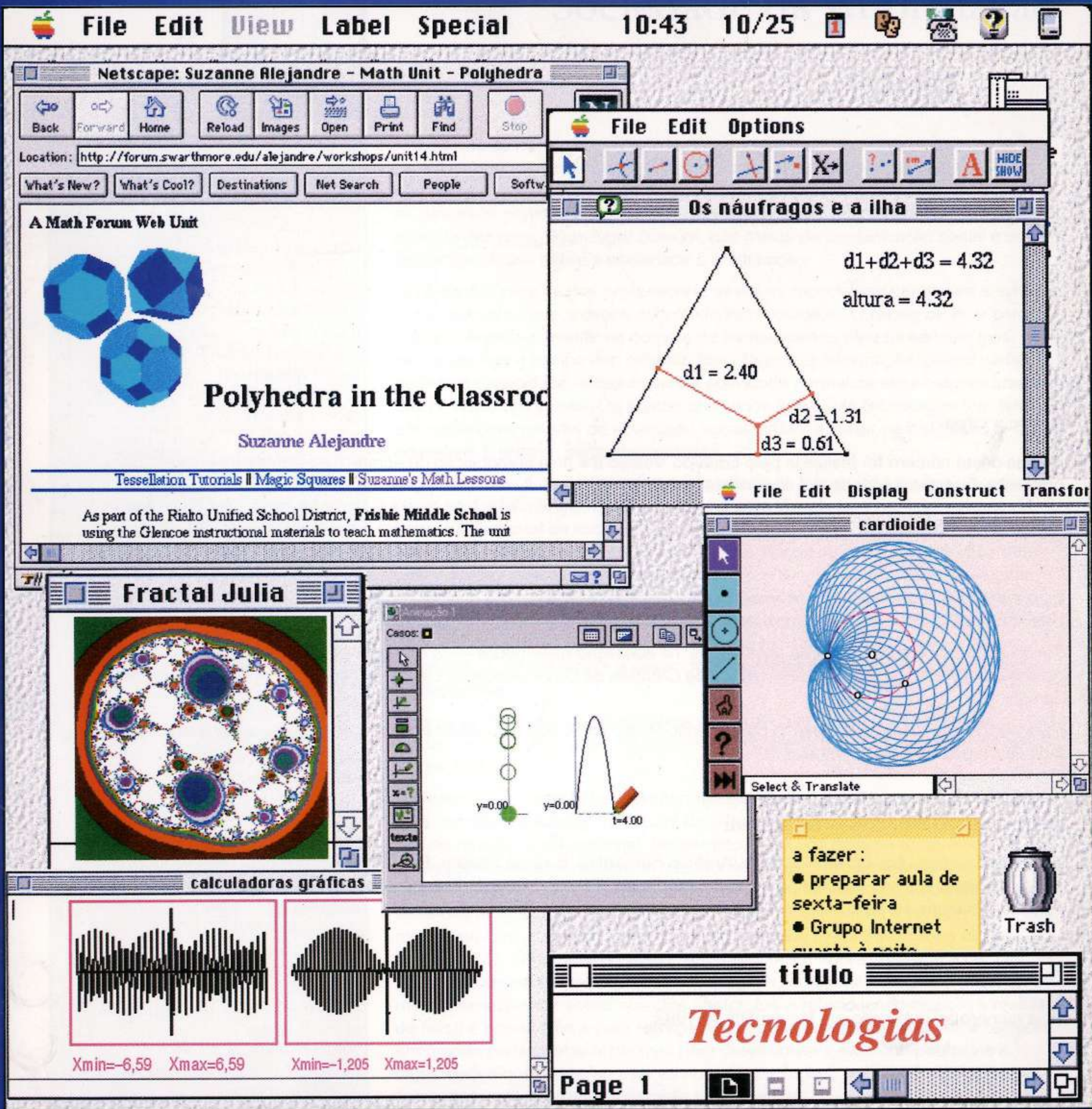
Educação e Matemática

Nº 45

Novembro/Dezembro de 1997



Revista da Associação de Professores de Matemática

Preço: 600$00

Sobre a capa

A capa deste número foi realizada pelo Eduardo Veloso e é uma composição de ecrans de computador e calculadora gráfdica referentes a artigos incluídos nesta revista.

Este número é dedicado às novas tecnologias. Tal como aconteceu no número temático anterior, foi convidado um colega exterior à redacção para participar na sua preparação.

Tendo em conta o tema — novas tecnologias na educação matemática — a redacção decidiu convidar para editor o colega João Pedro da Ponte, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, dada a sua larga experiência neste campo.

Para além de escrever o editorial, o colega João Pedro participou entusiasticamente, desde o início, em todos os trabalhos de preparação deste número.

Neste número também colaboraram

Alexandra Justiça, Ana Emília Nogueira, António Bernardes, B ranca Silveira, Fernando Nunes, Gilda Palis, Isabel Catalão, Jaime Carvalho e Silva, João Filipe Matos, José Sousa Ramos, Manuela Pires, Margarida Junqueira, Matilde Almeida, Rosário Monteiro, Rosário Ribeiro, Sérgio Valente, Teresa Vieira e Vitor Teodoro.

Data de publicação

Este número foi publicado em Novembro de 1997.

Nota

nº 45

Nov/Dez de 1997

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
Director
Paulo Abrantes
Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Fátima Guimarães
Fernanda Perez
Helena Amaral
Helena Lopes
Helena Rocha
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia
Editor convidado deste número
João Pedro da Ponte
Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
" Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática
Rui Canário
Educação
Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Tiragem
4400 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez
Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95
Correspondência
A. P. M.
Esc. Sup. de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos — 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

O Ensino da Matemática na Sociedade da Informação

João Pedro da Ponte

A ideia que as novas tecnologias de informação marcam uma nova etapa na vida da sociedade, conduzindo a novas formas de viver, de trabalhar e de pensar, parecia ultra-revolucionária em 1985, quando se iniciava o Projecto MINERVA e se davam os primeiros passos para a criação da APM. Hoje, passados pouco mais de dez anos, é um lugar comum, nos meios de comunicação social e nos discursos oficiais sobre a sociedade e a educação.

No entanto, para muitos professores, as novas tecnologias continuam a ser um corpo estranho, que provoca sobretudo incomodidade. O receio de ficar para trás tem levado a investir na compra de equipamentos para as escolas mas, se exceptuarmos o ensino das próprias tecnologias de informação, pouco partido se tira da capacidade instalada para a actividade normal de ensino-aprendizagem das diversas disciplinas. Os efeitos profundos que estas tecnologias têm tido em numerosas esferas de actividade social tardam a surgir na instituição educativa. É preciso perguntar, porquê?

A grande razão é que a entrada na Sociedade da Informação implica um novo papel para a escola que ainda não foi por esta completamente interiorizada. O papel fundamental da escola já não é o de preparar uma pequena elite para estudos superiores e proporcionar à grande massa os requisitos mínimos para uma inserção rápida no mercado de trabalho. Pelo contrário, passa a ser o de preparar a totalidade dos jovens para se inserirem de modo criativo, crítico e interveniente numa sociedade cada vez mais complexa, em que a capacidade de descortinar oportunidades, a flexibilidade de raciocínio, a adaptação a novas situações, a persistência e a capacidade de interagir e cooperar são qualidades fundamentais.

Para os professores de Matemática, este novo papel tem consequências fundamentais a dois níveis: na sua visão da Matemática e na sua visão do que é ser professor.

A Matemática, como saber estruturante que permeia muitos ramos de actividade e constituiu a linguagem natural da ciência e da tecnologia continua a ter grande relevância educacional. No entanto, cada vez mais se torna evidente que o seu papel educativo essencial não é o de formar novos matemáticos, mas sim o de contribuir de forma positiva para a formação educacional global da generalidade dos cidadãos. O objectivo de ministrar conhecimentos e técnicas mais ou menos avulsas, apelando à memorização e à prática repetitiva passa assim, naturalmente, para segundo plano. A Matemática é agora chamada a dar um contributo essencial para aprender a interrogar, conjectural, descobrir e argumentar raciocinando sobre objectos abstractos e relacionando-os com a realidade física e social. Não é para reforçar a aquisição dos conhecimentos e técnicas em grande parte já obsoletos mas para desenvolver novas competências e capacidades que é preciso usar as novas tecnologias, sejam calculadoras, computadores, sistemas multimédia ou a Internet.

O novo papel da escola implica um novo modo de ser professor. A sua função principal já não é dar o programa mas interpretar, gerir e adaptar o currículo às características e necessidades dos seus alunos. O professor não se pode limitar a seguir o livro de texto mas tem de usar materiais diversificados e estimular os alunos a consultar diversas fontes de informação. O ensino na sala de aula não se pode basear exclusivamente no quadro e giz mas tem de tirar partido de tecnologias como o viewscreen e os computadores. Ensinar não se pode reduzir ao binómio de expor a matéria e passar exercícios, sendo necessário propor tarefas diversificadas, incluindo problemas, projectos e investigações, e estimular diferentes formas de trabalho e de interacção entre os alunos. O professor não pode monopolizar o discurso na sala de aula mas tem de ser capaz de a transformar numa verdadeira comunidade de aprendizagem. Em vez de trabalhar como profissionais isolados, os professores de Matemática terão de aprender a cooperar de modo efectivo na produção de materiais, no diagnóstico de problemas, na realização de projectos educativos.

A Matemática, como ciência, sempre teve uma relação muito especial com as novas tecnologias, desde as calculadoras, os computadores, aos sistemas multimedia e à Internet. No entanto, os professores (como, de resto, os próprios matemáticos) têm demorado a perceber como tirar partido destas tecnologias como ferramentas de trabalho. O grande desafio que elas põem hoje em dia à disciplina de Matemática é saber se esta conseguirá dar um contributo significativo para a emergência de um novo papel da escola ou se continuará a ser a parte mais odiosa do percurso escolar da grande maioria dos alunos. ■

Entrevista com António Bernardes

"(...) a utilização dos computadores pelos alunos resultou bastante bem."

A utilização das novas tecnologias no ensino da Matemática é uma recomendação expressa dos programas de Matemática em vigor desde 1991. Já antes disso tinham existido diversas experiências pioneiras, dinamizadas sobretudo pelo Projecto MINERVA. Mas das orientações curriculares e das propostas experimentais à prática real vai, por vezes, uma grande distância. Pareceu-nos importante saber como se podem utilizar, hoje em dia, estas tecnologias e que perspectivas se formulam relativamente ao seu papel no ensino da Matemática, tomando como referência um professor com uma larga experiência neste domínio.

Para isso, decidimos entrevistar António Bernardes, um professor de Matemática desde há muito interessado nas novas tecnologias. Pertenceu a uma equipa do Projecto MINERVA, dinamizou muitas sessões de formação e trabalhou na profissionalização em serviço. Além disso, tem estado envolvido em projectos de inovação pedagógica e desenvolvimento curricular.

A entrevista decorreu na Escola Secundária de Gil Vicente, onde ele é professor, na respectiva sala de Matemática.

EM: Porque é que te começaste a interessar pelas novas tecnologias?

AB: A primeira actividade em que participei sobre as novas tecnologias foi em 1983, quando era delegado. Convidei uma pessoa para vir à escola fazer uma acção com os Spectrums. O meu interesse, na altura estava na programação. Sempre achei alguma piada a programar e durante uns tempos trabalhei muito em BASIC.

EM: Hoje em dia já não te interessas tanto pela programação?

AB: Já não tenho o mínimo interesse na programação, embora ainda tenha o Logo instalado no meu computador e de vez em quando faça um ou outro programa. Sempre gostei muito de programar em Logo.

EM: Sob o ponto de vista pessoal, o que te interessa hoje mais, nas novas tecnologias?

AB: Aqui na escola, neste momento, uso fundamentalmente calculadoras. O que faço é função do material que existe e da sua disponibilidade. Por exemplo, há dois anos trabalhei muito com os alunos nos computadores. Presentemente, os computadores estão ocupados pelas áreas de informática e, portanto, neste momento uso fundamentalmente as calculadoras gráficas. Mas acho que as experiências que, tanto eu como alguns colegas, tivemos na utilização dos computadores nas aulas foram bastante bem sucedidas. Além disso uso muito as novas tecnologias no meu trabalho pessoal.

EM: O que é que te parece o mais importante do papel do projecto MINERVA?

AB: Em termos de formação teve um papel muito importante (estou a falar da experiência do Projecto MINERVA na Faculdade de Ciências onde eu estive 4 anos). Fizemos milhares de horas de formação. Não só do ponto de vista técnico mas também do ponto de vista da utilização educativa das novas tecnologias, que era fundamentalmente a nossa preocupação.

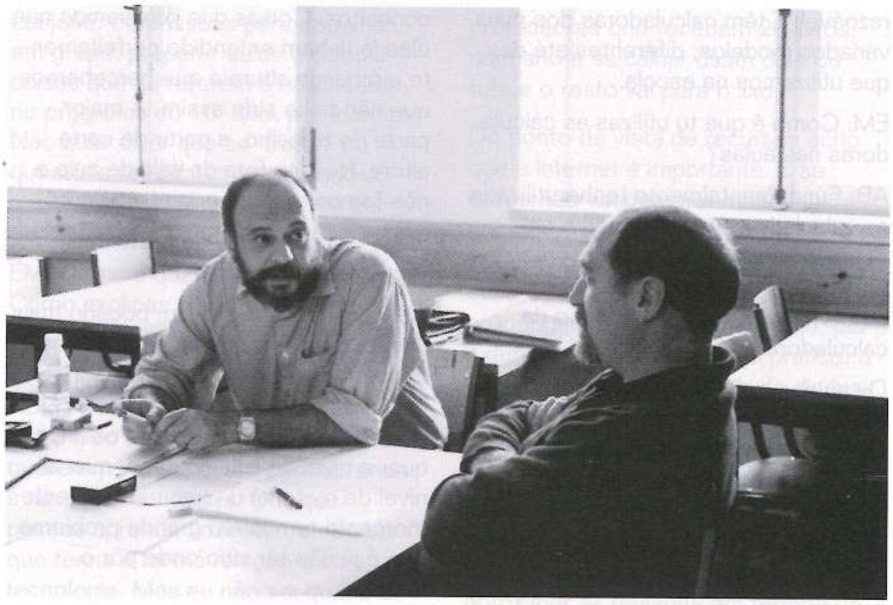
Outro aspecto muito importante foi o lançamento de projectos. Acho que houve algumas experiências interessantes, embora nem toda a formação tenha desencadeado os projectos que se podia esperar.

EM: E achas que esta experiência no projecto MINERVA teve alguma influência nas tuas ideias e nas tuas práticas?

AB: Eu estive seis anos sem dar aulas, dois anos na ESE de Lisboa e quatro anos na Faculdade de Ciências. Quando voltei para a escola, a minha prática lectiva nunca mais foi igual ao que era antes de sair. Nem todas as ideias que trazia consegui pôr em prática mas algumas pus e acho que resultaram bem. Por exemplo, a utilização dos computadores pelos alunos do ensino secundário (folha de cálculo, Graphic Calculus) acho que resultou bastante bem.

EM: Então o que é que não resultou?

AB: Aquilo que não resultou tem pouco a ver com as tecnologias. Refere-se sobretudo à metodologia de ensino. Eu tinha expectativas em determinado tipo de propostas que não são muito fáceis de levar à prática, como o trabalho de projecto. Por exemplo, o facto de fazer aulas muito centradas nos alunos, tanto a nível do terceiro ciclo como a nível do secundário, exige dos alunos uma responsabilização pelo seu trabalho que não se verificou. Isto é difícil de explicar. Os alunos estão habituados a que os professores façam tudo. A



minha maneira de actuar entrou um bocado em confronto com a maneira de actuar dos outros professores das mesmas turmas. Por vezes tomei medidas demasiado "radicais" em relação às práticas habituais dos alunos. Cheguei a uma certa altura que tive de mudar um pouco o sistema.

Mas nem tudo foi difícil. O primeiro ano foi o pior. O que é preciso é encontrar um ponto de equilíbrio.

EM: Muitas pessoas consideram que a maioria dos professores de Matemática têm uma má relação com as novas tecnologias. É uma opinião vulgarizada. Tu partilhas desta opinião?

AB: Olha, acho que distinguia a questão da utilização da calculadora da utilização do computador. Porque conheço pessoas que têm uma certa incompatibilidade com o computador, mesmo em termos de utilização pessoal. E também não as estou a ver, nem elas se estão a ver, a utilizar um computador, por exemplo, nas aulas, como ferramenta pedagógica.

No caso das calculadoras eu acho que é um bocado diferente. Conheço pessoas que nunca utilizaram um computador e que usam calculadora gráfica, neste momento. Penso que depende da tecnologia e da confiança que têm no seu domínio. Há pessoas que utilizam mais a calculadora só porque facilita a representação, e não como um objecto de investigação.

Mas de qualquer forma esse receio das novas tecnologias, tem mais a ver com os computadores, do que com as calculadoras.

Há um outro aspecto que leva a essa má relação, é que a gestão de uma aula dessas é completamente diferente de uma "aula tradicional". E de facto, muita coisa pode acontecer, quer do ponto de vista técnico quer do ponto de vista do desenrolar da actividade dos alunos. O receio é mais nesse sentido, do que pode acontecer numa aula em que tudo é imprevisível.

EM: Portanto, tu próprio ultimamente trabalhas bastante com calculadoras e até passaste a usar menos o computador.

AB: Tenho pena porque há programas que gostaria de utilizar e que a calculadora não substitui. Por exemplo, a nível da geometria o Sketchpad ou o Cabri. E, além disso, nós temos cerca de 80 calculadoras, mas só 18 é que são gráficas. O que às vezes torna difícil a gestão do material. Embora a nível do 10º ano muitos miúdos já tenham calculadora. Por exemplo, na minha turma tenho 30 alunos e 10 têm calculadora gráfica, o que é uma percentagem bastante razoável. E têm calculadoras dos mais variados modelos, diferentes até das que utilizamos na escola.

EM: Como é que tu utilizas as calculadoras nas aulas?

AB: Fundamentalmente tenho utilizado as calculadoras nas funções e na estatística. Uso propostas escritas ou então pego em exercícios, mesmo dos livros, e sugiro a utilização da calculadora.

Os alunos trabalham normalmente em pares. A situação mais normal é uma calculadora para dois alunos. No 12º ano, como as turmas são mais pequenas, há uma calculadora por aluno e eles organizam-se por grupos mais alargados.

EM: Quer dizer, os alunos trabalham com base nas tarefas escritas que tu lhes propões e, depois, o que é que fazes para saber se o seu trabalho está bem ou está mal?

AB: Normalmente vou discutindo com cada grupo. Quando há necessidade faço uma paragem, para fazer o ponto da situação. Depende do tipo de actividade, fundamentalmente. Se se justificar, para além da discussão com os grupos, faz-se uma discussão generalizada sobre o assunto, uma espécie de síntese, muitas vezes na aula seguinte. Normalmente, eu peço para eles passarem, ou para o caderno ou para a ficha, as conclusões a que chegam.

EM: Não costumas pedir relatórios escritos?

AB: Há 3 anos, eu e a Teresa Colaço fizemos um trabalho de mais ou menos um ano sobre estatística, que conduziu precisamente a um trabalho escrito no fim, pelo grupo. Nesse trabalho utilizámos fundamentalmente o computador e a folha de cálculo. Começámos em Novembro de um ano e acabámos em Junho do ano seguinte. Os alunos fizeram um relatório escrito e depois a apresentação pública dos resultados. O trabalho durou muito para além de se ter acabado a estatística e só quando fizeram o tratamento e a análise dos dados, é que eles perceberam alguns conceitos. Coisas que julgávamos que eles já tinham entendido perfeitamente, só nessa altura é que percebemos que não tinha sido assim. A maior parte do trabalho, a partir de certa altura, foi feito fora da sala de aula e nós fomos sempre acompanhando.

EM: Portanto a sala de Matemática tem aqui um conjunto de recursos...

AB: Sim. Mas somos um bocado mais ambiciosos. E todos os anos temos conseguido mais material. O Conselho Directivo normalmente apoia os pedidos que fazemos todos os anos, quer a nível de calculadoras, quer a nível de material de geometria. Neste momento temos um grande problema que é já não ter sítio onde pôr o material.

Aqui nesta sala, funcionam duas coisas. Uma, são as aulas e, outra, é o clube da Matemática que, em anos anteriores, teve bastante adesão por parte dos miúdos, principalmente os do 7º, 8º e 9º anos.

Este ano acho que funcionou bastante mal. Em outros anos, por exemplo havia jogos, fizemos um jornal de Matemática com os alunos, fizemos uma exposição. Actividades, que tinham a ver com as pessoas que estavam à frente disto.

EM: Uma questão ainda sobre a importância relativa das calculadoras e dos computadores. Se a escola dispusesse de computadores mais actualizados, alguns dos quais nesta sala, tu achas que as calculadoras gráficas continuariam a ter uma grande importância?

AB: Neste momento, continuo a achar que as calculadoras gráficas continuam a ter um papel importante, até porque para isso há uma razão muito simples: muitos dos miúdos já as têm. Cada vez mais um miúdo em vez de comprar uma calculadora científica compra uma gráfica.
Além disso, os professores sentem-se mais à vontade na utilização da calculadora do que do computador. Embora eu ache que, se calhar, isso daqui a uns tempos vai evoluir, a partir do momento em que começa a haver *software* mais barato, ou *software* que uma pessoa vai buscar à Internet. Mas, por enquanto, eu não estou a ver... quer dizer, se nós tivéssemos uma sala com computadores eu acho que a maior parte das pessoas continuaria a utilizar fundamentalmente a calculadora.
Há outro factor em questão, que é a referência que neste momento os programas fazem à calculadora.

EM: E o que é que te parece que diz o novo programa do secundário relativamente às novas tecnologias?

AB: Acho que valoriza muito mais as

novas tecnologias do que o anterior. Em vários tópicos vem sugerida a utilização das calculadoras. Mas, na minha opinião, o programa só por si, não dá indicações suficientes para as pessoas saberem o que é que hão-de fazer.

É preciso, por exemplo, que saiam coisas que ilustrem mais o que se pretende com a utilização das calculadoras. Se calhar, as brochuras de apoio aos professores podem contribuir alguma coisa para isso. As pessoas precisam de algum desenvolvimento a nível de orientações metodológicas. Por exemplo, os livros que eu já vi valorizam muito pouco as calculadoras e o computador.

EM: As novas tecnologias podem ser um factor de mudança fundamental na actualidade do ensino da Matemática? Há quem diga que sim, há quem diga que não, o que é que tu achas?

AB: Acho que não são o factor mais significativo. Depende da utilização que se fizer delas. Se eu venho aqui para a aula utilizar o Viewscreen durante 1 hora, não houve grande evolução...

A mudança passa por outras coisas. Passa mais decididamente pela metodologia de trabalho com os alunos, pelas propostas em si, quer eles tenham calculadora, quer tenham computador ou não tenham nada.

Durante três anos eu, a Teresa e o Manuel, trabalhámos em conjunto, e uma das coisas fundamentais foi o trabalho de grupo bem como a discussão e a preparação das coisas que tínhamos que fazer com os alunos. Discutíamos a metodologia, as propostas que iríamos utilizar, como iríamos dividir a aula, o que íamos discutir, o que é que eles faziam sozinhos e o que é que nós fazíamos, etc. Para nós, é mais importante o trabalho em grupo dos professores, do que vir referenciado no programa que se devem utilizar as calculadoras, ou o que quer que seja.

Por exemplo, aquilo que queremos fazer no círculo de estudos sobre a utilização da calculadora é um pouco nesse sentido: ver se arranjamos um conjunto de pessoas para trabalhar em grupo, preparar aulas e discutir coisas que se referem à calculadora no programa do 10º ano, por exemplo. Não quer dizer que se tratem só questões referentes à calculadora, mas fundamentalmente deverá ser dada atenção à calculadora.

EM: Como é que tu vês a Internet? Como explicas o número tão grande de inscrições de pessoas no curso de Internet no ProfMat?

AB: A Internet está na moda. Por outro lado acho incrível as pessoas quererem ir a um curso para aprender a navegar na Internet. Qualquer pessoa aprende sozinha... a não ser que tenha a tal má relação com a tecnologia. Mas eu não sei qual é o interesse das pessoas e as suas motivações, se é ver a oportunidade educativa que aquilo pode ter, ou se é um interesse puramente pessoal.

Por exemplo, nós fizemos aqui formação a 40 professores da escola em vários tipos de programas: processador de texto, base de dados, folha de cálculo,... Muitas pessoas compraram um computador nessa altura e começaram a usá-lo, para fazerem as suas fichas de trabalho, testes, etc. Mas, apenas cerca de 10% dos professores conseguem utilizá-lo com os alunos. Portanto, eu não sei até que ponto é que esta febre da Internet, que parece muito alta, é realmente uma febre que vá ter implicações nas práticas dos professores.

EM: Mas qual a importância que a Internet poderá ter, na tua opinião, para o ensino da Matemática?

AB: Eu consigo imaginar algumas coisas para as quais ela seja bastante importante pois é uma fonte praticamente inesgotável de recursos. Daqui a uns tempos é escusado os professores receberem todos os anos 20 livros de texto. Vão à Internet buscar as coisas que lhes interessam para trabalhar, e os alunos a mesma coisa. Acho um absurdo o dinheiro que se gasta em papel hoje em dia. É incrível o que as editoras gastam a oferecerem livros a cada professor. Há professores que recebem 20 livros num ano e se calhar usam dois ou três e o resto vai para o lixo.

Do ponto de vista de recursos acho que a Internet é importante. E se calhar não vai demorar muitos anos até ser um recurso normal do professor em termos de preparação das suas aulas e em termos de recurso do próprio aluno. Mas também vejo, por exemplo, do ponto de vista prático, o seu interesse como ponto de discussão. Estou farto de ouvir pessoas, por exemplo nos ProfMats, dizerem "estou lá na escola, não chega lá nada, não discuto com ninguém, não falo com ninguém". Uma das funções da Internet é precisamente essa, aproximar as pessoas em termos de discussão sobre a prática lectiva, sobre as coisas que fazem. Os professores podem pôr na Internet o que fazem, para dizer como fizeram e como resultou... Também estou a ver um bocado o papel do ensino à distância, não é?

Eu não sei muito bem, qual é que vai ser o futuro do ensino recorrente. Pelo menos no estado em que está não funciona, quanto mais não seja porque não está adaptado, neste momento, ao tipo de alunos que aparecem neste tipo de ensino. A Internet pode ser uma saída. No entanto, muito do ensino da Matemática vai continuar a fazer-se à margem da Internet.

EM: Mas com esse ensino à distância tem que se ter um certo cuidado, porque nem tudo o que está na Internet merece inteira confiança...

AB: Sim, há que ser selectivo. Por enquanto, eu acho que a maior parte das pessoas, eu próprio incluído, ainda vemos a Internet como uma fonte de recursos. Uma pessoa vai buscar coisas que lhe interessa ler, materiais que lhe interessa utilizar, ... Possivelmente, daqui a uns tempos em vez de ter a calculadora gráfica vamos buscar um programa à Internet e fazemos o gráfico. Eu nunca experimentei, mas deve ser possível. ■

Matemática experimental

José Sousa Ramos

Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação.Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação.Não será verdade também na aprendizagem?

Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação.Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem?

Não se deve confundir atitude experimental com o uso de uma calculadora ou de um computador, assim como não se deve confundir um projecto de Laboratório de Matemática como um meio de aquisição de material informático. Mas também não se pode deixar de criticar aqueles que perante as inovações tecnológicas, sejam elas calculadoras, computadores ou Internet, assustadamente lhes apontam apenas os perigos e fazem afirmações gratuitas sobre os seus malefícios no ensino. Como se algum mal podesse advir do seu uso ou, como se a próxima geração, pudesse colocar questões desse tipo. O ensino não está doente, apenas nunca se ensinou a tanta gente (a democratização do ensino é coisa recente) e nunca se exigiu tanto dos jovens (certos alunos de mestrado fazem hoje mais do que antigos professores fizeram em toda a sua vida). Mas atenção, nem tudo tem a mesma qualidade. Coloquemos primeiro algumas questões. Há que saber o que é a Matemática Experimental e a sua oportunidade actual.

A Sociedade da Informação — novas questões

A transição da Sociedade Industrial para a Sociedade da Informação, que é agora uma realidade consciencializada por todos, põe questões interessantes:

• Que Ciência vamos ter no próximo século? Quais as ideias, os conceitos fundamentais, os métodos, as técnicas que promoverão o desenvolvimento científico futuro? Qualquer professor deve reflectir e estar atento aos sinais que apontam para próximos progressos.

• Que formação dar aos jovens na nova Sociedade da Informação?

• Assim como as fontes, transformações e conversões da energia levaram à tecnologia que criou a Sociedade Industrial, as fontes, os processadores e os transmissores de informação/entropia levam a tecnologias que estão criando a Sociedade da Informação. Quais serão as suas características próprias, as suas ideologias, as suas relações de produção e organização?

• A nova Teoria da Informação confunde-se com a Teoria da Complexidade, com a própria ciência interdisciplinar. Os problemas ligados à complexidade surgem por todo lado: o que é a complexidade, como caracterizá-la, como medi-la? Que tipos de complexidade os sistemas, as evoluções, as formas podem apresentar?

• Quais as leis que regem os fluxos da informação? Os novos aparelhos, na maioria baseados nas tecnologias digitais, são cada vez mais processadores de informação (por exemplo, computadores, multimédia, suportes de comunicações). Mas os paradigmas científicos e tecnológicos seguem de perto os esquemas das velhas máquinas de energia. A ciência da informação ainda não começou.

• Qual o papel da Matemática dentro da ciência da complexidade? A Matemática é cada vez mais fundamental, e o professor de Matemática precisa de o saber, de o sentir, de o utilizar para motivar os alunos e a sociedade.

• Qual o lugar da Teoria do Caos e da Geometria Fractal na Ciência da Complexidade? Será uma simples moda passageira como alguns apregoam? Ou será que as medidas da complexidade dos sistemas caóticos e dos fractais, serão as grandezas básicas cujas relações exprimirão as leis, as dinâmicas dos fluxos de informação que traduzirão as propriedades do genoma humano, a gestão da Aldeia Global, o modo de pensar do robot inteligente, etc.? A inteligência, a criatividade, a capacidade de tomar boas decisões e realizar grandes obras é ainda uma incógnita do conhecimento psicológico, mas a necessidade da sua implementação artificial, nas máquinas inteligentes, promoverá a sua compreensão e o conhecimento de nós próprios. Serão elementos indispensáveis no ensino do futuro.

• Finalmente a questão que nos trouxe aqui — a Matemática Experimental. O rigor matemático, as ideias matemáticas, a criatividade e o poder dedutivo da matemática colocam hoje os limites do conhecimento: o que é decidível e o que não é, o que pode ser computável e o que nunca poderá sê-lo. Serão essas questões assim como todo o trabalho matemático um puro jogo do espírito humano, supondo que sabemos o que isso seja? Ou será antes fruto de uma apurada sensibilidade, de uma grande capacidade de observação e experimentação?

• As novas condições de trabalho: o computador e a rede Internet, permitem hoje, e de ano para ano sempre mais, trabalhar e comunicar em condições nunca antes imagináveis, o que leva necessariamente a uma renovação do método experimental da matemática. Os modos de ensinar terão também de se renovar.

O computador e a Internet no ensino e na investigação

Não vou prolongar-me a falar das razões para usar as calculadoras, os computadores ou a internet no ensino e na investigação, pois desde o seu aparecimento que o uso em ambas as actividades é um facto natural e a sua necessidade indiscutível. Considero mais útil reflectir como tirar o melhor partido desse material. O seu uso na sala de aula não é fácil, dá sempre mais trabalho, mas o esforço é quase sempre recompensado.

A Internet tem actualmente um problema — é lenta e cara no nosso país. Enquanto os computadores e a Internet não forem acessíveis a todos os professores e alunos, não para ver, olhar, mas sim para trabalhar, não podemos generalizar o ensino baseados neles, ... mas já se vai fazendo alguma coisa.

O Não-linear, o Caos e os Fractais

No virar do século passado Poincaré mostrou no problema da Mecânica Celeste dos 3 corpos que a busca de soluções analíticas era inútil. Estas apresentavam um comportamento complexo e é impossível representá-las analiticamente. Para as estudar introduziu o método novo da Dinâmica Topológica, baseada na ideia de estudar as propriedades invariantes por transformações bicontínuas (homeomorfismos). No estudo dos grupos discretos infinitos também se apercebeu que os conjuntos limite, eram deveras complexos. Seus contemporâneos como Cantor, Weierstrass, Peano, von Koch e Sierpinski, introduziram objectos matemáticos igualmente complexos. Pouco depois Julia e Fatou em França, por volta de 1918 e 1919, no estudo das iteradas das aplicações complexas, encontram conjuntos semelhantes, cheios de complexidade. Hausdorff em 1919 introduziu um conceito de dimensão não-inteira (dimensão de Hausdorff) que permite diferenciá-los e medi-los.

A ligação da complexidade ao não-linear é hoje mais clara. Mas tem sido difícil ultrapassar o linear. O facto de duas soluções do sistema não se poderem somar para dar uma terceira, o princípio da sobreposição linear, é um modo de pensar difícil de ultrapassar.

Com o uso crescente do computador as múltiplas experiências computacionais têm explorado os objectos e os fenómenos não-lineares. As leis começaram a aparecer com a ordem de Sharkovsky (1962), com a universalidade das constantes de Feigenbaum (1978), etc., aquilo que se designa como a Ordem do Caos e sua caracterização por grandezas, invariantes topológicos. A ciência dos comportamentos caóticos é hoje uma realidade que atravessa transversalmente todas as ciências e também representa os comportamentos ditos complexos. Quanto às formas complexas, foi Mandelbrot que as designou por fractais, por volta de 1975.

A turbulência, na mecânica dos fluidos, a dinâmica da atmosfera, os fenómenos económicos, a estrutura e o significado do DNA, etc, são objectos de estudo com características complexas, próprias dos sistemas não-lineares. Nestes e noutros estudos é demais evidente o uso dos computadores e das linguagens de alto nível, sejam elas simbólicas como o Mathematica ou o Maple (existem outras) ou pacotes numéricos ou gráficos. Não vale a pena essa discussão sobre o uso do computador. É mais interessante lembrar o papel do espírito experimental, porque ideias erradas sobre o trabalho em Matemática, leva à falta de produção científica nos investigadores e a um ensino deficiente da Matemática. O aluno, tal como o professor, para compreender tem que experimentar, isto é, tem que descobrir por si o resultado.

A Tecnologia Digital e a Matemática Discreta

É conhecido que as novas tecnologias: informáticas, multimédia (audio e vídeo), comunicações, genéticas, etc. se baseiam fortemente nas tecnologias digitais, isto é, onde a informação, o seu conteúdo determinante, é codificado em bits, em 0 e 1. É impressionante hoje depararmo-nos com qualidades superiores de imagens e sons, e no entanto, tudo é traduzido e processado com sequências finitas de 0 e 1. Esta tecnologia é causa e consequência de uma igual revolução na Matemática, em termos de qualidade e adaptabilidade à descrição da realidade — a Matemática Discreta, a Matemática que estuda as sequências finitas S* (ou infinitas S•) de 0 e 1, sequências de símbolos de um dado alfabeto S (não necessariamente de 0 e 1).

A teoria da computação, a teoria dos sistemas dinâmicos simbólicos, os estudos de engenharia genética, e muitas outras áreas do saber como a teoria do caos e a geometria fractal, recorrem à Matemática Discreta.

Esta área da Matemática está em constante expansão e a sua capacidade de modelar os fenómenos naturais parece não ter limites, com a grande vantagem de a sua implementação no computador praticamente não ter erros e pouco precisar da análise numérica.

Informação, Complexidade e formalismo termodinâmico (formalismo multifractal)

Tudo se reduz ao estudo da informação, aos seus tipos, às suas medidas e aos seus fluxos. As complexidades e a sua teoria são as leis das dinâmicas de informação (seus comportamentos caóticos e formas fractais). Informar, dar forma e formar - jornalista, artista e professor são as principais profissões da Sociedade da Informação.

Depois surgem as outras - gerir a informação (gestores), conservá-la (bibliotecários, historiadores, etc.)

Embora a ciência da informação e da complexidade seja do próximo século, temos pequenos esboços do que venha a ser – veja-se o formalismo termodinâmico ou formalismo multifractal. Formalismo que veio da abstracção da termodinâmica, da mecânica estatística, da teoria dos sistemas caóticos e da geometria fractal. O seu principal resultado é estabelecer relações entre as grandezas significativas conhecidas: entropia, expoente Liapunov e dimensão Hausdorff.

Compreender, desenvolver e ensinar a ciência da complexidade será o grande objectivo do próximo século. A Matemática no seu aspecto mais criativo ou experimental terá que ser predominante.

Matemática Experimental

Chegados aqui, ao virar do século e depois do que se disse, trabalhar em complexidade, na investigação e no ensino dos fenómenos da informação tem como formação básica a Matemática Discreta e como método de trabalho a Matemática Experimental, o modo de descobrir e de redescobrir o real, de criar e de recriar o virtual.

Exemplo de Matemática Experimental

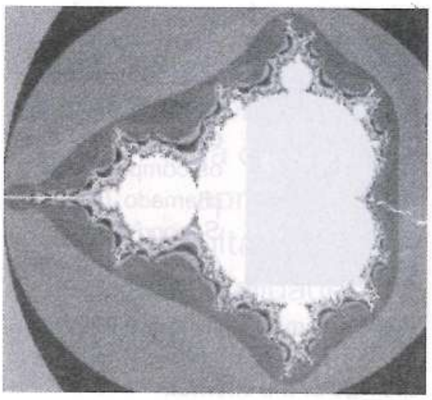
Consideremos os fractais abaixo e tal como para outro qualquer sistema complexo (caótico, fractal ou de outro tipo de complexidade) perguntemo-nos se é possível descrever matematicamente, compreender, formalizar a sua estrutura, classificar os seus tipos, associar grandezas e suas medidas.

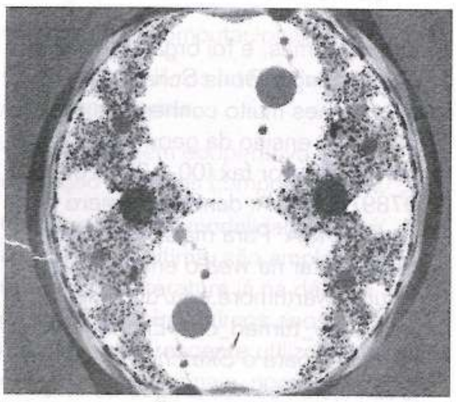
Desafio qualquer matemático a responder a estas questões, a fazer uma teoria matemática destes conjuntos de Mandelbrot e de Julia, isto é, a elaborar uma teoria matemática que diga alguma coisa sobre esses conjuntos, sem o recurso à matemática experimental, e sem usar os computadores.

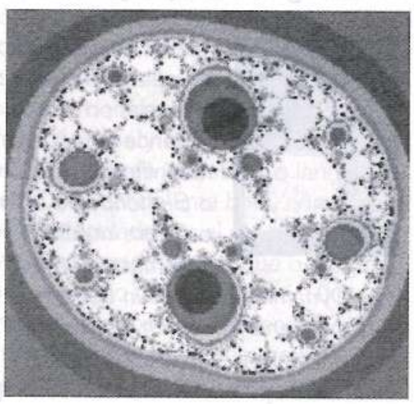
De início parece difícil. No entanto a resposta está lá, acessível, pronta a ser descoberta, nos objectos experimentais, nas aplicações complexas, como $f(z)= z^*z+c$, esperando que um amante da Matemática se aproxime, se sensibilize, observe as formas belas que produzem, experimente muito (itere, formule perguntas interessantes, programe-as e execute os programas). Veja as respostas no computador, formule conjecturas, verifique-as e, por fim, prove-as, com o jogo das regras racionais da Matemática adquirida.

Se depois de experimentar toda a combinatória de deduções das teorias feitas, isso não for suficiente, não desista, descreva o novo que experimentalmente viu. Introduza conceitos novos e novas regras para formalizar aquilo que vê pela primeira vez e estabeleça as propriedades que encontra experimentalmente.

Nesse dia terá o prazer de ter descoberto um segredo da natureza, uma melhor compreensão das formas complexas.







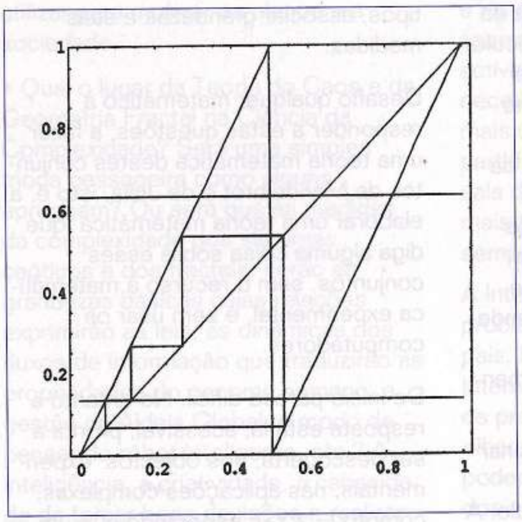


Fig. 1. Ângulo = 4/15, RRLC

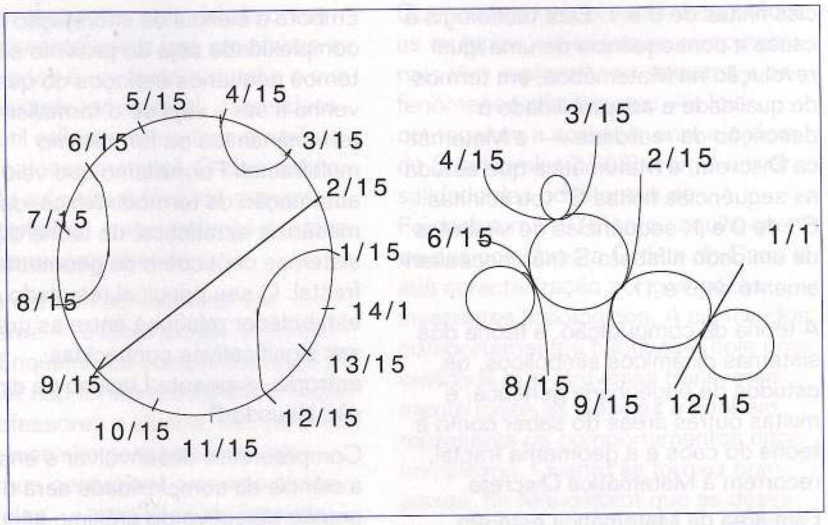


Fig. 2

Exemplo: Geometria do conjunto de Mandelbrot. Experimente a seguinte aplicação $f(x) = 2^*x$ (módulo 1), isto é, x é um ângulo na circunferência. Tome um ângulo racional x_0 de denominador ímpar, da forma $n / 2^{k-1}$, como condição inicial, e considere os intervalos

$R =]x_0/2, x_0/2+1/2[$ e

$L =]0, x_0/2[\cup]x_0/2+1/2, 1]$.

Itere, compondo f com ele próprio várias vezes. Codifique simbolicamente a órbita, isto é, construa a sucessão de símbolos R e L obtida dos endereços, intervalos visitados pela órbita. Se a órbita cai num extremo, associamos o símbolo C, e terminamos a iteração. A órbita repetirá a mesma palavra de símbolos, caso continuemos a iterar. Assim para x_0= 4/15, temos os intervalos

$R =]2/15, 19/30[$ e

$L =]0.2/15[\cup]19/30, 1]$.

O intervalo de partida é R, 4/15 está em R.

Os subintervalos visitados serão R, pois $f(4/15)=2.4/15=8/15$, L, $f(8/15) = 2.8/15=16/15-1=1/15$ e C, $f(1/15)= 2/15$. Assim a sucessão simbólica será RRLC (fig. 1).

O passo seguinte é identificar pares de ângulos que gerem a mesma sucessão simbólica (palavra). No caso RRLC o outro ângulo que gera a mesma sucessão simbólica é 3/15, como se pode verificar por iteração. Onde identificar, intuitivamente, é beliscar a circunferência nos valores dos dois ângulos que dão a mesma palavra e identificá-los num só ponto (fig. 2). Feito isto, por exemplo até k=7, poderá não só antever um pouco da estrutura do conjunto de Mandelbrot, como sentir o que quero significar com o método experimental em Matemática.

O Conjunto de Mandelbrot apresentado na figura tem sido muito estudado, veja-se por exemplo e para outras referências:

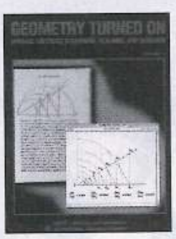
B. Mandelbrot, Objectos fractais. Ciência Aberta, n.51, Gradiva 1991

M. Sarreira e J. Sousa Ramos, Symbolic dynamics of iteration of cubic complex maps. European Conference on Iteration Theory, Lisboa, Set. World Scientific. Singapore, New Jersey, Hong Kong., 1991.

M.Sarreira e J. Sousa Ramos, Markov shifts in complex dynamical systems, Equadiff95, Jul.24-29, 1995, Lisboa.

José Sousa Ramos
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Tecnologias na Educação Matemática • Notícias breves



Acaba de ser publicado pela Mathematics Association of America (MAA) um magnífico livro sobre o *Sketchpad* e sobre o *Cabri*, intitulado *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.* O livro contém vinte e seis artigos sobre diversos aspectos relativos a este tipo de programas, e foi organizado por James King e Doris Schattschneider, dois nomes muito conhecidos nos meios do ensino da geometria. Pode ser pedido por fax (00 1 301 206 9789) ao MAA, dando o número do cartão VISA. Para mais informações, pode visitar na *web* o endreço http://forum.swarthmore.edu/dynamic/geometry_turned_on/. Encontrará *sketches* para o *Sketchpad* e para o *Cabri* incluídos nos artigos do livro.

Sherry Turkle, autora do livro pioneiro sobre as relações entre as pessoas e os computadores, chamado *The Second Self: Computers and the Human Spirit.* Publicou um novo livro que recomendamos, *Life on the Screen: Identity in the Age of the Internet*,

Modelação computacional em Ciências e Matemática

Vitor Duarte Teodoro

O mais importante desenvolvimento nos últimos anos na utilização de computadores nestas disciplinas corresponde à criação de *software* educacional que possibilita aos alunos a manipulação de conceitos formais, como são a maioria dos conceitos matemáticos e científicos, sem necessidade de recursos a complexas linguagens de programação. Esse *software* — *software* de modelação— pode facilitar a criação de poderosos ambientes de aprendizagem, em que a perspectiva construtivista seja dominante, apresentando simultaneamente potencialidades de abordagem integrada das ciências e da matemática.

Nos últimos anos assistiu-se a uma aceitação generalizada da importância da utilização do computador na educação científica e matemática. Desde a década passada que se reconhece que o computador pode melhorar significativamente as práticas pedagógicas nestas disciplinas, nomeadamente no laboratório e na representação de objectos matemáticos como, por exemplo, funções e figuras geométricas.

Modalidades de utilização dos computadores na educação científica e matemática

Neste breve artigo apresentam-se algumas ideias referentes ao mais importante desenvolvimento da utilização de computadores na educação científica e na educação matemática nos últimos anos — a utilização de software de modelação computacional. É hoje amplamente aceite que a utilização de computadores nestas áreas do currículo pode ter várias modalidades, a saber:

- Aquisição de dados e medida, utilizando sensores, interfaces e *software* de aquisição e tratamento de dados.
- Simulação de fenómenos naturais, com ou sem modelos matemáticos.
- Modelação computacional.
- Multimédia, livros interactivos e sistemas tutoriais.
- Aprendizagem cooperativa e utilização de redes computacionais.

Qualquer destas modalidades, com excepção da última, são amplamente referidas na literatura já na década passada [1]. Nos últimos anos assistiu-se à crescente utilização de redes computacionais, nomeadamente da Internet, e à melhoria significativa dos ambientes multimédia. Não serão esses os desenvolvimentos que serão analisados neste artigo mas sim o desenvolvimento dos sistemas de modelação computacional e a sua relação com os currículos escolares, nomeadamente as perspectivas que oferecem de uma maior integração entre as ciências e a matemática.

A utilização de sistemas de aquisição de dados está actualmente a generalizar-se nas várias disciplinas de ciências e a iniciar um processo de difusão na educação matemática, em grande parte graças às calculadores gráficas e aos sistemas de aquisição de dados ligados às calculadoras (os chamados CBL, Calculator-Based Labs).

O que é a modelação computacional

Criar e explorar um modelo de um fenómeno é uma experiência importante no processo de aprendizagem do modo como funciona a Natureza. Como diz Ogborn [2], a criação de modelos é o início do pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas.

Vejamos um exemplo simples da criação e exploração de um modelo matemático, numa perspectiva interdisciplinar. O *software* que se utiliza é o Modellus [3], vencedor do concurso de *software* da American Physical Society (1996). Suponhamos que se pretende investigar o lançamento vertical de uma bola, com uma certa velocidade inicial de módulo 20 m/s. Se considerarmos que o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s, e representarmos a coordenada vertical da bola por *y*, tem-se a seguinte equação para descrever essa coordenada em função do tempo (todas as grandezas estão representadas em unidades do Sistema Internacional de Unidades):

$$y = 20\,t - 5\,t^2$$

Para estudar esta situação no Modellus, simplesmente escreve-se esta equação na janela «Model» cria-se uma animação na janela «Animation» em que se representa a posição da partícula num referencial, com uma certa escala, juntamente com um gráfico de y em função de t (figura 1).

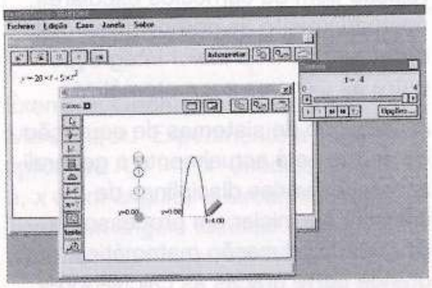


Fig. 1 Uma experiência com um modelo matemático representando um lançamento vertical de uma bola, com uma certa velocidade inicial.

Analisemos este modelo do ponto de vista da matemática. Trata-se de uma função quadrática, em que a variável independente é t e a variavel dependente é y. Esta função tem zeros para $t = 0$ e $t = 4$ e um máximo para $t = 2$. A concavidade é «negativa» porque o coeficiente do termo quadrático é negativo.

Modellus permite a investigação de modelos simples, como o apresentado, ou de modelos muito mais complexos e em muitas áreas das disciplinas científicas. Vejamos mais dois exemplos, que evidenciam importantes aspectos das potencialidades de uso interdisciplinar dos programas de modelação.

Na Figura 2 está representado um modelo de crescimento logístico de uma população. A variação da população é proporcional ao valor actual da população. A constante de proporcionalidade dessa relação depende da fracção que falta para se atingir o valor máximo da população. Neste exemplo, estuda-se o comportamento do modelo para dois valores máximos possíveis da população (100 e 200). Como se pode observar no gráfico, a população tende em ambos os casos para o valor máximo respectivo. Este é um exemplo de um modelo iterativo: há pelo menos uma variável que é calculada por iteração a partir do valor anterior.

Vejamos agora um outro exemplo completamente diferente: o comportamento de um circuito LC, um dos tipos fundamentais de circuitos em estudos de corrente alternada — trata-se de um exemplo de um oscilador electromagnético. Utilizando as leis dos circuitos, é possível escrever uma equação diferencial que descreve o comportamento da intensidade da corrente e da carga eléctrica que circula no circuito. Estas equações estão indicadas na janela «Model» (Fig. 3). Na janela «Animation 1» representa-se o comportamento do circuito para valores iniciais e parâmetros típicos.

Os três exemplos apresentados mostram os três principais tipos de modelação computacional, numa perspectiva quantitativa:

- Modelação com funções (Figura 1).
- Modelação com iterações (Figura 2).
- Modelação com equações diferenciais (Figura 3).

Além destes tipos de modelos computacionais, podem considerar-se modelos «qualitativos», que têm sido

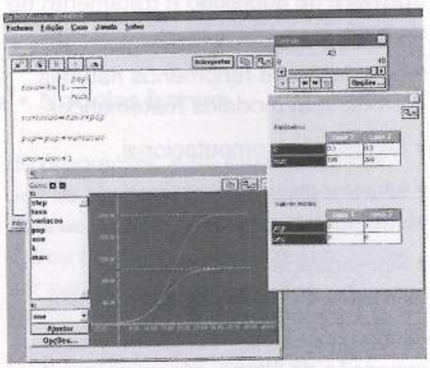


Figura 2. Investigando o comportamento de um modelo de crescimento de uma população quando se modifica o valor máximo que a população pode atingir (de 100 para 200, «Case 2»).

investigados por diversos autores [4]. Na modelação qualitativa, estabelecem-se relações «mais intensas» ou «menos intensas» entre variáveis (que podem ser de carácter qualitativo), estabelece-se o sentido da influência de uma variável noutra e verifica-se como evolui o modelo. A utilidade educativa deste tipo de modelos tem sido objecto de diversos estudos — ver, também, [4] — mas não há ainda conclusões seguras sobre a viabilidade do seu enquadramento curricular.

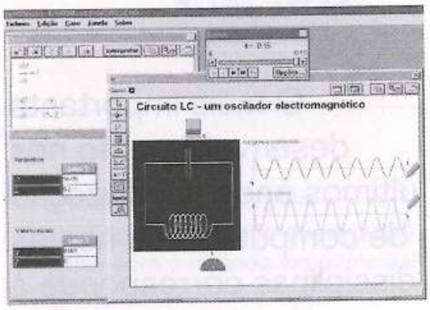


Figura 3. Comportamento de um circuito LC, um oscilador electromagnético.

Refiram-se ainda os modelos computacionais com base em autómatos celulares, isto é, modelos nos quais se define células no espaço, que podem ter certas propriedades e interactuarem com as células vizinhas [5]. Tal como no caso dos modelos qualitativos, a utilização curricular deste tipo de modelos não é ainda suficientemente clara.

Modelação computacional e poderosos ambientes de aprendizagem

A filosofia pedagógica que está na base da utilização educativa da modelação computacional tem origem, em última análise, nas ideias pedagógicas de Papert [6]. Para Papert, era a criança que deveria programar o computador e não o computador que deveria «programar a criança». Papert tem razão quanto ao facto do computador dever ser considerado como uma ferramenta para utilizar nos processos de descoberta e construção do conhecimento. Mas não tem razão quando considera que a utilização de uma linguagem de programação (Logo) é o principal modo da criança programar o computador. Com a criação de novos tipos de *software* nos últimos vinte anos, tornou-se evidente que há muitos outros processos de «programação» do computador. Estes novos tipos de *software*, desde as folhas de cálculo aos ambientes de construção de figuras geométricas, como é o caso do Cabri-Geometer [7], passando pelos ambientes do tipo do Mathematica [8], Mathcad [9] , Genscope [10], Modellus, etc., permitem que o utilizador «programe» o computador praticamente sem recurso a linguagens de programação. Utiliza, pelo contrário, processos de representação muito mais próximos dos processos de representação com «papel e lápis», o que se revela fundamental na medida em que não exige o conhecimento de uma nova sintaxe e uma nova morfologia.

Apesar da prática dominante nos processos de ensino-aprendizagem ser ainda a que corresponde a um modelo de transmissão do conhecimento, há hoje um consenso generalizado na investigação em educação que é necessário substituir essa prática por outra que esteja mais de acordo com um modelo construtivista da aprendizagem [11]. De acordo com a perspectiva construtivista da aprendizagem, é fundamental reconhecer que o aluno constrói o seu próprio conhecimento, a partir do que já sabe e do que é capaz de fazer, inserido em contextos sociais, culturais e funcionais.

As práticas educativas de modelação computacional podem apresentar características de poderosos ambientes de aprendizagem, isto é, ambientes onde:

- O aluno tem oportunidade de utilizar o conhecimento em contextos específicos (por exemplo, uma função quadrática representa a coordenada vertical da bola; essa função tem zeros e máximo, num certo domínio).
- A interacção com os colegas pode ser permanentemente estimulada, originando discussões e sínteses (a utilização educativa de computadores é normalmente realizada em grupos, quer por escassez de recursos quer porque a maioria dos professores reconhece que a prática de actividades em grupo é fundamental para os alunos se apoiarem uns aos outros).
- O aluno tem oportunidade de manipular os objectos formais como entidades «reais» (por exemplo, uma função não é mais uma sequência de símbolos mais ou menos esotéricos; é, pelo contrário, um objecto com que se pensa e que pode servir para representar relações quantitativas em situações específicas).
- O aluno pode concentrar-se no significado dos objectos formais em vez de se concentrar nos processos mais ou menos complexos de resolução de relações entre variáveis (por exemplo, uma equação diferencial é algo que representa o modo como uma grandeza varia; o conhecimento do processo de resolução dessa equação não é absolutamente necessário para utilizar a equação).
- A manipulação directa de múltiplas representações facilita a construção de relações entre essas representações (por exemplo, uma função pode ser representada por uma equação ou por um gráfico, que estão relacionados).
- A sequência de actividades apresenta complexidade crescente, tendo cada passo uma exploração e análise pormenorizada.
- Se reforça o desenvolvimento de competências específicas antes de competências gerais (por exemplo, o que é uma função é algo que se formaliza com rigor apenas depois de se analisarem muitas situações em que a utilização de funções é objecto de uso específico).
- Se acentuam as motivações intrínsecas nos processos de aprendizagem (criar um modelo é, frequentemente, um desafio cognitivo).
- Se facilita a construção de narrativas sobre os representações formais (escrever sobre as características dos comportamentos dos modelos é um processo determinante na construção do conhecimento).

A modelação computacional dos fenómenos e processos tem como objectivo último facilitar a compreensão desses fenómenos e processos. Mas, note-se que compreender, um termo frequentemente utilizado por professores, é um conceito extremamente complexo de definir. Que significa compreender um conceito físico? E um modelo de um fenómeno físico? Compreender é uma questão de grau, de acordo com Nickerson [12]. Para este autor, há evidência de que se compreende um conceito, princípio, estrutura, processo, de um modo relativamente profundo, quando se é capaz de explicar claramente a um especialista reconhecido, aplicar o conhecimento em vários contextos, produzir representações qualitativas adequadas, fazer analogias com sentido, corrigir erros, prever a influência de variáveis.

A utilização de ambientes de modelação pode potenciar todas estas dimensões do acto de compreender, uma vez que um professor pode facilmente utilizá-los para, por exemplo:

- Solicitar aos alunos a análise do mesmo modelo em contextos diferentes (por exemplo, que outras situações pode uma função quadrática representar?).
- Descrever verbalmente os modelos.
- Identificar analogias (por exemplo, que analogia há entre um oscilador electromagnético e um oscilador mecânico?).
- Corrigir modelos incorrectos (por exemplo, porque razão não é possível representar a distância percorrida pela bola lançada verticalmente através da função $y = 20\,t - 5\,t^2$?).
- Prever a influência de variáveis num modelo (por exemplo, que sucede ao tempo que demora a atingir o valor máximo da população quando esse valor é aumentado?).

Por outro lado, a modelação computacional permite a familiarização do aluno com os aspectos formais dos processos e dos fenómenos. E, de acordo com Schank [13], a familiarização é um factor determinante nos processos de compreensão.

Modelação e simulação computacional: diferenças e semelhanças

A utilização de simulações computacionais na educação é frequentemente objecto de crítica porque, dizem os críticos, o que é importante é a observação directa dos fenómenos [14]. Esta crítica é relevante para certo tipo de situações de aprendizagem com simulações, principalmente quando estas são o único processo do aluno tomar contacto com os fenómenos. Pondo de parte a utilização exclusiva das simulações (com eventual excepção de situações que, ou por ocorrerem em escalas, no espaço e no tempo, diferentes das nossas, ou por representarem processos impossíveis de observar por razões de segurança ou outras), há que reconhecer que a utilização cuidadosa de simulações pode facilitar a compreensão dos fenómenos e, até, a realização das experiências reais. Num estudo em curso (feito com a colaboração do autor) e ainda não publicado, sobre utilização de simulações de reacções ácido-base, concluiu-se que as simulações facilitaram não apenas a compreensão dos aspectos formais deste tipo de reacções mas também os aspectos operacionais de manipulação do equipamento experimental.

Frequentemente confunde-se simulação e modelação. Na realidade, pode-se considerar um *continuum* de situações, desde uma situação de «modelação pura» até uma situação de «simulação pura». O que caracteriza a simulação é a representação visual de um processo ou fenómeno com maior ou menor fidelidade perceptual, sem manipulação do modelo formal do processo ou do fenómeno. Por seu lado, a modelação é a representação formal, através de expressões quantitativas (ou qualitativas), de relações entre variáveis que descrevem o processo ou o fenómeno. Entre estas duas situações extremas há todo um conjunto de situações possíveis. A característica determinante da modelação é o acesso e a manipulação das expressões que traduzem as relações entre as variáveis.

Alguns programas de modelação, como é o caso do Modellus, podem ser utilizados para criar simulações e, até, situações de «simulação pura», na medida em que podem funcionar como linguagens de autor. Por exemplo, com o Modellus pode criar-se uma situação representando uma situação complexa, fechar a janela «Model», de modo a não ser visível pelo aluno, e proteger o acesso ao modelo com uma *password*. Obtém-se, assim, uma «simulação pura», que pode ter interesse pedagógico quando se quer apenas analisar a representação e não o modelo matemático que está por detrás dessa representação. Um exemplo é apresentando na Figura 4, onde se pode investigar o movimento do planeta Marte, visto da Terra (à direita) e visto de um ponto exterior ao Sistema Solar (à esquerda).

Uma nova visão dos objectos abstractos

Vimos já como a modelação computacional permite ao aluno realizar experiências com objectos formais, como são as grandezas físicas e outras quantidades. De acordo com Hebenstreit [15], o computador permite criar um novo tipo de objectos, que ele designa por objectos concreto-abstractos. Concretos porque existem no ecrã e podem ser directamente manipuláveis. Abstractos porque se trata de construtos mentais, de objectos formais.

De certo modo, o computador permite modificar o estatuto epistemológico de certos objectos: por exemplo, um vector não é mais um ser matemático que aparece apenas num desenho numa folha de papel, é um ser concreto-abstracto que aparece num ecrã de computador e pode ser directamente manipulado.

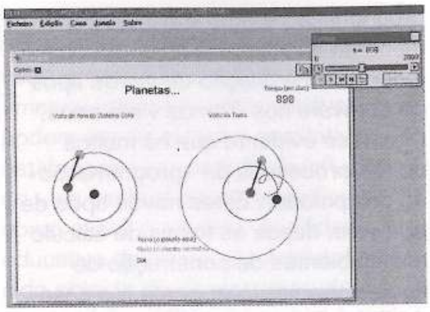


Figura 4. Uma simulação «pura» em Modellus do movimento de Marte, da Terra e do Sol. À esquerda, Terra e Marte orbitando em torno do Sol. À direita: Sol e Marte movendo-se em torno da Terra. O modelo matemático não está visível e não é acessível, excepto se se indicar uma password. Modellus pode funcionar, pois, como uma «linguagem de autor» para simulações.

Por exemplo, na Figura 5 mostra-se a construção de uma recta utilizando uma equação vectorial. O vector director da recta, v, pode ser directamente manipulado com o rato enquanto a construção está a decorrer. É evidente que se modificar a direcção do vector director, obtém-se uma recta diferente. Esta ideia pode ser directamente testada no computador, tal como se testam ideias com objectos físicos, que existem na realidade.

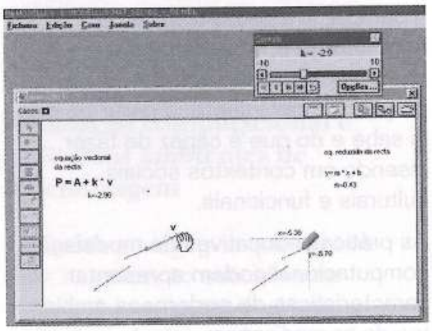


Figura 5. Uma experiência sobre a equação vectorial de uma recta. Modificando a direcção do vector director, v, modifica-se a direcção da recta.

A modificação do estatuto epistemológico dos objectos formais é uma das principais potencialidades dos sistemas computacionais. Não há ainda conhecimento seguro da influência que essa mudança tem nos processos de aprendizagem.

Computadores e reforma dos currículos e das práticas pedagógicas

O desenvolvimento de novas ferramentas computacionais é apenas uma das faces da inovação pedagógica a que a investigação sobre a utilização educativa dos computadores tem conduzido. A efectiva utilização dessas ferramentas e dos modelos pedagógicos a que elas estão associadas é uma tarefa gigantesca, uma tarefa de gerações, que envolve pelo menos três dimensões: organizacionais, curriculares e de formação e apoio aos professores.

As questões organizacionais não podem de modo algum ser subestimadas, como mostrou Cuban [16]. A criação de laboratórios computacionais, em que os alunos possam trabalhar em situação de aula, em grupo, pode revelar-se uma peça chave na criação de espaços escolares onde os alunos efectivamente se envolvam em actividades com os computadores. Esses laboratórios seriam utilizados por professores de ciências e de matemática, em situação de aula, e deveriam inclusivamente ter acesso à Internet, que pode ser utilizada como um recurso praticamente inesgotável para a criação de contextos de aprendizagem autêntica.

Tão importante como a criação de espaços nas escolas é a criação de currículos e materiais curriculares, nomeadamente livros escolares, em que o software seja parte integrante. Não é possível utilizar extensivamente um produto de software se ele não está profundamente integrado com os manuais escolares que são, sem dúvida, o suporte estruturador do processo de aprendizagem na escola. O autor está envolvido em projectos de desenvolvimento curricular com esta perspectiva que têm fornecido indicações encorajadoras. Note-se, no entanto, que o processo de desenvolvimento curricular para integração de software não é algo que se possa fazer para os professores. Faz-se, sim, com os professores, em interacção permanente. O aumento da dimensão interdisciplinar ciências-matemática é factor fundamental.

Como se mostrou ao longo deste artigo, uma parte significativa dos temas que se abordam nas disciplinas científicas, em particular na física, mas também em química, biologia, electrónica, etc., tem uma dimensão matemática muito importante. Essa dimensão, que pode e deve ser abordada de modo integrado, exige currículos — em ciências e em matemática — cada vez mais relacionados, unificando os diversos discursos e criando contextos autênticos de aprendizagem.

Finalmente, mas não por último, a formação e o apoio aos professores é uma actividade fundamental nos processos de inovação curricular. Nas actividades de formação, os professores devem-se envolver directamente na resolução de problemas, tal como se pretende que os alunos se envolvam, interagindo e partilhando sucessos e dificuldades. Os modelos de formação devem ser modelos «espirais», intercalados com actividades nas escolas, e tendo permanentemente uma componente de suporte, nomeadamente através da Internet, além de suporte presencial, sempre que necessário e adequado.

Referências

[1] Moreno, B. G. (1990). El microcomputador: versátil herramienta en los cursos de física. Informática Educativa 3, 2, 105-120.

[2] Ogborn, J. (1992). Modelação com o Computador: Possibilidades e Perspectivas. In V. D. Teodoro e J. C. Freitas, Educação e Computadores, Lisboa: ME-DEPGEF.

[3] Teodoro, V. D.; Vieira, J. P. D.; Clérigo, F. (1996). Introdução ao Modellus: Experiências com Modelos Matemáticos em Física-Química e Matemática. Monte de Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia (para mais informações ver http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus ou http://www.krev.com).

[4] Mellar, H.; Bliss, J.; Boohan, R.; Ogborn, J., Tompsett, C. (1994). Learning with Artificial Worlds: Computer Based Modelling in the Curriculum. London: The Falmer Press.

[5] Boohn, R. (1994). Creating Worlds from Objects and Events. In H. Mellar, J. Bliss, R. Boohan, J. Ogborn, C. Tompsett (1994). Learning with Artificial Worlds: Compter Based Modelling in the Curriculum. London: The Falmer Press.

[6] Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. NY: Basic Books.

[7] http://www.cabri.imag.fr.

[8] http://www.wolfram.com.

[9] http://www.mathsoft.com.

[10] http://copernicus.bbn.com/genscope.

[11] De Corte, E. (1992). Aprender na Escola com as Novas Tecnologias da Informação. In V. D. Teodoro e J. C. Freitas, Educação e Computadores, Lisboa: ME-DEPGEF.

[12] Nickerson, R. S. (1995). Can Technology Help Teach for Understanding? In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West e M. S. Wiske, Software Goes to School, Teaching for Understanding with New Technlogies. NY: Oxford.

[13] Shanck, R. C. (1986). Explanation Patterns.

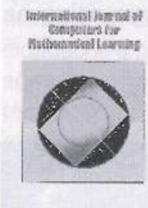
[14] Gago, M. (1990). Manifesto para a Ciência em Portugal. Lisboa: Gradiva.

[15] Hebenstreit, J. (1987). Simulation et Pédagogie, une Rencontre du Troisième Type. Gif Sur Yvette: Ecole Superieure d'Electricite.

[16] Cuban, Larry (1986). Teachers and Machines, The Classroom use of Technology Since 1920. NY: Teachers College Press.

Vitor Duarte Teodoro
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Tecnologias na Educação matemática • Notícias breves



A editora Kluwer, Academic Publishers lançou este ano uma nova revista: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. A equipa editorial inclui nomes conhecidos como Seymour Papert, Jere Confrey e Richard Noss. O tema central da revista diz respeito à influência dos computadores no ensino e aprendizagem da matemática, mas "o seu título deve ser interpretado de modo não estreito: os seus artigos não são apenas sobre computadores, e a matemática discutida não está limitada pelas actuais fronteiras da disciplina, nem pelas concepções correntes do currículo". A *homepage* da revista encontra-se a partir do endereço da Kluwer,(clique em *Journal Homepages* e depois em *Journals listed alphabetically*.)

Mesa redonda

Novas tecnologias: que perspectivas?

Assistimos hoje ao ressurgimento do interesse pelas novas tecnologias. Organizámos uma mesa redonda com professores que, desde há muito, trabalham nesta área no sentido de sabermos que balanço fazem das experiências passadas e como perspectivam o futuro.

A mesa redonda é dinamizada pelo Fernando Nunes, professor de Matemática na E.B.2/3 Marquesa de Alorna, que pertenceu ao Projecto MINERVA e desenvolveu projectos nesta área com os seus alunos.

Os participantes são a Branca Silveira, professora na Escola Secundária Augusto Gomes, em Matosinhos, que trabalhou no Projecto Minerva e tem estado envolvida em projectos de utilização das tecnologias com os alunos na sala de aula; o Eduardo Veloso que também trabalhou numa equipa do projecto MINERVA, desenvolveu um programa Logo-Geometria, trabalhou com alunos num projecto de inovação curricular e actualmente preocupa-se sobretudo com a utilização educativa de programas de geometria; a Isabel Catalão, professora numa Escola Básica 2/3 da Quinta de Marrocos, trabalhou numa equipa do projecto MINERVA e actualmente na Unidade de Apoio à Rede Telemática Educativa do MCT e tem utilizado as tecnologias na na sala de aula e em projectos extra-curriculares; O Jaime Carvalho e Silva é professor na Universidade de Coimbra ,colaborou na introdução de cadeiras de computação no ensino superior e foi um dos responsáveis pela valorização das novas tecnologias nos novos programas do ensino secundário. Todos os participantes têm uma larga experiência de formação de professores nesta área.

Fernando Nunes (FN): De que forma trabalha presentemente com as novas tecnologias?

Eduardo Veloso (EV): O meu investimento actual neste campo é voltado para o exterior, é na formação de professores em Sketchpad e uma pequena participação no grupo da Internet da APM.

Colaboro para que a APM tenha o tal entreposto de informação, produza unidades temáticas em português e dê indicações de boas unidades temáticas que existem por aí... Mas tão importante como isto, é a utilização pessoal. Neste momento, o computador é para mim, mesmo em relação ao Sketchpad, uma arma de investigação. Quero dizer que, tal como há pessoas que puxam da caneta para escrever ou da calculadora quando querem perceber um pouco mais sobre números primos, eu puxo do computador. Se quero perceber como é que uma circunferência pode ser tangente a três circunferências dadas, puxo do Sketchpad. Este tipo de utilização pessoal é essencial para que o uso na aula seja natural. Não me parece que uma pessoa que não puxa do computador ou da calculadora para nada, vá facilmente fazer uma aula com calculadoras e computadores. É essencial usar aquela arma quase rotineiramente. Está claro que não quero dizer que as pessoas que não usam tecnologias não dêem aulas. Acho muito bem que as pessoas que dizem "eu não gosto nada do computador..." dêem aulas sem ele, até porque há maneiras óptimas de dar aulas sem computador.

Jaime Carvalho Silva (JCS): Eu trabalho de muitas maneiras. Este aspecto que o Eduardo focou é fundamental e não tem só a ver com a tecnologia, tem a ver com o ensino em geral. Se uma pessoa não faz normalmente uma determinada actividade terá muita dificuldade em ensiná-la. Uma pessoa que habitualmente não resolve problemas de Matemática, como é que vai ensinar a resolução de problemas? Se as pessoas não estiverem à vontade com a tecnologia não conseguem usá-la na sala de aula. E não me refiro ao ponto de vista técnico. É preciso saber usar, não é preciso saber tudo.

FN: Jaime, em relação a aquilo que estás a fazer actualmente, há projectos que estejas a desenvolver nesta área?

JCS: Há muitos projectos. Eu estou num centro de competência do Nónio Século XXI, onde decidimos fazer aquilo que não foi possível fazer no projecto MINERVA e que é uma concentração curricular. Pensamos apenas no ensino da Matemática, Física e Química. Vamos tentar pensar em termos de sala de aula, para cumprir determinados objectivos relativos a estas disciplinas. Que papel é que poderemos atribuir à tecnologia? Todas as possibilidades estão em aberto. Propomo-nos, em colaboração com as escolas, desenvolver um certo número de actividades, curriculares e extra-curriculares. Um dos projectos que temos é a transformação de uma carrinha vulgar num centro de demonstração de realidade virtual de questões curriculares. Não é só mostrar coisas bonitas que os computadores podem fazer, mas mostrar isso ligado à Matemática, à Física e à Química que os alunos encontram dentro da sala de aula. Outra coisa que vai agora sair é um CD chamado Omniciência que inclui, para além de outras coisas, todos os programas que desenvolvemos no projecto Softciências.

FN: Branca?

Branca Silveira (BS): Ora bem, eu estou a colaborar no Fórum Pedro Nunes, no grupo de trabalho de Actividades e Recursos e, ainda, também a nível da APM, no T^3 — um projecto de formação de professores na área das tecnologia gráfica. Estou mais ligada às calculadoras neste momento. Fora disso é o normal, nas aulas e no centro de formação de professores.

FN: Isabel?

Isabel Catalão (IC): Este ano, além de trabalhar na sala de aula com o Excel e o Cabri-Géomètre, também estive envolvida num projecto proposto pela Associação Portuguesa de Telemática Educativa (EDUCOM - APTE) ao Programa Ciência Viva. Concorri pela minha escola para a concretização desse projecto e estou a utilizar o Cabri. O nosso projecto chama-se R.E.C.T.A. - Redes Electrónicas nas Ciências, Tecnologias e sua Aprendizagem. O que se pretendia com este projecto era essencialmente arranjar um arquivo de materiais em WWW, "lições" no ensino experimental das ciências, ciências em sentido lato, portanto Matemática, Física, Química, Biologia, Tecnologia... As vinte escolas que concorreram vão concretizar algumas actividades destas "lições" e divulgar os projectos em que estiveram inseridas. Também é feita formação de professores por via telemática.

FN: Desde o Projecto MINERVA que não se falava tanto da utilização das novas tecnologias na educação em Portugal. No estrangeiro existe também uma preocupação sensível neste campo, nomeadamente em países industrializados como os EUA. Este movimento corresponde a uma moda ou é algo que veio para ficar por ser indispensável?

IC: Não sei se se pode perguntar assim desse modo tão exclusivo. É capaz de ser uma moda, mas acho também que é indispensável e que veio para ficar. A moda tem um pouco a conotação do que vem e passa. Penso que se pode antes imaginar que isto não é efémero. Quanto ao interesse dos professores, penso que deriva essencialmente de se falar muito na Internet e na sociedade da informação. Sente-se que agora é que estamos a ficar mesmo atrasados, antes disso não estávamos tanto.

EV: A respeito da moda... A mim não me interessa muito como é que as coisas começaram, interessa-me que estão cá. Algumas estão e outras ainda não estão, mas acho que são indispensáveis. São tão indispensáveis que a vida nos obriga a tê-las em conta. Há uma pressão externa. Não são apenas as pressões internas vindas do Ministério da Educação (ME), mas é o exterior que obriga a pensar no assunto, e ainda bem que assim é. Há uma evolução positiva até nos programas. Por exemplo, agora, no secundário, é obrigatória a utilização de calculadoras gráficas e de computadores. Isto é uma evolução muito positiva. A Internet é muito importante mas só existe porque as coisas evoluíram. O que é incrível é que durante 3, 4, 5 ou 6 anos, professores e alunos, todos, inclusivamente aqueles que estavam antes no MINERVA, tenham estado privados de usar o Sketchpad, o Cabri, etc... Por não terem computadores, por não terem formação, por não terem os pólos do MINERVA... Porque isso tudo acabou. Neste momento o exterior, o que se passa à volta da escola, obriga a pensar no que não se pode ignorar.

JCS: Realmente a introdução dos computadores no início foi uma moda. Prometeram-se mundos e fundos que não se podiam cumprir. O modo de introduzir a tecnologia na escola não é irrelevante. Temos que reflectir se ele tem algum interesse pedagógico ou não. No que nos diz respeito vemos que muita da Matemática que é utilizada no dia-a-dia, a nível do cidadão e a nível das diversas profissões, recorre cada vez mais ao uso da tecnologia. É um dos argumentos muito importantes que, apesar de todas estas características de moda, nos levam a pensar que a introdução da tecnologia na sala de aula é hoje indispensável.

FN: Qual poderá ser o papel da APM neste domínio?

IC: Principalmente divulgar trabalhos que envolvam as tecnologias de informação e comunicação. Mas, penso que o que falta é a existência de mais grupos de trabalho. Por exemplo, posso fazer formação, e faço lá na escola, a um pequeno grupo de pessoas... A Branca também pode fazer... Mas, é necessário um espaço para reflectir. É preciso haver uma organização como houve com o Projecto MINERVA. O que se está a fazer a nível da Internet na APM, os três grupos de trabalho que se constituíram com a criação do Forum Pedro Nunes, é uma iniciativa que vai neste sentido e que é indispensável.

EV: A APM não só tem que reflectir as posições dos sócios, como tem que tomar iniciativas, aliás até tem tomado. Em 88, por exemplo, publicou aquele texto do Milfontes, que era um texto programático sobre o que se ia fazer. Reflectia a experiência que havia naquela altura. Neste momento, tem um projecto de calculadoras, o T^3, no qual eu não estou integrado, mas que me parece um grande projecto de formação. Do ponto de vista dos computadores, há os ProfMat mas não é suficiente. Há iniciativas do grupo de trabalho da Internet, em que eu colaboro um bocadinho e acho que é uma coisa positiva. O que é fundamental neste momento na Internet, onde há milhões de coisas, é que haja alguém que as filtre, não no sentido de as proibir, mas no sentido de mostrar coisas boas. A APM também deve fazer isso e esse é um dos objectivos do Fórum Pedro Nunes. Neste momento temos a página do Jaime, depois teremos outras, e quantas mais houver melhor. O que falta, e já agora lanço isso para a mesa, é que a APM tome uma iniciativa no sentido de se fazer uma reflexão, por exemplo uma reunião, uma conferência, qualquer coisa sobre tecnologia e educação em Portugal. Há não sei quanto tempo que a gente não se encontra, a não ser esporadicamente em pequenos grupos temáticos nos ProfMat, mas não é nisso que eu estou a pensar. As semanas do LOGO acabaram, julgo eu. Não há reflexão em comum, e eu acho que daqui a meio ano, um ano, deveria haver. Há matéria para isso, devíamos encontrarmo-nos, também com professores do ensino universitário, dado que se devia tentar saber como é que são tratadas as tecnologias na formação inicial de professores. A APM podia tomar esta iniciativa e caminhar em direcção a um documento ou a um conjunto de documentos, que reflectissem sobre as tecnologias em educação.

JCS: A utilização da Internet está em explosão. Se há uma parte de moda nessas coisas, por outro lado, já há algo que se impõe às pessoas que é a possibilidade de aceder efectivamente à informação. E é por isso que todas as grandes e pequenas sociedades arranjam sítios na Internet, porque é a maneira mais eficaz de divulgarem as suas posições públicas. A própria APM tem dificuldade nos boletins informativos em divulgar as suas posições. Há vários assuntos sobre os quais foram tomadas posições e que ainda não foram divulgadas.

BS: Relativamente ao papel da APM neste domínio, já disseram praticamente tudo, mas eu sinto que nas escolas nós temos, ou pelo menos até agora tínhamos, pouco acesso a informações em cima do acontecimento. Sabíamos as coisas todas muito tempo depois de acontecerem, ou porque alguém vai a um encontro ou fala com um amigo... Esta questão da informação é muito fraca nas escolas. Mesmo a nível de *software* e outras coisas que vão aparecendo, por exemplo, há quem nunca tenha ouvido falar do Sketchpad... A informação demora a chegar às escolas.

EV: A propósito do que disse a Branca relativamente à questão da informação, a ideia da secção permanente sobre tecnologia que foi recentemente criada na Educação e Matemática e que vai agora sair todos os números, é essa mesma, a da informação. Isto é uma coisa que a APM pode fazer e, já começou a fazer... tem é que haver colaboração posterior, as pessoas têm que mandar para lá coisas e as críticas a essa secção são fundamentais para que ela desempenhe o papel para que foi criada. A intenção não é ter artigos próprios mas informar e estar sobre o acontecimento.

IC: Para além do que o Veloso dizia há pouco sobre a necessidade de uma reflexão não sei se a APM poderá criar grupos de trabalho, mas tinham de ser muitos, onde as pessoas pudessem fazer esta reflexão, onde tivessem mais ou menos o apoio que tiveram no MINERVA. Porque aí, realmente havia um conjunto de pessoas que sabiam que, por exemplo às segundas de manhã, se podiam juntar e pensar sobre as fichas que tinham construído há duas semanas atrás, discutir qual era o resultado, portanto, produzir materiais, trocar experiências... Isto faz falta.

FN: O que representou para si o Projecto MINERVA? Que diferenças terão de existir hoje em relação à altura do MINERVA? Qual a sua opinião sobre as medidas actualmente em curso em Portugal, nomeadamente o Nónio, a ligação das escolas à Internet e a intenção de colocar um computador em cada sala de aula das escolas portuguesas?

EV: É muito importante perceber o que é que se passou com o projecto MINERVA. Foi um projecto que se desenvolveu ao longo dos anos 85, 86, 87, 88, talvez mais, e cresceu sempre, do ponto de vista da experiência das pessoas e da renovação de equipamentos. Começou com o Spectrum e todos os anos houve compra de equipamentos cada vez melhores. O que acontece é que o projecto MINERVA morreu da pior maneira, deixando-se morrer, deixando perder o interesse e afastando as pessoas. O projecto MINERVA teve consequências importantíssimas mesmo no ponto de vista do pensar sobre a educação. E, depois, acabou de uma maneira incrível. Acabou de uma maneira tão incrível que os próprios programas, que começaram exactamente a ser preparados em 89, ignoraram completamente a experiência do projecto MINERVA!

JCS: Eu, por acaso, não concordo muito com o Eduardo quando ele considera que o fim do Projecto MINERVA foi independente do modo como ele começou e acho que isso também deve servir de lição em relação ao lançamento de outros projectos.

No que diz respeito ao Nónio, pelo menos, houve uma reflexão diferente. O que está a ser feito pode ou não ser consensual, pode vir ou não a ser eficaz mas, pelo menos, houve uma tentativa de pensar melhor as coisas.

BS: Nós quando falamos nesta questão das tecnologias e dos computadores temos sempre a tendência de voltar ao MINERVA, não é? De facto, nunca tivemos tantos professores envolvidos na utilização de tecnologias, computadores neste caso, como nos primeiros anos do MINERVA. E de várias disciplinas. Nunca houve tanta gente na escola a querer experimentar e a querer participar como há sete anos atrás, ainda eu não tinha entrado no MINERVA como professora destacada e era coordenadora do núcleo na escola. Nós divulgávamos determinadas coisas e as pessoas tinham interesse, achavam engraçado, queriam experimentar com os alunos. Depois deixou de haver esse estímulo. Na altura, havia uma certa tendência para pensar que era tudo fácil e que se ia facilitar muito a vida ao professor e eu penso que não facilita a vida a ninguém. A utilização de um computador em ambiente de aula, para um professor, é algo que dá muito trabalho. Preparar uma aula decente, utilizando as tecnologias, é difícil. É preciso investir bastante e, é possível que, desde o momento em que as pessoas deixaram de ter aquele apoio que os outros lhes davam para o arranque, se tenham desmotivado. Uma das coisas que o MINERVA me deu de facto, foi esse acesso quase directo, ou pelo menos muito mais rápido, a coisas novas. Já numa ocasião quando me pediram para dizer qualquer coisa sobre a revista, eu disse que fazia muita falta ter uma secção de livros ou de *software*, para se ver o que é que vai saindo de novo, o que é que vai aparecendo...

JCS: As primeiras calculadoras, mesmo as científicas, eram interessantes mas tinham sérias limitações. Agora, as calculadoras gráficas permitem fazer imensas coisas. Nalguns casos nós nem sabemos muito bem como lidar com elas, como acontece, por exemplo, com a TI-92. É muito difícil pensar no que é uma calculadora que para além de todas as funções usuais, numéricas, gráficas e estatísticas, permite cálculo simbólico, tem incorporada uma versão interessante, embora um pouco limitada, do Cabri-Géomètre e que se pode meter no bolso e levar para qualquer lado. A tecnologia, hoje, oferece-nos possibilidades imensas que na altura não existiam.

IC: Ainda na linha do que estão os dois a dizer acho que a divulgação é fundamental. Há pouco a Branca referia que é muito difícil preparar uma aula com as novas tecnologias. É evidente que é. Prepará-la e concretizá-la. Mas suponhamos que o Cabri ou o Excel existem na escola e eu faço algumas acções de formação. Apesar de as acções nunca serem teóricas mas sempre com actividades que se podem usar em sala de aula, não consigo fazer o que fazíamos no MINERVA, que era realmente preparar actividades, experimentá-las, reflectir sobre estratégias, papel do professor e do aluno, etc. Portanto, havia ali um vaivém a nível de formação e reflexão que realmente não sei em que espaço se pode agora fazer.

JCS: Eu acho que o uso da tecnologia deve ser pensado em função dos objectivos de cada disciplina, do contexto em que ela é utilizada e não se deve andar a impingir a Internet às escolas, ou as calculadoras gráficas, só porque alguém acha piada a esse tipo de equipamento. Tudo deve ser devidamente discutido. Mas a verdade é que a Internet apresenta potencialidades interessantíssimas, não só no acesso à informação, mas também na partilha de informação, no contacto virtual, tanto de alunos, como de professores e do resto da comunidade educativa.

No caso dos novos programas de Matemática, uma das coisas que vamos fazer, e há muitas expectativas em relação a isso, é manter uma comunicação entre todas as pessoas através da Internet. E para isso basta que exista um computador em cada escola. As pessoas não precisam de lá ir todos os dias, basta irem lá uma vez por semana ver qual é o tipo de discussões que foram produzidas, aceder a um ou outro arquivo onde esteja documentação que podem facilmente transferir para o seu computador num ficheiro Word e depois imprimir.

BS: Esta questão da ligação das escolas à Internet coloca aqui uma série de problemas práticos como sejam: Onde é que se vai pôr o computador? Quem é que o vai utilizar? Como é que estas coisas vão funcionar? Neste aspecto, na minha escola que já tem ligação à Internet e funciona de uma maneira que, enfim, posso chamar "interessante". Existe um *modem* externo e há apenas duas pessoas privilegiadas naquela escola que conhecem as *passwords*, eu e uma outra colega. De modo que quando os alunos querem trabalhar tenho que ir à arrecadação buscar o *modem*, ligar o *modem* ao computador, etc... Além disso, como o computador que temos está na sala de ITI e a minha escola também está metida no projecto R.E.C.T.A., uma das dificuldades que o grupo que está nesse projecto tem sentido é a questão do acesso ao computador. Há a questão das *passwords*, a questão do acesso, todas estas coisas se colocam numa escola. Agora o tal computador vai ficar na biblioteca, em princípio acessível a toda a gente. Mas ainda relativamente a questões de *passwords*, vão estar disponíveis para toda a gente? Os alunos poderão chegar lá e utilizar? Esta questão da organização, pelo menos na minha escola, está ainda muito confusa. É preciso definir muito bem como é que as coisas vão funcionar daqui para a frente com o tal computador que vai para a biblioteca.

JCS: Algum esquema terá de ser pensado em relação a isso, porque o computador que vai para as escolas terá algum *software* e é lógico que, para aceder ao computador e não à Internet propriamente dita, a pessoa tenha que se identificar, que exista portanto algum tipo de identificação do acesso para ficar registado quem é que utilizou e quando.

FN: A Isabel que está no Ministério da Ciência e Tecnologia...

IC: Essas soluções têm de ser da escola. A realidade das escolas secundárias, em princípio, é diferente da realidade das escolas do 2° e 3° ciclo. Em geral não há o problema da dificuldade de acesso porque o computador é para estar na biblioteca e parte-se do princípio que é um local onde qualquer aluno pode ir a qualquer hora. No entanto, algumas escolas insistem em colocá-lo nas salas de informática, mas vamos dizendo que não pode ser, que tem que ser nas bibliotecas. Depois acreditamos quando nos garantem que o vão colocar na biblioteca. É a única coisa que há a fazer.

FN: Quem é que trata do *software*?

IC: O *software* que vem com os computadores foi definido pela FCCN no mesmo concurso que inclui a aquisição dos equipamentos. A uARTE (Unidade de Apoio à Rede Telemática Educativa) está encarregue da selecção de CDROM's.

JCS: Não é nada irrelevante para a utilização dos computadores o tipo de *software* que se põe lá, nomeadamente se é fácil ou não de utilizar. Eu não faço a mínima ideia de quem é que está exactamente a pensar nisso, mas acredito que tenham encomendado um *software* adequado que permita filtrar o acesso no sentido da identificação do aluno, do professor, do funcionário. Há *software* para isso que tem um determinado menu e as pessoas podem aceder ao Netscape, mas não podem aceder ao sistema.

IC: Senão todos os dias está avariado.

JCS: Sim, é que depois não há na escola um técnico para tratar daquilo. Não é economicamente viável. E se se espera que venha o técnico tratar dos problemas funciona uma manhã por semana e o resto da semana fica avariado.

EV: Inicialmente, quando soube do projecto do MCT, tive um pouco de medo porque pareceu-me daqueles projectos um pouco megalómanos, um computador em cada escola e acabou-se. Quando vi aparecer o programa Nónio, por parte do ME — que era quem devia de certo modo ter tomado a iniciativa — fiquei mais satisfeito. Pareceu-me que aquilo que considero fundamental, não ir um computador à balda para as escolas sem a perspectiva da educação, também estava a ser pensado.

IC: A ideia é haver cooperação entre os dois ministérios.

EV: Pois, mas há escolas que até antes do MCT ter decidido esta distribuição dos computadores com a Internet já estavam a fazer coisas. Algumas escolas tinham projectos, tinham experiência e tinham um computador, mas era óptimo que tivessem 3 ou 4, porque os seus projectos já exigem 3 ou 4. E há escolas que não estavam a fazer projecto nenhum, que nunca tinham pensado nisso e que até o queriam meter no Conselho Directivo e que o iam receber na mesma. Tive um certo receio de que fosse acontecer uma coisa deste tipo porque, já houve experiências dessas, sem nenhuma formação de professores.

JCS: Os ingleses fizeram alguma formação com materiais e o processo não é nada por aí além.

EV: Ou seja, é uma coisa que não é simples de fazer. Tem de ser muito bem pensada, mas as propostas do Nónio parecem-me interessantes. Retoma o MINERVA, naturalmente sem muitos dos erros deste. Portanto, eu neste momento estou um bocadinho mais esperançado. Mas não me admirava que os computadores fossem parar às escolas com um *software* não apropriado. Tenho um certo medo porque essas experiências quando não são bem feitas levam as pessoas a concluírem que "isso não serve para nada, os miúdos andam lá é a brincar". Hoje em dia há uma corrente contra a educação que persiste em Portugal, claramente... Ora bem, essa corrente obteria um êxito incrível se mais esta iniciativa destes ministérios, fosse também uma coisa para deitar para a rua. Eu espero que não seja. Neste momento, tenho menos receio e as palavras do Jaime animam-me um pouco. Se ele acha que está a ser tudo muito bem pensado, eu fico muito mais bem disposto. O Nónio já me parece bem pensado. Os centros de competência também. Um dos concursos pode servir para apoiar, julgo eu, uma coisa do tipo Fórum Pedro Nunes. Há pouco dizia que a página do Jaime já serve, mas quantas mais houver melhor! A APM deve também ter uma página. E vai ter se Deus quiser! O facto de o Nónio apoiar coisas desse tipo parece-me importante.

Em relação ao computador em cada sala de aula, no Mat789 (uma experiência de renovação curricular no terceiro ciclo do ensino básico que decorreu há alguns anos) cada uma das turmas tinha à sua disposição, em permanência, um computador na sala de Matemática. A primeira coisa que os alunos faziam quando entravam na sala era abrir o armário onde estava o computador e a impressora e ligá-los. Depois eram utilizados, pelo professor ou por grupos de alunos, na medida em que isso se tornasse necessário. Isso resultou muito bem, sobretudo numa das turmas da experiência.

No entanto é uma proposta que considero um bocadinho recuada, no sentido em que ela podia avançar já. Não devemos estar à espera do ano 2000 ou 2002. Penso que devemos ter ambições maiores que isto. Um computador na sala deve servir para resolver as coisas no momento, e é fundamental que o professor puxe do computador para demonstrar qualquer coisa. Mas também são essenciais o Laboratório de Matemática e uma sala de computadores. Não devemos reduzir esta batalha a "um computador em cada sala de aula".

JCS: O facto de se meter um computador ligado à Internet em cada escola e se apontar para a existência de um computador em cada sala de aula por iniciativa do MCT tem uma certa lógica — trata-se da democratização do acesso à informação. Pretende-se dar oportunidades a alunos e professores, mas sobretudo o acesso aos alunos, na escola, às ferramentas da sociedade de informação. Não se diz que deve existir, na escola, um átrio cheio de computadores porque se sabe que isso é totalmente irrealista em termos financeiros. Portanto, há um certo equilíbrio entre um determinado objectivo e a concretização possível. Por outro lado, esta iniciativa não é descoordenada em relação à iniciativa própria do ME com o Nónio, virada para o ensino propriamente dito. Não têm bem o mesmo objectivo, mas obviamente podem conjugar-se. É por isso que a existência de um computador em cada sala de aula não tem absolutamente nenhum tipo de incompatibilidade com a recomendação da existência de laboratórios de Matemática que é o que existe nos programas do secundário e que a Comissão de Acompanhamento destes programas está a discutir.

BS: Nesta questão da organização surgiu-me um problema muito particular na utilização das tecnologias, quer dos computadores, quer das calculadoras. A escola tem um determinado material e normalmente o que acontece, de acordo com as orientações dos programas, é que toda a gente está na mesma altura a dar os mesmos assuntos. Estamos todos a dar funções porque tem que se seguir as orientações e naquela altura estamos todos a precisar dos mesmos equipamentos, não é? Isto é um problema de que me lembrei.

JCS: Naturalmente esse problema vem porque, de facto, temos umas escolas sobre-dimensionadas.

BS: É evidente... Mas isto acontece, quer a nível das tecnologias quer a nível de outro material qualquer, não é? À partida é um problema que surge e que eu não sei muito bem como é que se resolve.

JCS: Surge de facto. Basta ver que deve existir um laboratório de Matemática nas escolas do ensino secundário e não haver nenhum buraquinho para o meter lá. Mas o que acontece é que, isto é um tipo de "pescadinha de rabo na boca". Não há um buraco, mas também ninguém andou a pressionar suficientemente no sentido dele existir. A Manuela Pires contou que na escola dela vão construir uns pavilhões novos, nos quais não estava prevista a existência de um Laboratório de Matemática, mas ela barafustou, argumentou com base nos documentos do próprio Ministério da Educação e, finalmente, vai existir uma sala para o Laboratório de Matemática. Portanto, às vezes não existe porque as pessoas ou não tomaram iniciativas ou não tiveram força suficiente para levar isso avante. Talvez possamos cortar essa "pescadinha de rabo na boca" reflectindo sobre o que é realmente necessário para o ensino da Matemática e das ciências em geral. Até porque em termos da tecnologia, a Matemática é uma das disciplinas que tem produzido uma reflexão mais profunda. Portanto, devemos pensar o que é que queremos, depois o que podemos esperar e ter consciência que não será tudo de um momento para o outro.

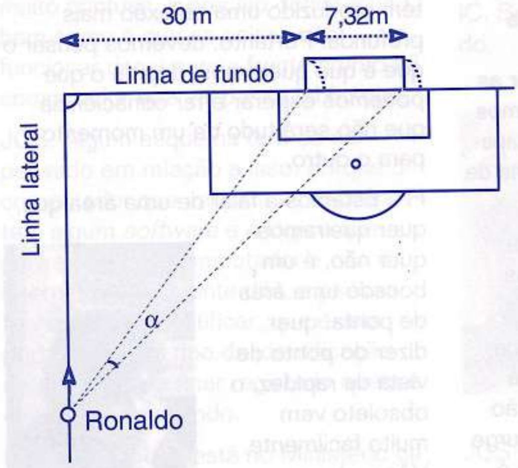
FN: Estamos a falar de uma área que, quer queiramos quer não, é um bocado uma área de ponta, quer dizer do ponto de vista da rapidez, o obsoleto vem muito facilmente. Vêem algum problema nisso?

JCS: A obsolescência é claro que é um problema. Se se disser, por hipótese, que o Sketchpad é obrigatório em todas as escolas de certeza que ele não vai correr em todos os computadores que existem nas escolas e, portanto é impraticável. Agora, não tenho a sensação de que seja necessário usar a última versão de cada pedaço de *software*, ou coisa semelhante. Em termos comerciais é um problema enorme, inclusivamente no acesso à Internet e alguns produtores de *software* terem a "esperteza saloia" de fazerem determinados acrescentos que só aquele *software* consegue ler. No fundo, para nós lermos tudo o que existe na Internet neste momento temos de ter uma data de programas. É preciso que dentro dos recursos que são disponibilizados às escolas, nomeadamente o *software* e os materiais de apoio, se resista à tentação de meter a última moda o que, quando existem demasiadas pessoas ligadas à tecnologia, é uma tentação horrorosa.

(Continua na pág. 22)

O problema deste número

O remate do Ronaldo



Ronaldo, o melhor avançado do mundo, corre com a bola nos pés ao longo da linha lateral do campo de futebol, perseguido de muito perto por um defesa da equipa adversária.

Ronaldo quer rematar à baliza mas claro que só vai fazê-lo quando estiver nas melhores condições, isto é, quando o ângulo com que vê a baliza seja o maior possível.

A que distância da linha de fundo vai ele rematar?

(Respostas até 5 de Janeiro)

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira - Lisboa

Mesa Redonda *(continuação da pág. 21)*

É preciso resistir à tentação de querer todas as mariquices, mas no estado actual de desenvolvimento tecnológico, realmente as coisas ficam obsoletas mas não ficam inutilizáveis, longe disso.

BS: Oh, Jaime! Mas deixa-me dizer só uma coisa, da experiência que tenho tido nestes últimos anos, acho que as pessoas que estão habituadas a trabalhar com os computadores têm exactamente a tua opinião. Eu tenho essa opinião, porque é que hei-de usar uma versão que não funciona num determinado computador, quando a outra faz exactamente a mesma coisa? Mas o problema é precisamente no envolvimento das tais pessoas com menos prática. Estas pessoas com menos prática querem sempre as últimas versões.

A questão dos computadores surge também com as calculadoras. Há uns anos, quando a APM fez um seminário sobre calculadoras... já não tenho a certeza das versões das máquinas, mas penso que toda a gente tinha acabado de comprar a TI-81 e naquela altura apresentaram a TI-82, ouvi imensas pessoas dizerem "a minha escola acabou de comprar aquela" e outras que nem tinham utilizado uma, mas como foi apresentada a outra "Ah! Agora comprámos aquela e agora esta". Lembro-me de comentar que estava a surgir nas máquinas a paranóia que existe com o *software* dos computadores.

JCS: Existe preocupação, as pessoas agora perguntam-nos "mas nós comprámos o modelo X1, e agora teremos que usar o modelo X2? E no que diz respeito aos exames do secundário?" O que dizemos é que é perfeitamente indiferente se é X1, X2 ou X3. O que interessa é que basicamente todas traçam gráficos e numas ou noutras podemos experimentar os gráficos que nos vierem à cabeça. Agora todas as máquinas têm as suas particularidades, às vezes há ligeiras diferenças no modo de traçar os gráficos, essa não deve ser a preocupação. As pessoas que aprendem a trabalhar com uma máquina, aprendem a trabalhar com todas e tentando provar isso, nas sessões da preparação dos programas ajustados usámos a TI-80 propositadamente, que é das máquinas gráficas mais limitadas que existem no mercado.■

Tecnologias na educação matemática
Notícias breves

Por absoluta falta de espaço, não nos é possível incluir a anunciada reportagem sobre o 14º International Meeting on Technology and Education, como anunciámos no número anterior. Do facto pedimos desculpa aos nossos leitores.

Algumas reflexões sobre a utilização da calculadora no 1º ciclo

Rosário Ribeiro

Ao mesmo tempo que todos os alunos trabalhavam na carteira com a calculadora, outro aluno fazia os mesmos registos no projector. Para crianças desta idade, pouco familiarizadas com este tipo de meios audio-visuais, estes momentos pareciam algo de mágico. Ouviam-se comentários do tipo: "Parece que estamos no cinema!"

Há vários anos que tenho ouvido falar da utilização da calculadora no 1º ciclo do ensino básico, sem contudo, ter sido ainda "convencida" de que isso possa ser vantajoso, nomeadamente nos dois primeiros anos de escolaridade. No entanto, sempre me pareceu que haveria concerteza aspectos positivos neste trabalho, os quais só poderia descobrir se experimentasse.

Sinto que entre nós *esta coisa da calculadora* no 1º ciclo, ainda que várias vezes referida (nomeadamente no programa de Matemática) é ainda pouco sentida e, talvez por isso, não encontrei quase nenhuma bibliografia, em português, sobre o assunto.

Assim, decidi avançar com um projecto de utilização da calculadora numa turma da escola onde trabalho há 3 anos. Pareceu-me oportuno escrever este artigo, de modo a partilhar esta pequena experiência, que poderá ser mais um contributo para uma reflexão sobre o tema.

Este trabalho decorreu, durante o ano lectivo 96/97, na Escola nº 29 de Lisboa no âmbito de um projecto de dinamização da Ludoteca, pelo qual sou responsável. Esta situação permitiu-me ficar sem turma e, deste modo, não só pude dinamizar a Ludoteca da escola recentemente criada, como também, em simultâneo fui desenvolvendo pequenos projectos, na área da Matemática, em cada uma das turmas.

Foi nesta última modalidade que propus a uma professora da escola a realização de uma experiência com calculadoras, envolvendo a sua turma de 2º ano com 22 alunos. Ela aceitou esta proposta com entusiasmo, pois agradou-lhe a ideia de efectuar um trabalho continuado com a calculadora, tendo o meu apoio.

Este artigo relata os passos que demos (que até agora foram poucos) e algumas reflexões que fomos fazendo juntas.

O arranque

A escola começou por adquirir 12 calculadoras elementares e um projector desse mesmo modelo de calculadora[1]. Este projector consiste numa calculadora que se coloca sobre o rectroprojector e que, por sua vez permite projectá-la na parede.

Comecei por me reunir com a professora da turma para pensarmos que tipo de trabalho poderíamos realizar. Juntámos tudo o que tínhamos para ler sobre a calculadora no 1º ciclo: um ou outro artigo teórico e uma série de actividades. Ficámos reduzidas a pouco mais do que as nossas próprias ideias, pois o material teórico não ajudou muito e as actividades que tínhamos eram, em grande parte, para uma faixa etária mais avançada (em nosso entender, para a 2ª fase do 1º ciclo e outras mesmo para o 2º ciclo).

Apesar destes obstáculos começámos o nosso trabalho preparando juntas cada uma das sessões. Como seria de prever estes momentos foram bastante proveitosos, porque o facto de nos encontrarmos para trocar ideias e decidir quais as actividades a propor fez-nos reflectir bastante o que não teria acontecido se tivéssemos trabalhado sozinhas.

O trabalho com os alunos

Primeira sessão - Apresentação da calculadora e do projector

Distribuiram-se as 12 calculadoras pelos alunos ficando em média uma calculadora para cada grupo de dois alunos. Estabeleceu-se que cada actividade iria ser alternadamente realizada na calculadora por cada um deles. O registo no papel, no caso de ser necessário, seria feito sempre pelos dois alunos.

Nesta sessão, de modo a que os alunos ficassem a conhecer a calculadora e a saber utilizar as teclas para registar números, foi-lhes pedido o seguinte:

- escrever o número 97 e o número 79, de modo a que por experiência se apercebessem que para escrever qualquer número se deve começar por escrever os algarismos da esquerda para a direita;
- escrever a idade e apagar;
- escrever o seu número de telefone, o número de telefone da escola, um número qualquer à escolha;
- escrever os números de um em um até 10, sem nunca apagar, de forma a que os alunos dessem conta do número máximo de dígitos que podiam usar naquela calculadora;
- escrever os números de um em um até 5, apagando sempre o número anterior, de forma a que os alunos percebessem que para escrever um novo número necessitam de apagar o anterior.

Ao mesmo tempo que todos os alunos trabalhavam na carteira com a calculadora, outro aluno fazia os mesmos registos no projector.

É de salientar que para crianças desta idade, pouco familiarizadas com este tipo de meios audio-visuais, estes momentos pareciam algo de mágico. Ouviam-se comentários do tipo: "Parece que estamos no cinema!". A pedido dos alunos, a calculadora foi projectada no armário, na parede, no tecto, etc.

Segunda sessão - Padrões numéricos

- Escrever os números de 1 em 1, utilizando o processo parcela constante até 20.

1	+	=	1
		=	2
		=	3

- Escrever os números de 2 em 2 até 20, utilizando o mesmo processo.
- Escrever os números de 3 em 3 até 21, utilizando o mesmo processo.

Posteriormente lançámos à discussão se se poderia ou não parar no 20 ao escrever números de 3 em 3.

Sucederam-se diálogos muito interessantes e ao mesmo tempo era com entusiasmo que ouvíamos um aluno gritar:

> Ah! Mas de 4 em 4 já é possível parar em 20, porque eu estou a experimentar e dá.

Como é evidente este é um trabalho que poderia ser feito com lápis e papel, mas não só o entusiasmo não seria o mesmo, como o tempo gasto poderia desmotivar as crianças cujo cálculo mental estivesse menos desenvolvido.

Depois deste trabalho achámos que seria conveniente propor aos alunos uma actividade que implicasse adições sucessivas, de modo a verificar se já sabiam utilizar a calculadora sozinhos.

No decorrer de uma conversa a propósito da frequência dos alunos na Ludoteca surgiu o seguinte problema :

> Consultando a tabela, diz quantos são os alunos que vão à Ludoteca em cada um dos dias da semana.
> E quantos vão numa semana?

Número de alunos

Dias	1ª hora	2ª hora	3ª hora	4ª hora
2ª feira	21	22	20	19
3ª feira	20	21	19	22
4ª feira	19	20	-	-
5ª feira	20	19	22	20
6ª feira	-	-	20	22

Terceira sessão - Descobrir padrões em tabelas

Para consolidar o trabalho da sessão anterior e no seguimento do trabalho realizado pela professora da turma (tabelas de multiplicação) foi sugerido o seguinte:

- A partir do trabalho já feito com a parcela constante, escrever os números de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4 e de 5 em 5;
- Registar os números sob a forma de tabela;
- Descobrir um padrão na tabela que se segue e completar os espaços em branco:

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
32	-	36	-	40
42	44	46	48	50

Esta actividade foi realizada com muito entusiasmo, porque os alunos acharam que estavam a fazer uma coisa semelhante à tabuada. Acharam piada e diziam:

> Já sei! Acaba sempre em 2, 4 ,6, 8.

Foi necessário lembrar que também havia os que acabavam em zero. Houve também quem dissesse que os números 0, 2, 4, 6, 8... eram os mesmos que estavam no quadro da parede. Trata-se, precisamente, de um quadro com os números pares. Aproveitámos, então, para falar sobre os números pares e os ímpares.

Quarta sessão - Cálculo mental

A professora da turma sentia que os alunos tinham o cálculo mental pouco desenvolvido e, por isso, tinha iniciado uma série de actividades (com e sem calculadora) que levassem os alunos a desenvolver o cálculo mental. Como tal, nesta sessão preparámos uma actividade de cálculo.

Anteriormente na turma tinham sido trabalhadas com os alunos questões deste género:

3 + 7 = 10 então 30 + 70 = 100
4 + 6 = 10 então 40 + 60 = 100
8 + 2 = 10 então 80 + 20 = 100

propusemos aos alunos a seguinte actividade:

> Quanto devo adicionar a 27 para obter 100?

Os alunos, utilizando a calculadora, foram experimentando números e verificando se estavam, ou não, próximo de 100.

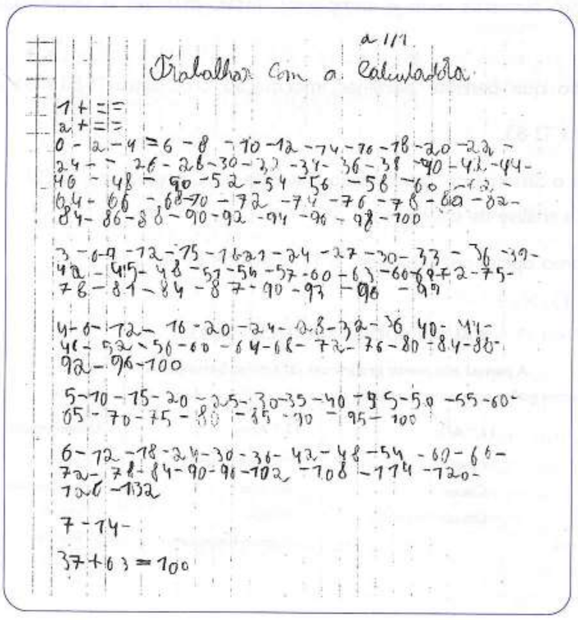
Mais uma vez surgiram diálogos muito interessantes. Havia quem dissessse:

> Tenho que juntar menos do que 80, porque 80 com 20 faz 100.

Quinta sessão - Problemas

Após uma visita de estudo a uma pizzaria, onde os alunos fizeram a sua própria pizza, uma aluna perguntava quantas pizzas se fariam por semana, naquela pizzaria. Acrescentava ela que, durante a visita, tinha registado que por dia se faziam 600 pizzas.

Estávamos no início de mais uma sessão com a calculadora e o nosso plano de trabalho era outro, mas mediante tal curiosidade pusemos o plano de lado e demos tempo à classe para responder ao problema ali lançado. Poucos minutos depois tínhamos já alguns alunos a dar a



resposta. Como é evidente, nem todos conseguiram ler aquele número, o que proporcionou um rico momento de aprendizagem sobre os números "grandes", como eles lhe chamam. Esta sessão continuou com uma série de problemas que os alunos quiseram criar, curiosamente quase todos envolviam multiplicações.

Algumas conclusões

Ao longo deste trabalho sentimos que foi bastante proveitoso utilizar a calculadora na sala de aula, de uma forma cuidada. Este instrumento, tão banalizado na sociedade e utilizado em inúmeras situações da vida real, pode ser facilitador das aprendizagens, ao mesmo tempo que permite aos alunos:

- resolver problemas que envolvem situações de cálculo que por vezes, o aluno não domina (algoritmos ainda não trabalhados);
- contactar com números "grandes";
- criar situações de pesquisa e de descoberta, de uma forma lúdica;
- ter acesso a mais uma ferramenta de trabalho.

É importante salientar que houve o cuidado de, em devida altura, esclarecer os pais sobre o trabalho que se estava a realizar. Só deste modo será possível desmistificar a crença de que a utilização das calculadoras impede a aprendizagem e o desenvolvimento do cálculo.

Resta acrescentar que nestas experiências nem tudo são rosas e quando os espinhos aparecem picam muito.

Este trabalho não teve a devida continuidade, porque a escola foi assaltada e, para grande tristeza nossa, as calculadoras e o projector desapareceram. Temos esperança de rapidamente arranjar verba para comprar de novo todo este material, porque neste momento já estamos convictas de que este trabalho vale a pena.

Nota:

[1] Não se trata de um material muito dispendioso fora do alcance das Escolas do 1º Ciclo, podendo ser adquirido com uma verba de aproximadamente 20 000 escudos.

Rosário Ribeiro
Escola nº 29, Lisboa

A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação em Portugal

Paulo Abrantes

Nos últimos dez anos, no âmbito de teses ou de projectos colectivos, foram realizadas diversas investigações sobre a utilização da tecnologia nas aulas de Matemática, em contextos de inovação curricular. Uma análise dos estudos mais significativos mostra que o computador e a calculadora gráfica foram os recursos mais utilizados e que a geometria e as funções foram as áreas privilegiadas. Na maioria dos casos, foi adoptada uma perspectiva que valoriza os métodos de descoberta e, em especial, as actividades de natureza investigativa. Os resultados são muito prometedores e tendem a encorajar novas investigações num domínio em acelerada evolução.

Quando revemos a investigação produzida no domínio da educação matemática em Portugal nestes últimos dez anos, verificamos que uma parte muito significativa foi realizada em torno da utilização de recursos tecnológicos.

Este fenómeno deve-se, em grande parte, à intensa actividade do projecto Minerva e à expansão da APM no fim dos anos 80 e início dos anos 90. O desejo de mudança de muitos professores encontrava um ambiente favorável num período de reforma educativa e no enquadramento proporcionado por numerosas realizações — encontros, acções de formação, grupos de trabalho, publicações — muitas das quais incidiam no uso das novas tecnologias. A sua introdução nas escolas surgia como uma oportunidade de concretizar ideias de renovação pedagógica.

Numa reflexão sobre a utilização da tecnologia no ensino da Matemática, parece pertinente fazer um balanço do que têm sido os objectivos, as perspectivas e os resultados da investigação neste domínio. Por razões de tempo e de espaço, esse balanço será aqui limitado aos principais estudos que assumiram um cunho marcadamente curricular e que envolveram uma forte componente de experimentação nas aulas.

Do LOGO ao software dinâmico para o estudo da geometria

Uma primeira investigação formal sobre o uso da tecnologia foi desenvolvida por João Filipe Matos (1987) ao estudar o ambiente de aprendizagem criado pelo recurso à linguagem LOGO no ensino primário.

Nesta experiência, foram preparados dois tipos de tarefas: folhas de trabalho, organizadas de modo a permitir a realização de tarefas complexas a partir de procedimentos simples; e projectos livres que as crianças preparavam, antes de irem para o computador, através de desenhos feitos em papel, acompanhados das instruções em LOGO. Os alunos mostraram uma preferência clara pelos projectos, tendendo a escolher as folhas de trabalho apenas na ausência de um projecto da sua autoria. Além disso, a persistência e responsabilidade que revelavam nos projectos estavam praticamente ausentes quando realizavam as outras tarefas. Estas tendiam a provocar intervenções mais directivas da professora e menos reflexão dos alunos. Nalgumas situações, geraram ideias para novos projectos mas isso apenas ocorreu quando os alunos já tinham um nível considerável de programação. Na fase final do estudo surgiram projectos livres de alguns "alunos especialistas" que pareciam corresponder a experiências que as crianças pretendiam fazer no computador "para ver o que dá".

O estudo conclui que as tarefas criativas baseadas na programação em LOGO se revelam fortemente adaptáveis a uma escola do 1º ciclo onde já se praticava uma pedagogia centrada na diversificação de actividades e recursos e na autonomia e responsabilização dos alunos.

O LOGO foi depois usado noutras investigações. Numa delas, Maria Augusta Neves (1988) estudou as suas potencialidades na recuperação de alunos do 9º ano marcados por um insucesso profundo em Matemática. Durante 15 aulas, metade de uma turma trabalhou com o computador com o apoio da investigadora enquanto os colegas tinham aula com a professora. Textos de apoio e um conjunto de fichas foram postos à disposição dos alunos — bem como um computador para cada par — cobrindo diversos tópicos de geometria (ângulos, polígonos, circunferência, etc.). Predominavam as tarefas de construção numa "abordagem de descoberta dirigida". Como meios de avaliação foram usados testes, cartas escritas pelos alunos e registos de observação. Nas 15 aulas seguintes, os dois grupos de alunos trocaram de ambiente, mas aqueles que utilizavam o computador trabalharam com um utilitário de desenho (GemPaint).

Tendo em conta o ponto de partida, os alunos (em qualquer dos dois grupos) realizaram progressos notáveis na aprendizagem e uma vincada evolução positiva na visão que tinham sobre a geometria.

Alguns anos mais tarde, Carlota Borges (1994) realizou um outro estudo sobre a utilização do LOGO no ensino de conceitos geométricos (como a igualdade de triângulos), no 7° ano. A experiência comparou duas turmas com idêntico rendimento inicial, depois de uma delas ter trabalhado com o LOGO na unidade de geometria. O grupo experimental obteve melhores resultados num teste de avaliação, não se verificando diferença na retenção de conhecimentos, mas revelando-se o ensino de conceitos com a utilização do computador "mais explícito e mais objectivo". Por outro lado, tanto as professoras como os alunos apreciaram a experiência, reconhecendo-lhe um contributo significativo na melhoria do ambiente na sala de aula, na motivação dos alunos e nas atitudes destes face à Matemática.

A autora deste trabalho aponta o facto de os alunos terem passado mais tempo na construção das figuras como uma possível explicação para uma melhor consolidação dos conceitos. Os alunos que usavam o computador precisavam de mais tempo para "experimentar estratégias, procurar soluções e avaliar os resultados".

No ensino secundário, a única investigação em torno de uma experiência de inovação curricular no domínio da geometria foi conduzida por Manuel Saraiva (1991). Trabalhando com duas turmas do 10° ano, o programa Logo.Geometria foi usado no estudo da geometria vectorial e analítica, numa abordagem que destacava as actividades de exploração e descoberta. Ao longo de 10 semanas, os alunos trabalhavam com o computador na aula de duas horas enquanto nas restantes o professor explorava o trabalho realizado, fazia sínteses, propunha exercícios ou apresentava novos conceitos. No trabalho com o computador, os alunos estavam organizados em pequenos grupos, nos quais deviam discutir as actividades, havendo sempre um responsável (rotativo) pela elaboração de um relatório.

Uma avaliação baseada em registos de observações, nos relatórios dos grupos, nas respostas dos alunos a um questionário e em entrevistas aos professores mostrou que os alunos adquiriram e consolidaram muitos conceitos como consequência da necessidade de "exigir do computador construções e dados para resolver as situações". Além disso, o programa constituiu um forte estímulo a que os alunos formulassem as suas próprias conjecturas e as testassem, assim como facilitou o aparecimento de diversas estratégias de resolução de problemas. A compreensão da importância das demonstrações revelou-se um processo mais difícil e lento, verificando-se inicialmente que os alunos se limitavam a testar as hipóteses para um ou dois casos. Contudo, a médio prazo, foi possível observar uma evolução em muitos alunos que o investigador considera só ter sido possível devido ao tipo de intervenção do professor, baseada em colocar dúvidas sistematicamente.

Um aspecto interessante deste estudo é que os alunos se aperceberam que, muitas vezes, estavam a fazer experiências cujas consequências não eram conhecidas sequer pelo professor mas que este se dispunha a analisar e discutir as resoluções propostas. Este facto terá contribuído para gerar discussões genuínas na aula e para que a Matemática começasse a ser vista como uma disciplina em que há "vários caminhos para chegar à solução de um problema".

Numa reflexão final sobre a organização escolar, o autor do estudo refere a limitação que podem representar as aulas de 50 minutos: "para quem participou neste trabalho não é difícil imaginar que uma sessão pudesse ter a duração de uma manhã".

Mais recentemente, uma outra investigação em que o computador foi usado no estudo da geometria foi realizada por Margarida Junqueira (1995), a qual recorreu à criação de um ambiente geométrico dinâmico proporcionado pelo programa Cabri-Géomètre. A experiência decorreu numa turma do 9° ano, incidiu na geometria do plano (mediatriz, bissectriz, circunferência) e compreendeu uma sequência de 19 aulas. As tarefas partiam de construções geométricas *resistentes* (isto é, em que as propriedades não mudam quando se modifica a figura por arrastamento de um ponto), e envolviam exploração de propriedades das figuras e justificação das construções. Duas horas semanais eram dedicadas ao trabalho (em pequenos grupos) com os computadores, enquanto as outras duas se destinavam à discussão das actividades e apresentação de novos conceitos.

Há evidência de que as aulas em que os alunos usavam o computador lhes despertaram muito mais interesse. Inicialmente, mostravam-se muito dependentes da professora e da investigadora para a realização das tarefas e revelavam falta de hábitos de trabalho em grupo. Como era de esperar, privilegiavam as actividades de construção, dando menos atenção às justificações. No entanto, verificou-se uma aquisição progressiva de alguma autonomia e o balanço final é francamente positivo. Com efeito, os resultados de um pré-teste e de um pós-teste, baseados nos níveis de van Hiele, registam uma evolução estatisticamente significativa. No fim, 70% dos alunos era capaz de reconhecer figuras geométricas em termos das suas propriedades (nível 2) e não apenas da sua aparência (no início, apenas 35% se situavam acima do nível 1); além disso, alguns eram capazes de estabelecer relações entre essas propriedades e produzir ou acompanhar raciocínios dedutivos (nível 3), o que não se verificava com nenhum no início.

A autora deste trabalho recorreu ainda à análise de episódios de ensino gravados em vídeo. As conclusões confirmam que o tipo de *software* usado tem enormes potencialidades como apoio a actividades geométricas de natureza investigativa, estimulando a formulação e validação de conjecturas. Destaca-se o valor de uma abordagem baseada na "dialéctica da justificação e refutação": a procura de argumentos para convencer os outros contribui para que os alunos clarifiquem e aprofundem as suas ideias e as apresentem de uma forma cada vez mais organizada.

Um aspecto que também ressalta deste estudo é a importância do factor tempo, em especial quando se consideram objectivos complexos como a compreensão da importância de produzir justificações e provas. As actividades realizadas consumiram muito tempo mas correspondem a uma etapa que não poderia ter sido queimada. Além disso, a autora considera que, depois desta experiência, dever-se-ia passar a uma fase de trabalho com figuras e construções menos familiares envolvendo raciocínios mais complexos, sugerindo que este tipo de *software* seja acompanhado de materiais adequados que permitam o seu uso em momentos diversos ao longo de vários níveis de escolaridade.

A folha de cálculo e os conceitos numéricos

Uma outra linha de trabalho procurou explorar as potencialidades da folha de cálculo em actividades de resolução de problemas envolvendo conceitos numéricos dos currículos dos dois primeiros ciclos de escolaridade.

O primeiro estudo deste tipo foi realizado por Leonor Moreira (1989) que trabalhou o conceito de proporcionalidade com duas turmas do 6º ano. Foram constituídos dois grupos de 18 alunos, equivalentes dos pontos de vista de sexo, idade e aproveitamento em Matemática, baseando-se o ensino, para ambos, na resolução e exploração de situações problemáticas e no trabalho em pequenos grupos ao longo de oito aulas. Num dos grupos, os alunos eram encorajados a usar a folha de cálculo.

Os alunos realizaram um pré-teste e um pós-teste com problemas sobre proporcionalidade e sobre outros tópicos. Os resultados melhoraram de um teste para o outro mas o crescimento é maior no grupo experimental e a diferença é estatisticamente significativa no conjunto das questões sobre proporcionalidade, não o sendo no das restantes questões. Além disso, dentro do grupo experimental, as diferenças entre alunos de distintos níveis de aproveitamento devem-se aos outros temas e não ao da proporcionalidade. Finalmente, não se verificam diferenças significativas entre raparigas e rapazes.

Estes resultados e os registos de observação das aulas levam a investigadora a concluir que a folha de cálculo teve um papel positivo na construção dos conceitos de proporcionalidade e percentagem, bem como na capacidade de resolução de problemas, sendo o seu efeito extensivo aos alunos de menor aproveitamento escolar. A folha de cálculo revelou-se particularmente útil na descoberta de regularidades numéricas e na resolução de problemas por ensaio e erro sistemático. Por outro lado, é interessante notar que os alunos se limitaram a usar um número reduzido de funções e comandos, o que fizeram sem grande dificuldade, não tendo necessidade de um conhecimento aprofundado das potencialidades do programa.

O mesmo se passou, com alunos do 4º ano, num trabalho de Dárida Fernandes (1994). A investigadora considera que os alunos entenderam a estrutura da folha de cálculo mas que a aprendizagem de alguns comandos deve ser feita de modo gradual, consoante as necessidades dos projectos e as motivações das crianças. O uso do computador contribuiu para que a turma se revelasse mais aberta à pesquisa e à resolução de problemas, tendo o professor reconhecido que a experiência lhe suscitou uma reflexão sobre a prática pedagógica e gerou oportunidades para actividades de natureza interdisciplinar. A autora do estudo defende que este tipo de trabalho deve ser acompanhado do uso de material manipulável e folhas de apoio que ajudem os alunos a compreender a localização cartesiana no espaço e no plano, e que as actividades devem basear-se em problemas e projectos de trabalho que visem a recolha de informação, a descoberta de relações entre os dados, a sistematização e a comunicação da informação.

A tecnologia gráfica e o ensino das funções

A partir de 1991, a maior parte destas investigações incide nas potencialidades gráficas dos computadores e das calculadoras no estudo das funções no ensino secundário.

Trabalhando a representação gráfica de funções com 5 turmas do 11º e 12º anos, Fernando Duarte (1991) comparou dois métodos de ensino: um método "tradicional", em que o professor explica a matéria e propõe exercícios de papel e lápis; e um método baseado no uso de um programa informático de gráficos (Estudfunc) em que os alunos trabalham em pequenos grupos e têm uma maior autonomia na exploração de situações. Cada turma foi dividida em dois grupos, com idêntica dimensão e nível de aproveitamento, funcionando um deles como grupo experimental. Qualquer dos grupos trabalhou naquela unidade durante oito aulas com o seu professor habitual.

Os registos de observação, os relatórios dos professores e as respostas dos alunos a um questionário mostram que o programa foi bem aceite e contribuiu para a criação de um bom ambiente de trabalho. Por outro lado, os alunos realizaram (sem o computador) um pré-teste e um pós-teste, incluindo uma parte sobre funções e gráficos e outra sobre um tema distinto (sucessões). Os resultados do pré-teste são idênticos mas o progresso para o pós-teste é maior no grupo experimental e a diferença é estatisticamente significativa no conjunto de todas as questões e no bloco sobre funções e gráficos, não o sendo no bloco sobre sucessões. Estes resultados levam o autor a concluir que o uso do computador teve um efeito positivo na aprendizagem, embora observe que a motivação associada a uma nova experiência pode ter desempenhado um papel importante.

Alguns anos mais tarde, António Domingos (1994) estudou o modo como os alunos, com o auxílio de meios computacionais, compreendem o conceito de função e os processos de tradução entre diferentes representações. O estudo incidiu numa turma do 10º ano, na qual a unidade de funções foi desenvolvida ao longo de 26 aulas com o apoio do programa Funções. As tarefas eram propostas em fichas de trabalho e os alunos eram solicitados a elaborar relatórios sobre as actividades realizadas.

O estudo conclui que o conceito de função era compreendido em todas as representações e que os alunos desenvolveram a capacidade de "distinguir a mesma função em representações diferentes" e facilidade em criar imagens mentais que permitem utilizar as características das funções em situações novas. A resolução gráfica de equações e inequações revelou-se acessível. O uso do computador ajudou a que os alunos formulassem as suas próprias conjecturas e métodos de prova. A elaboração de relatórios sobre as actividades realizadas e a sua discussão ao nível da turma revelaram-se métodos úteis dos pontos de vista da aprendizagem, dos hábitos de trabalho e ainda da avaliação.

Num outro trabalho, Teresa Pimentel Cardoso (1995) estudou alguns aspectos da aprendizagem de conceitos de análise numa turma muito fraca do 11° ano, através de uma metodologia que privilegia o uso das calculadoras gráficas e o trabalho cooperativo. A unidade sobre derivadas desenvolveu-se em 27 aulas, compreendendo uma sequência de situações problemáticas e fichas de trabalho, um teste de grupo, um teste individual e um inquérito.

A autora indica que se conseguiu criar um ambiente de trabalho "muito dinâmico" para o qual contribuiram, em conjunto, o uso das calculadoras gráficas, o trabalho de grupo e a natureza das tarefas. Os alunos envolveram-se na aula muito mais do que era habitual e muitos tornaram-se mais activos e investigativos. A calculadora gráfica revelou-se "um instrumento de importância crucial num contexto educativo desfavorável", ajudando os alunos a adquirir uma "compreensão visual" de muitas funções, dando-lhes mais confiança para abordar os problemas e confirmar resultados, e permitindo que muitos destes problemas lidassem com situações realistas. O facto de cada aluno ter sempre uma calculadora disponível foi decisivo.

Os resultados do teste de grupo foram positivos. O mesmo não se passou em muitos casos no teste individual mas, curiosamente, não se verificou uma relação directa entre os resultados do teste de grupo e os dos melhores alunos de cada grupo no teste individual. No que diz respeito às atitudes face à Matemática, observou-se um progresso considerável. A autora sustenta que a evolução em termos de hábitos e atitudes é necessariamente lenta e que, no caso de alunos muito desinteressados, o recurso a metodologias activas é fundamental e deve ser feito mesmo com o eventual sacrifício de conteúdos. Contudo, deve corresponder a uma opção curricular clara e assumida como o programa adequado para esses alunos, a quem a Matemática deve ser apresentada como "uma disciplina atraente e com utilidade".

Outro estudo sobre a utilização das calculadoras gráficas foi desenvolvido no âmbito de um projecto de formação por quatro professoras (Projecto GEM, 1994), envolvendo ao longo de um ano uma turma do 10º ano e seis do 11° ano de várias escolas. Foram criadas e utilizadas nas aulas diversas tarefas (de estatística e de funções), assumindo várias vezes a forma de pequenos projectos ou investigações.

A avaliação do trabalho, que recorreu à observação e a um questionário final, revelou uma boa aceitação generalizada da calculadora. Uma tarefa consistindo em pedir um esboço rápido dos gráficos de oito funções dadas as respectivas expressões analíticas foi realizada no fim do ano e repetida no início do ano seguinte, tendo sido igualmente proposta nesta segunda ocasião em duas turmas exteriores ao projecto. Os resultados das turmas envolvidas na experiência foram superiores aos das outras nas duas ocasiões e melhoraram do primeiro momento para o segundo.

As autoras deste trabalho consideram que a utilização de tecnologia gráfica auxilia a compreensão de conceitos relativos às funções (monotonia, comportamentos locais, etc.) e contribui para melhorar as capacidades de ler, interpretar e esboçar gráficos e de relacionar as representações analítica e gráfica. Além disso, facilita a resolução de problemas, nomeadamente de aplicações realistas da Matemática, bem como um trabalho mais autónomo por parte dos alunos que tendem a encarar com naturalidade as actividades de exploração e investigação. No entanto, chamam a atenção para que o uso desta tecnologia pode reforçar resistências à utilização de procedimentos algébricos.

Como implicações curriculares, o relatório do projecto sustenta a necessidade de se equiparem as escolas com meios que permitam uma utilização generalizada da tecnologia gráfica nas aulas, bem como o seu uso nos exames.

Uma outra investigação envolvendo funções e gráficos havia sido realizada por Susana Carreira (1992) com duas turmas do 10° ano, no estudo da trigonometria. Os alunos foram encorajados a usar a folha de cálculo na exploração de problemas realistas, ao longo de 12 aulas. Os processos e os produtos de dois grupos foram analisados com pormenor, constituindo os resultados de um teste e as respostas a um questionário fontes de informação adicionais.

O estudo mostra como os alunos usaram o computador "na construção de modelos matemáticos da realidade" e no subsequente estudo de múltiplos aspectos dos problemas. A autora salienta que a folha de cálculo tem imersas as noções de variável e função, e torna claros os procedimentos de composição e inversão de funções. Além disso, permite tirar partido das traduções entre diferentes representações matemáticas de uma situação, ainda que tenda a sugerir a sequência fórmula-tabela-gráfico, o que deve ser compensado por tarefas que apelem a outras sequências.

A integração da tecnologia no currículo

O projecto MAT789 constitui um exemplo de utilização dos computadores ao longo de todo um ciclo de escolaridade (Abrantes, 1994; Abrantes, Leal, Teixeira e Veloso, 1997). Numa das turmas experimentais, as condições aproximaram-se das pretensões da equipa do projecto: existência de um computador na sala de aula e possibilidade de utilizar uma sala de computadores da escola quando necessário. Deste modo, foi possível recorrer ao computador numa grande variedade de situações e com diversos propósitos.

A apropriação progressiva dos recursos tecnológicos, num ambiente de grande flexibilidade curricular, foi um factor determinante da evolução dos alunos. Ao fim de três anos, todos adquiriram uma proficiência mínima na sua utilização e alguns tornaram-se verdadeiros especialistas de certos programas.

O modo de utilização dos computadores adequou-se fortemente ao estilo e objectivos do próprio currículo, em especial à importância que este atribuía à resolução de problemas e à realização de projectos, e à ênfase que punha no desenvolvimento da autonomia e responsabilidade dos alunos. O computador contribuiu para que os alunos compreendessem a natureza do currículo e valorizassem as actividades mais abertas e criativas: "é como se fosse uma caneta ou um papel, é mais uma forma da gente tentar... em vez da s'tora estar a ensinar-nos"; "é um utensílio, ajuda a organizar, a fazer projectos".

Breve balanço

Nos estudos sobre o uso da tecnologia, o computador foi o instrumento central até começar a partilhar com as calculadoras gráficas a atenção dos investigadores. As referências a outros recursos são quase inexistentes e mesmo as calculadoras elementares, apesar de integradas nos programas oficiais e nas práticas, não suscitaram um interesse significativo, a não ser do ponto de vista da formação de professores. De facto, apenas uma experiência conduzida por Joana Porfírio (1993) no 7º ano estudou de forma explícita o papel da calculadora como apoio a actividades de resolução de problemas num ambiente de trabalho em pequenos grupos, com resultados muito positivos.

Na investigação relativa à tecnologia, identificam-se duas fases. Numa primeira, a maioria dos estudos realizou-se em torno de dois polos: por um lado, o recurso ao LOGO, nos vários ciclos do ensino básico, para criar ambientes favoráveis ao desenvolvimento de projectos e/ou à aprendizagem da geometria; por outro lado, a utilização da folha de cálculo como um suporte de actividades de resolução de problemas. Numa fase posterior, o uso de programas mais específicos tornou-se dominante, sendo privilegiados dois domínios: a geometria, em relação à qual o interesse parece ter-se voltado para o *software* dinâmico; e as funções, com uma ênfase no uso da tecnologia gráfica, incluindo programas de computador e os modelos recentes de calculadoras.

Quanto às perspectivas pedagógicas, esta investigação tem privilegiado os métodos de descoberta e, em particular, as actividades de natureza exploratória e investigativa. Neste quadro, os resultados são muito positivos, mostrando o grande potencial da tecnologia relativamente a objectivos como o desenvolvimento da autonomia e responsabilidade dos alunos e o seu envolvimento em actividades criativas, designadamente em tarefas de resolução de problemas. Há evidência de que a tecnologia pode constituir um suporte valioso para que os alunos se apropriem de ideias e processos fundamentais em áreas como a geometria e as funções. Muito provavelmente, este facto será extensivo a outros domínios, como a aritmética e a álgebra, mas nestes a investigação é ainda muito escassa.

Implicações destes estudos dizem respeito à necessidade de um planeamento cuidadoso das tarefas e da sua organização na aula, à importância de todos os alunos terem realmente acesso à tecnologia e ainda ao papel desempenhado pelo factor tempo. Aspectos a repensar parecem ser a duração das aulas (períodos de 50 minutos podem ser inadequados) e o número de alunos com quem se trabalha em simultâneo (grupos de dois ou três tendem a ser uma opção natural).

Por outro lado, é interessante verificar que os estudos realizados atravessam todos os níveis de ensino e abrangem escolas das diversas regiões do país e grupos de alunos muito diferenciados, em particular do ponto de vista do desempenho em Matemática.

Apesar de recente, esta investigação apresenta resultados muito prometedores e constitui um património valioso que deve ser estudado e tomado como base para futuros trabalhos, tanto individuais como a desenvolver por projectos colectivos.

Referências

Abrantes, Paulo (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do Projecto MAT789.* Tese de doutoramento (Univ. Lisboa). APM.

(continua na pág. 63)

Polyhedra: uma viagem temática pela Internet

Eduardo Veloso

O pedido foi claro: um artigo de duas páginas com uma viagem pela Internet... Como o que "está a dar" (ou o que é *cool* em linguagem da *web*), neste princípio do ano, pelo menos no 10°, são os poliedros, a escolha foi uma viagem pelo mundo virtual dos *polyhedra*. É domingo e está tudo preparado para a partida: o computador ligado, a ligação à Internet estabelecida, o Netscape aberto... São nove da manhã em Lisboa, os americanos ainda estão a dormir e os portugueses a ler jornais desportivos no café. As auto-estradas da informação devem estar vazias...

Clico em *home* e vou parar ao Math Forum (MF) (dentro de pouco tempo, irei parar às páginas da APM).[1] Para ver o que há sobre poliedros na Internet, o melhor a fazer é utilizar a máquina de pesquisa do MF. Clico portanto em *Search for math* e depois de poucos segundos abre-se uma nova página do MF — *Search for Math on the Internet* — onde tenho um espaço onde posso escrever o que procuro. Escrevo *polyhedra* (tem que ser em inglês, está claro!) e depois clico em *search* ou primo a tecla de *return*. Pelo tempo relativamente longo (cerca de 1 minuto) que levam a chegar os resultados da pesquisa, vejo logo que vai ser uma longa viagem para mais de duas páginas... Vou ter que fazer escolhas difíceis...


fig. 1

Mando imprimir a lista de *links* anotados que a pesquisa produziu (21 páginas A4!) e escolho um dos primeiros: *Mathematics Graphic Gallery*[2], uma lista de *links* a páginas de gráficos construidos pelo programa *Mathematica*. O autor é Xah Lee, um californiano que tem um dos melhores locais da *web* sobre curvas[3]. Fui visitar as páginas de poliedros recomendadas por Xah Lee. A primeira era sobre poliedros uniformes[4]. Os poliedros uniformes são aqueles cujas faces são polígonos regulares e que têm os vértices todos do mesmo tipo (não se exige a convexidade). Existem 75 poliedros destes (incluindo os platónicos e os arquimedianos), além de infinitos prismas e antiprismas. Nesta página, em magníficos desenhos feitos por Roman Maeder, um conhecido autor de livros sobre o programa *Mathematica*, estão representados os 75 poliedros uniformes (exemplo: o icosidodecadodecaedro (fig. 1)). A segunda página recomendada por Xah Lee era sobre estrelações do icosaedro, outra série lindíssima de gráficos do *Mathematica*[5].

Continuando a escolher resultados da pesquisa do MF, cheguei à página do *CrystalMaker*, um programa Macintosh para desenhar cristais[6]. Fiz apenas o *download* do programa de demonstração para estudar noutra ocasião.

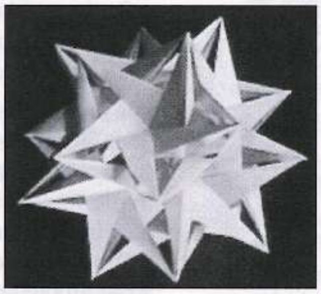


fig. 2

A visita seguinte foi à série de páginas[7] de George Hart, cujo *Pavilion of Polyhedreality* é um dos mais antigos locais sobre poliedros da rede, com indicações como construir poliedros em papel (fig. 2).

Um dos outros *links* do MF para poliedros levou-me às páginas de Tom Gettys[8] que mostram os platónicos, os arquimedianos, os poliedros de Kepler-Poinsot, os compostos e os estrelados, acompanhados de explicações elementares sobre a sua origem. Em qualquer destes dois locais, a sua visita pode ser acompanhada de música, para o que basta clicar num icon que apresenta uma nota musical (e ter o QuickTime instalado). Uma das músicas era uma fuga de Bach...

A viagem leva-me em seguida a um local onde é anunciado um livro recente, de Junho deste ano, *Polyhedra*, de Peter Cromwell, da Cambridge University Press[9]. Pela descrição, deve ser um óptimo livro, com uma boa base matemática e histórica sobre os poliedros. Resolvi encomendar o livro. Sempre sentado em frente do computador, clico no bookmark[10] da maior livraria do mundo, a Amazon, que só vende livros pela Internet. Diz que tem 2.5 milhões de livros em armazém! Escrevo *polyhedra* e o terceiro livro que me apresentam é o do Cromwell. Como já sou cliente, bastam dois ou três cliques e aí vem o livro a caminho de minha casa... Prossigo a viagem...

WELCOME TO amazon.com EARTH'S BIGGEST BOOKSTORE

O *site* que decido explorar em seguida é um do próprio MF, em que estão alguns *sketchs* do *Geometer's Sketchpad*. Trata-se de poliedros, vistos em perspectiva, construido no *Sketchpad*.[11]. Têm um botão que permite animá-los e rodá-los. Como o meu Netscape está preparado[12] para abrir automaticamente o *Sketchpad*, examino alguns destes e fico com algumas ideias para trabalhos futuros...

Continuando nos resultados da pesquisa do MF, encontrei uma página interactiva sobre as cúpulas de Buckminster Fuller[13]. Este arquitecto e geómetra americano inventou a chamada cúpula geodésica (*geodesic domes*) e ficou célebre pela cúpula que construiu para a Exposição Universal de Montreal, em 1967. Hoje existem algumas que são esferas completas (fig. 3). A partir daí cheguei a uma página sobre a descoberta, que mereceu um prémio Nobel, de uma nova forma do átomo de carbono, o C_{60}, chamado *fullerene* porque a sua estrutura é a de um icosaédro truncado (20 hexágonos e 12 pentágonos, como a bola de futebol) (fig. 4), a mesma da cúpula de Fuller.[14] Outras investigações de Fuller referiam-se a pacotes de esferas, por exemplo com formas icosaédricas.


Fig. 3

Resolvi passar as páginas com aspectos mais elementares sobre os poliedros, e escolhi então ir ver com algum detalhe uma unidade temática de Suzanne Alejandre, denominada *Polyhedra in the Classroom* , com um lindo logotipo (fig. 5).[15] As unidades temáticas de Suzanne Alejandre são bem conhecidas dos frequentadores do MF. Incluem um bom aproveitamento das possibilidades da Internet e tratam de temas inovadores no ensino da Matemática. Uma das mais interessantes é sobre quadrados mágicos.[15] Pode-se lá chegar a partir da *home page* da própria Suzanne.[16]

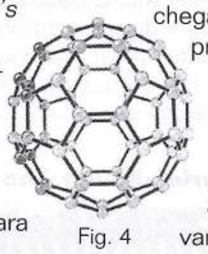


Fig. 4

As actividades propostas nesta sobre poliedros, que já foram experimentadas na Frisbie Middle School com alunos do 8º ano, são de tipo muito variado:

- construção de poliedros a partir de planificações; estudo das características desses poliedros e descrição oral para toda a turma;
- utilização do programa Kaleidotile, disponível na Internet;[17]
- visita a alguns locais da Internet com desenhos de poliedros;
- descrição escrita de poliedros encontrados na web;
- visita a locais da Internet com informação sobre o C_{60} (apelidado de *buckyball*), um exemplo real, na natureza, de poliedro; planificação e construção de um *buckyball*;
- cristais como poliedros no mundo concreto; *links* a fotografias de cristais dos 7 sistemas existentes; cristalografia interáctiva — *download* do programa CrystalMaker;
- utilização do computador para mostrar poliedros em movimento (rotações);
- resolução e discussão de um *Problem of the Week* do MF (30 Set- 4 Out. 1996) sobre cubos pintados;[18]
- escrita de um trabalho final sobre poliedros.

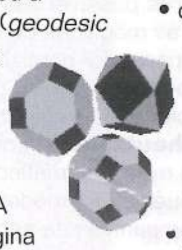


Fig. 5

Esta breve viagem pelos poliedros na Internet tem que terminar aqui, para não exceder as duas páginas. Mas os leitores com acesso à Internet podem naturalmente continuar...

Notas

1. É possível definir qual é a página onde o Netscape (ou o Explorer) abrem automaticamente (no Netscape, menu *Options, General Preferences* e *Browser Starts with*).
2. http://www.best.com/~xah/MathGraphicsGallery_dir/mathGraphicsGallery.html
3. http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html
4. http://www.inf.ethz.ch/department/TI/rm/unipoly/index.html
5. http://www.inf.ethz.ch/department/TI/rm/icosahedra/index.html
6. http://www.crystalmaker.co.uk/
7. http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra/vp.html
http://www.li.net/~george/pavilion.html
8. http://www.teleport.com/~tpgettys/poly.shtml
9. http://www.liv.ac.uk/~spmr02/book/
10. Os bookmarks (favorites no Explorer) são listas de endereços mais usados que podemos guardar em memória. O da livraria é www.amazon.com
11. http://forum.swarthmore.edu/sketchpad/polyhedra.html
12. Para ver como deve preparar o Netscape para abrir automaticamente o Sketchpad, vá ao endereço http://forum.swarthmore.edu/workshops/helper.app.html
13. http://www.teleport.com/~pdx4d/domegeo.html
14. http://www.nobel.se/laureates/chemistry-1996-press.html
15. http://forum.swarthmore.edu/alejandre/workshops/unit14.html
16. http://forum.swarthmore.edu/sum95/suzanne/
17. http://www.geom.umn.edu/software/download/KaleidoTile.html
18. http://forum.swarthmore.edu/geopow/archive/solutio87.html

Eduardo Veloso

Datas e nomes

Entre os precursores das novas tecnologias da segunda metade do século XX encontram-se muitos matemáticos, físicos e engenheiros que procuraram construir máquinas de cálculo aritmético e desenvolver conceitos e teorias para lidar com a informação. Normalmente referem-se três ou quatro nomes, mas são muitos os que deram contributos significativos neste percurso.

1617 - John Napier

Barão escocês que inventou os logaritmos. Criou em 1617 um aparelho (vulgarmente designado por Rodas de Napier) que, com a ajuda de cálculo mental, permitia transformar as multiplicações em adições. Este invento chegou a atingir grande popularidade na população comum.

1620 - Edmund Gutner e Seth Partridge

O primeiro desenvolveu (1620) e o segundo aperfeiçoou a régua de cálculo, cuja utilização se tornou corrente no século XIX.

1623 - **Wilhelm Schickard**

Professor alemão, amigo de Kepler, que construiu em 1623 uma máquina com rodas dentadas capaz de realizar adições e subtracções e, usando as ideias de Napier, capaz também de realizar multiplicações.

1642 - **Blaise Pascal**

Matemático francês que criou a teoria das probabilidades e se destacou em diversos domínios da Matemática. Desenvolveu, em 1642, um engenho que realizava adições e subtracções, destinado ao cálculo financeiro, para ser utilizado pelo seu pai, cobrador de impostos na alfândega de Ruão.

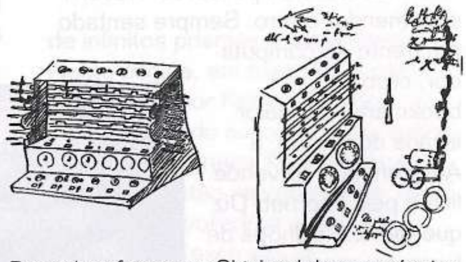
1671 - **Gottfried Leibniz**

Filósofo e matemático alemão. Concebeu todo um programa de investigação cuja intenção era criar uma linguagem universal que permitisse automatizar o pensamento. Em 1671 idealizou um engenho que, além de adições e subtracções, era também capaz de efectuar multiplicações e divisões.

Da máquina de calcular ao computador

Muitos foram os matemáticos, físicos, engenheiros que, movidos pela mesma ideia de libertar o homem de efectuar à mão cálculos laboriosos e repetitivos, procuraram idealizar máquinas para esse efeito.

A primeira máquina de calcular deve-se a **Wilhem Shickard**, contemporâneo de Kepler, a quem falava assim do seu trabalho: "O que fizeste pelo cálculo, eu tentei fazê-lo por meio da mecânica. Construí uma máquina consistindo em rodas dentadas, onze completas e seis incompletas, que podem instantânea e automaticamente combinar números: adicionar, subtrair, multiplicar e dividir".



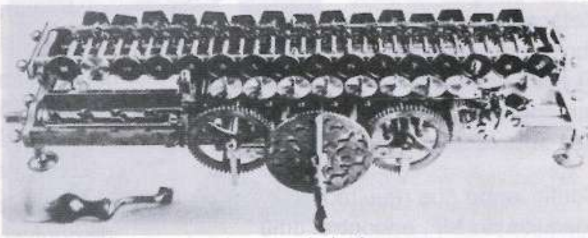
Desenhos feitos por Shickard da sua máquina

Pascal, sem conhecer os trabalhos de **Shickard**, veio em 1642 a desenvolver a "Pascaline", cuja patente registou. Foram construídas para comercialização cerca de 50 máquinas, utilizadas em serviços administrativos. O seu preço bastante elevado terá certamente contribuído para o reduzido sucesso.

Máquina de Pascal

Trinta anos depois, **Leibniz** dedicou parte do seu tempo a conceber uma nova máquina inspirada na de **Pascal.** As multiplicações eram bastante mais rápidas devido à introdução de uma roda dentada com um número crescente de dentes no sentido do eixo. Desta forma, era possível multiplicar rodando uma manivela, em vez de recorrer a adições sucessivas. Esta máquina não chegou a ser construída para comercialização por dificuldades de ordem técnica.

Sobre o modelo de Leibniz, **Charles-Xavier Thomas de Colmar** construiu uma máquina fácil de usar e de transportar que foi um sucesso comercial. Foram vendidos mais de 1500 exemplares, num período de trinta anos, e obteve uma medalha de ouro na exposição de Paris em 1885.



Máquina de Leibniz

Com a industrialização, aumentavam fortemente as necessidades de cálculos de diversa ordem e com o mínimo de erros possível. Foi neste contexto que o inglês **Charles Babage** concebeu as máquinas de calcular mais sofisticadas até à altura. No entanto, a primeira apenas foi parcialmente realizada e a segunda, a chamada "máquina analítica", permaneceu em projecto. Dificuldades de ordem técnica e o perfeccionismo colocado na realização das peças impediram a sua construção. **Pehr Georg Scheutz**, tendo conhecimento dos planos desta máquina, mas com um espírito mais pragmático, construiu, com o apoio da Academia Real das Ciências da Suécia, um modelo com grande sucesso comercial e que foi utilizado pelas companhias de seguros.

Nos finais do século XIX houve uma verdadeira explosão na inovação e criação de máquinas de secretária, com destaque para a máquina criada por **Herman Hollerith** que permitia o tratamento de informação. Em 16 de Agosto de 1890 o governo americano, depois de seis semanas de trabalho com estas máquinas

vas tecnologias

pôde anunciar que a população dos Estados Unidos era de 62 622 250 habitantes. A máquina possibilitou o tratamento dos milhões de fichas individuais de recenseamento. Em 1896, Hollerith fundou a companhia "The Tabulating Machines Corporation" que veio mais tarde a dar origem à IBM.

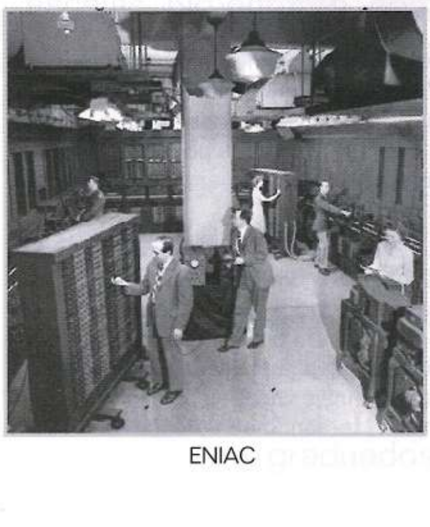
O progresso das ciências exactas e da engenharia exigia máquinas mais potentes. Vários inventores tentaram criar dispositivos que, sem calcular valores exactos, fornecessem o resultado desejado. Tratava-se de encontrar um processo artificial, um fenómeno "análogo" ao cálculo. Esta ideia vem dar origem às máquinas analógicas. Em 1930 **Vannevar Bush** construiu um "analisador diferencial" para resolver certas equações utilizadas em problemas de circuitos eléctricos. Foram construídos apenas 7 ou 8 exemplares, mas esta foi até 1940 a máquina de calcular científica mais potente do mundo.

Nos anos 40 foram construídos 3 grandes tipos de calculadoras científicas: as numéricas electromecânicas, as numéricas electrónicas e as analógicas. Nos princípios de funcionamento todas eram semelhantes às máquinas mecânicas.

Entre as grandes calculadoras electromecânicas destaca-se a construída por **Konrad Zuse**. Foi a primeira máquina de calcular binária controlada por um programa. Zuse, veio a instalar em Berlim, de 1936 a 1938, o primeiro protótipo do seu projecto — o Z1. No Z2 substituiu as partes mecânicas da unidade aritmética por relais electromagnéticos. Mais tarde, mobilizado para o exército alemão, construiu, com uma equipa de 15 pessoas, o Z3 — a primeira calculadora universal controlada por um programa.

A MARK1, desenvolvida por **Howard H. Aiken**, em 1937 na Universidade de Harvard, baseava-se na ideia da máquina analítica de Babbage. Era controlada por um programa escrito em papel perfurado. O aspecto exterir era impressionante: 10,6 metros de comprimento, 2,6 de largura e 5 toneladas de peso. A máquina acabou por ser construída pela IBM e foi apresentada ao público pela primeira vez em 1944 com o nome de ASCC. Nos anos seguintes Aiken construiu o MARK 2 e o MARK 3.

Com o desenvolvimento da electrónica era evidente que as novas máquinas de calcular teriam que tirar partido dela. **V. Atanasoff e Clifford Berry** desenvolveram a ABC, a primeira máquina electrónica que utilizava o sistema binário mas não era programável e era muito lenta. No entanto, teve grande importância como inspiração para as que se seguiram, nomeadamente o ENIAC. Este, projectado e construído em "segredo militar" por **J. Presper Eckert**, foi encomendado em 1943 à Universidade de Pensilvânia e apresentado ao público em Fevereiro de 1946 com uma demonstração do cálculo de uma trajectória balística. O ENIAC era programável e muito rápido. Na sua primeira apresentação à imprensa adicionou 5000 números num segundo. Esta máquina, que pesava 30 toneladas e ocupava 160 metros quadrados no solo, é muitas vezes considerada como estabelecendo a transição entre as máquinas de calcular e os primeiros computadores.



ENIAC

O primeiro computador disponível comercialmente foi o UNIVAC, apresentado em 1951 e construído por **John Presper Eckert** e **John William Mauchly** um engenheiro e um cientista americanos que trabalharam em 1944-1945 no grupo liderado pelo matemático **Jonh Von Neumann**.

1820 - **Charles-Xavier Thomas de Colmar**

Francês, construiu uma máquina baseada nos projectos de Leibniz, prática, transportável, fácil de usar e funcionando correctamente, obtendo um grande êxito comercial.

1833- **Charles Babbage**

Matemático inglês. Procurou desenvolver uma máquina capaz de efectuar qualquer cálculo. Em 1833 idealizou um engenho, a que chamou máquina analítica, que permitiria a programação externa, com unidades de memória.

1872 - Frank Stephen Baldwin

Americano. Concebeu um novo tipo de mecanismo que aperfeiçoou consideravelmente a máquina da Thomas de Colmar.

1889 - Léon Bollée

Francês. Criou uma máquina dispondo de uma tabuada de multiplicação interna e que conheceu grande êxito comercial até 1935.

1890 - **Herman Hollerith**

Americano. Inventou uma máquina capaz de contar buracos em cartões perfurados, e a partir daí de realizar muitos outros cálculos, correspondendo a um concurso para a realização do recenseamento geral da população de 1890 dos EUA.

1914 - Leonardo Torres y Quevedo

Engenheiro espanhol. Procurou usar a electricidade na construção de novos instrumentos de cálculo.

1930, 1945 - **Vannevar Bush**

Americano, professor no MIT. Utilizando ideias do inglês Lord Kelvin, construiu em 1930 uma máquina capaz de resolver certas equações diferenciais utilizadas nos problemas de circuitos eléctricos. Em 1945 formulou a ideia de hipertexto.

1936- **Alan Turing**

Matemático inglês que, trabalhando para o exército aliado, desempenhou na II Guerra Mundial um papel muito importante descodificando códigos secretos. Concebeu uma máquina teoricamente capaz de resolver todos os problemas susceptíveis de uma formulação algorítmica.

1936 - Louis Couffignal

Francês que propôs a construção de uma máquina analítica utilizando números em representação binária.

1936 - **Konrad Zuse**

Engenheiro alemão, construiu a primeira calculadora binária universal controlado por um programa. Concebeu diversos protótipos, alguns dos quais ao serviço do exército alemão durante a II Guerra Mundial.

1937 - Claude Shannon

Americano. Criou a teoria da informação, concebeu em 1937 (era ainda estudante) os circuitos eléctricos capazes de executar operações com aritmética de base 2. Introduziu a noção de *bit*.

1939 - George Stibitz

Engenheiro americano, na sequência de protótipos rudimentares que construiu na sua própria cozinha em 1936, coordenou em 1939 a produção do primeiro protótipo (BTL Modelo 1) utilizando *relais* electromagnéticos binários.

1944 - **Howard Aiken**

Americano. Construiu em 1944 o Mark I, uma máquina electromecânica, que usava a base dez, funcionando igualmente com *relais* electromagnéticos.

1946 - **J. Presper Eckert e John W. Mauchy**

Americanos. Colaboraram no desenvolvimento do ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer).

1952 - **John von Neumann**

Um dos mais eminentes matemáticos do século XX, que colaborou no projecto do ENIAC. Concebeu uma máquina capaz de executar os mais diversos programas, constituída por unidade de controlo, unidade de cálculo, memória, e canais de entrada e saída de informação, modelo em que se baseiam ainda hoje os modernos computadores.

1944 - **Tim Berners-Lee**

Investigador do CERN, criou a World Wide Web (WWW).

Do hipertexto à Internet

A ideia de hipertexto é enunciada pela primeira vez em 1945 por **Vannevar Bush** num artigo intitulado "As we may think". Bush questionou a organização da informação utilizada pela comunidade científica, em que cada item era classificado sob uma única rubrica e ordenado de forma hierárquica, contrapondo a ideia de que o espírito humano não funciona de modo estritamente lógico, mas antes por associações - saltando de uma representação para outra ao longo de uma rede emaranhada e complexa.

Foi no entanto **Theodore Nelson** quem, no início dos anos 60, inventou o termo "hipertexto" para exprimir a ideia de escrita/leitura não linear, num sistema informático. Theodore Nelson imaginou uma rede acessível em tempo real e contendo todos os "tesouros científicos" do mundo que denominou de "Xanadu". A partir dos anos 90 esta ideia de um hipertexto universal é substituída pela de vários sistemas de menores dimensões e temáticos.

Tecnicamente poderemos considerar que um hipertexto é um conjunto de nós e ligações. Estes nós tanto podem ser palavras como páginas, imagens ou documentos mais complexos, também eles hipertextos. Os itens de informação estendem as suas ligações de um modo recticular e não hierarquizado. Navegar num hipertexto é desenhar um percurso numa rede tão complexa quanto possível. Do ponto de vista funcional o hipertexto é um software destinado à organização de conhecimentos e dados.

A partir de 1990 várias universidades americanas trabalharam para o desenvolvimento deste software e ensaiaram sistemas de hipertexto que permitiam, por exemplo, aos alunos consultar e anotar trabalhos de colegas ou ter acesso aos materiais que o professor produziu para as aulas.

O surgimento de novo software e interfaces gráficas veio permitir novos desenvolvimentos. As páginas da World Wide Web são a melhor concretização de ideia de hipertexto — um bloco de texto assinalado com um link de hipertexto dá-nos, com um simples click de rato acesso a outros e outros e outros documentos.

A par da evolução da ideia de hipertexto desenvolve-se também um sistema de comunicação e informaçaõ que hoje conhecemos como Internet. Em 1969 o Departamento de Defesa dos EUA encarregou uma agência governamental (a ARPA - Advanced Research Project Agency) de criar um rede para troca de informações. Nascia assim a ARPANet. O sistema chamado TCP/IP - Transmission Code Protocol/Internet Protocol deveria permitir a fácil circulação de informação entre os organismos militares dos EUA. Este sistema ficou estabelecido estabelecido em 1980 e foi adoptado pela ARPA em 1983. No início dos anos 80, os militares criaram um novo sistema e retiraram-se da ARPANet, e a esta rede — que passou a ser mais conhecida por Internet - juntaram-se outras redes já existentes ao serviço da comunidade académica.

Na primeira década de existência, a Internet foi essencialmente usada para troca de mensagens (e-mail), permitindo a circulação de informação entre organismos governamentais, grandes empresas e universidades. Com a criação da World Wide Web e a expansão dos computadores pessoais, a Internet passa a estar disponível ao público em geral e o número de utilizadores que em 92 era cerca de 1 milhão não deixa de crescer.

A WWW - Wolrd Wide Web é uma criação do engenheiro **Tim Berners-Lee** investigador do CERN (Laboratório Europeu de Físca das Partículas, em Genebra) em 1994. Inicialmente, era um banco de dados gigantesco sobre investigação, constituído apenas por texto e elaborado numa nova linguagem de programação chamada HyperText Mark-up Language (HTML). Mas rapidamente as páginas WWW passaram a abordar os mais variados assuntos contendo elementos gráficos, animação e sons, tornando-se verdadeiros produtos multi-media.■

Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel

Gilda de La Rocque Palis

Nem sempre podemos obter um gráfico "completo" de uma função no sentido de apresentar numa só figura ao mesmo tempo o seu comportamento global e as suas características locais. O mesmo ocorreria se ao desenharmos gráficos à mão numa folha de papel respeitássemos as escalas. No entanto, com lápis e papel, ou no quadro negro, procuramos, em geral, esboçar um gráfico "completo", mesmo que para isso seja preciso distorcer as escalas empregadas, sem considerar os eixos graduados

A difusão de calculadoras gráficas tem levado professores e pesquisadores a reflectir sobre o papel dessas tecnologias no ensino-aprendizagem de funções. Estas ferramentas produzem em pouquíssimo tempo gráficos de funções difíceis e aborrecidos de desenhar à mão. Permitem assim uma ampliação importante do universo de funções tratadas, tanto em quantidade como em complexidade, já que ficam eliminadas dificuldades de cálculo e desenho presentes no traçado manual.

Além disso, como vem sendo cada vez mais enfatizado, as novas tecnologias computacionais facilitam a incorporação mais abrangente de pontos de vista importantes como o gráfico e o numérico ao estudo algébrico de diversos conceitos e processos, em particular nas funções. Segundo vários autores, a representação de objectos matemáticos em contextos complementares pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objectos.

Algumas pesquisas têm apontado dificuldades na utilização dessas tecnologias pelos alunos. Uma dessas dificuldades está relacionada com a ausência de informações sobre algumas características básicas dos procedimentos utilizados pelas calculadoras para produzir gráficos. Em geral, os manuais que acompanham essas tecnologias não são muito esclarecedores em relação a este aspecto.

Ao iniciar experiências com ferramentas gráficas computacionais, o utilizador pode então ficar surpreendido com alguns resultados gerados pelas máquinas que em nada se parecem com o que esperava obter como gráfico da função em questão.

Neste artigo pretendemos descrever como as actuais calculadoras gráficas, em geral, produzem gráficos de funções $f: D \subset \Re \rightarrow \Re$. Pretendemos, além disso, apontar algumas diferenças e semelhanças entre os processos empregados e os resultados obtidos ao utilizar essas máquinas e quando se usa lápis e papel.

Inicialmente para fixar a terminologia empregada recordemos que o gráfico de uma função $f=f(x)$ é o conjunto de pontos $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio de f. Fixado um sistema de coordenadas rectangulares, um esboço geométrico do gráfico de f é um desenho desse conjunto de pontos.

Para não sobrecarregar o texto, a expressão "um gráfico de f" será empregada, daqui em diante, com o significado de "um esboço geométrico do gráfico de f" e não de "o conjunto de pares $(x, f(x))$".[1]

Assim, um gráfico da função $f(x) = x^3 - x$ encontra-se esboçado na figura1.

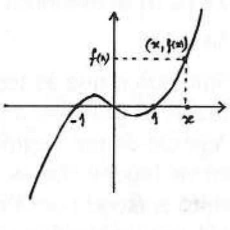


figura 1

De facto, o que vemos é "uma parte" do gráfico de f, já que o gráfico dessa função, definida para todo x real, se estenderia para a esquerda e para a direita indefinidamente.[2] Quando desenhamos gráficos de funções definidas em , com computadores ou calculadoras, também obtemos "partes" do gráfico da função estuda-da. Só que nesses ambientes computacionais este facto fica mais explícito, bem como a característica intrinsecamente "inexacta" das representações gráficas de funções, devido às variadas aproximações realizadas.

Como as calculadoras produzem gráficos

Vejamos como as calculadoras, em geral, produzem um gráfico de uma função dada por uma fórmula.

Inicialmente são fornecidos à calculadora a expressão da função e quatro números a, b, c e d satisfazendo a<b e c<d. Estes números caracterizam o rectângulo [a,b]x[c,d] denominado "rectângulo de visualização".

As coordenadas dos quatro vértices da região [a,b]x[c,d] do plano cartesiano $\Re^2$ são atribuídas aos vértices do ecrã da calculadora. Isso, por sua vez, determina as unidades das escalas, nos eixos horizontal e vertical. O gráfico de *f* é gerado da seguinte forma: a calculadora determina os valores dessa função num certo conjunto de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde $a=x_0<x_1<x_2<\ldots x_n=b$ e "marca" no ecrã os pontos $(x_i, f(x_i))$, ligando-os sucessivamente para *i* crescente, por segmentos de recta.[3]

Várias calculadoras oferecem ao utilizador a opção de "marcar" esses pontos sem os ligar. De qualquer forma somente os pontos $(x_i, f(x_i))$ com $f(x_i) \in [c,d]$ aparecerão no ecrã da máquina.

Vemos então que o que as tecnologias fazem é desenhar gráficos, marcando pontos e ligando-os por segmentos de recta. Com vantagens óbvias sobre o procedimento análogo com lápis e papel: não é necessário fazer os cálculos nem o desenho, o número de pontos utilizado pode ser "grande" e o resultado é obtido quase instantaneamente.

Mas, assim como nem sempre se obtém um bom gráfico à mão por esse processo, também nem sempre se obtém um bom gráfico de uma função utilizando recursos computacionais. Aqui, a expressão "um bom gráfico de uma função *f*" significa que nele se pode visualizar o comportamento global e/ou local de *f*, dependendo do que se deseja que o gráfico mostre ou do que se pretende com ele realizar. É bom lembrar também que o gráfico adequado à resolução de um certo problema depende do próprio problema.

A escolha do rectângulo de visualização

Na figura 2 estão desenhados[4] três gráficos da mesma função *f(x)=sen(x)* em diferentes rectângulos de visualização.[5]

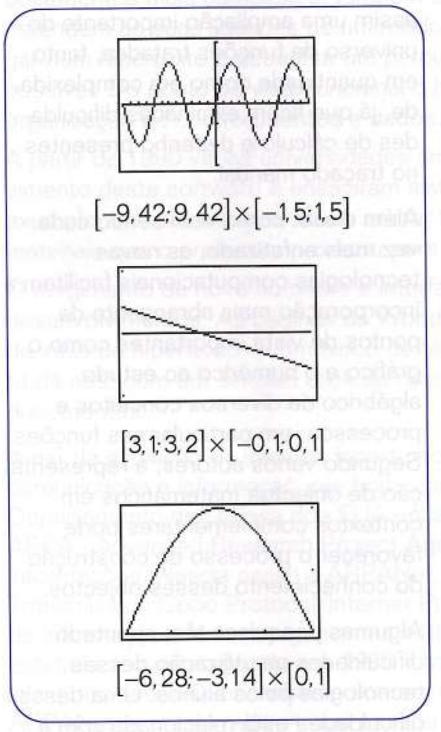


figura 2

Vemos que os gráficos obtidos dependem fortemente do rectângulo de visualização escolhido. São todos parciais, o que já era de se esperar, tratando-se de uma função definida para todo *x* real. Podemos considerar o primeiro gráfico como representativo do comportamento global da função, sendo este um desenho que apresenta um "resumo" das propriedades dessa função numa só figura. Os outros dois gráficos apresentam comportamentos locais da mesma função.

A escolha do rectângulo de visualização é uma etapa importante quando se quer estudar o comportamento de uma função examinando gráficos gerados no computador.

Vejamos um outro exemplo. A figura 3 apresenta dois gráficos da função

$$f(x)=\frac{2x^4+7x^3+7x^2+2x}{x^3-x+50}$$

Sabemos que esta função tem no máximo quatro zeros. No entanto no primeiro gráfico ela parece apresentar uma infinidade de zeros.

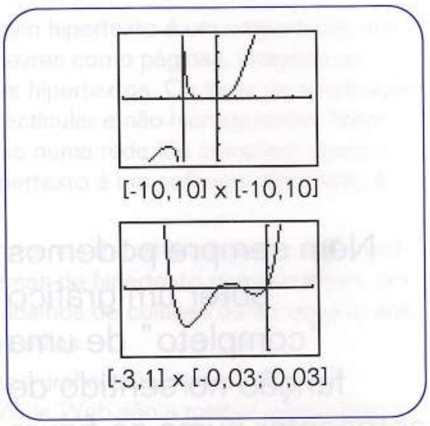


figura 3

É verdade que a escolha do rectângulo de visualização, ou seja das escalas, precisa ter em conta o intervalo de variação da função para que o gráfico que se deseja esboçar caiba no ecrã, assim como as suas características (intervalos de crescimento e decrescimento, intersecções com os eixos, etc.) para que a figura seja representativa. Mas, às vezes, essas condições são inconciliáveis.

No segundo gráfico da mesma função, podem-se visualizar os seus quatro zeros. Mas o ramo infinito do gráfico da função, que se encontra à esquerda da sua assímptota, desapareceu. Para que o ramo infinito também pudesse ser visualizado seria preciso empregar um desenho de dimensões aproximadamente 280 vezes maior.

De facto nem sempre podemos obter um gráfico "completo" de uma função no sentido de apresentar numa só figura ao mesmo tempo o seu comportamento global e as suas características locais. O mesmo ocorreria se ao desenharmos gráficos à mão numa folha de papel (de dimensões pré-fixadas) respeitássemos as escalas. No entanto, com lápis e papel, ou no quadro negro, procuramos, em geral, esboçar um gráfico "completo", mesmo que para isso seja preciso distorcer as escalas empregadas, sem considerar os eixos graduados. Por exemplo, na sala de aula, certamente desenharíamos um gráfico qualitativo dessa função como o da figura 4.

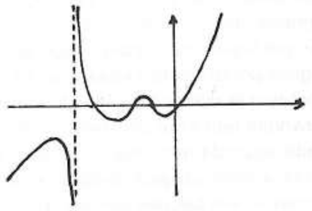


figura 4

Essa flexibilidade "manual", aproveitada no ensino tradicional, está totalmente ausente nas ferramentas computacionais nas quais as escalas são sempre respeitadas. Nesse caso podem ser necessárias várias figuras, em rectângulos de visualização diferentes, e uma síntese das informações obtidas nos diversos desenhos, para se poder conhecer o comportamento de uma dada função.

Consideremos mais um exemplo. Na figura 5 está desenhado um gráfico $f(x) = cos(23\pi x)$ no rectângulo $[-2\pi,2\pi] \times [-1,1]$. Podemos ver que esse gráfico não representa o comportamento dessa função nesse intervalo.

Para compreender a aparente "infinidade" de zeros visualizados na figura 3 e o gráfico incorrecto da figura 5 (valores máximos locais diferentes de 1, etc.), examinemos com um pouco mais de detalhe algumas características do ecrã de uma calculadora e

figura 5

como um ponto $(x_i,f(x_i))$ do gráfico de uma função f é aí "marcado".

Como os pontos são marcados no ecrã das calculadoras

O ecrã de uma calculadora (ou computador) apresenta propriedades bastante diferentes do rectângulo [a,b]x[c,d] do plano cartesiano $\Re^2$.

Um ecrã de calculadora é um rectângulo formado por minúsculos rectângulos, como se fosse um tabuleiro de xadrez. Esses rectângulos (pontos de luz) são chamados de "pixels". Cada um desses pixels pode estar em dois estados: aceso ou apagado. "Marcar" um ponto no ecrã da máquina significa acender um pixel.

Há diferenças importantes entre o ecrã de uma máquina e o rectângulo [a,b]x[c,d] do plano cartesiano. Este último contém uma infinidade de pontos e entre dois quaisquer de seus pontos há também uma infinidade de pontos. Já o ecrã tem um número finito de pixels e entre dois pixels contíguos não há nada.

O ecrã da calculadora TI-82 da Texas Instruments, por exemplo, utiliza 95 pixels na direcção horizontal e 63 na direcção vertical. As coordenadas de cada pixel são dadas pela linha e coluna nas quais este se encontra. Assim o pixel marcado na figura 6 corresponde ao par de coordenadas (3,60) nessa calculadora.

Como dissemos anteriormente, para obter o gráfico de uma função f é preciso fornecer à calculadora a sua expressão algébrica e o rectângulo de visualização [a,b]x[c,d]. O gráfico de f é desenhado a partir da "marcação" de n pontos $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$.

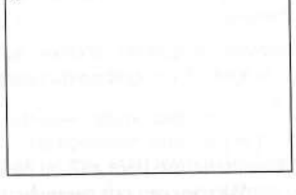


figura 6

As diversas calculadoras empregam quantidades distintas de pontos para desenhar gráficos. No caso da TI-82 são utilizados 95 pontos, $(x_i,f(x_i))$, $0 \leq i \leq 94$ sendo $x_i = a + i\Delta x$ e

$$\Delta x = \frac{b-a}{94}.$$

A TI-92 oferece dez opções empregando um máximo de 238 pontos.

Na figura 7 é apresentado o gráfico de $f(x) = sen(2x)$ no rectângulo $[-10,10] \times [-1,1]$.

Esta figura não é um bom gráfico dessa função no intervalo; "a pequena" quantidade de pontos utilizada determinou um gráfico incorrecto.

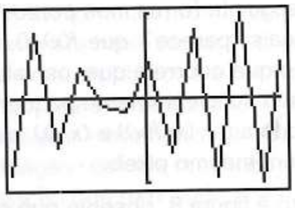


figura 7

Mas observe que utilizar "poucos" ou "muitos" pontos tem um sentido relativo; se estivéssemos a desenhar o gráfico de uma função afim é claro que dois pontos seriam suficientes.[6]

De qualquer forma, poderíamos pensar que quanto maior o número de pontos tanto melhor o gráfico obtido. No entanto as características do ecrã gráfico delimitam o maior número de pontos com os quais a tecnologia, de facto, pode trabalhar e que corresponde ao número de pixels na direcção horizontal.

Vejamos agora como um ponto $(x,f(x))$ do gráfico de uma função f é marcado no ecrã de uma calculadora.

No caso da TI-82[7], um ponto (x, y) é "marcado" no pixel (i, j) cujas coordenadas satisfazem as relações:

$$i = Int\left(94\frac{x-a}{b-a} + 0{,}5\right)$$

$$j = Int\left(62\frac{y-c}{d-c} + 0{,}5\right)$$

onde $Int(x)$ significa o maior inteiro menor ou igual a x.

O que caracteriza esse mapeamento é o número de pixels em cada direcção e o rectângulo de visualização [a,b] x [c,d]. A menos de detalhes que não são importantes aqui, podemos dizer que todos os pares ordenados de números reais pertencentes aos rectângulos

$$\left[x_i-\frac{\Delta x}{2},x_i+\frac{\Delta x}{2}\right]\times\left[y_j-\frac{\Delta y}{2},y_j+\frac{\Delta y}{2}\right]$$

onde $x_i = a + i\Delta x$, $y_j = c + j\Delta y$,

$\Delta x=\dfrac{b-a}{94}$ e $\Delta y=\dfrac{d-c}{62}$ são "marcados" num mesmo pixel *(i, j)*. Ou seja, são idênticos para a calculadora.[8]

Estes aspectos reflectem-se na figura 5 da seguinte forma: nos pontos *x* nos quais "parece" que *f(x)*=0, de facto o que ocorre é que os valores |*f(x)*| são suficientemente pequenos de modo a ter *(x, f(x))* e *(x, 0)* marcados num mesmo pixel.

Quanto à figura 8, observe que se trata de uma função com um período de aproximadamente 0,087. Seria necessário então que a diferença Δx entre as abcissas de dois pontos consecutivos marcados no ecrã fosse bem inferior a 0,087. No entanto o intervalo [-2π,2π] determina um valor para Δx de aproximadamente 0,133684 na TI-82. Logo é impossível obter um bom gráfico desta função no intervalo [-2π,2π] com esta calculadora.

A precisão de um desenho obtido em computador vai depender então do tamanho dos pixels (ou da sua quantidade, denominada "resolução" do ecrã), da mesma forma que gráficos desenhados à mão têm a sua precisão limitada pela tecnologia usada, no caso, a espessura da ponta do lápis.

Resumindo, com ferramentas computacionais, só é possível obter como esboço do gráfico de uma função o que estas são capazes de realizar, não mais do que isso.

O uso eficiente de programas computacionais na resolução de problemas envolvendo tratamento de funções requer conhecimentos conceptuais presentes no ensino-aprendizagem tradicional. É preciso salientar que os instrumentos de Cálculo e Análise utilizados no estudo de funções não são "superados" pelas diversas tecnologias, a forma de os usar é que se pode alterar.

Por outro lado, o que vimos neste artigo está longe de esgotar os métodos de aproximação implementados pelas máquinas computacionais. Por exemplo, o conjunto de números disponíveis para cálculo nas diversas tecnologias não coincide com o conjunto dos números reais. As máquinas trabalham somente com um certo conjunto finito de racionais contido no conjunto

$$X=\{0\}\cup\left\{\left[10^{-m},10^{m}\right]\right\}\cup\left\{\left[-10^{m},-10^{-m}\right]\right\}$$

onde *m* é um inteiro positivo cujo valor depende da tecnologia.

Além da impossibilidade de representar todos os números, que são então geralmente arredondados por algum processo para a quantidade de dígitos com a qual a máquina trabalha, as diversas funções pré-programadas são calculadas por algoritmos que fornecem aproximações dos seus valores.

Finalmente, nem sempre é possível obter um bom gráfico de uma função, à mão ou à máquina, independentemente da escolha do rectângulo de visualização ou quantidade de pixels (espessura da ponta do lápis). Como exemplo, considere a tarefa de desenhar um bom gráfico da função *f* tal que *f(x)=1* se x é racional e *f(x)*=0 se x é irracional; ou da função *g* dada por *g(x) = x sen(1/x)* em [-1,1].

Notas

[1] Este último é univocamente determinado pela função, enquanto que um esboço geométrico é uma figura que pretende representá-lo e que depende da escolha de eixos e das respectivas escalas, da restrição de seu domínio, etc.

[2] Tradicionalmente, quando dizemos que o desenho da figura 1 é o gráfico da função $f(x)=x^3-x$ estamos implicitamente afirmando que nenhuma mudança de comportamento ocorre para *x*>2 ou para *x*<-2. No sentido de que, por exemplo, para *x*>2 a função é crescente e sua concavidade não muda. Se houvesse mudanças nessas características de comportamento estas deveriam constar do gráfico apresentado.

[3] Estes segmentos de recta são horizontais, verticais ou diagonais a 45 graus. Isto devido às características de "tabuleiro de xadrez" do ecrã da calculadora, como veremos adiante.

[4] Todos os gráficos desse texto foram produzidos utilizando uma calculadora TI-83 da Texas Instruments, com excepção dos gráficos constantes das figuras 1 e 4.

[5] Estamos adotando aqui a notação não usual (a;b) para intervalos (a,b) quando a ou b é um número decimal, para evitar confusão entre as vírgulas com significados diferentes

[6] Sabemos que resultados teóricos de Cálculo Diferencial permitem esboçar um bom gráfico de uma variedade de funções desde que sejam conhecidos seus valores em alguns pontos determinados analiticamente (pontos que delimitam intervalos nos quais as derivadas têm sinal constante, nos quais a derivada segunda tem sinal constante, etc.). Mas o processo utilizado pelas máquinas e que consiste em calcular valores da função *f* em questão e "marcar" na tela os pontos $(x_i, f(x_i)), 0 \le i \le n$, ligando-os sucessivamente para *i* crescente, não leva em conta esses resultados.

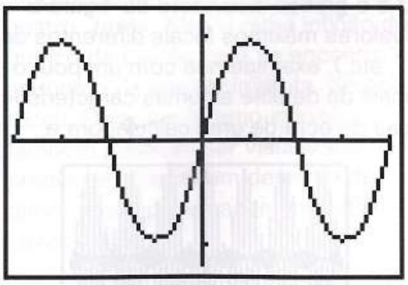
[7] Procedimentos análogos são implementados por outros modelos e marcas.

[8] Podemos pensar nos números Δx e Δy como sendo as medidas de um pixel com as escalas determinadas pelo rectângulo de visualização escolhido.

Gilda de La Rocque Pallis
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

As aparências iludem!

Esta é uma representação gráfica da função *y=senx+0.05sen(50x)*, numa TI-83, no rectângulo de visualização [-2π, 2π]x[-1.2, 1.2].



A função será monótona no intervalo]-π/2,π/2[?

Experimenta e discute.

Modelação Matemática: o papel das tecnologias de informação

João Filipe Matos

Os computadores e as calculadoras tornam possível a visualização e a manipulação de objectos matemáticos de uma forma diferente daquela que fazemos com a tecnologia do papel e lápis. A tendência é que se torne viável trabalhar com problemas reais capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática e pela sua aplicação.

Uma das implicações interessantes da introdução das tecnologias de informação (computadores e calculadoras) no ensino da Matemática diz respeito aos tópicos que se poderão tornar por um lado mais relevantes e por outro mais acessíveis no ensino básico e secundário. Os computadores e as calculadoras tornam possível a visualização e a manipulação de objectos matemáticos de uma forma diferente daquela que fazemos com a tecnologia do papel e lápis. A tendência é que se torne viável trabalhar com problemas reais capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática e pela sua aplicação.

Os computadores e as calculadoras constituem um passo decisivo para trabalhar com os alunos uma Matemática mais *realista* na medida em que se reduzem os obstáculos que têm que ver directamente com o cálculo e com operações rotineiras. A utilização de dados obtidos por observação de fenómenos reais traz à actividade de resolução de problemas um novo ingrediente que tem que ver não apenas com aspectos de motivação mas sobretudo com o facto de serem percebidas relações entre a Matemática e o mundo em que vivemos.

Estes argumentos justificam a crescente necessidade de meios informáticos que devem ser colocados à disposição dos alunos. Neste contexto não só se tornam essenciais salas de aula equipadas com computadores actualizados, como se requerem laboratórios de Matemática que permitam criar um ambiente de aprendizagem estimulante.

O que têm os computadores e as calculadoras de especial?

A importância da flexibilidade representacional destes instrumentos reside em dois tipos de razões. Por um lado, diferentes representações de uma ideia complexa permitem salientar diferentes aspectos dessa mesma ideia e, dessa forma, favorecem vários tipos de análise. Por outro lado, é um facto que os alunos diferem na sua capacidade de compreender e utilizar certas representações. Desta forma, ao tornar disponíveis diferentes representações, com recurso ao computador e à calculadora, alargam-se as possibilidades de aprendizagem matemática em face de uma situação real. Os resultados da investigação que tem vindo a ser realizada em diversos países mostra que ao criar múltiplas representações matemáticas que se podem relacionar de uma forma dinâmica aumenta-se de forma crítica a possibilidade de compreensão de conceitos naturalmente abstractos (Mason e Davis, 1991). É importante ainda referir que a facilidade com que os computadores e calculadoras podem ser manipulados contribui para encorajar uma abordagem experimental e indutiva da Matemática, desenvolvendo a construção de generalizações a partir de múltiplas observações e criando subsequentemente a necessidade da demonstração matemática.

Que ferramentas computacionais usar na modelação matemática?

A escolha das ferramentas computacionais a utilizar na modelação matemática requer uma percepção clara das suas finalidades, capacidades e limitações, complexidade e acessibilidade, e requisitos em termos de equipamento. A estes critérios deve acrescentar-se a necessidade de adequação da ferramenta computacional à proposta pedagógica que se pretende implementar.

Existem diversas ferramentas com grandes potencialidades para o apoio a actividades de modelação matemática a nível do ensino básico e secundário[1]. Entre as que mais podem contribuir positivamente para a construção de modelos encontram-se as folhas de cálculo, os programas para ajustamento de curvas, programas de gráficos de funções e programas de manipulação simbólica. Além destes existem os programas concebidos especificamente para a actividade de modelação de que são exemplos o *PowerSim* e o *Modellus*.

Modelação qualitativa

Em geral a modelação reveste uma análise quantitativa das situações. A própria tendência para uma utilização cada vez mais frequente dos computadores tem conduzido ao rápido aparecimento de ferramentas computacionais que permitem lidar com modelos de vários modos resolvendo equações, invertendo matrizes, traçando gráficos, optimizando funções, realizando testes estatísticos, etc. Mas isto não significa que para desenvolver modelos matemáticos com auxílio de ferramentas computacionais seja necessário conhecer todas as informações de forma quantitativa.

Recentemente, assiste-se a uma extensão qualitativa das funções dos computadores em actividades de modelação. Algumas ferramentas computacionais permitem construir modelos matemáticos de situações reais sem necessidade de conhecer toda a Matemática formal que sustenta os modelos computacionais. É possível desta forma estudar um dado fenómeno através da introdução de informação de natureza qualitativa. Por exemplo, a variação da temperatura de uma bica acabada de tirar pode ser modelada qualitativamente dado que há ideia de que haverá um arrefecimento, o que corresponderá a uma curva da temperatura que será descendente. É possível introduzir esta informação no computador de forma qualitativa (através da representação de um esboço do gráfico) cabendo ao computador a tarefa de calcular os pontos ou a função correspondente (fig.1).

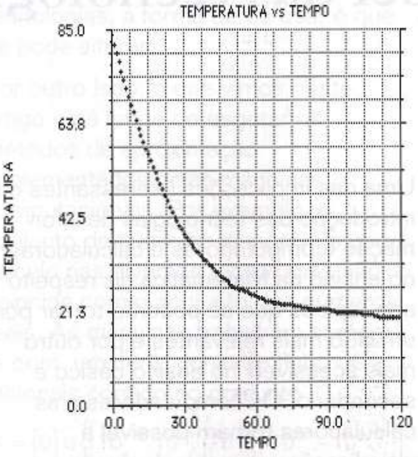


figura 1 - Gráfico, desenhado *à mão*, da variação da temperatura de uma bica usando o programa de modelação Stella

Esta informação acerca do arrefecimento da bica (ou melhor, da nossa ideia intuitiva do que será a variação da temperatura da bica ao longo do tempo) pode depois ser usada para analisar a influência de factores tais como a temperatura ambiente, o volume de café contido na chávena, etc. Naturalmente que a variação da temperatura representada desta forma pode ser comparada (quantitativamente), utilizando o computador, com valores reais captados através de um sensor de temperatura colocado na bica.

Abre-se desta forma uma variedade de utilizações de representações computacionais que valorizam a intuição acerca dos fenómenos e não colocam como elemento-chave e primeiro o conhecimento das funções que regem esses fenómenos.

O pacote de pipocas

Um exemplo interessante que ilustra o interesse de envolver a tecnologia na abordagem de problemas de modelação e aplicação da Matemática é a análise das dimensões ideais de um pacote de pipocas de forma cónica[2].

A construção de um pacote de pipocas a partir de um círculo de cartolina com um determinado raio *R*, pode ser feita através do corte de uma secção com um determinado ângulo α unindo as duas extremidades do sector circular resultante do corte (fig.2).

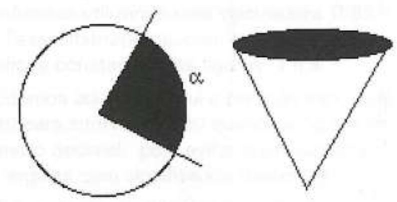


figura 2- Esquema da construção de um pacote de pipocas a partir de um círculo de raio R

A questão fundamental que se pode colocar é encontrar o valor do ângulo α que torna máximo o volume do cone assim construído.

Mas pode haver outros critérios na análise do ângulo de corte α. Podíamos estar mais interessados em encontrar o pacote mais económico ou aquele que ergonomicamente é mais interessante, etc.

Alguma Matemática básica ajuda a elaborar o modelo que nos permitirá responder à questão que formulámos. O volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times altura$$

Queremos saber como se relaciona o valor do volume com o ângulo *a* (em graus) e como facilmente encontramos a expressão

$$A_{base} = \pi \times \frac{(360-\alpha)^2}{360^2} \times R^2$$

a altura do cone virá (com a ajuda do Teorema de Pitágoras)

$$altura = \sqrt{R^2 - R^2\left(\frac{360-\alpha}{360}\right)^2}$$

Se considerarmos por exemplo o valor do raio R = 15 cm (o que parece ser razoável atendendo às dimensões de uma folha de cartolina) podemos recorrer a uma folha de cálculo introduzindo as expressões em

ângulo	área da base	altura	volume
30	593,66	5,99	1186,28
31	590,06	6,09	1197,72
32	586,48	6,18	1208,62
33	582,91	6,27	1219,01
34	579,35	6,36	1228,89
...	...	...	...
62	484,11	8,42	1358,05
63	480,86	8,48	1358,75
64	477,63	8,54	1359,25
65	474,41	8,60	1359,55
66	471,20	8,66	1359,66
67	468,00	8,72	1359,58
68	464,81	8,77	1359,31
69	461,63	8,83	1358,86
...	...	...	...

figura 3 - Tabela, na folha de cálculo, que mostra o volume do saco de pipocas para diferentes ângulos de corte

colunas sucessivas de forma a podermos relacionar o volume com o ângulo de corte. Vamos para isso considerar, por exemplo, que o ângulo de corte varia entre 30 e 70 graus (fig.3).

De imediato podemos obter o gráfico da variação do volume com o ângulo (fig.4). E a análise da tabela mostra

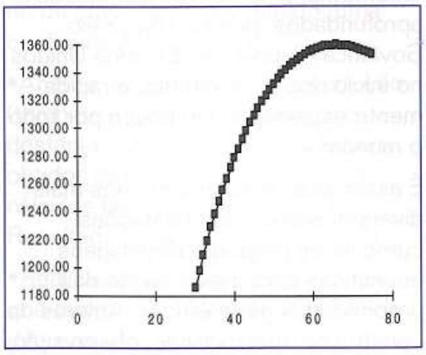


figura 4 - Gráfico da variação do volume com o ângulo de corte

que o valor máximo do volume do pacote de pipocas seria obtido com um corte de cerca de 66 graus. Obviamente que podemos trabalhar analiticamente esta situação e usar os instrumentos matemáticos adequados.

A folha de cálculo tem aqui um papel de natureza heurística na medida em que aponta soluções (cuja demonstração necessita de trabalho matemático com papel e lápis) e permite abordar o problema desvendando (por exemplo através dos gráficos) as relações entre as variáveis presentes.

Concluído que está que o valor 66 graus no corte da cartolina torna máximo o volume, poderá ser interessante analisar a forma como o volume varia com o raio do círculo cortado, mantendo um ângulo de corte de 66 graus (fig.5). Também aqui a folha de cálculo serve como ferramenta adequada para se perceber esta variação.

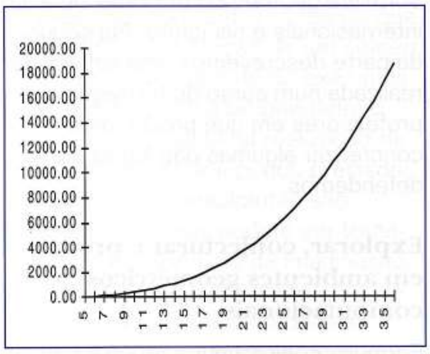


figura 5 - Gráfico da variação do volume com o raio do círculo, fixando o ângulo de corte em 66 graus.

É curioso notar que se aumentar o raio do círculo de cartolina de 15 para 20 cm o volume do cone de pipocas aumenta para mais do dobro!

Por outro lado é interessante verificar que com um cone de raio 37 cm podemos ter 20 litros de pipocas, isto é, cerca de 2500 pipocas!!!

E certamente podíamos continuar a exploração da situação atendendo por exemplo à conjugação das condições que impusemos com a necessidade de optimizar a utilização da folha de cartolina.

A concluir

É importante não esquecer que a utilização de ferramentas computacionais na educação matemática visa objectivos que se enquadram em propostas pedagógicas inspiradas na ideia de que os computadores devem constituir *adquiridos culturais* e esta perspectiva implica colocar os computadores ao serviço de *ideias poderosas* (Papert, 1980) em vez de centrar a atenção nos aspectos técnicos associados ao computador.

Esta argumentação ganha ainda mais força quando se pensa na actividade de modelação e aplicação da Matemática.

Não é relevante avaliar a potência e a capacidade do modelo matemático desenvolvido senão face à situação problemática que se pretende abordar e isto significa que "é na relação entre os objectivos que nos propomos atingir e os resultados que o modelo nos permite formular, que se encontra o terreno em que faz sentido falar da adequação da ferramenta computacional utilizada"[3].

Notas

[1]Ver por exemplo Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática, Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994

[2]Este exemplo encontra-se explorado de forma mais completa em Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1995

[3] Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994 (p. 54).

Referências

Mason, J. e Davis, J. (1991). Modeling with Mathematics in Primary and Secondary Schools. Geelong: Deakin University Press.

Matos, J., Carreira, S., Santos, M. e Amorim, I. (1994). Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática. Lisboa: Projecto MEM, Faculdade de Ciências de Lisboa.

Matos, J., Carreira, S., Santos, M. e Amorim, I. (1995). Modelação Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. e Carreira, S. (1996). Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Papert, S. (1980/1984). Logo, crianças e computadores. São Paulo: Editora Brasiliense.

João Filipe Matos

Faculdade de Ciências de Lisboa

Conjecturas e provas em Geometria
Uma nova visita à ilha do triângulo equilátero

Margarida Junqueira e Sérgio Valente

Formular conjecturas e prová-las é uma das características centrais da actividade matemática e provavelmente a que melhor a distingue da actividade científica noutras disciplinas. Isso, entre outras razões, leva a defender a necessidade de confrontar todos os alunos, mesmo os que não pretendam ser matemáticos, com a natureza específica do raciocínio matemático.

Neste artigo discutimos algumas ideias em torno da questão da produção de conjecturas e provas em Geometria. Mais concretamente, analisamos como é que este tipo de actividades pode ser levado às salas de aula e que papel têm aí os modernos ambientes computacionais que permitem fazer construções de figuras geométricas e explorá-las de forma dinâmica[1].

Dividimos o artigo em duas partes. Na primeira abordamos as questões num plano teórico, referindo, em particular, alguns resultados da investigação sobre a utilização de *software* geométrico em salas de aula internacionais e nacionais. Na segunda parte descrevemos uma actividade realizada num curso de formação de professores em que procurámos concretizar algumas das ideias que defendemos.

Explorar, conjecturar e provar em ambientes geométricos computacionais

Formular conjecturas e prová-las é uma das características centrais da actividade matemática e provavelmente a que melhor a distingue da actividade científica noutras disciplinas. Isso, entre outras razões, leva a defender a necessidade de confrontar todos os alunos, mesmo os que não pretendam ser matemáticos, com a natureza específica do raciocínio matemático.

Mas investigar, conjecturar e provar é algo que os alunos, e mesmo muitos professores, não apreciam e manifestam sérias dificuldades. A forma como, durante largos anos, se introduzia normalmente a demonstração foi responsável por esse estado de coisas. Por um lado exigia-se que os alunos reproduzissem demonstrações carregadas de um rigor e de um formalismo que o seu nível de desenvolvimento não permitia compreender. Por outro lado, acreditava-se que poderiam alcançar o que estava em causa numa demonstração se de início fossem confrontados com a prova de propriedades geométricas elementares, fáceis de visualizar. Isso teve o efeito perverso de fazer com que a grande maioria dos alunos nunca compreendesse o interesse nem a necessidade de mostrar a veracidade de "coisas que qualquer pessoa estava mesmo a ver que eram assim", mas que, por alguma absurda razão, os professores e os livros exigiam que se fizesse, escrevendo uma *hipótese*, uma *tese* e depois a *demonstração*, palavras, para eles, despidas de qualquer sentido.

O falhanço desses métodos, a par do ideal democrático de uma matemática para todos, conduziu a novas orientações na forma como os alunos devem ser iniciados neste tipo de actividade. Para isso contribuíram de forma decisiva os trabalhos de Dina e Pierre van Hiele, na Holanda, na década de cinquenta, sobre aprendizagem da Geometria e da demonstração em Geometria, amplamente divulgados e aprofundados, primeiro na União Soviética, depois nos Estados Unidos no início dos anos oitenta, e rapidamente espalhados um pouco por todo o mundo[2].

É assim que, actualmente, nos mais diversos países, as orientações curriculares propõem abordagens heurísticas para a exploração das propriedades geométricas. Através da construção, manipulação, observação e análise das figuras, podem ser intuídas conjecturas sobre as suas propriedades, colocando-se, em seguida, o desafio de compreender porque é que essas propriedades se verificam e convencer outras pessoas sobre a sua validade.

Mas a explicação das propriedades geométricas deverá, sobretudo, constituir algo que tenha significado para os alunos. Estes devem ser desafiados de modo sistemático a justificar as suas afirmações, aceitando-se que comecem por dar justificações visuais, baseadas em raciocínios empíricos, pois isso é fundamental para atingirem níveis mais elevados de pensamento geométrico. Progressivamente, devem ser encorajados a refinar o seu pensamento e conduzidos a compreender as insuficiências das justificações visuais e empíricas, de modo a descobrirem e começarem a utilizar algumas das componentes críticas da prova formal matemática. Esse tipo de prova só será apropriada na medida em que os alunos a saibam utilizar como uma ferramenta significativa para justificarem as suas ideias[3].

Seguindo a tradição clássica, as construções geométricas são um meio poderoso de estudar as figuras. Muitas propriedades podem ser (re)descobertas através do método heurístico sistematizado por Schumann[4], que assenta na realização de construções geométricas e coloca como desafios perceber porque é que essas construções funcionam, isto é, representam uma determinada figura, e descobrir as suas propriedades.

1. Descoberta indutiva de teoremas através de construções gráficas.

•Resolução de um problema adequado de construção. Resultado: uma configuração geométrica[5].

•Análise do resultado da construção (também através da inclusão e destaque de elementos essenciais, obtidos através de medições e de cálculos baseados em medições). Resultado: uma primeira suposição.

•Realização de novas construções que tenham em consideração casos diferenciados e verificação da suposição nessas construções. Resultado: confirmação da suposição com a formulação de um primeiro teorema ou negação da suposição.

2. Descoberta e apresentação da prova.

•Necessidade da prova: motivação.

•Análise do problema: estabelecer as hipóteses e a tese.

• Aplicação de métodos heurísticos para descobrir provas (avançar da hipótese para a tese, trabalhar em sentido contrário, raciocinar por analogia com outras provas, etc.).

•Documentação da prova tendo em vista a sua compreensão.

3. Tratamento do teorema e da prova.

•Discussão e explicação da metodologia para descobrir teoremas e provas.

•Aplicação de métodos heurísticos, como especialização, generalização, comparação, inversão, para produzir novas afirmações.

A (re)descoberta de propriedades geométricas com recurso apenas às ferramentas clássicas tem três grandes inconvenientes: o tempo que se gasta na construção de um número suficientemente grande de exemplos relacionados com a propriedade; o tempo que se gasta na realização de medições e cálculos pouco precisos; as construções resultantes são estáticas e apenas podem ser tornadas flexíveis por meio da imaginação. Se a exploração das construções se fizer com recurso aos modernos ambientes computacionais geométricos ultrapassam-se estes inconvenientes. Realizando uma construção e observando as suas modificações, feitas em tempo real e segundo critérios do próprio utilizador, este pode perceber que características permanecem invariantes, quais as que se modificam, fazer experiências que lhe permitam compreender as causas das invariâncias, em suma, investigar as propriedades geométricas num permanente vai e vem entre indução e dedução.

A investigação[6] mostra que o trabalho de alunos que utilizam ambientes geométricos computacionais tem uma qualidade manifestamente superior à usual. Ultrapassam os conteúdos de Geometria habituais, reinventam definições, fazem conjecturas, colocam e resolvem problemas significativos e desenvolvem provas originais. A formulação de conjecturas nem sempre acontece facilmente e, por vezes, causa mesmo frustação, sobretudo na fase inicial em que constitui um tipo de actividade pouco familiar à grande maioria dos alunos. A força da evidência das imagens constitui um obstáculo à necessidade da feitura de uma prova para validar uma conjectura. Principalmente os alunos mais fracos formulam generalizações e consideram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados, mas, a pouco e pouco, passam da elaboração de generalizações por testagem de casos particulares para a testagem de casos mais gerais. No final, muitos alunos fazem conjecturas e sentem a necessidade de as justificar. Alguns percebem que as propriedades por si descobertas necessitam de ser provadas antes de serem aceites como verdadeiras, ao contrário do que acontece com as enunciadas nos livros de texto.

Também estudos realizados em Portugal referem observações análogas. Num trabalho que envolveu alunos do 10º ano de escolaridade, sobre exploração de figuras geométricas em computador, formulação de conjecturas e respectiva prova, Manuel Saraiva[7] salienta o facto de alguns alunos conseguirem entender a importância da prova formal como meio de estabelecer a verdade matemática, principalmente no sentido de elucidar porque é que essa verdade acontece. Num trabalho que nós próprios realizámos no 9º ano de escolaridade[8], observámos que as justificações dos alunos sobre a validade dos seus processos de construção de figuras geométricas, evoluíram no sentido de substituírem argumentação visual e empírica por outra mais rigorosa, à medida que, sistematicamente, foram sendo desafiados a descrever e a explicar esses processos.

2. Uma conjectura e várias provas

através de uma nova visita à ilha do triângulo equilátero.

Num curso de formação de professores sobre utilização das tecnologias em Educação Matemática, que realizámos no centro *Proformar - Almada*, entre Outubro e Dezembro de 1996, uma das sessões de um módulo dedicado à Geometria tinha como título *Conjecturas e provas em geometria - uma investigação orientada sobre uma propriedade do triângulo equilátero.* Para essa sessão adaptámos um problema proposto há uns anos pelo Eduardo Veloso, no manual do Logo.Geometria, e que, em síntese, propõe a localização de uma *casa* numa *ilha* com a forma de triângulo equilátero, de modo que a soma das distâncias da *casa a cada uma das três praias que ladeiam a ilha* seja mínima.

Escolhemos este problema baseados nos seguintes motivos:

•a propriedade geométrica em causa não é evidente e é surpreendente;

•as capacidades dinâmicas do *software* que se estava a utilizar (Cabri-géomètre II) contribuem de forma decisiva para a sua redescoberta;

•é uma propriedade fácil de provar, sendo possível fazê-lo de diferentes modos e com diferentes níveis de rigor;

•as considerações anteriores fazem com que seja um bom problema para propôr também a alunos.

O problema foi investigado em três fases[9]. A primeira tinha como objectivo a modelação do problema através de uma construção geométrica adequada e a sua exploração com vista à formulação de conjecturas. Nas segunda e terceira fases propusemos duas provas diferentes da conjectura.

Na primeira actividade começámos por sugerir a realização de duas macro-construções[10], uma para obter um triângulo equilátero e outra para obter a distância de um ponto a uma recta definida por dois pontos (Ficha - 1.0). Com isto pretendiamos que os participantes obtivessem ferramentas facilitadoras do seu trabalho. Em seguida propusemos a construção de um triângulo equilátero (*a ilha*), a marcação de um ponto no seu interior (*a casa*) e a construção dos segmentos representativos da distância da *casa* (o ponto) *a cada uma das praias* (os lados do triângulo) (Ficha - 1.1). Passou-se depois a uma das etapas mais importantes, a exploração dinâmica do que é que acontece à soma das três distâncias (Ficha - 1.2). Deslocando aleatoriamente o ponto no interior do triângulo, à primeira vista não se percebe nada de muito significativo. No entanto, se forem testadas situações limite começa-se a ter alguma ideia do que se passa. Se o ponto estiver sobre um dos lados do triângulo (figura 1.2) uma das distâncias anula-se ficando apenas a somas das outras duas, e se se fizer coincidir o ponto com um dos vértices anulam-se duas distâncias e a terceira parece coincidir com a altura do triângulo (figura 1.3). Testando esta ideia relativamente a cada um dos vértices verifica-se que ela se mantém. Isto é, num caso extremo a soma das distâncias parece coincidir com a altura do triângulo. Será que isso é sempre assim?

O Cabri-géomètre II tem potencialidades que permitem levar mais longe a confirmação desta hipótese, e que pretendiamos ilustrar. Sugerimos assim que utilizando a calculadora do Cabri se afixasse no ecrã a soma das três distâncias e a altura do triângulo (Ficha - 1.3). Deslocando o ponto no interior ou sobre o triângulo era possível observar que a soma das distâncias permanecia constante e igual à altura do triângulo. Modificando o comprimento do lado do triângulo observava-se a mesma invariância. Sugerimos ainda a construção de uma tabela onde se registassem as medidas das três distâncias, a respectiva soma e a altura do triângulo (figura 2). Isso ajudou a confirmar que, para qualquer triângulo equilátero, a soma das três distâncias, considerando um ponto qualquer do triângulo ou do seu interior, era igual à sua altura, sendo portanto indiferente *o sítio onde o João deveria construir a sua casa.*

Este resultado, que no início nada faria prever, tornou-se uma conjectura muito plausível e, sobretudo, muito "visível".

Na segunda actividade propusemos uma prova desta conjectura, recorrendo às potencialidades do Cabri-géomètre II para fazer transformações geométricas. Sugerimos que traçando paralelas aos lados da *ilha* passando pela *casa*, se construíssem os três triângulos equiláteros representados na figura 3.1 e se transformassem esses triângulos noutros iguais, de modo a que as suas três alturas

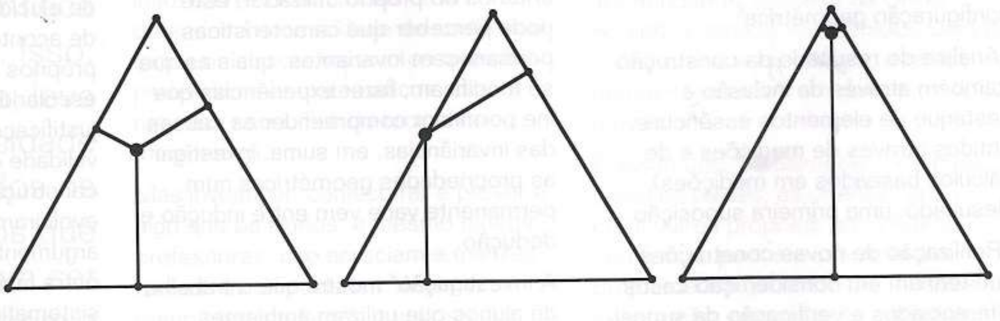


Fig.1.1 Fig.1.2 Fig.1.3

	d1	d2	d3	d1+d2+d3	altura
1	1,75	1,04	3,24	6,03	6,03
2	3,67	1,06	1,30	6,03	6,03
3	1,74	0,89	3,40	6,03	6,03
4	1,17	3,02	1,84	6,03	6,03
5	3,60	4,39	1,83	9,82	9,82
6	6,37	0,95	2,50	9,82	9,82
7	0,40	0,14	7,81	8,35	8,35
8	0,80	6,47	1,08	8,35	8,35
9	0,85	5,59	2,00	8,44	8,44
10	2,56	0,93	1,00	4,49	4,49
11	3,20	0,49	0,80	4,49	4,49

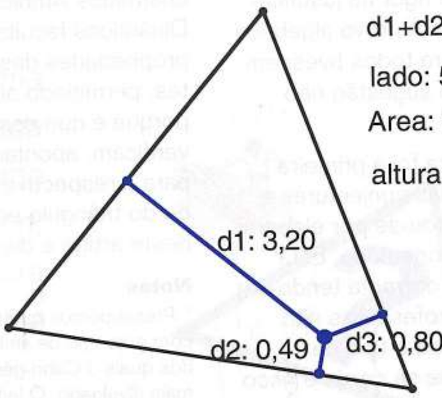


Fig. 2

ficassem sobre uma mesma recta. Foi então relativamente fácil mostrar que a soma dessas três alturas era igual à altura do triângulo inicial (figura 3.2).

Na terceira e última actividade propusemos outra demonstração da propriedade. Desta vez sugerimos a divisão da ilha em três triângulos a partir da casa, como mostra a figura 4, e que fosse tida em conta a fórmula da área de um triângulo.

A demostração, apresentada pelo Eduardo Veloso no manual do Logo.Geometria, usa técnicas algébricas:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times h_1}{2} + \frac{l \times h_2}{2} + \frac{l \times h_3}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3$$

(A=área; l=lado; h=altura)

Este problema suscitou a adesão dos participantes na sessão. Apenas uma professora conhecia a propriedade, os restantes (re)descobriram-na sem grande dificuldade, tendo feito notar que a visualização das três distâncias a "transformarem-se na altura do triângulo" foi determinante para a formulação da conjectura. A prova geométrica da conjectura foi relativamente difícil, sobretudo para os

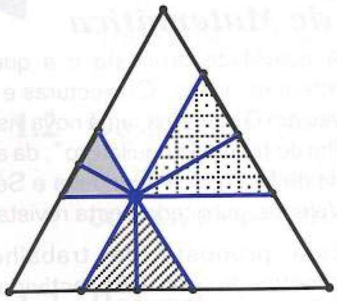


Fig. 3.1

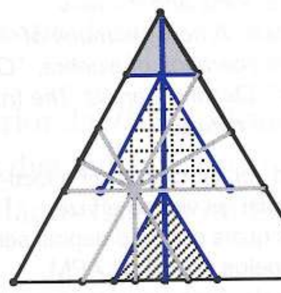


Fig. 3.2

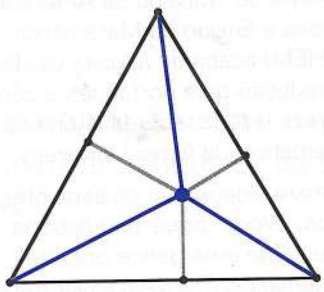


Fig. 4

professores menos experientes em Geometria. Apareceram diferentes provas, usando diferentes isometrias para transformar os triângulos, e com diferentes níveis de rigor na justificação das afirmações. A prova algébrica foi mais fácil, embora todos tivessem admitido que sem a sugestão não chegavam lá.

A actividade descrita foi a primeira dedicada ao tema das conjecturas e provas, por isso optou-se por elaborar uma ficha bastante orientada. Esta opção pareceu-nos correcta tendo em conta que muitos professores não estão habituados a este tipo de actividades, pelo que se corria o risco de ficarem desmotivados se o problema tivesse sido posto de uma forma mais aberta. Numa segunda sessão sobre a mesma temática propusemos a pesquisa de outras propriedades dos triângulos e dos quadriláteros de uma forma bastante menos orientada.

Conclusão

Algumas experiências de ensino e aprendizagem mostram que é possível desafiar os alunos a colocarem-se no papel de aprendizes matemáticos, explorando, fazendo as suas conjecturas e desenvolvendo provas significativas para si próprios e para os seus pares, no contexto em que estão inseridos, aprendendo, a pouco e pouco, as características e metodologias próprias da investigação e da prova em Matemática. A Geometria é um campo com muitas potencialidades nesta área, nomeadamente se o trabalho recorrer aos ambientes computacionais que permitem fazer construções de figuras geométricas e investigá-las de forma dinâmica. Os chamados Ambientes Geométricos Dinâmicos facultam intuições sobre propriedades das figuras nada evidentes, permitindo ainda compreeender porque é que essas propriedades se verificam, apontando assim caminhos para a respectiva prova. A propriedade do triângulo equilátero descrita neste artigo é disso um bom exemplo.

Notas:

[1] Pressupomos que o leitor está familiarizado com este tipo de ambientes computacionais, dos quais o Cabri-géomètre é, entre nós, o mais divulgado. O leitor que não os conheça, ou que esteja interessado em aprofundar o assunto, pode consultar os artigos de Ponte (1995) e Minga (1996) publicados na *Educação e Matemática*.

[2] Para aprofundar este tema ver Junqueira (1993) e Matos (1988).

[3] Um desenvolvimento destas noções pode ser visto em Battista e Clements (1995).

[4] Schumann é um investigador alemão colaborador do projecto Cabri-géomètre. Ver Schumann (1991).

[5] Seguindo uma linha defendida por autores franceses e alemães, Schumann (1991, p. 104) considera que «a rede de pontos, rectas, semi-rectas, segmentos de recta, ângulos em circunferências, arcos de circunferência, etc., e suas incidências deve ser entendida como uma configuração geométrica».

[6] Ver Battista e Clements (1995)

[7] Ver Saraiva (1992).

[8] Ver Junqueira (1996).

[9] Apresentamos em anexo a ficha na qual se fizeram algumas reformulações em relação à que foi proposta no curso.

[10] Uma macro-construção é uma nova construção geométrica que é possível acrescentar às construções que o Cabri-géomètre tem pré-definidas.

Referências

Batista, M., Clements, D. (1995). Geometry and Proof. Em *Mathematics Teacher (88-1)*, pp. 48-54.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. Em *Quadrante (1-2)*, pp. 63-78.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. Em *Quadrante (5-1)*, pp. 61-108.

Laborde, J. M., Frank, B. (1996). Cabri-géomètre II. France: Societé Texas Instruments.

Matos, J. M. (1988). Um exemplo de didáctica da geometria. Em *Educação e Matemática (6)*, pp. 5-10.

Minga, V. (1996). A minha experiência com o Cabri. Em *Educação e Matemática (37)*, pp. 9-13.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática?. Em *Educação e Matemática (34)*, pp. 2-7.

Saraiva, M. (1992). *O Computador na aprendizagem da Geometria - uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade.* Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Lisboa: Pólo do Projecto MINERVA do DE-FCUL.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding through continous variation of geometric configuration. Em *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 10 (3)*, 81-105.

Veloso, E. (1989). *Logo.Geometria 3.0, Manual de Utilização.* Lisboa: Projecto MINERVA, DE-FCUL.

Margarida Junqueira
Esc. Sec. de S. João do Estoril
Sérgio Valente
Esc. Sec. Anselmo de Andrade

Tecnologias na educação matemática • Notícias breves

O Grupo de Trabalho da APM sobre História e Ensino da Matemática (GTHEM) acaba de adquirir os direitos de tradução para português e cópia de treze vídeos, sobre história da matemática, da Open University.

Os treze vídeos têm os seguintes títulos: *Wood, brass and baboon bones; The emergence of Greek mathematics; The vernacular tradition; Mersenne and the birth of modern geometry; The founding of the Royal Society; Newton and Leibniz: the birth of calculus; Paris and the new mathematics; A new geometry of space; The liberation of algebra; "Only 4 colours"; Deadly quarrels; The true geometry of nature.*

O GTHEM vai agora traduzir a locução, legendar os vídeos e fazer cópias, as quais poderão depois ser utilizadas pelos sócios da APM.

No ProfMat 97 existirá uma sala de projecção onde serão projectadas as cópias inglesas.

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta é a que se refere no artigo "Conjecturas e provas em Geometria, uma nova visita à ilha do triângulo equilátero", da autoria de Margarida Junqueira e Sérgio Valente, publicado nesta revista.

Esta proposta de trabalho é constituida por três actividades investigativas em torno do mesmo problema, utilizando o programa *Cabri-Géomètre II*.

Escola..

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)...

O João tenciona mandar construir uma casa numa ilha com a forma de um triângulo equilátero. Cada lado do triângulo é uma praia espectacular: numa delas a ondulação é a ideal para a prática de surf, outra é uma praia de águas calmas, formidável para nadar, e a terceira costuma ser frequentada por uma miúdas muitos giras.
Ora o João, que é um surfista de primeira água, um exímio nadador e um amante de boas vistas, pretende que a sua casa fique num sítio tal que a soma das distâncias às prais seja a menor possível.
Onde deve o João mandar construir a casa?

Actividade 1:

Investigue o problema com o Cabri-géomètre.

1.0 Comece por fazer duas macro-construções que permitam obter, respectivamente:
- um triângulo equilátero,
- o segmento que representa a distância de um ponto a uma recta definida por dois pontos.

1.1 Obtenha uma *ilha* (com a forma de triângulo equilátero) e marque a *casa* (um ponto) no seu interior. Obtenha as distâncias da *casa* a cada um dos *lados da ilha* (incluindo as respectivas medidas).

1.2 Desloque a *casa* no interior da *ilha* (pode usar a animação) e tente descobrir o que acontece à soma das três distâncias. Observe, em particular, o que acontece quando coloca a *casa* num dos lados da *ilha* ou num dos vértices.

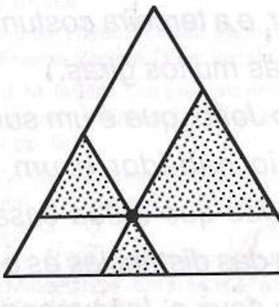
1.3 Recorrendo à calculadora, some as três distâncias e afixe esse resultado no ecrã. Calcule também a altura do triângulo e afixe igualmente no ecrã[1].

1.4 Construa uma tabela com cinco células e introduza nelas, sucessivamente, as três distâncias, a respectiva soma e a altura. Desloque outra vez a *casa* no interior da *ilha*, e, noutra linha da tabela, introduza o novo conjunto de valores. Repita este procedimento tantas vezes quantas quiser. Modifique também o lado do triângulo.

1.5 Estabeleça uma conjectura sobre o que observou. Já consegue indicar qual é o melhor sítio para *o João construir a casa*?

Actividade 2:

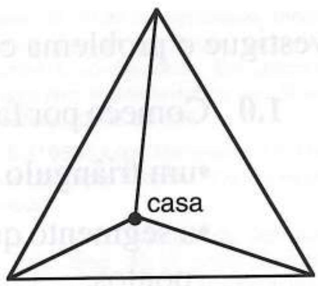
Tente provar a sua conjectura por via geométrica, usando o Cabri-géomètre.



Sugestão: Traçando paralelas aos lados da ilha, passando pela casa, construa os três triângulos que a figura mostra.Que tipo de triângulos obteve? Porquê? Transforme esses triângulos noutros iguais, de modo a que três alturas, uma de cada triângulo, fiquem sobre uma mesma recta.

Actividade 3:

Também é possível demonstrar a propriedade por um processo que interliga álgebra e geometria, recorrendo à fórmula da área de um triângulo.



Sugestão: considere a ilha dividida em três triângulos, como se mostra na figura ao lado.

[1] Tendo em conta que o Cabri devolve a área (*A*) de um triângulo, pode obter a altura (*h*) fazendo $h=2A/l$ (l - lado do triângulo).

Para este número seleccionámos

Experiências imaginárias: Provas em ambiente de computador[1]

John Costello

O artigo seguinte incide nos efeitos que o computador pode ter na educação matemática. A sua grande originalidade reside na especial atenção dada à vertente demonstrativa. Na verdade, é ponto assente que as novas tecnologias são um precioso auxiliar na realização de investigações e cálculos de rotina. Bastante menos explorada é a questão do seu impacto na actividade demonstrativa.

O artigo começa por indicar os traços fundamentais da abordagem formalista, ainda hoje explícita ou implicitamente dominante no ensino desta disciplina. De seguida, contrasta o tipo de prova que se realiza nesta abordagem com as provas que é possível realizar num micromundo computacional. Analisa as limitações dos micromundos e discute o modo como o computador poderá proporcionar provas francamente mais acessíveis que as provas de cunho formalista.

O autor é John Costello, que trabalha na Loughborough University, em Inglaterra, onde é responsável por um programa de formação de professores de Matemática do ensino secundário. Os seus interesses académicos incluem a Educação Matemática, a Lógica e os fundamentos da Matemática. Em 1991 publicou um livro analisando as mudanças em curso no ensino da Matemática no seu país, incluindo o ensino individualizado, investigações na sala de aula, computadores e exames nacionais, tendo em conta aspectos como a educação multicultural, diferenças entre sexos e alunos com necessidades especiais.

Formalismo e prova em educação matemática

Durante grande parte do século vinte a filosofia matemática foi dominada pela visão formalista dos fundamentos da matemática. De acordo com esta visão, os objectos matemáticos — conjuntos, números, formas geométricas, etc. — existem apenas num sentido formal: eles são as cadeias de símbolos que os representam e definem. Claro, estas coisas formais podem ser usadas para modelar o mundo real; e tais modelos matemáticos dão-nos muito poder, tanto para compreender melhor o mundo, como para lidar com ele. Mas a matemática por si só não tem existência para além da sua representação formal: não há um universo Platonista no qual existam estas abstracções.

De forma estranha os matemáticos *comportam-se* como se as abstracções tivessem alguma realidade externa. Exploram estruturas, números e configurações geométricas e aparentam fazer novas descobertas através desta exploração. Deste modo, parece não haver uma grande diferença, dizem eles, entre a descoberta de que Urano e Neptuno têm imensos satélites e a descoberta de que um certo conjunto de grandes números são primos. Os astrónomos, por seu turno, garantem-nos que as luas estão realmente lá algures. Por outro lado, os matemáticos, quando pressionados, mais facilmente recuam para o formalismo: estes números são nada mais, nada menos que símbolos — e as suas propriedades e relações são-lhes todas conferidas pelos nossos axiomas e definições. Os teoremas são apenas tautologias lógicas, obtidas dos axiomas e definições através de certas regras de inferência.

Tem de ser assim. Afinal, se começarmos a atribuir existência a abstracções, caminhamos na direcção de as colocar num ambiente místico fora do nosso universo físico — o que dificilmente poderemos aceitar. Algo deste dilema foi retido por Davis e Hersh (1996), que escreveram "o investigador matemático típico é um platonista nos dias de semana e um formalista nos domingos".

O professor de matemática típico, no entanto, coloca-se numa posição quase diametralmente oposta. Fre-

1. Artigo traduzido da revista *Micromath*, vol. 10, nº3, 1994, pp.21 - 25, com autorização da Association of Teachers of Mathematics, do Reino Unido.

quentemente, a actividade de sala de aula sugere que a matemática é tratada como uma actividade puramente formal. Muita da matemática escolar parece envolver a manipulação de cadeias de símbolos. As regras desta manipulação podem ser aprendidas e aplicadas, sem que se dê significado aos resultados.

No entanto, apesar das aparências, o formalismo é uma heresia educacional. Os professores acreditam em (e estão comprometidos com) coisas chamadas "conceitos", que permanecem por detrás da linguagem formal e do simbolismo. Tomemos, por exemplo, o tópico de área. As lições podem envolver o cálculo de imensas áreas e a aprendizagem de métodos e fórmulas relacionados com esses cálculos. Mas, a maior parte dos professores argumentariam que é mais importante para os alunos compreenderem o que *é* a área; e este é o contraponto filosófico. A área é um conceito: tem uma existência para além do cálculo e da manipulação de símbolos. É aqui que os professores se afastam tão radicalmente da descrição matemática de Davis e Hersh: os professores podem comportar-se como formalistas, mas em grande parte do tempo a sua posição filosófica está mais próxima do platonismo.

No entanto, no que diz respeito à prova em educação matemática a ênfase permanece totalmente no formalismo. A única prova genuína é uma prova formal. Trata-se apenas de escrever símbolos numa ordem precisa e estandardizada, por forma a impôr uma estrutura consistente e lógica para o todo da matemática. Há com certeza professores que argumentam que a prova é um assunto pessoal ou que é muito dependente da cultura e do contexto; mas dificilmente se encontram bons exemplos desta filosofia em prática.

A agenda formalista da matemática do século vinte foi extremamente poderosa em promover a sistematização da matemática numa estrutura dedutiva estandardizada. Na sua introdução a *Provas e Refutações*, Lakatos (1976) expressou-o da seguinte forma:

Acontece frequentemente na história do pensamento, que quando um novo método poderoso emerge, o estudo dos problemas que podem ser por ele resolvidos, avança rapidamente e atrai a atenção geral, enquanto o resto tende a ser ignorado ou até mesmo esquecido...

Se este depoimento fosse escrito fora do contexto, por si só, numa página, não conseguiríamos descobrir do que é que trata. Assemelha-se muito mais a um depoimento sobre computadores do que sobre a filosofia formalista. Assim, temos um inesperado paralelo. Os computadores fornecem-nos um novo meio poderoso de tratar a matemática. Durante grande parte deste século um programa formalista teve comparável (embora muito diferente) poder. O papel da prova na estrutura formal foi relativamente claro. Então, que diferença fazem os computadores?

A abordagem lógica formalista é totalmente sintética. Separa a matemática da história e da sua psicologia. Apresenta, ordena, desenvolve e justifica o conhecimento matemático de uma forma sistemática, o que é bastante diferente da forma sob a qual esse conhecimento foi criado historicamente e sob a forma em que é apreendido. Esta aproximação impõe uma estrutura detalhada da matemática. Praticamente impossibilita o estudante de construir provas em vez de simplesmente as aprender, porque o lugar de qualquer resultado na hierarquia matemática é fortemente forçado. No entanto, sabemos muito bem que os estudantes e até crianças novas apreciam a prova e argumentam de forma dedutiva. Tal prova tem pouco a ver com a sistematização formal: a questão é como saber que algo é sempre verdadeiro e como se convencer a si próprio e aos outros.

Lakatos oferece um modelo de prova como uma "experiência imaginária". Este é um padrão antigo da prova matemática, conhecido pelos matemáticos pré-euclidianos gregos como *deiknymi*. A ilustração detalhada em *Provas e Refutações* é a relação $V+F-A = 2$, relacionando os vértices, arestas e faces de um poliedro. Como poderemos desenvolver este teorema? Bem, primeiramente tomamos uns poucos poliedros particulares, contamos os seus vértices, faces e arestas e formulamos uma regra que os relacione. Então concebemos uma experiência imaginária para justificar a regra em geral.

A experiência imaginária é a seguinte. Tomamos o nosso poliedro e fazemos um buraco numa das suas faces. De seguida puxamos e esticamos o buraco até que o poliedro se apresente numa rede plana. Depois, montamos esta rede em forma triangular e desmantelamo-la, um arco de cada vez, até que obtenhamos um só triângulo. Temos sempre de verificar se estes processos não alteram o valor de $V+F-A$.

Há duas considerações a fazer sobre esta prova. Uma é que ela é acessível. Necessita de explicação e meditação mas é intuitiva e auto-sustentável. Não depende de muitos axiomas, lemas, teoremas e regras de inferência. O segundo comentário importante é que este resultado não é nada óbvio. Necessita de alguns exemplos particulares para o tornar plausível e requer uma prova geral. Desta combinação do *não-óbvio* e da *acessibilidade* resulta o *maravilhoso*.

A palavra é escolhida cuidadosamente. Em 1994 na conferência ATM, Jonhston Anderson conduziu a discussão das sete maravilhas do mundo (matemático). A fórmula $F+V-A=2$ não foi enquadrada nesse grupo, mas foi mencionada. E pareceu claro que os critérios sugeridos para o *maravilhoso* estavam a ser usados. Por exemplo, o teorema da factorização única de inteiros para primos não foi um candidato: não parece necessitar de prova. É óbvio que se pode partir um inteiro de forma única, desta maneira, e que as provas usualmente oferecidas são menos convincentes do que a intuição. Por outro lado, a infinidade dos números primos *é* maravilhosa. Não é óbvio — de facto é de alguma forma contra-intuitivo — mas a prova é simples e acessível. Bem, quase acessível. O único entrave possível é a regra de inferência que permite a prova pela contradição: a prova é geralmente apresentada desta forma. Voltaremos a esta questão mais tarde.

Justificação e prova em micromundos computacionais

Em escolas secundárias o uso do Logo para produzir polígonos é uma tarefa familiar. Geralmente a "tartaruga" movimenta-se para a frente à volta do polígono, de forma a que o foco de atenção se situe no ângulo exterior de cada vértice. É muito simples constatar que estes se devem adicionar para obter uma volta completa. Como uma aproximação aos ângulos internos isto é de certa forma indirecto. Mostrar, por exemplo, que os ângulos de um triângulo equivalem a meia volta (ou seja a uma rotação de 180°) através deste método, é um pouco forjado, apesar de provavelmente ser mais acessível do que uma prova baseada em construções e propriedades de linhas paralelas que, na verdade, pertencem ao sistema euclidiano formal.

Claro que não há realmente uma causa para que as rotações não correspondam aos ângulos internos. Mas há algo na imagem da tartaruga que torna o sistema não natural. Para se tornear o triângulo através dos ângulos internos a pobre tartaruga tem de rastejar até ao primeiro vértice, seguidamente encostar-se ao ângulo interno antes de recuar pelo próximo lado. Por outro lado, esta brilhante experiência imaginária torna muito claro que a rotação total através dos três ângulos internos é uma meia volta.

Perspectivas semelhantes fornecem outras relações geométricas, tal como propriedades de ângulos alternos e correspondentes, muito óbvias. Um dos desafios do uso dos computadores na educação matemática é criar micromundos que tornem este óbvio acessível.

Não é surpreendente que um programa gráfico de computador gere uma forma particular de prova geométrica. Afinal, o seu propósito é explorar as propriedades da forma, e as características do micromundo específico encorajam certas forma de experiência imaginária. É um pouco mais difícil aplicar estas ideias a propriedades de números. Suponhamos, por exemplo, que queremos criar uma infinidade de números primos óbvia e acessível. Tal como é apresentado na maioria dos livros de texto a prova usual depende da redução ao absurdo. Um exercício útil é produzir uma prova construtiva. Em termos de computação queremos escrever um procedimento (talvez em Logo ou noutra linguagem de programação) que continue a gerar novos primos.

Claro, não é assim tão difícil conceber um programa que verifique os números através de divisões e que imprima uma lista de todos os primos ordenados conforme requerido. Mas isto comporta uma questão. Nós sabemos que os primos continuarão a surgir porque sabemos, de qualquer forma, que há uma infinidade deles. O que queremos é um procedimento recursivo que produza sempre e obviamente outros primos num número finito de passos.

Há imensas formas de resolver isto. Uma delas é reter o espírito da prova clássica por acumulação de uma lista de primos $p_1, ..., p_r$ e produzir o seguinte por cálculo $p_1 p_2 ... p_r + 1$ e obter o seu menor factor primo por divisão. Se queremos iniciar esta sequência com 2, torna-se:

2, 3, 7, 43, 13, 53,...

(porque 13=1807:139 e 53=23479:443)

Começar com 3 (ou 7) não faz diferença:

3, 2, 7, 43, 13, 53, ...

7, 2, 3, 43, 13, 53, ...

Mas começar com cinco dá:

5, 2, 11, 3, 331, 19, ...

Estas sequências não contêm todos os primos (pelo menos eu não penso que contenham), mas são sequências infinitas de primos, em que cada novo termo é gerado num número finito de passos.

Como um algoritmo de computador que gera primos, este procedimento tem algumas desvantagens. No entanto, merece consideração e investigação. Sabemos que há um número infinito de primos devido a uma peça subtil de dialéctica: para os que apreciam tal lógica isto pode ser interessante, mas muitos aprendem-no simplesmente sem lhes dar nenhum uso. A actividade aqui sugerida é uma forma de se apropriar deste conhecimento e desenvolver formulações individuais alternativas da prova.

Pode ser útil tentar encontrar alguma metáfora ou imagística para entender a função do computador e do micromundo que ele fornece, ao fazer matemática e ao trabalhar na prova matemática.

Em certo sentido, um micromundo é um universo neo-platonista. É um lugar onde formas geométricas, números, e outras entidades matemáticas existem por direito e podem ser exploradas. No entanto, isto é um pouco pretensioso no tom: talvez a analogia do tabuleiro de xadrez seja melhor.

Por vezes é dito que a matemática formal é apenas um complicado jogo, como uma elaborada forma de xadrez. Os objectivos deste jogo são de variadas formas: por exemplo, os problemas são *resolvidos* e os teoremas são *provados*. Ser-se bom em matemática implica aprender a alcançar estes objectivos e reconhecer quando eles estão correctamente completos. Um micromundo é uma arena visualmente acessível e facilmente manipulável na qual o jogo se pode desenrolar.

A comparação com o xadrez surge mais ou menos assim. Imagine-se tentar explicar o xadrez sem tabuleiro ou peças. Uma numeração puramente formal é usada para explicar as jogadas, as regras são descritas em palavras e de alguma forma tem de se entender quando e como o jogo se completa. Até ao advento dos computadores esta foi a forma que utilizámos para fazer matemática. Agora, os computadores fornecem-nos o tabuleiro. Esta visão extrema não apelará a todas as pessoas. Mas é absolutamente surpreendente especular que as gerações futuras possam olhar para trás, assombradas com a matemática na fase pré-computador e em como este elaborado jogo foi desenvolvido sem o equipamento essencial.

Limitações dos micromundos

Por vezes, as fronteiras de um micromundo são óbvias de reconhecer. Noutras ocasiões pode levar algum tempo a reconhecer essas limitações. Nalguns casos não encontramos tantas limitações como anomalias: o micromundo demonstra ter a sua própria estrutura e propriedades que não são propriamente aquelas do sistema que esperávamos, ou que prtendíamos que representasse. Há uma ilustração curiosa acerca disto no aparecimento de objectos impossíveis e ambíguos no 3D Logo. Estas considerações levantam a questão de ser possível criar um micromundo computacional que forneça auto-sustentação, consistência e um sistema completo de representação do espaço ou número.

Qualquer *software* pode desafiar-nos a encontrar alguma aplicação que os autores não tenham previsto; e ficamos especialmente maravilhados quando algo estranho acontece. Por vezes, não é tanto o caso que o micromundo seja inadequado; antes, pode criar um sistema próprio totalmente novo. Isto é provavelmente mais óbvio em trabalho gráfico, mas também há ilustrações numéricas, especialmente quando o resultado de um procedimento é particularmente sensível a erros de arredondamento e ao grau de precisão da aritmética.

Claro que, em qualquer situação particular, os construtores inteligentes de *software* refinam a facilidade para que nós possamos modelar e investigar o comportamento exacto da estrutura. Depois teremos de descobrir outra coisa que se oponha ao sistema e teremos sempre a possibilidade de o fazer.

Provas geradas por computador

O aspecto mais inquietante do uso dos computadores em matemática não são as suas limitações e inadequações: de facto, seria consolador acreditar que nenhum micromundo pudesse revelar uma representação completa e auto-sustentada do número e da geometria. O que causa maior mal estar é a noção de que algumas provas matemáticas dependem inteiramente do uso dos computadores. A ilustração mais citada acerca disto é o teorema das quatro cores, mas há muitas verdades que sabemos apenas devido aos procedimentos do computador. Por exemplo:

$2^{21701} - 1$ é um primo

Provavelmente acreditará nisto. Mas também, não poderá ter a certeza de que algum ser humano tenha desenvolvido todos os cálculos necessários à sua confirmação. Se eu vos citar a data e lugar em que este resultado foi confirmado por computador, não o perturbará mas também não o surpreenderá. E esta é a questão. Nunca esperou que este resultado fosse maravilhoso. Eu poderia torná-lo maravilhoso se pudesse, numa experiência imaginária de uma ou duas linhas torná-lo óbvio. Então, talvez ficasse surpreendido e começasse a aplicar experiências imaginárias a mais alguns números grandes. Infelizmente não lhe posso oferecer essa oportunidade.

Voltemos ao teorema das quatro cores. É uma verdadeira desilusão. Queremos uma experiência imaginária inteligente, acessível, como a prova da forma dos poliedros de Euler. Ao invés, obtemos uma prova inacessível baseada em computador.

Os computadores têm uma enorme influência na acessibilidade da matemática. Proporcionam-nos um universo no qual explorar a matemática e tornar óbvia a veracidade das afirmações matemáticas se torna acessível para todos nós de uma forma individual. No entanto, também permitem aos matemáticos criar provas que não são (nem nunca podem ser) acessíveis a ninguém. Dado o uso contemporâneo universal dos computadores está claro que cada vez mais novos aspectos da matemática — novo conhecimento, se quiserem, ou novas verdades — serão geradas por computador. Vale a pena pensar que os novos métodos poderosos fornecidos pela abordagem formalista aos fundamentos da matemática no início do século vinte não geraram provas acessíveis. No trabalho de Whitehead e Russell a prova poderá consistir em páginas cheias de cadeias de símbolos cuidadosamente transformados através de regras de inferência. Poderemos ficar de alguma forma sossegados, porque alguém construiu uma estrutura básica da matemática deste modo. Mas o seu verdadeiro efeito no nosso entendimento é dificilmente mais significativo do que as modernas provas de computador.

Para aqueles que continuam a encontrar contentamento e entusiasmo no ensino e aprendizagem da matemática, a prova é uma importante parte do pacote. Precisamos de nos questionar porquê. Poderemos mencionar aspectos estéticos da prova, conhecimento ou elegância. Poderemos falar sobre construção de provas, convencendo-nos e aos outros e tornando nosso o conhecimento matemático. Estes assuntos têm muito pouco a ver com axiomas, regras de inferência e sistematização da matemática. Pelo contrário, a nossa preocupação está quase inteiramente situada nas experiências imaginárias.

O encantamento que encontramos nessas provas tem sobrevivido à absurda mão do formalismo e igualmente sobreviverá às pressões da era do computador. Alguns matemáticos produzirão provas geradas por computador de novos teoremas. Outros, no entanto, poderão usar os micromundos do computador para fornecer novas e acessíveis provas para velhos teoremas. Desta forma, os teoremas tornar-se-ão não apenas verdadeiros, mas também óbvios e maravilhosos.

Tecnologias na educação matemática

Acesso igual para todos os alunos

Numa turma do 10º ano, no início deste ano lectivo, quando os alunos estavam numa aula a cortar num plástico faces de poliedros, surgiu num dos grupos um interessante problema de geometria. A professora transformou-o rapidamente numa questão para todos os alunos tentarem resolver como trabalho de casa, dando um prazo de alguns dias. No entanto, no dia seguinte, o Pedro entregou no princípio da aula a sua resolução, que tinha sido feita no computador caseiro, no programa *Sketchpad*, e que incluía desenhos impecáveis impressos a cores.

Este episódio deve fazer-nos reflectir... Por um lado no facto altamente positivo de existirem hoje tecnologias que podem ser colocadas, de modo tão flagrante e imediato, ao serviço da aprendizagem da Matemática. Por outro lado, na certeza de que, se aceitarmos que seja o puro acaso, tão ao sabor dos tempos de economia de mercado em que vivemos, a decidir quem são os alunos que têm acesso a essas tecnologias, estaremos a deixar criar um fosso ainda muito maior entre os que têm pais cultos a quem podem fazer perguntas e quartos onde podem estudar e aqueles a quem apenas é dada a possibilidade de se sentarem ao lado dos primeiros nas cadeiras da escola.

Todos os alunos daquela turma deveriam poder, naquela tarde, a seguir à aula, aceder a um computador para tentar, como o Pedro, resolver a questão colocada pela professora. Mas não apenas isso: tal como o Pedro já faz desde o ano passado, devem ter também possibilidade de colocar questões à professora através do correio electrónico, e de aceder à Internet. A isto chama-se igual acesso para todos os alunos, e é certamente o maior desafio educativo do nosso tempo. É uma enorme responsabilidade de todos os educadores, e certamente dos professores de Matemática.

As iniciativas do Ministério da Ciência e Tecnologia (colocação das escolas em rede) e do Ministério da Educação (Nónio Séc. XXI) são passos no bom sentido. A excelente introdução escrita por Mariano Gago para o Livro Verde para a Sociedade da Informação e todo o capítulo sobre "A Escola Informada" do mesmo livro equacionam o problema do igual acesso com justeza. Mas a concretização dessas boas intenções reside em grande parte nas escolas, na iniciativa e energia que os professores e os Conselhos Directivos coloquem ao serviço da causa do acesso igual para todos os alunos.

Esta causa não é evidentemente apenas portuguesa. O discurso inaugural que o primeiro ministro da Noruega dirigiu aos participantes na 14ª International Conference on Technology and Education, que se realizou em Oslo este verão, fez esquecer o tema anunciado do encontro, ao trazer para primeiro plano, de forma incisiva, a questão do igual acesso às tecnologias na Noruega e no resto do mundo. Dada a sua importância, transcrevemos alguns extractos nesta secção.

veloso@mail.telepac.pt

Extractos do discurso de Thorjborn Jagland, Primeiro Ministro da Noruega, aos participantes do 14º ICTE

Uma cultura deve estar baseada em valores. A tecnologia não pode mudar isto. Quando entrámos neste século, a Noruega situava-se entre os países mais pobres da Europa. Desde então, esta sociedade passou por mudanças notáveis. Houve industrialização e houve avanços tecnológicos. Mas a força condutora que está por trás deste processo tem sido uma sucessão de reformas educativas.

Começou no princípio do século quando a educação primária se tornou gradualmente acessível a todos. O processo de reforma continuou e alargou-se até hoje. As maiores reformas sociais dos anos 90 aconteceram na educação. Todos os noruegueses têm agora direito a três anos de educação secundária. A educação primária obrigatória foi estendida de nove para dez anos.

Temos uma abordagem básica para a educação: acesso igual. Aplicamos a mesma abordagem às novas tecnologias: acesso igual.

Esta cultura de distribuição equitativa e de acesso igual têm sido os aspectos essenciais das reformas educativas no meu país. [...]

O princípio dos direitos iguais é ainda mais importante nestes tempos de rápidas mudanças tecnológicas. Se abandonamos aquele princípio, enviamos uma luz verde para novas divisões entre as pessoas — não já entre "os que têm e os que não têm" mas sim entre "os que podem e os que não podem".

As tecnologias baseadas no conhecimento têm potencial para reduzir as diferenças entre as pessoas — se tivermos a preocupação de tornar a tecnologia e o conhecimento acessíveis a todos.

Software para o ensino da Matemática

O quadro seguinte apresenta alguns programas que podem ser utilizados no ensino/aprendizagem da Matemática. As correspondências entre os conteúdos do currículo e o *software* são meras sugestões.

1ºCiclo	**Programas**
Geometria e números	Logo
2ºCiclo	**Programas**
Geometria	Tesselmania, Logo
Números	Logo
3ºCiclo	**Programas**
Semelhança de figuras, propriedades dos triângulos e dos quadriláteros, teorema de Pitágoras no plano, lugares geométricos, transformações geométricas, circunferência, trigonometria	Sketchpad, Cabri
Pavimentações, transformações geométricas	Tesselmania
Funções, equações	Graphic Calculus, Graphmatica, Coypu
Números	Logo
Estatística	Folha de cálculo (Excel)
Secundário	**Programas**
Geometria no plano	Sketchpad, Cabri
Geometria no espaço	Kaleidotile, 3D Images, Geometria Descritiva
Padrões geométricos, pavimentações	Kali, Tesselmania
Funções	Graphic Calculus, Derive, Modellus
Conexões geometria/funções	Sketchpad, Cabri
Introdução ao Cálculo Diferencial	Derive, Modellus
Estatística	Folha de cáculo (Excel)

Bibliografia recente sobre Novas Tecnologias

Fowell, S. (1996). A crise na educação e o papel das tecnologias de informação. In *A educação do futuro: O futuro da educação* (pp.63-70). Porto: ASA.

Matos, J.F. (1995). *Modelação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Papert, S. (1994). *A máquina das crianças: Repensando a escola na era da informática* (tradução do original em inglês de S. Costa). Porto Alegre: Artes Médicas.

Papert, S. (1997). *A família em rede* (tradução do original em inglês de F. Nunes e F. Bensabat). Lisboa: Relógio de água.

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação*. Lisboa: Texto

Ponte, J. P., e Canavarro, P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Teodoro, V. D., e Freitas, J. C. (1992). *Educação e computadores*. Lisboa: GEP.

Notas (sobre o quadro ao lado)

1. Existem diversas versões de Logo. Indicamos abaixo a versão que julgamos ser a mais moderna e mais completa, além de ser produzida por uma firma com tradições no Logo, a Logo Computer Systems, Inc., que lançou o LogoWriter.

2. Qualquer dos programas de geometria dinâmica, *Sketchpad* e *Cabri*, nas suas últimas versões, tem possibilidades para apoiar o ensino de funções no 3º ciclo e secundário.

3. Consulte também a lista de programas para Matemática do Ministério da Educação (http://www.dapp.min-edu.pt/nonio/soft3.htm)

4. Consulte a *homepage* de Jaime Carvalho e Silva, http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/index.html

Como obter os programas indicados:

- **Logo** — MICROWORLDS para Mac ou para Windows 95.
informações: http://www.lcsi.ca/index.html
encomenda: http://www.lcsi.ca/products/edu_order.htm
morada: Logo Computer Systems, Inc; 3300 Cote Vertu, Suite 201, Montreal, Quebec, HAR2B7
- **TesselMania** para Mac ou Windows 95
informações: http://www.keypress.com/product_info/tesselmania.html
encomenda: fax 00 1 800 541 2442
morada: KeyCurriculum Press, P.O. Box 2304, Berkeley, CA 94702, USA.
- **Graphic Calculus**: Vu Soft, Geerdinkhof 561, 1103 RK Amsterdam, The Netherlands.
- **Graphmatica**: download do programa em http://www.softwarelabs.com/win31/win31170.htm
- **Coypu**: programa produzido no Shell Center for Math Education (University of Notingham); *download* de um demo em http://www.octpen.demon.co.uk/coypu/
- **The Geometer's Sketchpad**: será distribuído em Portugal, em breve, pela APM. Esteja atento!
- **Cabri**: Dismel, Lda. Rua Zaire, 16, 1º Dto, 1170 Lisboa.
- **Kaleidotile e Kali** (só para Mac): download em http://www.geom.umn.edu/software/download/
- **Geometria Descritiva**: http://www.dapp.min-edu.pt/nonio/soft3.htm
- **Derive**: Soft Warehouse, Inc., 2660 Waialae Avenue, Suite 304, Honolulu, HI 96816, USA. Pode ser pedido por fax (contacto Bernard Kutzler): 00 1 808 735 1105.
- **Modellus**: pedidos a Vitor Teodoro, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2825, Monte da Caparica.
- **Excel**: qualquer distribuidor da Microsoft.

Calazans Duarte: uma escola em transformação

A Esc. Sec. Dr. Calazans Duarte tem 1300 alunos, dois terços dos quais frequentando o ensino secundário durante o dia. São ainda ministrados três cursos tecnológicos.

Nesta série de entrevistas por e-mail *que temos vindo a fazer, resolvemos pedir a Manuela Pires, presidente do Conselho Directivo, que nos descrevesse as transformações por que está a passar esta escola. Professora na escola desde 1989, e no seu 3º ano de C.D., a Manuela participou em numerosos projectos na escola e agora ainda consegue arranjar tempo, entre muitas outras coisas, para ser sócia muito activa da APM (Grupo de Trabalho de Geometria e comissão organizadora do ProfMat 97, por exemplo), e estar a iniciar o mestrado em educação matemática. Aceitou as regras do jogo: responder informalmente, na volta do e-mail, sem revisões, a algumas perguntas.*

E.M. - Manuela, do que tenho ouvido dizer, parece que a Esc. Sec. Dr. Calazans Duarte está a sofrer algumas transformações importantes este ano: laboratórios de Matemática, rede de computadores ligados à Internet, novo pavilhão... Como é que isso tudo aconteceu? Saiu-vos a sorte grande?

M.P. - Laboratório(s)? de Matemática? Não é no plural! Ainda só temos uma sala que estamos a adaptar... Em relação às transformações que estão a ser feitas, elas têm origens diferentes e algumas interligações:

Bloco Novo: Devido ao elevado número de alunos tinham sido implantados na escola, há 25 anos, uns famigerados pavilhões pré-fabricados que estavam num estado de degradação adiantado. Após vários anos de negociações com a DREC, foi decidido construir um bloco novo. Tivemos de escolher um dos modelos que préexistiam nas construções da DREC mas propusemos alterações em função das nossas necessidades, sala de alunos, laboratórios de Física, Química e Biologia. Apesar de termos proposto de início a construção de um Laboratório de Matemática, disseram-nos que poderíamos fazer posteriormente a adaptação de uma sala para o efeito. Esta questão preocupa-me porque, enquanto os outros laboratórios têm uma tipologia definida, Equipamento definido e o Ministério equipa a Escolas com materiais, a Matemática e as Línguas, por exemplo, nem têm tipologia definida para os seus laboratórios, nem equipamento. Se não insistirmos muito nesta tecla, continuam a gastar-se milhares de contos em equipamentos, sem serem contempladas disciplinas como a Matemática, o Português ou as Línguas (estranho!) e continuamos a fazer adaptações, como canalizações que nem sempre são fáceis. Bom, o que fizemos a seguir à aprovação da construção do bloco foi um projecto de readaptação do edifício antigo, com a colaboração de dois arquitectos da escola que previa entre outros espaços uma sala anexa à Mediateca para a Internet e uma sala de estudo. Foi aprovado financeiramente e está em fase de conclusão.

Internet: Candidatámo-nos ao Nónio, foi aprovado financeiramente um quinto da proposta, pedimos reforço de verba à DREC para assegurar a parte eléctrica das infra-estruturas necessárias à rede e com essas verbas asseguradas estamos a começar a montar calhas e cabos. Durante este mês vão-se furar novamente paredes (malditas obras!). De seguida vamos começar a organizar as ligações e operacionalizar o *software*. Temos o apoio do Centro de Competências Softciências e temos um técnico, temporariamente, em *part time*, a apoiar. O nosso objectivo é ter em cada laboratório (incluindo os embrionários de Matemática e Línguas), na Mediateca, no Clube do Ambiente, na Informática, na sala das artes, na sala de professores, CD e secretaria, ligação à Internet, bem como redes internas. Este mês são as infra-estruturas.

O novo bloco criou espaços para convívio dos alunos

Laboratório de Matemática: Procurámos centralizar a maior parte das aulas de Matemática em 3 salas juntas, para ser mais fácil o acesso aos materiais. Numa delas temos um armário com as calculadoras e os *viewscreens* e na outra (LM) o computador, retroprojector, calculadoras e materiais para a geometria. Nesta sala não temos água (as adaptações!!!). A ideia é que uma destas salas funcione como sala livre de estudo de Matemática, mas este ano ainda marcámos muitas aulas lá, vamos ver para o ano. Apesar das limitações, temos muito orgulho no nosso laboratório porque aquilo que temos, desde calculadoras aos materiais manipuláveis, foi sendo adquirido ao longo dos anos, devido à iniciativa do Grupo de Matemática. No entanto, é preciso passar a outra fase e essa é exigir do Ministério equipamento adequado.

O Grupo está a elaborar a lista de material a enviar à DREC.

E.M. - Referes na tua resposta que têm tido o apoio do Centro de Competências SoftCiências. Como existem muitas escolas a iniciar esta cooperação com os Centros de Competência, certamente que alguns leitores gostariam de algum detalhe sobre esse apoio. Quais são os vossos projectos relativos ao Nónio Séc. XXI?

M.P. - A ligação à Internet que temos tido na Mediateca sofreu ao longo dos últimos dois anos dos problemas usuais destas coisas quando nascem: problemas técnicos quanto baste, restrições financeiras enquanto não tivemos porta local, dedicação absoluta do grupo de alunos que puseram o sistema a funcionar, participação gradual dos professores. A equipa da Mediateca tem feito algumas sessões de divulgação e de formação para alunos e professores. Estas iniciativas contribuíram para aumentar a empatia, começámos a comunicar através de *e-mail* e garantimos a troca de correspondência com as escolas da parceria nos intercâmbios (Tiriisma Lukio na Finlândia e Mondrian College na Holanda). Em relação ao apoio do C.C. Softciências este começou na formulação do Projecto de candidatura ao Nónio. Como todos sabemos que para qualquer coisa funcionar bem tecnicamente é necessário um esforço enorme, muitas vezes inglório, decidimos que estava na hora de abandonar os "métodos artesanais de trabalho" e decidimos investir na técnica. Nesse sentido temos feito várias consultas ao Centro de Competências, enviando os projectos e obtendo pareceres em relação a perguntas do tipo " sistema Unix" ou "Windows NT"? "Servers, UPS, Rack"? E outras coisas horrorosas do género, fundamentais, claro! De resto temos projectos a continuar, como o dos intercâmbios em que a ideia é os alunos poderem comunicar directamente durante as aulas dedicadas ao efeito, projectos a começar como a dinamização do problema quinzena, ligado ao Projecto da APM Fórum Pedro Nunes. A propósito, criámos uma equipa mista de dois professores e dois alunos responsáveis pela Internet e pela dinamização de um Clube. De resto vamos pedir apoio ao SoftCiências ao nível de *software* e de apoio a projectos interdisciplinares no âmbito das Ciências. As Línguas têm ligação a outro Centro

Será losango? Apenas um paralelogramo? Uma aula com cubos no Lab. de Matemática.

E.M. - Esquece agora um pouco que és presidente do Conselho Directivo, e coloca-te na posição de professora de Matemática... Que condições te parece que existem já para o emprego de tecnologias em Matemática na tua escola? Que uso efectivo é dado ou tenciona vir a ser dado dentro de pouco tempo? Quais são as tuas maiores necessidades neste aspecto como professora e até que ponto pensas que elas se vão realizar, e mediante que esforços da parte da escola e do lado do Ministério?

M.P. - Quanto à utilização de tecnologia na aula de Matemática tenho, tal como o Grupo em geral, experiências diferentes no que diz respeito às calculadoras e à utilização do computador. Fomos atacados pela virose das gráficas há 4 ou 5 anos. A virose não atacou todos ao mesmo tempo, nem da mesma maneira, mas hoje muitos professores do grupo utilizam gráficas na aula. Penso que essa generalização tem a ver em primeiro lugar com o entusiasmo que o grupo inicial de utilizadores tinha, com as trocas constantes de informações na sala de professores, com o tirar das dúvidas e em segundo lugar porque criámos no Grupo algumas condições, desde a aquisição de gráficas por parte do CD (ainda não era o meu), da obtenção de *viewscreens* como oferta pelas campanhas que fizemos junto dos alunos (muitos adquiriram calculadoras) e de termos um armário na sala de Matemática. Esta questão logística, de transportar coisas de um lado para o outro é a mais aborrecida e difícil de ultrapassar. Os materiais têm que estar o mais possível disponíveis senão cansamo-nos. Este ano procurámos concentrar as aulas mais num bloco, a Celina e a Silvéria fizeram um curso do T3 cá na escola e vamos ter 2 CBL de oferta da nova campanha. Continuamos a tirar dúvidas entre nós, a conhecer novas potencialidades desta tecnologia que é de fácil utilização. Em relação à utilização dos computadores a experiência é diferente. Fiz uma ou outra experiência com a folha de cálculo, com o programa de frisos, mas sem continuidade. As adversidades venceram-me. Trocar de sala, ligar e desligar computadores, deixar tudo nos sítios é obra e os ganhos não me pareciam compensar o esforço. Da parte dos outros colegas também não houve motivação. É evidente que pensando na geometria e na folha de cálculo o computador pode oferecer condições de trabalho qualitativamente diferente. O ano passado o Grupo conseguiu adquirir um computador bom que está no nosso laboratório e este ano o CD arranjou mais uma sala de computadores de modo a não ficarem tão ocupadas com as ITI, mas ainda não é suficiente, porque quando há coincidências não se pode fazer nada e quebra-se o ritmo. Felizmente duas das colegas do 10º ano entraram no projecto Matemática para Todos e utilizaram o *Sketchpad* nalgumas actividades vencendo as tais dificuldades.

Com o dinheiro do Nónio queremos colocar, durante o ano, mais computadores no nosso laboratório e fazer a ligação à Internet, procurar *software* e dar oportunidade a todos de comunicar e partilhar mais experiências.■

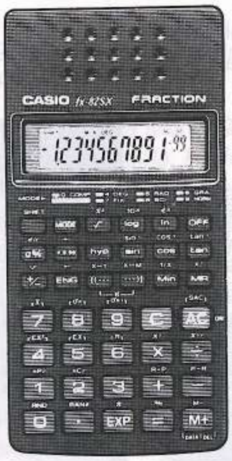
CALCULADORAS NO ENSINO - ANO LECTIVO 96/97

É natural a adopção das calculadoras no ensino, e tem vindo a processar-se a adopção de matérias, processos e programas a esta nova ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. Nada melhor para um Educador que poder contar na sua sala com o maior número possível de alunos com a mesma calculadora, facilitando assim enormente o evoluir da matéria e sua explicação. A **CASIO** possui a melhor linha do mercado, este ano renovada com ainda melhores modelos e a preço mais acessível.

Básicas

CASIO. SL 450

O modelo ideal concebido para o ensino. Outros modelos disponíveis mais acessíveis **HL 820 D e HS 5 D.**



Científicas

CASIO. FX - 82 SX

A FX 82 é a máquina mais vendida no mundo, agora renovada para maior conforto e durabilidade. Cálculo com fracções e 139 funções.

Científica Avançada

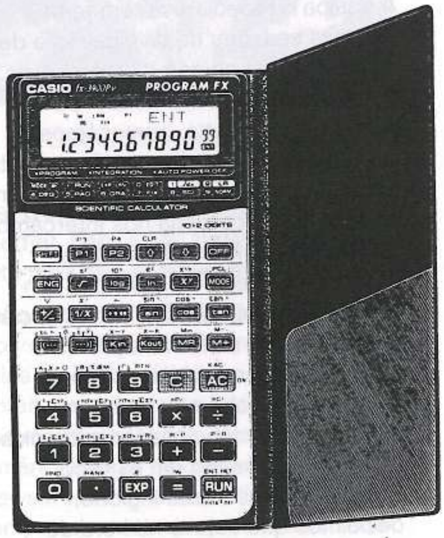
CASIO. FX - 570 S

Uma calculadora sem rival, excepcionalmente completa, simples e acessível. Utiliza o novo sistema de cálculo V.P.A.M.

Programável

CASIO. FX - 3900 PV

A calculadora programável mais fácil e acessível. 300 passos de programa, integrais, estatístíca a 2 variáveis. Já à venda novo modelo. **FX 4800 P** com 4500 passos de programa.



CALCULADORAS GRÁFICAS CIENTÍFICAS PROGRAMÁVEIS

CASIO. FX 6300 G

A gráfica mais económica do mercado

Os gráficos ao alcance de todos.

Todas as funções necessárias.

CASIO. FX 7400 G

A nova **7400 G** é a calculadora gráfica por excelência.

Todas as funções, fácil de usar e programar, visor grande e 7 Kbytes de memória. Mantém preço acessível.

CASIO. CFX 9850

A gráfica super completa com o visor a cores, 32 Kb de memória, linguagem Tipo Basic, estudo das cónicas, sucessões, tabelas e gráficos.

Pontos de vista, reacções, ideias...

A opinião dos alunos

Nos tempos que correm, as novas tecnologias de informação (NTI) assumem cada vez mais importância no Ensino da Matemática. Nos novos currículos do ensino secundário encontramos propostas explícitas da sua utilização na sala de aula. Na ordem do dia está, também, a polémica discussão sobre as vantagens e desvantagens da sua utilização nos exames.

Pareceu-nos importante conhecer a perspectiva daqueles que são, afinal, os principais interessados em todo o processo: os alunos. Decidimos assim perguntar a alguns a sua opinião, colocando-lhes três questões.

1 - Já usaste calculadoras gráficas ou computadores na aula de Matemática?

2 - O que fizeste com eles?

3 - Pensas que as calculadoras gráficas e os computadores devem ser usados nas aulas de Matemática? E nos exames? Porquê?

É importante notar que este mini-inquérito feito a duas turmas de 11° ano e uma de 10° ano, num total de 45 alunos, não pretende ser um estudo estatístico, mas apenas uma breve e informal sondagem de qual o papel que, neste momento, as NTI devem assumir, na perspectiva dos alunos. No quadro apresentam-se algumas respostas dos alunos que nos pareceram ilustrativas.

Dos 45 inquiridos, apenas 8 afirmaram nunca ter utilizado calculadora gráfica ou computador na aula de Matemática e, dos restantes, 14 trabalharam apenas com calculadoras gráficas. Os que usaram computador ou calculadora gráfica fizeram-no fundamentalmente no estudo das *Funções*.

No que respeita à 3ª questão, na qual lhes era solicitada uma opinião pessoal, não deixa de ser significativo o facto de, relativamente à utilização nas aulas, não ter havido uma única opinião desfavorável e, relativamente aos exames, apenas duas. Mais concretamente, 45 alunos afirmaram ser a favor da utilização das NTI na sala de aula, ainda que 6 deles evidenciassem algum receio de que

Respostas de alunos

1- Não.

2-

3- Sim, pois como a Matemática está muito evoluída, torna-se cansativo e por vezes difícil fazê-lo sem esses instrumentos.

Sara (10° ano)

1- Sim.

2- As calculadoras foram usados como auxílio no estudo das Funções.

3- Penso que sim, pois podem ser utilizados como ajudantes ao cálculo (...) permitindo a eficácia na resolução de problemas mais complexos. Nos exames, permite uma economia do tempo disponível.

Vanda (11° ano)

1- Já.

2- Não fiz muito mas, basicamente, usei-a para gráficos respeitantes a Funções.

3- Eu penso que devem ser usados na aula quando o aluno consegue dominar os conhecimentos básicos para que num futuro próximo não dependa apenas de um computador para resolver os seus problemas, mas também do seu raciocínio.

Mauro (11° ano)

1- Já usei calculadora gráfica, mas nunca computador.

2- Com a calculadora, trabalhámos com Funções.

3- Sim, embora possa ser benéfico ou não para os alunos pois, pode ajudar, como também pode facilitar. E são duas coisas diferentes que às vezes se confundem.

Cláudia (11° ano)

1- Sim.

2- Aprofundei o estudo das Funções.

3- Nas aulas de Matemática, sim. Nos exames, depende da honestidade das pessoas. Sem dúvida que os métodos computacionais permitem um maior desenvolvimento do processo mental humano e, por isso, útil para ser usado. Apesar de, nos exames, com os computadores devidamente preparados, podem resolver o referido exame de Matemática.

Hugo (11° ano)

1- Já usei calculadoras gráficas.

2- Trabalhei no campo das Funções.

3- Penso que estes equipamentos devem ser usados nas aulas de Matemática única e exclusivamente como muletas de ocasião, sendo o seu uso nos exames completamente despropositado. Não nos devemos esquecer de que qualquer um sabe premir meia dúzia de teclas, mas será que esta pessoa conhece verdadeiramente as regras matemáticas que estão subjacentes às operações efectuadas? Isto é que deve ser testado.

Rui (11° ano)

essa utilização pudesse vir a resultar numa deficiente aquisição das competências básicas.

Nas respostas relacionadas com os exames, dois alunos não emitiram opinião, 36 mostraram-se claramente a favor, 5 evidenciaram algumas preocupações, embora mostrando-se favoráveis à sua utilização, e apenas 2 respostas foram claramente negativas.

As principais razões apontadas como justificativas das respostas favoráveis à utilização das NTI no ensino da Matemática, foram (i) facilitar a compreensão da matéria e a visualização de gráficos, (ii) permitir uma maior precisão, rapidez e eficácia na resolução de problemas e exercícios, e (iii) responder e acompanhar a evolução da tecnologia e da própria Matemática.

As opiniões desfavoráveis revelam essencialmente uma grande preocupação com a utilização indiscriminada destes instrumentos, o que poderia comprometer a boa aquisição e compreensão dos conteúdos. Outro aspecto focado, ainda que por um único aluno, foi a questão financeira. Segundo ele, a utilização das calculadoras gráficas nos exames implicaria que todos os alunos tivessem obrigatoriamente que possuir uma e nem todos teriam condições económicas que permitissem tal despesa.

De uma maneira geral, parece-nos que as respostas recolhidas sugerem acima de tudo que os alunos viveram algumas experiências positivas nas suas aulas. Nota-se também que muitos deles reflectem de algum modo as posições ("contra" ou "a favor") que a este respeito são assumidas pelos diversos sectores da opinião pública.

Encontro de professores em Valadares

Realizou-se no dia 9 de Julho de 1997, na Escola EB3/S Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves, em Valadares — Vila Nova de Gaia, um encontro de professores de Matemática. Este encontro foi promovido por um grupo de professoras desta escola tendo a ideia original partido do núcleo de estágio, e surgiu por se considerar que, numa altura de mudança permanente relativamente à concepção e às metodologias do currículo da Matemática, se torna necessário que os professores partilhem as suas experiências e reflictam sobre elas. Os objectivos do encontro eram:

1. Partilhar experiências;
2. Reflectir, em conjunto, sobre as dificuldades detectadas na implementação de actividades envolvendo materiais diversos;
3. Procurar estratégias que conduzam à superação dessas dificuldades.

No decorrer do encontro foram apresentadas algumas das actividades desenvolvidas com os alunos nas aulas de Matemática, as quais implicaram o recurso a materiais manipulativos, ao computador — utilizando software específico, nomeadamente os programas Mathematica, Cabri-Géomètre, Graphmatica e Derive — e à calculadora gráfica.

A primeira parte do encontro, realizada na parte da manhã, englobou uma comunicação apresentada por José Manuel dos Santos dos Santos e subordinada ao tema "Laboratórios de Matemática" (relato de uma experiência). Nesta sessão foi realçada a importância do trabalho em grupo, quer disciplinar, quer interdisciplinar, e a necessidade de cada professor desenvolver a capacidade de ultrapassar a inércia da sua formação inicial, assumindo o papel de aprendiz na sua eterna auto-formação. Salientou-se ainda a importância e a necessidade de garantir, nas escolas, condições que permitam a utilização de todos os meios informáticos e laboratoriais existentes, bem como o envolvimento em projectos que aproximem comunidades científicas e afins, dentro e fora da escola.

Os participantes no encontro puderam ainda visitar uma exposição de materiais manipulativos, fichas de trabalho e software (programas Tales, Escher e Mathace) e participar numa sessão prática com calculadoras gráficas TI 82, dinamizada por Ana Emília Nogueira, integrando actividades realizadas com alunos do 8º ano.

De registar foi o facto de, nesta primeira parte do encontro, terem estado presentes,professores de outras áreas curriculares, nomeadamente História, Filosofia, Física e Química.

As actividades realizadas da parte da tarde, destinaram-se a professores de Matemática. Realizaram-se sessões práticas com base em computadores, apoiadas em fichas de trabalho, bem como uma ficha de avaliação destas últimas. Pretendeu-se, deste modo, criar um espaço de reflexão sobre a metodologia utilizada.

Foi ainda fornecida uma outra, de avaliação do encontro. A partir da análise dos dados recolhidos pode-se concluir que todos os participantes consideraram o encontro útil, adequado aos objectivos e, devidamente estruturado e agendado.

N. R. - A notícia deste encontro foi-nos enviada pelas colegas Ana Nogueira, Matilde Almeida, Alexandra Justiça, Teresa Vieira e Rosário Monteiro. As actividades das sessões práticas encontram-se disponíveis no Centro de Recursos da APM.

T^3 Portugal história e uma estória

José Paulo Viana

Se a história do T^3 Portugal se inicia em Março deste ano, com a realização das primeiras sessões, a pré-história começa em 1992, quando a APM fez os seus primeiros cursos sobre "a utilização das calculadoras gráficas no ensino". Estava nessa altura a começar a Reforma do Ensino e, pela primeira vez, as calculadoras tinham deixado de ser ignoradas na aula de Matemática.

Se a história do T^3 Portugal se inicia em Março deste ano, com a realização das primeiras sessões práticas de iniciação, a pré-história começa em 1992, quando a APM fez os seus primeiros cursos de 12 horas para professores sobre "a utilização das calculadoras gráficas no ensino". Estava nessa altura a começar a Reforma do Ensino e, pela primeira vez, as calculadoras tinham deixado de ser ignoradas (para não dizer proibidas) na aula de Matemática.

A APM continuou o seu programa de formação de professores nesta área e, em 1995, surgiu o convite para que dois dos seus elementos fossem aos Estados Unidos frequentar um curso T^3. O programa de formação T^3 tinha começado em 1987, por iniciativa dos professores Bert Waits e Frank Demana, da Ohio State University, e consistia numa série de cursos (Álgebra, Cálculo, Geometria, Estatística, etc.) baseados na tecnologia gráfica. Com o alargamento do T^3 à Europa, anunciado no ICME de Sevilha, em Julho de 1996, a APM resolveu, dada a sua experiência e interesse neste campo, aderir imediatamente.

Foi então criado um colectivo de professores de várias regiões do país e que tinham anteriormente desenvolvido trabalhos de formação e de investigação no campo das tecnologias gráficas. Esse colectivo discutiu e elaborou depois a estrutura e os materiais para as acções de formação.

Em Maio deste ano foi assinado um protocolo com a Texas Instruments, que garante o apoio material às acções a efectuar.

O projecto T^3 Portugal inclui três tipos de acções: sessões práticas de iniciação de 3 horas, cursos de 25 horas e cursos de 50 horas.

Para este ano programámos 15 sessões práticas de iniciação, 6 cursos de 25 horas e 2 cursos de 50 horas. Todos os cursos foram acreditados pelo Centro Coordenador da Formação Contínua. Os cursos de 25 horas iniciaram-se em Maio, na Escola Secundária Vergílio Ferreira, de Lisboa.

Cursos em 1997

Local	Nº horas
Lisboa	25
Coimbra	25
Porto	25
Amadora	25
Leiria	25
Évora	25
Queluz	50
Lisboa	50

O interesse dos professores por estes cursos foi muito grande. O número de inscrições foi sempre superior às vagas disponíveis. Em Lisboa a adesão foi tão grande que se decidiu fazer imediatamente um segundo curso.

Todos os cursos de 1997 são de iniciação ao uso da tecnologia gráfica, com introdução à utilização das calculadoras TI-83 e TI-92, do CBL (Laboratório apoiado por uma calculadora) e do GraphLink (Ligação computador-calculadora). São também feitas discussões e debates sobre várias questões didácticas:

- Qual é o papel da calculadora na construção de conceitos matemáticos?
- Em que temas do programa a calculadora gráfica é necessária?

- Que mudanças é preciso fazer na prática lectiva?
- Como avaliar, agora que se usa a calculadora gráfica?

Na fase final dos cursos, todos os participantes devem elaborar e apresentar uma ficha de trabalho que possa ser utilizada na sala de aula e em que seja necessário o uso da tecnologia gráfica.

A partir de Janeiro de 1998 começarão os cursos específicos de Aplicações da Matemática, Geometria e Estatística. Os materiais para esses cursos estão neste momento a ser preparados por várias equipas diferentes para depois serem discutidos pelo colectivo.

O programa para 1998 prevê 20 sessões práticas de iniciação e 15 cursos de 25 horas, a realizar de forma descentralizada por todo o país.

Cursos previstos para 1998

Local	Nº horas	Tema
Viseu	25	Iniciação
Castelo Branco	25	Iniciação
Leiria	25	A indicar
Figueira da Foz	25	Iniciação
Coimbra	25	A indicar
Coimbra (Distrito)	25	Iniciação
Algarve	25	Iniciação
Évora (Distrito)	25	A indicar
Porto	25	A indicar
Porto	25	Geometria
Porto (Distrito)	25	Iniciação
Lisboa	25	Estatística
Lisboa	25	Aplicações da Mat.
Loures	25	Iniciação
Laranjeiro	25	Iniciação

Surpresas gráficas

Num dos cursos surgiu uma situação que vale a pena contar.

Na resolução de um problema surgiu a função $f(x) = sen\ 120x$.

Sabíamos, por actividades anteriores, que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = sen\ k.x$, com $k>1$, se obtém do gráfico de *sen x* através de uma "compressão" horizontal.

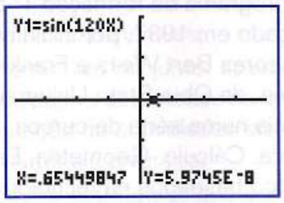
Assim, como *sen x* tem um máximo e um mínimo no intervalo $[0\ ;\ 2\pi[$, a função *f* terá 120 máximos e 120 mínimos nesse intervalo. Ou seja, o seu gráfico vai "subir e descer" muitas vezes...

No entanto, as pessoas obtiveram, na calculadora, gráficos muito diferentes uns dos outros, todos eles surpreendentes.

Quem escolheu para a janela o *Zoom Trigonométrico* não viu gráfico nenhum...

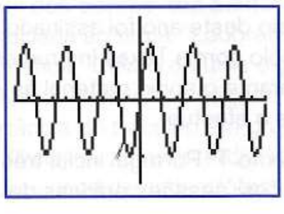
Nesta opção, os valores de *x* variam aproximadamente entre -2π e 2π e o gráfico está lá mas não se vê! Realmente, fazendo *Trace*, vemos que os valores de *y* são todos praticamente iguais a 0 e portanto o gráfico obtido coincide com o eixo horizontal. A função seria constante neste intervalo!

```
WINDOW
Xmin=-6.152285…
Xmax=6.1522856…
Xscl=1.5707963…
Ymin=-4
Ymax=4
Yscl=1
Xres=1
```



Quem estava a trabalhar no *Zoom Standard*, com o *x* a variar entre –10 e 10, encontrou um gráfico com apenas 6 máximos (quando se sabe que existem cerca de 700 naquele intervalo...)

```
WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-1.5
Ymax=1.5
Yscl=1
Xres=1
```

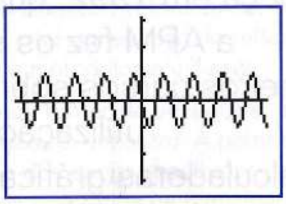


Com o *Zoom Decimal*, os resultados continuam a ser surpreendentes.

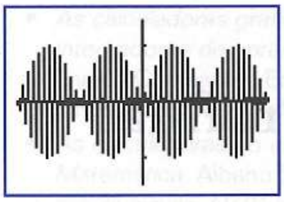
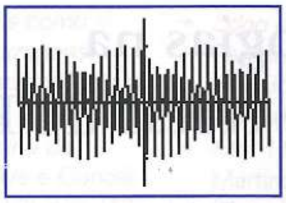
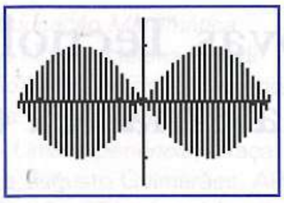
A função apresenta 9 máximos no intervalo indicado, muito longe dos mais de 300 previstos.

Além disso, a função aparece como decrescente no ponto de abcissa x=0 (e nós sabemos que ela é crescente nesse ponto).

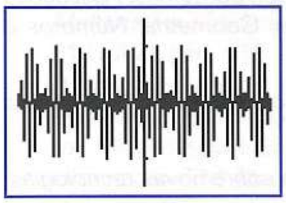
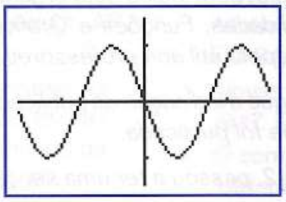
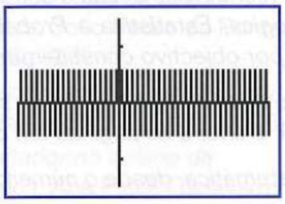
```
WINDOW
Xmin=-4.7
Xmax=4.7
Xscl=1
Ymin=-3.1
Ymax=3.1
Yscl=1
Xres=1
```



Claro que nesta altura apetece fazer mais experiências para ver o que acontece. Foi o que fizemos. E obtivemos alguns gráficos interessantes e outros mesmo muito bonitos. Na página seguinte estão alguns exemplos em que, para melhor visualização, se escolheu o *y* a variar entre –1,5 e 1,5.

Xmin=–6,1 Xmax=6,1 Xmin=–6,59 Xmax=6,59 Xmin=–1,205 Xmax=1,205

Xmin=–1,1 Xmax=1,1 Xmin=–2,41 Xmax=2,41 Xmin=–1 Xmax=1,461

Bom, agora é preciso perceber por que motivo aparecem gráficos tão diferentes. Imaginemos o gráfico desta função num intervalo relativamente pequeno, onde ela tem no entanto uma série de máximos e mínimos:

Quando se pede à calculadora para traçar o gráfico num certo intervalo, ela não pode evidentemente calcular o valor da função em todos os pontos do intervalo, visto existir uma infinidade de pontos. Então, o que a máquina faz é dividir o intervalo em 94 partes iguais, calcular o valor da função para os 95 valores de *x* obtidos e unir os pontos correspondentes. Na maioria das funções, em que não há muitas variações no sentido de crescimento, não há problemas. Mas neste caso que estamos a estudar, há!

Veja-se o que pode acontecer: entre dois valores de *x* que a máquina calcula, a função tem sempre máximos ou mínimos. No entanto, a calculadora não sabe isso e limita-se a unir os dois pontos calculados por um segmento de recta. Repare-se na figura: a negro está o verdadeiro gráfico da função e a cores está o gráfico que a calculadora traça depois de efectuar os cálculos para os 11 pontos.

Assim, nesta pequena parte do gráfico, a função é uma sinusoide com 12 máximos mas a calculadora mostra uma sinusoide muito mais "aberta", com apenas um máximo.

Conclusão: no estudo de funções trigonométricas, sobretudo nas de período muito curto, é preciso grande cuidado na utilização da calculadora. A realidade pode ser bem diferente daquilo que o visor mostra.

José Paulo Viana
Coordenador do Projecto T³ Portugal

A tecnologia no currículo...

(cont. da pág. 31)

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *MAT789 — inovação curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Gulbenkian.

Borges, Carlota (1994). *A linguagem LOGO no ensino-aprendizagem de conceitos geométricos no 7º ano de escolaridade*. Tese de mestrado (Univ. Aveiro).

Cardoso, Maria Teresa P. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática*. Tese de mestrado (Univ. Minho). APM.

Carreira, Susana (1993). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações com recurso à Folha de Cálculo*. Tese de mestrado (Univ. Lisboa). APM.

Domingos, António (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Tese de mestrado (Univ. Nova de Lisboa). APM.

Duarte, Fernando (1991). *O computador e o programa "estdfunc" no estudo das funções*. Tese de mestrado (Univ. Lisboa). Projecto Minerva, pólo do DEFCUL.

Fernandes, Dárida (1994). *Utilização da Folha de Cálculo no 4º ano de escolaridade: estudo de uma turma*. Tese de mestrado (Univ. Minho).

Junqueira, Maria Margarida (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: um estudo no 9º ano de escolaridade*. Tese de mestrado (Univ. Nova de Lisboa). APM.

Matos, J. Filipe (1987). *A natureza do ambiente de aprendizagem criado com a utilização da linguagem LOGO no Ensino Primário e as suas implicações na construção do conceito de variável*. Projecto Minerva, DEFCUL.

Moreira, Maria Leonor (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática: uma experiência com alunos do ensino preparatório*. Tese de mestrado (Univ. Lisboa). APM.

Neves, Maria Augusta (1988). *O computador na recuperação em geometria de alunos do 9º ano*. Tese de mestrado (Univ. Lisboa). Projecto Minerva, DEFCUL.

Porfírio, Joana (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Tese de mestrado (Univ. Lisbóa). APM.

Projecto GEM (1994). *Calculadoras gráficas no ensino da Matemática* — Relatório Final. Centro de Formação da APM.

Saraiva, Manuel (1991). *O computador na aprendizagem da geometria*. Tese de mestrado (Univ. Lisboa). APM.

Paulo Abrantes
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa

Novas Tecnologias na Educação e Matemática e Actas do ProfMat

Editados que estão 44 números da Educação e Matemática e 10 Actas do ProfMat, apresentamos, neste número, um índice das contribuições publicadas sobre novas tecnologias desde o seu início. Este índice está organizado por temas: Aplicações e Modelação; Currículo e Prática Pedagógica; Estatística e Probabilidades; Funções e Gráficos; Geometria; Números e Álgebra; Professor. A categorização tem por objectivo constituir um apoio útil aos professores.

Cada referência contém, por esta ordem, o título e o autor, a que se segue a indicação da publicação, Educação e Matemática (EM) e número ou Actas do ProfMat (AP) e ano, e as páginas em que foi publicada.

Importa ainda referir que a Educação e Matemática, desde o número 42, passou a ter uma secção sobre novas tecnologias.

Aplicações e Modelação

Currículo e Prática Pedagógica

- *As calculadoras gráficas como integradoras de aprendizagens*, Eneida Campanhã, Eduarda Santos e Francisca Sousa, pág. 225.
- *As calculadoras no ensino da Matemática*, Albano Silva e Conceição Rodrigues, AP 91 (vol.2), pág. 157.
- *As calculadoras no ensino da Matemática*, Cristina Loureiro, AP 91 (vol.2), pág. 115.
- *A escola informada: aprender na sociedade da informação (extracto)*, Missão para a Sociedade da Informação, EM 43, pág. 40.
- *Calazans Duarte: uma escola em transformação*, , entrevista a Manuela Pires, Eduardo Veloso, EM 45, pág. 57.
- *Calculadoras na educação matemática - contributos para uma reflexão*, Albano V. Silva, EM 11, pág. 3.
- *Calculadoras gráficas - mais um desafio para renovar os currículos de Matemática*, Graciosa Veloso, EM 16, pág. 3.
- *Como arranja ainda tempo para a Internet?* entrevista a Jaime Carvalho e Silva, Eduardo Veloso, EM 42, pág. 8.
- *Estatística no ensino secundário: uma oportunidade para renovar*, Cândida Barros, Conceição Mesquita, Fátima Cerqueira, Helena Margarida e Paulo Abrantes, AP 86, pág.82.
- *Estatística, portugueses e computadores*, Raúl de Carvalho, AP 86, pág. 82.
- *Experiências imaginárias: provas em ambiente de computador*, John Costello, EM 45, pág. 51.
- *Formas de aprendizagem num ambiente Logo. Papel do professor*, Conceição Costa, AP 89, pág. 277.
- *Funções periódicas na folha de cálculo*, Susana Carreira, EM 1, pág. 3.
- *Investigação, dinamização pedagógica e formação de professores - três tarefas para a renovação da Educação Matemática*, João Pedro da Ponte, AP 86, pág. 15.
- *Investigando com a calculadora gráfica*, Helena Rocha, AP95, pág. 235.
- *Investigar para aprender*, João Filipe Matos, AP 89, pág. 411.
- *Logo e a Educação Matemática*, João Filipe Matos, EM 2, pág. 3.
- *Logo e Educação Matemática*, Fernando Nunes, Helena Paradinha, João Filipe Matos e Margarida Junqueira, AP 89, pág. 263.
- *Mat 11 - Uma experiência*, Graça Martins e Augusto Guimarães, AP 91 (vol.2), pág. 221.
- *Novas Tecnologias na aula de Matemática*, João Pedro da Ponte, EM 34, pág. 2.
- *Novas tecnologias: que perspectivas?*, Mesa redonda, EM 45, pág. 16.
- *O computador no ensino da Matemática*, Ana Paula Canavarro, AP 91 (vol.2), pág.109.
- *O Computador no ensino/aprendizagem da Matemática*, Isabel Catalão, Fátima Seiça, Lourdes Cangueiro, AP 93, pág.265.
- *O computador no ensino da Matemática*, António Bernardes, Eduarda Fonseca e João Ponte, AP 89, pág. 251.
- *O Computador no (in)sucesso em Matemática*, Mª Augusta Neves, Mª Isabel Vale e José Portela, AP 88, pág. 189.
- *O Computador, Torta de Barro*, Seymour Papert, EM 2, pág. 19.
- *O Logo na aula de Matemática/A aula de Matemática no Logo*, Fernando Nunes e Graça Camosso, AP 88, pág. 197.
- *Os banhos de Arquimedes e os gráficos de Eureka*, José Postela, AP 89, pág. 423.
- *Os computadores na facilitação da aprendizagem*, Eduardo Machado, AP 90 (vol.1), pág.83.
- *Perspectivas interdisciplinares em Física e Matemática*, Cremilde Ribeiro e Margarida Junqueira, EM 23, pág. 33.
- *Provavelmente*, José Fernandes e Paulo Afonso, AP 92, pág. 135.
- *Que perspectivas para o Nónio Século XXI?* entrevista a João Filipe Matos, Eduardo Veloso, EM 44, pág. 12.
- *Resolução de problemas*, João Gama, AP 92 pág. 95.
- *SC4 na abordagem dos racionais e da proporcionalidade*, Carlota Oliveira, Leonor Coutinho, M. José Serrano e Rosário Rocheta, AP 91 (vol.1), pág.31.
- *Teste de Matemática resolvido e impresso por calculadora/computador*, Orlando Freitas, AP 95, pág. 137.
- *Um projecto em Logo*, João Gama, AP 87, pág. 53.
- *Utilização da folha de cálculo no primeiro ciclo do ensino básico*, Alfredo Caseiro, AP 92, pág. 85.
- *Utilização de computadores no ensino da Matemática - algumas experiências em países da CEE*, Fernando Nunes, AP 91 (vol.2), pág. 217.

Estatística e Probabilidades

- *Computadores e probabilidades*, João Filipe Matos, EM 9, pág. 7.
- *Descobrindo Estatística...*, Cristina Fernando, Helena Rocha e Maria de Jesus Vieira, AP 92, pág. 229.
- *Esparguete, triângulos e probabilidades*, João Filipe Matos, EM 5, pág. 9.
- *Estatística, portugueses e computadores*, Raúl de Carvalho, AP 86, pág. 82.
- *Estatística no ensino secundário: uma oportunidade para renovar*, Cândida Barros, Conceição Mesquita, Fátima Cerqueira, Helena Margarida e Paulo Abrantes, AP 86, pág.82.
- *Gobin - um programa de simulação em basic* - M. João Peres Costa, EM 3, pág. 23.
- *Recordes: Um incentivo à atitude crítica*, Conceição Mesquita, EM 2, pág. 13.

Funções e Gráficos

- *Aprender Matemática investigando*, Pedro Girão, AP 90 (vol.1), pág. 173.
- *Calculadoras gráficas no estudo das funções do 10º ano: relato de uma experiência*, Isabel Miranda e Leonor Plancha, pág. 278.
- *Caos e fractais na aula de Matemática*, Isabel Amorim, AP 94, pág. 59.
- *Dás-me um objecto, dou-te uma imagem*, Ana Paula Canavarro e João Filipe Matos, AP 87, pág. 41.
- *Estudo das funções exponencial e logarítmica com a ajuda da calculadora gráfica*, Júlia Ferreira e Rosa dos Santos, AP 95, pág. 219.

Quota de 1997

No ano de 1997 o valor da quota é de **6000$00** (4000$00, para o sócio estudante e 6500$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode optar por desconto bancário **até 28 de Fevereiro**. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número ☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐

Visa ☐ MasterCard ☐ Eurocard ☐

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ____________

____________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ____________

Nome ______________________________

______________________________ Tel: ____________

Morada ______________________________

Código Postal ____________ Ano em que começou a leccionar: ____________

Data de nascimento ______ / ______ / ______ Nível de ensino: ____________

Escola ______________________________

Localidade ____________ Distrito ____________

Categoria Profissional ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido por carta indicando as publicações pretendidas, juntamente com um cheque ou vale postal no valor das mesmas mais o porte de correio, em nome de **Associação de Professores de Matemática** para a morada acima indicada.

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7166424 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice