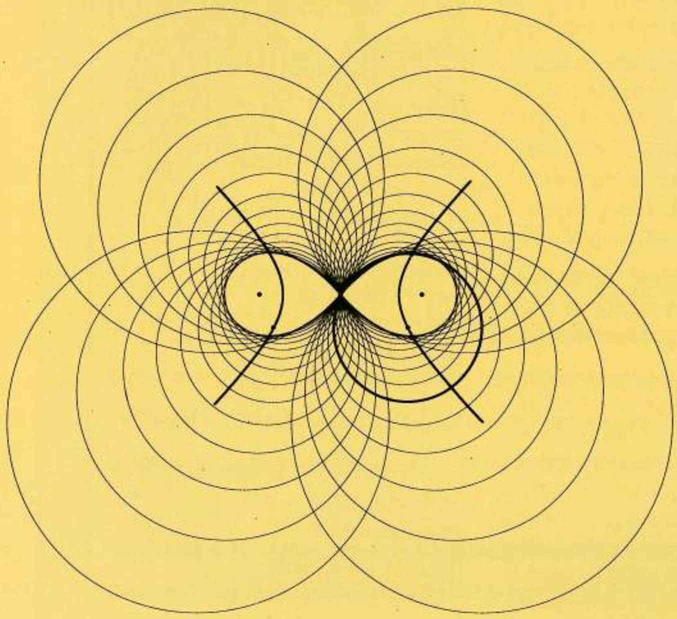
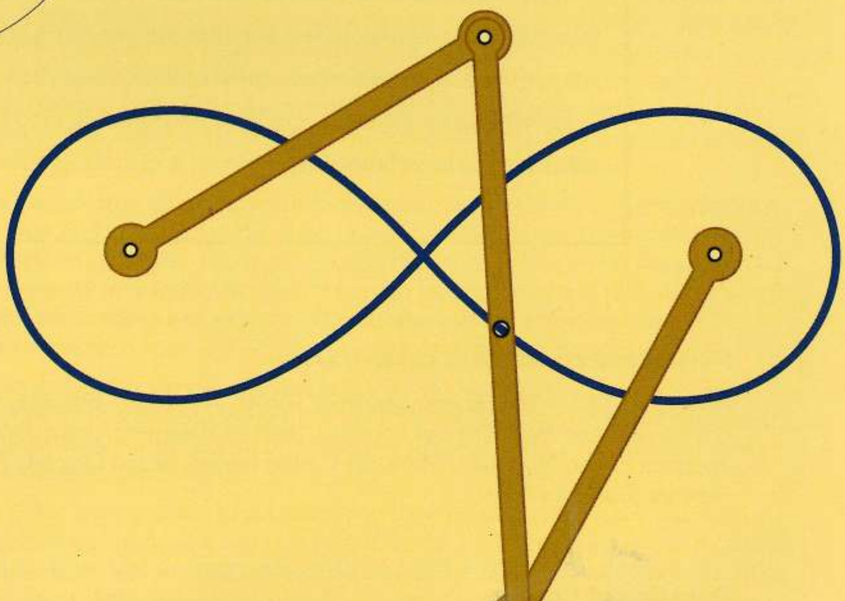
Educação e Matemática

N° 47

Março/Abril de 1998



A lemniscata de Bernoulli



Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

A capa deste número

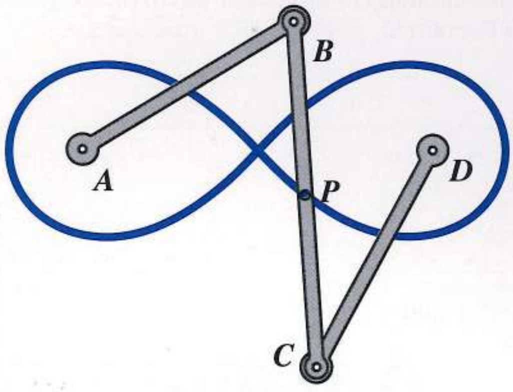


fig. 1

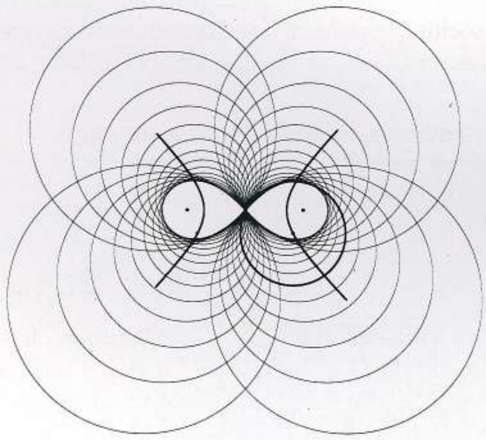


fig. 2

Na fig. 1, a lemniscata de Bernoulli é traçada por um mecanismo. Este é constituído por três hastes articuladas. As hastes *AB* e *CD*, de comprimentos iguais, podem rodar livremente em torno dos pontos *A* e *D*, respectivamente. A haste *BC*, cujo comprimento é igual ao das hastes *AB* e *CD* multiplicado por $\sqrt{2}$, é arrastada pelo movimento de uma das outras. O seu ponto médio, *P*, traça a lemniscata.

Na fig. 2, a lemniscata é obtida como envolvente de circunferências. Estas são traçadas a partir de uma hipérbole equilátera (assímptotas ortogonais). Cada uma das circunferências tem por centro um ponto da hipérbole e passa pelo centro da hipérbole.

A lemniscata foi estudada por Jacques Bernoulli (1654-1705), no contexto dos seus trabalhos sobre o cálculo infinitésimal.

Eduardo Veloso

Neste número também colaboraram

Adérito Araújo, Adília Ribeiro, Anabela Torres, Ana Maria Boavida, Ana Maria Kaleff, Ana Paula Branco, Augusto Taveira, Carlos Albuquerque, Cristina Loureiro, Jacinto Salgueiro, João Janeiro, João Maria de Oliveira, João Paulo Afonso, Joaquim Eurico Nogueira, Maria do Carmo Neves, Maria Graziela Fonseca, Maria Natércia Araújo, Paula Bulhão, Paula Teixeira, Sandra Afonso.

Data de publicação

Este número foi publicado em Abril de 1998.

Nota

nº 47
Mar/Abr
de 1998

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Lopes
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
4200 exemplares

Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério

Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos — 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Profissão: Professor de Matemática
Ano: 1998

Cristina Loureiro

Uma das coisas que melhor recordo do meu ano de estágio era um comentário da minha orientadora em 1980:

Hoje é mais difícil ser professor do que quando eu comecei. Hoje o professor de Matemática, além de saber matemática tem de enfrentar situações de aula muito complicadas e difíceis. Nos meus primeiros anos bastava-me saber bem o assunto que ia ensinar. Hoje é preciso saber motivar os alunos, apresentar a matemática de uma forma interessante, ter propostas de trabalho diversas, chegar junto dos alunos, entender as suas dúvidas, fazê-los compreender. A tarefa que vos espera é uma tarefa muito difícil.

Não posso garantir que fossem estas exactamente as suas palavras, mas estas eram as ideias e o vocabulário era também mais ou menos este. Tenho a certeza de que hoje ambas diríamos:

O professor de Matemática é um gestor de currículo e de aprendizagens. Gerir um currículo pressupõe que se conheça muito bem o assunto de aprendizagem para que ele possa ser manobrado de acordo com as situações. Gerir aprendizagens pressupõe respeito pela diversidade de pontos de partida e de formas de aprender, e exige que se conheça muito bem os aprendizes. Hoje o professor tem de organizar a aprendizagem para que os alunos tenham um papel activo. Para isso precisa de saber encontrar e utilizar os verdadeiros estímulos da matemática, uma área de conhecimento desafiante e criativa por natureza. A diversidade de assuntos e as especificidades de cada um permitem que os alunos não reajam todos da mesma maneira, mas se pensar é inerente à natureza humana todo o indivíduo pode fazer alguma matemática e, por isso, poderá aprender alguma matemática. A sociedade tecnológica de hoje exige que a Matemática contribua para o desenvolvimento de cada cidadão.

Tarefas pesadas se as encararmos isoladamente. São tarefas que se realizam com outros profissionais, partilhando dúvidas, dificuldades e certezas também. Articulando uma prática reflexiva com contributos teóricos e resultados de investigação, procurando tirar todo o partido de instrumentos tecnológicos que têm sido colocados à nossa disposição, podemos encarar a profissão que escolhemos com o estímulo do desafio, da criatividade e da cooperação.

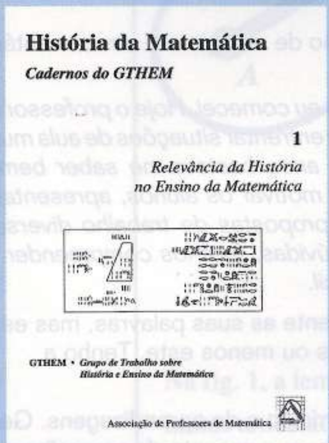
Ao longo dos anos, a profissão de professor de Matemática tem evoluído, acompanhando os desenvolvimentos da didáctica e da formação de professores. Hoje encaramo-nos como profissionais responsáveis pelo nosso próprio desenvolvimento profissional.

Tudo o que é inerente ao reconhecimento de uma profissão nos torna mais exigentes connosco próprios e com a formação de mais profissionais. A profissão de professor de Matemática no final do século XX não se compadece do recrutamento de professores em função do número de créditos de matemática que contabilizam nas suas licenciaturas e independentemente da lógica da sua formação. Só quem vê a matemática como um saber exclusivamente de serviço e de aplicação pode considerá-la como tal. A matemática é também um saber de desenvolvimento, de educação e de formação. E para um professor de Matemática a sua formação deve articular harmonicamente todas estas componentes.

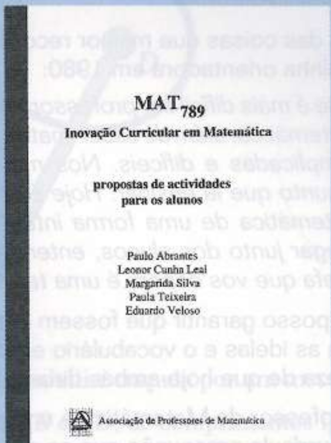
É por tudo isto e pelo alunos de hoje e de amanhã que desejamos que todos os futuros professores de Matemática comecem por realizar uma licenciatura em ensino da Matemática.

Cristina Loureiro, ESE Lisboa

NOVAS Publicações APM



História da Matemática
Caderno do GTHEM
Preço500$00



MAT_{789}
Inovação Curricular em Matemática
Preço1200$00

MAT_{789}
Inovação Curricular em Matemática
Preço750$00

The Geometer's Sketchpad
Entre 12000$00 e 13000$00

Agenda da APM 97/98
Preço 600$00

Histórias da aula de Matemática
Preço700$00

Contextos não formais de formação: O caso dos encontros de professores de Matemática

Ana Maria Roque Boavida

Entendo o conceito de formação na acepção abrangente que lhe é conferida por Honoré (1992): a formação é um processo de interrogação permanente sobre o sentido de tudo o que fazemos, uma actividade permanente e fundamental de abertura à existência.

Introdução

Há algum tempo atrás fui confrontada com o desafio de participar num painel que tinha por principal objectivo discutir os aspectos não formais da formação de professores. O texto de apresentação referia que os encontros profissionais são contextos em que os professores partilham o que vão fazendo e salientava que as oportunidades de troca de ideias e de experiências entre os professores de Matemática constituem importantes momentos para o seu desenvolvimento profissional. Foi a minha adesão a esta ideia, bem como o trabalho de reflexão despoletado pelo desafio de participar no referido painel, que fez surgir o texto que a seguir apresento. Este texto foca-se, globalmente, na importância dos contextos não formais para o desenvolvimento profissional dos professores e, em particular, no papel potencialmente formativo dos encontros de professores de Matemática.

Contextos de desenvolvimento profissional para um professor de Matemática

Em Portugal, um professor de Matemática para se desenvolver profissionalmente pode seguir por várias vias. Pode frequentar cursos de Bacharelato, Licenciatura, DESE, CESE, Mestrado ou Doutoramento, ou seja contextos em que a educação é plenamente intencional, está regulamentada legal e administrativamente, acontece numa estrutura sistémica institucionalizada (escola, por exemplo) e conduz à obtenção de títulos académicos reconhecidos (contextos de educação formal).

Pode também participar em actividades que, embora não sendo propriamente escolares, estão organizadas para a consecução de finalidades educativas explicitamente formuladas (educação não formal) ou pode, ainda, envolver-se em iniciativas que têm consequências educativas, conquanto não tenham sido especificamente elaboradas para a educação (educação informal). Entre estas actividades e iniciativas contam-se, por exemplo, diversas acções definidas no âmbito da formação contínua de professores, os encontros de professores, a participação na vida associativa de associações profissionais, e o envolvimento em projectos de formação, de intervenção e de investigação. Ao atribuirmos a estas vias um papel formativo estamos, claramente, a reconhecer a importância do não formal e do informal na formação de professores.

O papel formativo dos encontros de professores de Matemática

Para destacar a importância do não formal e do informal na formação de professores, vou começar por centrar-me no papel formativo dos ProfMat, ou seja, dos Encontros Nacionais de Professores de Matemática anualmente promovidos pela APM. A análise que apresento parte da minha própria experiência pessoal. Começarei por olhar, por observar esta experiência e interrogar-me-ei sobre as razões e os desejos que me levaram a querer participar, pela primeira vez, num destes encontros, já lá vão mais de dez anos.

Foi em Bragança, em 1987, a primeira vez que participei num ProfMat que reuniu cerca de três centenas e meia de professores. Na altura estava a trabalhar, juntamente com um grupo de colegas, no âmbito de um novo modelo de formação de professores.

A necessidade de mudar algo no ensino da Matemática, a vontade de querer compreender melhor as complexidades da aprendizagem desta disciplina e o desejo de estimular a inovação nos professores que formávamos, tinha já levado alguns de nós a procurarem a APM e a fazerem-se sócios desta associação. Quando tomámos conhecimento da data e local de realização do ProfMat, decidimos participar neste encontro. Nem a distância, nem os difíceis acessos do nordeste transmontano me fizeram, por um momento que fosse, questionar esta opção.

A minha decisão foi, de início, essencialmente motivada pela procura da novidade, pela expectativa de aprender um pouco mais, de conhecer novas experiências e novos projectos de que tinha ouvido falar, pela vontade de me valorizar profissionalmente. No entanto, cedo me apercebi de que uma das potenciais dimensões formativas do ProfMat vinha exactamente da possibilidade de partilhar e discutir ideias, de poder reflectir em conjunto com os meus pares sobre questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. E assim, eu e uma colega, resolvemos dinamizar, em Bragança, uma sessão de trabalho sobre formação de professores.

Desde então, tenho sido uma presença constante nos ProfMat. Estes encontros transformaram-se, reorganizaram-se, complexificaram-se e enriqueceram-se, quer para acompanhar as mudanças dos tempos, quer para integrar reflexões que, entretanto, se foram fazendo, quer ainda para dar resposta ao número cada vez maior de pessoas interessadas, que desde 1994 ultrapassou o milhar.

Hoje, passados 10 anos, continuo a ir aos ProfMat, fundamentalmente, pelas mesmas razões que me levaram a Bragança: vou trocar experiências, vou partilhar preocupações e também entusiasmos, vou confrontar saberes, vou procurar ideias novas que "alimentem" projectos que tenho, vou abrir as portas à possibilidade de me entusiasmar por novos projectos, vou colaborar com os meus pares na construção de uma nova maneira de ver e sentir o ensino e a aprendizagem da Matemática em Portugal.

Para lá destas razões, de natureza profissional, vou também por outras razões, de natureza mais pessoal, que frequentemente se entrelaçam com as primeiras: vou conviver, reencontrar amigos que entretanto conheci, com quem converso sobre projectos vários que entretanto se foram delineando, vou rever colegas de quem não sei há já muito tempo e saber o que estão a fazer de novo, vou renovar o meu sentimento de pertença a um grupo de "profissionais do mesmo ofício", num espaço que a dinâmica associativa da APM tem possibilitado criar.

Por tudo isto, os ProfMat têm sido para mim importantes espaços de formação, onde os momentos com objectivos de carácter pedagógico claramente definidos (como é o caso, por exemplo, da participação numa sessão prática ou num grupo temático) se entrelaçam com outros momentos, mais informais, mas nem por isso menos formativos.

Vou encontrar eco para muitas das dimensões formativas que reconheço nestes encontros, em testemunhos de diversos colegas publicados, em particular, na revista Educação e Matemática. A título ilustrativo transcrevo, em seguida, extractos de alguns desses testemunhos.

• A valorização do trabalho que se faz...

Hoje, mais do que antes, os professores de Matemática aceitam que o seu trabalho e o seu papel são importantes, que vale a pena comunicar aos colegas as suas experiências, os seus êxitos, as suas dúvidas, que é fundamental ouvir o que os outros têm a dizer e confrontar pontos de vista. (P. Abrantes, ProfMat 89: Um encontro para recordar, E&M 11).

• O convívio, onde dimensões pessoais se entrelaçam com dimensões profissionais...

Foram bons momentos de convívio onde mesmo aí se realizaram alguns encontros paralelos... É pois natural que mesmo aí se acabe por falar de Matemática...afinal alguns só se encontram de ano a ano... (ProfMat 90. Como foi? José Manuel Varandas, E&M 15)

O que levará toda esta gente ao ProfMat (cerca de 1500 professores)? (...) O ProfMat para além das questões seguramente importantes de ordem pedagógica e didáctica era para aquelas pessoas um encontro importante com os seus pares que têm em comum os mesmos interesses, motivações, problemas e dificuldades (...) Quantas amizades se terão criado e consolidado durante a realização dos ProfMats, quantas trocas de experiências, informações, esclarecimentos de dúvidas, início de projectos, terão acontecido fora daquele espaço, mas por via dele. Ninguém poderá responder com exactidão, mas serão seguramente centenas. (Sensações do ProfMat 95, Carlos Alberto Vintém, E& M 36)

• A partilha, a reflexão, os entusiasmos, as intranquilidades...

Registei com agrado algumas observações de uma estreante nestas andanças: sai-se daqui com vontade para fazer melhor. Aqui arranjamos força para fazer qualquer coisa de diferente. (ProfMat 91 - Breves impressões, José Duarte, E&M 19/20)

O ProfMat foi um espaço de constante reflexão, debate, troca de experiências e convívio. Trouxe comigo novas ideias, mais entusiasmo e motivação, para enfrentar as dificuldades que se vivem nas escolas... (A minha visão do Profmat 94, Helena Fonseca, E&M 23)

O ProfMat, como dizia uma colega, permite-nos recarregar baterias. Sendo um momento de paragem e reflexão, é também um local para onde levamos as nossas intranquilidades. (Évora, terra de bom acolhimento, Manuela Pires, E&M 36)

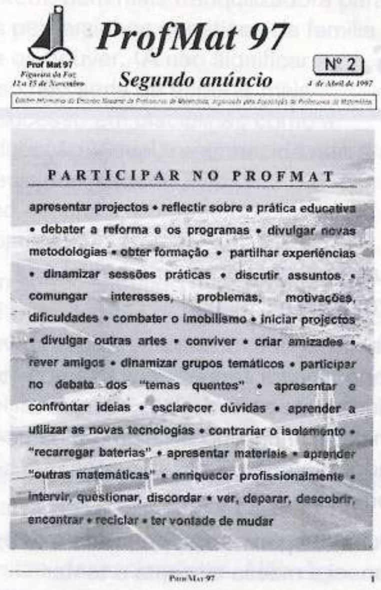
É importante salientar que o ProfMat se distingue de muitos congressos, onde grande parte do tempo é ocupado por uns poucos especialistas que falam para uma grande assistência. Essa distinção assenta no facto de muito do trabalho que aí se realiza ter a sua origem em iniciativas dos professores que, por vontade própria, se dispõem a partilhar e discutir, com colegas, as experiências e projectos que vão desenvolvendo. Por exemplo, analisando o programa do ProfMat 97, constatamos que das 175 sessões existentes, 113 são sessões práticas, comunicações, apresentações de projectos, sessões especiais e apresentação de materiais, ou seja, cerca de 2/3 do programa é constituído por "ofertas" dos participantes.

O envolvimento de um grande número de professores na preparação e dinamização de sessões de trabalho não é exclusivo do ProfMat 97. Segundo Paulo Abrantes (1997) nos últimos três anos o número de professores que teve uma "contribuição activa" nestes encontros correspondeu, aproximadamente, a 15% do total de participantes.

Estes factos mostram claramente que, de uma maneira progressiva, o professor vem atribuindo valor ao trabalho que realiza e acreditando que há potencialidades importantes na apresentação e discussão das experiências que vai fazendo. Ora, como bem salienta Henrique Guimarães (1995), a auto-confiança, a consciência da importância do seu papel e experiência na educação e no ensino, e a valorização da comunicação e intercâmbio de ideias, experiências e materiais, são ingredientes fundamentais para um efectivo desenvolvimento profissional do professor.

Participar no ProfMat: possibilidades de construção de um itinerário auto-formativo

Observando a primeira página do 2º anúncio do ProfMat 97, intitulada Participar no ProfMat, encontramos aí enunciadas actividades diversas que nos permitem destacar algumas das possíveis potencialidades formativas dos encontros de professores. De facto, nestas actividades podem identificar-se funções várias cuja interacção pode facilitar a construção, por cada professor, de um verdadeiro itinerário auto-formativo (Couceiro, 1995):


ProfMat 97

Prof Mat 97
Figueira da Foz
12 a 15 de Novembro

Segundo anúncio

Nº 2

4 de Abril de 1997

PARTICIPAR NO PROFMAT

apresentar projectos • reflectir sobre a prática educativa • debater a reforma e os programas • divulgar novas metodologias • obter formação • partilhar experiências • dinamizar sessões práticas • discutir assuntos • comungar interesses, problemas, motivações, dificuldades • combater o imobilismo • iniciar projectos • divulgar outras artes • conviver • criar amizades • rever amigos • dinamizar grupos temáticos • participar no debate dos "temas quentes" • apresentar e confrontar ideias • esclarecer dúvidas • aprender a utilizar as novas tecnologias • contrariar o isolamento • "recarregar baterias" • apresentar materiais • aprender "outras matemáticas" • enriquecer profissionalmente • intervir, questionar, discordar • ver, deparar, descobrir, encontrar • reciclar • ter vontade de mudar

ProfMat 97 1

• Encontramos uma função instrumental, essencial para a aprendizagem de saberes específicos úteis ao trabalho do professor, presente, por exemplo, no "debater a reforma e os programas", no "dinamizar sessões práticas e grupos temáticos", no "aprender a utilizar as novas tecnologias";

• Encontramos uma função dialogal, para comunicar, evidenciada pelo "discutir assuntos", "conviver", "comungar interesses, problemas, motivações, dificuldades", "apresentar e confrontar ideias";

• Encontramos uma função de auto-reflexão visível no "reflectir, questionar, discordar, ver, descobrir, encontrar".

É interessante constatar que, por vezes, numa mesma actividade são mobilizadas diferentes funções. Por exemplo, a dinamização de sessões práticas e grupos temáticos tem claramente uma função instrumental, pois possibilita o confronto com diversos saberes específicos relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, a acção de dinamizar supõe formas de funcionamento propícias à troca de ideais e ao questionamento e, nessa medida, podemos aqui identificar também a função dialogal e/a função de auto-reflexão.

As actividades mencionadas no anúncio, podendo possuir as funções atrás referidas, são consistentes com princípios pedagógicos capazes de sustentar práticas propícias à auto-formação dos professores de Matemática e, portanto, ao seu desenvolvimento profissional. Nomeadamente, evidencia-se:

• O reconhecimento do valor da experiência, que se pretende interrogada e problematizada;

• A importância da reflexão sobre as práticas profissionais, que se querem compreendidas, reelaboradas e enriquecidas;

• A relevância reconhecida à construção de projectos partilhados;

• A valorização da comunicação, do assumir da palavra para enunciar o que fazemos através de palavras que são as nossas, o que contribui para um acréscimo de consciência sobre a nossa própria acção.

É, nesta medida, que os encontros de professores de Matemática podem ter um forte potencial formativo. E aqui entendo o conceito de formação na acepção abrangente que lhe é conferida por Honoré (1992): a formação é um processo de interrogação permanente sobre o sentido de tudo o que fazemos, uma actividade permanente e fundamental de abertura à existência.

Referências

Abrantes, P. (1997). El movimiento associativo y la identidad profesional de los professores de matematicas. Epsilon nº 38, pp. 47-57.

Guimarães, H. (1995). O nosso Encontro. Em Educação e Matemática nº 36. pp. 1-2.

Couceiro, M.L. (1995). Autoformação e contexto profissional. Formar, nº 14.

Honoré, B. (1992). Vers l'oeuvre de formation. L'ouverture à l'existence. L'Harmattan: Paris.

Notas

[1] Este painel intitulado Formação de professores: que relevo para o informal? realizou-se no ProfMat 97 e foi moderado por Joana Porfírio.

Ana Maria Boavida
ESE de Setúbal

Pontos de vista, reacções, ideias...

Reflexões

Depois de uma vida de professor, dou comigo a pensar no que vivi como aluno. Não é que como professor no activo eu não me lembrasse do aluno que fui. Só que, passadas as duas fases e com mais tempo para reflectir, tudo me parece mais claro por um lado e mais confuso por outro. Mais claro porque parece que foi ontem que tudo se passou - será o avivar da memória para as coisas antigas próprio da 3ª idade que por aí se aproxima? Mais confuso porque há coisas que me ensinaram que eu ainda hoje não percebi como é que queriam que eu entendesse.

Mandavam-me decorar a tabuada, como ponto de partida, sem eu saber como e para que era aquilo, porque sem isso não poderia fazer as contas nem resolver os problemas que eu muito menos sabia o que eram e para que serviam. Se me perguntavam 3x4 e eu respondia imediatamente 12, ficavam muito contentes comigo porque eu nem tinha pensado, mas se ficasse a pensar um bocadinho, logo ralhavam comigo, porque era preciso dizer sem pensar. O mais nobre, o pensar, era penalizado.

Para achar a área de um rectângulo mandavam-me multiplicar o comprimento pela largura porque metros vezes metros dava metros quadrados à semelhança de $3 \times 3 = 3^2$, e isso dava-me direito a pensar que para achar quantas maçãs havia numa caixa bastava multiplicar as maçãs do comprimento pelas maçãs da largura e obviamente daria maçãs quadradas.

Para dividir fracções mandavam-me multiplicar, após inverter os termos ao quebrado divisor, e eu o que queria era dividir.

Nas fracções, disseram-me que o denominador representava sempre o número de partes iguais em que a unidade tinha sido dividida e o numerador o número dessas partes que se tomavam.

Quando apareceu o 8 elevado a 2/3, cansei a massa cinzenta a tentar descobrir o que é que eu tinha partido em 3 partes iguais e onde é que estavam as duas. É claro que logo me tranquilizaram dizendo-me que o 3 passava a representar o índice de uma raiz e o 2 o índice de uma potência e eu, como era bem mandado, passei sempre a fazer assim porque assim eu ganhava sempre um certo, ainda que sem saber porquê.

E não é que me ensinaram a trabalhar com potências e com raízes sem me terem ensinado a contar por bases nem a teoria de conjuntos!... Ou eu era muito espertinho ou não sabia o que é que estava a fazer.

E aquela coisa de me dizerem que qualquer número elevado a zero dá sempre 1!... É claro que sempre me foram dizendo que aquilo era um axioma e que se dividisse duas potências com a mesma base e o mesmo expoente logo veria que dava um. Mas se eu percebia porque é que 2 ao quadrado dava 4 e 2 ao cubo dava 8 porque é que não haveria de perceber a razão do 2 elevado a zero dar 1?

Havia ainda, na antiga instrução primária, uns problemas muito compridos, com muitos raciocínios, que os alunos tinham de resolver sem quaisquer estratégias de apoio do princípio ao fim. Resolver problemas assim era um acto heróico do aluno e uma violência da parte de quem lhos propunha. Quando cheguei aos outros níveis de ensino é que percebi quanta desumanidade havia naqueles problemas por comparação com as estratégias aqui existentes. Eram fórmulas, eram equações, eram as incógnitas a passarem de uns lados para os outros, etc. Aquilo assim até parecia bruxedo!... E sendo certo que a maior riqueza da resolução de um problema — mesmo dos mais simples — fica sempre situada entre o fim do seu enunciado e o início dos seus algoritmos (se os tiver), parece-me que ainda hoje esse espaço continua um deserto, e parece-me que não é só no primeiro ciclo. No dia em que os alunos e os respectivos professores forem capazes de transformar esse deserto em terreno produtivo de estratégias expressas e sistemáticas, um passo importante se dará na aprendizagem da Matemática.

E é possível, logo no 1º ciclo do ensino básico, fazer com que os alunos esquematizem, equacionem e passem as incógnitas para o lugar que mais lhe convier para a resolução do problema.

Não se pense que com esta prosa estou a denegrir o trabalho dos meus professores de quem guardo gratas recordações e apreço, nem de outros seus contemporâneos. Eles tinham as práticas pedagógicas do seu tempo e bem esforçadas elas eram. Daqui a vinte anos, ou menos, estarei a ler coisas a respeito do meu trabalho de hoje, por desactualizado. E é bom que assim seja porque é sinal que evoluiu. De estranhar seria fazer-se tudo como hoje e hoje fazer-se como se fazia há quarenta anos.

Falámos de matemática. Mas podemos falar de dois tipos de matemática. Na óptica do utilizador, aquela que é preciso sair rápida, certa à primeira e, se possível, mecanizada e sem ser pensada porque o freguês é de longe, e que corresponde à de há cinquenta anos e servia para o mundo do trabalho.

Hoje, nas escolas, deve praticar-se, a meu ver, a matemática tipo investigativa, aquela que deve ser procurada, experimentada, confrontada, reflectida, esquematizada e, portanto, necessariamente lenta e em que o mais importante não será achar o resultado final mas antes promover e apreciar os caminhos (penso eu).

João Maria de Oliveira
Professor aposentado do 1° ciclo
Cartaxo

Afinal, a Matemática é ou não difícil?

Se é, como dar-lhe a volta?

Se não, então porquê tanto insucesso?

Muito justamente, tem sido prática da APM combater a ideia simplista e redutora, frequente e erradamente divulgada, de que a Matemática é a disciplina mais difícil, destinada apenas aos cérebros iluminados.

"Na maior parte das disciplinas, com mais ou menos *marranço*, a coisa ainda vai, agora com a Matemática não é de estudo, é de compreensão!..." — diz muita gente e, sem excepção, os mais preguiçosos em jeito de desculpa para o insucesso, arrumando-a (e aos respectivos compêndios novinhos em folha) na prateleira das disciplinas que se aceita que se deixe de lado. Até porque já o pai, a mãe, a avó, o gato e o piriquito nunca deram nada para a dita... E a justificação do cruzar de braços completa-se com a alegação de que ninguém tem culpa de não *ter jeito*, expressão sinónima de *ser inteligente*, porém, bem mais tranquilizadora para os pergaminhos genéticos da família, se os houver. (A não significar isso,não seria de esperar mais insucesso em disciplinas como a Educação Visual, reconhecida que é a tradicional *falta de jeito* para o desenho assumida por uma boa parte da população?...)

Em suma, sabendo de antemão que se trata de uma disciplina difícil e que haverá toda a compreensão do mundo para o insucesso (se a há até para coisas bem piores!...), é meio caminho para ser posta de lado.

Dada a reconhecida especificidade da Matemática - elitismo à parte - acho que haverá uma pontinha de razão nestas ideias simplistas. Não digo toda a razão porque, na minha opinião, tal como em qualquer actividade de que se ouça falar, a receita é: para além de alguma *inspiração* (algum *jeito* sempre ajuda...), *transpiração* precisa-se, mas não só da parte dos professores... Para mais se queremos um ensino centrado no aluno!

É que, ainda que muito empiricamente, tenho para mim que, se não se pode dizer que a Matemática é a mais difícil, é, seguramente, das mais "trabalhosas".

Se a Matemática é, como se defende, como uma outra qualquer, então por que razão os professores de Matemática não conseguem que os seus alunos tenham tanto sucesso como têm nas outras disciplinas? Aí é que parece estar o *busílis* da questão: os professores.

Muitos pais, os respectivos petizes confortavelmente imitando-os, alguns professores e, paradoxalmente, até professores de Matemática, não raras vezes, têm vindo a dar corpo a essa ideia. E, diga-se de passagem, em certos casos até terão alguma razão. Sem dúvida que haverá professores de Matemática que deixam a desejar. E não me refiro apenas aos curiosos (independentemente da habilitação que possuam ou não, sublinho) a quem a maior parte das escolas se vê obrigada a entregar horários para "desenrascar" a falta de professores. Sem dúvida que a instabilidade do corpo docente, em particular do de Matemática, tem efeitos negativos. Mas, já agora, uma pergunta porventura incómoda para os mais *igualitaristas*: por que raio havia de ser na Matemática que, ao longo dos tempos, mais se tem feito notar a falta crónica de professores? Será porque os professores evitarão sê-lo de Matemática? E isso ficará a dever-se ao facto de os professores não lhes terem incutido o gosto pela disciplina!?... Bom, entramos num círculo vicioso, de que não descortinamos o *pecado original*.

É melhor não perder tempo a tentar descobri-lo. Centremo-nos nos professores aqui e agora. Se a Matemática não é difícil, bem podemos concluir que os professores de Matemática são assaz ineficazes.

Com o sucesso(?) visível na maior parte das outras disciplinas depreender-se-á que os outros professores, pelo contrário, são competentes e ao longo dos tempos, têm-se adaptado às exigências das novas realidades, conseguindo que os seus alunos progridam satisfeitos, empenhados, cheios de interesse pelas respectivas. Decerto, trabalham em grupo, reflectem, trocam experiências, enfim, trabalham que se desunham comparando com os seus colegas de Matemática, que continuam a *dar a matéria* sempre da mesma maneira, insípida, agarrados que estão aos velhos e estéreis métodos.

Pode ser cómodo e um alívio para dores de cotovelo e/ou frustrações que terão a ver com maus relacionamentos e respectivas irritações com a Matemática, porém — admito que sou suspeito —, penso ser injusto pôr a tónica nos professores desta disciplina. Quem o fizer candidata-se à tarefa ciclópica de demonstrar que a *(boa)* formação de todos os professores de Matemática vai ser a varinha mágica, condição suficiente do sucesso. Num assomo de lucidez, pode ir mais além e, porventura, arranjar justificação para *bater* na Reforma. Todavia, o problema é muito mais complicado pois a própria Reforma se inscreve num complexo contexto que é a Educação. Nesse aspecto — tendo em conta as recentes avaliações de desempenho e de competências de crianças de vários países —, para não ser demasiado radical, convenhamos que, mesmo em regime capitalista neoliberal à pressa, podíamos estar bem melhor e, por tabela, a Matemática!...

Sobre estes assuntos e a eventual descoberta do *pecado original* era preciso um pouco mais de investigação.

Augusto Taveira
Esc. Sec. João de Deus, Faro

Tecnologia gráfica no estudo de de classes de funções: algumas observações

O artigo "Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções" publicado na *Educação e Matemática* n.º 46 (pp. 33-36) contém algumas conclusões e abordagens que me parecem incorrectas e mesmo incoerentes.

No estudo das funções afins do tipo $y=ax+b$ fixa-se $a=1$ e faz-se variar o valor de b. A partir daqui pode-se observar que a alteração do parâmetro b produz sempre gráficos que são rectas com a mesma inclinação. Contudo não é correcto inferir desta observação que a define o declive da recta que constitui o gráfico. Se considerarmos a família de funções $y=x/a+b$ e fizermos $a=1$, podemos usar os mesmos valores de a e b e obter os mesmos gráficos. Podemos então concluir que a define o declive da recta que constitui o gráfico da função afim $y=x/a+b$? Naturalmente para analisarmos o papel do parâmetro a temos que estudar diversos casos, tendo o cuidado de fixar os restantes parâmetros e observar depois quais os efeitos das variações de a.

De modo análogo, o artigo referido fixa de seguida $b=-1$, faz variar a e tira conclusões para b. Se considerarmos agora a família de funções $y=ax+2b+1$ e usarmos a mesma abordagem do artigo acabaremos por concluir que, nesta família de funções, "o parâmetro b define a ordenada na origem da recta que constitui o gráfico da função afim".

Mais adiante consideram-se as funções quadráticas, da forma $y=ax^2+bx+c$ e surge um estudo relativo a "variar o valor de a de modo a tender para zero" quando $b=c=1$. Com base em alguns gráficos observa-se: "à medida que o valor de a se aproxima de zero, a parábola correspondente à função, no rectângulo de visualização definido, aproxima-se da recta de equação $y=x+1$." Contudo, logo de seguida toma-se $b=1$ e $c=2$ e faz-se "variar o valor de a de modo a tender para infinito", considera-se a conjectura "quando a tende para infinito por valores positivos, as parábolas que constituem os gráficos das funções tendem para uma semi-recta vertical" mas conclui-se que a conjectura não é válida, aparentemente porque o gráfico da função $y=ax^2+x-2$ continua a ser uma parábola por maior que seja a.

O primeiro ponto que deveria ser definido é o que se entende por um gráfico aproximar-se de outro. No primeiro caso diz-se expressamente que os gráficos se aproximam "no rectângulo de visualização definido". Isto é fundamental porque se considerarmos um rectângulo fixo podemos exprimir rigorosamente de várias maneiras o que significa um gráfico aproximar-se de outro e então obtemos efectivamente que os sucessivos troços da parábola se aproximam do troço da recta. Se aplicássemos esta definição ao segundo caso concluiríamos que, no rectângulo dado nesse caso, o troço de parábola também se aproxima da semi-recta. No entanto, aqui somos surpreendidos com um argumento que não tem nada a ver com o que se tinha estudado antes. Verifica-se que, para $a=1000$, o gráfico da função é ainda uma parábola e conclui-se daí que as parábolas não tendem para as semi-rectas. Se usarmos argumentos deste tipo é óbvio que uma sucessão de parábolas nunca pode tender para uma recta ou semi-recta. Não existem "estados intermédios" entre rectas e parábolas e, desde que $a \neq 0$, as funções quadráticas têm sempre uma parábola por gráfico. Se voltarmos a analisar agora o primeiro caso somos forçados a concluir, à luz desta (implícita) nova definição, que a sucessão de parábolas cada vez mais abertas não tende para a recta. É que, mesmo o gráfico da função $y=0.001x^2+x+1$, continua a ser uma parábola e, para o ver como tal, basta escolher um rectângulo de visualização adequado (por exemplo $[-2500, 2500] \times [-2500, 2500]$).

É preciso ter consciência que os raciocínios informais não podem ser descuidados nem as definições podem andar ao sabor dos exemplos. Nesse caso não estamos a fazer matemática nem a desenvolver uma cultura científica.

Carlos Albuquerque
Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa

Classificar os alunos

Voltei a ler os "Documentos Preparatórios-I" da Comissão de Reforma do Sistema Educativo (edição do Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação, Novembro/87). Passaram-se, entretanto, dez anos... Como é possível, e por que razão, estamos hoje tão longe dos estudos e projectos apresentados nesses documentos?

Dada a sua extensão, referir-me-ei apenas ao Cap. III - "Proposta para um sistema de avaliação escolar", em particular a um assunto de importância inquestionável e que só muito raramente vejo abordado e nunca discutido: as escalas de avaliação (de classificação).

Naqueles documentos, a "nova" escala classificativa para o Ensino Básico propunha, para a área de formação académica básica, uma subdivisão em 4 níveis positivos (em vez dos 3 actualmente existentes): *Satisfaz com dificuldades nos mínimos essenciais; Satisfaz com domínio seguro nos mínimos essenciais; Satisfaz até 3/4 dos níveis de desenvolvimento; Satisfaz para além dos 3/4 dos níveis de desenvolvimento.*

Esta subdivisão justifica-se pela necessidade de assegurar uma discriminação capaz de responder às expectativas dos alunos e dos encarregados de educação e vai ao encontro do desejo dos professores no que respeita a uma maior diferenciação na zona média da escala. (pág. 101 dos Documentos)

Continuamos no Básico com uma escala que tem apenas 3 níveis positivos. Mas muitos alunos e muitos professores continuam, na realidade, a dar existência a níveis como por exemplo 2^+, 3^- ou 3^+ (nas pautas não se usa, claro). Porquê? O nível 3 numa determinada disciplina do Ensino Básico dá-nos alguma informação objectiva, útil? Se sim, qual? Tem justificação (manter) a actual escala de 1 a 5 no Básico? Aqueles documentos propõem, depois de análise e fundamentação, a existência de uma única escala numérica para o Básico e Secundário (é apresentada para o Secundário uma outra escala numérica, alternativa, de 1 a 10). Mas o Ensino Secundário continua hoje com o velho sistema das notas de 0 a 20...

Professores, alunos e encarregados de educação continuam a achar que, com esta escala, a avaliação é marcada pela subjectividade, é dirigida essencialmente aos aspectos cognitivos da aprendizagem e baseada (quase) exclusivamente nos testes. A escala de 0 a 20 acentua, na avaliação, uma carga emocional negativa.

Onde estão os defensores fundamentados da escala de 0 a 20, consagrada pela nossa tradição escolar e utilizada exclusivamente até 1974/75?

Se "classificar" é colocar em classes, estas devem ser definidas e caracterizadas, com fronteiras nítidas entre si, de modo a que um elemento pertencente a uma não possa pertencer a outra. Além disso, devem constituir um contínuo, embora os intervalos possam ser ou não iguais. Ora, quanto maior for o número de classes, mais difícil será conseguir o carácter de identidade para cada uma delas. Estas reflexões apontam para o abandono da escala de 0 a 20 e para a procura de uma escala com um número mais reduzido de termos. (pág. 137 dos Documentos)

Abandono da escala de 0 a 20? Procura de uma escala com número reduzido de termos? Qual é a opinião dos professores da APM neste domínio específico? E a dos especialistas em avaliação? Que se passa nos outros países? Que lógica tem (manter) a escala de 0 a 20 no Secundário?

Qual é a diferença entre as notas 11 e 12? Ou entre 12 e 13? E entre 16 e 17, entre 6 e 7? Haverá algum professor que não se inquiete com a injustiça que é o 10 do professor x poder ser uma nota "melhor" que o 11 do professor y ou até que o 12 ou 13 do professor z?

Não será possível (desejável) acabar com a angústia que os professores, em geral, sentem ao terem de classificar os alunos na escala de 0 a 20? E as notas das provas globais, dos exames? E as médias, de que dependem tão frequentemente o seu futuro profissional, a sua realização pessoal? Têm sentido as médias nesta escala? Tem sentido, por uma décima, não entrar no curso que se deseja?

Pode haver justiça no actual sistema de avaliação dos alunos?

Todos sabemos que avaliar não é (só) classificar. Mas, quer queiramos quer não, as classificações continuam a ser a face mais visível da avaliação escolar. É por isso, e pela sua importância, que decidi escrever sobre este assunto. Espero deste modo contribuir também para animar a secção Pontos de vista, reacções, ideias da revista *Educação e Matemática*. Veremos se o assunto suscita ou não polémica.

João Janeiro
Esc. Sec. Padre António Vieira, Lisboa

Número temático de 1998

Não quer colaborar?

O número temático deste ano da revista Educação e Matemática sairá, como habitualmente, durante o ProfMat e incidirá desta vez sobre Educação — Escola — Matemática. Com certeza que ao longo do seu percurso profissional já viveu situações que o levaram a interrogar-se e a reflectir sobre esta trilogia. Vimos agora convidá-lo a partilhar essas vivências. Envie-nos um texto relatando uma experiência que considere especialmente significativa. Poderá ser, por exemplo, a descrição de uma descoberta que fez, ou de um episódio que agradou especialmente aos seus alunos, ou de uma actividade que considere particularmente relevante para a sua formação global. Poderá ser também uma opinião sobre como outros professores vêem a disciplina de Matemática, ou pontos de vista dos seus alunos relacionados com a utilidade de aprender Matemática, ou ainda um testemunho sobre como equaciona o papel da Matemática na Educação e na Escola. Não podemos, à partida, garantir a publicação no número temático, de todas as contribuições que surgirem, mas dê largas à sua criatividade e não deixe de escrever.

O número π: curiosidades e história

Joaquim Eurico Nogueira

Datam de há muitos séculos as primeiras referências a π. Este artigo mostra-nos a história e evolução deste número, desde o Antigo Testamento até aos nosso dias, referindo as diversas abordagens e definições que conduziram a aproximações cada vez melhores.

O número π, que todo o estudante do ensino secundário tem obrigação de conhecer, é uma das mais importantes constantes do universo matemático, estando intimamente relacionado com a circunferência (quem não conhece a expressão $2\pi R$ para o perímetro e πR^2 para a área da circunferência, onde R é o seu raio?) e, por consequência, com as funções trigonométricas, suas inversas e o cálculo de integrais.

As suas principais propriedades são a irracionalidade (provada por J. H. Lambert em 1761 e A. M. Legendre em 1794) e a transcendência (provada pelo matemático alemão F. Lindemann em 1882). A definição exacta deste número que, com quatro casas decimais se escreve 3,1416, é a seguinte:

$$\pi = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Esta não é a única possível maneira, de representar π com exactidão. Eis outras formas a partir das quais π pode ser definido:

1) $\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots\right)$

(da autoria de Viéte),

2) $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4.\ldots.(2n).(2n)}{1.3.3.5.\ldots.(2n-1).(2n+1)}$

(da autoria de Wallis),

3) $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(da autoria de Gregory, 1671),

4) $\pi = 16\cot g\frac{1}{5} - 4\cot g\frac{1}{239}$

(da autoria de John Machin, 1706),

5) $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right),$

6) $\pi = 48\,\mathrm{arctg}\frac{1}{8} + 32\,\mathrm{arctg}\frac{1}{57} \pm 20\,\mathrm{arctg}\frac{1}{239},$

7) $\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

(estas três fórmulas são da autoria de Gauss),

8) $\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right),$

9) $\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}}$

(permite o cálculo de π sob a forma de fracção contínua),

10) $\frac{1}{\pi} = \left\{\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}\right\}$

(esta fórmula descoberta pelo matemático indiano Ramanujan em 1914, foi usada pelos irmãos Chudnosky, em 1994, para calcular quatro biliões de algarismos de π),

11) $\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$

(esta última, por sua vez, permite calcular cada algarismo de π, individualmente, o que é algo de notável e que, até há pouco tempo, se acreditava ser impossível. Os matemáticos estavam firmemente convencidos de que, para calcular, por exemplo, o milésimo-primeiro algarismo de π, era preciso ter calculado previamente os mil algarismos anteriores).

O número π, cuja notação foi adoptada em 1737 por Euler (1707/1783), era já usado em 1706 pelo inglês W. Jones. Note-se que, no tempo de Barrow (1630/1677) que foi professor de Newton na Universidade de Cambridge, se utilizava a letra π, mas atribuindo-se-lhe um sentido diferente do actual, pois naquela época esta letra designava a fronteira do círculo (a circunferência) e não a constante numérica.

Datam de há muitos séculos as primeiras referências a π. Já no Antigo Testamento, ao serem dadas as dimensões de um vaso circular que tem *"10 côvados de um bordo ao outro, 5 côvados de altura e apertado à volta por um cordão de 30 côvados"* (onde 1 côvado=3palmos=66cm) se está a definir implicitamente π como sendo o valor 3, o que, diga-se de passagem, é uma aproximação péssima. Era, no entanto, esta a aproximação então usada no Egipto, na China e na Mesopotâmia. Num texto cuneiforme babilónico datado de 2000 a.C. e num papiro de Tebas, um pouco mais recente, encontramos π já determinado com uma casa decimal correcta.

Arquimedes (287/212 a.C) conseguiu melhorar um pouco a situação. Aproximando a circunferência por polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados, descobre que o valor de π se encontra entre $3\frac{1}{7}$ e $3\frac{10}{71}$, ou seja que $3{,}14085 < \pi < 3{,}142857$, obtendo uma aproximação com duas casas decimais correctas.

Por volta do ano 400 d.C. o livro indiano "Paulisha Siddhânta" usa o valor $\frac{3177}{1250}$ para π e, quase um século depois, em 499 d.C., encontramos, num tratado indiano (escrito em verso) sobre matemática e astronomia denominado "āryabhatiya" (cujo autor era aryabhata), instruções para a determinação do valor do número π com bastante rigor: *"Adicione-se 4 a 100, multiplique-se o resultado por 8 e adicione-se 62.000. O resultado é aproximadamente o comprimento da circunferência de diâmetro 20.000."* Deste enunciado, que mais parece uma receita culinária, obtem-se o valor aproximado 3,1416 que é uma boa aproximação com 3 casas decimais correctas e a quarta correctamente aproximada por excesso.

Enquanto isso, os chineses obtinham 6 casas decimais exactas, precisão que só seria atingida na Europa sete séculos mais tarde. Em 1596, Ludolph Van Ceulen (1539/1610), no seu ensaio "Van der Circkel", forneceu 20 casas decimais exactas e, numa sua obra publicada postumamente em 1615, π surgiu com 35 casas decimais exactas[1], que aumentaram para 140 em finais do século XVIII (Vega, 1796). Em 1844, um Vienense fornece 205 casas decimais mas, verdade seja dita, todas as operações foram confiadas a um calculador prodígio de 16 anos que, em 2 meses, fez o trabalho que outros levariam anos a realizar.

O recorde do cálculo manual pertence ao inglês William Shanks que determinou 707 casas decimais. Infelizmente, o cálculo está errado a partir da 528ª casa, o que não é de espantar se pensarmos que é preciso calcular mais de 1.000 termos de uma série convergente, cada qual com 710 algarismos e, ainda para mais, cada termo exige duas multiplicações muito extensas e duas divisões feitas sem erro. O engano só em 1946 foi detectado pelo inglês D. F. Ferguson que conjuntamente com o americano J. W. Wrench atingiu as 808 casas decimais para o número π.

Foi a partir de 1949 que começaram a ser usados os computadores para o cálculo do π, tendo a utilização da fórmula de Machin proporcionado a computação de 2037 casas decimais correctas. Mais recentemente novos algoritmos computacionais proporcionaram a descoberta de um número de casas decimais cada vez maior: um dos mais recentes, da autoria de Brent e Salamin (1975)[2] foi usado em 1983 pelos japoneses Y. Kanada, Y. Tamura, S. Yoshino e Y. Ushiro que o implementaram num computador tendo obtido 16 milhões de algarismos. Verificaram depois as contas por meio da relação de Gauss, tendo essa verificação mostrado que as primeiras 10.013.395 casas estavam correctas. Usando um algoritmo distinto Gosper calculou, em 1985, 17 milhões de algarismos e, em Janeiro de 1986, Bailey atingiu a marca dos 29 milhões usando um Cray-2. Kanada conseguiu calcular 33.554.000 algarismos em Setembro de 1986, 2^{27} algarismos em Janeiro de 1987 e 201.326.551 em Janeiro de 1988. Anos depois, Bailey e Gregory Chudnovsky, da Columbia University, calcularam mais de um bilião de casas decimais de π sendo, em 1995, ultrapassada a fasquia dos 3 biliões, por investigadores japoneses. Pouco tempo depois (em Setembro de 1995) o professor japonês Yasumasa Kanada, após ter posto o seu supercomputador Hitachi a trabalhar durante cerca de 250 horas, obteve 6.442.450.938 casas decimais exactas deste número. Conseguiu bater este recorde em Junho de 1997 obtendo então 51.539.600.000 casas decimais exactas!...

Também recentemente, há a assinalar que o francês Fabrice Bellard, de 25 anos, calculando o valor de π, mas desta vez em numeração binária, atingiu sucessivamente as fasquias de 400 biliões (Outubro de 1996) e 1.000 biliões (Setembro de 1997). Este último recorde foi obtido após 25 dias de cálculo intensivo em computadores ligados em rede através da INTERNET, tendo sido usada uma fórmula desenvolvida em 1995 por matemáticos da Universidade Simon Fraser (Canadá), mas aperfeiçoada por Bellard.

Todos estes cálculos recordam-nos um problema que desde há muito tempo se arrasta para o número π: o problema da normalidade. Um número x diz-se normal na base b se, na sua representação nessa base, todos os algarismos ocorrem um mesmo número de vezes, ou seja, se

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N(s,n)}{n} = \frac{1}{b}$ onde $N(s,n)$ é o número de vezes que o algarismo *s* ocorre nas *n* primeiras casas decimais de x, e *b* é o número da base (a definição é de Émile Borel, e data de 1907).

Na base 10, uma dízima infinita será, portanto, normal se nela todos os algarismos de 0 a 9 aparecerem na proporção de 1/10, registando-se o facto de D. Champernowne da Universidade de Cambridge ter provado que o número 0,12345678910111213141516... é normal em base 10. No entanto, ainda não foi possível obter um exemplo de um número que seja normal em todas as bases e isto apesar de haver tantos números normais como reais, facto que Borel demonstrou.

Pensa-se que talvez π seja normal... Mas até hoje ainda nenhum matemático conseguiu provar tal facto, e isto apesar de as frequências dos 10 algarismos entre os primeiros 10 milhões de casas decimais (respectivamente 999440, 999333, 1000306, 999964, 1001093, 1000466, 999337, 1000207, 999814 e 1000040) concordarem com os valores esperados teoricamente. Como foi salientado, os cálculos já realizados não são uma prova conclusiva da normalidade de π em base 10. Quem nos diz que subitamente não vão surgir nas casas decimais deste número uma quantidade de infinita de 0's e 1's que altere completamente as frequências esperadas? Talvez π seja da forma π=3,1415926... 01000010000100 100100101100110... Esta ideia foi aproveitada pelo astrónomo americano Carl Sagan na sua obra "*Contacto*". Nesse excepcional livro[3], a sua heroína Elianor Arroway encontra alienígenas que lhe comunicam que na representação de π em base 11 subitamente surgem muitos 0's e 1's consecutivos, os quais não seriam mais que a representação, em numeração binária, de um certo desenho muito particular: exactamente a representação da figura que provocou o cálculo desse mesmo número, a circunferência. O círculo fechava-se!

Para terminar este extenso artigo sobre o número π, umas curiosidades: a fim de facilitar a memorização de grandes quantidades de casas decimais deste número, foram criadas diversas mnemónicas cujo número de letras em cada palavra corresponde ao algarismo respectivo na dízima de π. Como, por exemplo:

"Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux anges" (F. de Vasconcellos),

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard" (M. Eves),

"May I have a large container of coffee?" (M. Eves),

ou ainda, a seguinte que fornece 30 casas decimais e é simultaneamente um poema de homenagem a Arquimedes:

"Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Siracusan, rivaled nevermore
Who in his wondrous lose
Passed on before
Left men his guidance
How to circles mensurate"

Finalmente, para os amantes dos números, um presente: o número π que, sob a forma de fracção se pode representar (aproximadamente) por

$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{3927}{1250}, \frac{103993}{33102}, \ldots,$

admite a seguinte representação decimal com 300 casas decimais exactas:

3. 14159 26535 89793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432
66482 13393 60726 02491 41273

Bibliografia

Borwein, J. M. e Borwein, P. B. (1988). *Ramanujam and Pi*, Scientific American, vol. 258, nº2, Fevereiro.

Borwein, J. M. e Borwein, P. B., Bailey, D. H. e Plouffe, S. (1997) *The quest for Pi*, The Mathematical Intelligencer, vol. 19, nº2.

Dionísio, J. J. (1970). *A constante π na história do pensamento matemático.*

Sagan, C. (1985). *Contacto*. Edições Gradiva.

Wagon, S. (1985). *The evidence — Is π normal?*. The Mathematical Intelligencer, vol. 7, nº3.

Notas

[1] Consta que essa sua aproximação de π teria sido gravada na pedra tumular do autor, pedra essa que se perdeu. Mais interessante ainda é o facto de, ainda hoje, na Alemanha, π ser frequentemente designado como *número ludolfino* (*Die Ludolphische Zahl*).

[2] Converge quadraticamente, isto é, cada nova iteração duplica aproximadamente o número de algarismos obtidos. Posteriormente foram construídos algoritmos que convergem cubicamente, quarticamente, nonicamente e mais geralmente para qualquer *m*. No entanto, para ordens superiores à quarta, o tempo que o computador consome ao efectuar cada iteração não compensa o maior número de algarismos obtidos de cada vez!...

[3] Recentemente foi produzido um filme baseado nesta obra, tendo a actriz Jodie Foster interpretado a personagem principal.

Joaquim Eurico Nogueira
Univ. Nova de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta foi elaborada pelos colegas Jacinto Salgueiro (Esc. Sec. de Montemor), Adérito Araújo e Paula Bulhão (Esc. Sec. Gabriel Pereira, Évora), no âmbito de um curso de iniciação à utilização das calculadoras gráficas, realizado pelo Projecto T3 da APM. Trata-se de uma actividade de modelação matemática, adequada a alunos do 11° ou 12° anos, que deve ser realizada com o apoio de uma calculadora gráfica ou de um computador.

Escola ....

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)...

Um salto de *bumging jumping*

O João, saltador de *bumging jumping*, decidiu saltar de uma ponte, sobre um rio, com 300 metros de altura. Na tabela seguinte, registaram-se as alturas sucessivas a que o João estava do nível da água, medidas em intervalos de tempo.

tempo (segundos)	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,5	3
altura (centenas de metros)	2,5	2	1	0,62	0,55	0,9	1,19	0,89	0,81

1. Usando a calculadora gráfica, introduz os dados relativos às variáveis tempo e altura em duas listas estatísticas. Representa graficamente os dados, construindo a nuvem de pontos que associa as duas variáveis.

2. Observa o gráfico obtido e relaciona-o com outros gráficos de funções que já estudaste. Que tipo de função te faz lembrar?

3. Tenta descobrir uma função que descreva o movimento do saltador. Para isso, experimenta sobrepor gráficos de funções por ti definidas ao gráfico que obtiveste em 1), até encontrares aquela que melhor se ajusta aos pontos.

4. Utilizando agora a função que descobriste em 3), podes dizer a que distância do nível da água se estabilizou o movimento do saltador?

5. Elabora um pequeno relatório, descrevendo o movimento do João durante o salto.

Facilitando o ensino de volume através de quebra-cabeças geométricos

Ana Maria Kaleff

Através dos jogos, a criança tem oportunidade de entrar em contacto com aspectos da Matemática que irão contribuir para a formação de seu pensamento abstracto. A actividade lúdica cria a motivação para outras actividades matemáticas.

Apresentação

Em nosso artigo *Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais*, publicado na *Educação e Matemática nº 38*, mencionamos dificuldades apresentadas por estudantes secundários, universitários e professores de Matemática na visualização e interpretação de propriedades relativas aos conceitos de forma e de volume de um sólido geométrico. Dando continuidade à busca de recursos didácticos que tratem dessas dificuldades, elaboramos as actividades apresentadas a seguir, as quais podem ser aplicadas como introdutórias, alternativas ou intercaladas àquelas relatadas no artigo anterior.

Os jogos geométricos do tipo quebra-cabeças espaciais, aqui tratados, têm por objectivo fornecer ao aluno recursos que o levem a reconhecer, comparar, diferenciar, visualizar e relacionar algumas formas geométricas elementares e suas propriedades, facilitando o estudo de volume. Esses jogos são baseados nos cortes do cubo, do tetraedro e do octaedro regulares, podendo ser facilmente construídos com papel-cartão colorido ou com placas de acetato do tipo usado em chapas de raio-X.

Esses jogos têm sido aplicados em oficinas de Matemática realizadas com estudantes de 1º e 2º graus; alunos de graduação e professores de Matemática de 1º e 2º graus, em cursos de treinamento e de especialização.

Para utilizarmos esses quebra-cabeças com crianças pequenas, com cerca de oito anos de idade, confeccionamos previamente os jogos e, além desses, utilizando madeira, papel-cartão, plástico ou bloco de sabão, construímos modelos de um tetraedro e um octaedro regulares, de um cubo e de uma pirâmide regular de base quadrada. Então, mostrando à criança o modelo de um dos sólidos, pedimos que o reproduza fazendo uso das peças do jogo correspondente.

Observamos que as crianças constróem com facilidade os sólidos através da observação dos modelos; todavia, constatamos que, nesta faixa etária, elas têm grande dificuldade para interpretar desenhos e, portanto, evitamos apresentar-lhes planificações ou desenhos em perspectiva. Por outro lado, apesar dos jogos apresentarem diferentes níveis de complexidade, pois variam tanto em relação ao número, quanto em relação à forma das peças que os compõem, observamos que mesmo as crianças pequenas se divertem com essas construções.

Consideramos a vivência desse tipo de actividade, aparentemente lúdica, muito importante para a criança, que desde tenra idade vai formando, em sua mente, as imagens dos sólidos em questão e tomando consciência de suas formas. Todavia, nesta faixa etária (cerca dos oito anos), consideramos não ser muito importante que a criança saiba os nomes das figuras geométricas envolvidas, mas sim que estabeleça a identificação das suas formas. Por outro lado, como os jogos auxiliam o aluno a discriminar as partes nas quais os sólidos se constituem, favorecem o entendimento do conceito de fracção, possibilitando a avaliação das fracções correspondentes às partes do sólido. Os jogos ainda permitem que a criança inicie um processo de reconhecimento das relações entre as medidas das diferentes partes de um sólido, com vista ao estabelecimento do seu volume. Além disso, através dos jogos, a criança tem oportunidade de entrar em contacto com aspectos da Matemática que irão colaborar para a formação de seu pensamento abstracto, por meio de uma actividade lúdica que cria a motivação para outras actividades matemáticas.

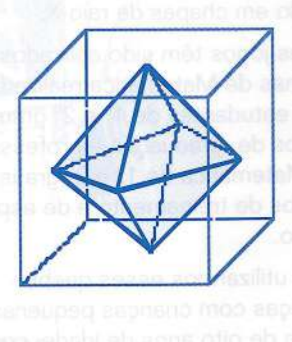
Para os alunos mais velhos, com cerca de onze anos de idade, a confecção das peças dos quebra-cabeças tem mostrado ser um interessante exercício que lhes proporciona oportunidade de desenvolver, não somente a habilidade manual, mas também a habilidade para interpretar os desenhos das planificações dessas peças. Para tal confecção solicitamos ao aluno que copie, sobre cartolina, papel-cartão ou acetato, as planificações necessárias para cada um dos jogos; em seguida, dobre as linhas, formando as faces da peça planificada e cole as abas desenhadas. Temos sempre lembrado ao aluno que as abas não fazem parte da planificação da peça, mas são partes importantes, as quais nos possibilitam obter a peça desejada com o material utilizado.

É importante notarmos que na construção de cada peça dos jogos, o aluno é levado a observar as formas geométricas desenhadas na planificação e a forma da peça construída; sendo, portanto, confrontado com uma representação plana e com uma representação espacial de uma mesma figura geométrica. Observações como estas ajudam a evitar que o aluno confunda o desenho de uma figura espacial com o de uma figura plana; como por exemplo, nos casos do tetraedro regular ser confundido com um triângulo e do octaedro regular ser confundido com um losango. Por outro lado, como as secções planas que dão origem às peças que compõem os jogos, são facilmente visualizadas, temos oportunidade de iniciar o aluno na visualização de cortes e de secções planas de uma maneira prazerosa, numa idade bem inferior (cerca de onze anos) à que habitualmente são introduzidos esses conteúdos na sala de aula (cerca de dezasseis anos). Além disso, a visualização dos cortes e a criatividade da criança podem ser conjuntamente incentivadas se a orientarmos para que crie e explore outros tipos de quebra-cabeças baseando-se nos sólidos conhecidos.

Alguns professores que trabalharam com esses jogos, constataram que alunos mais velhos e desinteressados pelas aulas de Matemática, são motivados para outras actividades matemáticas através dessas construções quando intercaladas com tarefas que envolvem construções dos esqueletos dos sólidos pela representação de suas arestas, como as que apresentamos na *Educação e Matemática nº 38*. No entanto, acreditamos que estudantes hábeis na visualização das figuras espaciais podem vir a ser desestimulados se forem obrigados a vivenciar muitas actividades de carácter manipulativo, cabendo ao professor a avaliação crítica da situação dos alunos e a elaboração de actividades desafiadoras alternativas para os mais habilidosos. De uma forma geral, é necessário que nos lembremos que, apesar da riqueza didáctica das actividades de carácter manipulativo-experimental indicadas para crianças e jovens, elas necessitam ser complementadas, em algum estágio da escolaridade, por actividades de carácter lógico-dedutivo, nas quais as propriedades geométricas, as relações algébricas e as correspondentes fórmulas geométricas serão desenvolvidas.

Por outro lado, nos cursos de treinamento que temos ministrado, constatamos que muitos universitários, futuros professores e até mesmo professores de Matemática de 1º e 2º graus apresentam um cepticismo alarmante quanto à utilidade do uso desse tipo de material concreto como ferramenta no processo do desenvolvimento da visualização (Kaleff, Garcia e Rei, 1996). Pois, apesar de um grande número de universitários e profissionais desconhecerem tais recursos para o ensino de volume e apresentarem dificuldades, tanto na manipulação desses materiais, quanto na elaboração dos conceitos geométricos envolvidos, alguns professores consideram esses meios didácticos como recursos infantis (p.137).

No que se segue, relacionamos alguns desses quebra-cabeças, indicando os seus objectivos e as peças que os compõem e acrescentando algumas observações de ordem prática sobre a sua confecção. Além disso, buscando motivar os colegas professores a se interessarem pela aplicação desses jogos em um nível de maior complexidade do que o das actividades mencionadas anteriormente, apresentamos dois problemas que envolvem poliedros duais. Consideramos dois poliedros como duais quando um está inscrito no outro, de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são os baricentros das faces do poliedro circunscrito. A figura 1a) indica o caso do cubo e de seu dual, o octaedro; enquanto que na 1b) estão representados dois tetraedros duais (veja *Educação e Matemática n º 38*).


a)

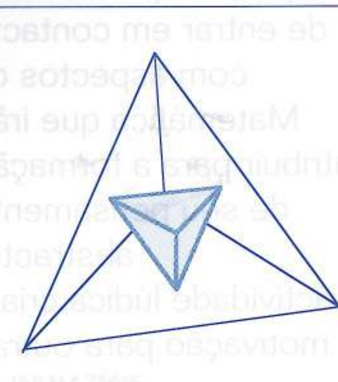

b)

Figura 1

Caracterização dos quebra-cabeças

Objectivos e composição

QUEBRA-CABEÇA Nº 1

Objectivo - Construção de uma pirâmide regular de base quadrada a partir de dois tetraedros não regulares.

Composição - Este jogo é formado por duas peças da mesma cor e confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 2.

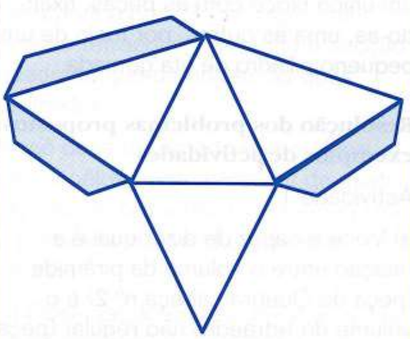


Figura 2

QUEBRA-CABEÇA Nº 2

Objectivo - Construção de um octaedro regular a partir de duas pirâmides regulares de base quadrada.

Composição - Este jogo é formado por duas peças da mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 3.

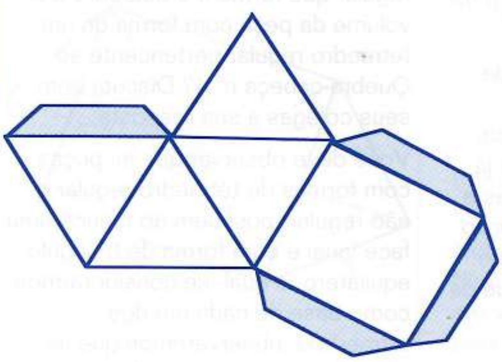


Figura 3

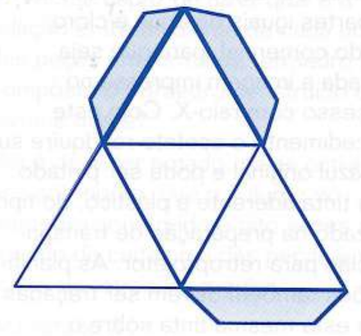


Figura 4

QUEBRA-CABEÇA Nº 3

Objectivo - Construção de um tetraedro regular a partir de quatro tetraedros regulares e de um octaedro.

Composição - Este jogo é formado por quatro peças da mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por uma, de outra cor, conforme a figura 5.

QUEBRA-CABEÇA Nº 4

Objectivo - Construção de um bloco poliédrico formado pela intersecção de dois tetraedros regulares, o qual, para facilitar a compreensão dos alunos, temos chamado de estrela de oito pontas (ver figura 6). Essa estrela é construída a partir de oito tetraedros regulares e de um octaedro, cujos lados medem a metade do comprimento do lado dos tetraedros que se interceptam para formá-la.

Composição - Este jogo é formado por nove peças, sendo quatro em uma cor e outras quatro em cor diferente, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por uma peça de outra cor das anteriores, conforme a planificação desenhada na figura 5.

QUEBRA-CABEÇA Nº 5

Objectivo - Construção de um cubo constituído por doze tetraedros não regulares e por uma estrela de oito pontas.

Composição - Este jogo é formado por oito peças de mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4; por uma peça de outra cor conforme a figura 5 e por

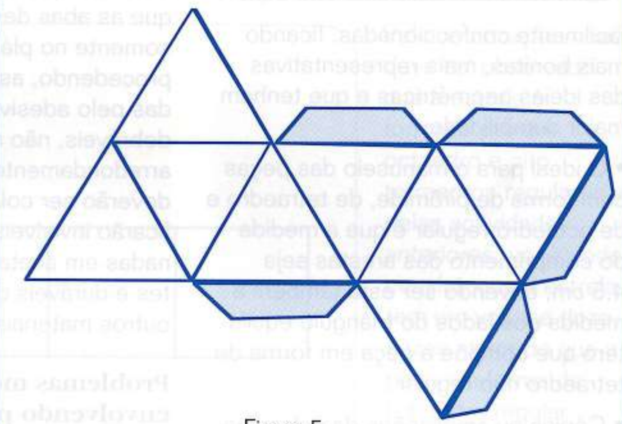


Figura 5

doze peças de cor diferente das anteriores, cuja planificação está desenhada na figura 2.

QUEBRA-CABEÇA Nº 6

Objectivo - Construção de um tetraedro regular a partir de onze tetraedros regulares e de quatro octaedros.

Composição - Este jogo é formado por onze peças de mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por quatro peças de uma outra cor e conforme a figura 5.

Observações sobre a confecção

Julgamos que algumas observações de ordem prática possam ser úteis aos leitores, a fim de que as peças dos quebra-cabeças possam ser mais

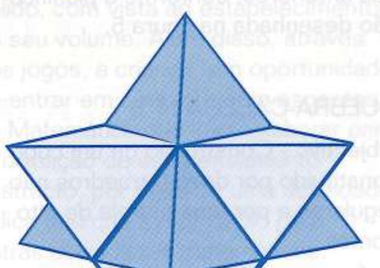


Figura 6

facilmente confeccionadas, ficando mais bonitas, mais representativas das ideias geométricas e que tenham maior durabilidade:

• O ideal para o manuseio das peças com forma de pirâmide, de tetraedro e de octaedro regular é que a medida do comprimento das arestas seja 4,5 cm, devendo ser esta também a medida dos lados do triângulo equilátero que compõe a peça em forma de tetraedro não regular.

• Cópias ou ampliações das planificações devem ser desenhadas no avesso do papel-cartão ou da cartolina e marcadas com a ponta de uma agulha ou estilete de metal, para que as arestas, quando dobradas, fiquem bem marcadas sem apresentarem arredondamentos. As abas devem ser coladas com cola ou fita gomada sob as faces.

• Peças de cartolina ou de papel-cartão têm maior durabilidade, quando recobertas por uma camada de cola plástica ou por uma camada de plástico adesivo.

• Nas épocas mais quentes do ano, não é aconselhável o uso da fita gomada na confecção das peças, pois a sua cola pode se desfazer com o calor. Porém, nas primeiras tentativas de confecção, permitimos aos alunos fazerem uso da fita devido à facilidade de manuseio.

• O acetato pode ser obtido de chapas usadas em raio-X, as quais deverão ser colocadas numa solução de partes iguais de água e cloro líquido comercial, para que seja retirada a imagem impressa no processo com raio-X. Com este procedimento o acetato readquire sua cor azul original e pode ser pintado com tinta aderente a plástico, do tipo utilizado na preparação de transparências para retroprojetor. As planificações também devem ser traçadas com esta mesma tinta sobre o acetato.

• As planificações, desenhadas sobre acetato, devem ter as faces recortadas e coladas, uma a uma, sobre a lâmina de plástico adesivo, enquanto que as abas devem ser cortadas somente no plástico. Assim se procedendo, as arestas serão formadas pelo adesivo sendo facilmente dobráveis, não apresentando arredondamentos e as abas, que deverão ser coladas sobre as faces, ficarão invisíveis. As peças confeccionadas em acetato são mais resistentes e duráveis do que as obtidas com outros materiais.

Problemas motivadores envolvendo poliedros duais

Estabelecimento dos problemas

Os problemas seguintes, envolvendo poliedros duais, têm se mostrado desafiadores para muitos professores com os quais temos trabalhado.

1º - Determinar a relação entre o volume de um cubo e o de seu octaedro dual.

2º - Determinar a relação entre o volume de um tetraedro regular e o de seu dual.

Todavia, através da manipulação de quebra-cabeças, tais problemas podem ser propostos a alunos, com cerca de treze anos de idade, que já vivenciaram a confecção das peças e as experiências triviais de construção dos sólidos, como as anteriormente descritas. Porém, é necessário que os enunciados desses problemas também sejam relacionados aos quebra-cabeças, como, por exemplo, na forma que se segue:

1º - Qual é a relação entre o volume da peça em forma de octaedro que faz parte do Quebra-cabeça nº 5 e o do cubo construído com todas as peças desse jogo?

2º - Qual é a relação entre o volume da peça em forma de tetraedro regular que faz parte do Quebra-cabeça nº 6 e o volume do tetraedro construído com todas as peças desse jogo?

A resolução de cada um desses problemas pode ser visualizada através de actividades com os quebra-cabeças, nas quais, para facilitar a manipulação dos sólidos construídos, aconselhamos aos alunos a formarem um único bloco com as peças, fixando-as, uma às outras, por meio de um pequeno cilindro de fita gomada.

Resolução dos problemas propostos: exemplos de actividades

Actividade 1

a) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume da pirâmide (peça do Quebra-cabeça nº 2) e o volume do tetraedro não regular (peça do Quebra-cabeça nº 1)?

b) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada um dos tetraedros não regulares que formam o octaedro e o volume desse octaedro?

Você deve ter notado, pela construção, que o volume do octaedro é quatro vezes o volume do tetraedro não regular.

c) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro não regular que formam o octaedro e o volume da peça com forma de um tetraedro regular pertencente ao Quebra-cabeça nº 4? Discuta com seus colegas a sua resposta.

Você deve observar que as peças com formas de tetraedro regular e não regular, possuem ao menos uma face igual e com forma de triângulo equilátero, a qual, se considerarmos como base de cada um dos tetraedros, observaremos que as alturas medidas a partir do vértice oposto à base, em cada um deles, têm a mesma medida. Desta forma as peças têm o mesmo volume.

Actividade 2

a) Construa um tetraedro regular com as peças do Quebra-cabeça nº 3.

b) Observe como são as faces do octaedro em relação às faces do tetraedro construído.

Você deve ter notado que cada face poderia ter sido formada pelo corte de um plano que passa por três arestas do tetraedro e que é paralelo a uma de suas faces.

c) Agora, substitua o octaedro pelas pirâmides do Quebra-cabeça nº 2. Descreva a posição do plano que corta o tetraedro, formando a secção quadrada que dá origem às duas pirâmides.

Você deve ter notado que o plano passa pêlos pontos médios de quatro arestas do tetraedro e que este plano é paralelo a outras duas de suas arestas.

d) Observando esse corte que divide o octaedro em duas pirâmides, você é capaz de construir um outro quebra-cabeça para o tetraedro e que seja formado por somente duas peças? E por quatro peças? E por seis?

Você deve ter notado que poderá construir o tetraedro com duas peças com a forma apresentada na figura 7; se dividi-las ao meio obterá quatro peças; por outro lado, cada uma dessas peças pode ser formada por uma pirâmide e por dois tetraedros regulares.

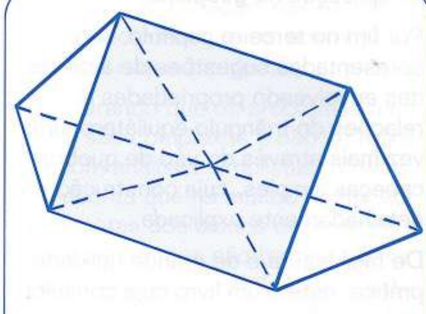


Figura 7

e) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem o tetraedro construído e o volume deste?

Você deve ter notado, pelas actividades anteriores, que o volume do tetraedro construído é oito vezes o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro regular.

Actividade 3

a) Usando acetato, construa uma caixa em forma de cubo com 7 cm de lado, conforme a planificação indicada na figura 8 e de maneira que fique com uma tampa aberta.

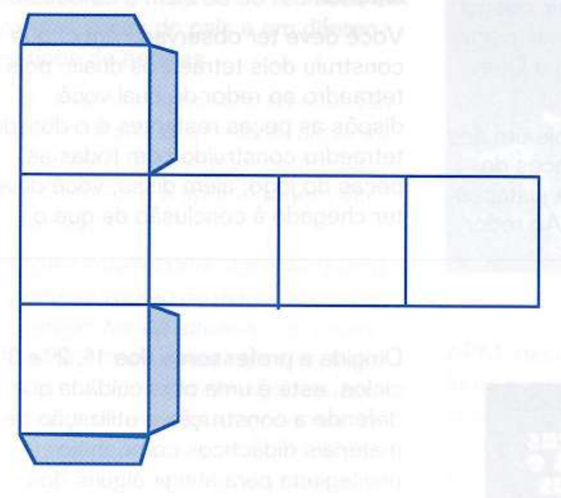


Figura 8

b) Construa um tetraedro regular com as peças do Quebra-cabeça nº 3, fixando-as por meio de fita adesiva.

c) Coloque o tetraedro formado dentro do cubo de acetato, de maneira que seus quatro vértices se encontrem com quatro vértices do cubo.

d) Observe como são as faces do tetraedro em relação às faces do cubo.

Note que as faces poderiam ter sido formadas pelo corte de um plano que passa por um dos vértices do cubo e pela diagonal de uma das faces.

e) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem o tetraedro colocado dentro do cubo e o volume deste? Se você ainda não consegue responder a esta questão, realize a actividade a seguir.

Actividade 4

a) Construa um cubo como na actividade anterior.

b) Construa uma estrela de oito pontas com as peças do Quebra-cabeça nº 4, fixando as peças através de fita adesiva.

c) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem a estrela e o seu volume?

Pela construção, você deve ter observado que a estrela é formada por um octaedro e oito tetraedros regulares e, pelas actividades anteriores, você pode concluir que a estrela tem um volume doze vezes maior do que a peça em forma de tetraedro regular.

c) Coloque a estrela dentro do cubo de acetato, de forma a que seus vértices se encontrem com os vértices do cubo. Você é capaz de dizer que forma de peças deveríamos ter para completar a estrela e obtermos o cubo?

d) Qual é a relação entre o volume de cada um dos tetraedros não regulares que formam o octaedro colocado no centro da estrela e o volume de cada um dos tetraedros que formam a estrela?

e) Qual é a relação entre o volume da peça em forma de octaedro que faz parte desse jogo e o volume do cubo construído com todas as suas peças?

f) Qual é a relação entre o volume do octaedro dual e o volume do cubo?

Você deve ter observado que, para completar a estrela e obtermos o cubo, são necessárias doze peças iguais ao tetraedro não regular do Quebra-cabeça nº 1, cujo volume é igual ao do tetraedro regular. Assim, o volume do cubo é igual ao volume de vinte tetraedros regulares, mais o volume do octaedro, o qual, por sua vez, é igual a quatro volumes do tetraedro não regular. Desta forma, o volume do cubo é vinte e quatro vezes o volume do tetraedro e, portanto, a relação entre o volume do octaedro dual e o volume do cubo é 4/24 = 1/6.

Actividade 5

a) Considere as peças do Quebra-cabeça nº 6.

b) Construa um tetraedro regular utilizando um octaedro e mais quatro tetraedros. Observe que essas peças são as mesmas que formam o Quebra-cabeça nº 3.

c) Utilizando fita gomada, cole um dos tetraedros sobre uma das faces do octaedro, na qual não esteja justaposto nenhum outro tetraedro. Ao redor deste tetraedro, justaponha as demais peças restantes de maneira a formar um tetraedro regular cujo lado seja três vezes maior do que o lado da peça em forma de tetraedro regular, que você colou numa das faces do octaedro.

d) Qual é a relação entre o volume da peça em forma de tetraedro regular e o volume do tetraedro construído com todas as peças desse jogo?

e) Analisando as relações entre os volumes das peças que compõem o tetraedro construído, você consegue determinar as relações entre os volumes dos dois tetraedros duais? Se você não consegue responder a esta questão refaça a actividade anterior.

Você deve ter observado em c) que construiu dois tetraedros duais, pois o tetraedro ao redor do qual você dispôs as peças restantes é o dual do tetraedro construído com todas as peças do jogo; além disso, você deve ter chegado à conclusão de que o volume do tetraedro dual é 1/27 do volume do tetraedro construído com todas as peças.

Bibliografia

Kaleff, A.M. e Rei, D.M. (1996). Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais, *Educação e Matemática*, nº 38, pp. 6-11.

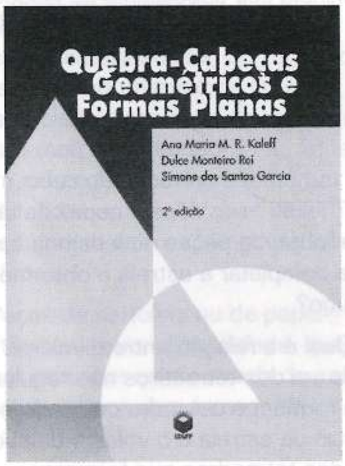
Kaleff, A.M. e Rei, D.M. (1996). Jogos geométricos e formas espaciais, *Revista do Professor de Matemática*, nº 31, pp. 25-31.

Kaleff, A.M., Garcia, S.S. e Rei, D.M. (1996). *Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos*, Zetetiké, Faculdade de Educação, UNICAMP, nº 6, pp.135-152.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, nº 3, pp. 3-13.

Ana Maria Kaleff
Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro

Recensão



Quebra-cabeças geométricos e formas planas, de Ana Maria Kaleff, Dulce Monteiro Rei e Simone dos Santos Garcia, é o primeiro volume sobre geometria da série Conversando com o Professor, editada recentemente (1997) pela Universidade Federal Fluminense - Brasil.

Dirigida a professores dos 1º, 2º e 3º ciclos, esta é uma obra cuidada que defende a construção e utilização de materiais didácticos como meio privilegiado para atingir alguns dos objectivos do ensino da geometria, apelando à relação entre as formas geométricas e o mundo, e assente numa forte componente lúdica.

O livro é constituído por três capítulos. O primeiro tem por objectivo mostrar de que forma a utilização de quebra-cabeças planos, de fácil construção, pode ter um importante papel na aprendizagem da geometria, nomeadamente, na identificação, reconhecimento e comparação de formas e distâncias, na visualização e análise de figuras, na formulação de conjecturas sobre relações entre figuras planas, partindo da observação de movimentos realizados no plano e, ainda, na compreensão do conceito de área de uma figura plana.

No segundo capítulo as autoras defendem uma abordagem intuitiva do Teorema de Pitágoras, também através da utilização de quebra-cabeças, de modo a que, partindo da exploração de propriedades e relações geométricas em figuras variadas, os alunos possam estabelecer a fórmula relacionada com o referido teorema. Numa fase posterior são apresentadas actividades que permitem acompanhar uma demonstração do Teorema de Pitágoras e são sugeridas algumas actividades de aplicação no geoplano.

Por fim no terceiro capítulo, são apresentadas sugestões de actividades envolvendo propriedades e relações do triângulo equilátero, uma vez mais através do uso de quebra-cabeças simples, cuja construção é detalhadamente explicada.

De fácil leitura e de grande utilidade prática, este é um livro cuja consulta se recomenda.

Fernanda Perez
Esc. Sec. de Amora

Matemática 2001
um relatório para discutir e melhorar!

O relatório preliminar do projecto *Matemática 2001*, já distribuído aos sócios da APM para discussão, representa um esforço da Associação no sentido de contribuir para a compreensão dos principais problemas que afectam o ensino e aprendizagem da nossa disciplina e para a identificação de propostas adequadas de resolução desses problemas. Ao longo dos dois últimos anos, o grupo de trabalho criado em Março de 1996 identificou e discutiu problemas, recolheu e analisou dados — em especial, junto dos professores e das escolas — e, com base nesse trabalho, elaborou o presente relatório.

Na apresentação do relatório pode ler-se:

> *Há dez anos, quando a Associação de Professores de Matemática (APM) foi criada, os seus fundadores invocaram a necessidade de uma profunda renovação da Matemática escolar, a par de uma maior intervenção dos professores nessa renovação. (...) De então para cá, muitas coisas mudaram... [mas] hoje reconhece-se que a mudança que se verificou no início dos anos 90 foi substancial em termos de orientações curriculares mas não foi acompanhada por um movimento adequado de formação de professores, nem pela criação, nas escolas, das condições que os novos programas requerem.* (p. 2)

Considerando que os problemas a enfrentar são complexos e não se resolvem com análises simplistas, o relatório aponta que há muitos dados sobre as notas dos alunos em exames e outros testes mas não tem havido estudos, à escala nacional, sobre "aquilo que realmente se passa dentro dos muros das escolas e das paredes das salas de aula, em particular, o modo como os professores interpretam e procuram concretizar o currículo, assim como as condições e a formação de que dispõem para o fazer".

Foi precisamente nos domínios das práticas dos professores, das condições de trabalho e da formação que se centrou o *Matemática 2001*. Como principais instrumentos de recolha de informação, foram utilizados um inquérito de âmbito nacional aos professores e mais de 30 reuniões em diversas zonas do país e em diferentes tipos de escolas.

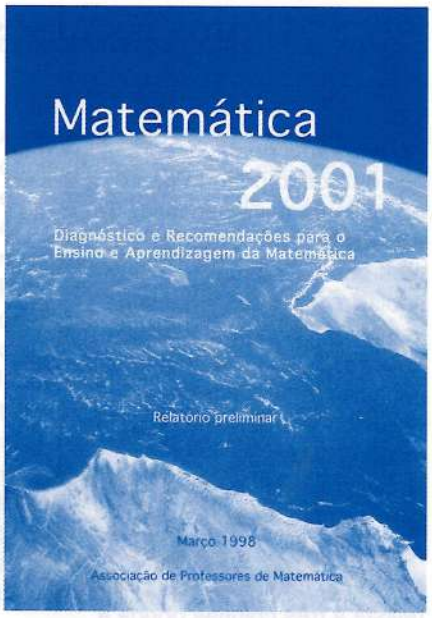
Para além do diagnóstico da situação actual, o relatório apresenta algumas sugestões que procuram contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática:

> *O presente relatório apresenta uma primeira versão do diagnóstico que o grupo faz da situação do ensino da Matemática, nos aspectos tratados (...). Inclui ainda algumas propostas de recomendações nos diversos domínios que visam melhorar o ensino e a apredizagem da nossa disciplina e que se destinam, conforme os casos, aos professores, às escolas e territórios educativos, às instituições de formação e às autoridades educativas.* (p. 4)

O relatório está dividido em sete pontos:

1. Contexto e caracterização
2. Concepções e perspectivas dos professores
3. Práticas lectivas na sala de aula
4. Práticas lectivas extra-aula
5. Práticas profissionais
6. Condições de trabalho
7. Formação de professores

Este documento destina-se, na actual fase, a ser amplamente discutido. A



APM, designadamente através dos seus núcleos regionais, promove em Abril e Maio numerosas reuniões para este efeito em diversas zonas do país. Para além disso, todas as contribuições para melhorar o relatório — completar, alterar ou clarificar aspectos do diagnóstico ou das recomendações — serão benvindas e constituirão uma base de trabalho para a elaboração da versão final, uma tarefa que o grupo levará a cabo na segunda metade de 1998.

Este processo de discussão é importante. A apresentação do relatório termina justamente salientando que "estimular a reflexão e o debate entre os professores de Matemática a respeito dos principais problemas que se colocam hoje ao ensino e à aprendizagem da nossa disciplina" constitui, afinal, a grande razão de ser deste trabalho.

Paulo Abrantes
coordenador do grupo de trabalho
Matemática 2001

Tecnologias na educação matemática

Alguns recursos para o ensino de estatística na Internet

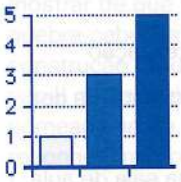
No programa do secundário sugere-se que o terceiro período do 10º ano seja ocupado com a estatística. Tal como noutras áreas, existem abundantes recursos na Internet que permitem apoiar o ensino de estatística. Resolvemos apresentar aos leitores de *Educação e Matemática* algumas das páginas que encontrámos, numa viagem breve pelo mundo da estatística educativa na WWW. Trata-se apenas de sugestões abrindo caminho para outras pesquisas.

Nota. Como os endereços por vezes são muito extensos, e a paginação da revista a três colunas obriga a hifenizações enganadoras, serão apenas referenciados numericamente e listados no fim do texto.

O Math Forum apresenta uma lista do que considera os *melhores* materiais para o ensino de estatística nos ensinos básico e secundário (1). Nela estão incluídas duas lições sobre o desvio padrão ((2) e (3)), da autoria de Barbara Christopher, professora numa escola secundária no Texas. Os dados utilizados nas lições — neste caso temperaturas médias mensais em duas cidades — são obtidos pelos alunos por pesquisa na Internet. Os alunos tentam responder a questões como: "Em qual das cidades, S. Diego ou S. Francisco, a temperatura varia menos?" ou "Cidades próximas do mar têm menores variações de temperatura?"

De um professor do Community College no Hawai recolhemos uma proposta de actividade (4) sobre a questão do uso ou não uso de capacetes quando se anda de bicicleta. A questão que o professor Lopaka colocou aos seus alunos foi a seguinte: "Deverá o uso de um capacete ser requerido por lei aos ciclistas ou isso violaria as liberdades individuais? Como estudante de direito deves analisar esta questão legal e defender a tua posição no tribunal. Para fundamentar o teu ponto de vista em dados relevantes decides fazer uma análise estatística da segurança proporcionada pelos capacetes."

O NCTM e a American Statistical Association criaram uma comissão para estudar e fazer propostas sobre o currículo de estatística nos ensinos básico e secundário. Lançaram um boletim, que sai três vezes por ano, denominado *Statistics Teacher Network* (5). O presente número inclui um artigo sobre as capacidades estatísticas da TI-83, outro sobre estatística no primeiro ano do básico e duas recensões de livros de estatística.



Muitas ideias e recursos podem ver-se nas páginas (6) de um projecto conjunto do NCTM e do Distrito Escolar de Filadélfia. Com o título genérico de *Exploring Data*, encontramos exemplos de aulas, pequenos cursos, "oceanos de dados" para explorar, etc. Não deixe de visitar estas páginas, pois encontrará aí, certamente, alguma inspiração.

Quando se aproximam vários referendos, e quando iremos ser bombardeados com sondagens, porque não aproveitar para discutir matematicamente as notícias que vão saindo nos jornais? Se quiser inspiração para tais tipos de actividades, visite o acompanhamento pelos *media* de uma eleição fictícia de um autarca e das questões que essas notícias levantam (7). Estas páginas têm por origem uma fundação americana — Annenberg/ CPB — para o desenvolvimento do uso da televisão, e das telecomunicações em geral, na educação.

Este *site* vinha anunciado na última *newsletter* do Math Forum. Se quiser estar a par do que de novo vai aparecendo no Math Forum, envie um e-mail para

majordomo@forum.swarthmore.edu

dizendo apenas: subscribe newsletter.

Com a colaboração de
Paula Teixeira

(1) http://forum.swarthmore.edu/probstat/probstat.units.html
(2) http://www.crpc.rice.edu/CRPC/GT/bchristo/lessons/StanDev1.html
(3) http://www.crpc.rice.edu/CRPC/GT/bchristo/lessons/StanDev2.html
(4) http://gauss.hawcc.hawaii.edu/maths/bicycle.html
(5) http://www.amstat.org/education/STN/
(6) http://forum.swarthmore.edu/workshops/usi/dataproject/
(7) http://www.learner.org/exhibits/statistics/

Entrevista breve por e-mail a Branca Silveira

O que faz um Centro de Competência Nónio?

Branca Silveira é professora de Matemática e este ano está destacada no Centro de Competência da Escola Superior de Biotecnologia da Universidade Católica. Grande entusiasta desde há muitos anos da utilização das tecnologias (calculadoras e computadores) na educação matemática, é natural que tenha sido chamada a colaborar nesta fase inicial de lançamento do novo projecto do Ministério da Educação. Quisemos perceber como estão a arrancar os Centros de Competência, uma estrutura fundamental do Nónio, e enviámos-lhe algumas mensagens em correio electrónico a que a Branca, amavelmente, respondeu.

TEM. Que fazem os professores destacados nos Centros de Competência? Quais foram as primeiras actividades do Centro? Quais são os objectivos principais?

BS. Os professores destacados são o elo de ligação entre as escolas e o Centro. Cabe-nos, de um modo geral, fazer o acompanhamento dos projectos das escolas. As escolas para apresentarem as suas candidaturas tinham de ser acompanhadas por um Centro de Competência, para isso escolheram aquele cujo projecto mais se identificava com as suas necessidades. Assim, aqui no Centro, a primeira actividade foi ajudar as escolas a elaborarem os seus projectos para o concurso. De um modo geral espera-se de um centro de competência o apoio no desenvolvimento de projectos no âmbito das TIC na educação e a criação de uma dinâmica de investigação e reflexão nas áreas das TIC na educação.

Este Centro tem alguns objectivos específicos, como sejam:

1. Internet em Educação
2. Utilização de *Software* Educacional
3. Divulgação Científica e Tecnológica
4. Dinamização da Interface Universidades/Escolas Básicas e Secundárias

Os projectos a apoiar são de carácter genérico e de carácter específico.

Projectos com carácter genérico:

1. Criação e dinamização de redes inter e intra-escolas.
2. Disponibilização do acesso via Internet aos recursos bibliográficos da ESB-UCP
3. Desenvolvimento de *Software* Educacional Multimédia
4. Promoção e organização de eventos nacionais, em domínios de aplicação das TIC's em Educação.

Projectos com carácter específico:

1. Jornal electrónico
2. Criação de páginas das escolas na *Web*.
3. Informatização de bibliotecas.
4. Atribuição de endereços de correio electrónico a alunos e professores.
5. Desenvolvimento e instalação de sistemas de monitorização de experiências laboratoriais.

TEM. Vejo que têm um programa ambicioso... Decorridos alguns meses de trabalho, julgo que interessaria aos nossos leitores conhecer um pouco que linhas da vossa acção estão a progredir melhor, quais são as maiores dificuldades que tens encontrado e como te parece que podem ser removidas.

BS. Estes meses de trabalho têm tido, como tudo, altos e baixos. No início do ano lectivo, fizemos algumas reuniões com as escolas. Uma, geral, com os coordenadores dos projectos para esclarecer alguns pontos de futura actuação do Centro, para além das boas-vindas, é claro. Fizemos outras, só com uma escola de cada vez, para voltar a olhar para o projecto e tentar estabelecer as suas linhas prioritárias, uma vez que os financiamentos atribuídos foram extremamente reduzidos relativamente ao solicitado.

Até ao final de Dezembro as escolas andaram muito ocupadas na compra de material, para satisfazerem a burocracia inevitável, e algumas pediram a nossa ajuda, principalmente para contactos e indicações sobre a instalação da rede.

A partir de Janeiro, as escolas começaram a trabalhar nas acções educativas, previstas no seu projecto e, para tal, começaram a solicitar a nossa ajuda para "Navegação/ Pesquisa na Internet", "Construção de Páginas", "Jornal Electrónico" e criação de bases de dados para os laboratórios das Ciências Experimentais. Para já, temos vindo a realizar aqui, nas instalações do Centro, *workshops* sobre os dois primeiros temas com os grupos das escolas que os vão tratar, e temos feito algumas reuniões de preparação com os outros grupos de trabalho.

A ideia base de funcionamento do Centro é fomentar a criação e a responsabilização de grupos de trabalho nas escolas, para cada tema do projecto. O Centro tenta apoiar esse trabalho, que é fundamentalmente desses grupos.

Como vês, estamos no arranque e, para já, tem corrido normalmente. Para mim, o principal problema é o facto do Centro funcionar um pouco como um prestador de serviços, e como tal, tudo tem de ser contabilizado. Acho que esta situação criada pelas regras do Programa, está, e vai continuar com certeza, a limitar a nossa actuação.

TEM. Passando agora à Matemática, gostaria que focasses dois aspectos. Por um lado, era importante saber o que estão a fazer os professores de Matemática com os computadores, agora que o Ministério da Educação está a dar apoio através do Nónio. Existem projectos nas escolas? Que programas estão a ser utilizados? Como está a ser cumprida a obrigatoriedade, explícita no programa do secundário, de utilização de computadores? Outro grupo de questões refere-se à utilização da Internet no que se refere à Matemática. Os professores mostram-se interessados por esse aspecto, ou simplesmente ignoram-no? O Investiga & Partilha da APM, do Fórum Pedro Nunes, tem despertado a atenção dos alunos ou dos professores? Achas que os professores lêem esta secção das Tecnologias da Revista? Serve para alguma coisa? Como podia servir para mais?

BS. As escolas ligadas a este Centro têm os projectos mais ligados às áreas das Ciências do Ambiente, embora algumas (duas EB 2,3 e duas Secundárias) tenham incluído no seu projecto alguma coisa na área da Matemática. O meu destacamento aqui é de carácter geral e não propriamente ligado à Matemática, por isso as respostas que eu poderei dar baseiam-se apenas nos contactos informais que mantenho com os colegas.

Assim, parece-me que, de um modo geral, não há projectos específicos nas escolas que envolvam os computadores nesta área. Penso que as calculadoras foram aceites como obrigatórias mas os computadores não. Também não me parece que seja um programa com as características do Nónio que vá resolver o problema. Pode dar uma ajuda, mas para isso tudo vai depender da dinâmica da escola e do modo como integra essa faceta no seu projecto geral. De qualquer modo as escolas estão, posso dizer que de um modo geral, extremamente preocupadas com a questão do laboratório de Matemática, mas as preocupações para já, parecem-me ser: onde arranjar uma sala, onde ir buscar dinheiro (o Nónio não financia, creio, projectos puramente disciplinares). O laboratório de Matemática aparece apenas no projecto de uma das nossas escolas e um pouco diluído num projecto mais amplo.

Nas escolas ligadas ao Centro que incluem no seu projecto alguma coisa da nossa área, o pouco que aparece prende-se mais com a elaboração de fichas de trabalho de apoio à utilização de determinado *software* e referem como programas a adquirir e a utilizar, o *Cabri II*, o *Sketchpad*, o *Modellus*, o *Derive*, o *Graphmatica* e a folha de cálculo.

Quanto à Internet o problema é mais complicado. A Internet está em todas as escolas, embora nem sempre seja muito pacífico o acesso a ela. Toda a gente fala nas potencialidades da Internet mas pouca gente sabe quais são e o que fazer com elas em termos educativos. É um dos interesses mais comuns dos professores de Matemática e não só. Essa é uma das preocupações do Centro, a que vamos tentar dar alguma resposta.

Noto com alguma preocupação que, mais uma vez e agora sobre este assunto, muitos professores se limitam a esperar as "receitas".

Quanto ao Investiga & Partilha, logo no início mandei para as nossas escolas a informação, o endereço e um pedido de colaboração, mas não tenho nenhuma informação especial, nem ouço os professores falarem muito sobre isso. Tenho feito a publicidade possível mas francamente não sei o que se passa.

Por conversas tidas com alguns colegas parece-me que a secção das tecnologias é lida como qualquer outra, com agrado porque tem tido, até agora, uma forma simples, sem grandes teorias, com sugestões muito práticas e informações pertinentes que é, sem dúvida, o que os professores procuram. E, já agora, o Consultório ultimamente iniciado parece-me uma boa ideia, embora me pareça que as perguntas a colocar na revista devam ser apenas as de carácter mais geral. Porque não, colocar na página da APM uma secção de FAQ (*Frequent Asked Questions*)? ■

Software through Pictures

A nossa colega e sócia da APM, Ângela Couto, professora na ESE do Porto, enviou-nos um artigo sobre o *Software through Pictures*, no apoio ao desenvolvimento de programas educativos.

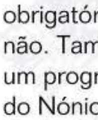
A colega Ângela defendeu uma Tese de Mestrado nesta área, intitulada "Estudo da Adequação do Software da IDE (*Software through Pictures*) para Apoio ao Desenvolvimento de Programas Educativos".

Partindo do princípio que "a existência de ferramentas para o desenvolvimento de *software* é um factor essencial para a criação de programas educativos de qualidade" e que, "para que o professor seja capaz de construir o seu próprio *software* educativo, não sendo este, na maioria dos casos, um técnico informático mas sim um tecnologista educativo, terá de se servir da ferramenta que melhor se adapte ao desenvolvimento desse *software*", o estudo realizado apresenta uma avaliação pormenorizada de uma das várias ferramentas disponíveis no mercado, o *Software through Pictures*, para o apoio ao desenvolvimento de programas educativos.

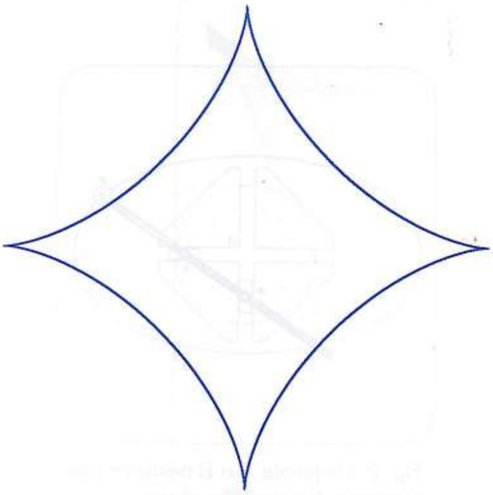
Os interessados poderão consultar a tese referida, na biblioteca da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra ou na biblioteca da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto.

O *Software through Pictures* é uma marca registada dos *Interactive Development Environments, Inc.*. e está disponível no Laboratório de Informática e Sistemas da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Notícias breves/Rectificação



Devido a um erro nas páginas do Nónio, não esclarecemos na nossa última edição que o trabalho que ganhou um primeiro prémio no concurso do Nónio foi da autoria conjunta de Margarida Junqueira e Sérgio Valente, e não apenas daquela nossa colega. Aqui fazemos com muito gosto a rectificação, que já tencionávamos fazer, mas que corresponde também a um pedido por escrito da nossa colega. Aos dois colegas pedimos desculpas pelo acontecido.



A astróide[1]

Anabela Torres, João Paulo Afonso e Sandra Afonso

A astróide foi descoberta por Roemer, em 1674, durante a sua pesquisa acerca das rodas dentadas. Jean Bernoulli (1667-1748) estudou a mesma curva, tendo obtido uma equação, a sua forma e o seu comprimento. Ao longo dos tempos, esta curva tem sido conhecida por várias designações, como por exemplo cubociclóide, paraciclo, curva de quatro reversões, etc. Em 1838 adquiriu o presente nome, que lhe foi atribuído por Littrow.

Descrição e métodos de construção da curva

1. *A astróide como envolvente de segmentos de recta*

A astróide é a envolvente (ver Glossário no fim do artigo) de uma família de segmentos de recta de comprimento constante (PQ, P_1Q_1,...) com extremidades sobre os lados OA e OB de um ângulo recto (fig. 1).

Um mecanismo que nos permite obter esta construção da curva é o Trammel de Archimedes, que pode também ser utilizado para gerar elipses (fig. 2).

2. *A astróide como hipociclóide*

A astróide é uma *roulette* que se obtém marcando a trajectória de um ponto fixo numa circunferência que rola sem deslizar no interior de uma circunferência base. Assim, a astróide é uma hipociclóide.

A circunferência base tem raio r e a circunferência que rola sem escorregar no seu interior pode ter raio $\frac{r}{4}$ ou $\frac{3}{4}r$ (fig. 3).

A astróide tem quatro pontos de reversão.

3. *Astróide como envolvente de elipses*

Se no mesmo sistema de eixos do caso 1, traçarmos elipses com os eixos sobre as rectas OA e OB e com a soma dos semi-eixos igual a OA, a mesma astróide é também a envolvente dessas elipses (fig. 4).

4. *Astróide como envolvente de semirectas*

Pode também obter-se uma astróide considerando uma circunferência de centro na origem de um referencial, que intersecta o eixo das abcissas em D e D', sobre a qual se marcam pontos em intervalos de 5°, com início em D. De forma análoga marcam-se pontos com início em D' em intervalos de 15° (fig. 5). O procedimento prolonga-se para os outros quadrantes.

Em seguida unem-se, por semirectas com origem nos pontos espaçados de 15°, os pontos de igual referência. A astróide surge como envolvente destas semirectas (fig. 6).

5. *Astróide como lugar geométrico — (um outro modo de obter a hipociclóide)*

Seja dada uma circunferência de raio a, seja I um ponto sobre ela, e $[OQRI]$ o rectângulo construído a partir do ponto I e indicado na figura 7. Seja M o ponto de intersecção das diagonais deste rectângulo e consideremos a circunferência de diâmetro $[MI]$.

Esta circunferência tem dois pontos de intersecção com $[QR]$, M e um outro ponto P. Como a circunferência de diâmetro $[MI]$ tem um raio igual a $a/4$, P descreve a astróide quando I percorre a circunferência inicial.

Equações da astróide e outros resultados da análise

A partir da primeira definição que demos de astróide, como envolvente de segmentos,é possível deduzir a equação cartesiana da astróide (ver por exemplo a obra de Gomes Teixeira indicada na bibliografia). Para obter a equação tomamos as rectas OA e OB como eixos coordenados e l como comprimento do segmento $[PQ]$. Chegamos à equação

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

A expressão da área da astróide, que como dissemos foi determinada por Bernoulli (tal como a do comprimento, que referiremos em seguida), é

$$\frac{3}{8}\pi l^2.$$

O comprimento de um arco de astróide, compreendido entre os

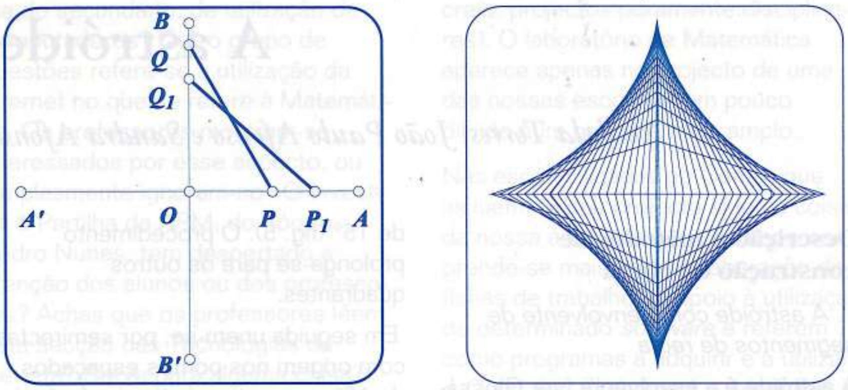


Fig. 1. A curva completa aparece como envolvente quando os pontos P e Q podem deslocar-se livremente sobre as rectas OA e OB.

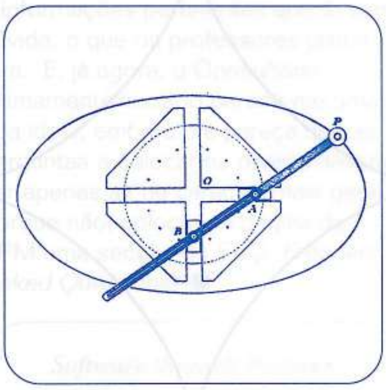


Fig. 2. Os pivots A e B deslizam nas ranhuras. P traça uma elipse.

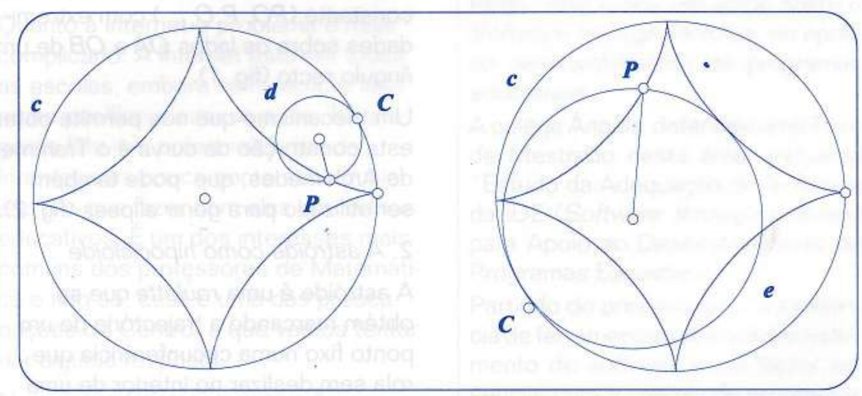


Fig. 3

pontos de abcissa 0 e x_0, é dado por

$$\frac{3}{2}\left(lx_0^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Resulta facilmente que o comprimento do arco compreendido entre dois pontos de reversão é $3l/2$.

Para obtermos as equações paramétricas da astróide partimos da fig. 7. No rectângulo $[OQIR]$,

$\overline{OI} = \overline{QR} = a$, $\overline{RI} = a\cos t$,

$\overline{RP} = \overline{RI}\cos t = a\cos^2 t$ e

$\overline{RP}\cos t = a\cos^3 t$.

Da mesma forma, $\overline{QP}sent = asen^3 t$.

As equações paramétricas são então

$$x = a\cos^3 t$$

$$y = asen^3 t.$$

Relações com outras curvas

Existem muitas relações entre as curvas planas especiais, de que a astróide é apenas um dos exemplos. Algumas das relações da astróide com outras curvas, mostram-se na página 27.

Para isso recorreremos ao *Sketchpad* (fig. 8 e 10) e à Internet (fig. 9), onde existem locais onde pode ser encontrada informação sobre a astróide (por exemplo, os *sites* cujos endereços são indicados na bibliografia).

Nesses locais podemos encontrar, relativamente a cada curva, os vários tipos de definição, e figuras com as diferentes curvas e as suas relações.

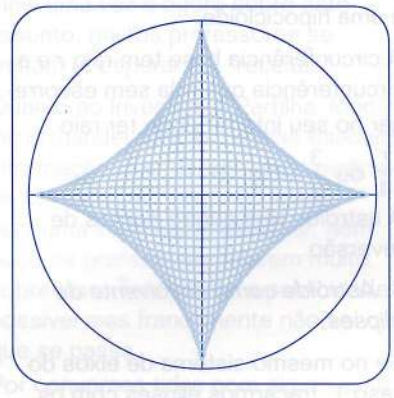


Fig. 4

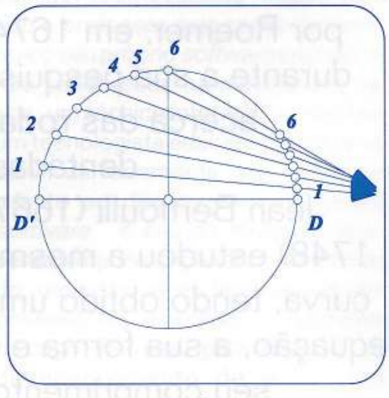


Fig. 5

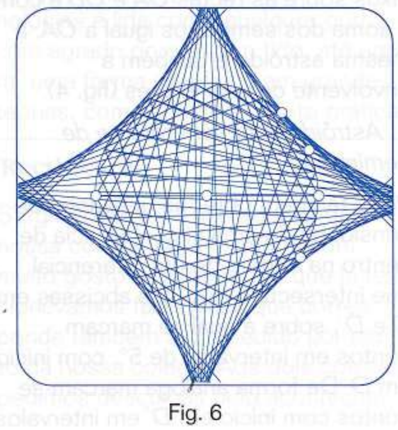


Fig. 6

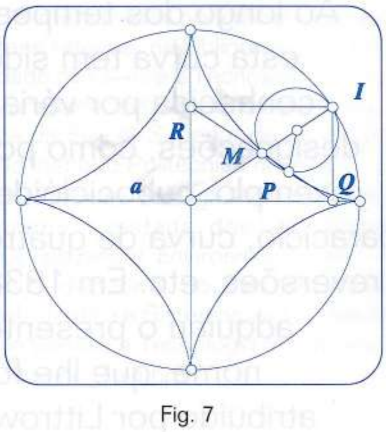


Fig. 7

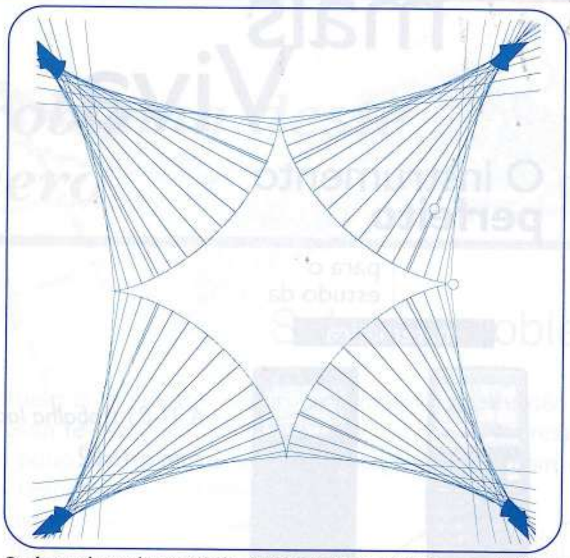


Fig. 8. A evoluta da astróide é uma nova astróide, aqui visionada como envolvente de (semirectas) normais à astróide.

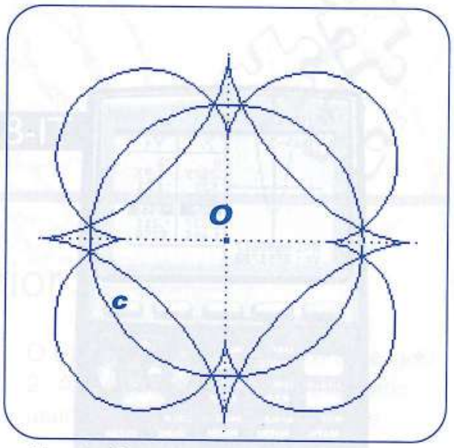


Fig. 9. Curva inversa da astróide em relação à circunferência c, de centro O.

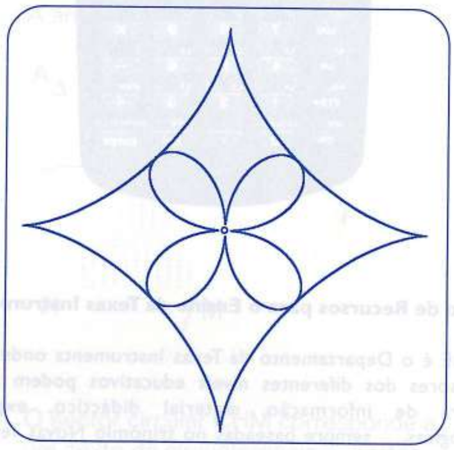


Fig. 10. Quadrifólio, curva pedal da astróide em relação ao centro.

Bibliografia

Em papel:

Lockwood, E. H..*A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Piskounov, *Cálculo Diferencial e Integral*. Vol. I. Lisboa: Lopes da Silva Editora, 1972.

Teixeira, F. G. *Obras sobre Matemática*, vol. IV, tomo I. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 1908

On-line:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Nota

1. Síntese de um trabalho realizado em Dezembro de 1997 no âmbito da acção de formação "Inovação no Ensino da Geometria" (DE/FCUL).

Anabela Torres
João Paulo Afonso
Sandra Afonso
Esc. Sec. de Mafra

Glossário

Centro de curvatura - Se *s* for uma curva, *P* e *Q* dois pontos de *S*, *p* e *q* as normais a *s* em *P* e *Q*, e *T* a sua intersecção, o ponto limite *C* para que tende *T* quando *Q* tende para *P* diz-se *centro de curvatura* de *s* no ponto *P*.

Curvas cáusticas - Quando raios de luz são reflectidos por uma curva a envolvente dos raios reflectidos é uma cáustica por reflexão ou *catacáustica*. Quando raios de luz são refractados por uma curva a envolvente dos raios refractados é uma cáustica por refracção ou *diacáustica*.

Curva inversa - Dada uma circunferência *c* de centro *O* e raio *r*, e um ponto $P \neq O$, o ponto *P'* diz-se inverso de *P* relativamente a *c* se pertencer à semi-recta *OP* e se $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$. Quando *P* descreve uma curva *s*, *P'* descreve *s'*, *curva inversa* de *s* relativamente a *c*.

Curva pedal - Sejam dados uma curva *s* e um ponto fixo *O* (chamado *ponto pedal*). Para cada tangente *t* à curva *s*, consideremos o ponto *P*, intersecção de *t* com a perpendicular a *t* passando por *O*. O lugar geométrico dos pontos *P* diz-se *curva pedal* de *s* relativamente ao ponto *O*.

Envolvente - Dada uma família de curvas *F*, uma curva tangente a todas as curvas $s \in F$ diz-se *envolvente* de *F*.

Evoluta - *Evoluta* de uma curva *s* é a curva envolvente das normais a *s*. É também o lugar geométrico dos centros de curvatura de *s*.

Hipociclóide- Dadas uma circunferência *c* e outra circunferência *d* tangente interior a *c*, a trajectória de um ponto *P* de *d* quando esta rola sem escorregar sobre *c* é uma hipociclóide (epiciclóide se *d* for exterior a *c*).

Involuta - Se *s* é uma curva e *s'* a sua evoluta, então *s* é uma *involuta* de *s'*. Quaisquer curvas paralelas a *s* são também involutas de *s'*. Assim uma curva tem uma única evoluta mas infinitas involutas. Alternativamente uma involuta de uma dada curva pode ser considerada como sendo uma curva ortogonal a todas as suas tangentes.

Normal - Dada uma curva *s* e um ponto $P \in s$ em que admita tangente *t*, a *normal* a *s* no ponto *P* é a perpendicular a *t* no ponto *P*.

Pedal negativa - Sejam dados uma curva *s* e um ponto fixo *O*. Se para cada ponto *P* da curva considerarmos a perpendicular *p* ao segmento *OP* passando por *P*, a envolvente das rectas *p* diz-se *pedal negativa* de *s* relativamente ao ponto *O*.

Ponto de reversão (cusp, rebroussement) - Se imaginarmos que uma curva é descrita por um ponto em movimento, um ponto de reversão é um ponto da curva em que o ponto móvel "inverte" a direcção do seu movimento. Se considerarmos as tangentes à curva nesse ponto que está a descrever a curva, num ponto de reversão a variação do declive da tangente muda de sentido (se estava a crescer, passa a decrescer, e vice-versa).

Roullette - Diz-se *roulette* qualquer curva que se obtém traçando a trajectória de um ponto de uma curva quando esta rola sem escorregar sobre outra curva.


TEXAS INSTRUMENTS TI-83

O problema deste número

Sobre o problema anterior

Devido ao atraso com que a anterior edição da nossa revista ficou pronta, houve muito pouco tempo para nos enviarem as respostas ao problema proposto. Mesmo assim temos seis resoluções, duas delas chegadas via Internet: António Amaral (Lamego), António Dias (Esmoriz), Francisco Estorninho e Alice Bárrios, Heitor Surrador (Aveiro), José António Alves (Portimão) e Susana Cristina Fernandes (Porto).

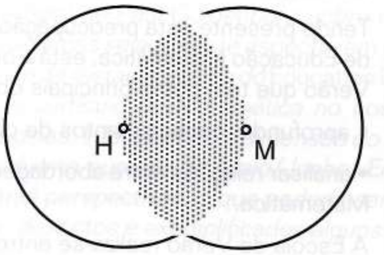
Propusemos desta vez "Vida de cão", apresentado num interessante livro de problemas de Geometria (*Geometriquement vôtre*, Eurêka, Ed. Dunod, Paris 1994):

O casal Silva vai passear. Cada um deles quer levar o cão pela trela e como não chegam a acordo, decidem atar ao pobre animal duas trelas de 2 metros cada uma.

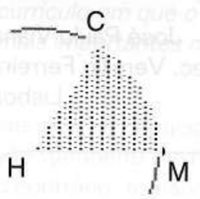
Quando chegam ao parque, caminham a 2 metros um do outro.

Qual é, em cada momento, a área em que o cão pode andar livremente?

Todos começaram por fazer um esquema da situação, em que os pontos H e M representam as posições do homem e da mulher.



A distância de H a M é de 2 metros e o raio das circunferências é também de 2. Queremos determinar a área assinalada que, como vemos, se pode decompor em dois triângulos e quatro segmentos circulares.

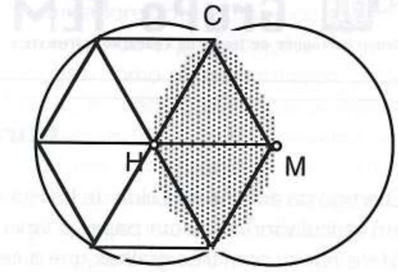


O triângulo HCM é equilátero de lado 2. A sua altura pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

A área do triângulo é então

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$



O sector circular CHM corresponde a um sexto da circunferência e, portanto, a sua área é

$$A_{sector} = \frac{1}{6} \times \pi \times 2^2 = \frac{2\pi}{3}$$

A área do segmento circular entre a corda CM e o arco é

$$A_{seg.circ} = A_{sector} - A_\Delta = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Problema proposto

Da Europa à América, e volta

Devido aos ventos constantes que sopram de Oeste, a viagem de avião da Europa até à América demora mais tempo do que em sentido contrário.

A Air Sky tem dois aviões iguais e faz carreira entre dois aeroportos, um em cada continente. Certo dia da semana, os aviões partem cada um de seu lado do Atlântico exactamente no mesmo instante. Quando se cruzam sobre o mar estão a 2700 quilómetros de um dos aeroportos. Chegados ao outro lado, fazem uma paragem de 2 horas para reabastecimento e regressam aos respectivos pontos de origem. Quando se voltam a cruzar estão a 3200 quilómetros do mesmo aeroporto considerado anteriormente.

Qual é a distância entre os dois aeroportos?

(Respostas até 16 de Maio)

A área onde o cão se pode movimentar, constituída pelos dois triângulos e pelos quatro segmentos circulares, é

$$A = 4A_{seg.circ} + 2A_{\Delta} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

$\approx 4{,}913\ m^2$.

O Heitor Surrador resolve também o problema aplicando integrais.

A Susana Fernandes apresenta ainda uma resolução partindo do princípio que a trela tem 4 metros (2+2), que cada elemento do casal segura numa das pontas e que a coleira do animal pode deslizar ao longo da trela. Nesta situação, a área onde o cão se movimenta é maior. Querem os leitores descobri-la?

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

GEOMTIC

Uma lista de discussão em português na Internet

Foi recentemente criada pelo Centro de Competência Nónio da Faculdade de Ciências da Univ. de Lisboa, em parceria com o Grupo de Trabalho de Geometria da APM, uma lista de discussão (mailing list) sobre Ensino da Geometria e Tecnologias da Informação e Comunicação. O nome da lista é GEOMTIC.

Esta lista pretende discutir temas e questões ligadas ao ensino da geometria apoiado nas novas tecnologias. Para subscrever a lista, e poder assim colocar questões e responder às questões dos outros participantes, basta enviar uma mensagem para listproc@fc.ul.pt contendo, no corpo da mensagem, apenas a seguinte frase

subscribe GEOMTIC fulano

escrevendo o seu nome em lugar de fulano...

Receberá uma mensagem confirmando a sua inscrição.

Escola de Verão

Sociologia da Matemática e Educação Matemática

Tendências recentes da investigação em Educação Matemática têm valorizado o papel da componente social na construção do conhecimento matemático por parte dos alunos. Por essa razão, reveste-se de particular importância o estudo de perspectivas sociológicas sobre o conhecimento matemático e a sua articulação com a Educação Matemática.

Tendo presente esta preocupação, o GruPo TEM, Grupo Português de Teoria de Educação Matemática, está a organizar, com apoio da APM, uma Escola de Verão que tem como principais objectivos:

- aprofundar conhecimentos de dimensões sociológicas da Matemática;
- analisar relações entre abordagens sociológicas da Matemática e a Educação Matemática.

A Escola de Verão realiza-se entre 14 e 18 de Setembro de 1998, na Casa da Torre, em Soutelo, Braga.

Para mais informações, contacte:

José Manuel Matos
Faculdade de Ciências e Tecnologia
2825 Monte da Caparica
e-mail: darmore@univ-ab.pt

GruPo TEM
Grupo Português de Teoria de Educação Matemática

Correcção

O artigo da autoria de Gilda de La Rocque Palis, intitulado "Gráficos de funções em calculadoras e com papel e lápis", foi publicado no nº 45 da *Educação e Matemática* com três gralhas que a seguir se corrigem. Pelo sucedido apresentamos as nossas desculpas à autora e aos leitores.

Correcções:

- Na página 37, último parágrafo, onde está "gráficos de funções definidas em", deverá estar "gráficos de funções definidas em R".
- Na página 39, a figura 6 saiu em branco.

A figura devida é a aqui apresentada.

- Na página 40, nas Notas, ponto 4, o texto correcto será

"..., com excepção dos gráficos constantes das figuras 1, 4, 6 e 7. O gráfico da figura 7 foi obtido com a TI-82 com a opção $X_{res}=8$.

Para este número seleccionámos

"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (I)[1]

E. Paul Goldenberg

Iniciamos neste número a publicação de um artigo de Paul Goldenberg sobre um tema actual da educação matemática: a organização do currículo. Embora os nossos problemas sejam, neste aspecto, em grande parte diferentes dos que existem nos Estados Unidos, a proposta de Paul Goldenberg e da restante equipa do* Education Development Center *é uma boa contribuição para estimular o debate sobre a estrutura do currículo de Matemática no nosso ensino secundário, que a* Educação e Matemática *tem procurado animar nas suas páginas. Infelizmente, a dimensão do artigo não permite publicá-lo de uma só vez, pelo que a segunda parte será incluída no próximo número de Maio/Junho. Enquanto, nesta primeira parte, Goldenberg descreve globalmente, em confronto com outras perspectivas, o que poderia ser um currículo em que o eixo central fossem os "hábitos de pensamento", na segunda, são descritos e exemplificados alguns dos mais importantes modos de pensar em matemática.*

A organização deste artigo

Ao tentar definir uma abordagem que responda positiva e directamente a algumas questões que são parte da força motriz da reforma em educação *matemática*, os meus colegas e eu próprio desenvolvemos uma perspectiva — o conceito de "abordagem pelos hábitos de pensamento" na construção do currículo — que tem potencialmente uma aplicação muito mais ampla que o desenvolvimento do currículo de Matemática. Por "hábitos de pensamento" queremos significar modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente no nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais — não só somos capazes de os utilizar com facilidade, como é *de esperar* que o façamos. Antes de descrever um pequeno subconjunto de hábitos de pensamento importantes em matemática, tentarei explicar por que razão uma abordagem do desenvolvimento curricular que coloca como centro de incidência os hábitos de pensamento, é válida para o ensino da Matemática nos níveis elementar e secundário, e por que razão *também* é válida no ensino superior, pelo menos antes dos cursos altamente especializados. Apresentarei depois uma lista e explicarei alguns "hábitos de pensamento em matemática" que se adaptam bem como princípios organizadores dos cursos de matemática antes da especialização, e indicarei como esta abordagem pode favorecer, não apenas uma perspectiva mais unificada da matemática — integrando os raciocínios geométrico, algébrico e analítico — mas também uma perspectiva mais unificada do próprio *pensamento*, que ajude a entrelaçar muitas áreas do currículo, sem comprometer a integridade e o carácter distintivo de cada uma. A "nova" ideia — se existe realmente alguma ideia nova — não é que a Matemática (ou outra disciplina escolar) possa ser boa para desenvolver o raciocínio. Esta ideia já tem dois mil anos ou provavelmente mais. O que estamos a propor é qualquer coisa um pouco diferente. Não é um acto de fé em que, se a matemática é tomada a sério, os conhecimentos matemáticos são adquiridos directamente e as capacidades de raciocínio são (também) melhoradas, mas quase o contrário: tomando determinadas formas de pensamento a sério e dando-lhes a primeira prioridade entre os princípios necessários para a organização do currículo de Matemática (ou de outra disciplina), as capacidades de raciocínio são adquiridas directamente *e também melhoram os nossos conhecimentos matemáticos.*

> Que questões são parte da força motriz da reforma?

A realidade política (como a preservação dos cursos de cada um) e a responsabilidade social (tal como a oferta de igual acesso a oportunidades de iniciação em matemática genuína) têm sido parte da força motriz dos apelos à "matemática para todos". Para que estas realidades e responsabilidades sejam atingidas, torna-se necessário encontrar uma interpretação razoável desta frase.

Não é uma tarefa trivial. Tal como é possível criar cursos de matemática que não são para todos, é possível criar um curso que parece ser "para

* Este artigo é traduzido e publicado com autorização do autor. Foi publicado em 1996, com o título *"Habits of mind" as an organizer for the curriculum* no *Journal of Education* 178 (1): 13-34, da Boston University.

todos" mas que não é de matemática. As tentativas para atingir uma população mais ampla através da diluição da matemática ou da sua redução a uma disciplina de serviço, para as aplicações mais comuns da vida corrente, *não* constituem verdadeiramente "matemática para todos". Elas não só não conseguem satisfazer os alunos que já se sentem atraídos pela matemática, ou por outros domínios que requerem uma aprendizagem avançada da matemática, como restringem ou fazem diminuir a população estudantil que pretendem incluir estudantes que um dia podem vir a gostar, desejar, precisar de matemática genuína, mas ainda não compreenderam isso. Dito sem rodeios, "matemática *para todos*" é "uma desgraça" se não for *matemática* para todos.

No entanto, o facto de existirem muitas interpretações erradas de "matemática para todos" não significa que não existam interpretações razoáveis. Antes da especialização (princípio do ensino superior e ensinos básico e secundário), *é* razoável lutar por um sistema educativo que prepare adequadamente os alunos para estudos sérios de matemática e, igualmente, possa servir para estudantes que não prosseguem estudos avançados de matemática. A questão que se coloca é como se pode aí chegar.

Percursos separados?

A tradição de estabelecer o currículo contituído por percursos separados e de valor desigual parece uma maneira pobre de atingir um tal sistema. Por um lado, não serve a nossa sociedade. Se acreditamos nas múltiplas manifestações ruidosas de desagrado acerca da incompetência matemática dos jovens adultos, devemos acusar as estratégias estabelecidas, incluindo (mas não exclusivamente) a separação dos alunos em percursos distintos. O slogan "matemática para todos" é ainda recente e os currículos que têm a intenção de o apoiar ainda o são mais e estão por concretizar nas escolas. Por isso, a maior parte dos alunos que estão agora a frequentar os primeiros anos dos estudos universitários, e uma ainda maior percentagem daquelas pessoas que estão no mundo do trabalho, são ainda o produto da separação da Matemática em cursos *distintos*, e não de reformas recentes.

O sistema dos percursos separados também não serve bem os próprios indivíduos. O meio cultural pode exercer fortes influências locais sobre os interesses e os esforços de um indivíduo. Uma separação em cursos distintos, feita muito cedo, pode bloquear aquelas influências até muito depois do número de experiências ter aumentado, dos gostos e interesses terem amadurecido e de um indivíduo ter crescido o suficiente para quebrar com as convenções, com as expectativas e com os estereotipos. Ao separar os estudantes em percursos distintos, matemáticos e não matemáticos, estamos a assegurar virtualmente que os alunos que fizeram os percursos não matemáticos nunca regressarão à matemática.

Conteúdos nucleares e "pratos de acompanhamento"?

Voltando então à ideia de criar uma única dieta para todos (mesmo se se permitem diferenças razoáveis nos acompanhamentos, nas doses e nas velocidades de digestão), quais deveriam ser os ingredientes principais? O modo como, muitas vezes, a discussão é conduzida entre os profissionais do desenvolvimento curricular, consiste em responder à pergunta "Quais são os conteúdos *nucleares?*", implicando assim que estes conteúdos são essenciais para todos os alunos, e que algumas outras matérias preencherão de modo flexível o espaço restante, de modo a tornar a dieta agradável aos vários gostos e inclinações que se encontram nas aulas reais. Seja como for, penso que o próprio modo de colocar a questão — quais são os conteúdos *nucleares* — atrai-nos para um tipo errado de discussão. Em reuniões de membros de projectos financiados pela *National Science Foundation* para a construção de currículos tendo por base as *Normas* do NCTM, a pergunta "Quais são os conteúdos nucleares?" conduziu à questão de saber qual de duas formas da equação da recta — reduzida ou passando por dois pontos — era mais importante ser aprendida por todos os alunos, ou se as duas deveriam ser substituídas por outra coisa qualquer.

A verdade nua e crua é que a utilidade de *qualquer* facto ou fórmula particular depende do que uma pessoa faz. Mesmo conteúdos tão fundamentais e úteis como o teorema de Pitágoras não têm absolutamente qualquer utilidade para uma quantidade enorme de pessoas. Para que o radar conduza os nossos aviões e para que as comunicações sem fios nos mantenham em contacto, dependemos de *alguém* que tenha compreendido uma grande quantidade de matemática complicada, mas nós não precisamos de saber nada para entrar num avião e ligar a televisão.

Por outro lado, se nenhuma fórmula ou facto pode ser considerado "nuclear", então que elementos da matemática *são* essenciais para que as crianças se preparem como deve ser para se tornarem futuros adultos com sucesso?

Antes mesmo de considerar a resposta a esta questão, é melhor acrescentar já que a afirmação "nenhum facto particular é essencial" não pode levar à conclusão de que os conteúdos não interessam, da mesma forma que da afirmação "existem muitas respostas certas" não se pode concluir que não existem respostas erradas. Não é suficiente dominar alguns bons hábitos de pensamento e saber como procurar conteúdos quando precisamos deles: sem alguma familiaridade com um terreno, não temos maneira de reconhecer as particularidades que se distinguem especialmente e, portanto, não temos nenhum meio efectivo de saber *quando* pode ser importante procurar, ou mesmo olhar com maior atenção, um determinado facto.

Isto é óbvio em ciência, onde não ter conhecimentos extensos *na própria* *cabeça* significa não poder tirar partido das "descobertas acidentais". É vulgar em medicina, por exemplo, que na procura de resposta para um problema, se caia acidentalmente na solução de um problema aparentemente sem relação com o primeiro. Não temos modo de reconhecer a solução descoberta acidentalmente, se não conhecemos nada do problema que ela resolve, nem do campo a que o problema pertence. De modo semelhante, uma pessoa não pode ter uma boa perspectiva de um facto histórico, sem ter um conhecimento mais amplo que inclua esse facto ou onde ele se torne saliente. O conhecimento — um conhecimento muito mais amplo do que a tarefa imediata parece pedir — é sempre, provavelmente, um ingrediente essencial do trabalho produtivo e criativo.

Isto é certamente verdade em matemática. Tomando um exemplo muito elementar, não podemos esperar que um aluno a quem falte certo conhecimento prévio muito particular fique interessado no padrão existente em 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ... Bem vistas as coisas, todo o conjunto de problemas de adição tem que ter *algum* conjunto de respostas, e as respostas 1, 4, 9, 16, ... parecem tão boas como quaisquer outras. De facto, este conjunto particular de respostas apenas pode parecer especial se os alunos *já* têm "intimidade" com os quadrados perfeitos e ficam surpreendidos ao vê-los aparecer num contexto inesperado. Apenas quando já temos algum conhecimento prévio, experimentamos uma forte sensação de surpresa — dois processos tão diferentes a produzirem os mesmos resultados — que nos leva, como a acidental descoberta de alguma cura, a suspeitar que pode haver alguma conexão a merecer que lhe demos mais atenção.

Conteúdo, *mais*...

O conhecimento requerido não diz respeito apenas aos conteúdos. Para servir (e salvaguardar) a matemática e as disciplinas que dela dependem, devemos ser fiéis tanto aos seus *conteúdos* como aos seus *métodos de funcionamento*, os "hábitos de pensamento" dos matemáticos. Desses hábitos faz parte (entre outras coisas) a demonstração.

A descrição em pormenor de alguns desses hábitos de pensamento constitui o tema da segunda parte deste artigo, mas, como a demonstração parece ser no momento actual objecto de alguma controvérsia no seio da comunidade educativa, merece especial atenção.

Contrariamente a uma crença comum, as *Normas* do NCTM *não* recomendam que se abandonem as demonstrações. De facto, a recomendação das *Normas* para que se dê mais ênfase ao raciocínio do que à mecanização é inteiramente consistente com o facto, característico da cultura matemática, de se confiar na demonstração e não na experiência ou na simples afirmação. Seja qual for a intenção das *Normas*, e seja qual for a sua interpretação, acreditamos que, se algum elemento *essencial* à matemática é eliminado de um curso de matemática, não podemos considerar que esse curso a representa fielmente. Formas de demonstração apropriadas ao desenvolvimento dos alunos — capacidades e estratégias para construir e apresentar demonstrações e a *propensão* para procurar uma demonstração — podem e *devem* ser introduzidas ao longo dos anos que antecedem os cursos especializados.

> O que é uma "abordagem por hábitos de pensamento" do desenvolvimento curricular em matemática? Porque se deve escolher uma tal abordagem nos ensinos básico e secundário? Porque razão tal abordagem *também* é apropriada para o ensino superior?

Começamos por afirmar a nossa convicção de que, para qualquer conjunto de conteúdos e ideias, existe mais do que uma maneira de os arranjar de forma a construir um currículo coerente.

Não podemos falar de modo razoável sobre a "melhor" maneira de distribuir a matéria num curso sem considerar os objectivos do curso ("dominar os conteúdos", por exemplo, raramente constitui uma descrição completa dos objectivos), e outros factores como a origem dos alunos e os seus próprios objectivos, e o estilo e tendências do professor. O que torna uma determinada organização *coerente* é ela ter um "enredo", uma mensagem sobre a matemática que é posta em relevo ao longo da explicitação dos conteúdos.

O que é um "enredo" matemático?

Existem livros de Matemática, especialmente nos ensinos básico e secundário, a que parece faltar completamente um "enredo", ou em que a mensagem transmitida é que a matemática consiste em conteúdos, destrezas e procedimentos. O primeiro ano de álgebra, por exemplo, tem tendência a aparecer (especialmente aos alunos mas também aos professores) como uma lista de coisas a saber fazer e não como um corpo coerente de ideias.

Presentemente, um novo enredo está a tornar-se popular. A tendência actual do desenvolvimento curricular parece favorecer as *aplicações* como princípio organizador. A mensagem implícita sobre a matemática é que a sua relevância reside na sua utilidade pragmática para outros fins.

Sendo certo que a intenção deste artigo não é discutir nenhum enredo em particular excepto o dos hábitos-de-pensamento, a actual popularidade das aplicações como enredo merece uma chamada de atenção. O grupo de matemática do *Education Development Center* parece pertencer aos raros grupos de investigação e desenvolvimento curricular em matemática que *não* partilha da convicção que as aplicações são o caminho a prosseguir! Não se trata de rejeitarmos uma boa aplicação quando a encontramos, mas sobretudo de considerar que

(1) não é visível que uma orientação curricular voltada para as aplicações suscite de modo fiável o interesse dos alunos ou que seja

a única (ou "a melhor") maneira de o fazer;

(2) as aplicações tendem, nos melhores casos, a ser apenas pseudo-reais, e as verdadeiramente reais são demasiado difíceis, demasiado maçudas e (muitas vezes) demasiado maçadoras;

(3) o que é "real" para adultos maduros não o é, necessariamente, para "adolescentes" (e, em qualquer caso, onde teremos aprendido que os adolescentes, mesmo nos primeiros anos da universidade, sejam manifestanente pragmáticos na sua abordagem da vida?);

(4) não há qualquer prova de que os alunos para os quais a abordagem da "vida real" se assume como a mais necessária (aqueles que talvez estejam a utilizar a escola para escapar à chuva) sejam mais motivados pelas "aplicações do mundo real" do que por bons quebra-cabeças, e existem razões para pensar exactamente o contrário; e,

(5) a insistência colocada na utilidade pragmática dos resultados matemáticos pode, na realidade, actuar *em sentido contrário* ao desenvolvimento da sensibilidade matemática — em particular, se o valor de certos resultados matemáticos está apenas na sua utilidade, dificilmente se compreende que necessitemos de perceber *por que razão* funciona, ou empreender o trabalho mental de *demonstrar* que funciona, na medida em que uma autoridade reconhecida já aprovou esse resultado.

O objectivo da "matemática para todos" pode ser em parte responsável pela aceitação generalizada e acrítica da atitude "prioridade às aplicações" — assume-se que, embora nem todos venham a ser matemáticos, todos usarão matemática. A primeira afirmação é irrelevante — também nem todos serão historiadores. A segunda é falsa e também impossível de acreditar — todo o aluno sabe que praticamente todos os adultos declaram não saber nada de matemática, e no entanto todos parecem sobreviver.

A aceitação comum da abordagem "prioridade às aplicações" não é baseada em resultados da investigação, porque nenhuma investigação (de que tenhamos conhecimento) afirma que esta abordagem tem realmente sucesso na melhoria da aprendizagem da matemática; mas devemos dizer, em sua defesa, que também não existe investigação provando o contrário.

Em qualquer caso, a frequentemente proclamada descida de nível na aptidão matemática dos alunos no início dos cursos superiores não pode (ainda) ser assacada a esta ou aquela tendência dos currículos actuais, pois os alunos destes currículos ainda não passaram por um programa completo e consistente.

Muitos outros enredos foram utilizados, certamente, na organização curricular em Matemática. Talvez o mais tradicional — dando origem à visão da aprendizagem da Matemática como a subida de uma escada — é que a matemática se constrói a partir dos seus fundamentos lógicos, um degrau de cada vez, desde os blocos de construção "básicos" até aos conceitos "mais avançados". O desenvolvimento histórico é por vezes utilizado como tema organizador. A "resolução de problemas" pode também ser o centro de incidência de um currículo. O que é mais importante é que *qualquer* destas abordagens pode ser construída com os mesmos conteúdos e procedimentos (ou apresentar falhas na sua inclusão), mas o que os alunos aprendem tem muitas vezes, mais a ver com o enredo do que com os acontecimentos diários através dos quais é contado. Isto não é diferente do que acontece na literatura. Muitas grandes obras são sobre o mesmo conjunto de elementos básicos — amor, poder, medo, ambição, ódio, bravura, autosacrifício — mas a *história* de que nos lembramos é o modo como estes elementos foram ligados entre si.

Uma proposta de um enredo alternativo

Uma outra maneira de ver um curso de matemática é que a sua história não é tanto sobre os "factos" ou conteúdos matemáticos, mas sobre a maneira como os matemáticos os *descobriram*: sobre os modos de pensar.

Tal enredo não pode ser contado sem os conteúdos, está claro, nem mesmo sem os alunos acabarem por conhecer aqueles conteúdos muito bem. Não se pode tecer uma história cujos elementos se relacionam de modos interessantes, sem construir de modo correcto o cenário e as personagens. Uma história sobre o pensamento matemático também não pode ser contada de modo adequado, sem que os alunos tenham adquirido algum sentido sobre a finalidade dos conteúdos matemáticos: isso seria bem diferente da experiência dos matemáticos, apesar de muitas ideias matemáticas terem sido estudadas antes de ser conhecida qualquer aplicação para elas. Finalmente, o enredo não pode ser apreciado, sem que os alunos adquiram certas destrezas que lhes permitam processar os conteúdos com facilidade, tal como o sentido que damos a uma obra de literatura é muito prejudicado se não soubermos ler fluentemente.

Assim, alguns conteúdos e destrezas devem ainda ser seleccionados e incluídos, mas o modo como são seleccionados e, especialmente, o modo como são organizados, conta uma história diferente da matemática: a matemática não *são* os conteúdos mas o *raciocínio* que descobre, reune e dá sentido a estes conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de "hábitos de pensamento".

Esta conclusão tem um lado positivo e um lado negativo. O lado negativo é que os hábitos matemáticos de pensamento importantes — especialmente o subconjunto que listaremos e descreveremos mais à frente — não resolvem, por si só, o problema da escolha dos conteúdos e destrezas a incluir que se coloca a quem tem de desenvolver o currículo. O lado positivo é que tal não precisa de ser feito: existe mais do que uma escolha correcta de conteúdos e destrezas.[2] Certamente, isto não quer dizer que todas as escolhas sejam correctas. O bom gosto matemático (o sentido do que é matematicamente importante e da conexão entre as ideias) e uma boa e inteligente pedagogia (o sentido do que pode, e quando deve, ser aprendido) deve ser também aplicado. Mas o conjunto de candidatos que passam os dois testes — um conjunto que eu apostaria não ser, ou pelo menos não precisar de ser, tão diferente do que existia há 30 ou 50 anos! — tem sido sempre grande demais, e é aqui que existe espaço para posteriores decisões, baseadas em *outras* razões, como o desejo de contar uma história coerente sobre o pensamento matemático.

Contando a história dos "hábitos de pensamento"

Teremos progredido? Em vez de perguntarmos que conteúdo é "nuclear", estamos agora confrontados com a questão "Que hábitos de pensamento são 'nucleares'?" Mas existem muitos bons hábitos de pensamento matemático, e nem tudo pode ser ensinado num curso ou mesmo até ao fim do secundário. Se assim é, o que devemos escolher?

Para sermos coerentes com o objectivo original, devemos escolher modos de pensar em matemática que apoiem *todas* as vocações, e faltas de vocação, para a matemática; felizmente, eles existem. Estes modos de pensar — apesar do facto de serem úteis a pessoas fora ou dentro da matemática — merecem ser designados "matemáticos" porque são absolutamente centrais na matemática, particularmente visíveis e "refinados" no seu seio, e prontamente aprendidos quando se estuda esta disciplina.

O que se afirma não é que o ensino da Matemática se justifica porque é bom para desenvolver as capacidades de raciocínio. Isto não é mais (nem menos) correcto para a Matemática do que para o Grego ou o Latim. Também não é verdade que todos os hábitos de pensamento em matemática sejam essenciais em contextos não matemáticos (ou que sejam equivalentes, ou sirvam de base para modos de pensar especiais nesses contextos não matemáticos). Existem alguns hábitos matemáticos de pensamento que *não* são tão aparentes em outras disciplinas mas que devem, apesar disso, estar presentes num curso (tal como os conteúdos matemáticos o devem ser) para que ele possa ser considerado de matemática.[3]

Mas, ao escolher determinados hábitos de pensamento que são essenciais em matemática *e também* nos bons modos de pensar em domínios mais amplos, podemos ensinar matemática que sirva para preparar os alunos para *estudos avançados de matemática* (um objectivo importante), e ao mesmo tempo corresponder às necessidades dos alunos que podem não ter ainda desenvolvido um especial interesse ou aptidão para a matemática, ou mesmo daqueles que nunca o farão (um segundo objectivo importante).

A nossa afirmação central é que, ao utilizar os "hábitos de pensamento" como princípio organizador, podemos construir currículos de Matemática válidos para constituir a base necessária para *estudos matemáticos avançados* e fornecer sólidas indicações sobre o modo como a matemática é realmente feita. Em cursos que *não* estejam no nível mais especializado, é também possível escolher, como princípio orientador, um conjunto de hábitos de pensamento que sirvam da melhor forma os *objectivos gerais da educação* da maior parte dos alunos.

Os hábitos de pensamento específicos listados mais à frente** parecem bem adaptados para este duplo objectivo, e formam o núcleo da série de livros *Connected Geometry*, um currículo apoiado pela *National Science Foundation* que os meus colegas e eu próprio desenvolvemos (*Education Develop. Center*, 1996). Planeado originalmente para remediar a falta de conexão entre a geometria e o resto do programa de Matemática no ensino secundário, o projecto *Connected Geometry* tem gerado um grande interesse na educação matemática de *nível universitário*[4], em parte porque estabelece profundas conexões entre a geometria, a álgebra e a análise e, além disso, por causa da abordagem através dos métodos matemáticos. É fundamental que os estudantes dos primeiros anos do ensino superior, talvez em especial aqueles que vão ensinar Matemática, adquiram *cedo* uma ampla visão da matemática que lhes possa servir como enquadramento para os seus estudos posteriores em matemática. Devido ao facto de darmos relevo a hábitos de pensamento válidos em domínios tanto matemáticos como não-matemáticos, esta abordagem também serve os estudantes que estão em cursos terminais, e não vão prosseguir estudos técnicos especializados. Tanto no nível secundário como superior, esta abordagem demonstrou ser motivante para um grupo de estudantes grande e diversificado: aumenta a coerência que os alunos vêem na matemática; liga entre si as experiências que os alunos têm em diversos ramos desta ciência; dá relevo aos seus temas unificadores internos; fornece conexões entre a matemática e as outras experiências dos alunos; e traz para dentro da aula a cultura da exploração matemática.

Notas

1. Como se passa em relação a todas as ideias, as que aqui exprimimos têm muitos pais e uma longa história. Há cerca de 30 anos, David Purpel levou-me a começar a pensar na distinção entre objectivos educacionais e os mecanismos através dos quais eles podem ser atingidos. A sua inspiração é, num sentido muito real, o catalizador original deste artigo. Há cerca de seis anos, Paul Horwitz e Judah Schwartz

(continua na página 44)

** Esta lista de "hábitos de pensamento" faz parte da segunda parte deste artigo a publicar no próximo número.

Calculadoras no Ensino - Ano Lectivo 96/97

É natural a adopção das calculadoras no ensino, e têm vindo a processar-se a adopção de matérias, processos e programas a esta nova ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. Nada melhor para um Educador que poder contar na sua sala com o maior número possível de alunos com a mesma calculadora, facilitando assim enormente o evoluir da matéria e sua explicação. A **CASIO** possui a melhor linha do mercado, este ano renovada com ainda melhores modelos e a preço mais acessível.

Básicas

CASIO SL 450

O modelo ideal concebido para o ensino. Outros modelos disponíveis mais acessíveis **HL 820 D e HS 5 D.**

Científicas

CASIO FX - 82 SX

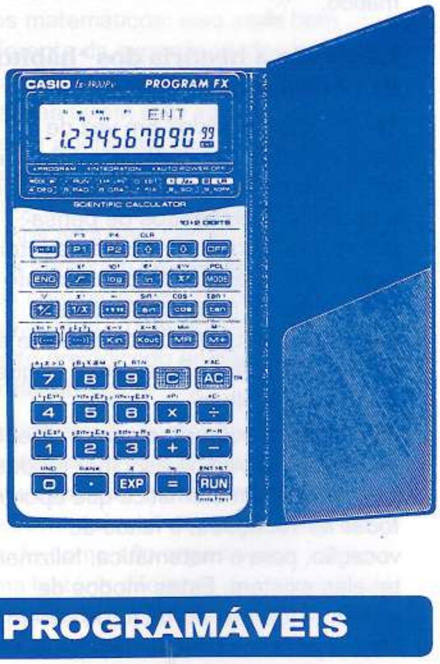
A FX 82 é a máquina mais vendida no mundo, agora renovada para maior conforto e durabilidade. Cálculo com fracções e 139 funções.

Científica Avançada

CASIO FX - 570 S

Uma calculadora sem rival, excepcionalmente completa, simples e acessível. Utiliza o novo sistema de cálculo V.P.A.M.

Programável



CASIO FX - 3900 PV

A calculadora programável mais fácil e acessível. 300 passos de programa, integrais, estatística a 2 variáveis. Já à venda novo modelo. **FX 4800 P** com 4500 passos de programa.

CALCULADORAS GRÁFICAS CIENTÍFICAS PROGRAMÁVEIS

CASIO FX 6300 G

A gráfica mais económica do mercado ! Os gráficos ao alcance de todos. Todas as funções necessárias.

CASIO FX 7400 G

A nova **7400 G** é a calculadora gráfica por excelência. Todas as funções, fácil de usar e programar, visor grande e 7 Kbytes de memória. Mantém preço acessível.

CASIO CFX 9850

A gráfica super completa com o visor a cores, 32 Kb de memória, linguagem Tipo Basic, estudo das cónicas, sucessões, tabelas e gráficos.

Resolução de problemas com o geoplano*

Maria Natércia Araújo

O presente artigo refere uma experiência de trabalho realizada no ano lectivo de 1994/95, com um grupo de quatro alunos dos 2º e 3º anos do 1º Ciclo, que apresentavam problemas de aprendizagem. Pretendia-se estudar a possibilidade de, alunos com estas características resolverem problemas geométricos utilizando o geoplano.

A resolução de problemas sempre foi e continua a ser uma actividade do ser humano. Actualmente, com o ritmo acelerado de mudança da sociedade, apela-se ainda mais à capacidade de resolução de problemas dos cidadãos.

A escola vai ao encontro dessa necessidade ao enquadrar a resolução de problemas como uma actividade central da área de Matemática, mantendo-a presente no desenvolvimento de todos os tópicos, como forma de desenvolver capacidades de raciocínio, curiosidade, descoberta, investigação, argumentação, esquema conceptual, autonomia e comunicação.

A importância dos manipulativos

Para além de contribuir e fomentar o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas nas crianças, a escola deve criar o gosto pela aprendizagem da Matemática. Ao promover aprendizagens activas e diversificadas envolve-se as crianças activamente, vai-se ao encontro dos seus interesses e necessidades, levando-as à construção do seu próprio conhecimento. Diferentes teorias psicopedagógicas defendem que as crianças e os jovens, precisam de modelos concretos para compreender conceitos matemáticos. A interacção com o mundo físico ou experiência física é um dos factores que contribui para o desenvolvimento intelectual da criança. Dado que as aprendizagens activas passam também pela experiência que se tem, com e sobre os objectos, torna-se muito importante a utilização de materiais manipulativos, como suporte de aprendizagem nesta área. A aprendizagem baseia-se na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo que progride do concreto para o abstracto.

O geoplano

O programa do 1º Ciclo do Ensino Básico tem subjacente a preocupação de envolver as crianças em actividades que contribuam para a construção e o desenvolvimento das suas noções geométricas. Assim, as actividades que envolvem de alguma maneira as capacidades espaciais da criança são susceptíveis de facilitar a aprendizagem da Geometria. A visualização espacial, para além de outras capacidades espaciais, é facilitadora dessa aprendizagem e engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos.

O geoplano é um material estruturado que permite desenvolver essa aprendizagem através de experiências geométricas na sala de aula. Permite envolver os alunos activamente como construtores do conhecimento pois ao agirem sobre este material estabelecem relações e organizam mentalmente a sua actividade. Para além de permitir actividades lúdicas, transforma-se num meio de motivação e é uma base concreta para o desenvolvimento de conceitos e relações abstractas.

A sua utilização tem grandes vantagens pois é um material dinâmico, que permite visualizar figuras de diversos ângulos e posições, permite comparar, investigar, modificar e prever resultados de transformações, bem como desenvolver actividades de resolução de problemas.

* Experiência realizada no âmbito de um projecto final de Curso de Estudos Superiores Especializados (CESE) em Educação Infantil e Básica Inicial, ramo de "Didáctica do Meio Físico e da Matemática Elementar", no CEFOPE - Universidade do Minho.

Como foi na sala de aula

As actividades foram desenvolvidas numa escola do 1º Ciclo de Rio Caldo, no concelho de Terras do Bouro. Os quatro alunos envolvidos, do sexo masculino, com idades compreendidas entre 9 e 10 anos, apresentavam problemas de aprendizagem a vários níveis: raciocínio lógico-dedutivo, empírico-indutivo, abstracção, cálculo mental, memorização e compreensão da linguagem simbólica.

Trabalharam em grupos de dois, a fim de privilegiar situações de interacção e diálogo, sendo envolvidos em situações activas, de descoberta. Cada grupo trabalhou alternadamente com geoplanos 3 por 3, 5 por 5, 10 por 10 e 20 por 20, durante 30 a 40 minutos, de pé ou sentados, conforme desejavam. Foram-lhes propostas 31 actividades ao longo de 11 aulas. Numa primeira fase, os alunos tiveram actividades de iniciação ao geoplano para se familiarizarem com o material.

As actividades foram propostas oralmente pela professora, recorrendo ao geoplano quando necessário. Durante o desenrolar das actividades a intervenção da professora centrou-se em observar e registar o trabalho dos alunos, encorajar a experimentação, incentivar o confronto de experiências e opiniões, questionar os alunos a fim de explicitarem raciocínios, sensibilizando-os à demonstração e argumentação.

Os registos de observação foram feitos tendo em conta os seguintes aspectos:

- motivação;
- orientação da execução da actividade (da esquerda para a direita, de cima para baixo, etc.);
- linguagem utilizada durante a execução da actividade;
- interacção entre os alunos;
- movimentação do geoplano;
- actuação sobre o geoplano (os alunos actuam em simultâneo ou isoladamente; algum segura no geoplano);
- quantidade de tentativas na resolução da actividade;
- tipo de correcção que executam (desfazem totalmente as figuras ou corrigem, aproveitando algo do que está feito);
- critérios utilizados ao longo da execução da actividade (por exemplo: contagem de pregos, contagem de vértices, cores dos elásticos utilizados, tipos de formas, posição e ordem pela qual são construídas);
- apreciações finais e intermédias dos alunos;
- interacção entre os alunos e a professora;
- tentativa de procurar novas soluções;
- temporização.

Apresentam-se em seguida algumas actividades que constituiram problemas para os alunos.

Actividade 1/ Grupo 1

Imagina que colocas sobre o elástico amarelo (A) um espelho na vertical. Constrói a figura que verias reflectida.

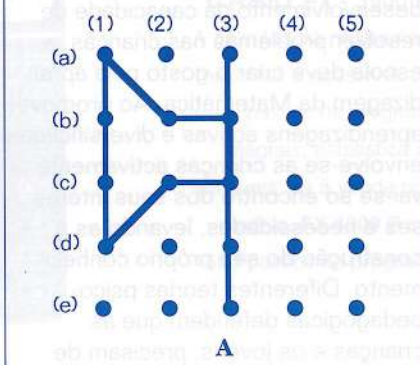


Figura 1

Descrição

O aluno que tinha o elástico iniciou a construção da figura na coluna de pregos imediatamente à direita da coluna do eixo de simetria. Prendeu o elástico nos pregos (b,4) e (c,4), esticou-o para (b,5) e (c,5), dizendo logo que não tinha mais espaço nem pregos para continuar. A professora sugeriu que colocassem mesmo um espelho sobre o elástico amarelo. Os alunos retiraram o elástico que utilizaram na primeira tentativa de construção e aceitaram a sugestão. Colocaram o espelho e observaram. Seguidamente iniciaram a construção da figura a partir do eixo de simetria, da esquerda para a direita, revelando hesitações na prisão do elástico nos pregos (b,4) e (c,4). Um aluno sugeriu prender o elástico dum lado do prego, o outro era de opinião contrária. Ao fim de quatro tentativas conseguiram prender o elástico nesses pregos, esticando-o depois de (b,4) para (a,5) e de (c,4) para (d,5), concluindo a figura e afirmando que estava pronta.

Demoraram seis minutos a resolver a actividade proposta.

Actividade 5/ Grupo 1

Num geoplano de 3 por 3, constrói todos os triângulos possíveis, com um dos vértices no prego do centro.

Descrição

Os alunos foram construindo, alternadamente, os vários triângulos ajudando-se mutuamente, sem utilizar qualquer critério. Construíram todos os triângulos rectângulos e isósceles, à excepção dos obtusângulos. Afirmaram que já não conseguiam construir mais nenhum e passaram à contagem. Fizeram quatro tentativas de contagem, mas perderam-se sempre com a sobreposição e o cruzamento dos elásticos. A professora sugeriu-lhes a repetição da actividade usando uma cor de elástico para cada tamanho. Os alunos aceitaram a sugestão. Construíram primeiro doze triângulos rectângulos, com elásticos vermelhos, e só depois quatro triângulos isósceles, com elásticos amarelos, conseguindo assim ultrapassar a dificuldade da contagem. Continuaram sem descobrir os triângulos obtusângulos.

Demoraram 13 minutos com a actividade.

Actividade 28/ Grupo 1

28.1 Divide a figura em quatro triângulos e um quadrado (ver figura 2).

28.2 Tenta arranjar outras soluções.

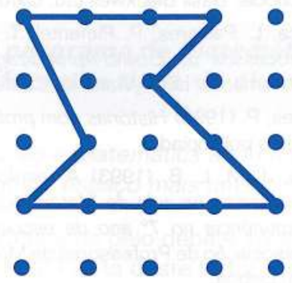


Figura 2

Descrição

28.1 Os alunos construíram cinco triângulos e quatro quadrados, à primeira tentativa, ajudando-se mutuamente (figura 3A). À segunda tentativa começaram por construir os triângulos de acordo com o número pedido, vendo logo de seguida que ainda podiam construir três quadrados (figura 3B).

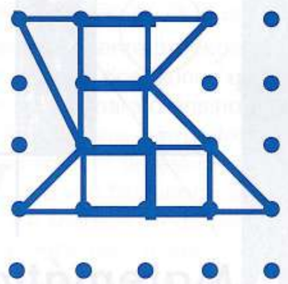


Figura 3A

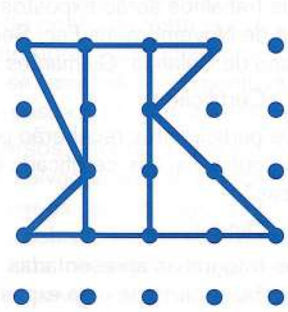


Figura 3B

À terceira tentativa um dos alunos sugeriu a construção do quadrado em primeiro lugar. Depois construíram os triângulos de acordo com o número pedido, verificando logo de seguida que ainda sobrava espaço dentro da figura inicial. Iniciaram a quarta tentativa novamente pela construção dos triângulos e só depois o quadrado, verificando uma vez mais que ainda havia espaço dentro da figura apresentada. Após esta tentativa desistiram, referindo que gostavam de saber como se fazia, pedindo à professora para exemplificar.

28.2 Os alunos não arranjaram solução para a situação proposta.

Estas e outras actividades constituíram problemas para os alunos dado que, movidos pela curiosidade, partiram à descoberta das soluções, agiram sobre o material, partilharam ideias, descobriram formas de procedimento, reflectiram sobre o que fizeram, reviram conceitos e relacionaram-nos, o que é de extrema importância nestes alunos com dificuldades de aprendizagem.

Outras actividades não constituíram problema para os alunos, tal foi o caso da que se segue:

Actividade 10/ Grupo 2

Constrói um quadrado a partir do segmento apresentado no geoplano (figura 4).

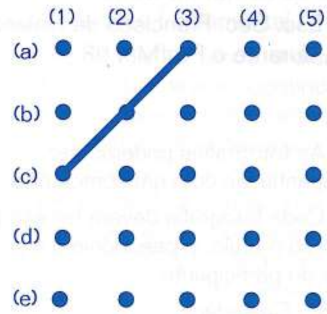


Figura 4

Descrição

Os alunos utilizaram três elásticos, servindo-se de cada um deles para fazer segmentos de recta que constituiriam os lados do quadrado. Começaram por prender um elástico na extremidade (c,1) do segmento apresentado e esticaram-no para (e,3), depois com outro elástico, outro aluno, prendeu-o à extremidade (a,3), e esticou-o para (c,5). Por fim, fizeram o lado oposto ao apresentado, unindo (e,3) a (c,5) com outro elástico. No final, um aluno comentou que o quadrado ficou «virado», mas podia-se virar o geoplano como um guiador e o quadrado ficava direito. Demoraram 2 minutos com a actividade.

Apesar de algumas actividades não terem constituído problema uma vez que os alunos demonstraram conhecer as formas de procedimento, não se pode considerar "tempo perdido" pois serviram para a revisão de conceitos, para a comunicação matemática e para a consciência do sentimento de competência, tão importante em alunos com dificuldades de aprendizagem.

Considerações finais

Da reflexão sobre esta experiência, ao longo das trinta e uma actividades desenvolvidas, parece poder concluir-se que os alunos:

- tiveram tendência para desfazer as figuras em vez de as transformar;
- fixaram-se apenas num atributo, dos vários que eram propostos conjuntamente numa só actividade;
- recorreram muitas vezes à tentativa e erro;
- demonstraram sempre grande persistência na procura de soluções;
- pararam para observar e pensar, reflectindo sobre o que faziam;
- mostraram-se mais familiarizados com certas figuras geométricas, como o quadrado e o rectângulo, em determinadas posições;
- tiveram dificuldade em descobrir os triângulos obtusângulos;
- revelaram dificuldade em reconhecer o paralelismo de segmentos de recta que:
  - estivessem muito distanciados,
  - tivessem comprimentos diferentes,
  - não se encontrassem com os extremos frente a frente.

Concluímos ainda que o geoplano:

- permitiu uma actividade lúdica, logo motivadora;

- possibilitou a abordagem da Matemática pela resolução de problemas;
- desenvolveu a destreza manual e percepção visual;
- revelou a não utilização de vocabulário referente à lateralidade;
- revelou algum desenvolvimento ao nível da linguagem matemática;
- promoveu a interacção dos alunos durante as actividades de grupo.

Relativamente às actividades, podemos dizer que:

- permitiram o pensamento imaginativo, a descoberta de relações e a análise;
- por vezes não resultaram como problemas, pois os alunos evidenciaram ter conhecimento da resolução, e como tal, a descoberta pelo raciocínio não se verificou.

Bibliografia

Abrantes, P. [et al] (1994) Pode Haver um Currículo de Matemática Centrado na Resolução de Problemas? In Fernandes D., Borralho., Amaro G. (Eds) *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular.* IIE, Lisboa, pp. 239-269.

Charles, R. Lester, F. (1984) *Teaching Problem Solving.* Arnold E., London, pp. 3-19.

Dickson, L. Brown, M. Gibson, O. (1991) *El Aprendizaje de las Matemáticas.* Ministerio de Educación y Ciencia, Editorial Labor S. A., Madrid.

DGEBS (1990) *Programa do 1º Ciclo.* Ensino Básico, 1º Ciclo. ME: Lisboa.

Fisher, R. (1990) *Problem solving in primary schools.* Basil Blackwell Ltd, Oxford.

Fonseca, L. Palhares, P. Pimentel, T. (1991) *Processos de Ensino-Aprendizagem de Matemática.* LEM. Viana do Castelo.

Pallhares, P. (1995) *Histórias com problemas.* Texto policopiado.

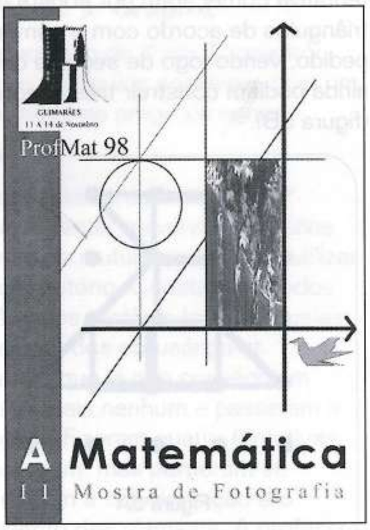
Porfírio, J. M. L. B. (1993) *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade.* Associação de Professores de Matemática. Lisboa.

Serrazina, L. Matos, J. M. (1988) *O Geoplano na Sala de Aula.* Associação de Professores de Matemática. Lisboa.

Vilarrasa, A. Colombo, F. (1988) *Mediodía, ejercicios de exploracion y representacion del espacio.* Graó Editorial, Barcelona.

Maria Natércia Araújo
Escola das Teixugueiras, Vizela

A matemática
Mostra de Fotografia - ProfMat 98



Depois da espectacular adesão no ProfMat 97, vai realizar-se a II Mostra de Fotografia subordinada ao tema *A matemática.* Esperemos que continue a surpreender esta forma de ver a matemática.

Uma fotografia pode ser vista sob diferentes perspectivas: vê-se uma casa mas também se vêem quadriláteros; é uma menina ao espelho ou é uma simetria; é a imagem de uma rua, mas também pode ser um caso de paralelismo. É o olhar que revela a mensagem da fotografia.

A Associação de Professores de Matemática (APM) propõe-lhe que apresente as suas fotografias em que se sinta a matemática. Que cada fotografia possa ser uma visão matemática.

Os trabalhos apresentados serão expostos na Esc. Sec. Francisco de Holanda, em Guimarães, de 11 a 14 de Novembro de 1998, durante o ProfMat 98.

Regulamento da Mostra de Fotografia

Artº 1º - Tema

1.1 - Os trabalhos a apresentar, a preto e branco ou a cores, subordinar-se-ão ao tema *A matemática.*

Artº 2º - Trabalhos

2.1 - Os participantes apresentarão os seus trabalhos em fotografia com o formato de 15x20, sem margens, nem molduras.

2.2 - A organização reserva-se o direito de ficar com os trabalhos de modo a poder utilizá-los em outras actividades da APM.

Artº 3º - Participantes

3.1 - Poderão participar amadores ou profissionais com as suas fotografias.

3.2 - Cada participante poderá entregar qualquer número de trabalhos.

Artº 4º - Pseudónimos/Textos

4.1 - As fotografias poderão ser acompanhadas com um comentário.

4.2 - Cada fotografia deverá ter escrito no verso o título, o pseudónimo e o nome do participante.

Artº 5º - Calendário

5.1 - As remessas pelos CTT devem ser endereçadas como a seguir se indica:

II Mostra de Fotografia ProfMat 98

A/C de Paulo Saraiva

R. Cova do portão, 18, CV Esq.

Vale Gemil - Santa Clara

3040 Coimbra

5.2 - A data limite de entrega dos trabalhos é 30 de Outubro, verificada no carimbo dos CTT, caso as fotografias sejam enviadas por este meio.

5.3 - Os trabalhos serão expostos, entre 11 e 14 de Novembro, na Esc. Sec. Francisco de Holanda, Guimarães.

Artº 6º - Certificado

6.1 - Os participantes receberão por via CTT, ou outra via, um certificado de participação.

Artº 7º - Outros

7.1 - As fotografias apresentadas poderão fazer parte de uma exposição itinerante subordinada ao tema, a organizar posteriormente pela APM.

7.2 - Compete à organização resolver todos os casos omissos no presente regulamento.

7.3 - Os pedidos de esclarecimento ou este regulamento poderão ser solicitados para a morada acima.

Debate

Diversificar o programa do secundário?

O programa de Matemática do ensino secundário deveria ser, de algum modo, diversificado para diferentes tipos de alunos? Porquê? Em que sentido deveria ser feita a diversificação?

Educação e Matemática abriu no número 43 um debate sobre a diversificação do programa do Ensino Secundário. Publicamos neste espaço mais uma contribuição que nos chegou para continuar a discussão.

Congratulo-me pelo debate iniciado na revista à volta deste tema e, com o intuito de contribuir para manter a discussão, aqui vai a minha opinião.

Defendo uma formação de base comum para todos os jovens e penso que se deve retardar o momento das escolhas de orientação ou especialização para depois do 10º ano. Este ano só deveria separar os alunos da área das Humanidades dos das áreas das Ciências.

O 10º ano deveria ser um ano de orientação, destinar-se a atenuar o contraste entre os dois ciclos e contribuir para familiarizar o aluno com um imprescindível maior grau de exigência e responsabilização do ciclo que inicia.

Parece-me urgente proceder a uma caracterização dos alunos que neste momento vão para o ensino regular, CSPOPE (cursos orientados para o prosseguimento de estudos) e dos alunos que vão frequentar os CSPOVA (cursos predominantemente orientados para a vida activa).

Que expectativas tem a escola? Que expectativas têm eles? Que expectativas têm os seus encarregados de educação? Que razões os levaram a fazer essa opção? Como se caracterizam do ponto de vista social os alunos que optam por uma ou outra via? Como se caracterizam do ponto de vista do seu passado escolar uns e outros?

Nos cursos orientados para a vida activa, salvaguardando a decisão de privilegiar as aprendizagens dos processos sobre as aprendizagens dos conteúdos, no sentido de ser valorizado o desenvolvimento de competências, atitudes e comportamentos que permitam a todos os jovens um investimento continuado na sua autoformação, e não esquecendo a precaridade das especializações constantemente ultrapassadas por um rápido desenvolvimento técnico, penso que deve passar a existir uma maior e mais coordenada cooperação entre as empresas e a escola.

É, quanto a mim, imperioso que este tipo de ensino seja repensado e valorizado. Do meu ponto de vista, para ser reforçada e valorizada a parte prática destes cursos terá que ser diminuída a parte da formação geral e específica (diminuir a quantidade dos conhecimentos sem diminuir a capacidade crítica e a qualidade do saber) e, portanto, sugiro que seja criado um 13º ano para os alunos que queiram prosseguir estudos.

Quanto aos CSPOPE, defendo uma reformulação curricular e, quer se conservem ou não os agrupamentos tal como estão, defendo uma Matemática A, uma Matemática B e uma Matemática C.

Parece-me que poderia haver um 10º ano com 5 horas (2h+2h+1h) semanais, comum a todos os cursos da via de prosseguimento de estudos dos agrupamentos de Ciências.

O desdobramento em turnos de uma das aulas de 2h é fundamental.

Depois, nos 11º e 12º anos, a disciplina de Matemática deveria continuar a ter um tronco comum e diferentes capítulos de opção que deveriam variar em número e em conteúdo, conforme a área de estudos que o aluno quisesse seguir. As disciplinas a fazer parte do currículo deveriam ser propostas por personalidades especializadas e, o currículo deveria ser homologado depois de ampla discussão. Mas esta, deveria ser feita deixando bem longe os interesses cooperativos das diferentes áreas/grupos de professores das nossas escolas.

O número de disciplinas do 12º ano não deveria ser tão numeroso como é actualmente, para possibilitar que os alunos desenvolvam actividades de investigação e tenham tempo para efectuar maior reflexão sobre os temas que estudam. Caracterizo agora as três variantes de Matemática.

Matemática A: 6 horas no 11º e 12º anos em blocos de duas horas seguidas, três vezes por semana. Destina-se a alunos que utilizarão de maneira intensiva a Matemática nos seus estudos superiores. Deseja-se que o aumento do número de horas dedicado ao ensino desta disciplina possa contribuir para que os alunos adquiram uma boa formação científica, um bom domínio dos meios de comunicação científica e capacidades de aplicar os conteúdos estudados em diferentes domínios, que permita desenvolver em cada aluno a capacidade de resolver problemas, não permitindo que o formalismo e o cálculo tomem o lugar do significado dos conceitos.

Matemática B: 5 horas (2h+2h+1h). Além do tronco comum deseja-se que a tónica caia no desenvolvimento de competências transversais.

Matemática C: 2 ou 3 horas semanais, durante os três anos. Esta disciplina não é uma escolha prioritária dos alunos que vão possivelmente prosseguir estudos nas áreas das línguas, áreas artísticas, etc. Parece-me, por isso, que nela deve ser valorizada a resolução de problemas concretos, insistindo na importância da Matemática no domínio da comunicação, privilegiando os aspectos essencias do raciocínio matemático, entre outros.

Para todas as turmas dos diferentes agrupamentos deveria surgir, no horário do professor, uma ou duas horas semanais, nas quais ele poderia apoiar o estudo individual dos alunos, um a um, ou por grupos de dificuldade, sempre que os alunos o desejassem.

O acesso ao ensino Superior deveria estar desligado das classificações obtidas no Ensino Secundário.

Maria Graziela Fonseca
Esc. Sec. Filipa de Vilhena

Uma experiência enriquecedora para professores e alunos

Adília Ribeiro, Ana Paula Branco, Maria do Carmo Neves

No Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, realizou-se uma acção para professores de Matemática intitulada "Curso de Especialização em Ensino da Matemática". Esta acção abordou diversos temas, como a Resolução de Problemas, Novas Tecnologias, Geometria, e culminou com um projecto de inovação.

O curso decorreu sempre com muito entusiasmo e constitui um bom espaço para o diálogo e troca de experiências. A simpatia, a descontracção e a vontade de inovar foram factores que estiveram presentes até ao final.

Mas foi, sem dúvida, o projecto de inovação que se revelou mais rico em experiência pessoal, pois foi realizado com os nossos alunos, em ambiente natural de aula.

As condições prévias para a realização do projecto foram as seguintes:

- concretização de uma experiência de carácter individual;
- preparação de uma unidade programática, ou parte dela, num determinado nível de ensino, à nossa escolha, de uma forma não tradicional e apelando ao espírito crítico dos alunos;
- aplicação da unidade a uma turma de alunos nossos;
- descrição e reflexão crítica sobre o percurso efectuado, desde a primeira aula até à última da experiência.

Passamos a apresentar o relato da vivência de três elementos do curso.

Optámos as três pelo capítulo "Funções" (ensino secundário), com recurso às novas tecnologias e utilizámos dois programas de computador: "Graphic Calculus" e "Derive".

São programas que permitem, entre outras coisas, uma boa visualização e o desenvolvimento da capacidade de observação, análise e estabelecimento de conclusões. Cumprem ainda a dupla tarefa de permitir autonomia por parte dos alunos e simultaneamente mantê-los motivados.

Os programas foram utilizados tendo em vista a melhoria da aprendizagem da Matemática na matéria leccionada.

De entre os objectivos do projecto destacamos:

- proporcionar aos alunos uma situação inovadora de ensino aprendizagem;
- confrontar, em grupo, diferentes opiniões e convicções;
- desenvolver o poder de comunicar matematicamente, exprimir os raciocínios, apelando à capacidade de argumentar criticamente;
- desenvolver a autonomia e autoconfiança;
- abordar de forma intuitiva e prática as funções;
- desenvolver aptidões para estabelecer ligações entre a descrição analítica das funções e a sua representação gráfica.

Quanto ao desenrolar da experiência, em cada aula eram dadas aos alunos uma ou mais fichas com actividades para eles resolverem em grupo e com a ajuda do computador.

As actividades eram de natureza investigativa. Os alunos estudaram o comportamento das famílias de funções fazendo diversas experiências de alteração dos parâmetros e estabelecendo conclusões a partir da observação dos gráficos respectivos. Este tipo de estudo foi também realizado com o objectivo de os alunos relacionarem uma função e as suas derivadas, quer a primeira, quer a segunda (na página seguinte encontra-se um exemplo de uma actividade).

Houve grupos que tiveram discussões acaloradas e de grande interesse, sobretudo quando os vários elementos não estavam de acordo. No entanto, conseguiram quase sempre chegar a uma conclusão experimentando no computador e seguindo, quando necessário, as sugestões do professor. Seguiam-se as aulas de discussão, onde se reflectia sobre o trabalho desenvolvido e se faziam as sínteses necessárias relativamente às conjecturas elaboradas.

A avaliação do projecto contou com a recolha de dados dos alunos, e foi feita a partir das suas respostas às fichas de trabalho, da observação pormenorizada das estratégias por eles utilizadas, e do teste de avaliação. Foi também realizado um questionário constituído por diversas perguntas de resposta aberta, incidindo sobre vários aspectos:

- a influência do computador nas aulas para o desenvolvimento da actividade matemática e posteriormente na elaboração de um teste;
- a gestão do tempo dedicado à realização da experiência;
- a importância do trabalho de grupo;
- um pedido de sugestões para melhorar experiências análogas.

Quanto a nós, foi uma experiência bem sucedida devido essencialmente às potencialidades dos dois programas referidos, especialmente concebidos para as funções. Do ponto de vista dos alunos, a experiência foi considerada globalmente positiva.

Resumiremos a seguir, as respostas dos alunos separando os aspectos que consideraram positivos dos que

Actividade 7

Monotonia e extremos relativos de uma função

7.1 Para cada uma das funções seguintes, desenhe o seu gráfico e sobreponha-lhe o gráfico da primeira derivada.

a) $f(x) = 4x^3-6x^2+1$

b) $g(x) = x^4-10x^2+9$

c) $h(x) = \frac{2}{x^2-1}$

d) uma função à sua escolha

7.2 Investigue:

a) de que forma o sinal da primeira derivada influencia a monotonia de cada uma das funções anteriores. O que pode concluir?

b) a relação entre os extremos relativos de cada uma das funções e os zeros da primeira derivada. O que pode concluir?

consideraram menos conseguidos.

Aspectos positivos:

• Permitiu "um trabalho mais prático que teórico".

• As aulas eram "dadas de uma maneira mais simples e acessível a todos" e eram "baseadas na aplicação prática dos conhecimentos, sem que fosse necessariamente o professor a fornecer as respostas".

• "Permite uma maior rapidez e rigor na construção dos gráficos" e "facilita a visualização dos mesmos".

• "Ao observarmos vários gráficos, começamos a associar facilmente o gráfico com um certo tipo de expressão, o que nos facilita a resolução de problemas".

Os alunos gostaram de trabalhar em grupo, considerando esta forma de trabalho um auxiliar precioso que conduz à descoberta.

• "Trabalhando em grupo, aprende-se muito e também ficamos a saber respeitar, ajudar e conhecer melhor os amigos" e "melhora o ambiente da aula".

É de salientar a avaliação global desta experiência, feita por um dos alunos:

• "Experiência positiva. Conjugou um utilitário moderno, o computador, com a Matemática. Permitiu um projecto muito interessante, que abre novos horizontes na nossa aprendizagem."

Aspectos menos conseguidos:

• Algumas vezes os alunos sentiram necessidade de mais tempo para acabar determinada actividade com o computador e, outras vezes, revelaram precisar de mais aulas para discussão geral de consolidação da matéria.

• Foi mais difícil a professora esclarecer as dúvidas, pois tinha que se repartir pelos grupos.

Quanto ao interesse em continuar experiências análogas, a esmagadora maioria dos alunos afirmou que gostaria de voltar a usar o computador nas aulas de Matemática, mas que isso fosse feito com mais tempo.

Após a análise dos resultados e de uma longa reflexão posterior, concluímos que a experiência teve sucesso pois os alunos aprenderam os conceitos que pretendíamos introduzir, além de que o fizeram num ambiente mais descontraído do que é habitual.

Reconhecemos que existiram condições favoráveis à concretização deste projecto, principalmente no que se refere à concepção das actividades. Houve sempre um grande espírito de equipa e a orientadora do projecto, Drª Ana Paula Canavarro, mostrou-se incansável durante todo o processo, dando sugestões preciosas desde o início até ao final.

Gostaríamos de partilhar aqui algumas ideias a partir da reflexão que fizemos sobre este trabalho.

O Curso de Especialização teve uma dupla vantagem. Por um lado, permitiu a troca de experiências entre professoras que, embora sendo todas de Matemática, têm vivências de ensino diversificadas, quer devido à diferença de idades, quer ao número de anos de serviço. Por outro lado, ao partilharmos as nossas vivências, apercebemo-nos que todos sentimos dificuldades ao implementar um projecto diferente. Além das dificuldades logísticas, consequência da falta de recursos técnicos e humanos, há o problema da reacção dos alunos a experiências novas e o receio por parte de todos de que o programa não seja cumprido. Quanto a este último aspecto, a nossa posição é de que a solução não é "esquecer o programa", mas sim inovar a partir dele.

Sem a preciosa ajuda da orientadora do projecto e de outros colegas, a concretização desta tarefa teria sido mais difícil. A realização de um projecto deste tipo promove o diálogo aberto e a reflexão entre professores, o que é vantajoso para todos, inclusivé, para os alunos.

Finalmente, acreditamos que a educação tem que acompanhar a rapidez com que actualmente se sucedem os acontecimentos. Para que isso se concretize com êxito, é necessário, que os professores realizem experiências conjuntas, quer ao nível da sua disciplina, quer em ligação com outras disciplinas.

Um próximo desafio será agora o de elaborar actividades para o 11º ano utilizando o CG e o Derive, já que são de certa forma complementares.

Queremos ainda destacar que deste projecto resultou uma sessão prática realizada no ProfMat 95 (SP 32). As actividades foram compiladas e adaptadas para a sessão.

Adília Ribeiro
Esc. Sec. D. Pedro Nunes
Ana Paula Branco
Esc. Sec. Marquês de Pombal
Mª do Carmo Neves
Esc. Sec. Gil Vicente

Encontros 98

Divulgamos neste número dois novos encontros, o III CIBEM e o MEAS I, e chamamos ainda a atenção para o 2º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática, que se realizará este ano no nosso país.

2º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática

O Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa promove este simpósio que terá lugar de 15 a 17 de Junho na FCL. Pretende-se criar um espaço de partilha, discussão e reflexão sobre as práticas e a investigação realizadas e suas implicações no ensino das Ciências e da Matemática. Os temas a abordar serão: Teorias e práticas, Reforma curricular, Formação de professores, Avaliação, Natureza das Ciências e Tecnologias de Informação.

Contacto: Fernanda Freire, Faculdade de Ciências de Lisboa - tel: 7500049, ext. 1048, e-mail: simpecm@fc.ul.pt

III CIBEM

O 3º Congresso Ibero-americano de Educação Matemática decorrerá na Venezuela, em Caracas, de 26 a 31 de Julho, na Universidade Central de Venezuela.

Este congresso realiza-se de quatro em quatro anos e tem como objectivos, entre outros: consolidar os laços científicos e culturais entre os profissionais da docência em matemáticas da comunidade iberoamericana; estabelecer espaços de intercâmbio de experiências na docência e investigações educativas matemáticas; analisar segundo uma perspectiva global os problemas que se abordam no terreno multidisciplinar da Educação Matemática; Intercambiar propostas para reconsiderar o impacto que tem a Educação Matemática no cidadão das nossas nações; analisar o impacto das comunicações e dos desafios do fim do século nos elementos básicos do acto educativo: professores, alunos, conteúdos, contexto, recursos, actividades e avaliação.

O encontro inclui conferências centrais feitas por professores e/ou investigadores convidados, conferências paralelas, painéis, comunicações breves, grupos de trabalho e cartazes.

Contacto: Coordenador Geral: Prof. Cipriano Cruz,
e-mail: cruzc@merlin.rect.ucv.ve

MEAS I

Esta primeira Conferência de Educação Matemática e Sociedade decorrerá de 6 a 11 de Setembro, em Nottingham, na Inglaterra.

Este encontro é organizado e patrocinado pelo novo Centro para o Estudo da Educação Matemática (CSME) da Universidade de Nottingham.

Como convidados para as sessões plenárias deste encontro vão estar: Ubiratan d'Ambrosio, Stephen Lerman, Anna Tsatsaroni, Leone Burton, Ole Skovsmose, Alan Bishop, Jill Adler, Paul Dowling e Sal Restivo.

Para mais informações visite as páginas da Internet: http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/conf.html, ou, caso o seu browser não suporte frames, http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/meas2.html

Contacto: Peter Gates, e-mail: peter.gates@nottingham.ac.uk

"Hábitos de pensamento"...

(continuação da pág. 35)

levaram alguns de nós a pensar sobre a noção específica de "hábitos de pensamento" (modos de pensar) em matemática, e Al Cuoco, Glenn Kleiman e eu próprio fizemos as primeiras tentativas para os enumerar, no projecto de desenvolvimento curricular *Seeing and Thinking Mathematically* do *Education Development Center* (EDC), apoiado pela *National Science Foundation* (NSF) (grant ESI905-4677). O primeiro documento público sobre os hábitos de pensamento reflecte as contribuições intelectual e editorial de June Mark e as ideias que amadureceram ao longo do projecto de desenvolvimento curricular *Connected Geometry* (NSF grant MDR92-52952) e com o envolvimento de toda a equipa do projecto. Ao longo destes anos muitas outras pessoas ajudaram a dar forma às ideias: com particular significado, entre elas, estão Wayne Harvey (desde sempre) e Peter Braunfeld (mais recentemente), ambos através de discussões sobre estas ideias e outras com elas relacionadas e de críticas específicas a este artigo. As ideias aqui expressas não são necessariamente partilhadas pela NSF.

2. De facto, isto não é novidade. Sempre foi reconhecido que, tanto os conteúdos tradicionais como novos conteúdos, podem ser bem ensinados (contando uma boa história) ou de modo superficial (com uma fraca história ou sem história nenhuma). Tudo o que estamos a fazer é a indicar que existem muitas histórias diferentes — dizendo respeito a degraus ou à história ou às aplicações ou... — e a apresentar razões para escolher a dos hábitos de pensamento em lugar das outras.

3. Para uma exposição de alguns destes, ver Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) (N.T. - ver a bibliografia no fim da segunda parte, no próximo número de *Educação e Matemática*).

4. Uma das suas unidades, "Optimização", é utilizada em cursos de iniciação ao cálculo; outras unidades têm sido usadas em vários cursos de formação de professores (Boston University, University of New Hampshire, Purdue e University of Kansas, por exemplo).

E. Paul Goldenberg
Education Development Center, Inc.

(Tradução de Eduardo Veloso)

Quota de 1998

No ano de 1998 o valor da quota é de 6.500$00 para professores, 4.500$00 para estudantes(só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 7.000$00 para sócios a residir no estrangeiro. **Se ainda não paga** a sua quota por **desconto bancário** pode enviar a declaração de autorização de desconto bancário até 28 de Fevereiro. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando cheque ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Assoc. de Prof. de Matemática - ESE de Lisboa-Edif.P2 -
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos -1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão **Visa, Mastercard** ou **EuroCard**, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐ VISA   MasterCard ☐ MasterCard   EuroCard ☐ EUROCARD

Validade ____________ o valor de ______________ correspondente a ______________

______________ Data __/__/__

Assinatura ____________________________________

Ficha de Inscrição/Actualização na Associação de Professores de Matemática

Nome: ______________________________ Sócio Nº________

Morada: ______________________________

Código Postal: ______________ Distrito: ______________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Data de nascimento:__/__/__ Nº de Contribuinte: ______________

Nº do B.I.: ______________ Arquivo: __________ Data de Emissão: __/__/__

Ano em que começou a leccionar: ______________ Nível de Ensino: ______________

Categoria Profissional: ______________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome de APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:até 2.500$00 - 20%; de 2.501$00 a 5.000$00 - 15%; mais de 5.000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo E-Mail: apm mail.telepac.pt.

índice