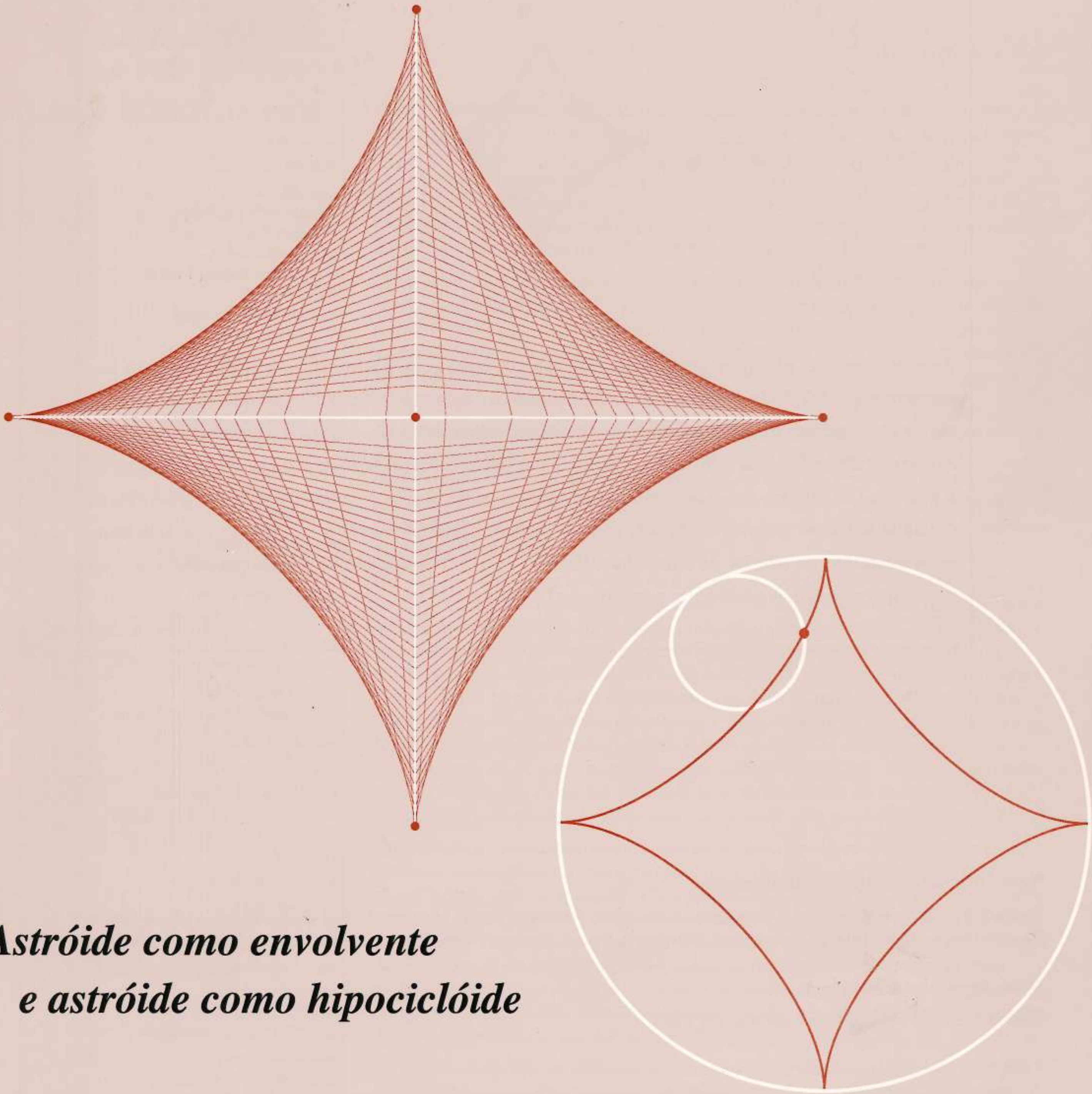
Educação e Matemática

N°46

Janeiro / Fevereiro de 1998



Astróide como envolvente e astróide como hipociclóide

Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

A capa deste número

Astróide: dois modos de geração

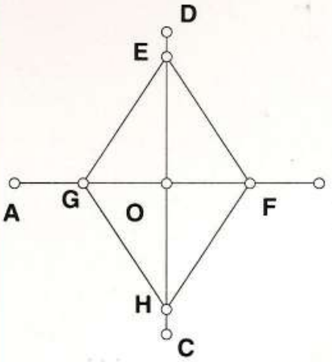


fig. 1

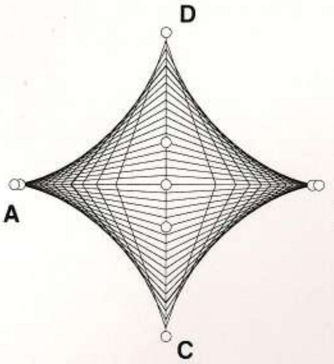


fig. 2

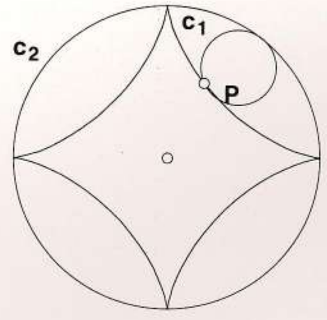


fig. 3

Apresentamos dois processos geométricos diferentes de obter a curva astróide. No primeiro processo, os segmentos *EF*, *EG*, *HG* e *HF* têm todos comprimento fixo igual a *DO* (fig. 1). O ponto *E* está obrigado a mover-se sobre *DO* (respectivamente *F* sobre *BO*, *G* sobre *AO* e *H* sobre *CO*). A astróide é a curva envolvente do conjunto de todos os segmentos que resultam da deslocação de *EF, EG, HG* e *HF* quando *E* percorre *DO* (isto é, a curva tangente a todos os segmentos) (fig. 2). No segundo processo, a astróide é obtida como lugar geométrico de um ponto *P*, sobre uma circunferência c_1, quando esta rola sem escorregamento no interior de outra circunferência c_2 com o quádruplo do raio (hipociclóide com 4 pontos de reversão). A astróide foi estudada por Leibnitz em 1715.

Eduardo Veloso

Neste número também colaboraram

Bárbara Yu, Carla Inácio, Carlos Próspero, Conceição Antunes, Ercílio Mendes, Isabel Costa Ferreira, José António Covêlo Vieira, José António Fernandes, Margarida César, Nicolau Pinto Coelho, Paula Teixeira e Sílvia Pinto Coelho.

Data de publicação

Este número foi publicado em Janeiro de 1998.

Nota

nº 46
Jan/Fev
de 1998

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
Director
Paulo Abrantes
Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Lopes
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia
Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Tiragem
4200 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95
Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos — 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

Disciplina/indisciplina: e quem nos explica o mundo?

Margarida César

Como psicóloga, sou muitas vezes consultada, sobre casos que envolvem indisciplina. Aliás, geralmente, quando me pedem colaboração, é porque algo não corre lá muito bem e, quando essa condição se altera, os meus serviços deixam de ser necessários... até que surge um novo caso em que algo não corre como seria de desejar. Assim, se os casos de indisciplina (e não só) não tivessem solução, ou se todos os professores acreditassem que assim era, há muito que teria deixado de ser contactada. O que ainda não aconteceu.

Deixem-me confessar que esse facto me alegra imenso. Não tanto porque eu não pudesse fazer uma outra coisa na vida mas porque, ao contrário de algumas pessoas que se têm ultimamente pronunciado, acredito cada vez mais que todas as crianças e jovens são educáveis. Todos eles têm potencialidades que, se descobrirmos, lhes permitem construir uma identidade positiva, integrarem-se socialmente, desenvolverem um projecto de vida em que acreditem.

As formas de actuação dos professores face à indisciplina são muito dispares e é frequente vermos alguns muito preocupados em conseguir integrar um determinado aluno e promover o seu sucesso escolar, enquanto outros têm com ele uma atitude de conflito aberto, de hostilização, muitas vezes até de abuso de poder, que dificilmente pode contribuir para que o aluno se desenvolva e integre na escola.

Deixem que vos conte brevemente dois casos, ocorridos recentemente. Numa turma é leccionado um currículo alternativo. Os alunos têm muita dificuldade em não ter comportamentos que sejam perturbadores. No entanto, os professores têm feito um esforço notável para os motivar, para os levar a apreender os conhecimentos e a adquirir novas competências. São aulas desgastantes, que exigem muito tacto e muita capacidade para gerir potenciais conflitos, onde é necessária muita resistência à frustração. Mas, no final do ano lectivo, a experiência vivida foi descrita como muito compensadora. Se estes alunos tivessem sido julgados pelos padrões habituais de disciplina, a maioria não teria permanecido na escola... e, como tal, não teria tido oportunidade de mostrar comportamentos mais adaptados e, sobretudo, de investir num projecto de vida futuro.

Noutra escola, coexistem alunos de meios sócio-económicos e culturais muito distintos, e de etnias diversas. No final do 1º período mais de metade dos alunos tinham sido suspensos. Provavelmente a maioria das suspensões desta turma não teriam existido se os casos tivessem ocorrido com outros professores. É uma turma com 30 alunos, do 7º ano de escolaridade, alguns deles vindos de meios onde os hábitos sociais e culturais (mesmo a língua materna) são muito diferentes dos da escola. Os alunos não têm problemas disciplinares nem de aproveitamento com dois professores: o maior sucesso escolar é a Português e a Matemática. O que talvez nos dê muito que pensar.

Os professores são confrontados com casos de indisciplina, que têm de saber resolver. Mais importante ainda: são as atitudes dos professores que podem evitar muitos dos casos de indisciplina. Respeitando os alunos, discutindo com eles as regras da escola e fazendo-os partilhar as decisões a tomar, criando um bom clima de trabalho e uma relação menos desigual. Tentando compreender o que provoca um determinado comportamento e arranjando formas de o evitar. Pedindo acompanhamento de técnicos especializados para os casos mais complicados, que já ultrapassam aquilo que podem solucionar com as suas atitudes na sala de aula, mas que se irão agravar se aquele aluno apenas for confrontado com medidas punitivas, às quais se sente incapaz de responder.

A indisciplina pode ser uma manifestação de muitas coisas diferentes: a expressão de um mal estar interior; a tentativa de dissolver o grupo turma porque aquele aluno necessita de estabelecer uma relação pessoal e única com o professor; uma forma de boicote às actividades da aula porque estas não lhe interessam ou porque se julga incapaz de as realizar com sucesso; uma forma de mostrar a sua revolta e a sua desconfiança perante os adultos, sendo o professor o que está mais perto e acessível; uma vontade de medir forças porque se está a crescer e há necessidade de afirmação; uma oposição pelo facto de ser forçado a estar ali, a aprender, quando lhe apetecia muito mais fazer outras coisas e estar com outras pessoas; uma maneira de forçar o professor a negociar novas regras porque ele é só um e os alunos são muitos, se eles se unirem todos, têm imensa força; uma falta de um projecto de vida que passe pela escola.

Os casos de indisciplina exigem soluções diversificadas. Mas todos eles precisam de disponibilidade, esforço, paciência e, nos casos mais difíceis, tempo. Não há casos perdidos, há é casos que não têm soluções rápidas e em que é preciso investir muito antes de vermos resultados.

Mas é suposto que os adultos somos nós, não só para mandarmos mais, também para compreendermos mais, para sabermos ajudar mais, quando isso é necessário. E para termos mais bom senso. Porque não há documento, por melhor que seja, que só porque existe resolva os nossos problemas.

E como me disse um aluno que tinha sido repreendido: "Querem-nos direitinhos, todos bem comportados, obedientes... e quem nos explica o mundo?"

Margarida César,
Universidade de Lisboa

VIII Seminário de Investigação em Educação Matemática

Helena Rocha

Decorreu na Figueira da Foz, nos dias 10 e 11 de Novembro último, o VIII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Este seminário, que contou com a presença de cerca de uma centena de participantes, tinha como objectivo central criar um espaço de divulgação e debate das principais linhas de investigação em Educação Matemática, a nível nacional e internacional.

Realizaram-se várias sessões incidindo sobre temas na área da Educação Matemática, Antropologia, Psicologia e Linguística. Apesar da aparente diversidade destes temas existem diversos pontos de contacto entre eles o que proporcionou que, com alguma frequência, se estabelecessem ligações entre as conferências, as comunicações e a mesa redonda realizadas.

O seminário contou ainda com uma apresentação de *posters*, à qual não pude assistir, mas que, segundo a opinião dos presentes, foi um momento rico em que foi possível conhecer de perto alguns dos trabalhos de investigação em curso ou já concluídos.

Foram diversas as sessões a que tive ocasião de assistir durante estes dois dias mas, na impossibilidade de falar de todas, vou limitar-me a duas das que mais me interessaram e que foram realizadas pelos convidados estrangeiros.

Uma delas foi a conferência proferida por Nilson Machado, da Universidade de São Paulo, logo no primeiro dia de trabalhos e que se intitulava *Sobre a ideia de rede na escola: o sentido literal e o metafórico.*

O sentido literal a que Nilson se referia certamente já o adivinharam, tratava-se de uma rede de computadores, ou seja, da tão falada internet. Quanto ao sentido metafórico... Bem, ao longo da sessão Nilson foi-nos colocando perante diferentes representações do conhecimento. Começou por nos falar na *teoria do balde* isto é, o conhecimento encarado como o enchimento de um balde. Segundo esta perspectiva, o planeamento das aulas efectuado por um professor seria encarado como a regulação da vazão para encher o balde, e a avaliação como a medição do nível de enchimento do balde. E, com o seu sentido de humor comentou:

> Hoje é difícil encontrar professores baldistas declarados. No Brasil todos são construtivistas declarados... seja lá o que isso significa!

Apresentou então a ideia de conhecimento como cadeia em que os novos conhecimentos se vão sucessivamente encadeando nos anteriores. Mas esta é uma imagem insuficiente para descrever o processo de conhecimento. É uma imagem parcial, sendo necessário compor as várias imagens se quisermos saber como se conhece. O conhecimento surge então, não como uma cadeia, mas como uma teia de significações que está sempre em plena actualização, numa metamorfose constante. É construído não a partir de um centro que se desenvolve, mas como uma teia que não tem centro mas tem centros de interesse. Ou seja o conhecimento conceptualizado como uma rede... tal como a rede da internet.

(continua na página 4)

Figueira da Foz, 1997

Carlos Próspero

O Rogério, que habitualmente faz de ponte de ligação entre os algarvios nesta altura de romaria, partiu na véspera para o Porto, em serviço; e foi deixando como mensagem "o Algarve reúne-se às 15 na bomba da BP em S.Marcos".

Faz-se a mala; ainda se dão as aulas da manhã; às 14.15 vou buscar o Taveira; aproximamo-nos da dita bomba com uns 10 minutos de avanço e vai crescendo a expectativa de encontrar já parte de um grupo amigos que se vê de 6 em 6 meses (ProfMat's e AlgarMat's).

Chegámos e... não está ninguém! Às três e um quarto, convencidos de que há algum desencontro, resolvemos arrancar; estava a chegar o Vítor com a Ana e a Cristina que ainda iam tomar um café. Apanhar-nos-iam à frente porque o Vítor (marido da Ana, ambos meus antigos alunos) é daqueles que passa tão depressa que a polícia nem o vê. Poucos quilómetros adiante, mais perto de S. Marcos, está a bomba da Galp e... estava desfeito o desencontro. Foram uns 5 minutos de confraternização, durante os quais passou o Vítor que, como adivinhámos, seguiu sem parar até à Figueira, perseguindo o velho professor. E nós lá fomos indo, a partir de certa altura debaixo de uma chuvada tal que por vezes nos sentimos como os velhos descobridores no meio de tanta água. Eram cerca de 8 da noite quando finalmente descobrimos a Figueira onde estava o motivo desta romaria que, uma vez por ano (já lá vão 12), arrasta cada vez mais fiéis por este País fora.

Primeira coisa a fazer: ir ao lugar santo (desta vez a Escola Secundária Dr. Joaquim de Carvalho) encontrar os primeiros amigos, levantar as pastas, reconhecer o local. Depois, o primeiro jantar de confraternização e, finalmente, o local de pernoita.

foto de Luís Brandão Faria

De manhã, lá vamos iniciar o ritual. Mas o que é isto? São aos montes os profmatistas; acabo por saber que há 1597 inscritos. Daí a sensação, durante aqueles dias, quando se circulava na Escola, de estar em Tóquio ou qualquer outra cidade de milhões de habitantes. E eram tantos os que apareciam pela primeira vez (espero que tenham ficado convertidos); e eram tantos os jovens (Força! Que o ProfMat e a APM vão precisando sempre de sangue novo). Com dificuldade, lá se vão encontrando velhos amigos (amigos feitos em Encontros anteriores), o que é sempre uma festa difícil de explicar a quem nunca esteve num. A um ProfMat não se vai: um ProfMat sente-se, respira-se, vive-se.

Há colegas de outros grupos que dizem que exagero; até entendo que os antigos, de que faço parte, vivam sensações diferentes, já que experimentaram Portalegre, Bragança, Faro, Viana do Castelo, com 220, 350, 400, 500 participantes; éramos ainda uma família nacional. A partir daí, a quantidade de pessoas que surge leva à formação de grupos regionais de tal forma que hoje já não se janta com o Mário de Portalegre ou a Ana de Bragança; apenas pode acontecer que, no mesmo restaurante, o Algarve encontre o Alentejo ou Trás-os-Montes. Ainda assim, vale a pena.

Quanto ao Encontro propriamente dito, também é natural que os "velhos" sintam saudades dos tempos em que se podia estar onde se queria; hoje, com tanta gente, há necessariamente muitas comunicações, conferências, painéis, sessões práticas ... em simultâneo e acontece com frequência haver momentos em que gostaríamos de estar em vários sítios.

Mas isso é o resultado do crescimento da APM que desde o princípio ambicionámos, é o resultado do êxito do ProfMat que sempre desejámos (o número de dinamizadores já rondou os 200). E porque está acontecendo o que quisemos, continuo a defender estes Encontros anuais que mantêm viva uma certa unidade entre colegas de várias zonas do País, que nos fazem sentir que em Beja, Cantanhede ou Setúbal (e até mesmo em Cabo Verde ou Moçambique, no Brasil ou nos E.U., em Inglaterra ou na vizinha Espanha) há quem tenha os mesmos problemas, há quem sinta as mesmas dificuldades, há também quem procure novos caminhos, novas soluções; e é assim que, quer numa sala onde decorra uma sessão ou se vê uma exposição, quer num corredor onde se encontra um colega, vamos trocando experiências, vamos conhecendo novas ideias, vamos, pelo menos, vendo formas diferentes de apresentar ideias velhas ou ainda, vamos recordando coisas que tínhamos esquecido.

É este turbilhão que vale a pena manter porque nos faz sentir vivos, porque nos dá forças para continuar (aos velhos e aos novos). Dizia o José António Duarte nas suas breves impressões sobre o ProfMat 91, acerca do acto pedagógico:

> Só que, bem diferente do actor de teatro que entre várias cenas e final recebe palmas, que o estimulam e equilibram emocionalmente,... Raramente ouvimos as palmas,... Raramente pedem bis.

Eu julgo que todos, em qualquer profissão, precisamos das palmas; as nossas "ouvem-se", às vezes anos depois, quando ex-alunos que não víamos há muito tempo nos cumprimentam com alegria, ou quando ex-alunos que vemos mais frequentemente nos tratam com carinho. O resto do calor de que precisamos para além das palmas que demoram, vimos buscá-lo ao ProfMat — às comunicações, às sessões práticas, às conferências, à banca da APM, às bancas das editoras, às exposições, à hora do café ou à do convívio; por tudo isto, enquanto houver espaço, continuo a pedir que todos os anos surjam carolas dispostos a uma época de preocupações, de canseiras e de tantas mais coisas, para organizar mais um ProfMat. Mais um que terá sempre quem lhe aponte defeitos (não é difícil encontrá-los em obras humanas) mas terá sempre mais que lhe apontam qualidades e lhe encontram vantagens.

À Comissão Organizadora, pelo muito que nos deu, um MUITO FORTE ABRAÇO! Obrigado Figueira. *Gostámos de estar aqui!*

Para o ano, decerto antes das 15h, o Algarve encontra-se na bomba de S. Marcos.

Até Guimarães.

Carlos Próspero
Esc. Sec. João de Deus, Faro

Seminário de Investigação em Educação Matemática

(continuação da pág. 2)

Também a conferência proferida, no segundo dia de trabalhos, por Jeff Evans, da Midlesex University do Reino Unido e intitulada *Construindo pontes* foi bastante interessante. Nela foi abordado o processo de transferência da aprendizagem na escola para fora da desta.

A questão da aplicação da Matemática escolar noutros contextos fora da escola, é importante para professores e alunos, mas também controversa. Segundo Jeff Evans, a transferência, ou seja, a utilização de ideias e conhecimentos num outro contexto, não parece estar garantida à partida, uma vez que a continuidade entre as práticas escolares e não escolares não é imediata. Além disso, por vezes a transferência é posta em risco por inter-relações entre o pensamento e a emoção, que levam a situações inesperadas em virtude da tendência da linguagem para assumir diferentes significados.

Para que a transferência ocorra é necessária uma tradução entre discursos através de uma atenção cuidada aos significantes, às representações e a outros elementos linguísticos comuns nos dois campos.

Embora as ideias apresentadas no decorrer da sessão pareçam apontar no sentido de se poder responder afirmativamente à pergunta: — Será a transferência possível? — outras questões foram surgindo durante o debate, tais como:

> De que modo ocorre a transferência? Porque ocorre? Devemos ensinar Matemática ou ensinar Matemática "para a transferência"? Como desenvolvemos práticas pedagógicas que facilitem a transferência?

Questões sem dúvida ilustrativas do interesse despertado pela conferência e que até talvez venham a constituir tema de futuras conferências.

No que respeita às comunicações, apenas pude assistir a algumas, uma vez que decorriam em simultâneo, o que me obrigou por vezes a fazer escolhas difíceis.

Chamou-me particularmente a atenção a existência de sessões com temas comuns, que abordaram problemáticas inerentes à realização de actividades de investigação na sala de aula e ao trabalho cooperativo. Para além disso também foram apresentadas investigações relativas à aprendizagem de conceitos matemáticos e ao desenvolvimento profissional dos professores.

E claro, não posso terminar sem referir os momentos de convívio e de contacto informal, tão importantes nestes encontros, nomeadamente o que decorreu no Teimoso (o restaurante onde se realizou o jantar convívio do seminário).

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

ProfMat 97, duas intervenções

Sendo o ProfMat sempre um momento alto na vida da APM, pareceu-nos importante, pelo seu conteúdo e significado, publicar na Educação e Matemática duas intervenções feitas na sessão de encerramento do ProfMat97, na Figueira da Foz: o balanço do Encontro feito por Cristina Loureiro, actual presidente da APM, e a intervenção de Mariano Gago, Ministro da Ciência e Tecnologia.

Um olhar sobre o ProfMat

Olhando para um ProfMat podemos ter uma óptima representação do que é a APM. Por isso, ao fazer uma síntese sumária do que foi este Encontro penso poder dar a todos os presentes, e a si especialmente Sr. Ministro da Ciência e Tecnologia, uma boa ideia do que é a APM.

Professores de todos os níveis de ensino, do 1° ciclo ao superior,
professores com todos os tipos de experiências, desde aqueles que ainda são estudantes professores, professores nos primeiros anos de profissão, professores com muitos anos de serviço e até professores aposentados,
professores com todos os tipos de graus, licenciados e também doutorados,
professores de todas as idades,
professores de todo o país,
professores em grupo,
professores entusiasmados, activos e intervenientes.

Encontro em que há momentos de trabalho de natureza muito diversa:
conferências,
comunicações,
grupos de trabalho,
painéis,
sessões práticas,
laboratórios de matemática,
apresentação de projectos,
apresentação de materiais,
exposições,
e há também momentos de lazer e divertimento.

Um outro aspecto é o que tem que ver com o tipo de dinâmica e participação do Profmat.

Cerca de 1700 professores,
cerca de 350 intervenções activas, aproximadamente 20%, das quais mais de metade foram da iniciativa dos participantes.

O que significa que em cada dez professores pelo menos um tomou a iniciativa de trabalhar com os outros.

Se pensarmos o que é estar a falar com dez pessoas podemos ter uma ideia do que é a facilidade da comunicação, a proximidade das ideias e do discurso.

Não foram alguns que falaram para muitos. Falámos todos uns com os outros.

E falámos de quê?

Falámos do ensino da matemática, como não poderia deixar de ser,
da matemática, neste encontro falou-se muito de matemática, da matemática de sempre, da matemática de todos e da matemática do fim do século XX,
da tecnologia, e nunca é demais referir que sobre a utilização educativa da tecnologia os professores de matemática têm estado sempre em cima do acontecimento, na crista da onda, se assim podemos falar,
de currículos,
de avaliação,
de formação de professores,
de desenvolvimento profissional,
das escolas,
e tudo isto com uma particularidade muito especial, estivemos sempre a pensar nos alunos.

No Profmat não costuma haver um tema base, embora se possa perceber que há temas mais aprofundados do que outros. Mas poder-se-ia então pensar: não são sempre os mesmos assuntos?

De facto, de quase todos eles já vimos falando há vários anos. O que é notável é que cada vez os aprofundamos mais.

Em cada Profmat, e este já foi o 13°, é possível sentir a evolução da maturidade com que apresentamos e discutimos cada assunto.

É por isso que no fim de cada Profmat tem havido sempre a ideia de que foi melhor do que o anterior.

As ideias têm vindo a ser construídas, as dúvidas amadurecidas, as soluções experimentadas e repensadas, originando novas ideias, novas dúvidas ...

A melhor tradução matemática deste processo é a de recursão. Um conceito fortíssimo em matemática e notável na interpretação da vida.

Tomando as palavras de ontem do professor Nilson, o presente é o futuro do passado e será o passado do futuro.

Uma das características interessantes do ProfMat é que toda a gente tem sempre a sensação de que perdeu coisas importantes.

Felizmente que isso acontece, porque significa que cada um de nós sozinho não consegue acompanhar tudo o que de bom o Profmat tem. Por isso eu, como todos outros, não posso fazer uma síntese completa das conclusões deste encontro.

Do que assisti, do que li, do que pude conversar, do que conheço das ansiedades dos professores, do trabalho que a APM tem vindo a desenvolver, sei que vamos embora com muitas ideias novas, mas também com muitos problemas e dificuldades por enfrentar.

O projecto 2001 deu-nos uma primeira imagem de parte do panorama do ensino da Matemática e mostrou já alguns aspectos inquietantes.

O 1° ciclo. Os problemas da aprendizagem da Matemática nos primeiros anos são grandes e esta área, cada vez mais reforçada na APM, vai ter ainda muito que trabalhar.

O ajustamento do programa de Matemática do ensino secundário, com tudo o que isso implica de equipamento de laboratórios nas escolas, possibilidade de desdobramento de uma hora semanal, de acompanhamento dos professores. São várias dificuldades a enfrentar.

A escolaridade básica obrigatória com todas as questões de generalização, diversificação e avaliação.

A intervenção do professor de Matemática na escola para além da sala de aula.

As decisões curriculares que têm de acompanhar o desenvolvimento da matemática como ciência, com tudo o que isso hoje tem de carga experimental e tecnológica.

A matemática que aprendemos e a matemática de hoje não são as mesmas e a matemática do futuro também será diferente.

A síntese, possível de fazer hoje, deste encontro está nas actas e no programa, e por isso, simbolicamente ofereço-lhe um programa e um exemplar das actas do Profmat.

É o retrato de uma Associação de Professores que quer melhorar o ensino da Matemática.

Matemática, essa disciplina tão mal amada, responsável por tantos traumas, mas também tão fundamental para o desenvolvimento de cada um e de todos.

A matemática tem vindo a afirmar-se como uma área do saber especialmente dotada.

Como ciência é reconhecido o seu papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico, e, por isso, a sua importância para o desenvolvimento de um país.

Na escola ela tem vindo a revelar-se como uma disciplina com especiais e exclusivas potencialidades formativas e por isso a sua importância para o desenvolvimento de cada cidadão.

Os professores de Matemática têm vindo a mostrar que, apesar das dúvidas, dificuldades e receios, sabem o que querem, estão preparados para agarrar o futuro, se me é permitida a expressão.

Mas todos este trabalho precisa de apoios e de disponibilidade.

Apoios porque hoje em dia o ensino da Matemática exige muitos equipamentos, computadores, calculadoras, laboratórios equipados, vídeos, livros,...

e de muita disponibilidade dos professores.

Mas convém lembrar que a imagem pública da matemática e do seu ensino também tem que ser cuidada.

Tudo isto aponta para uma maior atenção por parte do Governo, especialmente dos Ministérios da Educação e da Ciência e Tecnologia.

Estes podem dar contributos decisivos para:

equipar as escolas,

facilitar e melhorar esta rede de cooperação entre os professores de Matemática,

melhorar a imagem pública da Matemática.

Em nome de todos os participantes gostaria de agradecer vivamente este excelente ProfMat e propor uma grande salva de palmas.

Cristina Loureiro,
Presidente da Direcção da APM

A matemática tem um papel crítico neste fim de século

Caros colegas, Comissão Organizadora do PROFMAT, Senhores representantes da Câmara Municipal da Figueira da Foz e do Governo Civil, Senhoras anterior e actual Presidente da APM, Conselho Directivo da Escola, em nome da Escola que aqui nos acolhe. Gostaria de fazer um pouco mais do que dizer umas palavras de circunstância no final de um encontro feito com grande generosidade, por parte de todos vós, com grande confiança no futuro e com grande energia.

Gostaria de vos dizer que o vosso exemplo de motivação de professores duma área disciplinar no campo das ciências é invulgar em Portugal e é um exemplo para que se possa mudar e melhorar o acesso da população ao conhecimento científico.

Julgo que chegou o momento de proceder a uma mobilização de todos aqueles que trabalham no dia-a-dia o conhecimento científico no nosso país, de uma mobilização geral em prol da cultura científica em Portugal. O vosso trabalho diário, quotidiano, modesto, é sempre visto pelos insucessos e raramente pelos sucessos, que desses não reza a História. Contudo, julgo, que dos sucessos é que é preciso que reze a História, e a vossa mobilização é a única força capaz de transformar os exemplos em sucessos, os pequenos sucessos em grandes sucessos, e criar um clima geral de confiança na actividade científica, como actividade essencial para o desenvolvimento cultural do país.

A matemática tem um papel, dispenso de o dizer porque o sabem muito melhor do que eu, um papel crítico e de charneira neste fim de século. Por um lado porque está indissociavelmente ligada às linguagens formais e por outro lado porque também está ligada à relação dessas linguagens com o real. E essas duas vertentes da matemática fizeram e fazem a sua história, e são evidentes, se não na actividade profissional dos matemáticos, todos os dias na sala de aula. É de linguagens formais que falamos mas também do real que estamos a falar. E é a ponte entre estas duas vertentes que constitui, provavelmente, o fundo do problema do ensino da matemática. Não há ciências humanas ou sociais ou da natureza sem matemática. Esta é a grande virtude da vossa disciplina, mas também a sua grande maldição, porque a coloca no lugar de uma porta estreita ao conhecimento, ao conhecimento da física, da química, da estatística, de todos os restantes conhecimentos.

Foi uma descoberta na história da civilização, que vós todos transportais no vosso trabalho, a descoberta que o real só se entende depois de matematizado, depois de alguma forma ser entendido e descrito em linguagens formais adequadas. Que essas linguagens formais, nalguns casos, para serem inventadas requereram a proximidade e intimidade com o real, noutros casos foram descobertos por iluminação, por inteligência... Depois destas descobertas o real deixou de ser o que era e nós tínhamos descoberto que o mundo era outro, foi assim na física, foi assim em muitas outras disciplinas.

É essa grande aventura que a matemática transporta em si, neste magnífico exemplo de civilização que é todos os dias uma escola, que procura fazer com que a civilização se recrie e que depois de uma geração morta, a nova tenha herdado a civilização que estava antes. É isto que está no centro da vossa actividade.

Eu gostava de vos dizer, que a vossa responsabilidade social é não deixar que a matemática seja essencialmente, na escola, um utensílio de selecção social contra a vossa vontade, e de fazer com que seja antes um utensílio de apropriação daquilo que a população está mais despojada, isto é, do conhecimento. Gostava de vos dizer que essa resposta social que é a vossa, a devemos todos partilhar convosco e garanto-vos que eu a partilho.

Não sou um matemático de profissão, como sabem, nem professor de Matemática. Sou professor de Física e por obrigação também de Matemática, mau com certeza, mas isso dá-me pelo menos a certeza da importância do vosso trabalho e do significado que tem o movimento associativo dos professores de Matemática. O movimento associativo, em Portugal, dos professores das disciplinas científicas é ainda muito fraco. Urge que a vossa experiência na APM se estenda a outras disciplinas, urge criar em Portugal uma grande associação, federação de professores de ciências que partilhem os debates, as interrogações e as influências políticas que têm as associações de professores de ciências em toda a Europa.

Eu considero ser minha obrigação apoiar a APM e todas as outras associações de professores neste trabalho de internacionalização. Julgo possível lançar com o vosso apoio um programa de internacionalização do vosso trabalho que não dure só nos congressos e nas reuniões mas durante o ano, que apoie idas e vindas, estágios cruzados de professores noutros países e de professores doutros países em Portugal, que procure geminar escolas e instituições de investigação científica, que bem precisam muitas vezes de se abrir à realidade da escola elementar e

Foto de Luís Brandão Faria

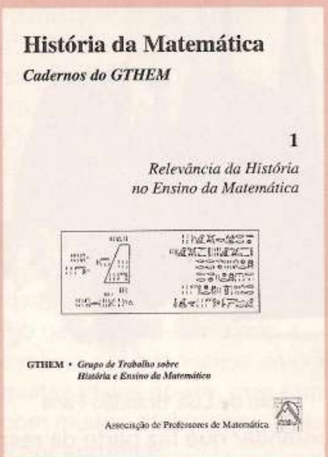
compreender que faz parte da responsabilidade social dos cientistas apoiar tudo o que possa ser feito para a promoção da cultura científica do país.

Das conclusões que ouvimos, sublinhei nas minhas notas o vosso próprio sublinhado para a melhoria das aprendizagens do 1º ciclo, o ciclo de todas as exclusões. Julgo que não se trata só de uma responsabilidade dos professores do 1º ciclo, trata-se de uma responsabilidade de todos os professores dos outros graus de ensino e também uma responsabilidade da Universidade que tem capacidade de influência sobre currículos, programas, métodos, formação de professores e sobre prioridades políticas.

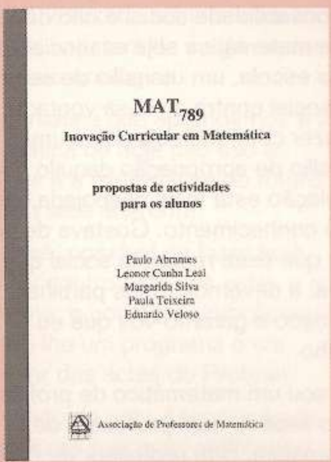
Esta tendência nova na sociedade portuguesa para que possamos uns e outros assumir responsabilidades colectivas, designadamente responsabilidades a favor dos mais fracos, a favor daqueles para os quais a matemática é hoje uma fronteira de exclusão e não uma fronteira de abertura, deve ser saudada com força e o vosso exemplo é a melhor saudação a que, neste momento, me gostaria de associar.

Mariano Gago
Ministro da Ciência e Teconologia

NOVAS Publicações APM



História da Matemática
Caderno do GTHEM
Preço500$00



MAT$_{789}$
Inovação Curricular em Matemática
Preço1200$00

MAT$_{789}$
Inovação Curricular em Matemática
Preço750$00

The Geometer's Sketchpad
Entre 12000$00 e 13000$00

Agenda da APM
97/98
Preço 600$00

Histórias da aula de Matemática
Preço700$00

Tecnologias no Laboratório de Matemática

Adelina Precatado, Conceição Antunes, Paula Teixeira

O Laboratório de Matemática deve ser entendido como um espaço físico próprio para o ensino e aprendizagem da Matemática, equipado com recursos diversificados, tecnológicos e outros, onde seja possível criar um ambiente propício à experimentação e à descoberta, à aprendizagem da Matemática.

O programa do ensino secundário, que este ano entrou em vigor, valoriza a utilização de tecnologias na aula de Matemática. Refere nomeadamente: "É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador (...) um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo". Mas os programas referem também que "deve tender-se para a constituição nas escolas secundárias de Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários"[1].

A questão central é que é indispensável que, na escola, os alunos sejam, de alguma forma, encorajados pela tecnologia ou pelo desafio de situações problemáticas significativas, dentro e fora da sala de aula, a explorar, a experimentar, a investigar, a fazer conjecturas e a validá-las, a procurar e manipular modelos em geometria, funções ou estatística, em completa "liberdade para aprender".

O Laboratório de Matemática deve ser entendido como um espaço físico próprio para o ensino e aprendizagem da Matemática, equipado com recursos diversificados, tecnológicos e outros, onde seja possível criar um ambiente propício à experimentação e à descoberta, à aprendizagem da Matemática.

As ferramentas tecnológicas hoje disponíveis desde as calculadoras científicas e gráficas aos programas de computador, vídeos ou à Internet, não sendo por si suficientes para criar o ambiente de que falámos, são no entanto indispensáveis e, se bem utilizadas, podem ser um contributo importante no sentido de proporcionarem situações de trabalho estimulante e criativo em Matemática, dando resposta à natural curiosidade sempre crescente dos alunos.

Mas afinal o que é um Laboratório de Matemática? Como se organiza? O que são actividades experimentais em Matemática? Em Matemática também se experimenta? Que sentido tem essa experimentação? Estas são questões que hoje se colocam a qualquer professor de Matemática, as respostas nem sempre são fáceis nem únicas mas vão aparecendo com o decorrer do tempo.

Vejamos, a sala de aula pode ser um Laboratório de Matemática quando ela funciona de modo a que os alunos em trabalho individual ou em grupo usam as calculadoras gráficas no estudo de famílias de funções, quando usam um programa de computador na geometria, quando constroem e manipulam materiais para o estudo da geometria ou as funções, etc... quando experimentam, descobrem relações, conjecturam e por vezes até provam.

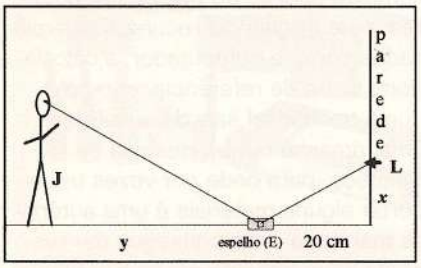
Mas a maior parte das actividades que apresentamos aos alunos não cabem numa só aula de 50 minutos e requerem com frequência recursos diversificados como o computador, a calculadora, livros de referência, etc, pelo que a tradicional sala de aula (hoje uma, amanhã outra), despida de recursos, para onde por vezes transportar alguns materiais é uma autêntica maratona, não consegue dar resposta a um trabalho eficaz e continuado. Portanto, tal como acontece noutras disciplinas (Física, Biologia, Química, ...) devem ser organizadas salas especiais em Matemática, ou sejam, Laboratórios de Matemática.

Quando falamos em actividades experimentais ou em matemática experimental encaramos este aspecto de forma bastante ampla. A experiência sempre foi e continuará a ser, um método importante de descoberta em Matemática. A experimentação é, pelo menos, uma parte importante do processo matemático. É, pois, fundamental que os alunos também tenham oportunidades de experimentar, de descobrir, de conjecturar, de perceber que algumas das suas conjecturas podem ser provadas, que outras são colocadas de lado porque são falsas e que outras se mantêm como conjecturas.

A questão fundamental que se coloca ao professor de Matemática é a forma como os alunos aprendem e "fazem" Matemática e isso não é independente da sua "experiência matemática" na sala de aula, ou seja da natureza das actividades que tiveram oportunidade de desenvolver, dos recursos disponíveis, do ambiente de aprendizagem que foi possível criar. Desta forma talvez possamos não só proporcionar uma relação mais amigável entre os alunos e a Matemática mas também uma visão mais correcta do que efectivamente é esta disciplina.

Apresentamos a seguir um conjunto de actividades que pela sua natureza e pelos recursos que pressupõem pensamos poderem ilustrar as ideias que temos sobre a utilização da tecnologia no Laboratório de Matemática.

1. Espelhos e reflexões

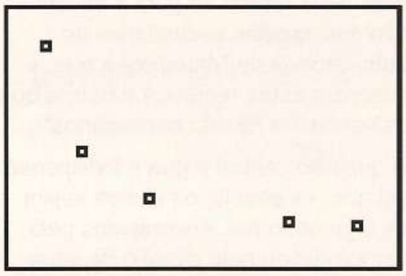


A que distância (y) do espelho (E) se deve colocar o João (J) de modo a ver no espelho a imagem de um lápis (L) colocado por outro colega na parede da sala de aula, a 10 cm do chão? E se o lápis for colocado a 15, 20, ... x cm, a que distância se deve colocar o João?

Na experiência que realizámos o João media 1.66 m e recolhemos os seguintes dados:

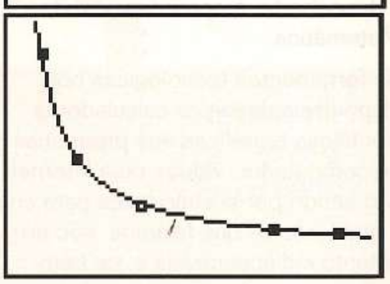
dist. do lápis ao chão (X)	dist. do João ao espelho (y)
10 cm	3,50
20 cm	1,70
40 cm	0,86
80 cm	0,49
100 cm	0,39

Introduzidos os dados numa calculadora gráfica uma primeira análise pode ser feita através do diagrama de dispersão.



Uma função que modele a situação pode ser encontrada também, directamente com a calculadora, através de uma regressão:

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=29.39940321
 b=-.9417431437
```



Ou seja, um modelo possível é dado pela função $y = 29.39940321x^{-0,9417431437}$.

Mas este será o melhor modelo?

Porque não fazer uma simulação da situação utilizando o Cabri II?

Utilizámos uma TI92, para simular a situação no Cabri. (fig.1)

Depois de representada a situação, medidas as distâncias do lápis ao chão (x), do espelho à parede, do espelho ao pé do observador (y) e recorrendo à ferramenta de animação é possível simular o andamento do João, movendo o "pé" em direcção ao espelho e recolher as sucessivas medidas de x e de y. (figs. 2, 3 e 4)

Aberto o ficheiro *sysdata* onde foram colocados os dados recolhidos é agora possível representar graficamente a situação, observar a tabela, construir uma coluna para o produto xy. (fig.5)

Alertando os alunos para a relação de semelhança entre os dois triângulos surge, talvez, um outro modelo através de uma função de proporcionalidade inversa. No caso inicial, dado que o João tinha 1.66m e a distância do espelho à parede era 20 cm a função será $y = \frac{1,66 \times 20}{x}$.

Nesta altura pode ser discutido qual dos dois modelos é melhor. Porque é que os dados recolhidos no início, de forma experimental, não coincidiram exactamente com os fornecidos pelo modelo de proporcionalidade inversa?

É uma experiência extremamente simples que possibilita o estabelecimento de conexões entre vários conhecimentos matemáticos (funções, geometria, estatística) e uma discussão em torno da importância das condições de recolha dos dados experimentais, das potencialidades e limitações da tecnologia, da validade de diversos modelos para uma mesma situação, da necessidade de criticar e confrontar o modelo encontrado com os dados da realidade e com os conhecimentos disponíveis sobre o assunto a ser estudado.

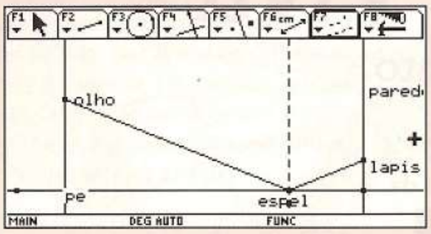


figura 1

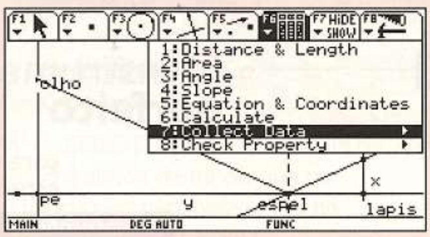


figura 2

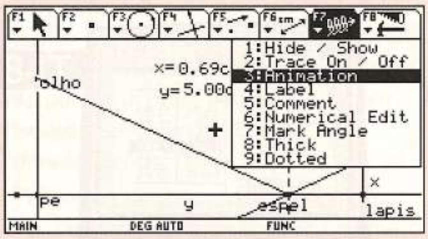


figura 3

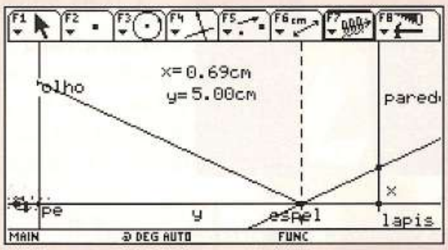


figura 4

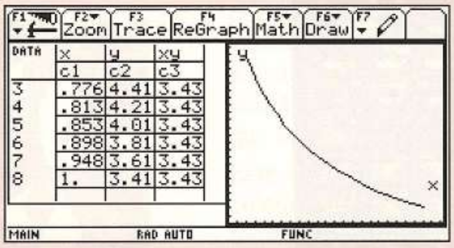
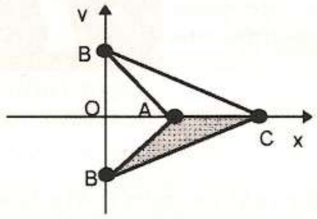


figura 5

2. Triângulo de área máxima

Num referencial o. n. do plano marcam-se os pontos A, B e C tais que: C (4,0) : $A \in [OC]$; $\overline{OA} = \overline{OB}$ e B é um ponto do eixo das ordenadas.

Quais são as coordenadas dos pontos A e B de modo que a área do triângulo ABC seja máxima?



Reconhecidas as duas soluções para o ponto B, o problema pode ser resolvido de diversas formas. Se utilizarmos o *Geometer's Sketchpad* é possível construir o triângulo nas condições indicadas e pedir as medidas de OA, OC e da área do triângulo. Deslocando o ponto A descobrimos por experimentação coordenadas que tornam a área máxima e consequentemente as coordenadas dos dois pontos aqui designados por B. É ainda possível pedir uma representação gráfica da função área.

O problema pode ser generalizado, fazendo agora variar C e descobrindo que, no caso geral, a área é máxima quando A for o ponto médio do segmento OC. (fig.6)

Mais uma vez, de uma forma experimental e simples os alunos têm oportunidade de resolver o problema, de descobrir e generalizar. Evidentemente que os alunos podem e devem ser desafiados a escrever uma expressão analítica para a função área e a tentar provar algebricamente as conclusões a que chegaram experimentalmente.

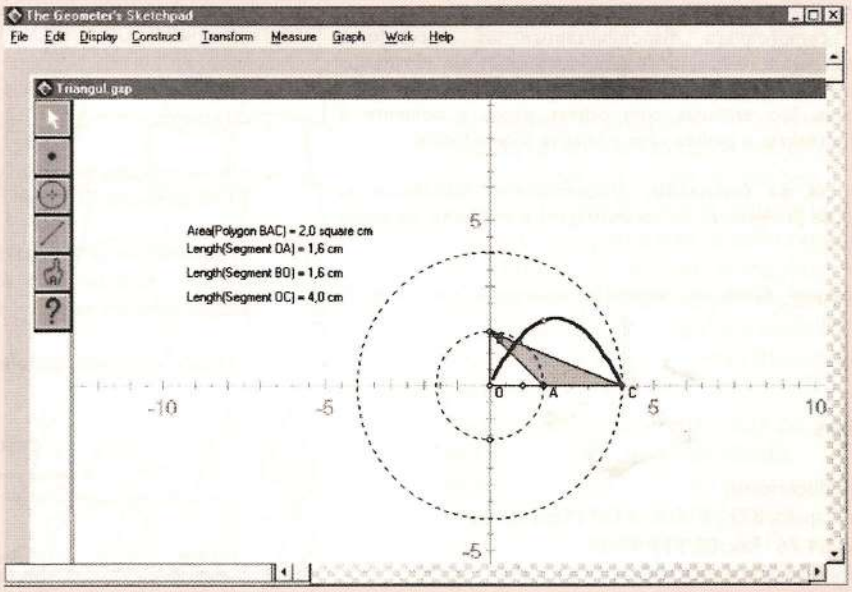


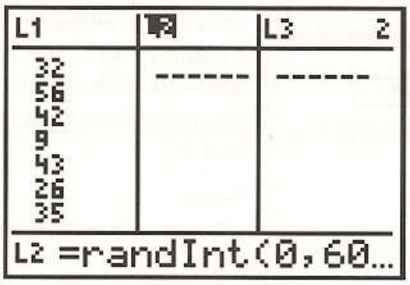
figura 6

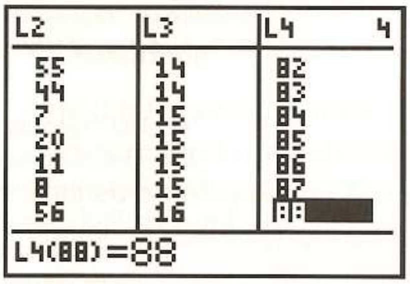
3. O encontro

Dois estudantes combinaram encontrar-se num bar entre as onze e a meia noite e esperar 15 minutos um pelo outro antes de se dirigirem a outro bar. Qual é a probabilidade de se encontrarem no 1º bar?

Como resolver este problema? Porque não experimentar, ou seja fazer uma simulação da situação?

Com uma TI83, gerámos uma sequência de 200 números aleatórios, entre 0 e 60 (correspondendo aos 60 minutos), para cada um dos amigos, para isso basta introduzir na calculadora a expressão *RandInt(0,60,200)*.

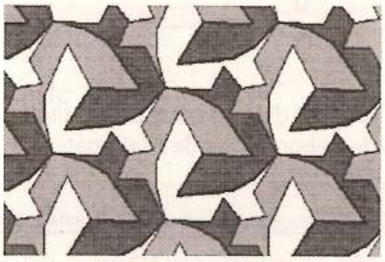




Na lista L3 introduzimos o valor absoluto da diferença entre L1 e L2 através da expressão *abs(L1-L2)*. Para facilitar a contagem ordenámos a coluna L3 e criámos uma coluna L4 para contagem. Em 87 casos, dos 200 considerados, a diferença entre as horas de chegada é inferior ou igual a 15 minutos. A probabilidade será portanto cerca de 44%. Podem ser feitas outras experiências, aumentado o número de casos, recorrendo por exemplo a uma folha de cálculo. Será uma boa resolução? Uma coisa é certa: poucos alunos resolveriam este problema por outro processo. E, num contexto prático, de resolução do problema, não será suficiente saber que a probabilidade de se encontrarem é de cerca de quarenta e quatro por cento?[2]

4. Pavimentar com o Tesselmania

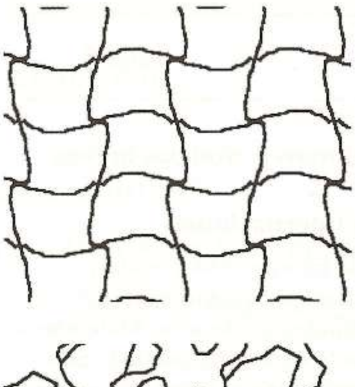
M. C. Echer (1898-1972) coloria os seu desenhos de modo que os ladrilhos que partilhassem uma fronteira tivessem cores contrastantes.

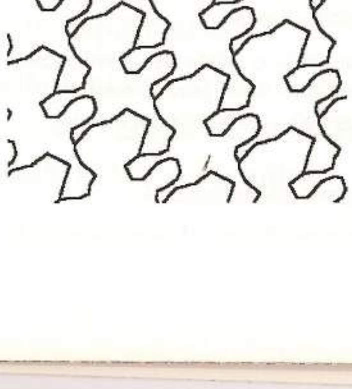


Quantas cores são necessárias para conseguir este efeito?

Vamos examinar algumas das transformações que podem ocorrer numa pavimentação e determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir cada ladrilho nas diferentes situações.

Como pintar os dois padrões abaixo de modo a que nenhum de dois ladrilhos que partilham a mesma fronteira tenham a mesma cor? Quantas cores são necessárias?





Se copiarmos cada uma das figuras para uma folha de acetato podemos tentar pavimentar o plano e descobrir o número mínimo de cores necessárias para que duas peças que façam fronteira tenham cores diferentes.(fig.7)

Podemos também usar o programa Tesselmania para descobrir o número mínimo de cores necessárias para colorir uma pavimentação. Para isso podemos seleccionar cada tipo de ladrilho base do programa, modificá-lo e pintá-lo. Depois o programa cria o padrão e regista o número de cores que foram necessárias.

Este é um desafio que deixamos aos colegas leitores da revista e que também pode ser colocado aos alunos, sugerindo-lhes que:

- descrevam os resultados a que chegarem e os discutam com os colegas;
- façam conjecturas tendo em conta que as características de um ladrilho ou do seu padrão estão relacionadas com o número mínimo de cores necessárias para o padrão;
- testem a hipótese formulada usando o Tesselmania;
- imprimam os estudos que forem fazendo para demonstrar a sua teoria.

Um dos assuntos estudados ao longo da escolaridade é o tema das pavimentações. O programa *Tesselmania* destina-se ao estudo das transformações geométricas, pavimentações, padrões e relações entre matemática e arte. O programa usa relativamente aos vários tipos de transformações do plano a notação de Heesch, matemático Alemão, que investigou e classificou as várias formas de ladrilhos que pavimentam o plano.

Pode ser utilizado com alunos de todos os níveis de escolaridade, incluindo o 1º ciclo. É um programa muito interessante que pode ser experimentado no Centro de Recursos da APM (versão Windows) e cuja versão de demonstração pode ser importada da Internet a partir do endereço: http://www.keypress.com/product_info/tesselmania.html

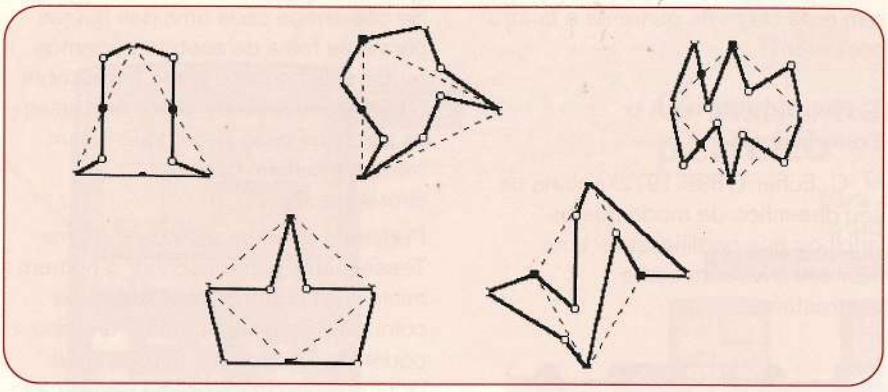


figura 7

5. A Internet, as agulhas de Buffon e o número π

E para terminar uma experiência bastante conhecida mas que desperta sempre o interesse dos alunos.

Se lançarmos uma agulha sobre uma cartolina onde foram desenhadas rectas paralelas situadas à distância umas das outras do dobro do comprimento da agulha, qual é a probabilidade de a agulha intersectar uma das rectas? E o inverso desta probabilidade?

Os alunos podem realizar a experiência com uma cartolina e agulhas, mas porque não fazer uma viagem na Internet, entrar na página

http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html, fazer a simulação e descobrir, tal como Buffon descobriu, que afinal o inverso desta probabilidade é o número π. (fig.8)

Em síntese, diríamos que a constituição de Laboratórios de Matemática, encarados como espaços próprios e ricos em recursos tecnológicos e outros, é hoje uma exigência não só no ensino secundário mas também para os outros ciclos.

É preciso ter consciência que a existência de Laboratórios não significará por si só a resolução dos muitos problemas que se colocam ao ensino da Matemática e muito menos à escola. No entanto, para que os alunos desenvolvam capacidades de explorar, conjecturar, formular e resolver problemas, argumentar e comunicar, tal como prevêm os actuais programas, é fundamental não esquecer o espaço, os recursos, o ambiente e a natureza das actividades matemáticas que são proporcinados aos alunos.

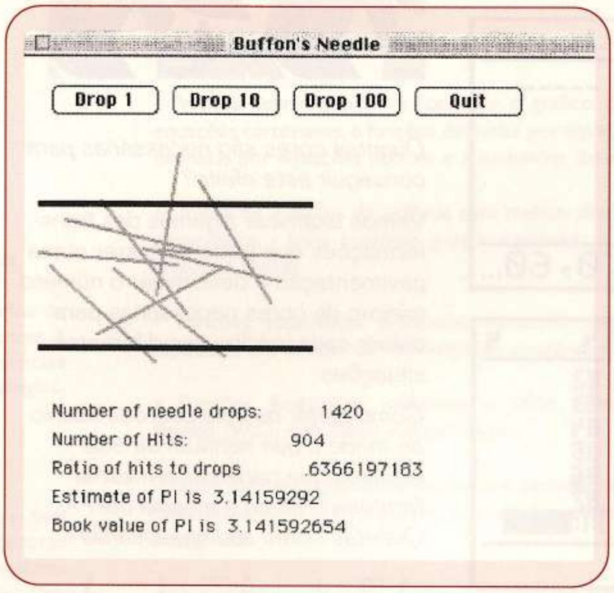
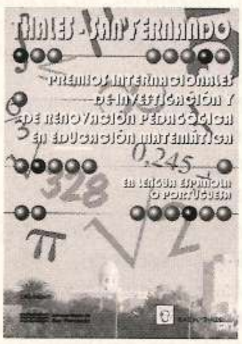


figura 8

Notas

1. Novo programa ajustado, página 10.
2. A propósito deste problema ver "O problema do Trimestre" na *EM* nº25.

Adelina Precatado
Esc. Sec. Camões
Conceição Antunes
Esc. Sec. Prof. Herculano de Carvalho
Paula Teixeira
Esc. Sec. da Amadora



Prémios Internacionais • Notícias breves

Prémios Internacionais

A Sociedade Andaluza de Educação Matemática THALES tem entre outros objectivospromover a Investigação em temas ligados à Educação Matemática. Assim, THALES juntamente com outra entidade San Fernando, atribuem prémios internacionais de investigação e renovação pedagógica em Educação Matemática, em língua espanhola ou portuguesa.

Os trabalhos a apresentar terão o nome de "Thales-San Fernando" deverão ser originais e não poderão ter sido, nem parcial nem totalmente, publicados nem submetidos a consideração para publicação em alguma revista.

Para mais informações contacte a APM, email: apm@mail.telepac.pt

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta é uma das referidas no artigo "Tecnologias no Laboratório de Matemática" da autoria de Adelina Precatado, Conceição Antunes e Paula Teixeira, publicado nesta revista.

Esta proposta apresenta um processo experimental para a determinação de π e a utilização da Internet para "correr" uma simulação relativa às agulhas de Buffon.

Escola..

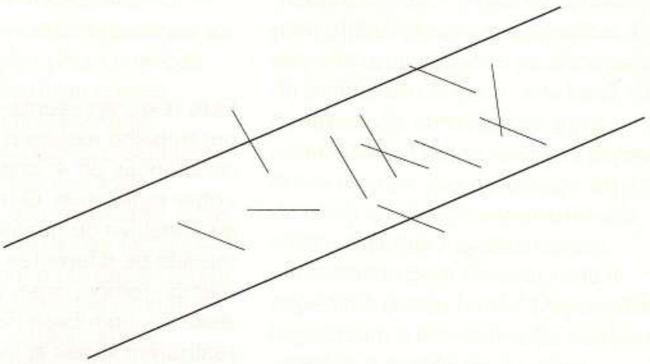
Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)..

As agulhas de Buffon, π e a Internet

1. Material:

- agulhas de comprimento c
- cartolina com um conjunto de linhas

paralelas e equidistantes entre si de 2c.



2. Experiência:

Lança as agulhas sobre a cartolina e verifica quantas intersectam uma das linhas.

Repete a experiência várias vezes.

3. Qual é a probabilidade de uma agulha cair sobre uma linha?

4. Curiosidade:

O naturalista e físico francês Georges Louis Leclerc Comte de Buffon (1707-1788) propôs este curioso método probabilístico para calcular um valor aproximado de um número irracional teu conhecido. Depois de fazer um número bastante grande de lançamentos de agulhas (N) e contar as que intersectaram as rectas (n), considerou N/n uma aproximação do número em causa.

Com os dados que recolheste, calcula N/n.

5. Imaginas que número procurava Buffon?

Entra na Internet, na página *http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html*

Corre a simulação *Java Applet for Buffon's Needle*. Qual era afinal o número que Buffon procurava?

6. Faz um pequeno relatório desta experiência.

Consulta o teu livro para fundamentares melhor os teus raciocínios e o conceito de probabilidade que usaste e recorre também às informações disponíveis na Internet, nomeadamente na página indicada, sobre o assunto.

A estimativa no 1° ciclo do ensino básico*

Isabel Costa Ferreira

Actividades de estimativa de quantidade e de medida de diferentes grandezas (massa, tempo, área, volume e capacidade) — um contributo para estimular desde cedo o gosto pela Matemática.

Este texto apresenta uma síntese de um trabalho realizado com um grupo de crianças do 4° ano de escolaridade sobre estimativa. O trabalho envolveu a estimativa de quantidade e de medida de diferentes grandezas — massa, tempo, área, volume e capacidade —, com base nas quais se realizaram várias actividades.

Não podendo fazer-se aqui a descrição integral dessas actividades, apresentam-se apenas alguns exemplos, que podem ajudar a compreender a sua importância neste nível de ensino e a sensibilizar os professores para a inclusão deste tipo de actividades nas suas práticas pedagógicas. Neste sentido, transcrevem-se também algumas expressões dos alunos para mostrar o interesse que estas actividades lhes suscitaram, bem como as estratégias de pensamento por si utilizadas para a resolução dos problemas de estimativa.

Penso que ao professor do 1° ciclo do Ensino Básico cabe o importante papel de estimular desde cedo o gosto pela Matemática.

Com o desenvolvimento de diversas actividades, ao longo deste projecto, assumiu-se o objectivo de despertar nas crianças de 9/10 anos de idade, o prazer que esta área curricular pode proporcionar.

Assim, partindo de um conteúdo da Matemática — a estimativa — que está presente no currículo em todos os anos de escolaridade, foi-se desenvolvendo um conjunto de actividades, que viriam a constituir verdadeiros momentos de entusiasmo e de intensa participação por parte dos principais actores deste projecto — as crianças.

O tema do trabalho — a estimativa — foi abordado com recurso aos conceitos de medida de algumas grandezas, tais como massa, volume, área e tempo, todos presentes no programa do 1° ciclo e tantas vezes abordados de forma fastidiosa. Pretendeu-se, portanto, desenvolver nas crianças a capacidade de fazer estimativas com recurso a esses conceitos.

Fazendo parte do programa do 1° ciclo do Ensino Básico, o interesse da estimativa advém tanto do tema em si mesmo, como da sua pertinência quando colocado ao serviço de outros conteúdos. A estimativa poderá estar presente na realização de muitas actividades da Matemática, sob a forma lúdica de motivação e suporte de outras aprendizagens.

Para além disso, constitui um precioso meio diagnóstico na medida em que dá indicações sobre a maneira como as crianças aprenderam algumas noções e as aplicam em diferentes contextos de aprendizagem. Pode ser, por isso, um bom instrumento de avaliação das capacidades matemáticas das crianças e das suas dificuldades. Por outro lado, este tema pode ser trabalhado a partir de um problema que envolva activamente a criança na sua própria aprendizagem.

Neste sentido, desenhou-se um plano de acção composto por várias experiências, tendo-se optado na fase inicial pela realização de actividades próprias dos contextos informais de vida da criança.

Em seguida, dar-se-á conta desta diversidade de actividades e das formas utilizadas na sua concretização, utilizando para o efeito o material corrente produzido e recolhido pelos alunos.

A turma onde foram desenvolvidas estas actividades de estimativa era do

4º ano de escolaridade, constituída por crianças bastante familiarizadas com a manipulação e construção das unidades de medida das grandezas constantes do programa deste nível de ensino. Contudo, sempre que era trabalhado o conceito de medida de uma certa grandeza, eram previamente manipulados materiais utilizados em diferentes medições, comparados os resultados entre si, etc.. Só então as crianças faziam as suas estimativas e desenvolviam as actividades para a sua comprovação.

Cada grandeza foi abordada durante uma semana, ao longo da qual as crianças manusearam materiais e instrumentos de medida, de acordo com algumas propostas apresentadas pela professora e de outras, entretanto sugeridas pelos próprios alunos.

As primeiras experiências didácticas dedicadas à estimativa iniciaram-se através de situações de diálogo entre a professora e as crianças, pretendendo-se que estas identificassem situações do quotidiano, onde o recurso ao cálculo aproximado é frequente e necessário. Esta primeira abordagem constituiu o ponto de partida para o envolvimento das crianças nas actividades que se seguiram.

No decorrer destas actividades procurou-se diversificar os espaços, contemplando-se a sala de aula, a própria casa da criança e outros, ao ar livre, tais como o recreio, o campo de jogos e as ruas que percorriam no caminho para a escola, etc..

Estimativas de quantidades

As primeiras actividades realizaram-se na sala de aula.

Durante a primeira semana, as crianças abordaram o tema da quantidade, recorrendo, para isso, a diversos tipos de materiais, estruturado e não estruturado: feijões, *clips*, caixas, moedas, livros, lápis, borrachas, frascos, copos, etc..

As crianças, dispostas em grupo, manusearam os diferentes materiais.

No final da primeira semana, a professora apresentou um frasco cheio de feijões, uma cadeia de *clips*, uma caixa de moedas, um livro, e pediu-lhes que registassem individualmente, nos seus cadernos, a estimativa do número de feijões contidos no frasco, depois de o terem manuseado. É, então, aqui que se podem observar as estratégias utilizadas pelas crianças para obterem estimativas o mais próximas possível do valor real. Observam-se, por exemplo, algumas crianças a encher frascos mais pequenos do que o apresentado, com um número já conhecido de feijões e depois comparavam a dimensão deste com aquele cuja estimativa se lhes pedia. Ouvem-se, então, alguns comentários elucidativos sobre os raciocínios das crianças:

> Este frasco é metade do anterior, logo o outro tem o dobro de feijões deste.
>
> Não, eu acho que este é a terça parte do anterior, por isso eu penso que o outro terá o triplo dos feijões deste.

Feitas as estimativas, tornava-se então necessário proceder à sua comprovação. Com a mesma intencionalidade, foi apresentada às crianças uma cadeia de *clips* a qual pôde ser manuseada por todos, a que se seguia o registo individual da estimativa do número de *clips* da cadeia.

Do mesmo modo se observou o recurso a diferentes estratégias que denotam, por parte das crianças, a preocupação com o rigor na atribuição da estimativa. Elucidativo disso é esta expressão do Fábio:

Esta cadeia mede mais ou menos um metro e cada *clip* 2 cm. Ora, dividindo 100 cm por 2 dá 50 *clips*. A minha estimativa é que a cadeia tem 50 *clips*.

Apresentaram-se também, várias moedas para as crianças manusearem. Estas moedas seriam introduzidas dentro de uma caixa, e seria pedida uma estimativa do número de moedas que cabiam na caixa.

Também aqui foi possível observar o modo como as crianças procuravam estratégias para conferirem algum rigor às suas estimativas. Umas incluíam um número conhecido de moedas dentro de caixas maiores ou menores do que a que se apresentara para atribuírem a sua estimativa. Em seguida, comparavam as dimensões de ambas as caixas e com base nesta comparação atribuíam as suas estimativas. Outras crianças pegavam numa moeda, iam colocando no fundo da caixa e calculavam aproximadamente quantas moedas seriam necessárias para revestir toda a superfície desse fundo. Depois disto, registavam a estimativa do número de moedas que caberia na caixa.

Para finalizar este grupo de actividades, relacionadas com a quantidades, foi entregue às crianças, um livro para que elas o manuseassem livremente.

De seguida, pediu-se-lhes que estimassem o número de páginas do mesmo e registassem esse valor. Também aqui é evidente a preocupação com o rigor das suas estimativas. Algumas crianças comparavam a espessura do livro cuja estimativa do número de páginas se lhes pedia com a espessura de outros que dispunham sobre a mesa. Outras crianças até utilizavam a régua para saberem a medida exacta dessas espessuras, para melhor atribuírem as suas estimativas. Mas, elucidativo da preocupação pelo rigor é o alerta dado por outra criança, quando observa as estratégias utilizadas pelos companheiros, dizendo-lhes que a espessura das folhas dos diferentes livros também poderia ser diferente.

Ao conjunto de actividades que se realizou na primeira semana, seguiu-se outro ciclo, contemplando estimativas de medidas de massa.

Estimativas de massas (pesos)

Esta segunda semana constou de actividades de pesagem de diferentes objectos e de utilização de vários tipos de balanças: balança de cozinha, balança de casa de banho, balança electrónica.

As crianças dispunham de vários objectos (Caixas, bolas, livros, lápis, folhas, balões, etc.) que pesavam, livremente, utilizando a balança que melhor se adaptava à pesagem de cada objecto.

Depois de vários dias dedicados à pesagem de diversos objectos e materiais, foi dada uma ficha às crianças, onde cada uma registava a estimativa do peso de alguns objectos e pessoas. Fizeram estimativas do peso de uma bola, de uma caixa de borronas, de uma folha de árvore, da professora, etc..

Verificou-se que as crianças, antes de atribuírem as suas estimativas utilizavam diferentes estratégias e termos de comparação para lhes permitir uma estimativa o mais próximo possível do peso exacto. Assim, umas pegavam num objecto qualquer, dirigiam-se a uma balança e pesavam-no. De seguida, colocavam este objecto, cujo peso já conheciam, numa mão, pondo na outra mão o objecto cuja estimativa de peso lhes era pedida. Mediante a comparação que esta estratégia lhes permitia, registavam a sua estimativa. Outros alunos pegavam no objecto numa mão e na outra colocavam pesos (massas marcadas) de ferro de um quilo, meio quilo e outros. Só então atribuíam a sua estimativa de acordo com a comparação que deste modo podiam fazer.

Momentos vividos com especial entusiasmo foram aqueles em que se lhes pediu o registo da estimativa do peso da professora.

O Carlos, que habitualmente fazia as suas estimativas próximas do valor real, recebeu o resultado da comprovação do peso da professora, com algum espanto exclamando:

> Como é possível a professora pesar 55 Kg, se o meu irmão é mais novo e pesa 70 Kg ?

Repare-se a ideia que esta observação contém da monotonia entre peso e idade, o que nos primeiros tempos de vida, para cada pessoa, é factual. De realçar também as possibilidades que estas actividades de estimativas proporcionam para poderem identificar, analisar estas concepções prévias e até na oportunidade que elas constituem para conduzir à sua superação, pela via científica.

Estimativas relacionadas com o tempo

As actividades de estimativa sobre o tempo iniciaram-se com o manuseamento de diversos instrumentos de medida de tempo, relógios, cronómetros, ampulhetas e pêndulos, por parte das crianças, observando o seu modo de funcionamento.

Na sequência destes primeiros contactos, cada criança executava uma tarefa e verificava o tempo dispendido na sua execução. Foram as próprias crianças que sugeriam diversas actividades para realizar com esta medida, tais como: percorrer determinada distância, em marcha, em corrida, ao pé coxinho, etc. A realização destas actividades implicou sempre uma verificação do tempo dispendido, por cada criança ou grupo de crianças.

Numa segunda fase, foi pedido às crianças que realizassem uma determinada tarefa (percorrer um dado trajecto, ler um texto, etc.), num período de tempo previamente combinado (5 segundos, 15 segundos, etc.).

Estes momentos revelaram, por parte das crianças, grande entusiasmo devido ao facto de o espaço escolhido ter sido ao ar livre e também porque exigiu bastante movimento.

Uma das actividades consistia na disposição das crianças em grupos de três elementos, cabendo a cada elemento o desempenho de uma tarefa específica. Numa actividade de *drible* com bola, por exemplo, um elemento driblava, o outro contava o número de batimentos da bola no período de tempo previamente definido e o terceiro assinalava o início e o fim do exercício, utilizando para o efeito, o instrumento de medida de tempo.

A realização das outras actividades batimento de palmas, corridas, marchas, estalidos com dedos, saltos, etc. seguiu os mesmos procedimentos do exercício exemplificado. Houve um momento em que coube à Marta a tarefa de bater com o indicador na palma da mão e coube aos seus colegas fazer a estimativa do número de batimentos que entendiam que ela faria durante cinco segundos. O David fez o seguinte reparo:

> Convém que a Marta mostre primeiro como vai bater, para nós vermos se é devagar ou depressa.

Nota-se que esta observação revela já uma grande preocupação com o rigor das estimativas, pois o David procurou obter dados que lhe permitissem fazer uma boa estimativa. Para tal, quis observar previamente o ritmo dos batimentos para ter em conta essa variável.

Dentro de cada grupo as tarefas iam rodando por todos os elementos de modo que as crianças pudessem diversificar as suas experiências e assumir os seus papéis.

Para conclusão destas actividades foi apresentada às crianças uma ficha onde se lhes solicitava que fizessem estimativas e que as comprovassem em seguida, fazendo os respectivos registos. Realizaram-se novamente actividades ao ar livre e em grupo, o que suscitou grande entusiasmo.

Estimativas de áreas

Sendo a área um conteúdo pertencente ao currículo deste ano de escolaridade, assim como o cálculo da área de superfícies quadradas e rectangulares, estas crianças tinham tido já oportunidade de desenhar e representar algumas unidades de medida de área: metro quadrado, decímetro quadrado e centímetro quadrado.

Numa das actividades pediu-se às crianças que estimassem a medida da área da tampa de uma caixa circular. Tal pedido constituiu uma novidade e suscitou, até, grande curiosidade nas crianças, pois a forma diferia daquelas a que elas estavam habituadas a calcular. A caixa foi passando de mão em mão, as crianças iam colocando o centímetro quadrado que tinham recortado em papel e iam calculando aproximadamente quantas vezes é que ele cabia na superfície da tampa.

Sugeriu-se-lhes então que desenhassem um círculo com a mesma área da tampa da caixa, numa folha de papel, utilizando, para isso, o contorno da própria tampa. De seguida, com uma balança electrónica, pesou-se esse círculo de papel. Aqui chegados, para calcular a área da superfície da tampa da caixa, bastaria arranjar, do mesmo papel, o número de centímetros quadrados suficientes para perfazer o mesmo peso. Assim foi feito.

Para concluir as estimativas de áreas de diferentes superfícies, distribuiu-se uma ficha a cada criança onde lhe era pedido que registassem a estimativa de áreas de várias superfícies (do quadro da escola, do pavimento da cantina, do ginásio, etc.) e que fizessem a sua comprovação.

As crianças espalharam-se livremente pelos diversos locais (sala de aula, cantina, ginásio, campo de futebol, etc.) e utilizavam os seus palmos, os pés, os passos, cujo comprimento aproximado já conheciam, para basearem as suas estimativas.

Verificou-se, por exemplo, que a maior parte das crianças, antes de atribuírem a estimativa da área do campo de futebol, de basquetebol, da cantina, do ginásio, recorriam ao número de passos que davam ao longo da largura e do comprimento das diferentes superfícies e convertiam-nos em metros. Depois, calmamente, sentavam-se para multiplicar as medidas. Para superfícies menores (quadro, mesa, ecrã, etc.) utilizavam o mesmo processo, variando apenas a unidade de medida. A comprovação foi feita por nove grupos, responsabilizando-se cada um deles pela medição da área de uma superfície.
Este trabalho terminou na sala de aula com a reunião dos diferentes grupos que apresentaram a todos os colegas os valores comprovados dessas superfícies para que todos pudessem avaliar as estimativas que tinham feito.

Estimativas de volume e capacidade

Tal como aconteceu com a área, também com o volume, as crianças tinham já construído um metro cúbico em esferovite, um decímetro cúbico e um centímetro cúbico em papel.

Além destas unidades construídas pelas próprias crianças, foram-lhes apresentados centímetros cúbicos com características de legos, ou seja, possíveis de aderirem uns aos outros. Desta forma, as crianças puderam construir cubos com diferentes volumes, uns sugeridos e outros livremente. Puderam também calcular o volume de caixas de diversos tamanhos, colocando no seu interior os cubos necessários.

As crianças dispunham também de vários recipientes com capacidade já conhecida (pacotes de leite, garrafas de óleo, pacote de sumo, etc.,) e de outros com a graduação impressa, para com eles medirem a capacidade de diversos vasilhames (garrafas, baldes, bacias, etc.).

Foi então distribuída uma ficha a cada criança, onde deveria registar a estimativa da medida do volume de diversas caixas. Para isso, as crianças recorreram a diferentes estratégias. Depois de atribuírem os seus valores, cada grupo organizava-se para fazer as respectivas comprovações. Uns comprovavam a medida do volume da caixa de giz, outros o do copo dos lápis.

Neste último caso, tratava-se de um recipiente de forma cilíndrica e por isso, as crianças recorreram aos recipientes graduados de que dispunham, fazendo de seguida a transposição para as unidades de volume, com recurso aos conhecimentos previamente adquiridos e constantes no currículo deste ano de escolaridade. Estes constituíram, sem dúvida excelentes momentos para as crianças porem em prática muitos conceitos anteriormente abordados.

Após a realização de actividades de estimativa de medida de diversas grandezas, achou-se oportuno sugerir que as crianças fizessem diversas estimativas relacionadas com a sua vida familiar e que em casa, com a colaboração dos pais, fizessem a respectiva comprovação. Todas as crianças gostaram da ideia, achando bastante interessante sobretudo aquelas que se relacionavam com os dados pessoais dos seus pais (altura, peso, etc.).

Conclusão

Se tivéssemos que resumir este trabalho numa frase única, diríamos que se tratou de um instrumento de motivação das crianças para a Matemática.

Esta motivação ficou a dever-se ao carácter prático das actividades, à diversificação dos espaços da sua realização, ao trabalho cooperativo dos alunos e ao próprio envolvimento das crianças desde a planificação à realização das actividades.

Tratou-se de um trabalho de curta duração que cria, pelo facto, dificuldades em tirar conclusões mais precisas, designadamente, no que diz respeito à medição objectiva dos progressos dos alunos. No entanto, à medida que se iam desenrolando as actividades de estimativas, notava-se um progresso nas estratégias utilizadas pelas crianças para obterem estimativas cada vez mais próximas do valor real.

Referências

Costa, L. (1990). Estimativa? Estimação? Uma questão linguística. *Educação e Matemática nº 40*,pp. 30.

Costa, L. (1991). *Estimativa no Ensino Básico.* Actas do ProfMat 91

DGEBS (1990). Programas do 1º ciclo do Ensino Básico. Lisboa: ME

* síntese de um trabalho apresentado em 1995 na Universidade do Minho, no âmbito de um DESE em Educação Infantil e Básico.

Isabel Costa Ferreira
Professora do 1º ciclo
do ensino básico, Colégio Teresiano,
Braga

- Oh professora, pode ser um jogo? - ?! Pode...

Maria José Costa

Decorria o ano lectivo de 1992/93 ano da experimentação do novo programa de 12° ano, quando fui chamada, pela primeira vez, para leccionar Matemática numa turma do 12° ano dita "das artes", ou seja uma turma do agrupamento 2. Encontrei, obviamente, um conjunto de alunos interessados em frequentar, no futuro, muitas das variantes das Belas Artes; alguns dos que pretendiam ingressar em escolas de arquitectura estavam já a pensar em alternativas, pela dificuldade de atingir as classificações mínimas de acesso a tal curso. Os alunos estavam, na sua maioria, muito bem classificados a todas as disciplinas excepto na Matemática: nesta disciplina, havia apenas duas alunas bem classificadas e alunos "repescados" pelo "exame de equivalência à frequência" que então existia; para além da classificação média da disciplina na turma ser baixa, muitos alunos (a maioria!) lamentavam ter de a frequentar, uma vez que, argumentavam eles, lhes interessava um curso de Belas Artes para os quais ela não era exigida na candidatura, pelo que reinava algum (muito?) descontentamento na turma face à obrigatoriedade de frequentar tal disciplina.

Ora, ao abrigo dos novos planos curriculares, para cuja experimentação a minha escola tinha sido seleccionada, todos os alunos, os das "artes" inclusive, deveriam proceder à elaboração de trabalhos de pesquisa relacionados com a disciplina.

Resolvi então, em alternativa a trabalhos escritos, apelar à faceta criadora destes alunos, mesmo para a disciplina que mais os contrariava, pedindo-lhes uma interpretação de um segmento do currículo, a síntese de uma unidade, enfim, algo que pudesse ser utilizado nas aulas ou num manual escolar de Matemática. Uma das alunas com classificações baixas a Matemática, a Silvia, perguntou-me se o trabalho poderia ser um jogo; a minha resposta foi um sim tão hesitante quão grande era a minha incapacidade momentânea para imaginar um jogo relacionado com, por exemplo, a Análise Infinitesimal. E fiquei a aguardar a entrega dos ditos trabalhos.

Lá chegou o dia de apresentação dos trabalhos, que tinham sido produzidos fora das aulas. O grupo a que a Sílvia pertencia, composto por três alunas, apresentou a obra que, após pequenas alterações, figura em anexo como "tabuleiro" do jogo. O impacto do trabalho na turma foi grande. Desde logo ficou a promessa de alterar a ordem de algumas casas no sentido de corrigir uma ou outra sequência menos correcta do ponto de vista matemático e de escrevermos em conjunto as regras do jogo, quer visando a sua futura utilização, quer a sua divulgação pela revista Educação e Matemática.

Contudo, no fim do ano lectivo as rectificações e os complementos estavam por fazer. No ano lectivo seguinte duas delas frequentavam a Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto e a terceira o Ramo de Espectáculo, do Curso de Dança, em Lisboa, o que parecia inviabilizar totalmente o melhoramento que tínhamos - elas e eu - considerado indispensável. Por ironia do destino, eu iniciava um novo ciclo no curso secundário com, entre outras, uma turma de 10° ano das tais das "artes", desta vez explicitamente a meu pedido; a esta turma pertencia o Nicolau, irmão da Sílvia, interessado no curso de Arquitectura e que, mau grado a sua elevada média quando completado o 12° ano, não conseguiu alcançar o seu objectivo.

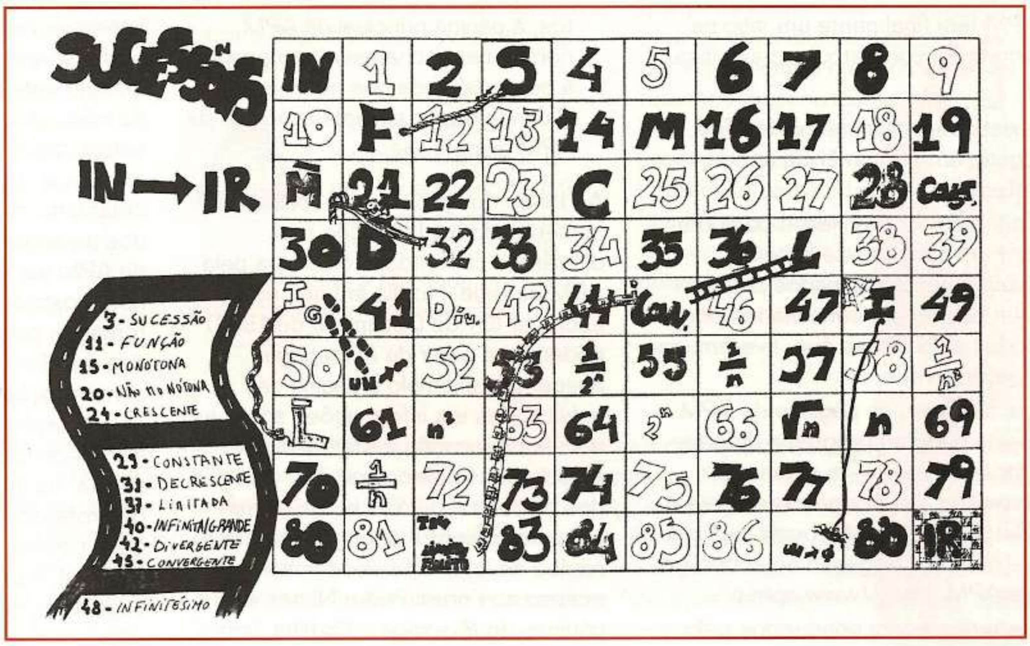
Durante estes últimos anos mantive guardado este trabalho, mostrando-o apenas aos alunos do 2° agrupamento para explicitar melhor o trabalho pedido.

No ano lectivo de 1996/97, eis que volto a trabalhar com uma turma de 12° ano do agrupamento 2, a qual o Nicolau frequenta procurando melhoria de nota; quando sugeri o elaboração do trabalho, convidei-o a fazer as alterações imprescindíveis e ele aceitou fazê-lo. Do resultado do trabalho levado a cabo nas circunstâncias descritas, resultou o produto que agora se expõe. Obviamente que o conjunto tabuleiro/regras que se junta poderá ser discutível e melhorado com vista à sua utilização em ambiente lúdico ou ambiente didáctico, mas nunca se poderá perder de vista nem a autoria nem as condições em que foi elaborado.

Contadas as vicissitudes deste trabalho realizado por alunos de 12° ano, eis-nos chegados a uma época em que o programa pouco valoriza o tema em que ele se apoia. Todavia, parece que ainda se poderá (ou deverá?) divulgar este trabalho: é, por um lado, uma sugestão que poderá ser seguida para outras rubricas programáticas ou noutras turmas de alunos vocacionados para as "artes"; é, por outro lado, uma prova de que, até os alunos que estão menos interessados na disciplina de Matemática são capazes de produzir trabalhos de qualidade no seu âmbito. Se a Matemática pudesse existir por ela própria, ao contrário de ser utilizada como arma selectiva nas repartições administrativas do saber, talvez fosse mais aceite e menos odiada pelos jovens, bons, generosos e imaginativos deste país!...

Maria José Costa
Esc. Sec. Augusto Gomes

Jogo síntese da unidade Sucessões[1]



Finalidades

- Rever a unidade "Sucessões"
- Identificar situações não esclarecidas a partir do relatório

Número de intervenientes

- 2 a 4 jogadores
- um observador facultativo, mas indispensável quando forem apenas dois jogadores

Material

- Um tabuleiro
- Um dado numerado de 1 a 6
- Uma marca por cada jogador
- Material de escrita

Critério de classificação

O jogo termina quando todos os jogadores tiverem chegado à última casa.

Regras do Jogo

1. Os jogadores lançam alternadamente o dado, começando a jogar por ordem crescente do número de pontos obtidos num lançamento experimental.
2. A marca de um jogador desloca-se progredindo no tabuleiro segundo o número indicado pelo dado num só lançamento.

2.1. Constituem excepções a esta regra, o caso da marca cair

- numa casa associada a outra: desde que o respectivo jogador verbalize correctamente a relação entre essas casas, salta para a que lhe está associada.
- numa das casas com uma letra: desde que, consultada a legenda, o jogador dê a definição ou caracterização respectiva e essa explicação seja considerada satisfatória pelos restantes jogadores, tem direito a um segundo lançamento.
- numa das casas com uma expressão designatória: desde que o jogador classifique a sucessão que ela define e essa classificação seja considerada satisfatória pelos restantes jogadores, tem direito a um segundo lançamento.

2.2. Se um jogador responder errado ao solicitado fica uma vez sem jogar e os outros jogadores são convidados a responder, começando pelo que se encontra mais recuado; o primeiro a dar a resposta correcta tem direito a jogar e a progredir no terreno de acordo com o resultado do lançamento, sem que isso altere a ordem previamente fixada.

3. O observador deve pugnar para que o jogo decorra com lealdade e a bom ritmo, e apresentar um relatório do jogo no qual figure:
   - composição da equipa;
   - nome do vencedor;
   - tempo de duração do jogo;
   - as definições e as classificações dadas;
   - dificuldades e hesitações nas casas consideradas "de excepção".
4. o jogo é dado por concluído quando todos os jogadores (ou todos menos um, no caso de 4 jogadores) tiverem alcançado a última casa.

[1] Jogo referido no artigo da página anterior

Autores do jogo
Bárbara Yu
Carla Inácio
Sílvia Pinto Coelho
Nicolau Pinto Coelho
Maria José Costa

Tecnologias na educação matemática

A APM na Internet!

A APM tem finalmente um *sítio* na Internet. Em concreto, isso significa que:

- existe um computador da APM ligado em permanência à rede Internet;
- foram colocados nesse computador um conjunto de ficheiros (vulgarmente chamados *páginas*) que podem ser consultados por todas as pessoas que tiverem uma ligação à rede;
- para aceder às páginas da APM basta pedir ao programa de *navegação* na rede — o chamado *browser*, que normalmente será o Netscape ou o Microsoft Explorer — que faça a ligação ao endereço da APM, http://www.apm.pt;
- seremos assim conduzidos pelo *browser*, ao fim de alguns momentos, à página principal da APM, normalmente chamada *homepage*; a partir daí podemos navegar, clicando aqui e ali, pelas páginas da APM disponíveis.

Ao longo dos próximos meses, irá aumentando a informação e os diferentes conteúdos colocados pela APM na rede. No dia em que estou a escrever (31 de Dezembro de 1997) podemos a partir da *homepage* aceder por exemplo à página das publicações e a informações sobre as revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante*. Podemos ainda ir à página dos núcleos regionais e passar daí para um conjunto de páginas sobre o núcleo de Évora. Temos também acesso ao Forum Pedro Nunes e às páginas do *Investiga e Partilha*, uma iniciativa que está a despertar um interesse crescente entre alunos e professores. Mas no fim de Janeiro, quando este número da revista chegar ás mãos dos sócios, mais informação estará disponível, o que continuará a acontecer, previsivelmente a um ritmo crescente, no futuro. A criatividade dos núcleos e dos grupos de trabalho da APM vai ser assim posta á prova nos próximos tempos, de modo a tornar as páginas da APM uma fonte rica de informações e um local de comunicação viva sobre as questões da educação matemática em Portugal. Isso dependerá também, em larga escala, do interesse que os sócios e os professores de Matemática em geral colocarem nesta nova iniciativa da APM, e das suas reacções e sugestões de melhoramento do nosso sítio.

veloso@mail.telepac.pt

Notícias breves

• A nossa colega e sócia da APM M. Margarida Junqueira ganhou o primeiro prémio, com a classificação de Muito Bom, no *IV Concurso de Materiais de Apoio à Integração e Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nos Ensinos Básico e Secundário*. O trabalho de Margarida Junqueira intitula-se *Realização e exploração de construções geométricas dinâmicas*.

A secção *Tecnologias na Educação Matemática* tentará incluir, na sua próxima edição, uma apresentação deste trabalho. Recorde-se que Margarida Junqueira defendeu uma tese de mestrado com o título "A Aprendizagem da Geometria em Ambientes Computacionais Dinâmicos" em 1995, na Universidade Nova de Lisboa. A tese de mestrado está disponível na Coleção Teses da APM (http://www.apm.pt/apm/publi_g3.htm). O leitor interessado pode ainda encontrar artigos de Margarida Junqueira na revista Quadrante (consulte http://www.apm.pt/apm/quad_v2_1.htm e http://www.apm.pt/apm/quad_v5_1.htm) e no último número de *Educação e Matemática* (em colaboração com Sérgio Valente).

No mesmo concurso do Nónio Séc. XXI foi ainda contemplado, com a classificação de Bom, um trabalho do nosso colega Vitor Teodoro (colaborador também no último número de *E&M*). O trabalho refere-se á utilização do prgrama Modellus e intitula-se *Funções e descrição de movimentos no espaço: uma breve introdução com o Modellus*.

Aos colegas contemplados as nossas felicitações.

Think Quest

• ThinkQuest é uma iniciativa educacional muito interessante. Adopta a forma de um concurso anual, mas é mais do que isso, é um novo modelo de ensino e aprendizagem para os tempos da Internet. Equipas de dois a três alunos de todo o mundo são desafiados a construir páginas na WWW de carácter educativo e utilizando os recursos da Internet. Essas páginas ficam disponíveis como recursos para os jovens com acesso à Internet.
Não deixe de visitar o sítio http://www.advanced.org/thinkquest. O prazo para formação das equipas e entrega dos formulários para concurso termina, em 1998, no dia 28 de Fevereiro.

• A APM ganhou um dos prémios do I Concurso Nacional de Projectos de Informação sobre Educação, incluído no programa do Projecto Nónio Séc. XXI. Como consequência a APM vai receber do Ministério da Educação um subsídio de 10.000 contos para construir e manter, durante os próximos três anos, as suas páginas na Internet e para desenvolver o Projecto Fórum Pedro Nunes. Este importante prémio vai permitir à APM concretizar grande parte dos seus projectos nesta área. Todas as contribuições e sugestões serão bem recebidas pelo Grupo de Trabalho da Internet da APM. Iremos dando conta nesta secção dos desenvolvimentos desta notícia.

• Uma esplêndida notícia: o programa de geometria dinâmica *The Geometer's Sketchpad* está a ser comercializado pela APM. Existem preços muito acessíveis para utilizadores individuais (sócios da APM) e para escolas (licenças para 10 utilizadores). Consulte o APM informação sobre as condições de venda e a sede da APM sobre a disponibilidade para entrega imediata.

• Agora temos a Internet na Escola? E daí? Que posso fazer? Esta não é uma pergunta de resposta rápida... A resposta está a ser dada por sítios como http://www.uarte.mct.pt, a *Unidade de Apoio à Rede Telemática Educativa* e agora pelas páginas da APM (www.apm.pt), em particular o *Investiga e Partilha* (http://www.eseset.pt/ip/). Se ainda ficar insatisfeito, recomendamos-lhe hoje as propostas que pode encontrar em http://gauss.hawcc.hawaii.edu/maths.html. São pequenos projectos que pode tentar adaptar em português para os seus alunos, tentando encontrar equivalentes que utilizem já os recursos disponíveis pela Internet em Portugal. O mais importante é compreender que um tipo de propostas interessantes na Internet são aquelas que levam os alunos a compreender o funcionamento da própria Internet e a utilizá-la nas suas explorações e procura de soluções.

Consultório tecnológico

Iniciamos neste número um consultório tecnológico em que procuraremos responder às questões sobre tecnologias na educação matemática que nos sejam colocadas pelos leitores de Educação e Matemática. *Responderemos a perguntas que nos sejam enviadas por carta ou por e-mail (para a sede da APM ou para o endereço* e-mail *da APM: apm@mail.telepac.pt). No caso das perguntas serem feitas por* e-mail, *as respostas serão dadas por* e-mail. *Em qualquer dos casos (carta ou* e-mail*), as perguntas (convenientemente editadas por questões de espaço) e as respostas serão publicadas nesta secção por ordem de chegada, excepto quando a pesquisa da resposta obrigue a alterar essa ordem. Nas suas mensagens ou cartas, escreva no início do texto* Educação e Matemática – Consultório tecnológico. *Segue-se uma primeira pergunta e a respectiva resposta.*

Cabri ou Sketchpad?

O grupo de matemática da Escola Secundária de Mangualde está a dar os primeiros passos para a instalação de um laboratório de Matemática.

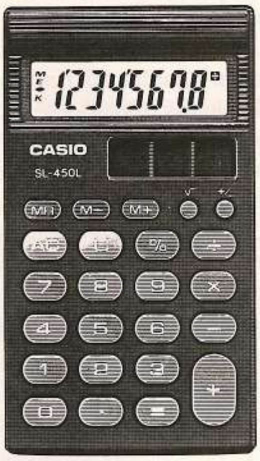
Estamos em dúvida entre a aquisição do Cabri ou do Sketchpad pois segundo a última revista *Educação e Matemática* estes dois programas destinam-se aos mesmos conteúdos curriculares. Tendo em atenção a sua experiência com este tipo de software agradecíamos a sua opinião: Cabri ou Sketchpad ? visto que não é possível adquirir os dois.

Pelo grupo de Matemática
José Miguel Sousa

TEM - Na realidade, do ponto de vista das potencialidades dos dois programas (*Cabri II* e *Sketchpad 3.0*), eles equivalem-se. Ou seja, embora sendo programas diferentes em vários aspectos, não existe nada que conheçamos que se possa fazer com um deles que não se possa, com mais ou menos trabalho, fazer com o outro. Essa pergunta, *Cabri* ou *Sketchpad* ?, tem sido colocada já várias vezes em grupos de discussão na Internet e a conclusão tem sido sempre a mesma: ambos se equivalem ao nível das possibilidades, e no que diz respeito às diferenças uns professores acham que um deles é mais intuitivo do que o outro, outros professores pensam o contrário. Pessoalmente, prefiro o *Sketchpad*. Acho que provém de um projecto educativo mais sólido do ponto de vista da aplicação ao ensino de Matemática no nível básico e secundário. Acho que os materiais de apoio são melhores. E que mesmo ao nível da utilização do programa os menus do *Sketchpad* são mais directos e claros que os do *Cabri*. Ultimamente tenho utilizado e visto utilizar o *Sketchpad* com professores e alunos e a velocidade de adaptação ao programa é muito boa. Mas neste aspecto não estou a comparar com o *Cabri II* pois não tenho tido a mesma experiência com ele. O *Cabri II* é um programa mais pesado e exigente como *software*, o que quer dizer que são necessários computadores mais potentes para o instalar e usar. Acresce a tudo isto que a APM é neste momento distribuidora, a preços muito vantajosos, do *Sketchpad*, tanto para sócios como para escolas (licenças para utilização em laboratórios com 10 computadores). Assim, por todas estas razões, a minha opinião é muito favorável em relação ao *Sketchpad*. Mas se numa escola ou num grupo de professores existe uma grande experiência anterior de Cabri II, a continuação de utilização do mesmo programa pode justificar-se. Esperamos ter-vos ajudado na vossa decisão, e desejamos que desenvolvam um bom trabalho no novo laboratório.

CALCULADORAS NO ENSINO - ANO LECTIVO 96/97

É natural a adopção das calculadoras no ensino, e têm vindo a processar-se a adopção de matérias, processos e programas a esta nova ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. Nada melhor para um Educador que poder contar na sua sala com o maior número possível de alunos com a mesma calculadora, facilitando assim enormente o evoluir da matéria e sua explicação. A **CASIO**. possui a melhor linha do mercado, este ano renovada com ainda melhores modelos e a preço mais acessível.

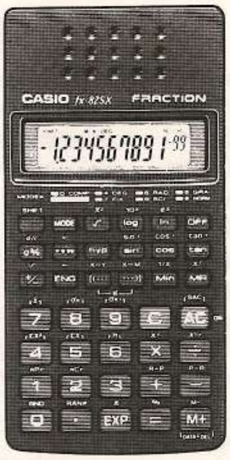


Básicas

CASIO. SL 450

O modelo ideal concebido para o ensino. Outros modelos disponíveis mais acessíveis

HL 820 D e HS 5 D.



Científicas

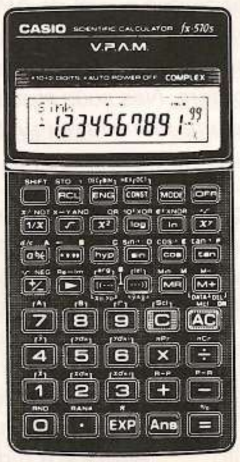
CASIO. FX - 82 SX

A FX 82 é a máquina mais vendida no mundo, agora renovada para maior conforto e durabilidade. Cálculo com fracções e 139 funções.

Científica Avançada

CASIO. FX - 570 S

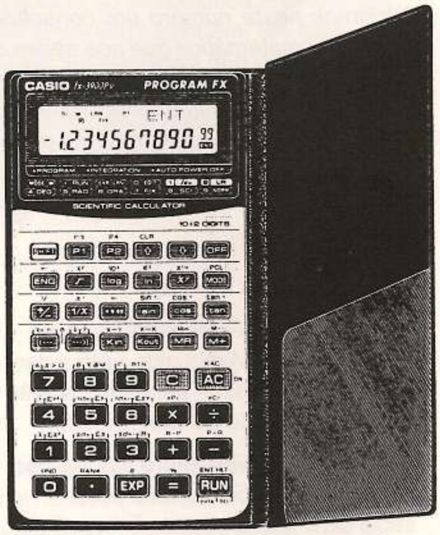
Uma calculadora sem rival, excepcionalmente completa, simples e acessível. Utiliza o novo sistema de cálculo V.P.A.M.



Programável

CASIO. FX - 3900 PV

A calculadora programável mais fácil e acessível. 300 passos de programa, integrais, estatística a 2 variáveis. Já à venda novo modelo. **FX 4800 P** com 4500 passos de programa.



CALCULADORAS GRÁFICAS CIENTÍFICAS PROGRAMÁVEIS

CASIO. FX 6300 G

A gráfica mais económica do mercado ! Os gráficos ao alcance de todos. Todas as funções necessárias.

CASIO. FX 7400 G

A nova **7400 G** é a calculadora gráfica por excelência. Todas as funções, fácil de usar e programar, visor grande e 7 Kbytes de memória. Mantém preço acessível.

CASIO. CFX 9850

A gráfica super completa com o visor a cores, 32 Kb de memória, linguagem Tipo Basic, estudo das cónicas, sucessões, tabelas e gráficos.

"Matemática 2001": natureza e importância de um estudo sobre o ensino da Matemática

Paulo Abrantes

"Matemática 2001" é a designação de um grupo de trabalho da APM que tem vindo a desenvolver um estudo sobre a situação do ensino da Matemática em Portugal, nas escolas básicas e secundárias. Neste texto, faz-se um ponto da situação daquilo que já foi realizado, dá-se uma ideia do tipo de informação de que se dispõe e sublinha-se a importância de uma reflexão alargada sobre essa informação.

O grupo de trabalho "Matemática 2001" foi criado na APM, em 1996, com o objectivo de elaborar um diagnóstico e recomendações sobre o ensino da Matemática no nosso país. No *ProfMat 96*, e posteriormente no nº41 da *Educação e Matemática*, foram publicamente apresentadas as razões que motivaram a criação deste grupo bem como a sua metodologia de trabalho e as acções que projectava desenvolver.

Importa agora fazer um ponto da situação do que foi realizado. Além disso, retomando o conteúdo da conferência inaugural do *ProfMat 97*, é possível dar uma ideia do tipo de resultados do estudo que o grupo tem vindo a efectuar.

Recordando o que é o "Matemática 2001"

O trabalho do grupo "Matemática 2001" (que, desde Janeiro de 97 conta com o apoio financeiro do IIE) é, no fundo, um projecto concebido com o duplo propósito de (a) caracterizar os principais problemas que afectam o ensino da Matemática nas nossas escolas básicas e secundárias, e (b) apresentar propostas que contribuam para a sua resolução. O estudo incide em três domínios:

- as práticas pedagógicas;
- as condições de trabalho existentes nas escolas; e
- as necessidades de formação dos professores.

Do plano que foi elaborado para um período de cerca de três anos, vale a pena destacar dois aspectos essenciais da metodologia adoptada: os processos de recolha de dados e o modo como será produzido o documento final.

Conhecer melhor os pontos de vista dos professores

Um estudo como este teria inevitavelmente que considerar os dados oficiais, bem como os resultados de trabalhos anteriores, a respeito de questões como o insucesso dos alunos em Matemática ou a evolução dos níveis de qualificação dos professores. Para além disso, teria igualmente que tomar em consideração o enquadramento legal em que se desenvolve o ensino da Matemática em Portugal, em domínios como a estrutura curricular, o sistema de avaliação, a gestão e a formação dos professores. Por isso, uma parte do trabalho do grupo tem consistido na sistematização de informação essencial nestes vários aspectos.

No entanto, a característica porventura mais saliente do estudo é o facto de se procurar que o diagnóstico seja fortemente baseado em dados recolhidos directamente junto dos professores e das escolas, através de dois processos complementares:

- um inquérito aos professores; e
- um conjunto de reuniões com os professores de Matemática de diversas escolas.

Tanto o inquérito como as reuniões têm um âmbito nacional e abrangem o ensino básico e o secundário. Além disso, ambos focam questões ligadas às condições de trabalho e à formação dos professores. Mas enquanto o inquérito tem um carácter individual, reflecte visões pessoais e inclui diversos itens sobre as práticas pedagógicas, as reuniões centram-se na dinâmica e nos principais problemas de funcionamento do grupo disciplinar de Matemática.

As respostas ao inquérito constituem dados de tipo quantitativo passíveis de um tratamento estatístico e representativos dos professores de Matemática mas em que não é possível conhecer a justificação das opiniões ou mesmo as interpretações dadas às perguntas. As reuniões, conduzidas como entrevistas colectivas, geram por sua vez dados de natureza qualitativa, que dizem respeito a um número limitado de escolas mas em que as opiniões dos professores são explicadas e contextualizadas. Ao adoptar uma metodologia que combina processos dos dois tipos, o projecto procura não só ter uma visão global da situação mas também conhecer melhor o ponto de vista dos professores sobre o que se passa realmente nas escolas e nas aulas.

Por vezes, as opiniões que ouvimos sobre o ensino da Matemática traduzem meras impressões que resultam do conhecimento de um ou dois casos. Outras vezes, procuram apoiar-se em estudos realizados. Porém, estes estudos, quando assumem uma dimensão nacional, têm-se baseado sobretudo nos resultados de exames ou de testes, procurando verificar se certos aspectos do currículo oficial foram "adquiridos" pelos alunos mas deixando de fora aquilo que se passa no processo de ensino-aprendizagem, em particular o modo como os professores interpretam o currículo e o procuram concretizar, bem como as condições e a formação de que dispõem para o fazer. Nos últimos anos, a investigação tem produzido estudos de caso, alguns muito bem documentados, sobre as concepções e práticas de professores ou a dinâmica de grupos em diversas escolas. Mas estes estudos têm assumido geralmente uma lógica individual, não permitindo traçar um quadro a nível nacional.

Um conhecimento profundo do que se passa dentro da escola e das salas de aula precisaria ainda de recorrer a um contacto directo com as práticas pedagógicas e, especialmente, à observação de aulas. Talvez essa metodologia possa vir a ser adoptada num futuro estudo. Por agora, o "Matemática 2001" centrou-se nas perspectivas dos professores.

Contribuir para um movimento de reflexão e discussão

Um outro aspecto da metodologia deste projecto que vale a pena destacar é o modo como se procura que o documento final reflicta não apenas o ponto de vista dos seus autores mas também os resultados da reflexão entre os professores.

Na verdade, o documento final só será elaborado após um período de debate sobre uma versão provisória que será divulgada o mais amplamente possível. Com esta metodologia, o grupo não pretende apenas enriquecer o diagnóstico e as recomendações com a incorporação de contributos individuais ou colectivos. Tem também o propósito de associar o projecto a um movimento significativo de reflexão e discussão em torno dos principais problemas que afectam o ensino da Matemática.

Alguns resultados

O essencial do trabalho de recolha de dados foi já realizado. Do inquérito — que incluía 40 questões e foi dirigido a uma amostra aleatória dos professores de Matemática do continente, representativa quanto ao grau de qualificação profissional — obtiveram-se cerca de 450 respostas de professores dos 2° e 3° ciclos do ensino básico e do secundário (no 1° ciclo, colaborou-se num inquérito que o IIE já tinha em preparação). Quanto às reuniões, realizaram-se em cerca de 30 escolas dos vários tipos e das diversas zonas do país (incluindo as regiões autónomas), foram integralmente gravadas e deram origem a relatórios de acordo com um guião previamente elaborado.

Na actual fase do projecto, os dados estão a ser analisados, num processo que dará origem a um documento para debate. Mesmo assim, é possível apresentar algumas questões suscitadas por esses dados, a título de exemplos de um tipo de informação que importa conhecer e discutir.

1º exemplo: a situação do 3º ciclo

As estatísticas oficiais mostram um aumento considerável da percentagem de professores profissionalizados sugerindo que um dos grandes problemas estruturais do ensino da Matemática tem vindo a ser resolvido. Contudo, essas estatísticas não conseguem captar os efeitos de algumas alterações provocadas pela evolução do sistema educativo. Um exemplo é a progressiva separação entre escolas básicas 2/3 e secundárias. Os dados recolhidos pelo "Matemática 2001" mostram que os professores que estão a leccionar Matemática no 3° ciclo, em relação aos colegas do 2° ciclo e do secundário, são mais novos, têm menos habilitação profissional e menos tempo de serviço. Verifica-se uma tendência nas escolas secundárias para atribuir os horários do 3° ciclo aos mais novos, aos estagiários, aos professores que não têm habilitação ou que vêm de outros grupos. Ao mesmo tempo, nas escolas básicas 2/3, o quadro estável é geralmente o do 2° ciclo e há muitos casos em que o delegado do 3° ciclo é um professor efectivo do 2° (por vezes, o mais novo). Esta situação tem implicações diversas em aspectos como a influência e as condições de trabalho que se tem na escola, o nível de conhecimento das novas tendências curriculares ou as necessidades de formação.

2º exemplo: situações de aprendizagem na sala de aula

As respostas a alguns itens do inquérito fornecem indicações sobre os tipos de tarefas, as formas de interacção e os modos de trabalho dominantes nas aulas.

Quanto à natureza das tarefas, os "exercícios" são largamente maioritários (uma tendência em todos os ciclos). Embora a uma distância considerável, a "resolução de problemas" tem ainda assim uma expressão significativa, o que já não se passa com as "actividades de exploração e investigação" e muito menos com os "projectos" que são praticamente inexistentes.

Relativamente às interacções na aula, a "exposição pelo professor" é o método de comunicação dominante. É usada com muita frequência por mais de metade dos professores, aumentando ao longo da escolaridade (no secundário, mais de 80%). A "discussão entre alunos" tem uma expressão bastante menor, tendo sido referida como muito frequente por cerca de um quarto dos professores do secundário e um terço dos do básico.

Os novos programas recomendam o trabalho com "situações da realidade" e o uso da "História da Matemática". O primeiro destes aspectos parece ter alguma expressão nas práticas lectivas, embora diminuindo ao longo da escolaridade. Quanto à História, a sua expressão é menor mas, ainda assim, cerca de metade dos professores afirmou utilizá-la pelo menos "em algumas aulas".

Sobre os modos de trabalho na sala de aula, verifica-se uma predominância do trabalho individual. O trabalho em pares é também usado com muita frequência, assim como o trabalho com toda a turma. Já o trabalho de grupo tem uma expressão francamente reduzida.

Estes resultados devem ser lidos com prudência, tanto mais que são muito sensíveis às diversas interpretações que terão sido dadas a expressões como "exercício", "problema", "realidade", etc. No entanto, eles sugerem fortemente que a natureza das actividades na maior parte das aulas é ainda muito marcada pela prática de exercícios e pela exposição do professor, sendo muito menos frequentes os momentos em que os

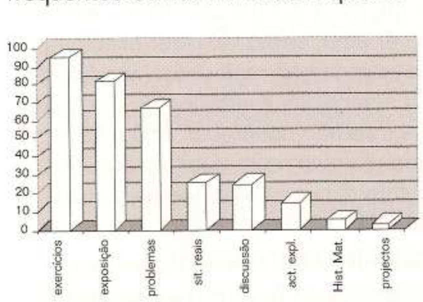


Fig. 1 - % de professores do secundário que utiliza as diversas situações "sempre/ quase sempre" ou "em muitas aulas".

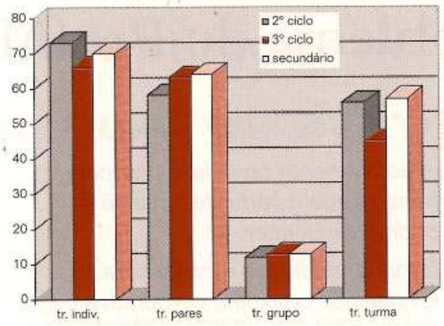


Fig. 2 - % de professores que utiliza os vários modos de trabalho "sempre/quase sempre" ou "em muitas aulas".

alunos assumem um papel mais activo e criativo. Embora não tenhamos elementos directos de comparação, podemos conjecturar que o ensino da Matemática não será hoje, em diversos aspectos essenciais, radicalmente diferente do que era há uma década, ao contrário do que algumas pessoas têm afirmado talvez por atenderem apenas à evolução dos currículos ou à divulgação de experiências inovadoras. Apesar disto, parece haver sinais de que algumas das novas orientações, como a importância da resolução de problemas e da ligação Matemática-realidade, são hoje consideradas por um número significativo de professores.

3º exemplo: a formação

A utilização das tecnologias é a área que um maior número de professores (em todos os ciclos) apontou como uma prioridade da formação. Temas em que os professores sentem mais necessidades de formação são a geometria, as probabilidades e a estatística (no 3º ciclo e no secundário). Outras referências significativas foram para a História da Matemática (no secundário), a Didáctica (nos 2º e 3º ciclos) e a avaliação (no 2º ciclo).

Apesar das carências, há hoje um movimento significativo de procura de formação. Mais de três quartos dos professores participaram nos últimos dois anos em alguma acção de formação. Os dados existentes indicam que as acções frequentadas são sobretudo encontros ou cursos. Parece haver um considerável desconhecimento de modalidades actualmente admitidas para a formação contínua, como as oficinas, os círculos de estudos e os projectos.

Os Encontros da APM, tanto nacionais como regionais, constituem uma referência para um número muito considerável de professores. Em parte, isso será uma consequência da quantidade de oportunidades de formação que proporcionam, sabendo-se que, em muitas regiões, acções de outros tipos específicas para o ensino da Matemática são escassas. Mas, por outro lado, considerando que muitos professores de Matemática são hoje membros da APM (no secundário, mais de 50%), este facto reflecte uma situação muito diferente daquela que se vivia há uma década, quando a Associação dava os seus primeiros passos. Com efeito, parece haver hoje um maior interesse por desenvolver uma cultura profissional marcada por uma ampla participação e, a ser assim, trata-se de um fenómeno que se poderá vir a traduzir em novas perspectivas de formação dos professores e de renovação do ensino da Matemática.

Os próximos passos

O estudo desenvolvido pelo "Matemática 2001" considera muitos outros aspectos, cobrindo uma variedade de questões relativas às concepções e práticas dos professores, às condições de trabalho e recursos existentes e à formação.

Brevemente, estará disponível um documento provisório fazendo uma análise da situação com base nos dados recolhidos. A sua discussão constituirá uma oportunidade para uma reflexão necessária a respeito do ensino da Matemática no nosso país. Naturalmente, isso já não dependerá fundamentalmente do grupo de trabalho mas sim do interesse que os professores revelarem e do papel que os núcleos regionais e os grupos de trabalho da APM assumirem.

Paulo Abrantes
coordenador do Matemática 2001

O problema do ProfMat 97

José Paulo Viana

Para o ProfMat da Figueira da Foz organizou-se o habitual concurso, que este ano consistia na resolução do problema "Presos na Torre":

Em tempos que já lá vão havia dois matemáticos muito bons, capazes dos melhores raciocínios.

Uma vez, devido a uma vaga de repressão política, foram presos e levados para duas celas no alto de uma enorme torre. Através da sua janela, cada um deles conseguia ver metade da paisagem. No entanto, como as celas estavam em lados opostos da torre, no total, eles viam toda a paisagem. E lá ficaram incomunicáveis, tanto entre si como com o resto do mundo.

O responsável pela vaga de repressão também gostava de Matemática e resolveu dar-lhes uma hipótese de serem libertados. Por isso comunicou a cada um deles:

– A partir desta torre vêem-se 11 ou 12 aldeias. Se algum de vocês conseguir deduzir quantas são exactamente as aldeias, liberto imediatamente os dois. Comecem a pensar, que a partir de amanhã já podem responder.

E todos os dias, à mesma hora, levava-lhes comida e perguntava se já tinham chegado a alguma conclusão.

No quinto dia, um dos matemáticos disse que já sabia a resposta e explicou porquê. E os dois homens partiram em liberdade.

Quantas aldeias se avistavam da torre?

Para que um dos matemáticos consiga descobrir o número de aldeias, vai ter de raciocinar não só sobre aquilo que o outro pode estar a ver mas também sobre aquilo que o outro está a pensar. Como muito bem salientou o Jacinto Salgueiro, *a chave do êxito estava na confiança que cada um depositava no raciocínio do outro.*

Praticamente todos os concorrentes seguiram a mesma linha de resolução.

Vou colocar-me no papel de um dos matemáticos e analisar os vários casos possíveis.

A) Se avisto 12 aldeias da minha janela, é tudo fácil e não tenho qualquer dúvida. O outro matemático não pode estar a ver nenhuma e portanto há 12 no total. No primeiro dia comunico ao guarda que são 12.

B) Se não avisto nenhuma aldeia, também não é difícil. O meu colega pode estar a ver 11 ou 12 aldeias. Espero que passe um dia. Se forem 12, o outro faz o raciocínio que está em A) e sou libertado. Se não, no segundo dia comunico ao guarda que há 11 aldeias no total.

C) Se vejo 11 aldeias da minha janela, sei que o outro preso ou vê uma ou não vê nenhuma. Se ele não vê nenhuma, então vai fazer exactamente o mesmo raciocínio que eu fiz em B) e seremos libertados no segundo dia. Se isso não acontecer, fico a saber que ele está a ver uma aldeia e ao terceiro dia comunico ao guarda que são 12.

D) Se avisto 1 aldeia, sei que o outro preso está a ver 10 ou 11 aldeias. Se ele estiver a ver 11, então vai fazer exactamente o mesmo raciocínio que fiz até C) e seremos libertados no terceiro dia. Se isso não acontecer, posso concluir que ele está a ver 10 aldeias e ao quarto dia comunico ao guarda que são 11.

E) Se avisto 10 aldeias, sei que o outro vê uma ou duas. Se ele estiver a ver uma, então vai fazer exactamente os mesmos raciocínios que fiz até D) e seremos libertados no quarto dia. Se isso não acontecer, fico a saber que ele está a ver duas aldeias e ao quinto dia comunicamos ao guarda que são 12.

Ora, no nosso problema, um dos matemáticos falou no quinto dia. Portanto, o que disse ao guarda foi que o total de aldeias era de 12.

(Continua na página 32)

PRÉMIOS

1° *Ana Cristina Esteves* e *Cláudia Santos*
Calculadora gráfica TI-92

2° *Miguel Mata*
Calculadora gráfica TI-86

3° *Braulino Salgueiro*
Calculadora gráfica TI-80

4° *Mª Helena Martinho*
Livro "Desafios 6"

5° *Ana L. Correia, João Afonso, Miguel Castro*
Livro "Desafios 6"

6° *Pedro Girão*
Livro "Desafios 6"

Os concorrentes devem contactar com a sede da APM a fim de receber os prémios.

Os prémios foram oferecidos pela Texas Instruments e pelas Edições Afrontamento.

PARTICIPANTES

Alberto Teixeira
Augusto Taveira
Braulino Salgueiro
Carlos Moura
Celeste Freire
Fausto da Silva
Heitor Surrador
Helena Martinho
Jacinto Salgueiro
José Manuel Duarte
Luis Ferreira
Manuela Labrusco
Mª João Lagarto
Mª José Rocha Santos
Miguel Gomes
Miguel Mata
Pedro Girão

Equipas:

– Alexandra Martinho, Emanuel Martinho e Margarida Pinto
– Ana Cristina Esteves e Cláudia Santos
– Ana Luisa Correia, João Afonso e Miguel Castro
– Anabela Magalhães e António Dias
– Isabel Brandão e João Rino
– Iva Angelino e Nuno Angelino

Recuperação de alunos na aula de Matemática - uma proposta de trabalho

José António Covêlo Vieira

Não basta tomarmos consciência que hoje a escola é de massas. É necessário transformá-la, é urgente mudarmos os métodos pedagógicos para que TODOS aprendam o que conseguirem durante os nove anos de permanência obrigatória na escola.

A escolaridade obrigatória, para todos, traduz-se numa massificação do ensino deixando marcas de uniformidade. No entanto, está provado que se tratarmos de igual modo quem é diferente estamos a produzir mais diferenças, isto é, estamos a agravar as desigualdades. Deve entender-se DIFERENÇA como sinónimo de diversidade e não de desigualdade.

Segundo a Lei de Bases do Sistema Educativo, "Todos os portugueses têm direito à educação e à cultura" e " É da responsabilidade do Estado Português promover a democratização do ensino, garantindo o direito a uma justa e efectiva igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares". Uma condição necessária para uma educação democrática é o direito dos diferentes à sua diferença e consequentemente, a um lugar na escola e na sociedade.

A diferença é, assim, um dos factores mais importantes a ter em conta na acção da escola e dos professores com vista ao acesso e sucesso escolares de cada um. Tendo em conta que cada aluno emerge de mundos diferentes, sob os pontos de vista cultural, social e económico, tem ritmos de aprendizagem, interesses e necessidades diferentes, o recurso a pedagogias diversificadas é condição essencial e indispensável para garantir " o direito a uma justa e efectiva igualdade de oportunidades educativas.

Tendo consciência deste facto e sendo uma das minhas grandes preocupações, uma vez por semana, dentro do horário lectivo da disciplina, diversifico as actividades na sala de aula.

Em vez de distribuir a toda a turma uma ficha de trabalho igual para todos, tenho, na sala de aula, um dossier organizado com várias fichas de exercícios sobre os diversos conteúdos do programa e uma biblioteca de turma, constituída por todos os manuais escolares que tinha em casa e por outros livros de especial interesse para a disciplina. Uma vez por semana, os alunos recorrem a essas fichas de treino para resolverem exercícios sobre os conteúdos em que sentem mais dificuldades, estando eu disponível para poder dar um apoio mais individualizado aqueles que têm grandes dificuldades de aprendizagem. Estes são os alunos que seriam propostos, no final do período, para as aulas de Apoio Pedagógico Acrescido.

A turma trabalha em grupos (de dois ou três elementos cada) sendo a constituição feita naturalmente consoante os interesses e as necessidades de cada um.

A hora semanal dedicada a este tipo de trabalho foi previamente negociada com os alunos e marcada no horário de cada um. Assim, todos sabem que às terças-feiras (por exemplo) a aula de matemática é gerida por cada um de forma a combaterem falhas existentes, a falta de pré-requisitos que tanto jeito nos dão para justificações em actas das reuniões de avaliação de final de período. Creio estar certo que, se os alunos apresentam falhas ao nível dos pré-requisitos é nossa obrigação dar-lhes esses pré-requisitos ou pelo menos criarmos um espaço dentro do horário habitual da disciplina para que os nossos alunos se apropriem deles.

Desta forma, nesta aula de trabalho diferenciado cada aluno ou grupo de alunos dirige-se à biblioteca de turma para ir buscar a ficha de treino que quer resolver por que precisa de treinar uma determinada matéria que vai ser avaliada no próximo teste.

Cada ficha de treino tem as respectivas soluções dos exercícios que servem de controle. Se alguma dúvida surgir , o aluno recorre a um colega que o possa esclarecer. Se a dúvida ainda subsistir então sim, o aluno pode recorrere ao professor a fim de que a dificuldade encontrada posa ser ultrapassada. É importante salientar que o aluno só recorre ao professor depois de esgotar todos os esforços com outro colega.

Poder-se-ia dizer que as soluções dos exercícios das fichas de treino não são um controle eficaz por razões óbvias, no entanto, depois de discutir o inconveniente de se conhecer unicamente as soluções, os alunos propuseram que alguns dos colegas sem qualquer dificuldade em matemática (todos nós temos um ou dois destes alunos em cada turma) pusessem à disposição de toda a turma as suas resoluções das fichas de treino devidamente identificadas, onde os alunos podem recorrer sempre que lhes surja alguma dúvida ou dificuldade. Assim, tento fomentar a aprendizagem cooperativa, promovendo a auto-aprendizagem, tornando o aluno responsável e autor do seu processo de crescimento, quer intelectual quer sócio-afectivo.

Enquanto a maioria da turma realiza um trabalho mais ou menos autónomo, individual ou em grupo, eu trabalho com os alunos que seguem um Plano de Apoio Educativo concreto e não tão autónomo. Estes alunos são aqueles, como já referi anteriormente, que têm grandes dificuldades na disciplina e quer não conseguem progredir sozinhos nem com a ajuda de um colega. São os alunos que necessitam de um apoio mais dirigido e individualizado.

Cada um destes alunos preenche um Plano de Apoio Educativo (fig. 1) onde, no primeiro espaço a preencher, depois da identificação do mesmo, " Sinto dificuldades em:", o aluno auto-avalia-se reflectindo e analisando as suas dificuldades. É um processo extremamente importante por ser uma tomada de consciência do que se sabe e não se sabe. É importante salientar que estes alunos necessitam da nossa ajuda pois nem sempre são capazes de identificar sozinhos as suas lacunas. Cabe ao professor, que o conhece minimamente, ajudá-lo nesta tomada de consciência.

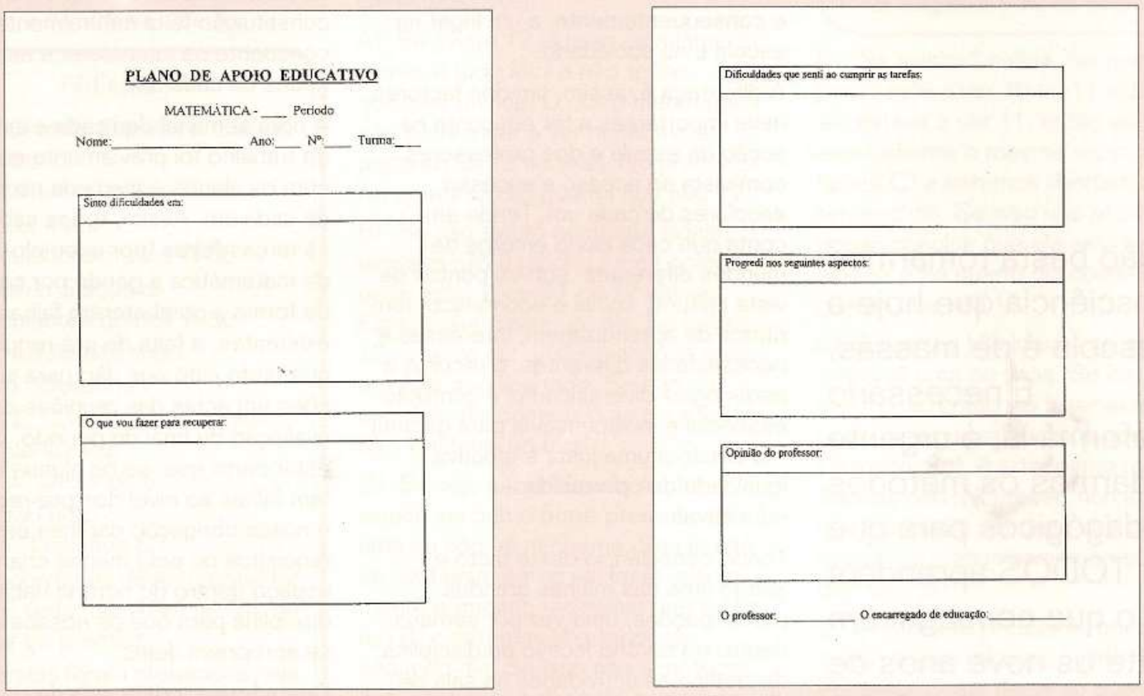
Por exemplo, os alunos nem sempre reconhecem que não sabem realizar operações simples com fracções. Para os ajudar nesse reconhecimento pode propor-se uma actividade tão simples como esta:

Calcula:

$1/2+1/3=$ $1/2-1/3=$

$1/2 \times 1/3=$ $1/2:1/3=$

Em "O que vou fazer para recuperar:", o professor e o aluno negoceiam algumas actividades mais dirigidas para combaterem as dificuldades reconhecidas anteriormente. Como exemplo de actividades a sugerir, e seguindo o exemplo das



PLANO DE APOIO EDUCATIVO

MATEMÁTICA - ___ Período

Nome: ___ Ano: ___ Nº ___ Turma: ___

Sinto dificuldades em:

O que vou fazer para recuperar:

Dificuldades que senti ao cumprir as tarefas:

Progredi nos seguintes aspectos:

Opinião do professor:

O professor: ___ O encarregado de educação: ___

figura 1

operações simples com fracções, o professor mostra ao aluno uma ficha de treino sobre "Operações com Fracções", de um nível bastante básico e orienta-o na sua resolução, explicando-lhe primeiro como se adicionam, subtraem, multiplicam e/ou dividem fracções.

No verso do Plano de Apoio Educativo encontram-se outros espaços igualmente importantes.

Em "Dificuldades que senti ao cumprir as tarefas", o aluno vai registando ao longo do seu processo de recuperação as dificuldades que sente no cumprimento do seu plano, ajudando, assim, o professor a reorganizar e a reorientar, se necessário, o seu estudo e mesmo sugerindo outras actividades que ajudem o aluno a combater as novas dificuldades reconhecidas.

No espaço seguinte, "Progredi nos seguintes aspectos", o aluno faz uma avaliação positiva da sua aprendizagem. É importante que o aluno reconheça que já aprendeu alguma coisa e que reconheça o que é que já sabe fazer bem.

No último espaço, "Opinião do Professor", o professor faz um balanço de todo o trabalho desenvolvido pelo aluno realçando os pontos positivos e apontando o que é que ainda deve ser melhorado.

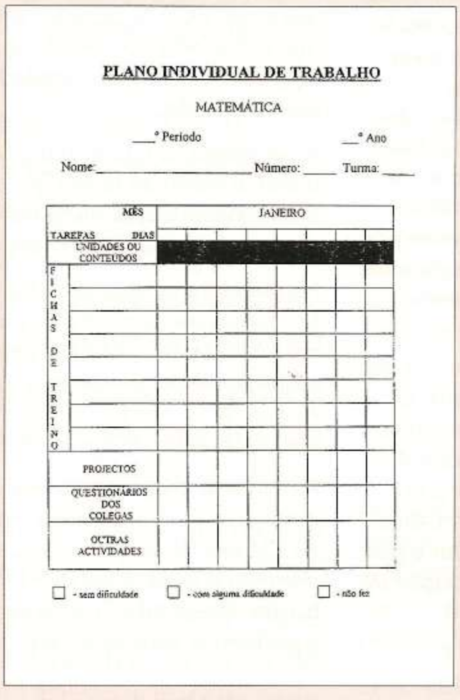
Este plano de apoio educativo é desenvolvido durante um período. Os dois primeiros espaços de registo, "Sinto dificuldades em" e "o que vou fazer para recuperar", são preenchidos no início do apoio, o terceiro espaço, "Dificuldades que senti ao cumprir as tarefas", é preenchido durante a realização do plano de apoio, e os dois últimos espaços, "Progredi nos seguintes aspectos" e "Opinião do Professor", são preenchidos no final do período, funcionando como uma avaliação do mesmo.

Este plano de apoio vai para casa no início do período, para ser dado a conhecer aos encarregados de educação que o seu educando está a trabalhar num plano de recuperação, dentro da sala de aula, com a ajuda do professor, e novamente no final do mesmo para tomarem conhecimento de como decorreu o trabalho e ficarem a saber se este foi bem aproveitado pelo seu educando ou não.

Enquanto só os alunos com grandes dificuldades, aqueles que precisam de um apoio mais dirigido e individualizado, têm um Plano de Apoio Educativo, toda a turma tem um Plano Individual de Trabalho, mensal, onde são os próprios alunos que fazem a avaliação do trabalho que desenvolveram durante esse mês (fig.2)

Na coluna de Fichas de Treino os alunos preenchem os rectângulos dessa coluna com os nomes das unidades didácticas do programa. Na linha referente aos dias do mês, os alunos vão preenchendo com o número correspondente ao dia do trabalho com fichas de treino.

Os restantes quadrados do plano vão ser pintados consoante as dificuldades sentidas: sem dificuldades (verde); com algumas dificuldades (amarelo); não fez: (vermelho).



PLANO INDIVIDUAL DE TRABALHO

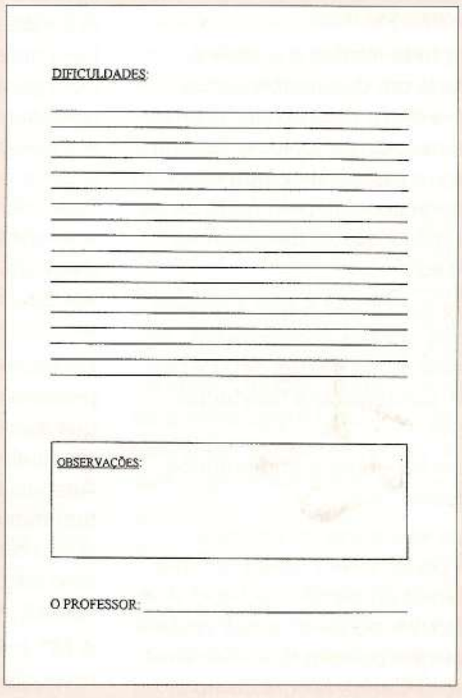
MATEMÁTICA

___º Período ___º Ano

Nome:___ Número:___ Turma:___

TAREFAS / DIAS	MÊS: JANEIRO
UNIDADES OU CONTEÚDOS	
FICHAS DE TREINO	
PROJECTOS	
QUESTIONÁRIOS DOS COLEGAS	
OUTRAS ACTIVIDADES	

☐ - sem dificuldade ☐ - com alguma dificuldade ☐ - não fez



DIFICULDADES:

OBSERVAÇÕES:

O PROFESSOR:___

figura 2

Este instrumento de trabalho é extremamente importante pois ajuda quer o aluno quer o professor a aperceber-se onde residem as dificuldades.

Assim, o professor poderá orientar o aluno, caso seja necessário, para algumas actividades de remediação que o ajudem a superar as dificuldades sentidas. Note-se que estes alunos não precisam de um apoio específico do professor. Estes necessitam, por vezes, só de uma orientação (do professor) e talvez da ajuda de um colega que não sinta dificuldades naquele tema específico.

O aspecto deste plano, no final do mês, é o de uma mancha verde, amarela ou vermelha, consoante as dificuldades sentidas, permitindo uma avaliação rápida do trabalho desenvolvido pelo aluno e o reconhecimento rápido das dificuldades sentidas. No verso deste documento o aluno faz um breve relatório sobre o seu trabalho registando as dificuldades que sentiu. Em "Observações" o professor orienta o trabalho para o próximo mês, dando algumas ideias sobre que actividades deve desenvolver para que o aluno supere as dificuldades sentidas. Este plano também vai para o encarregado de educação tomar conhecimento do trabalho desenvolvido pelo aluno em cada mês[1].

Espero que este relato sobre a minha experiência com as minhas turmas do 3º ciclo da Escola EB2,3/ES de Cunha Rivara, em Arraiolos, possa ajudar alguns colegas nesta árdua tarefa que é a de ensinar Matemática. Acima de tudo espero que sirva de ponto de partida para outras actividades mais enriquecedoras para os alunos.

Não basta tomarmos consciência que hoje a escola é de massas. É necessário transformá-la, é urgente mudarmos os métodos pedagógicos para que TODOS aprendam o que conseguirem durante os nove anos de permanência obrigatória na escola. Todas estas mudanças estão consagradas na lei dando-nos 95 a 110 horas, em média uma hora por semana por disciplina, para trabalharmos de maneira diferente os curricula, diversificando os métodos (Despacho 142/ME/90 de 1 de Setembro — Plano de concretização da área escolar, seu modelo organizativo e sugestões de estrutura). Analisando, ainda, o Decreto-Lei 286/89 de 29 de Agosto, este define os três grandes conceitos inovadores a introduzir nos curricula de todos os ciclos de ensino:

- Dimensão Humana do Trabalho
- Domínio da Língua Materna
- Formação Pessoal e Social

Então, hoje todos nós, profissionais de educação, somos obrigados (por lei) a organizar o ensino de modo que todos aprendam. Quem só pensa que se pode fazer alguma coisa, é responsável por não se fazer nada ou pelo fracasso do que se faz.

[1] Neste documento aparecem espaços dedicados a "projectos", "questionários dos colegas" e "outras actividades". Estes fazem parte de uma outra experiência de trabalho, mas não dissociada desta, que poderei relatar numa próxima oportunidade.

José António Covêlo Vieira
Escola EB2,3/ES de Cunha Rivara
Arraiolos

O problema do ProfMat 97 *(continuação da página 28)*

Ele via 10 da sua janela e concluiu que o outro preso via duas.

Claro que tudo isto só é possível porque cada um dos matemáticos sabe que o outro é capaz de fazer os melhores raciocínios lógicos. Se não fosse isso, o matemático que falou nada poderia concluir pelo facto de se terem passado quatro dias sem ter sido libertado.

A primeira conclusão é que a grande maioria dos nossos concorrentes, se tivesse sido presa nestas circunstâncias, teria conseguido a libertação. Ainda bem!

E surgiram aspectos e comentários bem curiosos.

As aldeias são espaços físicos e como tal pode haver aldeias sobre a linha divisória do campo de visão dos matemáticos e portanto estes podem ver aldeias em comum (Luís Ferreira). Mas tanto o Carlos Moura como o grupo da Ana Correia mostram que, se os presos se aperceberem disso, a solução continua a ser a mesma.

A Celeste Freire levanta uma questão bem mais complexa e que tem a ver com geometria: não é possível, quaisquer que sejam a forma da torre e a posição das janelas, que os dois presos vejam toda a paisagem **e** não haja sobreposição! Para não haver sobreposição das zonas avistadas por cada um, é necessário que exista uma estreita faixa de terreno que nenhum vê.

Há quem não admita a hipótese de um prisioneiro estar a ver 12 aldeias. É que *assim o problema não era problema* (Isabel Brandão e João Rino). A Anabela e o António Dias acrescentam mesmo que o autor do problema *gosta de ver os outros a pensar e por isso não apresentaria uma situação de resolução imediata* (engano...!).

A Mª João Lagarto apresenta a resposta na forma de um conto.

O Miguel Mata prolonga o raciocínio para além do 5º dia e imagina a existência de um terceiro matemático que pode logo no primeiro dia informar as famílias dos presos que estes, na pior das hipóteses, serão libertados ao 13º dia.

A Alexandra, o Emanuel e a Margarida deram a resposta quase em código e com a identificação na forma de charada (mas eu não me atrapalhei...).

Há quem tenha alguma estranheza: *Um carcereiro a gostar de matemática... Mas enfim, como tentou libertar os prisioneiros, já não é de todo mau. Por tal facto, merece o benefício da dúvida* (Braulino Salgueiro)

Finalmente, os parabéns para a resolução da Ana Cristina Esteves e da Cláudia Santos. Absolutamente correcta e clara, é feita na forma de banda desenhada. Temos pena de não a podermos apresentar aqui.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções

José António Fernandes

Observando representações gráficas de várias funções de uma classe, podemos conjecturar propriedades da classe a que pertencem essas funções. Considerando outros elementos da classe, estamos em condições de avaliar e refinar as conjecturas antes estabelecidas. Ao longo deste processo de representação gráfica de vários elementos da classe, que é muito facilitado pela utilização de tecnologia gráfica, ficamos cada vez mais convictos acerca da plausibilidade das nossas conjecturas.

A utilização de tecnologia gráfica nas aulas de Matemática, particularmente computadores e calculadoras gráficas, permite um estudo mais completo de classes de funções. Para Harvey, Waits e Demana (1995), o estudo de classes de funções será mais profundo no futuro e dependerá tanto das representações gráficas das funções como das suas representações simbólicas.

Observando representações gráficas de várias funções de uma classe, podemos conjecturar propriedades da classe a que pertencem essas funções. Considerando outros elementos da classe, estamos em condições de avaliar e refinar as conjecturas antes estabelecidas. Ao longo deste processo de representação gráfica de vários elementos da classe, que é muito facilitado pela utilização de tecnologia gráfica, ficamos cada vez mais convictos acerca da plausibilidade das nossas conjecturas.[1]

Para Zbiek (1995), a evidência proporcionada nesta abordagem indutiva e empírica tem implicações ao nível do raciocínio e da demonstração em matemática. É claro que uma tal evidência, baseada na observação e análise de exemplos, tem consequências diferentes conforme contraria ou confirma uma conjectura.

No caso de encontrarmos um exemplo que contrarie uma conjectura, tal é suficiente para refutá-la. Estamos, aqui, a recorrer a uma demonstração por contra-exemplo.

Já no caso de todos os exemplos estudados confirmárem uma conjectura, tal não é suficiente, em geral, para afirmar a conjectura como uma propriedade matemática. Só no caso do estudo de todos os exemplos possíveis confirmarem a conjectura é que ela pode ser considerada como propriedade matemática. Mas, quase sempre, em matemática é impossível estudar todos as concretizações possíveis de uma propriedade, pois geralmente elas são em número infinito. Nesta situação, a evidência proporcionada pelos exemplos não pode substituir a demonstração.

A evidência fornecida pelos exemplos que confirmam a conjectura desempenha um papel preponderante ao nível da convicção e da crença na sua validade, sendo, por isso, fundamentalmente subjectiva. Diferentemente, a demonstração, na medida em que se baseia em leis universais da lógica, é fundamentalmente objectiva. Recorrendo aos diferentes tipos de raciocínio distinguidos em matemática por Fischbein (1990), podemos situar a evidência no raciocínio intuitivo e a demonstração no raciocínio formal.

É de destacar que em termos de ensino, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, os alunos abordam a matemática a partir de um raciocínio preponderantemente intuitivo. Um dos muitos exemplos de uma abordagem indutiva e empírica acontece, frequentemente, no estudo das propriedades das operações aritméticas elementares.

Seguindo um processo de exploração de exemplos usando uma calculadora gráfica TI–83, podemos sugerir aos alunos que procurem estabelecer propriedades relativas a diferentes classes de funções envolvendo funções afins e funções quadráticas.

Funções afins

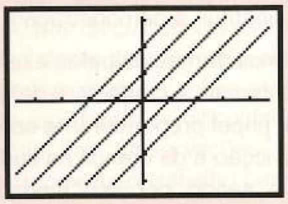
A classe das funções afins tem a forma $y=ax+b$ com $a, b \in \Re$.

Atribuindo aos parâmetros *a* e *b* diferentes valores reais, obtemos diferentes funções afins. Estudemos os exemplos que se obtêm fixando um dos parâmetros e fazendo variar o outro.

- *Variar o valor de b*

Considerando $a=1$, tem-se a classe de funções $y=x+b$.

Atribuindo ao parâmetro *b* os valores do conjunto {-2,-1,0,1,2}, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.1.



Representação gráfica da classe de funções $y_1=x+\{-2,-1,0,1,2\}$ em [-4.7, 4.7] x [-3.1, 3.1].

figura 1

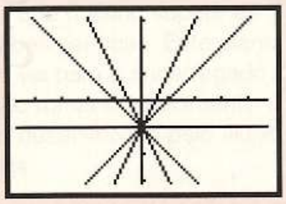
Conclui-se que todos os gráficos das funções são rectas com a mesma inclinação. Portanto, o parâmetro *a* define o declive da recta que constitui o gráfico da função afim.

- *Variar o valor de a*

Considerando $b=-1$, tem-se a classe de funções $y=ax-1$.

Atribuindo ao parâmetro *a* os valores do conjunto {-2,-1,0,1,2}, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.2.

Verifica-se que todos os gráficos das funções são rectas que passam pelo ponto de coordenadas (0,-1). Portanto, o parâmetro *b* define a ordenada na origem da recta que constitui o gráfico da função afim.



Representação gráfica da classe de funções $y_2=\{-2,-1,0,1,2\}x-1$ em [-4.7,4.7]x[-3.1,3.1].

figura 2

Funções quadráticas

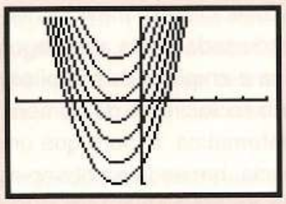
A classe das funções quadráticas tem a forma $y=ax^2+bx+c$, com $a, b, c \in \Re$ e $c \neq 0$.

Atribuindo aos parâmetros, *a*, *b* e *c* diferentes valores reais ($c \neq 0$) obtêm-se diferentes funções quadráticas. Estudemos, seguidamente, os exemplos que se obtêm fixando dois dos parâmetros e fazendo variar o terceiro.

- *Variar o valor de c*

considerando $a=1$ e $b=2$, tem-se a classe de funções $y=x^2+2x+c$.

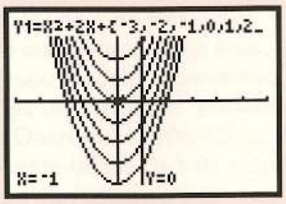
Atribuindo ao parâmetro *c* os valores do conjunto {-3,-2,-1,0,1,2,3} obtêm-se seis funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.3.



Representação gráfica da classe de funções $y_1 = x^2 + 2x + \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ em [-5,5] × [-4,4].

figura 3

Parece plausível concluir que os vértices das parábolas, que constituem os gráficos das funções quadráticas, estão sobre a recta vertical de equação $x=-1$ (ver fig. 4).



Representação gráfica da classe de funções $y_1 = x^2 + 2x + \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e da recta $x=-1$ em [-5,5] × [-4,4].

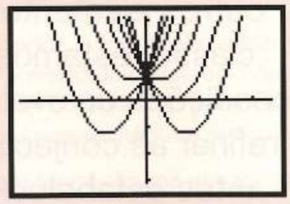
figura 4

Em termos algébricos, verificando que a equação $y=x^2+2x+c$ é equivalente a $y=(x+1)^2+c-1$, conclui-se que o par ordenado $(-1, c-1)$ define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a recta vertical de equação $x=-1$.

- *Variar o valor de b*

Considerando $a=c=1$, tem-se a classe de funções $y=x^2+bx+1$.

Atribuindo ao parâmetro *b* os valores do conjunto {-3,-2,-1,0,1,2,3} obtêm-se sete funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.5.

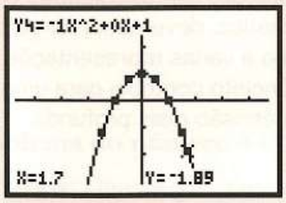


Representação gráfica da classe de funções $y_2 = x^2 + \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\ x + 1$ em [-4.7,4.7] × [-3.1,3.1].

figura 5

Representemos, agora, apenas os pontos correspondentes aos vértices das parábolas consideradas.

Observando o lugar geométrico dos pontos, parece que eles se situam sobre uma outra parábola. Ajustando uma parábola aos pontos, recorrendo a uma regressão quadrática, verifica-se que a parábola de equação $y=-x^2+1$ constitui um ajuste perfeito ao conjunto de pontos considerados, conforme se mostra na fig. 6.



Representação gráfica dos vértices das parábolas dadas e da parábola $y_4 = -x^2 + 1$ em [-4.7,4.7] × [-3.1,3.1].

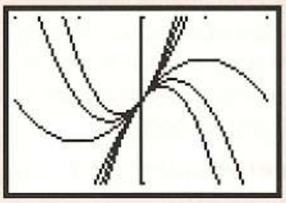
figura 6

Em termos algébricos, verificando que a equação $y=x^2+bx+1$ é equivalente à equação $y = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4}$, conclui-se que o par ordenado $\left(-\frac{b}{2},\ 1-\frac{b^2}{4}\right)$ define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a parábola de equação $y=-x^2+1$.

• *Variar o valor de a*

Considerando $b=1$ e $c=-1$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x-1$.

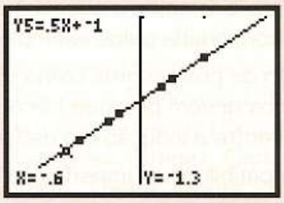
Atribuindo ao parâmetro *a* os valores do conjunto {-3,-2,-1,1,2,3} obtêm-se seis funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.7.



Representação gráfica da classe de funções y_3 = {-3,-2,-1,1,2,3} $x^2 + x - 1$ em [-1,1] × [-1.5,-.5].

figura 7

Representemos, agora, apenas os pontos correspondentes aos vértices das parábolas consideradas. Observando o lugar geométrico dos pontos, parece que eles se situam sobre uma recta. Ajustando uma recta aos pontos, recorrendo a uma regressão linear, verifica-se que a recta de equação $y=0.5x-1$ constitui um ajuste perfeito ao conjunto de pontos considerados, conforme se mostra na fig. 8.



Representação gráfica dos vértices das parábolas dadas e da recta $y_5 = 0.5x - 1$ em [-1,1]x[-1.5,-.5].

figura 8

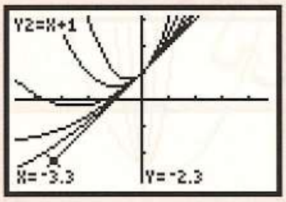
Em termos algébricos, verificando que a equação $y = a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4a}$ é equivalente à equação $y=ax^2+x-1$, conclui-se que o par ordenado $\left(-\frac{1}{2a},\ -1-\frac{1}{4a}\right)$ define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a recta de equação $y=0.5x-1$.

• *Variar o valor de a de modo a tender para zero*

Considerando $b=c=1$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x+1$.

Atribuindo ao parâmetro a os valores do conjunto {1,0.5,0.2,0.1,0.05}, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.9.

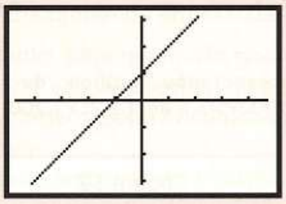
Constata-se que à medida que o valor de *a* se aproxima de zero a parábola correspondente à função, no rectângulo de visualização definido, aproxima-se da recta de equação $y=x+1$.



Representação gráfica da classe de funções y_1 = {1,.5,.2,.1,.05} $x^2 + x + 1$ e da recta $y_2 = x + 1$ em [-4.7, 4.7] × [-3.1, 3.1].

figura 9

No caso da função $y=0.001x^2+x+1$, a parábola que constitui o seu gráfico não se distingue do gráfico da recta $y=x+1$, conforme se observa na fig.10.



Representação gráfica da função $y_1=.001x^2 + x + 1$ e da recta $y_2 = x + 1$ em [-4.7,4.7] x [-3.1,3.1].

figura 10

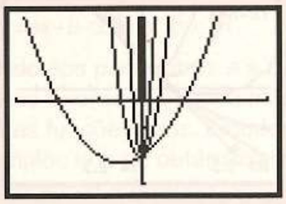
A conclusão a que chegámos quando a tende para zero por valores positivos mantém-se quando a tende para zero por valores negativos.

• *Variar o valor de a de modo a tender para infinito*

Considerando $b=1$ *e* $c=2$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x+2$.

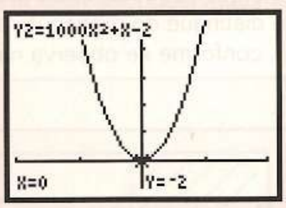
Atribuindo ao parâmetro *a* os valores do conjunto {1,10,50,1000}, obtêm-se quatro funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.11.

Seria razoável conjecturar que quando *a* tende para infinito por valores positivos, as parábolas que constituem os gráficos das funções tendem para uma semi-recta vertical. Contudo, a representação gráfica da função



Representação gráfica da classe de funções $y_2 = \{1,10,50,1000\}x^2 + x - 2$ em $[-3,3]\times[-3,3]$.

figura 11



Representação gráfica da função $y_2 = 1000x^2 + x - 2$ em $[-2,2] \times [-200,1000]$.

figura 12

$y = 1000x^2 + x - 2$, que se mostra na fig.12, permite concluir que tal conjectura não é válida.

O facto do gráfico da função quadrática constituir ainda uma parábola quando *a* tende para infinito por valores positivos mantém-se também para o caso em que *a* tende para infinito por valores negativos.

Conclusão

Referimo-nos neste texto ao estudo de propriedades de uma classe de funções. Todavia, podemos definir funções através da combinação de elementos de diferentes classes e que não pertençam a qualquer das classes consideradas. Por exemplo, a função $y = \log(x^2-1)$ obtém-se combinando uma função quadrática com uma função logarítmica. Esta forma de construir funções, combinando elementos de diferentes classes, reveste-se de uma importância fundamental no estudo de situações da vida real, pois muito frequentemente as funções que modelam essas situações pertencem a uma tal categoria.[2]

Segundo Zbiek (1995), o facto de incentivarmos os alunos a usar tecnologia para estabelecer e avaliar conjecturas, implica a consideração de três aspectos essenciais relacionados com a dualidade evidência *versus* demonstração:

(1) os alunos devem distinguir entre a informação fornecida pelos contra–exemplos e aquela que é proporcionada pelos exemplos;

(2) tanto os professores como os alunos devem procurar um equilíbrio entre a indução e a dedução;

(3) compatibilizar a "imperfeição" da tecnologia com a "perfeição" da matemática.

Em relação ao terceiro aspecto, deve ter-se presente que a limitação da tecnologia pode produzir representações inapropriadas que podem estar na origem de generalizações erradas.

Finalmente, a representação gráfica, em algumas situações constitui a única forma do estudante abordar um problema. Mesmo nas situações em que a representação algébrica ou numérica pode ser usada, a representação gráfica desempenha ainda assim um papel relevante, pois constitui mais uma forma de representação matemática e pode ser usada como uma possibilidade de confirmar um resultado obtido por outros meios. No caso das representações em matemática, deve observar-se que o recurso a várias representações de um conceito contribui para uma sua compreensão mais profunda.

Notas:

[1] Ver Hirschhorn & Thompson (1996)

[2] Ver Harvey, Waits & Demana (1995)

Referências

Edwards, T. (1996). Exploring quadratic functions: From *a* to *c*. The Mathematics Teacher, 89 (2), 144-146.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14*, 31-50.

Harvey, J., Waits, B. & Demana, F. (1995). The influence of technology on the teaching and learning of algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 14* (1), 75-109.

Hirschhorn, D. & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *The Mathematics Teacher, 89* (2), 138-142.

Zbiek, R. (1995). Reaction to Harvey, Waits, and Demana's article. *The Journal of Mathematical Behavior, 14* (1), 133-137.

José António Fernandes
Assistente no Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho

A Matemática e tudo à volta.
Aceitamos sugestões, reclamações, questões...

A actividade matemática dos professores não se confina às paredes da sala de aula ou mesmo aos muros da escola. Os ProfMats têm-nos ajudado a perceber isso, conhecendo actividades (mais ligadas ou mais afastadas da profissão) que alguns colegas desenvolvem e em que a presença da Matemática pode surgir de uma forma talvez não esperada mas nem por isso menos interessante.

No ProfMat 97, na Figueira da Foz, soubemos por exemplo que os colegas Paulo Saraiva e Fausto Silva são responsáveis por um programa de rádio, na região centro do país, e ficariam muito satisfeitos se lhe comunicassem críticas, sugestões, etc. Se está interessado, tome note na sua agenda:

Histórias com números

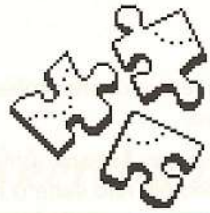
todas as 4as feiras das 20h. às 21h.

na Rádio Universidade de Coimbra

107.9 FM

Pode escrever para a seguinte morada:
Histórias com números, Apartado 1117, 3000 Coimbra
ou utilizar o correio electrónico: psaraiva@condor.ci.uc.pt

O problema deste número



Sobre os problemas anteriores

O problema do número 44

Viva o Norte! Depois da "ausência" no problema anterior, desta vez o Norte participou em força, de tal modo que se bateram os recordes desta secção com 17 respostas recebidas. É que, *quando nos provocam, resolvemos tudo e mais alguma coisa...* (Ana Maria Rodrigues).

O problema proposto na revista número 44 foi "O número do telefone do Luís":

O Luís mudou de casa e deu-me a sua nova morada.

– Quanto ao número de telefone, vais ter de o descobrir – disse-me ele. – É um número de cinco algarismos e, curiosamente, é divisível por 7, por 8 e por 9.

Não foi preciso pensar muito:

– Só com essas indicações não vou lá.

– Tens toda a razão, – retorquiu. – Mas vê tu que os dois primeiros algarismos, os da esquerda, coincidem com o número da minha porta.

Um minuto depois exclamei:

– Óptimo, agora já te posso telefonar!

Qual é o número do telefone do Luís?

As resoluções foram enviadas por Alice Bárrios e Francisco Estorninho (Lisboa), Ana Loureiro (Barcelos), Ana Rodrigues (Braga), Carla Reis (Azambuja), Carlos Moura (Santo André), Heitor Surrador (Aveiro), Helena Vaz (Tavira), Idália Pesquita (Venda do Pinheiro), Isabel Sá (Espinho), João Alves (Chaves), José António Alves (Portimão), Madalena Fernandes (Vieira do Minho), Pedro Serranho (Lisboa), Raquel Azevedo (Famalicão), Rui Simões (Reguengos de Monsaraz), Romeu Vieira da Silva (Beja), Susana Ribeiro (Braga) e Vidigal Minga (Paço de Arcos).

O raciocínio que está na base da resolução do problema é posto de forma muito clara e sintética pelo Heitor Surrador:

– Se o número é divisível por 7, 8 e 9 então é divisível pelo menor múltiplo comum destes números. Logo, será múltiplo de 7x8x9=504.

– Conhecendo os dois primeiros algarismos, bastaria ver quais os múltiplos de 504 que se situavam nesse milhar. Ora, como o amigo do Luís não teve dúvidas quando soube essa informação, é porque nesse milhar há apenas um múltiplo de 504.

Agora, *utilizando o factor constante da calculadora podemos obter rapidamente os múltiplos de 504* (Isabel Sá) e procurar aquele que é único no seu milhar. Encontramos então o 62496.

No entanto, para quem não goste de ir procurar simplesmente o número numa listagem, pode continuar-se o raciocínio:

Temos de descobrir um múltiplo de 504 terminado entre 496 e 503, para que, somado com 504 "salte" para a casa dos milhares seguinte e subtraindo-lhe 504 "salte" para a casa dos milhares anteriores (Raquel Azevedo e Susana Ribeiro).

Para um número ser divisível por 8, o número formado pelos seus três últimos algarismos tem de ser múltiplo de 8. Ora, de 496 a 503, o único divisível por 8 é precisamente 496. Já sabemos então a terminação do telefone do Luís. Para se obter um múltiplo de 9, os dois primeiros algarismos têm de ser: 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 89 ou 98. Basta agora testar em que caso se obtém um número divisível por 7. O único nestas condições é o 62496.

Há quem queira levar a confirmação mais longe: *Será este o número de telefone do Luís? Fui verificar na minha agenda e garanto que não corresponde a nenhum Luís que conheça* (Rui Simões). Mas há mais Luíses na Terra...

Por fim, a Ana Maria Rodrigues, na

Problema proposto

Vida de cão

O casal Silva vai passear. Cada um deles quer levar o cão pela trela e como não chegam a acordo, decidem atar ao pobre animal duas trelas de 2 metros cada uma.

Quando chegam ao parque, caminham a 2 metros um do outro.

Qual é, em cada momento, a área em que o cão pode andar livremente?

(Respostas até 6 de Março)

sequência deste problema, propõe um outro:

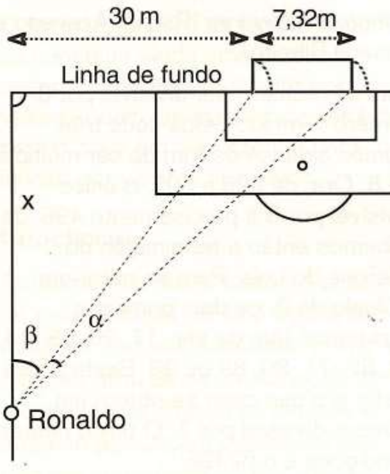
"Pede ao Luís para me telefonar. Como ele não sabe o meu número, diz-lhe que tem 6 algarismos, sendo os três últimos um número primo cuja soma de algarismos é 10. Curiosamente, a soma dos três primeiros também é 10 mas infelizmente o número por eles formado não é primo, embora seja múltiplo de um primo de três algarismos capicua.

Provavelmente o Luís vai dizer que os dados não chegam. Mas eu dou mais uma ajuda: os quatro primeiros algarismos são pares, não há repetição de algarismos e a soma dos dois ímpares não é 4."

Querem resolvê-lo?

O problema do número 45

Na anterior edição da revista, dedicada às novas tecnologias, o problema proposto foi "O remate do Ronaldo":



Ronaldo, o melhor avançado do mundo, corre com a bola nos pés ao longo da linha lateral do campo de futebol, perseguido de muito perto por um defesa da equipa adversária. Ronaldo quer rematar à baliza mas claro que só vai fazê-lo quando estiver nas melhores condições, isto é, quando o ângulo com que vê a baliza seja o maior possível.

A que distância da linha de fundo vai ele rematar?

Escolhi este problema porque é um daqueles que pode ser facilmente resolvido com a ajuda das novas tecnologias. No entanto, com alguma surpresa minha, apareceram várias resoluções analíticas e até uma, completamente geométrica e extremamente interessante, que o Eduardo Veloso apresenta no artigo especial que fez para esta revista e que foi também a utilizada pelo Luis Pato.

Tivemos 15 respostas: Alice Bárrios e Francisco Estorninho (Lisboa), Carlos Moura (Santo André), Cristina Viegas (Torres Vedras), Eduardo Veloso (Lisboa), Emídio Rodrigues (Amadora), Fernando Dias (Almodôvar), Isabel Sá (Espinho), Jaime Pinheiro Filipe (Barreiro), João Alves (Chaves), João Janeiro (Lisboa), José António Alves (Portimão), Luis Pato (Oliveira do Hospital), Mário Roque (Guimarães), Pedro Serranho (Lisboa) e Romeu Vieira da Silva (Beja).

O João Janeiro resolveu o problema com o programa de computador Sketchpad (ver artigo do Eduardo Veloso).

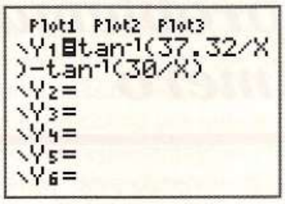
Mas outros processos existem de chegar à solução. Vamos chamar x à distância a que Ronaldo está da linha de fundo. Temos então

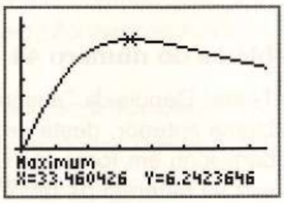
$$\alpha + \beta = arctg\frac{37,32}{x}$$

$$\beta = arctg\frac{30}{x}$$

$$\alpha = arctg\frac{37,32}{x} - arctg\frac{30}{x}$$

Trata-se agora de encontrar o mínimo desta função, o que facilmente se consegue com uma calculadora gráfica.





Ronaldo tem de rematar quando está a 33,46 metros da linha de fundo, e o ângulo com que vê a baliza é de 6,24°.

Este resultado também pode ser obtido por via analítica desde que se saiba a derivada do arctg.

A Cristina Viegas, a Isabel Sá, o Mário Roque e o Pedro Serranho usam um processo ligeiramente diferente. Como α é um ângulo agudo, *o ângulo com que o Ronaldo vê a baliza é o maior possível quando a tangente desse ângulo for máxima* (Isabel Sá).

Fazendo tg α = tg $[(\alpha+\beta)-\beta]$ e aplicando a fórmula da tangente da diferença, chega-se a

$$tg\alpha = \frac{7,32x}{x^2+1119,6}$$

e o mínimo desta função facilmente se obtém por via analítica, derivando e igualando a 0 a expressão anterior. Ou então usa-se a calculadora gráfica.

O Mário Roque, depois de propor e discutir este problema com os seus alunos, levanta algumas questões interessantes: Será que, ao Ronaldo interessa apenas o ângulo com que vê a baliza? Não será a distância à baliza um factor importante para quem remata?

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

O meu presente de Natal para o José Paulo Viana

Ronaldo e o *Sketchpad*

Eduardo Veloso

Não dei muita atenção ao último "problema deste número". Quando percebi que tratava de futebol, liguei logo à terra. Vi que devia ter que ver com ângulos inscritos em circunferências e esse tipo de coisas, mas porquê o Ronaldo no meio disso tudo? Geometria e realidade é bom, está claro. Mas futebol?! Porque não perguntar qual é o espectador da coxia lateral de uma sala rectangular de cinema que vê melhor o filme? Não pensei mais no problema. Até que, na antevéspera do Natal...

No dia 23 de Dezembro o João Janeiro enviou-me um *e-mail* intitulado "Ronaldo no *Sketchpad*". Uns tempos antes, dissera-me que estava a tentar resolver, com o *Sketchpad*, o problema do último número da revista (ver o enunciado na pág. 38 deste número). Como *attachment* vinha um *sketch* com uma interessante solução, utilizando as possibilidades do programa para traçar gráficos de funções. Reproduzo o *sketch*, com autorização do autor, na figura 1. A solução do João Janeiro despertou-me a curiosidade e fez-me ultrapassar o contexto do futebol... O Ronaldo passou a ser um ponto *R*, a baliza um segmento *AB*, e comecei a pensar como seria possível encontrar uma solução "puramente geométrica" para o problema. O objectivo seria encontrar uma solução á Euclides, com régua não graduada e compasso.
Seguindo a ideia do João Janeiro, decidi também recorrer ao *Sketchpad*. E aproveitei uns intervalos entre o bacalhau e o perú e umas pausas entre o fazer embrulhos e o colar etiquetas para me regalar com geometria na véspera e no dia de Natal.
Comecei a escrever este artigo no dia 25 à tarde. Nele está descrito o percurso feito até encontrar a solução.

Surge uma parábola...

As cónicas, em particular a parábola, surgem quando menos se espera em muitos problemas de geometria. Comecei o meu estudo do problema do Ronaldo construindo um *sketch* como o da figura 2. O ângulo *ARB* tem metade da amplitude do ângulo ao centro *AOB*, em que *O* é o centro da circunferência *RAB*. A amplitude do ângulo *ARB* será máxima quando o for a do ângulo *AOB*. Para determinar

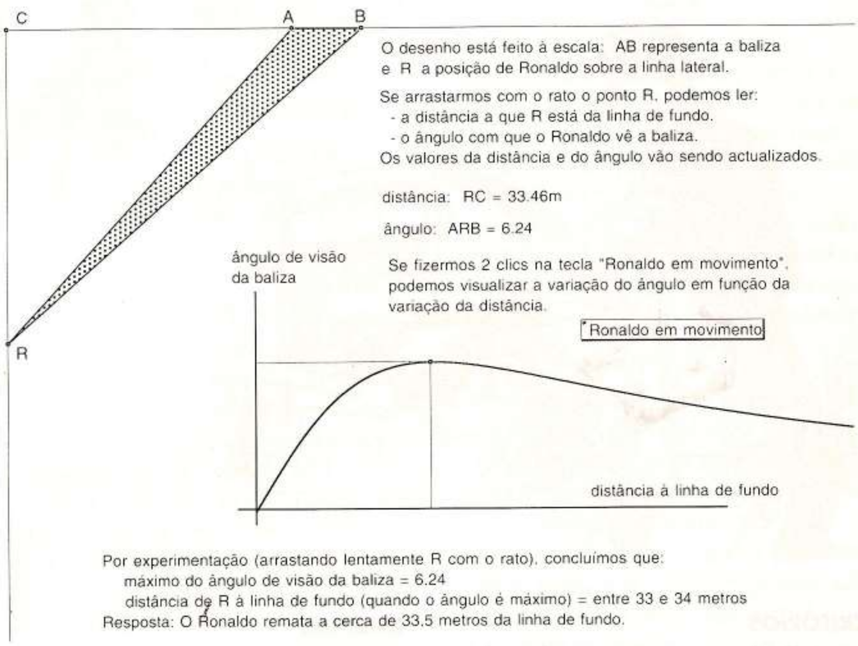


fig. 1- A solução de João Janeiro

o centro *O* basta traçar as mediatrizes das cordas *AB* e *AR*. Se o ponto *R* for construído de modo a poder deslocar-se livremente sobre o segmento *CD*, podemos como no *sketch* do João Janeiro arrastar *R*. Estava interessado em perceber a variação do ponto *O* quando *R* corre para a linha de fundo.. A minha expectativa é que ele se deslocasse, está claro, sobre a mediatriz de *AB*, que atingisse a certa altura a posição mais próxima do segmento *AB*, depois do que voltaria a afastar-se. O ângulo *ARB* seria máximo nesse momento.

Ao arrastar *R*, percebi que na realidade assim era, mas notei também que o movimento da mediatriz do segmento *RA* tinha uma certa regularidade. Resolvi pedir ao *Sketchpad* que desenhasse o rasto da mediatriz (seleccionei a mediatriz e depois escolhi *trace line*, no menú *display*). Quando arrastei de novo o ponto *R*, percebi que as sucessivas posições da mediatriz eram tangentes a uma parábola (ou, por outras palavras, que a parábola era a envolvente dessas posições da mediatriz) (fig. 3).

De outras investigações no *Sketchpad*, já sabia que a parábola que tinha obtido tinha o ponto *A* por foco e a recta *CD* por directriz. O seu vértice era no ponto médio do segmento *AC*. Sabia agora que a posição de *O* que dava a maior amplitude ao ângulo de visão de Ronaldo era a intersecção desta parábola com a mediatriz de *AB*. Para ter uma intersecção bem definida, tracei a parábola como *locus* (menú *construct*), problema lateral que deixo como desafio aos leitores. Obtive então a figura 4.

Estava encontrada uma solução, pois obtido o ponto *O*, o ponto *R* viria em consequência, não perdendo tempo naquele momento a ver como isso se faria.

Confesso no entanto que não estava satisfeito, pois não me parecia que o problema exigisse o recurso a cónicas — ou seja, na linguagem dos gregos, estava convicto que o problema era *plano* (resolúvel com os instrumentos euclidianos, régua não graduada e

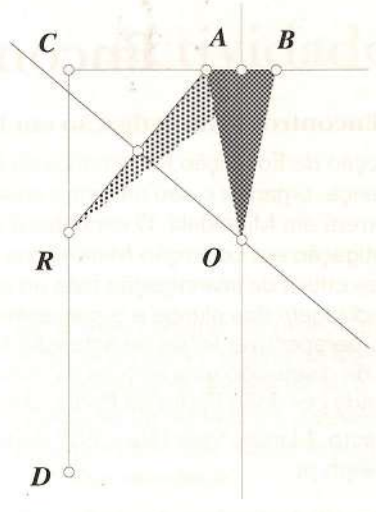


fig. 2

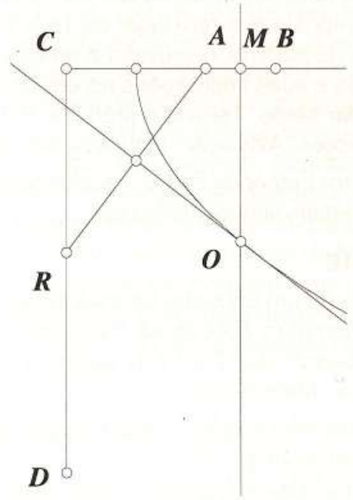


fig. 4

compasso) e não *sólido* (resolúvel apenas com recurso às cónicas).

Tentei então ver como poderia determinar *O* sem recorrer à intersecção da parábola com a mediatriz de *AB*.

Uma solução euclidiana

A solução saltou imediatamente à vista: como *O* é um ponto da parábola de foco *A* e directriz *CD*, a distância de *O* ao foco é igual ao comprimento do segmento *MC*, sendo *M* o ponto médio do segmento *AB*. Logo, O é a intersecção da circunferência de centro em *A* e raio *MC* com a mediatriz de *AB*. Depois o ponto *R* com ângulo máximo de visão obtém-se traçando a circunferência de centro

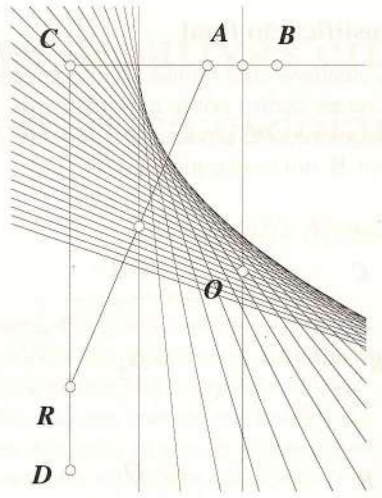


fig. 3

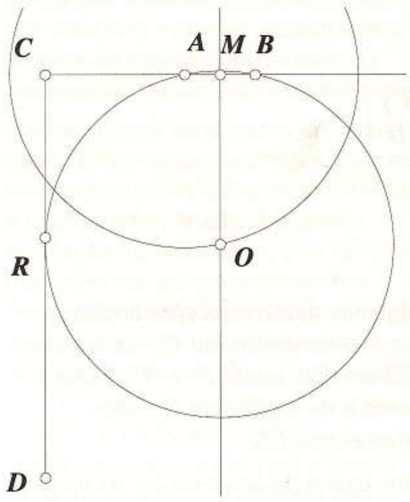


fig. 5

em *O* e raio *OA* e intersectando-a com o segmento *CD*. Quando fiz esta construção (fig. 5), verifiquei, com uma certa surpresa, que esta última circunferência era tangente ao segmento *CD*. Mas não havia razão para surpresas, pois tinha acabado de me servir do facto de que a distância de *O* à directriz era igual á distância ao foco!

Afinal, tinha dado uma longa volta pelas cónicas para chegar a uma conclusão bem mais simples: para encontrar *R*, basta encontrar a circunferência de centro sobre a mediatriz do segmento *AB*, passando pelos pontos *A* e *B* e tangente a *CD*. Mas restava o mais importante: perceber porquê!

Justificação final

Considere-se a família de circunferências de centro sobre a mediatriz do segmento AB e passando por A (e por B, em consequência) (fig. 6).

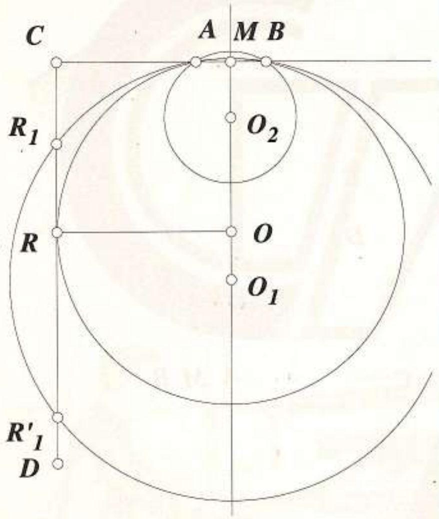


fig. 6

Algumas dessas circunferências, como a de centro em O_1, intersectam CD em dois ponto R_1 e R'_1. Outras, como a de centro em O_2, não intersectam CD.

Nos casos de intersecção, as amplitudes dos ângulos AR_1B e AR'_1B são iguais a metade da amplitude do ângulo AO_1B. Então, a solução do problema encontra-se quando o ângulo AOB é máximo, isto é, para a circunferência tangente a CD. O centro O dessa circunferência obtém-se como vimos anteriormente. E R, único neste caso, obtém-se tirando por O uma perpendicular a CD e determinando a intersecção.

Como gosta de salientar José Paulo Viana, normalmente os matemáticos apresentam apenas este tipo de justificações finais e não nos dizem como chegaram a elas, escondendo-nos o que ele, José Paulo, e eu também, consideramos o mais interessante e instrutivo, que é o percurso para aí chegar.

Eduardo Veloso

Encontros 98

VII Encontro de Investigação em Educação Matemática

A secção de Educação Matemática da SPCE, em colaboração com a ESE de Bragança, organiza o seu encontro anual em Abril, entre os dias 19 e 21, que decorrerá em Mirandela. O encontro é sobre o tema "Caminhos para a Investigação em Educação Matemática em Portugal". Pretende-se efectuar uma análise crítica da investigação feita no nosso país sobre o currículo, a aprendizagem dos alunos e o conhecimento e a formação de professores, bem como perspectivar linhas de actuação e trabalho futuro. Este encontro tem por base de discussão uma sintese da investigação em educação matemática realizada por João Pedro da Ponte, José Manuel Matos e Paulo Abrantes.

Contacto: Manuel Vara Pires, ESE de Bragança - tel:(073)3303099, e-mail: eiem@ipb.pt

2º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática

O Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa promove este Simpósio que terá lugar de 15 a 17 de Junho na FCL. Pretende-se criar um espaço de partilha, discussão e reflexão sobre as práticas e a investigação realizada e suas implicações no ensino das ciências e da matemática. Os temas a abordar serão: Teorias e práticas, Reforma curricular, Formação de professores, Avaliação, Natureza das ciências e Tecnologias de informação.

Contacto: Fernanda Freire, Faculdade de Ciências de Lisboa - tel: 7500049, ext. 1048, e-mail: simpecm@fc.ul.pt

22º PME

Trata-se de um encontro internacional promovido pelo grupo de PME (*Psycology of Mathematics Education*). Este ano o encontro decorrerá na África do Sul, em Stellenbosch, de 12 a 17 de Julho, sobre o tema "Diversidade e mudança na educação Matemática".

Para mais informações visite a página deste encontro na Internet: http://www.sun.ac.za/pme22

Contacto: João Filipe Matos, Faculdade de Ciências de Lisboa - tel: 7500049, e-mail: joao.matos@fc.ul.pt

50º Encontro da CIEAEM

Trata-se de um encontro internacional que este ano se realiza na Suiça, em Neuchâtel, entre 2 e 7 de Agosto. Os encontros promovidos pela CIEAEM (*Commission Internacionale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) são temáticos e o tema escolhido para este ano é "As ligações entre a prática da aula e a pesquisa em didáctica das matemáticas.

Para mais informações visite a página deste encontro na Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem.

Contacto: Tel: (0041)328898601, e-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch

Primeira Conferência da Sociedade Europeia para Investigação em Educação Matemática

Esta conferência realiza-se na Alemanha, em Osnabrueck, de 27 a 31 de Agosto. Esta sociedade tem por objectivo promover a comunicação, cooperação e colaboração na educação matemática na Europa. Assim, esta conferência baseia-se principalmente em grupos de trabalho que tratam de temas, como: A natureza e o conteúdo da Matemática e a sua relação no ensino aprendizagem, ferramentas e tecnologias na didáctica da Matemática e Interacções sociais em situações de aprendizagem matemática.

Visite a página da Internet: http://www.erme.uni-osnabrueck.de/erme98.html

Actividades investigativas em matemática escolar

Ercílio Mendes.

Indicações recentes em documentos orientadores sobre o ensino da Matemática, a nível nacional, como, por exemplo, no documento APM (1988), Renovação do Currículo de Matemática e nos novos programas de Matemática do terceiro ciclo e ensino secundário, sugerem que "as actividades a seleccionar deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, prova, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (Ministério da Educação,1991, p. 32).

De entre o conjunto de propostas de actividades para o ensino da Matemática, surgidas na década de 80 a realização de actividades investigativas por parte dos alunos assume particular relevância.

Assumindo que *saber* matemática é fundamentalmente *fazer* matemática (NCTM, 1991,p. 8) este tipo de actividades dá ensejo aos alunos de se envolverem em aspectos fundamentais da experiência matemática, como estabelecer e validar conjecturas, construir, reflectir, identificar, explorar, comunicar, discutir e argumentar. Estas orientações traduzem uma renovação do ensino da Matemática escolar em Portugal, com uma ênfase completamete diferente do ensino da disciplina antes da década de oitenta.

O que são?

Em termos gerais, investigar assume um significado mais forte que explorar. Enquanto explorar, no sentido normal da palavra, significa entrar por zonas ou locais desconhecidos para aprofundar conhecimento, notar diferenças, investigar sugere procurar descobrir, procurar encontrar.

> No domínio do ensino da Matemática, as actividades de investigação realizadas pelos alunos podem partir de propostas em que os alunos são colocados no papel de matemáticos. Dada uma situação suficientemente rica e de complexidade adequada ao nível de desenvolvimento matemático dos alunos, eles tentarão compreender essa situação e encontrar relações que lhes permitam fazer generalizações. (Matos, 1991, p.19)

Na área específica da Matemática, são um tipo de proposta de actividade aberta, em que: (i) a formulação e o contexto do problema ou da situação problemática não é explícita, e (ii) é colocado aos alunos um desafio que lhes desperta interesse. Ao envolverem-se na actividade, os alunos analisam situações, levantam questões, trocam opiniões, construindo percursos distintos, podendo descobrir soluções e chegar a conclusões através de trajectos separados de observação, exploração e investigação.

Apesar destas actividades de investigação terem alguns aspectos comuns com outras actividades desenvolvidas a nível escolar, nomeadamente a resolução de problemas, elas (a) são mais abertas, porque permitem o desenrolar de algo não chegando logo à conclusão, nem eventualmente a uma mesma conclusão; (b) permitem vários caminhos ou percursos, mais ou menos elaborados, permitindo assim vários *processos* para chegar às respostas e (c) a resposta não é única, isso é, da mesma actividade poderão resultar *produtos* não antagónicos. Ao desenvolverem este tipo de actividades os alunos poderão melhorar a capacidade de resolução de problemas quer na Matemática, quer na vida real, visto que terão de procurar estratégias diversificadas, interacções e conjugar ideias para suplantar obstáculos e erros cometidos, permitindo a própria experiência, voltar atrás, se necessário, levantando novas questões até atingir soluções.

No decurso de uma actividade investigativa surgem etapas que poderão ser mais ou manos demoradas, fruto da estratégia adoptada, da definição de novos pontos de partida, com outra ou outras *leituras* sobre os dados apresentados, das reflexões ocorridas, do envolvimento e do *apropriar* dos seus pontos fulcrais de modo a poderem dar por concluídas as questões que sucessivamente lhes vão surgindo no decorrer da actividade. Estes percursos ou outros análogos serão eventualmente mais enriquecedores que os preceitos e etapas de resolução de problemas indicados por Polya (1945). Poderão existir similaridades entre etapas de uma actividade investigativa e as fases preconizadas por Polya para a resolução de problemas, como, por exemplo, o percurso que vai desde a compreensão do problema até à definição de um plano. Nesta fase os alunos sentem algumas dificuldades, por vezes insuperáveis, na concepção de um plano para a resolução do problema. Esta fase, poderá ser mais fechada que aquela que ocorre numa actividade investigativa, que aqui corresponderá ao delinear de percursos ou caminhos para chegar às conclusões ou mesmo o reformular do ponto de partida e/ou efectuar novas formulações.

Amorim & Matos (1990) consideram que:

> As actividades investigativas a realizar pelos alunos deverão constituir propostas abertas, com linhas orientadoras e exploratórias no início, mas mantendo uma margem de liberdade que permita aos alunos, e em diferentes graus, o desenvolvimento de diversos níveis de envolvimento. Consequentemente, as actividades investigativas devem proporcionar aos alunos a experiência da descoberta, da realização de conhecimento matemático, que é comunicado a uma audiência no seio da qual é discutido. (p.158)

Estas actividades, a resolução de problemas, o desenvolvimento de projectos e outras , contrapõem-se à saliência e dominância que o ensino tradicional dá à manipulação exaustiva de exercícios que treinados longamente ao longo do ano lectivo conduzem naturalmente a aquisição de conhecimentos. A integração gradual das actividades indicadas na sala de aula poderá proporcionar aos alunos o desenvolvimento de capacidades, como o desenvolvimento do espírito crítico, a confiança em fazer matemática e o aumento do sentimento de tolerância e de cooperação. Progressivamente, dá-se a aquisição de uma base conceptual consistente e duradoura que mas tarde possibilite aos alunos reconstruir o seu conhecimento e aplicá-lo a situações novas e distintas.

Em conclusão, a introdução de actividades de natureza investigativa, tomando como ponto de partida que os alunos estão interessados e motivados e assumindo que as próprias actividades são mobilizadoras, fomenta a cooperação, criando um novo enquadramento, que gera discussão, permite a verbalização dos pensamentos, melhorando a capacidade de comunicação oral e escrita.

O que se pode aprender?

Sendo a Matemática uma actividade humana criadora, os alunos aprendem quando mais envolvidos estiverem nas actividades. Através da prática de actividades investigativas os alunos (a) têm oportunidade de criar e gostar do seu próprio trabalho em Matemática; (b) tendem a desenvolver confiança nas suas capacidades de fazer Matemática; (c) desenvolvem o trabalho cooperativo e (d) tornam a Matemática mais acessível e personalizada. (Backhouse et al, p.139).

A sua prática, não se limita à apreensão das noções e conceitos, abrange também outros objectivos destacados, por exemplo, nos programas de Matemática, como (a) o criar condições que permitam o desenvolvimento da autonomia; (b) proporcionar a consolidação, aprofundamento e domínio de saberes, instrumentos e metodologias que fundamentem uma cultura artística, científica e técnica e (c) aprofundar valores, atitudes e práticas que preparem intelectual e afectivamente os jovens para o desempenho consciente dos seus papéis numa sociedade democrática, (Ministério da Educação, 1991).

Outro tipo de objectivos como: (a) matematizar situações simples da vida real e fenómenos de outras ciências; (b) manifestar hábitos de reflexão; (c) revelar sentido de rigor e de confiança nos processos de elaboração e (d) revelar capacidade de criar soluções pessoais para problemas novos, são igualmente abrangidos.

De igual modo, são também contemplados objectivos importantes formulados em 1989, pelo NCTM como: (a) aprender a apreciar e valorizar a Matemática; (b) aprender a comunicar matematicamente e (c) aprendera raciocinar matematicamente.

A interacção professor-aluno e aluno-alunos influencia o que é aprendido e a forma como é aprendido. A introdução de propostas de actividades do tipo das indicadas cria espaço para a entreajuda entre os alunos, que através de caminhos distintos ou modos de acção diversificados, desenvolvem soluções para as propostas, através da verbalização dos seus pensamentos, troca de impressões e alguma discussão em pequeno grupo e/ou grande grupo, com ou sem intervenção do professor, construindo faseadamente os seus alicerces de conhecimentos matemáticos.

Referências

Amorim, I, & Matos, J.F. (1990) *Actividades Investigativas em Matemática: Porquê, Para quê, Como?* Actas ProfMat 90, vol. I (p.155-171). Caldas da Rainha: APM

APM (1988) *A Renovação do Currículo.* Lisboa: APM

Backhouse, J. Haggarty, L., Pirie, S.., & Stratton, j. (1992). *Improving the Learning of Mathematics.* London: Cassel

Matos J.F. (1991). *Logo na Educação Matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos.* Tese de Doutoramento na Universidade de Lisboa). LIsboa: Projecto MINERVA, Departamento de Educação da Faculdade de CIências da Universidade de Lisboa

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática e Métodos Quantitativos — ensino secundário.* Lisboa: Ministério da Educação

NCTM (1991) *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar.* (tradução do original em inglês publicado em 1989). Lisboa: APM e IIE

Polya, G. (1978) *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro: Editora Interciência. (Trabalho original em inglês publicado em 1975)

Ercílio Mendes
E.S. Jácome Ratton
Tomar

Quota de 1998

No ano de 1998 o valor da quota é de 6.500$00 para professores, 4.500$00 para estudantes (só se considera estudante quem não aufere qualquer tipo de vencimento) e 7.000$00 para sócios a residir no estrangeiro. **Se ainda não paga** a sua quota por **desconto bancário** pode enviar a declaração de autorização de desconto bancário até 28 de Fevereiro. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando cheque ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Assoc. de Prof. de Matemática - ESE de Lisboa-Edif.P2 -
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos -1500 Lisboa

Os sócios que residentes no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou através do cartão **Visa, Mastercard** ou **Eurocard**, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|

Visa ☐ MasterCard ☐ EuroCard ☐

Validade ________ o valor de ____________ correspondente a ________________

________________ Data ___/___/___

Assinatura ______________________________

Ficha de Inscrição/Actualização na Associação de Professores de Matemática

Nome: ______________________________ Sócio Nº ________

Morada: ______________________________

Código Postal: ______________ Distrito: ______________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Data de nascimento: ___/___/___ Nº de Contribuinte: ______________

Nº do B.I.: ______________ Arquivo: __________ Data de Emissão: ___/___/___

Ano em que começou a leccionar: ____________ Nível de Ensino: ____________

Categoria Profissional: ______________

Escola: ______________________________

Morada: ______________________________

Telefone: ______________ E-Mail: ______________

Publicações - Envio pelo correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais os portes do correio, em nome da APM para a morada acima indicada. Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:até 2.500$00 - 20%; de 2.501$00 a 5.000$00-15%; mais de 5.000$0-10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa , MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo E-Mail: apm mail.telepac.pt.

índice