hipotético-dedutivo, a algebrização da geometria.

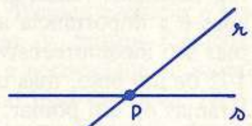
Esta onda de contestação leva ao movimento reaccionário «Back to basics» que defende o retorno às «coisas essenciais», o retorno à situação anterior à modernização (Pellerey, 1983), mas leva, também, a uma tomada de consciência sobre o ensino da Matemática de que, infelizmente, em Portugal, ainda não se vêem grandes frutos.

Uma Prática a Combater

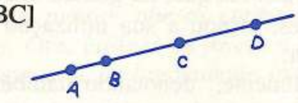
Durante muitos anos, a formação de professores, foi inspirada por uma concepção descritivo-formalista da Matemática segundo a qual o ensino da Matemática tem por finalidade, por um lado, a aquisição e compreensão de uma arquitectura unitária e coerente e, por outro, o desenvolvimento de uma linguagem sobretudo no seu aspecto sintáctico. É assim que, por exemplo, com o ilusório (e, entretanto, esquecido) objectivo, de construir e formalizar o conceito de número, na sua natureza cardinal, se perdem meses com a mera manipulação de símbolos.

É curioso que, enquanto Papert (1985) defende a aprendizagem da Matemática como a da língua materna, a nossa prática é a de um ensino da Matemática como uma língua morta, com o inconveniente suplementar de nem sequer dar acesso aos clássicos. Que significado, que relevância terá para os jovens a tradução de «Piloto é um cão» por Piloto $\in$ {cães}? Ou por exercícios do tipo:

$$r \cap s = \{P\}$$



$$[AC] \cap [BD] = [BC]$$



Não é de esperar que as nossas escolas estejam cheias de matófobos?

Quantas vezes não se exige, também, uma atitude contrária à atitude natural do espírito em face da realidade matemática? Como diz Kline (1970), a propriedade comutativa não justifica que $3 + 4 = 4 + 3$. Foi a experiência com os objectos reais que nos levou a essa constatação. Porque $3 + 4 = 4 + 3$ se diz que a adição é comutativa e não o contrário. Será, então, legítimo pedir para cada caso, as propriedades da adição que permitem escrever:

$$7 + 5 = 5 + 7$$
$$0 + 8 = 8 + 0 = 8$$

Em contrapartida, o uso das propriedades para facilitar o cálculo mental é um exercício considerado menor. De resto, só o lugar secundário para que foi relegado o cálculo mental e um verdadeiro apego a um formalismo árido justificam a introdução das equações ao nível do ensino preparativo. A equação representa, aqui, uma muleta ainda por cima difícil de manejar. Quando se pede, aos alunos, que traduzam o enunciado de um problema (no sentido vulgarizado do termo) por meio de uma equação, muitos escrevem qualquer coisa sem significado ou que não traduz o enunciado do problema, mas encontram a solução para o problema; outros só escrevem a equação depois de terem, mentalmente, resolvido o problema o que parece mostrar que o facto de escreverem uma expressão matemática não influencia a escolha de uma estratégia para resolver o problema. Parafraseando Papert (1985), é como se os alunos, depois de terem executado um bailado, fossem obrigados a desenhar passos de dança em papel quadriculado.

As crianças têm dificuldade em passar do seu sistema informal experimental para um sistema formal cheio de símbolos ou regras, mas os programas e os professores insistem em propor tarefas que ultrapassam o desfasamento óptimo de que fala Piaget, sem que, como contrapartida, aumentem, paralelamente, a significância da aprendizagem ou proporcionem «materiais catalizadores da aprendizagem». Como se compreende, também, que depois dos alunos terem aprendido (melhor ou pior) a operar com os racionais sob a forma de numerais decimais, estejam todo o primeiro ano a trabalhar só com inteiros? Não será demasiado fraco, e mesmo serôdio, o argumento de que só o cálculo com fracções decimais permite compreender as regras do cálculo com numerais decimais? Aliás, as prerrogativas concedidas às fracções e a importância atribuída ao cálculo com as mesmas são incompreensíveis. Na prática, ninguém compra 1/12 de um bolo, mas uma fatia; ninguém vende 3/5 das laranjas de um pomar, mas duas toneladas e meia; ninguém compra 2/7 de uma peça de tecido mas 3,75 m. De resto, a vulgarização das calculadoras de bolso e dos computadores que, na grande maioria, não operam com fracções, tornou a sua utilização não funcional e anacrónica.

Finalmente, denotando também uma preocupação excessiva em desenvolver determinadas competências aritméticas (de valor duvidoso), verifica-se a insistência no cálculo de expressões numéricas descontextuadas e trabalhosas.

Na verdade, na prática, ninguém resolve um problema da vida real com uma expressão numérica. O que se faz é ir sequenciando as operações necessárias, servindo o resultado de uma como a «matéria-prima» de outra. E depois, numa altura em que as calculadoras estão ao alcance de todas as bolsas, gastar tanto tempo neste tipo de adestramento é tão pouco razoável, é tão pouco rentável como dedicarmo-nos à exploração das geleiras de Montejunto numa época em que o frigorífico é objecto obrigatório em todas as casas.

E que não venham os velhos do Restelo falar de avaria das máquinas ou na greve dos operários da fábrica de pilhas! Porque são esses mesmos que nunca se preocuparam, por exemplo, em desenvolver nos alunos a capacidade de validar, por estimação mental, o resultado de uma operação, o valor achado para uma expressão numérica. São esses mesmos que, perdendo tempo a desenvolver capacidades de baixo nível, se esquecem que o homem se distingue das máquinas pela capacidade de criar (e de amar). São esses mesmos que, esquecendo que a actividade criativa está na génese do conhecimento matemático, treinam os alunos para agirem como computadores, como indivíduos sem iniciativa, meros executantes. São esses mesmos que matam, nos alunos, o desejo de saber, que lhes retiram o prazer de aprender, que os ensinam a odiar a Matemática.

Em Jeito de Conclusão

Numa altura em que se fala, com certa insistência, em reformulação dos programas, seria bom que os responsáveis pela mesma reflectissem nas capacidades a desenvolver nos alunos abrangidos pela escolaridade obrigatória, nas actividades que possam favorecer esse desenvolvimento e, só então, nos conteúdos que melhor propiciem essas actividades.

Mais do que aprender factos específicos e regras e a sua utilização mais ou menos mecânica, o jovem precisa, sobretudo de explorar, descobrir, investigar em Matemática; mais do que ser informado, o jovem precisa de aprender a procurar informação e a seleccioná-la; mais do que ser adestrado em habilidades específicas, o jovem precisa, acima de tudo, de aprender a pensar.

NOTAS:

(1) Nicolas Bourbaki é o pseudónimo grego sob o qual um grupo de matemáticos e investigadores publicam, a partir dos anos 30, uma série de obras em que todo o corpo de conhecimentos matemáticos é subordinado à ideia de estrutura.

(2) A perspectiva sincrónica (por oposição a diacrónica) nega, ao estudo histórico do desenvolvimento da Matemática, capacidade para fornecer indicações sobre o seu estado actual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Piaget, J. (1980). Alcune considerazione sull'insegnamento matematico. *L'insegnamento della matematica e delle sciense integrate*, vol. 3, no. 3, 12-25.

Pellerey, M. (1983). *Per un inssegnamento della matematica dal volto umano.* Torino: SEI.

Papert, S. (1985). *Logo: computadores e educação.* S. Paulo: Brasiliense.

Aplicações da Matemática na Escola Secundária: Porquê?

Ana Luisa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes,
Escola Secundária Sebastião e Silva (Oeiras)

O insucesso em Matemática: uma preocupação crescente

O insucesso escolar que se verifica na disciplina de Matemática começa a ser preocupação de toda a sociedade e, obviamente, dos professores de Matemática em particular.

O problema torna-se mais grave se tivermos em conta que tal situação origina, em muitos jovens, uma grande desmotivação para a aprendizagem em geral e uma perca de auto-confiança.

A Matemática assume, muitas vezes, o carácter de uma disciplina estritamente elitista e selectiva, chegando-se a pretender classificar o grau de inteligência dos alunos pelos resultados nela obtidos. Isto porque o insucesso é normalmente interpretado como insucesso do aluno perante a disciplina mas, pelas dimensões que apresenta, não deverá antes ser interpretado como insucesso da «escola» perante o aluno?

Todos os professores que se preocupam com este fenómeno, não podem deixar de sentir uma certa frustração no seu trabalho. Encontram-se frequentemente alunos que, pura e simplesmente, se recusam a tentar aprender Matemática, pois auto-convenceram-se (ou convenceram--nos) que não têm capacidade para isso. Que podem os professores fazer para destruir esta barreira?

Hoje em dia, cada vez mais, a nível mundial, se procura responder a esta questão, começando a surgir um pouco por toda a parte, tentativas de renovação dos métodos de ensino. Esta situação assume aspectos variados e complexos.

Não pretendemos neste trabalho, como é óbvio, responder a todos esses aspectos. Pretendemos apenas apontar alguns que consideramos mais relevantes e dar a nossa contribuição para pequenas propostas de mudança. Por muito insignificante que seja essa contribuição, ela é no entanto o resultado da nossa vontade de não nos submetermos pacificamente à situação que encontramos nas escolas, de não vestirmos a capa do professor tradicional, simples «correia da transmissão» dumas quantas fórmulas e teoremas.

Uma sociedade em evolução acelerada

Há alguns anos atrás, só tinha acesso ao ensino secundário uma minoria de jovens, em grande parte filhos das classes mais abastadas, que pretendiam seguir um curso universitário.

As modificações sociais que entretanto ocorreram, em especial após 1974, têm consciencializado cada vez mais o homem dos seus direitos, e um desses direitos é sem dúvida o direito à Educação. Esta consciência, e o alargamento da escolaridade obrigatória verificado a partir do início dos anos 70, originaram uma massificação do ensino que não foi devidamente acompanhada com uma reestruturação dos programas curriculares.

Hoje em dia, muitos jovens que frequentam o ensino secundário não visam seguir um curso superior; pretendem apenas adquirir uma formação e cultura capazes de os ajudar a enfrentar os problemas que a vida lhes coloca. Deparam-se então com uma Matemática desligada da sua realidade concreta, desadaptada dos problemas do dia a dia, não os preparando para a utilização e compreensão das novas tecnologias, com uma linguagem demasiado formal, com uma sobrevalorização das técnicas de cálculo. Insiste-se sobre o carácter imutável e absoluto das demonstrações, e tudo sugere aos alunos a convicção de que nunca a Matemática evoluiu nem evoluirá.

Este «panorama» do ensino da Matemática, profundamente negativo para os alunos que não pretendem seguir um curso superior, nem por isso é mais favorável àqueles que querem continuar os seus estudos pois, numa sociedade em que a Ciência e a Técnica evoluem a um ritmo acelerado, há que preparar os futuros técnicos, cientistas ou investigadores, para a necessidade de acompanhar e até ajudar a incrementar essa evolução. Poincaré, aquando da reforma do Ensino Superior, ao ser inquirido sobre os conhecimentos que os alunos deveriam ter ao ingressarem nesse grau de ensino, responde: *Basta que os ensinem a pensar, que os conhecimentos cá lhes ministraremos.* Ora, ensinar os jovens a pensar, é algo de que o ensino está profundamente carente.

Velhos problemas numa situação nova

Esta maneira de orientar o ensino da Matemática — que hoje se torna dramaticamente desfasada da evolução social e das necessidades dos jovens — não é, no entanto, um fenómeno recente. Emma Castelnuovo (1963/70) escreveu:

(...) Os jovens que actualmente saem das nossas escolas secundárias têm a ideia de que a Matemática consiste, por um lado, num puro mecanismo, e por outro, que se trata duma construção perfeita e completamente acabada, ignorando se se pode fazer ou não alguma descoberta nesta disciplina.

A Matemática, vista desta forma, tem o peso de um mundo completamente construído, onde todas as engrenagens encaixam perfeitamente umas nas outras, formando um todo muito coerente e absolutamente lógico.

A este propósito, Emma Castelnuovo (1982) cita José Sebastião e Silva:

(...) A intuição e a preciosa textura heurística são muitas vezes ignoradas, suprimidas, levando assim a uma visão unilateral da construção Matemática; porque a Matemática não é apenas lógica: é um produto humano *e portanto está intimamente ligada às ciências da natureza e da técnica.*

E, em seguida, a própria Emma Castelnuovo acrescenta:

(...) das três fases — nascimento concreto do conceito ou da lei, idealização Matemática, regresso para o concreto através das aplicações — na escola salientou-se sempre, e cada vez mais, a do meio, isto é, a da representação de uma Matemática pura, abstracta, sem reparar que o adjectivo «abstracto» vem do latim e significa «extraído» (do concreto); quer dizer etimologicamente tem um sentido dinâmico.

A grande maioria dos alunos das nossas escolas rir-se-ia de quem lhe dissesse que a aprendizagem da Matemática poderá desenvolver a criatividade. Aliás, tal atitude seria assumida também por muitos professores de Matemática, o que sugere a necessidade urgente de impulsionar, junto destes, discussões amplas sobre o tipo de ensino que ministram, discussões essas que não se devem limitar aos temas dos programas, mas que deverão acima de tudo focar a forma como esses temas são trabalhados com os alunos.

A desadequação do ensino às novas tecnologias, como já referimos, deve também ser tema urgente de discussão entre professores. Os alunos sentem que o ensino está «antiquado». A utilização de mini-computadores está amplamente generalizada, no entanto a escola não tem qualquer resposta para isso. Um jovem que, após alguns anos de escolaridade, tenha necessidade de saber algumas noções básicas de utilização de computadores para responder a um emprego, terá que o fazer numa empresa privada, em pequenos cursos de preços elevadíssimos, e em que muitas vezes a informação fornecida é insuficiente.

Apesar deste panorama, muitos professores de Matemática resistem a reconhecer a necessidade da alteração de meios de trabalho, e mesmo a utilização na aula de uma simples máquina de calcular é firmemente repudiada por uma larga percentagem. Para além de originar nos jovens o sentimento de que o ensino é uma «aberração», tal atitude leva a que os alunos não saibam tirar todo o partido das máquinas de calcular, e que nem sequer saibam distinguir entre máquinas de notação científica e não científica.

Um outro aspecto que caracteriza o nosso ensino, e que não podemos deixar de referir, é um cuidado excessivo com o rigor. Exige-se muitas vezes um rigor de linguagem e de exposição de raciocínio superior ao que se exige na Universidade, em detrimento da intuição, e completamente desadequado em relação ao mundo exterior.

Guido Castelnuovo, numa conferência proferida em Génova em 1912 sob o título «As relações da escola com a vida e com a ciência moderna», suscita reflexões fortemente sugestivas sobre este assunto:

(...) Este é o equívoco primitivo do espírito doutrinário que invade a nossa escola. Ensinamos a desconfiar de uma aproximação, que é real, para adorar o ídolo de uma perfeição que é ilusória. Apresentamos o universo como um edifício, cujas linhas têm uma exactidão geométrica e que nos parecem desfiguradas e obscuras devido ao carácter ignorante dos nossos sentidos. Deveríamos fazer compreender que as formas incertas reveladas pelos nossos sentidos, constituem a única realidade acessível, que substituímos, para responder a certas exigências do nossos espírito, por uma precisão ideal... Não há forma melhor para alcançar tal objectivo, que ligar em cada passo, a teoria e a experiência, a ciência e a aplicação... Os pais confiam-nos os seus filhos para que façamos deles homens aptos para entender a vida. Se nos dermos conta destas exigências, se por amor à cultura sufocamos nos nossos alunos o sentido prático e o espírito de iniciativa, faltamos ao maior dos nossos deveres.

Apesar de Guido Castelnuovo ser italiano e deste texto ter sido escrito em 1912, adapta-se perfeitamente à situação actual do ensino em Portugal. De facto, esta imagem que é transmitida no nosso ensino, além de não corresponder à real evolução do pensamento matemático, não corresponde também às necessidades de uma época em que muitas ciências se «matematizam» e uma certa aptidão para a Matemática é indispensável para um número crescente de carreiras profissionais.

Confrontado com este acréscimo de necessidades, é premente que o ensino da Matemática se torne mais interessante, favoreça uma atitude criativa dirigida ao desenvolvimento de processos de investigação e às várias possibilidades de abordar situações, crie condições para a disponibilidade e capacidades futuras de aprender, durante toda a vida, que hoje, se requer dos futuros cidadãos.

Aplicações da Matemática na escola: porquê?

É esta consciência crescente quanto à importância da preparação de situações de aprendizagem, nas quais prevaleça a actividade investigadora do aluno, que, no decurso dos últimos anos (e em numerosos países), tem servido de argumento a favor da utilização, na escola, de aplicações da Matemática.

Como poderemos definir então «Aplicações da Matemática»? Qualquer definição que se pretendesse dar correria o risco de ficar incompleta. Este tema é tão vasto, e pode ser encarado sob pontos de vista tão diversos, que dificilmente «caberia» numa definição acabada.

«Aplicações da Matemática» é uma expressão que tanto pode ser encarada no sentido de resolução de problemas de rotina dados no fim de uma unidade didáctica, em que apenas se fornece a informação necessária e suficiente para a aplicação directa de técnicas de cálculo anteriormente aprendidas (exemplo: problemas do tipo «Um pai tem 49 anos de idade e o filho tem 5; daqui a quantos anos a idade do pai é tripla da do filho?», no fim da unidade didáctica: Equações do 1.º grau); como pode também significar um trabalho tipo projecto, em que os alunos estudam uma situação da vida real, levantam questões, formulam hipóteses, procuram respostas, interligam conhecimentos matemáticos com conhecimentos de outras disciplinas, descobrem novas informações acerca do contexto da situação, e em que a Matemática desempenha um papel determinante nas respostas a algumas das perguntas que vão surgindo.

Estas são, por assim dizer, as situações «extremas». Entre uma e outra, há uma grande variedade de situações problemáticas que poderão ou não ser encaradas como aplicações, dependendo da perspectiva com que o professor as utiliza.

Em relação ao primeiro exemplo que apresentámos, consideramos que corresponde ao ensino tradicional e rotineiro, correntemente praticado. Não classificamos aqui este tipo de problemas como sendo uma «aplicação da Matemática» porque tais problemas não implicam uma alteração qualitativa significativa no processo de aprendizagem, comparativamente a uma aula em que apenas se expõem conceitos teóricos.

Mas tentar definir o que são aplicações da Matemática não é tão importante como saber utilizá-las ou saber fundamentar a sua importância no processo de aprendizagem, e elas terão importância, apenas, na medida em que contribuam para melhorar esse processo.

Uma das muitas razões que se apontam a favor das aplicações no ensino da Matemática reside no facto de estas poderem consistir numa interpretação ou num raciocínio matemático, elaborado a partir de uma situação pertencente a um domínio não matemático ou tirado da vida real — por oposição ao mero uso rotineiro das técnicas de cálculo; basta para isso que o tema a estudar seja algo ligado à vida corrente, ou alguma questão económica, social, desportiva, etc., que diga respeito à realidade concreta dos alunos, uma coisa viva e estimulante que lhes provoque a sua curiosidade.

É por isso muito importante que o problema de aplicação que o professor escolha esteja de acordo com as motivações, interesses, características pessoais, etc., dos seus alunos de forma a constituir para estes um desafio.

O problema da motivação deve ser uma preocupação dominante na aprendizagem. Não pode ser apenas a motivação voltada para a teoria e para os valores estéticos da Matemática, mas sim para as aplicações na ciência e no mundo que nos rodeia. Há que ter em conta que os fins utilitários têm sido forte «motor» mesmo na investigação científica.

Se o professor conseguir motivar os seus alunos para a aprendizagem, já estará a dar um grande contributo para a melhoria do ensino.

Outro argumento a favor das aplicações é o de mostrar aos alunos alguma utilidade dos conhecimentos que queremos que eles adquiram. Muitas vezes os alunos perguntam para que serve o que lhe ensinamos, e normalmente o professor não sabe responder, ou pelo menos não lhes responde de forma a satisfazer completamente a sua curiosidade. A resposta mais vulgar é do tipo «Isto é muito importante para os teus estudos futuros» ou «Mais tarde verás como é importante». Ora, respostas assim, não satisfazem de forma alguma a saciedade natural dos jovens. Os jovens precisam de sentir a utilidade da escola, sem que seja necessário estar constantemente a remetê-la para um futuro longínquo.

Mas o professor actual não tem de facto preparação para enfrentar este problema. A formação estritamente Matemática faz perder de vista as aplicações do que aprendemos. O desconhecimento quase total dos programas das outras disciplinas, ainda agrava mais a situação. E aqui surge um outro «defeito» do nosso ensino, que as aplicações poderão ajudar a ultrapassar: a forma estanque como são ministradas as várias disciplinas e que suscita nos alunos a ideia de que poderão deixar completamente de lado a Matemática, e ter sucesso em todas as outras disciplinas.

A utilização de aplicações da Matemática poderá ajudar a mostrar como esta atitude é errada. Para isso o professor deve escolher aplicações que envolvam várias disciplinas, e planificar o trabalho em conjunto com os professores de cada uma delas. As acções interdisciplinares ajudam os alunos a ver a importância de cada um dos assuntos e a forma como se podem ligar. Por outro lado, o professor de Matemática deverá estar perfeitamente informado dos programas de todas as disciplinas, nos vários anos de escolaridade, para poder também nas suas aulas (em pequenos exemplos, em introduções, etc.) estabelecer uma ligação constante entre os vários temas.

Resumidamente, podemos afirmar que o grande contributo da utilização de aplicações da Matemática no ensino, é o de contribuir grandemente para modificar a atitude dos alunos face à aprendizagem, no desenvolvimento da curiosidade, da intuição, da criatividade, do gosto pela pesquisa, do espírito de observação. Um aluno, a quem se apresentem frequentemente aplicações interessantes da Matemática, estará mais predisposto a, espontaneamente, tentar interpretar fenómenos que observe e a procurar fundamentações e justificações dos mesmos.

Para além deste aspecto, que poderemos classificar como formação intelectual do jovem, há um outro aspecto não menos importante, que é a alteração que temos de impor às relações afectivas professor/aluno. A escola precisa de ter um outro ambiente. Alunos e professores devem conviver sadiamente, tanto fora como dentro da sala de aula. O professor não pode continuar a ser, para o aluno, o fantasma avaliador e repressivo que tem sido. Os jovens precisam de sentir gosto por trabalhar com os professores, e precisam de sentir que o professor gosta de trabalhar com eles (e, inversamente, muitos alunos não podem continuar a ser, para o professor, apenas uma fonte de problemas disciplinares).

É bom que alunos e professores estejam empenhados na descoberta de algo; que o professor não seja o único «detentor de toda a verdade», mas que descubra com os seus alunos aspectos novos num problema de aplicação, e que deixe os alunos levantarem livremente as suas hipóteses, os seus pressupostos.

Para além do trabalho com o professor, os jovens precisam também de aprender a trabalhar em grupo com outros jovens, de sentir as vantagens desse tipo de trabalho e de desenvolver o gosto por ele.

Para que um problema de aplicação tenha as vantagens mencionadas, é importante que seja utilizado de uma forma diferente dos problemas habituais, em aulas orientadas com uma certa originalidade, com o mínimo de directividade, e que seja escolhido de acordo com os interesses dos jovens.

Acontece frequentemente que as ideias sobre situações problemáticas do mundo real, que os professores julgam interessar os seus alunos são por vezes, muito diferentes daquelas com que eles alguma vez se entusiasmariam.

É ao professor que cabe a difícil tarefa de encontrar «bons» problemas de aplicação, não só no sentido de estarem de acordo com os interesses dos seus alunos como ainda no sentido de poderem satisfazer os objectivos que o próprio professor procura alcançar.

Referências

Castelnuovo, Emma (1970). *Didáctica de la Matematica Moderna.* México: Editorial F. Trillas, S.A. (Edição original em italiano, 1963).

Castelnuovo, Emma (1982). Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura científica. Em *Ensino da Matemática Anos 80.* Lisboa: SPM.

Lesh, Richard (1979). Applications: why, which and how. In Sharron, Sidney, Reys, Robert E. (Eds.). *Applications in School Mathematics.* Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics.

Pollak, H. O. (1979). L'intéraction des Mathématiques et des autres matières scolaires. In *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques.* Paris. Unesco.

Nota das Autoras

Este artigo constitui a introdução de um trabalho que inclui mais cinco capítulos, cada um dos quais é uma aplicação da Matemática. Foi elaborado com base em reflexões feitas ao longo deste ano lectivo, durante o qual algumas das aplicações propostas foram trabalhadas com alunos do 9.º ano de escolaridade.

O entusiasmo manifestado pelos professores que participaram no trabalho, e pelos colegas que dele tiveram conhecimento foi tal que, em finais de Junho, foi decidida a constituição de um grupo de trabalho da APM sobre «Aplicações da Matemática», para o qual pedimos desde já a colaboração de todos os colegas interessados.

A publicação da brochura «A Matemática na vida das abelhas» (2.º capítulo do referido trabalho), que sairá no princípio de Setembro coincidindo com o PROFMAT, constitui já uma primeira iniciativa do grupo, pensamos que poderá ser um «trampolim» para o futuro reforço da sua actividade.

Alguns obstáculos para a aprendizagem e o ensino da Matemática

Pascual Llorente, Universidad de Zaragoza

Os problemas que se levantam ao ensino da Matemática a todos os níveis não são novos. Tal como não é novo o mal estar que eles provocam em professores e alunos. No entanto, este mal estar parece aumentar e agudizar-se ultimamente. Os problemas são muitos, variados e difíceis. Seria sempre arriscado e pretensioso procurar abordá-los na sua totalidade, mas mais ainda num artigo breve e geral como este. Limitar-me-ei aqui a apontar alguns dos «obstáculos» que normalmente surgem na aprendizagem e no ensino da Matemática. Talvez estes apontamentos, apesar de apenas esboçados, possam servir de estímulo e de orientação vaga para que se empreendam estudos mais sérios e profundos numa problemática tão premente e cuja superação requer o esforço e a colaboração de todos.

Obstáculos epistemológicos

A noção de *obstáculo epistemológico* deve-se a Gaston Bachelard. Nada melhor do que apresentá-la com algumas das suas próprias palavras:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, chega-se rapidamente à convicção de que *há que pôr o problema do conhecimento científico em termos de obstáculos.* (...) De facto, conhece-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal feitos, ultrapassando o que, no próprio espírito, constitui um obstáculo à espiritualização. (...) Para um espírito científico, todo o conhecimento é uma resposta a uma questão. Se não houver questão não pode haver conhecimento científico. Nada é dado. Tudo se constrói. Um conhecimento adquirido por um esforço científico pode também declinar. A questão abstracta e livre acaba por consumir-se, a resposta concreta permanece. Por conseguinte, a actividade espiritual inverte-se e fica bloqueada. Um obstáculo epistemológico incrusta-se no conhecimento inquestionado. Hábitos intelectuais que foram úteis e salutares podem, a longo prazo, estorvar a pesquisa.
>
> *(Bachelard, 1938, p. 14-16 ou Bachelard, 1971, p. 187-189)*

Por razões de brevidade resisto à tentação de comentar e analisar as ideias contidas nas citações anteriores. Obviamente, Bachelard refere-se à prática científica (no nosso caso, a produção dos conhecimentos matemáticos) e creio que cada leitor pode fazer as suas próprias reflexões e tirar as suas conclusões. Para muitos, pode parecer estranha a visão de uma Matemática desenvolvida à base de *rupturas,* de superação de *obstáculos epistemológicos* que não vêem em lado nenhum. Para alguns, pode parecer pouco evidente que cada construção matemática (cada definição, cada conceito, cada teorema, cada teoria que tiveram que estudar) seja efectivamente a resposta a uma pergunta, a solução de um problema. Nesse caso, restam duas alternativas: ou a visão de Bachelard é um equívoco, ou o tipo de ensino que recebemos escondeu-nos sistematicamente estes factos, dando-nos uma imagem de desenvolvimento linear, contínuo e progressivo, e impondo-nos um corpo de conhecimentos abstractos sem motivação suficiente.

Obstáculos pedagógicos

A noção de *obstáculo epistemológico* tem, evidentemente, repercussões directas e importantes no ensino. O mesmo Bachelard observa:

> A noção de *obstáculo epistemológico* pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. (...) Na educação, a noção de obstáculo epistemológico também é desprezada. Muitas vezes me surpreendo com o facto de os professores de ciências, mais ainda que os outros, se possível, não compreenderem que não se compreende. São poucos os que se interessam com alguma profundidade pela psicologia do erro, da ignorância, da irreflexão. (...) Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma lição, que é sempre possível refazer uma cultura descurada repetindo uma aula, que é sempre possível fazer compreender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto.
>
> *(Bachelard, 1938, p. 16-19 ou Bachelard, 1971, p. 189-191)*

Estas ideias, escritas por Bachelard em 1938, têm sido retomadas nos últimos anos por alguns investigadores da didáctica da Matemática. No Simpósio Internacional sobre a Renovação do Ensino da Matemática, realizado em Sevilha (Espanha) em Junho de 1986, a Professora Annie Marie Berté insistiu no facto de que a mente da criança *não é* um papel em branco, mas que está impregnada de saberes anteriores que, frequentemente, se apresentam como *obstáculos* à aprendizagem. Deu exemplos de alguns *erros* frequentes:

$$0.3 \times 0.3 = 0.9$$
$$\cos 3x = 3 \cos x$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

devido à aplicação de determinados *modelos implícitos* que actuam como obstáculos: no primeiro caso, a consideração de um número decimal como um *par de números inteiros,* nos dois últimos o modelo da *linearidade.*

Outro exemplo interessante, que me foi indicado pela Professora Emma Castelnuovo, refere-se à dificuldade em compreender a divisão por um número racional menor que a unidade. As crianças têm a ideia de que dividir significa *repartir* ou *partir* e a experiência de que o quociente é sempre *menor* que o dividendo. Como compreender agora que o resultado seja *maior*? O *obstáculo* é real e, pessoalmente, creio que pode ser superado mostrando (desde o princípio) que, tal como o consideravam os antigos gregos (rever os *Elementos* de Euclides), dividir também significa *medir* o dividendo tomando como unidade de medida o divisor.

Georges Glaeser (1985) não só insiste na existência desta série de *obstáculos pedagógicos* que dificultam a aprendizagem da Matemática, como propõe como *objectivo fundamental* da investigação didáctica a revelação destes obstáculos que, em geral, não são conhecidos pelos professores.

Em resumo, o professor deve predispor-se a aceitar os erros como parte integrante do processo de aprendizagem e, em vez de se escandalizar com eles e de os corrigir impondo a autoridade do seu saber, procurar descobrir o *obstáculo pedagógico* que os origina para poder ajudar os seus alunos a superá-lo. Sem dúvida, isto não é tarefa fácil mas transforma a actividade do professor na aula em algo muito mais criativo, numa autêntica investigação didáctica permanente.

Obstáculos ideológicos

Quando se coloca a questão de ensinar Matemática surgem, naturalmente, as perguntas: *Que ensinar? Como ensiná-lo?* Estas parecem ser questões *técnicas*, referentes aos *conteúdos* do ensino e à sua *metodologia*. No entanto, qualquer resposta que se dê a estas perguntas implica ter-se respondido já, de maneira explícita ou implícita, a esta outra pergunta: *Que é a Matemática?* Efectivamente, todo o ensino da Matemática se apoia numa determinada *concepção* da Matemática, numa determinada *ideologia* do que esta é, do que significa, de como se articula com as outras ciências, do lugar que ocupa na cultura, etc..

A «moda» da chamada *Matemática Moderna* surgiu nos países «avançados» há já umas três décadas. Noutros países (habituais importadores da panóplia tecnológica e cultural) a «moda» chegou com atraso, e impôs-se como panaceia numa época em que era já fortemente contestada e muitos denunciavam o seu rotundo fracasso. Não julgo necessário insistir aqui num tema tão largamente debatido; o leitor interessado pode recorrer por exemplo aos textos incluídos em Piaget et al (1978) ou no conhecido livro de Morris Kline (1973). Também não me deterei na consideração da *ideologia* que a suporta, que é, pouco mais ou menos, o que Frederic Pham (1986) denomina «o mito formalista». Esta *visão* particular da Matemática, que actualmente impregna, com todas as suas consequências, a aprendizagem e o ensino da Matemática em todos os níveis, constitui um verdadeiro *obstáculo ideológico.*

É verdade que se respiram ares renovadores (sentidos por muitos como uma necessidade imperiosa e inadiável) e que tem surgido uma certa variedade de propostas alternativas, mas é claro que cada uma delas se apoia numa determinada resposta (geralmente não explícita) à pergunta: *O que é a Matemática?* Alan Rogerson (1985) assinala que estas respostas são, na sua maioria, *definições intensivas* da Matemática (do tipo «a Matemática é...») e que a isso se deve o pouco êxito que têm tido as novas propostas didácticas e pedagógicas. Rogerson, como participante no *The Mathematics in Society Project*, propõe-se desenvolver uma *definição extensiva* da Matemática, investigando a utilização da Matemática na sociedade. Numa linha semelhante trabalha, desde há muito, o grupo de Génova que se propõe determinar um marco de referência cultural no qual inserir os conteúdos dos programas.

Obstáculos didácticos

A formação dos futuros professores de Matemática é organizada, com frequência, juntamente com a dos futuros matemáticos profissionais, e a tónica dessa formação recai nas supostas necessidades destes últimos. Em todo o caso, a preparação dos professores costuma centrar-se mais na aprendizagem de temas de Matemática do que na aprendizagem teórica e prática de recursos didácticos, e isto independentemente dos planos de estudos contemplarem uma ou mais cadeiras de Didáctica (que, lamentavelmente, costumam ser de muito pouco valor e utilidade). Pessoalmente penso que em grande medida se aprende a ensinar por *imitação*: que, pelo menos nas primeiras etapas da vida profissional, ensinamos de modo semelhante ao dos que nos ensinaram a nós. Esta «didáctica implícita», normalmente monocórdica e reprodutora da ideologia dominante, origina uma série de *obstáculos didácticos* difíceis de superar.

Obstáculos externos

Glaeser (1985) refere-se a certos *obstáculos paramatemáticos*, entre os quais menciona a linguagem técnica da Matemática e o carácter vago em que se mantêm alguns termos como «demonstração», «rigor» ou «raciocínio correcto». Nesta secção final gostaria de chamar a atenção para a existência de outros *obstáculos externos* que todos conhecemos, que muitos sofremos, que em boa medida convertem em utopias ou tornam irrealizáveis a maioria das propostas renovadoras, e que, no entanto, muitas vezes se calam e se aceitam resignadamente. Seria inútil tentar enunciá-los de maneira exaustiva, contentar-me-ei em assinalar três desses obstáculos.

Em primeiro lugar, a *massificação* do ensino. É geralmente aceite (se fôssemos um pouco mais cientifistas diríamos: «está demonstrado») que o ensino a grupos de

(continua na pág. 18)

Olimpíadas da Matemática: Quem segura o facho olímpico?

José António Duarte, Escola Superior de Educação de Setúbal

Existem alunos talentosos?

Falamos de bons e maus alunos. Que queremos dizer? Os que têm bons e maus testes?! Os que sobressaem muito e os «apagados»?! Por detrás destas apreciações estão as nossas próprias concepções acerca da Matemática e do processo ensino-aprendizagem. Admitamos, portanto, a subjectividade destes termos. E não esqueçamos também que, por detrás daquilo que os alunos mostram, estão factores de desenvolvimento como a maturação, o meio que os envolve, a experiência, etc., muitas vezes origem de vários «bloqueios».

Mas, na verdade, existem alunos com especiais talentos, com um pensamento criativo avançado, que claramente nos chamam a atenção pela capacidade de antecipação e previsão de resultados, pela intuição sagaz, pelo caminho original da dedução. Ao longo deste artigo referir-me-ei a estes alunos designando-os por alunos talentosos ou superdotados em Matemática.

Talentosos versus carenciados?

Será um luxo preocuparmo-nos com os alunos superdotados numa altura em que a escola apresenta uma elevada taxa de insucesso, com uma incidência especial em Matemática, atingindo especialmente a escolaridade obrigatória e as classes sociais mais desfavorecidas? Dar especial atenção aos alunos superdotados não agravará a situação dos carenciados?

Abordar a questão desta forma — superdotados versus carenciados — parece-me um falso problema porque não encaro a sua solução no quadro estreito da sala de aula. Ou seja, não vamos «dificultar» ou «facilitar» o desenvolvimento dos trabalhos escolares na aula para «resolver» os problemas de uns ou de outros. Em particular, o apoio a alunos talentosos passa por programas especiais criados paralelamente e em articulação com as actividades escolares normais.

Apoio aos alunos superdotados

Em vários países, a preocupação com estes alunos traduz-se pela criação de programas de atendimento, concursos na área das ciências como o «Cientista do Amanhã» no Brasil, programas de «enriquecimento» e «aceleração» nas próprias escolas (como sucede nalgumas escolas dos Estados Unidos), escolas especiais para os alunos que se destacam nas áreas de Matemática e Ciências, como a Escola de Matemática e Física de Moscovo, ou «Círculos de Estudos» e «Casas e Campos de Pioneiros» como nalguns outros países de leste.

O advento tecnológico da década de 60 trouxe para primeiro plano a importância da Matemática no desenvolvimento industrial e económico e a necessidade de estimular o acompanhamento e desenvolvimento de talentos, de modo a preparar futuros cientistas para alcançar ou manter a superioridade tecnológica. Daí a preocupação de vários países em organizar escolas especiais, concursos, programas de atendimento ou núcleos de apoio em escolas normais com o propósito de detectar e encaminhar alunos superdotados. Pretendia-se essencialmente estimular o aluno a:

- fazer uso do seu pensamento crítico e criativo;
- desafiar a sua inteligência;
- desenvolver o pensamento independente e a capacidade de liderança.

Olimpíadas da Matemática: Afinal para quem?

Portugal tem-se mantido um pouco à margem deste tipo de questões, não parecendo encará-las seriamente. No entanto, cabe aqui referir uma iniciativa que vem sendo realizada há alguns anos e que, de certo modo, constitui uma excepção no panorama nacional: as Olímpiadas da Matemática.

Embora mantendo semelhanças com iniciativas similares desenvolvidas noutras partes do mundo, este concurso tem sofrido de dois males:

- indefinição no que se pretende;
- não existência de continuidade no que respeita ao apoio aos alunos que se destacam.

Por iniciativa da delegação regional de Coimbra da SPM, as Olimpíadas organizaram-se pela primeira vez no ano lectivo de 1980/81. A partir de 1982/83 passaram a ter âmbito nacional, realizando-se anualmente. No início, contaram com uma grande adesão mas, nos últimos tempos, tem-se verificado que um grande número de alunos se desinteressou de participar. Porquê esta quebra no interesse por um concurso de problemas como as Olimpíadas de Matemática?

Para encontrarmos as causas deste facto, comecemos por recorrer ao regulamento. Neste podemos ler (ponto 2 do regulamento de 83/84): «As Olimpíadas da Matemática visam essencialmente incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática». E para o conseguir? Uma primeira eliminatória (prova tipo exame de duas horas) na qual se inscrevem muitos alunos procurando o problema de Matemática (diferente do exercício rotineiro da sala de aula) mas cujo grau de dificuldade os elimina de imediato de uma final regional, para já não falar da final nacional. Muitos alunos encontram assim a frustração de um zero numa prova e, no ano seguinte, além de não participarem, desmobilizam outros de o fazer.

Portanto, em primeiro lugar, este concurso não incentiva o aluno interessado em problemas de Matemática porque:

- não lhe dá mais do que uma prova individual de duas horas;
- o que lhe propõe está muito distante daquilo que o aluno médio poderá conseguir.

Em segundo lugar, não desenvolve o gosto pela Matemática porque:

- não dá continuidade (não sei se caberá à SPM fazê-lo) a estas provas individuais, para além da sessão final (para quem lá vai).

Parece-me, voltando às duas questões que coloquei no início, que a indefinição resulta de querer manter uma iniciativa para os talentosos sem cuidar do seu apoio futuro, iludindo ao mesmo tempo a grande maioria dos que (também) participam.

Os poucos resultados significativos que particularmente obtive com alunos meus que participaram nesta prova decorreram de um trabalho regular de preparação (discussão/resolução de problemas) na sala de aula. Mas só os alunos especialmente dotados lograram ultrapassar a primeira eliminatória.

É neste trabalho regular de resolução de problemas e discussão de estratégias — uma actividade dinâmica que envolve as escolas e os professores e que assenta na grande maioria dos alunos — que quero desenvolver a minha proposta de trabalho quanto ao papel dos concursos de problemas.

Algumas ideias a experimentar

Penso que é importante detectar alunos com elevado potencial em Matemática. Mas não só detectá-los. Dar-lhes condições, em seguida, para desenvolverem as suas capacidades. Ajudá-los ao nível das escolas onde eles estão (trabalho em clubes/núcleos mediante a participação em pequenos projectos de investigação apoiados por um grupo de professores com formação específica). Dar-lhes apoio a partir de instituições do Ensino Superior através de comissões criadas para o efeito (em ligação com a SPM e a APM) que promovam a formação e a participação dos mesmos em programas científicos, prevendo a concessão de bolsas que permitam a continuação dos projectos de investigação aos alunos mais carenciados.

Mas poderemos conciliar esta pretensão com a quebra do «bloqueio» em Matemática da generalidade dos estudantes? Ou seja, como detectar e apoiar os talentosos sem desprezar a maioria? Como incentivar e desenvolver nestes o gosto pela Matemática?

É aqui que poderia desempenhar um papel importante um concurso de problemas cujo centro seriam as escolas. O concurso passaria por três fases:

Numa primeira fase, seria centrado em cada escola e assumiria a forma de um «inter-turmas» organizado por anos de escolaridade. Cada turma teria uma equipa a definir segundo critérios em que todos participariam mas que poderiam passar pelo problema da semana ou da quinzena. Cada ano de escolaridade organizaria um inter-turmas com base em jogos lógicos, puzzles geométricos (tipo pentaminó), perguntas-surpresa com vários níveis de dificuldade, problemas, etc. As provas envolveriam todas as equipas e respectivas claques (restantes elementos da turma que teriam funções de desempate) e passariam por etapas progressivamente mais complexas até se encontrar a equipa vencedora por ano.

A partir daí passaríamos à segunda fase — por zona ou por distrito, a definir pela organização tendo em conta os recursos humanos disponíveis. Encontraríamos assim a equipa vencedora por ano de escolaridade e em cada zona/distrito.

Por último, chegaríamos à fase final que teria uma prova individual (tipo Olimpíadas da Matemática actuais) e uma prova por equipas (três alunos cada) que apuraria as melhores equipas por ano de escolaridade.

A ideia pode parecer um pouco complicada mas encontramos um exemplo com algumas semelhanças no concurso Topas que decorre anualmente na Escola Secundária de Santo André no Barreiro. Para além disso, a minha ideia é começarmos onde podemos e contando com os recursos que temos. Basta que haja professores interessados aos quais sejam fornecidos alguns materiais para arranque (bibliografia, problemas, sugestões). O critério de selecção na primeira fase competiria única e exclusivamente à própria escola.

A nível distrital, a coordenação poderia ser proposta aos núcleos de Matemática das Escolas Superiores de Educação enquanto a fase nacional seria assegurada pela ESE do distrito onde decorresse, conjuntamente com a Associação de Professores de Matemática e a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Vejo neste tipo de iniciativa uma dinâmica cujo eixo é a escola/turma que necessariamente reflectirá um trabalho conjunto de professores e alunos e que poderá quebrar o «gelo» da Matemática face a alguns, propor actividades mais motivadoras para outros e detectar simultaneamente os melhores numa fase final.

É uma proposta nas mãos dos professores de Matemática e da APM.

Grupos de Trabalho: Currículos/Programas

O ensino das Probabilidades e Estatística, do primário ao secundário, tem sido este ano a nossa base de trabalho. Partindo de textos e de algumas experiências pontuais, temos conseguido recolher algum material gerador de discussões bastantes interessantes.

Questões ligadas à abordagem deste tema numa perspectiva vertical têm-nos mostrado não só a necessidade e interesse da sua aprendizagem desde os níveis etários mais baixos, como também as vantagens da articulação consistente, ao longo dos vários ciclos de ensino, de um tema com esta importância.

Incluir um capítulo sobre Estatística e Probabilidades no programa do 11.º ano, parece-nos forçado e inadequado à educação matemática. Propor, desde o início da escolaridade, actividades que levem ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico e da compreensão da visão estatística da realidade parece-nos a via correcta para concretizar potencialidades formativas da disciplina de Matemática.

Como produto das nossas pesquisas e discussões pensamos conseguir, no Profmat-87, organizar o curso sobre Probabilidades e Estatísticas, um ou dois workshops e ainda uma sessão de discussão virada não só para o nosso trabalho deste ano mas também para os projectos futuros dos grupos de trabalho Currículos/Programas.

Grupo de Trabalho de Lisboa

Para uma abordagem do conceito de probabilidade

Odete Bernardes, Escola C + S de Montelavar

Muitos de nós já verificaram que, em viagens de automóvel, as crianças se distraem contando os carros que se cruzam em sentido contrário. Apostar na cor mais frequente dos carros que passam pode ser também uma distracção. Tenho assistido, frequentemente, a jogos deste tipo e, neste momento, apostar que os carros de cor branca são em maior número é vitória certa. Os meus filhos, isto sabem-no bem!

A Teoria das Probabilidades é um dos campos mais aliciantes da Matemática. Parte dos acontecimentos possíveis do dia a dia, tropeça no conceito de azar ou de sorte e estabelece leis que permitem «medir a sorte».

Sem a Teoria das Probabilidades e a Estatística o ensino da Matemática reduz-se ao verdadeiro e falso das proposições matemáticas. Sem as noções probabilísticas os alunos acabam por ter uma visão deformada da Matemática: acreditar que entre o possível e o impossível nada mais há. As probabilidades são, assim, o campo da Matemática que estuda o «pode ser».

Se o ensino de Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever numerais ou fórmulas, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental.

Alguns trabalhos têm sido realizados em Portugal sobre este assunto: o programa experimental para o Ciclo Preparatório em 1978/79 e 1979/80 continha noções de probabilidades e estatística; também no último Encontro Nacional de Professores de Matemática foram apresentadas comunicações e relatadas experiências, provando assim a importância do tema.

Em 1981 o livro do ano do National Council of Teachers of Mathematics, dos E.U.A., era dedicado à estatística e às probabilidades, considerando estes temas adequados ao curriculum porque:

« — proporcionam aplicações matemáticas com significado a todos os níveis;

— proporcionam métodos para lidar com a incerteza;

— ajudam-nos a compreender argumentos estatísticos, bons ou maus, com os quais somos bombardeados;

— ajudam a distinguir a utilização correcta dos procedimentos estatísticos da utilização viciada e abusiva;

— constituem temas intrinsecamente interessantes, excitantes e motivadores para a maioria dos alunos.»

A aprendizagem das probabilidades não deve passar, nos primeiros anos de escolaridade, pelo cálculo da probabilidade de ocorrência de determinado fenómeno mas, antes, pela vivência e análise de situações envolvendo aquele conceito e pela consequente tomada de atitudes.

Saber avaliar da probabilidade de ganhar (ou não) um jogo pode ser o primeiro passo para a compreensão daquele conceito. É nesta perspectiva que se inserem as actividades/jogo que recolhemos, traduzimos e adaptámos do livro atrás referido.

Jogo das Rodelas

JOGO 1 (2 jogadores)

Material necessário

— 2 rodelas vermelhas com um lado A e um lado B;

— 1 rodela azul com um lado A e um lado B;

— papel e lápis para marcar os pontos.

Regras do jogo:

1. Decidir quem será o jogador 1 e quem será o jogador 2.
2. Lançar as três rodelas ao mesmo tempo.
3. O jogador 2 marca um ponto se:

— as duas rodelas vermelhas mostrarem o lado A;

— a rodela azul mostrar o A;

— as três rodelas mostrarem o lado A.

Se assim não for, o jogador 1 marca um ponto.

4. Fazer 16 lançamentos.
5. O vencedor será o jogador que tiver maior pontuação no fim das 16 jogadas.

Jogar 2 ou 3 vezes o jogo

Depois responder a estas perguntas:

— A probabilidade de ganhar é igual para ambos os jogadores?

— Será que ganha sempre a mesma pessoa?

— Consideras leais as regras do jogo?

JOGO 2 (2 jogadores)

Material necessário:

— 1 rodela com uma marca A num lado e B no outro;
— 15 rodelas para cada jogador;
— 1 cartão para cada jogador;
— papel e lápis para marcar pontos.

Regras do jogo:

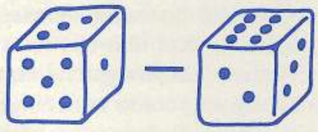
1. Decidir qual dos jogadores será o A e qual será o B.
2. Lançar a rodela marcada. Se o A aparecer, o jogador A coloca uma rodela no seu cartão. Se o B aparecer, será o jogador B que coloca uma rodela no cartão respectivo.
3. O vencedor será o primeiro a colocar as 15 rodelas.

Jogar 2 ou 3 vezes o jogo.

Depois responder a estas perguntas:

— A probabilidade de ganhar é igual para ambos os jogadores?
— Será que ganha sempre a mesma pessoa?
— Consideras leais as regras do jogo?

Jogo da diferença



(2 jogadores)

Material necessário:

— 2 dados numerados;
— papel e lápis para marcar a pontuação;
— relógio para contar tempo.

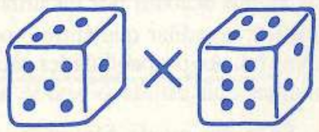
Regras do jogo:

1. Decidir qual dos dois jogadores será o «par» e qual será o «ímpar».
2. Lançar os dados e calcular a diferença entre os dois números.
3. Se a diferença é um número par, o jogador «par» marca um ponto; se a diferença é um número ímpar, é o jogador «ímpar» que marca um ponto. (Lembrem-se que o zero é um número par.)
4. Lançar os dados durante 2 minutos.
5. O vencedor é o jogador que obtiver maior pontuação.

Jogar 2 ou 3 vezes o jogo.

Tomar nota de quem é o vencedor de cada jogo, se é o «par» ou o «ímpar».

Jogo do Produto



(2 jogadores)

Material necessário:

— 2 dados numerados;
— papel e lápis para marcar a pontuação;
— relógio para marcar o tempo.

Regras do jogo:

1. Decidir qual dos jogadores será o «par» e qual será o «ímpar».

2. Lançar os dados e calcular o produto dos dois números.

3. Se o produto é um número par o jogador «par» marca um ponto. Se o produto é um número ímpar o jogador «ímpar» marca um ponto.

4. O jogo dura 2 minutos.

5. O vencedor será o jogador que obtiver maior pontuação.

Jogar por 2 ou 3 vezes o jogo.

Tomar nota de quem é o vencedor de cada jogo, se é o «par» ou o «ímpar».

Jogados este jogo e o anterior, responder às perguntas seguintes:

1. A probabilidade de ganhar é a mesma para ambos os jogadores em cada um dos jogos?

2. Em qual, dos jogos a probabilidade do jogador «ímpar» ganhar é maior?

Estatística no Ensino Básico e Secundário — Uma proposta

Alice Inácio, Esc. Sec. Avelar Brotero

A introdução da Estatística nos programas do Ensino Básico (1.º a 9.º anos de escolaridade, de acordo com a Lei de Bases do Sistema Educativo), desde os mais baixos escalões, parece-me urgente. Efectivamente:

— a todo o momento se é «metralhado» com informações imbuídas de aparato estatístico (desde o «9 de cada dez estrelas» a dados sobre a nossa realidade social e/ou política, como as sondagens);

— em praticamente qualquer profissão, é cada vez mais vulgar ser necessário utilizar e/ou fornecer dados tratados de forma estatística, assim como é cada vez mais frequente utilizar técnicas estatísticas para correlacionar dados e destes extrair conclusões.

Aliás, quer no Ensino Preparatório, quer no Secundário, várias disciplinas das áreas da Biologia, da Geografia ou da Economia, por exemplo, utilizam já a linguagem estatística. Considero fundamental que a Matemática deixe de ignorar este seu capítulo e passe a contribuir para que, face a situações semelhantes às acima referidas, o jovem coloque a si próprio questões como as seguintes:

- em que dados são baseadas as afirmações feitas? Esses dados traduzem a realidade?

- que técnicas foram utilizadas para, dos dados, retirar as conclusões enunciadas? são teoricamente correctas?

- há desarmonias entre as conclusões e a realidade que se pretende estudar? devem-se essas desarmonias a uma deficiente recolha de dados ou a um deficiente tratamento destes?

Vou tentar mostrar como penso que a estatística pode ser tratada nos vários níveis de escolaridade. Vou considerar um núcleo de interesses e desenvolvê-lo, sugerindo, para cada nível de escolaridade:

(i) actividades;

(ii) conteúdos estatísticos que podem ser introduzidos;

(iii) reflexões/conclusões que se podem incentivar, através de discussão na aula;

(iv) ligação com outros capítulos da Matemática;

(v) ligação com outras áreas disciplinares.

O núcleo de interesses que vou considerar diz respeito ao estudo das condições climatéricas da região. Em cada momento, «o que registar» e «como o fazer» considero dever ser objecto de discussão na aula. O que aqui fica não é mais que uma sugestão sobre a forma como esse trabalho se pode desenvolver. Parece-me também que, em qualquer nível, devem ser promovidas discussões na aula relativas a:

— inferências que podem ser retiradas quanto ao clima da região a partir dos registos efectuados em determinado período;

ou com base em:

— comparação com registos referentes a outra região;

— comparação de registos feitos pelos alunos em diferentes períodos do ano.

Esta discussão deverá ser conduzida tendo em conta o nível de desenvolvimento intelectual dos alunos, bem como o seu nível de hábitos/conhecimentos/interesses; parece-me, contudo, que estas discussões permitirão aflorar, em qualquer nível etário, os problemas levantados no início deste artigo.

NÍVEL PRÉ-ESCOLAR

(i) 1. construção de tabelas de registo das condições climatéricas a um nível muito global (Por ex.: sol radioso, enublado, chuva).

2. os símbolos a utilizar devem resultar das sugestões dos alunos, de forma a estarem de acordo com o seu nível de simbolização; devem ser feitos pelos próprios alunos.

A tabela resultante pode ter a forma da figura 1.

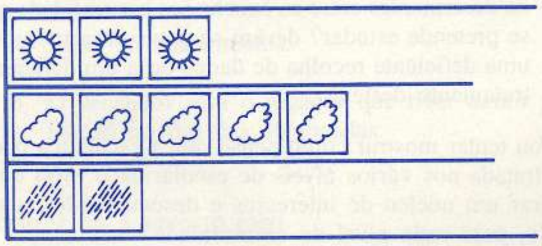


Fig. 1

(ii) 1. introdução da palavra *moda* para nomear a fila maior;

2. de acordo com o domínio que os alunos tenham do sistema de numeração, pode ser determinada a frequência absoluta de cada categoria ou serem somente efectuadas comparações quantitativas sobre as frequências das várias categorias.

(iii) poderão provocar-se discussões a partir, por exemplo, das previsões, pelos alunos, das condições atmosféricas para o dia seguinte.

(iv) 1. a noção de quantidade pode ser aprofundada com este trabalho;

2. pode-se contribuir para que o aluno avance no processo de abstracção/simbolização, incentivando-o a substituir os primeiros símbolos idealizados por outros mais abstractos.

(v) a ligação às áreas de Meio Físico e de Educação Visual parece-me imediata.

ESCOLA PRIMÁRIA

Todo o trabalho sugerido para o nível pré-primário pode ser efectuado, agora a um nível de abstracção mais elevado. Inter-relacionando os conhecimentos dos alunos sobre numeração com os referentes à forma de indicar o tempo, pode utilizar-se uma forma de registo como a apresentada na fig. 2. Pode, então, ser provocada uma discussão sobre as vantagens/desvantagens dos dois métodos de registo.

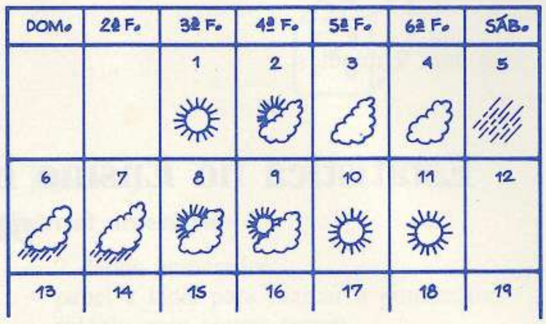


Fig. 2

A partir de certo momento, podem igualmente começar a ser feitos registos relativos à temperatura verificada a uma determinada hora do dia, podendo desenvolver-se, a este propósito, todo um trabalho semelhante ao anteriormente visto. Podem ainda ser introduzidas as primeiras noções sobre medidas de dispersão, como sejam limites de variação e intervalo de variação e, com base neles, ser feita a comparação de dados referentes a vários locais.

CICLO PREPARATÓRIO

Neste nível parece-me fundamental que se passe a fazer o registo em termos de temperaturas. Contudo, penso ser útil que se faça durante algum tempo um registo semelhante ao da figura 1, de forma a possibilitar a abordagem dos problemas relacionados com o estudo de variáveis discretas/variáveis contínuas.

Sugiro a organização da trabalhos que conduzirão a:

1. elaborar tabelas de frequência;

2. calcular frequências relativas, na forma fraccionária ou na forma percentual;

3. introduzir a noção de mediana, como sendo o valor abaixo do qual há metade das observações e acima do qual há, igualmente, metade das observações;

4. introduzir a noção de média, acentuando a ideia de que esta está relacionada com aquilo que deve ser tirado às categorias com maior frequência e ser dado às de menor frequência, para que todas fiquem em igualdade (isto pode ser mostrado de forma gráfica — Fig. 3);

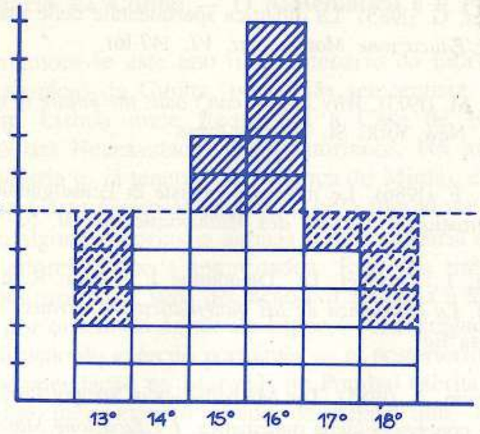


Fig. 3

5. elaboração de gráficos;

6. primeira abordagem à organização de dados em classes.

Parece-me possível, neste nível, a ligação à disciplina de Ciências da Natureza e à de Estudos Sociais.

7.º a 9.º ANOS (3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO)

Para além de ser possível trabalhar com os alunos de forma semelhante à anteriormente referida, poder-se-á, em colaboração com os professores de Geografia, efectuar registos referentes à pluviosidade, ou mesmo, em colaboração com os professores de Física e Trabalhos Oficinais, efectuar registos relativos ao número diário de horas com Sol.

Parece-me ser agora possível:

1. efectuar uma comparação de registos relativos a vários locais e/ou períodos do ano, utilizando;
   1.1. quer os dados em bruto;
   1.2. quer a representação gráfica ou tabelar dos mesmos;
   1.3. quer as medidas estatísticas entretanto introduzidas;
2. aprofundar a discussão da noção de média: influência na mesma de valores extremos; sua relativização através da utilização;
   2.1. da moda e da mediana;
   2.2. de medidas de dispersão; além das anteriormente indicadas, poderão ser trabalhadas medidas como os quantis e os quartis, o que possibilitará uma interligação com o capítulo da Proporcionalidade;
3. reelaborar todo o trabalho anterior, a partir da organização dos dados em classes.

CURSO COMPLEMENTAR

Poder-se-á aprofundar o trabalho anterior e visar particularmente.

1. o alargamento da discussão dos aspectos relativos à organização dos dados em classes;
2. a introdução de novas medidas de dispersão — desvio médio, variância, desvio padrão;

Poder-se-ão ainda introduzir algumas medidas de assimetria e de achatamento. Comparando registos de variáveis relacionadas (temperaturas/condições atmosféricas/tipo de vestuário utilizado, por exemplo), poderá ser feita uma primeira abordagem à correlação entre variáveis.

Muitos mais temas poderão ser aproveitados para fornecer ao aluno o instrumental estatístico, tão necessário ao sentido crítico que é urgente ser incentivado. Sugiro:

— dados físicos relativos aos alunos, como sejam;
  • dados recolhidos pelo Professor de Educação Física;
  • comprimento de pé (medidas tradicionais de comprimento);
— dados relativos ao crescimento semanal existentes na sala de aula;
— dados recolhidos pelos próprios alunos, através de pequenos inquéritos, por eles elaborados; temas interessantes poderão ser:
  • programas de TV preferidos;
  • canções preferidas;
  • alimentos mais consumidos.

Alguns destes pólos de interesse são mais apropriados à introdução de certas noções que outros, bem como proporcionam uma sensibilização mais fácil e completa para um ou outro dos problemas focados na introdução deste trabalho. Estes são aspectos a termos em conta ao planificarmos o trabalho na aula, e só a nossa sensibilidade/compreensão dos problemas que podem surgir no desenrolar do trabalho, bem como da situação do grupo-turma, pode conduzir a bom porto o trabalho a desenvolver.

Bibliografia

Shulte, A. P. Smart, J. R. (1981). *Teaching Statistics and Probability.* Reston: NCTM

Aebli, H. (1978). *Didáctica Psicológica;* Actualidades Pedagógicas, Vol. 103, Companhia Editora Nacional: S. Paulo.

(continuação da pág. 10)

mais de vinte cinco alunos é impraticável e que a relação humana directa entre o professor e cada um dos seus discípulos é pouco menos que impossível. É curioso observar como os governos que enfeitam os seus discursos programáticos com a promessa de «melhorar a qualidade do ensino» mantêm como «naturais» ou «inevitáveis» situações que distam escandalosamente daquela proporção extrema.

Em segundo lugar, a *arquitectura* dos espaços destinados ao ensino, e muito particularmente a arquitectura das salas de aula. Estas estão desenhadas para um ensino de tipo magistral e poucas vezes podem ser readaptadas para o trabalho em grupo e para o desenvolvimento de um ensino de tipo activo e participante.

Por último, a *uniformidade e centralização* do ensino, que se manifesta habitualmente em programas rígidos, cheios de conteúdos, que impõe aos professores uma permanente corrida contra-relógio e lhes deixa uma margem muito reduzida para a experimentação e a criatividade.

Referências

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Ed. Vrin.

Bachelard, G. (1971). *Epistémologie.* Paris: Presses Universitaires de France.

Glaeser, G. (1985). La didattica sperimentale delle matematiche. *L'Educazione Matematica, VI,* 147-161.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the New Math.* New York: St. Matin's Press.

Pham, F. (1986). Le mythe formaliste et l'enseignement des mathématiques. *Gazette des Mathematiciens, 31,* 53-77.

Piaget, J., Choquet, G., Dieudonné J., Thom, R. e outros (1978). *La ensenanza de las matematicas modernas.* Madrid: Alianza Ed.

Rogerson, A. (1985). The Mathematics in Society Project: una nuova concezione della matematica. *L'Educazione Matematica, VI,* 49-59.

(*) Pascual Llorente é doutorado em Matemática e Professor da Universidade de Saragoça (Espanha). Anteriormente, foi Professor em diversas Universidades da Argentina, Peru, Venezuela e Espanha. A sua especialidade é a Teoria de Números, tema em que investiga utilizando os computadores. Interessa-se também por problemas da História da Matemática e do Ensino da Matemática.

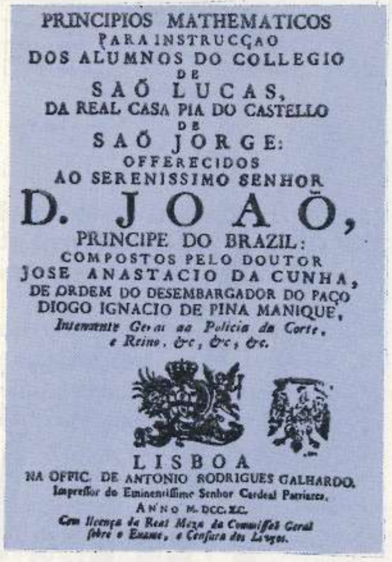
(continuação da pág. 2)

Anastácio da Cunha — O Matemático e o Poeta

Comemora-se este ano o bicentenário da morte de José Anastácio da Cunha, português setecentista, nascido em Lisboa onde frequentou a Casa de Nossa Senhora das Necessidades dos Oratorianos. Foi militar de Artilharia e, já tenente em Valença do Minho, escreveu uma *Carta Fisico-Matemática,* obra inovadora onde corrigia algumas teorias já antigas sobre artilharia e que citava autores à época interditados. Este seu trabalho valeu-lhe, primeiro, uma detenção por rebeldia e iconoclastia por ordem do conde de Lippe — encarregado da reorganização do exército português — e, posteriormente, uma recomendação ao Marquês de Pombal escrita pessoalmente pelo mesmo conde de Lippe que, tendo tomado melhor conhecimento do trabalho de Anastácio da Cunha, lhe reconhecera mérito. Mais tarde, criada a Faculdade de Matemática em Coimbra vai ser o próprio Marquês de Pombal quem nomeia José Anastácio da Cunha para a cadeira de Geometria da qual se ocupou durante cerca de quatro anos,

Morre, entretanto, o Marquês, em 1777, e a Inquisição retoma as suas actividades de censura e perseguição; é a onda *viradeira* que vai perseguir os adeptos ou protegidos de Pombal. Muitos fogem para o estrangeiro, o então lente da Universidade de Coimbra Dr. José Anastácio da Cunha, apesar de avisado, não o faz e, em Julho de 1778, é preso nessa cidade vindo a ser acusado e condenado por faltas cometidas em Valença: heresia e libertinagem.

A condenação a que fora sentenciado não veio a ser totalmente cumprida e, em Janeiro de 1781, foi indultado não lhe sendo, no entanto, nunca restituído o seu lugar em Coimbra. Foi durante o seu período de reclusão que José Anastácio redigiu aquela que é considerada a sua obra-prima— *Princípios Matemáticos.* Esta obra começou a ser publicada em 1782 graças à Casa Pia para onde fora nomeado professor de Matemática pelo seu fundador Pina Manique. O livro completo foi apenas publicado três anos após a morte de Anastácio da Cunha, em 1790.



PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAO
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSÉ ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte, e Reino, &c, &c, &c.
LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO,
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca,
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral sobre o Exame, e Censura dos Livros.

Oratoriano na sua juventude, tenente de artilharia aos dezanove anos, lente de Geometria em Coimbra aos vinte e nove; aberto ao livre pensamento, e seu praticante, conhecedor de línguas, leitor e tradutor de autores à época proibidos, autor de obra poética e científica esquecida e de valor considerado injustamente não reconhecido, tem sido este o destino da obra, e da memória, de José Anastácio da Cunha. Este ano foram já levadas a cabo várias realizações no âmbito de uma homenagem nacional a esse Matemático e poeta. Nos dias 8, 9 e 10 de Outubro próximo, organizado pela Comissão de Lisboa de homenagem a Anastácio da Cunha, vai realizar-se um colóquio internacional sobre a obra científica e poética deste autor pretendendo assim, segundo a sua Comissão Organizadora, *projectar nacional e internacionalmente a figura e a obra de José Anastácio da Cunha; estimular o estudo e a pesquisa nas áreas da História da Matemática e das Ciências em geral; contribuir para dar uma dimensão cultural e social da Ciência e, em particular, da Matemática; e, realçar a complementaridade da Cultura e da Ciência através da obra poética de José Anastácio da Cunha.*

A fechar

Lembram-se da capa da *Educação e Matemática* N.º 1?

Quando saiu esse número enviei-o para um amigo meu em França que, com os títulos que constavam na referida capa, compôs o seguinte *anagrama:*

* APM: A RESOLUÇÃO
* A GEOMETRIA DOS PROBLEMAS
* O DESAFIO DA PROPORCIONALIDADE
* OS CRISTAIS DA ESPERANÇA.

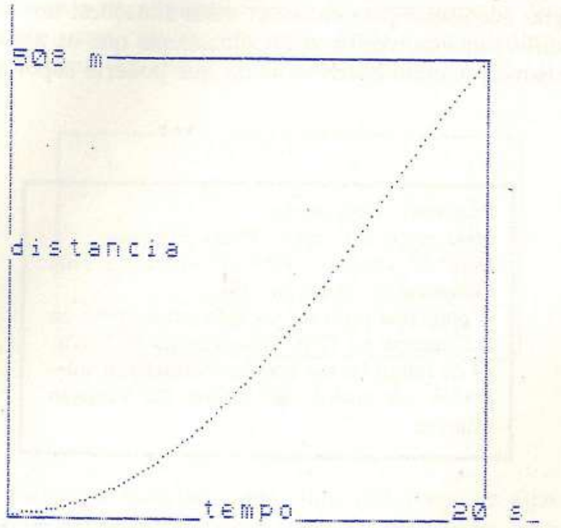
Isto como voto de boa continuação para a revista.


AUDIÊNCIA GLOBAL DE MEIOS
TELEVISÃO
RÁDIO
JORNAIS
REVISTAS
93.9
34.8
27.4
45.2
19.9
36.2
18.4
20.4
45.9
1.º Canal
2.º Canal
Comercial
Renascença
Antena 1
Diários
Semanários
Desportivos
Revistas
(Fonte Marktest 1986)
VÊEM TELEVISÃO
61.4
Todos os dias
19.8
Quase todos os dias
5.8
2-3 vezes p. semana
7.8
Mais raramente
5.1
Nunca
(Fonte Marktest 1986)
Televisão: o máximo em audiência.
Para a sua publicidade na Televisão consulte as Agências de Publicidade ou a concessionária
RTC Radiotelevisão Comercial Lda
Lisboa, Avenida Fontes Pereira de Melo, 17-2.º 1000 Telef. 548335/40 Telex 6463(RTC P
Porto, Rua de Sá da Bandeira, 651-4.º 4000 Telef. 316639
Funchal (Madeira), Avenida das Comunidades Madeirenses, 15-2.º Telef. 28259 Telex 72230 AMICOS
Ponta Delgada (S. Miguel, Açores), Total Publicidade, Apartado 37 9501 Codex Telef. 26336 Telex 82563 RTP

Estimatemp — uma oportunidade para trabalhar com valores aproximados

Paulo Abrantes, Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa

O programa Estimatemp começa por apresentar uma situação que consiste em simular um teste de aceleração de um automóvel. O gráfico seguinte surge no início, representando a variação do espaço percorrido pelo automóvel no intervalo de tempo de 0 a 20 segundos.



É então indicada uma distância em metros, gerada aleatoriamente, e propõe-se ao aluno que descubra ao fim de quanto tempo tinha o automóvel atingido essa distância. A resposta deve ser dada com erro inferior a uma determinada unidade decimal (0.001 na 1.ª versão do programa e 0.01 ou 0.001 nos níveis 1 e 2, respectivamente, da 2.ª versão).

Em qualquer altura, pode rever-se o enunciado do problema (distância gerada e aproximação pretendida) ou o gráfico. No entanto, o elemento essencial de consulta é uma tabela (de valores do tempo e distâncias correspondentes) que será fornecida sempre que seja pedida. O aluno deverá escolher os valores mínimo e máximo do tempo e essa escolha é importante pois, para além desses dois valores extremos, a tabela apenas conterá mais sete valores intermédios (quatro no nível 1 da 2.ª versão do programa).

A actividade do aluno consiste, no essencial, em:

(*a*) começar por estimar valores extremos do tempo entre os quais deve situar-se a solução;

(*b*) analisar a tabela respectiva, em particular verificando entre que valores do tempo se situa efectivamente a solução;

(*c*) indicar novos valores extremos para nova tabela — e voltar a (b);

e assim, reduzir sucessivamente a amplitude do intervalo até poder apresentar uma resposta com erro inferior à unidade decimal pretendida.

Quando, finalmente, o aluno apresenta uma resposta correcta, é-lhe atribuída uma pontuação que consiste basicamente na contagem do número de consultas que precisou de efectuar, apenas agravada por penalizações nos casos de decisões extemporâneas.

Características do programa e sugestões didácticas

O programa Estimatemp apresenta simultaneamente características de:

- simulação — o movimento do automóvel;
- jogo — tentar a mais baixa pontuação;
- resolução de problemas — desenvolver estratégias que permitam «economizar» consultas;
- prática — estimação e trabalho sistemático com valores aproximados.

Esta variedade de características permite utilizá-lo em situações e com objectivos diversos. No entanto, o programa estará principalmente indicado a propósito do estudo de questões relativas a valores aproximados por defeito e por excesso e majorantes de erros, recomendando-se actualmente para o 8.º ano de escolaridade.

O balanço das numerosas experiências de utilização deste programa em turmas do 8.º ano parece ser bastante positivo. Esta apreciação diz respeito tanto à compreensão e exploração de conceitos como ao ambiente de aprendizagem.

Do primeiro destes pontos de vista, três aspectos merecem um especial realce:

1. A estimação inicial: quase invariavelmente, os alunos começam por raciocinar na base de um modelo proporcional como se a velocidade do automóvel fosse

constante; progressivamente, vão-se apercebendo das diferenças entre distintos tipos de movimentos e mesmo entre as respectivas representações gráficas.

2. O trabalho sistemático com intervalos e com números escritos na forma de dízima: evitando cálculos fastidiosos e inúteis, este aspecto do programa pode ajudar os alunos a aperceberem-se do carácter denso do conjunto dos números racionais, o que constitui uma dificuldade de aprendizagem bastante comum ao nível do 8.º ano.

3. A resposta final: o interesse em responder correctamente mas com um mínimo de informação dá origem a que se discuta e consolide o significado de majorante de um erro.

Do ponto de vista do ambiente que a utilização do programa pode ajudar a criar, a experiência sugere que o trabalho dos alunos em pequenos grupos pode ser uma boa solução desde que se dê a cada grupo oportunidade para «jogar» várias vezes (pelo menos, três ou quatro vezes) e ir melhorando o seu «score». Aulas do 8.º ano, organizadas deste modo em diversas escolas, revelaram-se fortemente motivadoras para os alunos (desenvolvendo-se nalguns casos um salutar espírito de competição entre os vários grupos) e em que foi possível aliar-se um bom ambiente de trabalho e um aproveitamento integral do tempo disponível. Uma alternativa para o caso de se dispor apenas de um computador poderá ser aquela que uma professora utilizou este ano: organizar tarefas diferentes pelas quais os vários grupos iam rodando ao longo de uma sequência de aulas (em cada momento, apenas um grupo trabalhava com o computador); promover, na última aula desta sequência, um concurso entre os vários grupos, ganhando aquele que obtivesse a menor pontuação em três experiências sucessivas com o programa Estimatemp.

A experiência tem mostrado ainda que, na utilização deste programa (como quase sempre...), parece ser essencial haver momentos em que os alunos trabalham com bastante liberdade e autonomia. Começar por «explicar» como se devem evitar erros ou tentativas inúteis pode ser uma óptima maneira de estragar quase todas as potencialidades educativas do programa. Isto não significa que não deva haver períodos de sistematização ou de discussão geral. Também este ano, uma outra professora, depois de ter organizado uma aula em que os alunos trabalharam livremente com o programa, decidiu no começo da aula seguinte escrever no quadro algumas situações como se tivessem sido geradas pelo próprio programa, após o que discutiu com toda a turma estratégias adequadas para enfrentar essas situações: nos primeiros minutos, verificou imediatamente que os alunos tinham aprendido muito mais do que poderia supor-se.

Programa: Estimatemp
Ideia original e autor: Paulo Abrantes
Data: 1.ª versão — 1984; 2.ª versão — 1986
Computador: Spectrum 48K
O programa pode ser copiado em disquete ou em cassette no Dep. Educação da FCL (Av. 24 de Julho) ou nas Escolas Secundárias integradas no núcleo de Lisboa do Projecto Minerva.

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Director
Leonor Moreira

Redacção
Conceição Mesquita, Henrique M. Guimarães, José Manuel Duarte e Paulo Abrantes

Conselho Editorial
Carlos Próspero, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, João Filipe Matos, João Ponte, Leonor Filipe, Maria João Costa.

Colaboraram neste número:

Alice Inácio, Ana Teles, Ana Vieira, Aniss Ali, Arsénio Coelho, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Fátima Antunes, Fernando Nunes, Helena Paradinha, Henrique Guimarães, João Palma, José António Duarte, Leonor Moreira, Maria João Costa, Odete Bernardes, Pascual Llorente, Paulo Abrantes e Teresa Vergani.

GOBIN

Maria João Peres Costa, Escola Prep. da Trafaria

Apresentação

O Gobin é um jogo inspirado no bingo; é, de facto, um bingo ao contrário. Pode ser utilizado, na aula, por toda a turma em situações de aprendizagem específicas ou pode servir para ocupar tempos eventualmente mortos de alguns alunos.

O Gobin é jogado num tabuleiro quadrado com 4 × 4 quadrículas. No ínicio do jogo, cada aluno ou grupo de alunos recebe um tabuleiro «vazio» que deverá preencher utilizando os números de 1 a 16. Cada número deverá ocupar uma casa do tabuleiro, sendo a sua distribuição feita como os alunos quiseram (exemplo — fig. 1).

11	7	5	2
6	1	14	9
10	16	3	12
4	13	8	15

Fig. 1

Feito este trabalho, cada aluno (ou grupo de alunos) recebe dez pequenas fichas circulares (de plástico ou cartolina) que irá distribuir sobre o tabuleiro da forma que entender mais conveniente: pode «apostar» uma ficha por número, mas pode igualmente «apostar» duas ou mais fichas num mesmo número. Em qualquer dos casos, ficarão sempre por ocupar pelo menos seis quadrados. No final desta fase, o tabuleiro poderá ter o seguinte aspecto:

11 ••	7	5 ••	2
• 6	1	• 14	9
10	16 •	3 •	12
4	• 13	8	15

Fig. 2

Neste caso, os números 3, 6, 9, 13, 14 e 16 receberam uma ficha cada um; os números 5 e 11 têm cada um duas fichas e os restantes números estão desocupados.

A regra fundamental do jogo é a seguinte: sempre que um número é extraído retira-se a ficha que eventualmente tenha sido colocado na casa correspondente. Atenção: no caso de numa mesma casa estarem duas ou mais fichas, só pode ser retirada uma de cada vez. No exemplo anterior, os números 5 e 11 terão de ser extraídos duas vezes cada um para que as fichas respectivas sejam totalmente retiradas.

O vencedor do jogo é o primeiro aluno ou grupo de alunos a conseguir retirar as suas dez fichas.

Os alunos são por fim informados da forma de extracção dos números, que será feita por lançamento de dois dados (de faces numeradas de 1 a 6): — o número extraído corresponderá à soma das pontuações obtidas com cada um dos dados.

Como se pode ver, é um jogo aparentemente fácil.

Desenvolvimento

No entanto, rapidamente, os alunos se vão aperceber que a situação é mais problemática do que aparenta à partida. Será possível extraír o número 1? E o número 15?

Um pouco de reflexão permite verificar rapidamente que, com esta forma de extracção, só é possível obter números inteiros maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 12. Permite, ainda, levantar outra questão importante: haverá números que saiam mais vezes do que outros?

Esta última questão conduz à investigação das várias combinações possíveis no lançamento de dois dados, possibilitando a introdução ou utilização da noção de par ordenado, numa tabela do tipo da seguinte:

Pontuação	Pares possíveis	N.º de pares
2	(1,1)	1
3	(1,2) (2,1)	2
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6

(tabela 1)

Chegados a este ponto, os alunos são naturalmente levados a concluir que existem 7 pares possíveis para obter 8 pontos, 8 pares possíveis para 9 pontos, etc. Ao completarem a tabela, vão no entanto verificar que as coisas não se passam dessa forma:

Pontuação	Pares possíveis	N.º de pares
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3
11	(5,6) (6,5)	2
12	(6,6)	1

(tabela 2)

Os alunos aprendem assim a reflectir e a não se precipitar na identificação de determinados padrões de distribuição numérica, por mais regular que esta pareça ser.

Variações possíveis

O Gobin pode ser jogado num tabuleiro de 4 × 4 quadrados, que é adequado a alunos de 6-8 anos, mas pode igualmente recorrer-se a um tabuleiro maior de 6 × 6 quadrados no caso de alunos mais velhos ou mais interessados, utilizando neste caso novas regras.

A regra de extracção de números pode, assim, ser alterada para algo do tipo «a soma dos pontos menos 2» ou «a diferença das pontuações», o que se presta a novas explorações das extracções mais frequentes em cada um dos casos. Utilizando dados com numeração adequada pode-se igualmente explorar regras ligadas à multiplicação e divisão de inteiros.

Outras explorações

O Gobin pode ser utilizado por alunos mais velhos (9-11 anos) na introdução à Teoria das Probabilidades, através do estudo da distribuição correspondente a n extracções.

A definição clássica de probabilidade (Laplace) é a seguinte:

— a probabilidade da realização de um dado acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à realização deste acontecimento e o número total de casos possíveis.

Temos assim que a probabilidade de um acontecimento A será:

$$P(A) = \frac{p}{n}$$

sendo p — número de casos favoráveis

e n — número de casos possíveis

Analisando os resultados num único lançamento de dois dados, vemos que existem 36 casos possíveis (n = 36).

Desta forma, a probabilidade de numa extracção obtermos o número 12 é

$$P(12) = \frac{1}{36}$$

visto que existe um único caso favorável à saída deste número precisamente o par (6,6).

Em contrapartida, a probabilidade de se obter o número 7 é

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

já que há seis pares favoráveis neste caso (ver tabela 2).

A introdução deste conceito permite, desde logo, aos alunos formular uma série de questões:

— com uma única extracção, em que números deveremos apostar para termos uma probabilidade grande de acertar?

— será que neste jogo, com dez fichas, conseguiremos distribuir as apostas de forma a obter uma probabilidade de 100% de acertar no número extraído?

— será preferível concentrar as apostas nos números com maior probabilidade de sair ou deveremos distribuí-las pelo maior número possível de valores, já que vão ser feitas várias extracções aleatórias?

Após várias experiências de lançamento dos dados, os alunos observam naturalmente que os números saídos nem sempre acompanham de perto as previsões feitas e são assim levados a concluir que uma pequena amostra não permite tirar conclusões estatisticamente válidas sobre os acontecimentos ou as variáveis em estudo. É necessário recorrer a uma amostragem suficientemente representativa (em quantidade e qualidade) para que se possam inferir regras de distribuição e de comportamento dos diferentes elementos em jogo.

No caso dos dados, torna-se assim necessário efectuar um grande número de lançamentos, trabalho moroso e cansativo, mas que pode ser rentavelmente efectuado com a ajuda de um computador e de um programa de simulação. O programa pode mesmo ser elaborado pelos próprios alunos ou, no caso de haver na escola algum clube ou núcleo de informática, pelos alunos do núcleo.

Um programa de simulação

O programa seguinte foi elaborado em BASIC para o TC 2048 e faz a simulação das extracções nas condições definidas neste artigo: dois dados numerados de 1 a 6, sendo a pontuação total correspondente à soma das pontuações obtidas com cada um dos dados.

O programa começa por perguntar quantas extracções se pretendem fazer e apresenta de seguida dois quadrados, correspondentes a cada um dos dados onde vão surgindo as diferentes pontuações obtidas em cada lançamento. Terminado este processo, basta premir uma tecla (qualquer tecla) para se obter um histograma correspondente ao número total de vezes que cada uma das pontuações possíveis foi extraída.

```
   10 REM ██████
   20 INPUT  "Quantas extraccoes?
";e: CLS : PRINT FLASH 1;AT 1,10
;"*G*O*B*I*N*"; FLASH 0;AT 10,11
;"███████████";AT 11,11;"█   █   █
";AT 12,11;"█   █   █";AT 13,11;
"█   █   █";AT 14,11;"███████████"
   30 DIM A(e,4): DIM B(11)
   40 FOR b=1 TO 11: LET B(b)=0:
NEXT b
   45 REM *extraccoes*
   50 LPRINT TAB 2;"Dado 1";TAB 1
0;"Dado 2";TAB 18;"Pontuacao"
   60 FOR a=1 TO e
   70 LET A(a,1)=INT (RND*6)+1: P
RINT AT 12,13;A(a,1)
   80 LET A(a,2)=INT (RND*6)+1: P
RINT AT 12,17;A(a,2)
   90 LET A(a,3)=A(a,1)+A(a,2)
  100 FOR b=1 TO 11
  110 IF A(a,3)=b+1 THEN LET B(b)
=B(b)+1
  120 NEXT b
  130 LPRINT TAB 5;A(a,1);TAB 13
;A(a,2);TAB 23;A(a,3)
  140 NEXT a
  150 BEEP 1,0: PRINT AT 21,2;"Qu
alquer tecla para continuar": PA
USE 0: CLS
  155 REM *histogramas*
  160 FOR x=1 TO 11
  170 PRINT AT 2*x-1,0;x+1
  180 FOR n=1 TO B(x)/(1+INT (e/1
50))
  190 PRINT AT 2*x-1,2+n;"█"
  200 PRINT AT 2*x-1,29;B(x)
  210 NEXT n
  220 NEXT x
  230 COPY
```

No ecrã surge, à esquerda, uma coluna correspondente ao valor das pontuações possíveis (2 a 12), ao centro, o histograma e, à direita, o valor numérico de cada uma das barras, ou seja, quantas vezes saiu a pontuação 2, quantas vezes saiu o 3, etc.

De notar que foram introduzidas três linhas neste programa de forma a obter uma cópia impressa dos lançamentos feitos (linhas 50 e 130), bem como do histograma (linha 230). Caso não se pretenda trabalhar com a impressora, estas linhas podem ser retiradas.

Como exemplo, apresentam-se três histogramas correspondentes a sequências de 100, 500 e 1000 lançamentos (respectivamente fig. 3, 4 e 5).

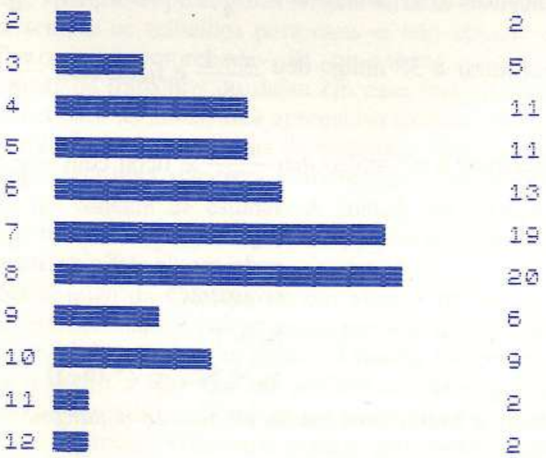


Fig. 3

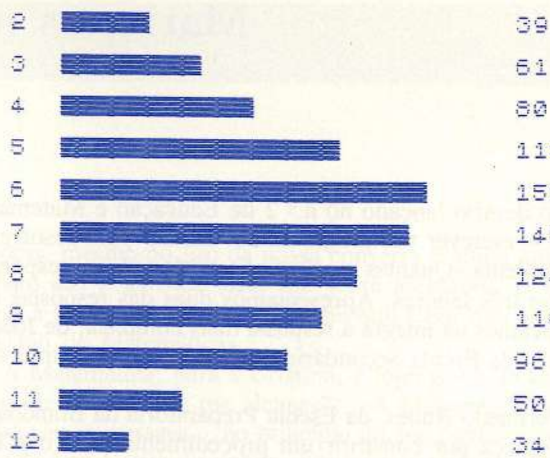


Fig. 4

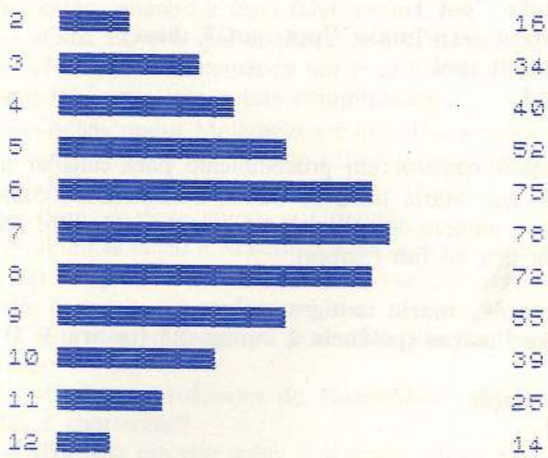


Fig. 5

Com estes três casos, vê-se nitidamente como a distribuição se aproxima da normal, à medida que o número de lançamentos aumenta, permitindo desta forma uma análise mais pormenorizada das melhores «apostas» para se vencer o jogo.

Referências bibliográficas:

Darlay, Valerie (1983). Reverse Bingo. *Junior Education*, Março.

Mello, F. Galvão de (1971). *Introdução aos métodos estatísticos*, vol. I. Cadernos do Instituto de Orientação Profissional, Lisboa.

Maria, as maçãs e o LOGO

Ao desafio lançado no n.º 2 de Educação e Matemática — escrever um programa em LOGO para resolver o problema «Quantas maçãs tinha a Maria?» — responderam três leitores. Apresentamos duas das respostas e publicamos na íntegra a resposta mais completa, de João Palma, da Escola Secundária de Sampaio, em Sesimbra.

1. Fernando Nunes, da Escola Preparatória da Brandoa, começa por construir um procedimento para o cálculo de potências, de que irá necessitar:

```
to potencia :base :exp
make "pot 1
repeat :exp [make "pot :pot * :base]
output :pot
end
```

Depois constrói um procedimento para calcular as maçãs que Maria tinha no início, considerando como inputs o número de amigos (:amigos) e maçãs com que Maria fica no fim (:sobra):

```
to maçãs_maria :amigos :sobra
make "maças (potência 2 :amigos) * (:sobra + 1)
-1
pr :maçãs
end
```

Como podem verificar, estes procedimentos resolvem o problema no caso considerado, em que apenas podem variar o número de amigos e as maçãs com que Maria fica no fim. O interesse desta solução de Fernando Nunes consiste em mostrar como, mesmo não usando recursões, é possível obter resultados em LOGO. O emprego da recursão pode, em muitos casos, simplificar a escrita de programas. Por exemplo, usando a definição recursiva de potência (**$a^0 = 1$, $a^n = a * a^{n-1}$**), o procedimento de potência escreve-se assim:

```
to potencia :base :exp
if :exp = 0 [op 1]
op :base * potencia :base :exp -1
end
```

Posteriormente, F. Nunes enviou-nos uma outra solução para o problema, agora resolvendo o caso geral com um único procedimento:

```
to maças_maria :amigos :fraccao :pconst :sobra
repeat :amigos [make "sobra ( :sobra + :pconst)
/ (1_ :fraccao)]
pr :sobra
end
```

2. Helena Paradinha, da Escola Secundária da Falagueira, enviou-nos também uma solução para o caso geral, utilizando um procedimento recursivo. Sendo :NA o número de amigos, :PM a parte das maçãs que dá a cada amigo, :AM o acréscimo constante e :RM as maçãs que sobram a Maria no fim, a solução proposta é:

```
TO CALC.M :NA :PM :AM :RM
IF :NA = 0 [OP :RM]
OP ((CALC.M :NA-1 :PM :AM :RM) + :AM) /
(1 — :PM)
END
```

3. Segue-se agora a resposta que J. Palma nos enviou:

Uma generalização:

«Maria tinha um cesto de maçãs. Encontrou um amigo e deu-lhe metade das maçãs que levava e mais meia maçã. Encontrou outro amigo e deu-lhe metade das maçãs que restavam e mais meia maçã. Depois encontrou outro amigo...

Depois ficou sem maçãs.

Quantas maçãs tinha a Maria?»

Designando x o número inicial de maçãs,

ao encontrar o 1.º amigo, Maria deu-lhe $\frac{x+1}{2}$ e ficou com $\frac{x-1}{2}$

ao encontrar o 2.º amigo deu $\frac{x+1}{4}$ e ficou com $\frac{x-3}{4}$

ao encontrar o 3.º amigo deu $\frac{x+1}{8}$ e ficou com $\frac{x-7}{8}$

...

ao encontrar o n.º amigo deu $\frac{x+1}{2^n}$ e ficou com $\frac{x-S_n}{2^n}$

(S_n é uma sucessão que pode ser de definida recursivamente:

$S_1 = 1$

$S_n = S_{n-1} + 2 * (n-1)$

Ficando a Maria sem maçãs ao fim de n amigos:

$$\frac{x-S_n}{2^n} = \Rightarrow x = S_n$$

(continua na pág. 28)

PENSE NISTO:

A história de uma conversa

A Cristina tem 16 anos, nasceu em Lisboa e é aí que ainda mora.

Gosta muito de ir à Escola; como ela diz «nas férias grandes até sinto uma saudade». No que diz respeito à Matemática, a Cristina tem reprovado muitas vezes — «passei sempre com uma nega a Matemática» — primeiro no ensino preparatório, no 1.º e no 2.º anos, e depois, no 7.º ano do ensino secundário. Agora, no 8.º ano, «estou a achar interessante», disse-me algures na nossa conversa.

Aparentemente, a Cristina não vê com muito bons olhos uma situação imaginária em que deixasse de ter Matemática.

Pelo menos, quando lhe perguntei como reagiria se no ano seguinte a Matemática 'acabasse' disse-me coisas como: «A Matemática é uma disciplina fundamental para a sociedade... todos os dias temos que fazer contas, todos os dias pensamos em números quando queremos comprar qualquer coisa. Eu acho que ela é fundamental». Essa era a razão, explicava ela, porque, se a Matemática acabasse nesse ano «por um lado gostava, era menos uma disciplina, por outro não gostava porque não a podia estudar». Mesmo assim, numa outra fase da nossa conversa tentou-se a não a escolher e a deixá-la de fora com a Física, a não ser «que as aulas fossem como as deste ano...» acrescentou no entanto.

Nas aulas, a Cristina costuma levantar o braço ou perguntar à professora «aquilo que não percebe». Quando vai ao quadro fica um pouco nervosa e preocupada porque «tenta sempre fazer o melhor» e, como ela também disse, «porque os professores tentam baralhar os alunos». Faz sempre os trabalhos para casa «a não ser que não saiba ou não compreenda». Se, no entanto, se esquece de fazer os trabalhos ou deixa em casa material que é preciso para as aulas, fica apreensiva porque «às vezes os professores marcam falta de material». Não acha que estudar seja uma «chatice» e não tomaria comprimidos para ter vontade de estudar. A vontade de estudar é, segundo as suas próprias palavras, «uma coisa espontânea, nossa. Ou a gente tem ou não tem».

Na opinião da Cristina, se um aluno tem «as coisas mal, merece mau» e isto acontece por «ele não estudar», por «falta de atenção na aulas». Quando lhe perguntei logo a seguir a isto, que ela acabava de dizer, por que razão costumava ter negativas a Matemática, a sua resposta foi pronta: «Primeiro porque não gostava. Quer dizer, não me interessava. Depois, estava sem atenção...». Ela mesma disse rindo, noutro momento, que «está farta de dizer lá em casa» que não gosta de Matemática. Pouco depois, mesmo no fim da nossa conversa e ainda a propósito das negativas, disse-me sobre as razões de não ligar à Matemática: «Stôr, eu acho que é por não gostar mesmo de Matemática».

A Matemática, para a Cristina, é logo posta de lado, considerada de fora (de alcance?): «A Matemática para mim não interessava... no princípio do ano punha-a sempre de fora... esta disciplina para mim já está riscada!», explicava a Cristina ainda a propósito das negativas, «por isso nunca me esforcei muito a Matemática». Perguntei-lhe, então, quando a ouvi falar assim:

— «Olha lá, e o que é que te levava a fazer isso?»

— «Eu acho a Matemática um bocado complicada», respondeu, «que tem coisas complicadas».

— «Achas que a Matemática é difícil?», tornava eu.

— «Acho que é um bocado difícil», disse-me ela.

— «Mas há outras coisas difíceis?» insisti.

— «Sim...» disse apenas a Cristina.

— «Punhas então a Matemática de lado por causa de ela ser difícil ou há também outras razões?» perguntei ainda.

— «Eu acho que era só por ser assim um bocado difícil».

— «O que a professora de Matemática explica nas aulas é aborrecido?

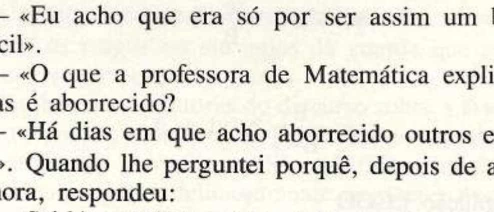
— «Há dias em que acho aborrecido outros em que não». Quando lhe perguntei porquê, depois de alguma demora, respondeu:

— «Sei lá, se calhar por ser assim muito complicado».

Foi assim a conversa com a Cristina que me falou primeiro um pouco timidamente, contraída, sempre com voz mais ou menos baixa. Depois, pouco a pouco, foi-se descontraindo, mostrando-se bem disposta, rindo mesmo com o que dizia, com a nossa conversa, respondendo sem relutância às perguntas que lhe ia fazendo.

Esta «história» segue de perto uma das entrevistas que efectuei a alunos do 8.º ano de uma escola de Lisboa, e que eu sabia não serem bem sucedidos a Matemática. Ela não se pretende típica, nem sequer das outras entrevistas; é um caso, decerto com algum significado. À sua ilustração se resumem as intenções com que o apresento. É também para pensar, claro.

Henrique M. Guimarães



(continuação da pág. 26)

A solução LOGO:

```
TO P1 :N                :N designa o número de amigos
IF :N = 1 [OP 1]
OP 2 * (:N-1) + P1 :N-1
END
```

O problema geral

«A Maria encontra sucessivamente *n* amigos. Dá a cada um $\frac{1}{B}$ das maçãs que tem, mais *A* maçãs. No fim ficou com *y* maçãs.

Quantas maçãs tinha a Maria?»

Supondo que, quando Maria encontra o amigo de ordem k, tem x maçãs, entrega-lhe:

$$\frac{x}{B} + A \quad \text{maçãs}$$

designando por y1 o número de maçãs com que ela fica após o encontro:

$$y1 = x - (\frac{x}{B} + A)$$

ou seja:

$$x = \frac{B}{B-1} * (y1 + A).$$

A solução LOGO

```
TO P :A :B :N :Y
IF :N = 0 [PR :Y STOP]
P :A :B :N-1 (:Y+ :A)* :B/(:B-1)
(PR [NR. MAÇAS APOS O AMIGO] :N [-] :Y)
END
```

Notas:

1. Obrigado aos nossos leitores por terem correspondido ao desafio. Esperamos a vossa colaboração em futuras edições do LOGO.MAT.

2. (Para os fanáticos do LOGO e outros interessados...). Todas as soluções apresentadas têm a particularidade de exigir, antes da construção do programa, a dedução de uma expressão que depois é programada. Será possível proceder de outra forma mais natural em programação, que é partir directamente do enunciado sem deduções laterais? A solução seguinte parece responder a esta questão:

```
to maria :inicio :a :b :amigos :resto
if :resto = maria 1 :inicio :a :b :amigos [pr (se
[no principio Maria tinha] :inicio_maças) stop]
maria :inicio + 1 :a :b :amigos :resto
end

to maria 1 :inicio :a :b :amigos
if :amigos = 0 [op :inicio]
op maria 1 (:inicio — (:inicio / :b) — :a) :a :b
:amigos -1
end
```

Como podem verificar, no entanto, estes procedimentos resolvem apenas seguramente os casos em que a solução é inteira, pois sendo a pesquisa feita somando de cada vez 1 a :inicio (inicialmente 0), os valores não inteiros não são apanhados, e os procedimentos não param...! Basta ensaiar os casos:

maria 0.5 2 3 0 resultado 7

maria 0.7 3 4 2 a execução não pára, o resultado correcto é 18.6562, como se pode ver, por exemplo, com o procedimento de João Palma.

P. 7 3 4 2

Ficha técnica

Educação e Matemática n.º 3
Data: Julho de 1987
Composição, montagem e fotografia executadas e oferecidas pela Texto Editora
Impressão: Costa e Valério
Tiragem: 1500 exemplares

Correspondência: Henrique M. Guimarães ou Paulo Abrantes
Faculdade de Ciências - Departamento de Educação
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

MATEMANIA, POESIA, MAGIA
— A face oculta da Matemática

Mathêma — Poiêsis — Mageia

Teresa Vergani (*)

Inicialmente a *ciência*, a *criação* e a *arte* dos sacerdotes persas desvendadores dos astros, Matemática, Poesia e Magia conotam-se hoje, segundo os dicionários, por:

— «exactidão rigorosa» a espantosa impecabilidade da tautologia!

— inspiração, ligada ao «estado comovido da alma» que se comunica;

— encanto, fascínio, deslumbramento...

[Confesso que senti um grande mal-estar quando me pediram para abordar este tema. Primeiro, porque, quando não se sabe se a coisa vivenciada é Saber, Arte, Experiência referente a ideia ou letra, costumam-se pronunciar palavras vastas e estranhas, como Cultura (ou Pedagogia). Depois, porque seria preciso ser-se ao mesmo tempo matemático, poeta e mago para aflorar, com menor risco, tais conexas contundências. Mas como o medo acaba sempre por nos fazer saltar...]

Os fans da psicologia experimental tentariam talvez articular exaustivamente a permuta trijunctível, adverbiando e adjectivando os conjugáveis (*«assinale com uma cruz o que sente que convém»*), tipo:

- «matematicamente mágica a poesia»
- «magicamente poética a matemática»
- «poeticamente matemática a magia» (...)

(estranho: acabo de descobrir que a matemática é o único destes vocábulos que funde substantivo e adjectivo num só termo).

Ou então, «enfeitice a matemática de poesia» and so on — we won't bother about an end — porque indestrutível só o nada, já que o destroço ainda se pode destroçar.

Encontramo-nos diante de três prodigiosas palavras, por acaso todas elas femininas (*nota para os que se sentem atraídos pelo inconsciente colectivo*). Três fenómenos antropológicos que permanecem três realidades actuais onde cintilam, com diferentes intensidades, misteriosos halos esotéricos.

Três enunciados de nudez, ou formas de prenhez. Outras tantas ocultas transparências, todas elas exigindo certos graus de iniciação ligados à especificidade da vocação que lhes é própria.

Curiosamente, são os epistemólogos das ciências os que mais falam sobre as Matemáticas. Os matemáticos parecem menos preocupados em justificar fundamentos do que em prosseguir silenciosamente o seu caminho: são gente acreditando provavelmente nas estrelas que guiam os magos ou em anjos da guarda que não dormem em serviço.

Também os detentores do discurso sobre a Poesia não são os poetas: estes limitam-se normalmente a deixarem-se atravessar pelo poema. São os críticos literários que costumam aguçar deliciosamente os dentes nestes tenros rebentos oferecidos, espraiando-se por estas pastagens indefesas aos seus ávidos apetites verbais.

E da Magia quase não se fala, desfala-se, numa sociedade há muito ideologicamente apostada em a abolir.

Cada uma destas três espécies de certeza, ou de verdade, comporta a sua fé, as suas provas.

Partir da aceitabilidade da adequação entre o «objecto» e a «coisa» (que caracteriza a «verdade») é particularmente embaraçoso no caso da Matemática, onde os universos são operativamente habitados por entidades que resistem a um discernimento claro entre modelo e matéria.

O problema da representabilidade posto em termos de «objecto» mais «acontecimento» através da «estrutura», presta-se talvez melhor como núcleo de referência simultaneamente adaptável aos três domínios que nos ocupam.

Na Matemática *faz-se de conta* e dá certo. Consegue-se: acontece a solução no interior da matriz estruturante da regra.

Mais invenção do que descoberta neste denso jogo do rigor onde o modelo é a matéria, quaisquer que sejam as tendências empíricas, lúdicas ou sacrais que o tenham motivado.

A Matemática constrói, não necessariamente dependente da experiência exterior do real, o travejamento livre do sistema onde objecto e acontecimento se fundem sem ruído no decorrer do funcionamento mecânico axiomatizado pela instituição.

A prova é racionalmente demonstrável, o conflito inaceitável no espaço da teoria.

Neste sentido a Matemática é uma objectividade anónima universal, subjectivamente experimentável na acção conforme à norma. É um plural personalizável, esta liberdade da razão.

Por estranho que pareça, na Poesia *não se faz de conta:* a seriedade da analogia é a sua própria identificação.

Agora a prova não é deduzida, mas sentida, e nenhum conflito é proíbido mas integrável no espaço do poema.

Aqui a evidência gera a regra e não a regra a evidência. Diria que o acontecimento estrutura o objecto e o conseguimento é da ordem do apaziguamento, da revelação. A iluminação interior induz o modelo capaz de a comunicar e a regra nasce (à maneira dos homens) de dentro para fora. A poesia é assim mais descoberta do que invenção (tal como um filho não se inventa, descobre-se).

Neste sentido é uma singularidade subjectivamente colectiva. É um singular pluralizável, esta emoção pressentida e partilhada.

Enquanto a Matemática inventa o que não sabe e a Poesia sabe o que não inventou, a Magia faz acontecer o Desejável (ou sabe inventar o Fazível).

A secreta ponte (regra) que liga o objecto ao acontecimento situa-se para além de *intelectu* ou *psyché:* a solução é constatável na escandalosa evidência do prodígio.

Sortilégio que unifica, num espaço vital de dimensões mais extensas, as duas experiências anteriores: a de sermos nós a rasgar o véu (como na Matemática que interroga) e a de testemunharmos do véu que se rasga (como na Poesia em que nos deixamos interrogar).

Três formas de conhecimento, portanto de coerência. Três tipos de purificação, portanto de sedução. Uma gradação crescente de prazer/tensão nestas três alquimias do des-quotidiano operando por sinais.

Todas doem muito, alegram muito.

Na Matemática procura-se muito (criar o resolúvel: satisfação).

Na Poesia escuta-se muito (encontra-se o harmonizável: pacificação).

Na Magia quer-se muito (consegue-se o subjugável: exultação).

A primeira explica (elabora); a segunda compreende (reconhece); a terceira maravilha (executa).

Lugares/altares onde respectivamente a prova serve de compreensão, a compreensão serve de prova, a prova transcende a compreensão.

Três codificações do Verbo, na abertura ao *lógos,* ao *mythos,* ao *Maior-do-que-nós.*

Tanto a Matemática como a Magia pronunciam o «não se pode» e o «implica», inerentes ao inexorável processo de encadeamento sucesso/regra/proibição. Mas na Magia a manifestação torna-se epifânica; a regra diz-se rito; e a ascese é mais do que disciplina mental, é sacrificial. Agindo através de sinais eficazes do Dom que realizam o que simbolicamente anunciam, tende ao arrebatamento do sacral.

Na Matemática, a ordem é simplesmente «ordenação» (imponho-a e submeto-me ao que ordenei). Na Magia, a Ordem é Mando (posso porque obedeço, na medida em que sei suscitar a vulnerabilidade do In-Nomeável face à minha solicitação). Deste ponto de vista, a Poesia é um «desmando»: a des-ordem é momentaneamente organizável e a metáfora incarna-se (articula-se) sob o impacto irrepetível da instituição. Sendo agora a ascese atenção do espírito, na Poesia a única proibição parece ser a opacidade. A clivagem entre Poesia e Magia dá-se justamente onde se dissociam «fantástico» e «fantasia».

Se a paranóia é a obsessão exacerbada da coerência e a esquizofrenia a agudização incontrolada dos contrários, a Poesia parece emergir como possível serena charneira de «terapia» entre a Matemática e a magia, isto é, entre o excesso de defeito e o defeito do excesso.

E, se as pulsões cognitivas se nutrem de ignorados arquétipos humanos veiculando ansiedades vitais por resolver, cumpre-se um círculo por tangência dos extremos na rigorosa-generosa-fabulosa sequência Matemática-Poesia-Magia. Pensamento, imaginação, loucura, coagulando o que há de estética na razão, de inteligível na emoção, de êxtase no protento.

Tem «poderes» aquele que adivinha, integra, apaga, quebra, une, cura. Instruídos, induzidos, seduzidos a três níveis do a-prender (a-poder), somos presos por aquilo que ousámos prender, possuindo e possuídos.

O IN-CANTAMENTO consiste no que ontologicamente sobeja entre a natureza do apelo que lançamos e a natureza da resposta que obtemos.

O mesmo movimento que fez com que a arte seja o que nos resta do transe e a criatividade o que nos restará da arte, tenderá a limitar a magia à poesia e ameaça reduzir a poesia à informática.

Habituados como estamos à espantosa ambiguidade salvífica das palavras, imaginemos uma intersecção em que intervenha uma translação centrípeta dos centros, num processo que acrescente a cada passo uma nova dimensão à(s) anterior(es). Assim como pensar vôo/asa/ovo. Ou ainda (dispensando o «assim como está para», permitindo o «vice-versa» e lembrando o poeta que disse *«então jogo fértil amor seria»*), pronunciemos a sequência jogo/cópula/comunhão. Eis-nos num reino em que a semente da semente da semente produz, a cada ruptura cíclica de germinação, uma mudança de estado — um *éktasis — numa mesma continuidade de «respiração».*

Matemática/Poesia/Magia seriam então três idades (consciências) da mesma substancial postura humana sabendo oferecer o pão ao sal e a boca ao pão.

* Teresa Vergani nasceu em Lisboa, onde se licenciou em Ciências Matemáticas em 1969. Prosseguiu os seus estudos em Pedagogia da Matemática e em Ciências da Educação em Bruxelas e Genebra, onde se doutorou.

Há unidades dos programas que referem, expressamente, a resolução de problemas. Fora deste contexto, para muitos professores, os problemas são, simplesmente, esquecidos. Ou nem sequer existem, porque, em tais circunstâncias, muitos problemas deixam de o ser para passarem a meros exercícios de aplicação. E isto porque há uma tendência generalizada para menosprezar processos experimentais elementares.

Problemas de optimização propõem-se, habitualmente, só no 11.º ano de escolaridade, no fim do capítulo sobre derivação. Este é, apenas, um dos muitos exemplos possíveis de encontrar.

São precisamente duas situações deste tipo que apresentamos neste número da revista.

Nada se Perde, tudo se Transforma

O Sr. Furtado, joalheiro, possuía um topázio com 20g. Mas o topázio caiu e partiu-se em 2 bocados! Terá o Sr. Furtado ficado mesmo a perder com este descuido?
Nota que o valor de um topázio pode ser calculado multiplicando, por dez contos, o quadrado do seu peso.

Nível de escolaridade — secundário

Notas metodológicas — Um problema em que a primeira resposta intuitiva se confirma ilusória pode servir para mostrar as vantagens de resolução lógica.

Esta resolução, sem recurso à utilização de derivadas, pode ser efectuada com o auxílio de uma tabela. A construção da tabela, que passa pelo cálculo do valor das pedras e pela discussão de questões ligadas à escolha das variáveis e dos intervalos de variação, é bastante motivadora pois logo nas primeiras linhas se dá conta da ilusão.

Para uma ideia mais completa do valor das perdas pode usar-se um computador e/ou um gráfico de variação do valor total em função do peso de um dos bocados. Confirma-se então que o valor será minímo quando os dois bocados tiverem igual peso.

Este tipo de resolução usando tabelas e gráficos, pode ser utilizado para resolver outros problemas de optimização.

Propostas de resolução — Utilização de uma tabela com indicação do peso de cada uma das novas pedras, do seu valor respectivo e do valor total.

P_1	P_2	V_1	V_2	V_{TOTAL}
0	20	0	10×20^2	4000
1	19	10	10×19^2	3620
.	.	.	.	.
10	10	1000	1000	2000

Desenvolvimento — Este problema foi recriado a partir do Problema dos topázios (Petit Archiméde n.º 23) cuja exploração pode ser feita ao nível do complementar.

PROBLEMA DOS TOPÁZIOS: Admite-se que os topázios são pedras cujo valor em escudos é proporcional ao quadrado do seu peso em gramas. Um topázio de 20g. cai e parte-se em 2 bocados. Quanto se perde na venda dos 2 bocados?

A este problema pode acrescentar-se o estudo da variação do valor da perda em função do peso de um dos bocados.

Esta função pode ser explorada em comparação com a que se obtém alterando um dos dados do problema. A alteração que se propõe é considerar o preço do topázio proporcional ao seu peso.

No Poupar é que Está o Ganho

Num dos seus terrenos, o senhor António vai reservar um pequeno talhão para o cultivo de morangos. Pensa que um talhão com a forma de um rectângulo e com 36 m^2 de área é o suficiente para abastecer a família. Mas tem o problema das cabras e ovelhas que pastam naquele terreno. Há pois que vedar o talhão com rede.
Como gastar o menos possível?

Nível de escolaridade — Básico

Notas metodológicas — O suporte material é importante para alunos deste nível etário. Sugere-se, então, que os diferentes grupos de alunos desenhem, em papel quadriculado, todos os talhões possíveis, considerando cada quadricula com um metro quadrado de área. Como alternativa pode propor-se que cada grupo construa um só «talhão», e, posteriormente, por permuta de «talhões», cada grupo irá acrescentando «talhão» diferente do que recebeu.

A certa altura surgirá, inevitavelmente, a discussão sobre a validade de incluir ou não o quadrado.

Esgotadas as possibilidades, quadrado incluído, com a ajuda de uma tabela, os alunos calculam o perímetro de cada um dos «talhões» desenhados e concluem da economia no caso do quadrado.

lado 1	lado 2	perímetro
1	36	74
2	18	40
.	.	.
6	6	24

Notar que a estratégia seguida para encontrar todos os casos possíveis é também óptima para a descoberta da fórmula que permite calcular a área de um rectângulo conhecidas as suas dimensões.

Desenvolvimento — Partindo de outra área os alunos podem, agora já sem o suporte do desenho encontrar todos os talhões possíveis.

Finalmente, é de propor o problema inverso: dispondo o senhor Manuel de 20 metros de rede como dispô-la de forma a delimitar um terreno com a forma de um rectângulo e com a maior área possível?

PERÍMETRO 20

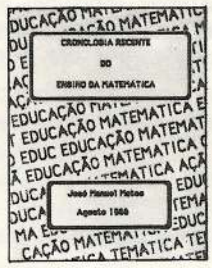
Lado 1	lado 2	ÁREA
1	9	9
2	8	16
.	.	.
5	5	25

PUBLICAÇÕES A.P.M.

Preço: 400$00

Preço: 200$00

Preço: 150$00



Preço: 200$00

Enviar os pedidos de publicações acompanhados do pagamento em cheque ou vale postal (preço das publicações pedidas acrescido de 10% para despesas de correio) em nome de Associação de Professores de Matemática.

Um procedimento de cada vez...

OUTPUT

Suponhamos que queríamos criar um procedimento com um nome português que fizesse exactamente o mesmo que o procedimento **FIRST.** Como se sabe, **FIRST** aplicado a uma lista dá o seu primeiro elemento. Assim, se teclarmos por exemplo

PR FIRST [[a < b] [b < c] [a < c]]

o computador responde-nos **a < b,** pois o primeiro elemento da lista a que estamos a aplicar **FIRST** é precisamente a lista **a < b.** O que queremos construir é um procedimento, a que chamaremos naturalmente **PRIMEIRO** e que funcione como **FIRST,** ou seja, tal que, se teclarmos

PR PRIMEIRO [[a < b] [b < c] [a < c]]

também nos responda **a < b.** Uma primeira ideia pode ser a seguinte (como não sabemos se vai dar certo, vamos chamar-lhe por enquanto **PRIMEIRO.TESTE** em vez de **PRIMEIRO**):

TO PRIMEIRO.TESTE :LISTA
FIRST :LISTA
END

Trata-se de uma tradução «literal» do procedimento **FIRST.**

Se agora teclarmos PRIMEIRO.TESTE [[a < b] [b < c] [a < c]] o computador responde-nos com a mensagem:

you dont say what to do with [a < b] in PRIMEIRO.TESTE
(você não diz o que fazer com **[a < b]** em **PRIMEIRO.TESTE**).

Que quer isto dizer? Em primeiro lugar, que há um problema qualquer, pois recebemos uma mensagem em vez da resposta que esperávamos. Em segundo lugar, que esse problema é *dentro* (*in*) do procedimento **PRIMEIRO.TESTE.** Em terceiro lugar, que o procedimento calculou bem o primeiro elemento da lista, pois refere-se a **a < b** (isto é natural, pois nós usámos **FIRST** e este funciona bem). Finalmente, que o problema consiste em **nós não termos dito o que fazer com [a < b]** (oh maravilhosas mensagens do LOGO!!). Em algumas versões do LOGO (no IBM LOGO, por exemplo), em vez de «in PRIMEIRO.TESTE» estaria escrito «just before leaving PRIMEIRO.TESTE» (exactamente antes de terminar PRIMEIRO.TESTE), o que queria dizer exactamente o mesmo.

Portanto, o que temos a fazer é alterar o procedimento de maneira a dizer ao computador o que deve fazer com o resultado de **FIRST :LISTA.** Ora nós o que queremos é, **apenas,** que o resultado («output» em inglês) de **FIRST :LISTA** passe a ser o resultado (output) de PRIMEIRO.TESTE :LISTA. Há um procedimento em todas as versões de LOGO que tem exactamente esta função, e chama-se — como era de esperar... — **OUTPUT.** Devemos portanto escrever, **OUTPUT FIRST :LISTA** em vez de simplesmente **FIRST :LISTA.** Portanto o novo procedimento, a que chamamos **PRIMEIRO** na esperança de que esteja já correcto, deve ser assim definido

TO PRIMEIRO :LISTA
OUTPUT FIRST :LISTA
END

Se agora repetirmos a experiência anterior, veremos que **PRIMEIRO** se comporta exactamente do mesmo modo que **FIRST,** como pretendíamos.

Uma tentação habitual quando começamos a programar em LOGO é usar **PRINT** em vez de **OUTPUT.** Dessa forma estaríamos a definir realmente um procedimento válido, mas não seria uma verdadeira tradução de **FIRST,** não se comportaria da mesma forma. Teríamos definido um **comando,** ou seja um procedimento com um **efeito** (que neste caso seria o de escrever no ecrã o primeiro elemento da lista) e não uma **operação com um resultado** utilizável por outros procedimentos. Para verificar isso, faça o seguinte: defina o comando **PRIMEIRO.COM** da seguinte forma

TO PRIMEIRO.COM :LISTA
PRINT FIRST :LISTA
END

e depois compare o resultado de cada uma das instruções seguintes

FIRST FIRST [[a < b] [b < c] [a < c]]

PRIMEIRO PRIMEIRO [[a < b] [b < c] [a < c]]

PRIMEIRO.COM PRIMEIRO.COM [[a < b] [b < c] [a < c]]

lendo com atenção as mensagens que eventualmente sejam comunidadas pelo computador.

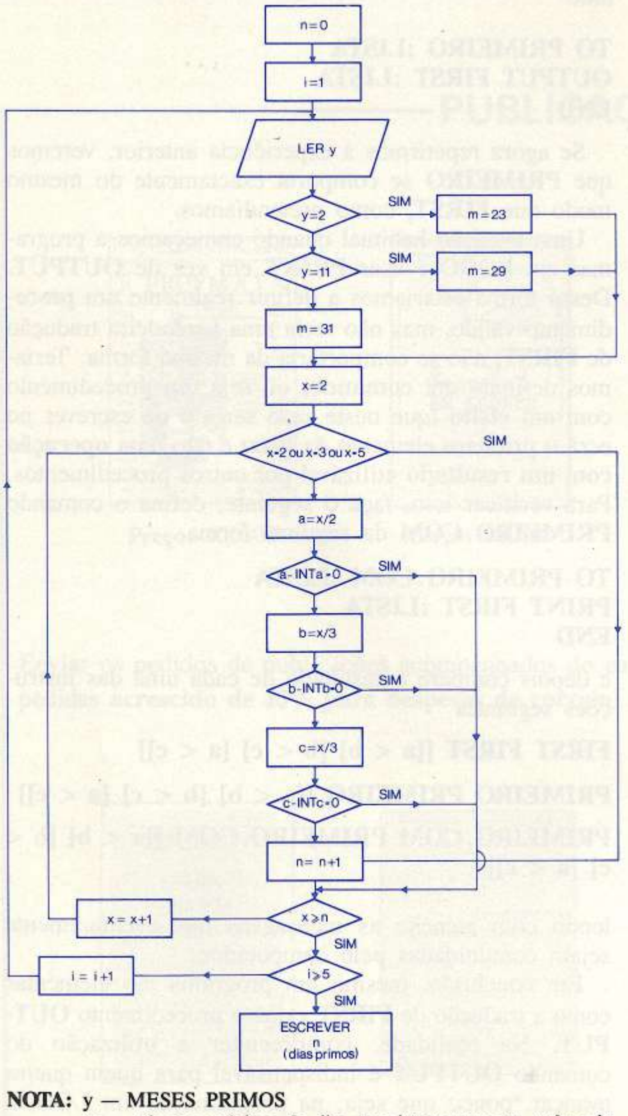
Em conclusão, mesmo um programa tão elementar como a tradução de **FIRST** exige o procedimento **OUTPUT.** Na realidade, compreender a utilização do comando **OUTPUT** é indispensável para quem queira avançar, pouco que seja, na programação em LOGO.

Eduardo Veloso

Como o computador resolve o problema n.º 19 do mês de Junho

Não era interessante, sob o ponto de vista da Matemática, fazer uma contagem de «dias primos». Era um trabalho mecânico e, provavelmente, quem não é máquina não desempenharia esta tarefa com êxito: sujeitava-se a cansaço, distracções e consequentes erros de contagem.

Entregou-se então este trabalho a quem nunca se distrai e se subordina sempre a sequências correctas e repetitivas de instruções: o computador. O homem é talhado para outro tipo de coisas — o trabalho criativo.



NOTA: y — MESES PRIMOS
m — número máximo de dias que interessam em cada mês
n — número de dias primos

Talvez o programa apresentado não seja o melhor, mas é aquele que me libertou daquilo que não gosto de fazer.

Ao tentar elaborar o programa verifiquei que todos os números, de 2 a 31, ou são primos ou divisíveis pelos primos 2, 3 ou 5. Isso é traduzido pelo segundo ciclo que aparece (o que está no interior de outro) cujo contador de «dias primos» é n = n + 1.

O primeiro ciclo serve para definir a quantidade de dias que interessam a cada «mês primo».

```
5 LET n = 0
10 FOR i = 1 TO 5
20 READ y
30 IF y = 2 THEN LET m = 23 : GOTO 60
40 IF y = 11 THEN LET m = 29 : GO TO 60
50 LET m = 31
60 FOR x = 2 TO m
70 IF x = 2 OR x = 3 OR x = 5 THEN GO TO 140
80 LET a = x/2
90 IF a - INT a = 0 THEN GO TO 150
100 LET b = x/3
110 IF b - INT b = 0 THEN GO TO 150
120 LET c = x/3
130 IF c - INTc = 0 THEN GO TO 150
140 LET n = n + 1
150 NEXT x
160 NEXT i
170 PRINT "dias primos ="; n
180 DATA 2, 3, 5, 7, 11
```

Arsénio Coelho

Nota da redacção:

O programa que aqui se apresenta não corresponde inteiramente à versão do colega Arsénio Coelho. De facto, eliminámos um ciclo FOR...NEXT para a variável i. Pensamos, no entanto, não ter defraudado a estrutura global. Esta versão corre no Spectrum, o que não acontecia com a original.

Em busca da perfeição...

No último número de Educação e Matemática, na popular secção DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA — quase tão popular como o LOGO.MAT... — saiu o seguinte problema:

Eu sou o primeiro número perfeito porque a soma dos meus divisores, sem contar comigo, é igual a mim. Quem sou eu?

Concluir que é o 6 = 3 + 2 + 1 não foi difícil. Mas fiquei intrigado, pois percebi que tinha tido sorte em o primeiro número perfeito ser tão pequeno... E as perguntas começaram a surgir: haverá mais? muitos ou poucos? alguma lei? terão que ser pares? Resolvi investigar.

Comecei a fazer tentativas, para ver se descobria alguma lei. Mas, entre os dois extremos — de um lado os primos, «imperfeitos» por terem só o 1 como divisor útil, para o efeito, do outro lado os números «imperfeitos» por terem muitos divisores (por exemplo 24, 48 ou 72) — tudo parecia poder acontecer, e quanto a números perfeitos... apenas encontrei, «perfeitamente» por acaso, o 28!

Resolvi recorrer ao LOGO. E como há quem diga que na aprendizagem de uma linguagem de programação é quase tão importante o esforço para ler e compreender programas já feitos como para fazê-los (e eu concordo...) aí estão os quatro procedimentos necessários:

```
TO DIVISORES :NUM
OUTPUT DIVISORES1 :NUM 1
END

TO DIVISORES1 :NUM :POSS.DIV
IF :NUM = :POSS.DIV [OUTPUT []]
IF 0 = REMAINDER :NUM :POSS.DIV [OUTPUT
FPUT :POSS.DIV DIVISORES1 :NUM :POSS.DIV
+ 1]
OUTPUT DIVISORES1 :NUM :POSS.DIV + 1
END

TO SOMA :LISTA
IF EMPTYP :LISTA [OUTPUT 0]
OUTPUT (FIRST :LISTA) + SOMA BF :LISTA
END

TO PERFEITOS :LIMITE :NUM
IF :NUM = :LIMITE [OUTPUT [ ] ]
IF :NUM = :SOMA DIVISORES :NUM [OUTPUT
FPUT :NUM PERFEITOS :LIMITE :NUM + 1]
OUTPUT PERFEITOS :LIMITE :NUM + 1
END
```

Notas:

1. DIVISORES é um procedimento que nos fornece, para cada número :NUM, a lista dos seus divisores, sem o incluir. Mas quem faz todo o trabalho é o subprocedimento DIVISORES1. Note-se que DIVISORES1 tem dois inputs, :NUM e :POSS.DIV (possível divisor), e o que faz é, recursivamente, ir experimentando cada :POSS.DIV e tomando decisões: se é mesmo um divisor (resto — REMAINDER — igual a zero), junta-o (FPUT) à lista e experimenta o seguinte (ou seja, executa o mesmo procedimento DIVISORES1 mas agora com os inputs :NUM e :POSS.DIV + 1), se não é passa logo ao seguinte. Note-se ainda que DIVISORES chama o subprocedimento DIVISORES1 com os inputs :NUM e 1, o que quer dizer que DIVISORES1 vai experimentar todos os possíveis divisores desde 1 até ao próprio :NUM.

2. SOMA é um procedimento geral que nos dá a soma dos elementos de uma :LISTA. É também uma recursão que, naturalmente, vai somando o primeiro elemento da :LISTA (FIRST :LISTA) com a soma dos restantes (SOMA BF :LISTA), e assim sucessivamente até a lista estar vazia (EMPTYP :LISTA), caso em que não soma nada, está claro (OUTPUT 0)...

3. PERFEITOS é um procedimento que se vai servir dos anteriores para nos dar o que pretendemos. Ele vai sucessivamente experimentar :NUM, :NUM + 1, :NUM + 2, ..., até ao :LIMITE. De cada vez que :NUM é perfeito (:NUM = SOMA DIVISORES :NUM) junta-o à lista dos perfeitos e passa ao seguinte, :NUM + 1. Quando não é, passa directamente ao seguinte. No fim, dá-nos a lista dos perfeitos entre :NUM e :LIMITE.

Nota à margem: se tem dificuldades em compreender o funcionamento recursivo destes procedimentos, não se admire: acontece isso com todos nós que somos normais. Mas não será a altura de dedicar algum tempo a este tipo de procedimentos tão poderosos? E saiba já: o melhor processo para começar é admitir como «fezada» que eles funcionam, experimentar construir algum e ver que, **realmente,** assim é! Porque não tenta, por exemplo, escrever o procedimento PRODUTO que calcula o produto dos elementos de uma :LISTA, seguindo passo a passo — com as convenientes modificações — o procedimento SOMA? E o que poderia ser o DOBRO de uma lista de números?

Depois de ter introduzido no computador estes quatro procedimentos, teclei **PRINT PERFEITOS 100 1** e o computador respondeu **6 28!** Ou seja, entre 1 e 100 só há estes dois! Depois experimentei entre 10 e 200 e o computador deu-me uma lista vazia — não há nenhum! O mesmo entre 200 e 300 e entre 300 e 400 (mas entre 300 e 400 já demora mais de dez minutos a dar a resposta — cada vez mais divisores a investigar e somas a fazer...). Entre 400 e 500, o resultado foi 496: mais um número perfeito! Mas nesta altura, isto já chegava para ver que a perfeição, também nos números, é rara... E toda a prudência aconselhava a não continuar por esta via... Foi então que no livro de 1964, «Recreations in the Theory of Numbers» de Albert H. Beiler, aprendi o seguinte:

- até 1964 apenas tinham sido descobertos 23 números perfeitos; a 6, 28 e 496 seguem-se 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328,...

- Euclides deduziu uma fórmula para gerar números perfeitos pares:

$$(2^{n-1})\ (2^n-1),$$

em que **n** é um inteiro maior do que 1 que torne o segundo factor primo. Euler demonstrou, 2000 anos depois, que esta formula dá todos os perfeitos pares.

- a dificuldade em utilizar esta fórmula reside em saber determinar os valores de **n** para os quais o segundo factor é primo, pois eles não parecem obedecer a qualquer lei. Em 1953 um computador levou 13.5 minutos a provar que $2^{1279}-1$ é primo e que portanto $2^{1278}(2^{1279}-1)$ é perfeito; trata-se de um número com 770 dígitos...

- não se conhece nenhum perfeito ímpar, mas ninguém provou que não existam.

Desconheço o que se avançou neste campo desde 1964. Alguém sabe e quer dizer?

Eduardo Veloso

NOTA DA REDAÇÃO: Ainda em 1963, Donald Gillier provou que $2^{11213}-1$ é um número primo; trata-se dum número com 3376 dígitos. Até 1984 desconhecemos que descobertas se fizeram neste campo, mas em Abril deste ano novo número primo foi descoberto: $2^{132049}-1$ com 39751 dígitos. A última descoberta de que temos notícia data de Setembro de 1986. Provou-se, então, que $2^{216091}-1$ é, igualmente, um número primo, este com 65050 dígitos.

Agora é só utilizar a formula de Euclides para determinar os perfeitos correspondentes.

Permutas com Associações Estrangeiras

Conforme dissemos no último número, a APM procura desenvolver contactos com Associações de Professores de Matemática de outros países. Interessa-nos, em particular, estabelecer acordos de permuta de publicações. Neste momento, esses acordos existem já com:

- a Sociedade Andaluza de Professores de Matemática (SAPM) — publica a Revista **Thales** (três vezes por ano) que começámos a receber desde o n.º 6 (o primeiro de 1987);

- a Associação de Professores de Matemática de França (APMEP) — publica de dois em dois meses o **Bulletin de l'APMEP** que começámos a receber desde o n.º 357;

- o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM) do Rio de Janeiro — publica o **Boletim GEBEM**, de que recebemos os números 17 (1985), 18 e 19 (1986), 1.º e 2.º semestres respectivamente).

Iremos agora desenvolver esforços no sentido de estabelecer acordos com outras Associações, designadamente de outras regiões de Espanha, da Bélgica, da Itália, da Grã-Bretanha, dos Estados Unidos e da América Latina, e ainda com grupos de professores dos países de expressão portuguesa. Nalguns casos, existem já alguns contactos. Manteremos uma informação actualizada sobre os resultados desses esforços.

Estas publicações regulares, bem como outras que entretanto nos têm sido oferecidas, estarão à disposição dos sócios da APM logo que possamos dispor de uma sede. De qualquer modo, tencionamos informar todos os núcleos distritais da nossa Associação e os membros da Direcção Nacional dos vários pontos dos país (em casos especiais poderemos mesmo fazê-lo nas páginas de **Educação e Matemática**) sobre o conteúdo das Revistas que formos recebendo para que qualquer sócio possa pedir fotocópias de artigos em que esteja particularmente interessado.

ÍNDICE