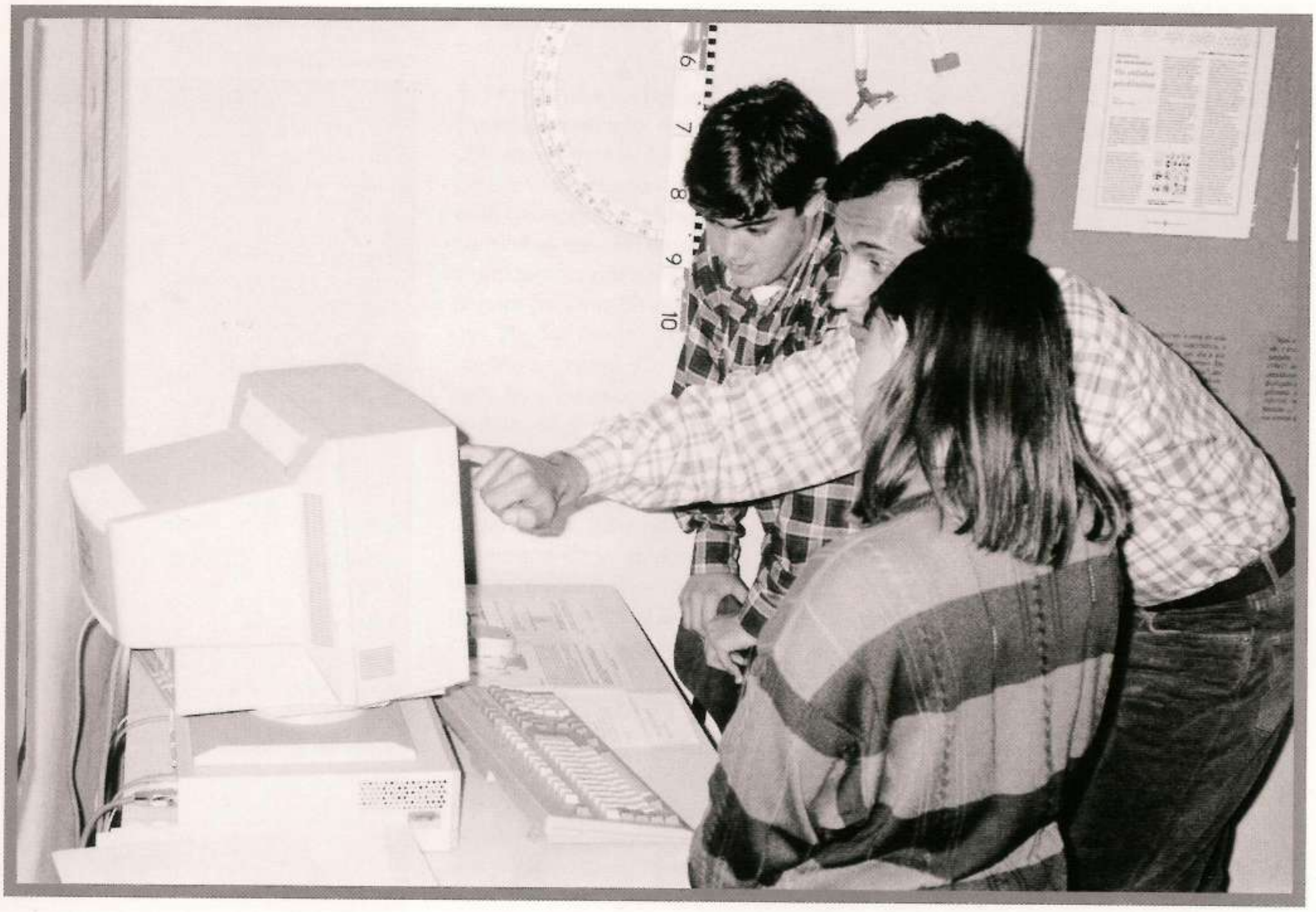
Educação e Matemática

Nº 43

Maio/Junho de 1997



A Escola Informada

Certamente que o professor já não pode, numa sociedade de informação, limitar-se a difusor de saber. Torna-se, de algum modo, parceiro de um saber colectivo que lhe compete organizar.

Livro verde para a Sociedade da Informação em Portugal

Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a capa

A fotografia da capa foi tirada a alunos e professor da Escola Secundária de Camões, em 1996, durante a semana " A caminho do laboratório de matemática ".

Neste número também colaboraram

António Bernardes, Graciosa Veloso, Guilhermina Nogueira, Hélder Martins, Helena Rocha, Jaime Carvalho e Silva, Jorge Barros, Leonor Cunha Leal, Paula Teixeira, Paulo Lourenço, Teresa Colaço, Ubiratan d'Ambrosio, Virgínia Nunes.

Data de publicação

Este número foi publicado em Junho de 1997.

Nota

nº 43
Mai/Jun
de 1997

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Adelina Precatado
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Helena Amaral
Helena Lopes
Henrique M. Guimarães
Maria José Boia

Colaboradores permanentes
A. J. Franco de Oliveira
Matemática
Eduardo Veloso
"Tecnologias na Educação Matemática"
José Paulo Viana
"O problema deste número"
Lurdes Serrazina
A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa
História e Ensino da Matemática

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Tiragem
4200 exemplares

Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out, Nov/Dez

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Esc. Sup. de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos — 1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424
e-mail: apm@mail.telepac.pt

As duas faces da escola

Paulo Abrantes

1. Numa recente deslocação ao Norte, em conversa com alguns professores, fiquei a saber que, em várias zonas do país, a *moda* já não é ter um mas sim dois explicadores de Matemática: o primeiro para explicar a teoria e o segundo para ensinar como se fazem os exercícios. Não sei até que ponto esta prática está generalizada. Mas não deixa de ser impressionante que exista um sistema paralelo à escola, desenvolvendo-se de acordo com as suas próprias regras, considerado *natural* por muitos dos envolvidos (incluindo os pais dos alunos que pagam os seus custos) e tendo como actores, frequentemente, professores que nunca têm tempo para actividades escolares fora do seu concentrado horário semanal. Confesso que me incomoda que esse sistema se expanda, ao lado de uma escola onde os apoios pedagógicos funcionam precariamente e muitas vezes sem despertar qualquer entusiasmo.

Há poucos dias, um professor dirigiu-se a um centro informativo do Ministério e pediu o novo programa do secundário. A funcionária, com vontade de ser útil, sugeriu que, provavelmente, ele não queria o programa mas sim uma colecção de pontos de exame ou a prova modelo. Realmente, quem é que quer um programa havendo manuais e colecções de testes à venda? Ainda há menos de um ano, quando o Ministério elaborou orientações para a gestão dos programas, as editoras apressaram-se a protestar, não porque questionassem o conteúdo das orientações mas, no fundo, porque a medida poderia prejudicar a imagem de "programa oficial" dos seus manuais.

2. Também recentemente, visitei uma escola onde decorre um projecto de um currículo alternativo. Falando com professores e alunos, percebi algumas implicações do trabalho que os professores realizam com uma turma de 15 alunos, todos com experiências de sucessivas repetências no 5º ano provocadas por modos de vida que pouco passam pela escola. Conseguir que estes alunos se reintegrem na escola e façam aprendizagens significativas requer um enorme esforço em termos não apenas de concepção curricular, discussão e persistência mas também de predisposição para conviver com situações muito difíceis e enfrentá-las. Duas horas de redução, rapidamente gastas numa parte das reuniões que fazem, não chegam a ser uma compensação para o acréscimo de trabalho e de pressão que a situação acarreta.

Pode-se argumentar que este tipo de trabalho faz parte da profissão. Na verdade, o professor não é um técnico que debita conhecimentos numas salas de aula mas antes um profissional que identifica problemas educativos e assume um papel activo na sua resolução. Porém, nas condições difíceis em que trabalham, ao lado daqueles que fogem das situações que obrigam a passar muitas horas na escola, o profissionalismo destes professores — que é, felizmente, extensivo a outros tipos de problemas e outras escolas — não deixa de ser algo que vale a pena sublinhar.

3. Quando falamos da escola, estamos a referir-nos a quê? À escola onde os professores procuram encontrar respostas para os problemas dos seus alunos e orientações curriculares adequadas para as suas aulas? Ou à escola das colecções de pontos e das explicações, onde os programas pouco importam e os apoios são uma chatice?

A nossa escola tem duas faces. Resta saber como reagimos a isso. ■

Debate

Diversificar o programa do secundário? Porquê? Como?

O programa de Matemática do ensino secundário deveria ser, de algum modo, diversificado para diferentes tipos de alunos? Porquê? Em que sentido deveria ser feita a diversificação?

Esta é uma questão que nos preocupa a todos desde há muito tempo e que volta a ganhar actualidade no momento em que o programa "ajustado" do 10º ano vai entrar em vigor e em que a revisão curricular parece ser um tema central da política educativa.

Talvez haja acordo em torno da ideia de que alguma diversificação é necessária mas os objectivos de uma tal medida e o sentido que ela deve tomar estão muito longe de ser claros e consensuais.

Educação e Matemática abre neste número um debate sobre o problema, publicando respostas à questão acima formulada que nos sejam enviadas. Trata-se de uma discussão genuína, sobre um problema que não é simples e em que ninguém tem certezas. Reflectir sobre os pros e os contras de diferents cenários que poderão ser propostos é o propósito central desta iniciativa.

Começámos por pedir três respostas. Agora, esperamos que elas suscitem a manifestação de outras opiniões.

Como funciona o sistema actual?

O ensino secundário regular é composto por duas vertentes: os cursos predominantemente orientados para a vida activa (CSPOVA) e os cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos (CSPOPE). Os alunos poderão prosseguir estudos superiores desde que tenham completado o 12º ano de qualquer destas vias e tenham feito os exames das disciplinas específicas exigidas para o curso respectivo.

Os CSPOPE estão divididos em quatro agrupamentos:

(1) estudos científico-naturais;
(2) estudos artísticos;
(3) estudos económico-sociais;
(4) estudos humanísticos.

Um aluno, tendo concluído o 4º agrupamento, pode (por exemplo) candidatar-se a Medicina desde que faça os exames de Biologia e Química (que, tal como a Matemática, não integravam o seu plano de estudos do secundário).

Actualmente, há um programa único tri-anual de Matemática e um programa anual de Métodos Quantitativos. Os alunos do 1º e do 3º agrupamentos têm a primeira destas disciplinas; os do 4º agrupamento têm a segunda e os do 2º agrupamento podem optar por uma delas.

A flexibilidade é positiva mas o sistema pode ser melhorado

Relativamente às duas vias do ensino secundário (CSPOVA e CSPOPE), sou favorável a uma diversificação dos programas em muitas das disciplinas e também na disciplina de Matemática. Os alunos que frequentam os cursos orientados para a vida activa, têm expectativas diferentes sobre a sua entrada no mercado de trabalho e têm necessidades curriculares diferentes daqueles que frequentam cursos orientados para o prosseguimento de estudos. Com o argumento de que se pretende que os alunos oriundos dos CSPOVA tenham acesso ao ensino superior em igualdade de circunstâncias com os outros, lecciona-se o mesmo programa nas disciplinas que se consideram nucleares, entre elas a Matemática. Esta opção faz com que muitos alunos não compreendam o sentido do que andam a estudar, o insucesso em Matemática aumenta, muitos alunos abandonam a escola, outros "arrastam-se" durante vários anos pela escola para "fazerem a Matemática", não entram no mercado de trabalho e também não entram nas Faculdades ou nos Institutos Politécnicos.

Caso fossem diversificados os programas de Matemática de acordo com a divisão entre CSPOVA e CSPOPE, aos alunos provenientes da primeira destas vias que desejassem no final do 12º ano prosseguir estudos, deveria ser garantido um ano de preparação durante o qual se leccionariam as matérias necessárias para que os alunos ficassem em condições de igualdade de acesso ao ensino superior, relativamente às matérias requeridas para exame.

Muitos dos alunos que ingressam no 10º ano na via CSPOPE não têm qualquer ideia da área que gostariam de escolher. Não porque não tenham tido informação suficiente, mas simplesmente porque a *escolha* e a *decisão* são tarefas difíceis. Alguns, acabam por escolher pela negativa: "...não quero Matemática, escolho o 4º agrupamento"; "...não quero Biologia, não escolho 1º agrupamento"; "...não quero Física, escolho o 2º agrupamento"; etc. Outros, que inicialmente pareciam só hesitar entre dois ou três cursos, mudam a meio do seu percurso escolar e fazem uma opção no final do 11º ano ou no 12º de que nunca tinham falado até então. Estas mudanças são viáveis e fazem-se sem grandes conflitos, porque nas disciplinas comuns aos vários agrupamentos é leccionado o mesmo programa e por isso, na maioria dos casos, uma mudança não muito radical relativamente à escolha inicial não acarreta consequências nenhumas. Noutras situações de opções muito diferentes relativamente às opções iniciais, os alunos terão que estudar uma ou duas disciplinas a mais, correspondentes às específicas dos cursos a que se desejam candidatar.

Este sistema não me parece mau, mas penso que poderia ser melhorado. Defendo que o sistema ganharia se a disciplina de Matemática, em vez de ser trianual, fosse bianual. No 10° e 11° anos o programa seria o mesmo em todas as áreas dos cursos orientados para o prosseguimento de estudos. No 12° ano, haveria então a possibilidade de se optar por programas diferenciados de Matemática, que poderiam corresponder a cargas horárias diferentes ou haveria mesmo a possibilidade de não ter Matemática. Seria um sistema semelhante ao da disciplina de Físico-Química que é terminal no final do 11° ano, podendo no 12° ano os alunos optar por ter Física ou/e Química ou nenhuma delas.

Paula Teixeira
Amadora

Diversificar sem confundir nem limitar as opções

O sistema educativo português é consideravelmente rígido sendo caracterizado por vias mais ou menos únicas e, quando há alguma diversificação, há dificuldades reais para uma mudança de rumo.

A Matemática é uma disciplina em permanente expansão onde as áreas clássicas se reforçam e diversificam, onde novas áreas vão aparecendo, como os Sistemas Dinâmicos, a Teoria dos Algoritmos ou a Matemática Experimental, onde áreas mais ou menos esquecidas ganham novo fôlego, como é o caso da Teoria de Números. A Matemática mais elementar também se alarga de modo considerável pelo que se perspectiva que não será possível ensinar tudo o que é importante e elementar na escolaridade básica ou secundária. Que Matemática ensinar então? Escolher a Matemática mais clássica parece ser uma opção pouco defensável, mas escolher a Matemática contemporânea não parece ser mais defensável. Mesmo a escolha de um currículo que insista mais nos métodos do que nos conteúdos se verá em sérias dificuldades para fazer as suas escolhas. O ideal seria escolher a Matemática mais representativa em termos de conteúdos, métodos e aplicações. Se é verdade que apareceram algumas propostas inovadoras desse tipo, como os materiais desenvolvidos pelo consórcio COMAP, não parece que tais propostas se enquadrem bem no nosso sistema em que se pretende satisfazer dois tipos de alunos, aqueles que terminam a sua formação escolar com o ensino secundário e aqueles que continuam para uma formação superior.

Assim penso que será útil uma diversificação do ensino da Matemática a nível do ensino secundário, quando se considera adequado que os alunos comecem a estudar matérias diferentes orientados para diferentes tipos de especialização, seja para finalização de estudos, seja para prosseguimento de estudos. Uns, da área científico-natural, deveriam estudar mais Matemática que os outros, desde um estudo alargado de funções e geometria até às probabilidades e estatística, sem esquecer alguma Matemática contemporânea e os métodos numéricos (para isso necessitando nunca menos de 6 horas semanais). Penso que todos os agrupamentos deveriam ter uma disciplina de Matemática não necessariamente com o mesmo programa ou a mesma carga horária; por exemplo, os da área humanística deveriam estudar mais Matemática discreta e talvez, estudando a Matemática de uma forma diferente, ligando-a à história e à filosofia, não aparecessem tantas imagens aterrorizadoras e deformadas da Matemática (para o que bastariam umas 3 horas por semana). Entendo que é possível fazer esta diversificação de modo que no 10° ano a diferença seja pequena ou mesmo nula de modo a permitir que um aluno mude de agrupamento logo no 10° ano sem perder um ano de estudos.

No caso particular da Matemática entendo que a diversificação se deveria ainda fazer num outro sentido: criando uma "Matemática 0" no 10° ano para aqueles alunos que progridem para o Ensino Secundário sem ter a formação anterior necessária (são inúmeros os casos de alunos com nota de 0 e 1 no 9° ano e que escolhem agrupamentos com a disciplina de Matemática no Ensino Secundário com débeis condições de sucesso na disciplina). Essa nova disciplina permitiria que os alunos tivessem uma hipótese séria de recuperar as lacunas anteriores. No mesmo espírito acho que se devia criar uma "Matemática bis" para os alunos que, tendo terminado o ensino secundário por um agrupamento com menos Matemática, pudessem candidatar-se nas melhores condições ao ensino superior a cursos com mais exigência matemática.

Jaime Carvalho e Silva
Coimbra

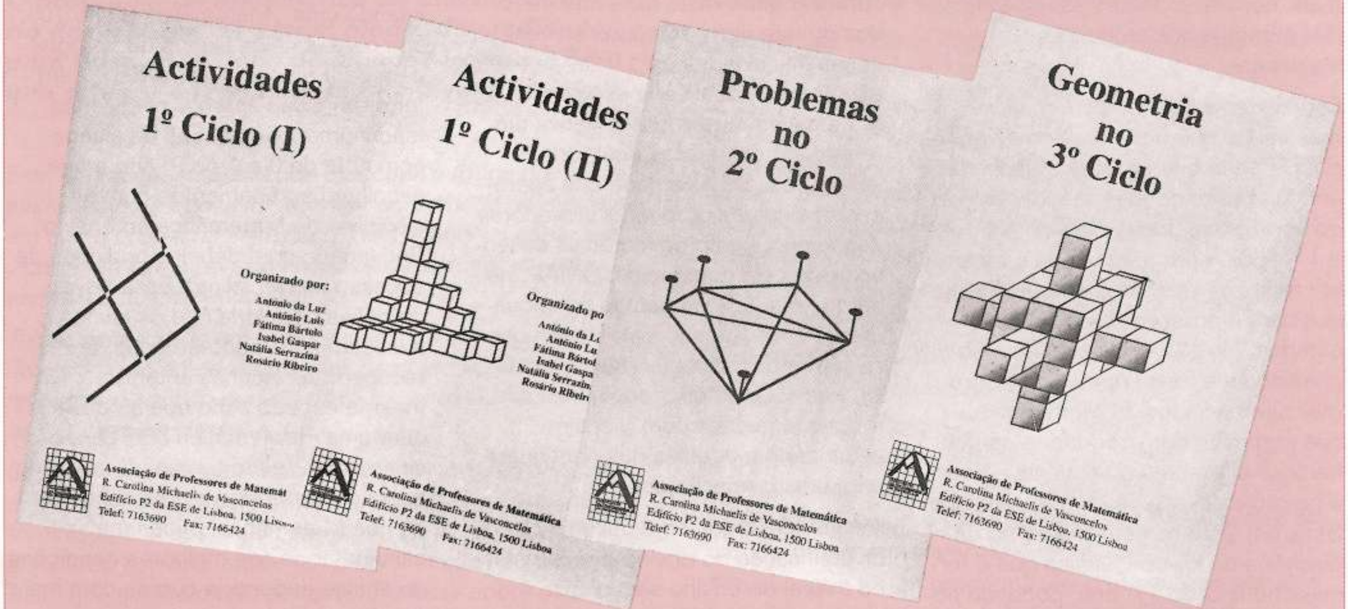
A diversificação é um falso problema

Da experiência que tenho em ensinar Matemática a este nível de ensino, a qual já tem uma duração de 6 anos, estou convencido que não é necessário diversificar mais os programas. Estes, tal como estão, deveriam motivar qualquer aluno a aprender Matemática.

É necessário ter sempre em mente, quando se ensina, que a Matemática é um corpo de conhecimentos altamente abstrato e que por vezes as técnicas utilizadas para esse ensinamento nem sempre são as melhores. O programa em vigor, e o aprovado, deixam espaço de manobra para que o professor, dentro e fora da sala de aula, e mediante os alunos que tem à sua frente, consiga dar mais enfase a um determinado assunto em detrimento de outro.

(continua na pág. 12)

NOVAS Publicações APM

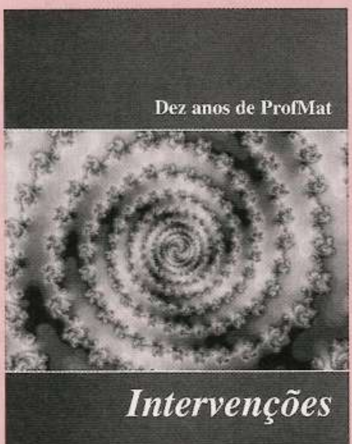


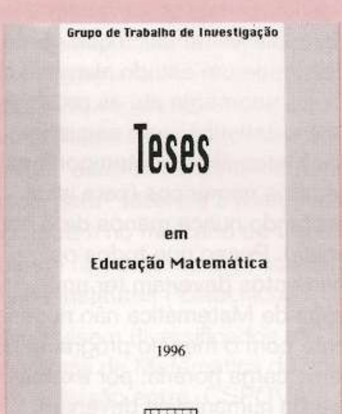
Actividades
1º Ciclo (I)
Preço1000$00

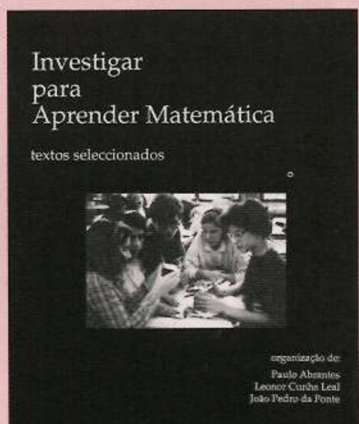
Actividades
1º Ciclo (II)
Preço1200$00

Problemas no 2º Ciclo
Preço1000$00

Geometria no 3º Ciclo
Preço1000$00







Dez anos de ProfMat
Intervenções
Preço1000$00

Teses em Educação Matemática
Preço 800$00

Investigar para Aprender Matemática
Preço1100$00

Exames: uma via a prosseguir?

Leonor Cunha Leal

As discussões sobre os exames estão muitas vezes associadas à confrontação de diferentes concepções, por vezes apenas implícitas, a respeito não só da avaliação mas também da própria Escola e até da Educação. Neste texto, a autora procura explicitar alguns dos pressupostos que estão por detrás de posições usuias sobre os exames, apresentanto, naturalmente, os seus pontos de vista. Trata-se de um tema muito polémico que importa discutir de um modo profundo mas sereno. A própria autora convida os leitores a apresentarem contra-argumentos, a aprofundarem os que aqui se adiantam ou a acrescentarem outros não considerados.

O ressurgimento dos exames no final do 12º ano, veio recolocar a discussão sobre a sua pertinência, adequabilidade e significado pedagógico e educacional no Sistema Educativo Português. Esta problemática está longe de ser uma questão simples, nem tão pouco é possível discuti-la sem que emerja todo um conjunto de princípios e pressupostos sobre os quais assentam as nossas concepções sobre a Educação, a Escola e a Avaliação, quer do desempenho dos alunos, quer do Sistema Educativo. No entanto, pela importância e sobretudo pelas implicações que a existência de uma avaliação externa determinam no próprio sistema, não podemos, nem devemos, adiar por mais tempo esta discussão. Temos que nos disponibilizar para confrontar ideias, ouvir opiniões distintas das nossas, e reflectir sobre elas. Em suma, chegou o momento de criarmos um *forum* de discussão para aos poucos podermos ir adquirindo uma posição baseada no conhecimento e análise da situação. É este o objectivo que me levou a escrever este artigo, que começa por questionar o pressuposto subjacente que leva certas pessoas a considerarem a utilidade dos exames, seguindo-se-lhe uma análise crítica sobre algumas das funções que lhe são habitualmente atribuídas e, por último, a identificação de alguns possíveis enviesamentos que os exames podem introduzir no sistema escolar.

Pela necessidade de se iniciar uma discussão alargada, e consciente de que as minhas opiniões não encontrarão necessariamente consenso, desde já convido todos aqueles que o desejarem, quer a apresentar contra-argumentos, quer a desenvolver e a aprofundar alguns daqueles que serão em seguida por mim apresentados, ou ainda a acrescentar outros não considerados.

Pressuposto base: Medir saberes

O pressuposto onde assenta todo o tipo de avaliação sumativa, em particular, qualquer exame, é o de se acreditar que é possível de algum modo medir saberes. É assim que toma sentido, por exemplo, dizer-se que os alunos de hoje terminam o Ensino Secundário sem saberem nada, isto é, que o seu saber está reduzido a um valor muito perto do zero (numa escala de 0 a 20), ou ainda que devem existir outros exames, ao longo da escolaridade básica, de forma a ser possível saber-se mais cedo o conhecimento dos alunos.

Esta ideia de avaliação como processo de medida remonta aos finais do século passado, início deste. É o período psicométrico, designação seguida por vários autores (Romberg, 1987; Kilpatrick, 1991; Cardinet, 1992; Pinto, 1992). Começando-se por importar a noção de medida da Física para a Psicologia, nomeadamente para medir o coeficiente de inteligência (QI), passa-se em seguida para a área da Educação, em particular, no que respeita ao desempenho dos alunos. Desde muito cedo, contudo, se levantaram múltiplos problemas — enquanto na Física se medem características que permanecem ao longo do tempo, na educação pretende-se que o saber seja algo em constante evolução e crescimento; para se obter uma boa estimação da medida devem ser feitas várias medições, controlando-se diversas variáveis, ora não faz sentido sujeitar o aluno mais do que uma vez à mesma prova, nem tão pouco é possível manterem-se constantes a sua disposição, condições físicas, ...; é necessário dispor-se de uma medida padrão, existe uma escala sim, mas o seu significado varia de pessoa para pessoa.

Procura-se então melhorar o processo de atribuição de notas. A ênfase é assim posta na medida e nos processos que a produzem - testes e exames - procurando-se resolver a questão da objectividade. É o período do desenvolvimento da Docimologia, que mais tarde vem dar origem à Docimologia Experimental - o estudo da construção de instrumentos fiáveis e válidos passa então para o da natureza do processo seguido pelo avaliador. No entanto, o avolumar de dados produzidos no âmbito destes estudos docimológicos evidencia a aleatoriedade dos processos de "medida do saber", e reintroduz a questão da subjectividade da avaliação. Pode mesmo dizer-se que os resultados chegados são no mínimo arrasantes. Recorde-se, por exemplo, a conclusão de Piéron (1963, in Noizet e Caverni, 1985), não revelada durante vários anos, que afirmava que para predizer a nota de um candidato num dado exame, valia mais conhecer o examinador do que o candidato. Assim, procura-se desenvolver outras vias, eventualmente mais promissoras. É, por exemplo, o caso da Pedagogia por Objectivos, a passagem da avaliação normativa para a criterial ou a introdução da função reguladora da avaliação. Embora em termos teóricos se possam identificar mudanças, a concepção de avaliação como processo de medida continua presente nas práticas ao longo do tempo (para informação mais detalhada, ver Leal, 1992).

Consideremos, por instantes, que através da avaliação se pode medir de facto saberes, mesmo que de forma pouco rigorosa. Uma nova questão se levanta: como sabemos que os exames medem aquilo para o qual foram feitos, isto é, qual o grau de validade destas provas? Não se está a questionar a competência dos avaliadores, mas sim o processo seguido na elaboração dos exames. Uma pessoa ou várias elaboram um conjunto de perguntas, passam-nas a uma versão apresentável e aplicam-nas aos alunos. Não se procede a uma validação do tipo de itens, não se analisam as possíveis interpretações feitas por alunos do tipo daqueles a quem as questões são dirigidas, não se estudam as causas de eventuais erros, as implicações que esta ou aquela formulação das questões ocasiona, quais as que estão embebidas de conhecimentos de contexto que poderão tornar a situação com significado para alguns alunos e para outros sem qualquer sentido, quais as razões que constituem obstáculos a uma resposta correcta, quais os efeitos de um ou outro nível de dificuldade, etc.

Em suma, o que aqui defendo é um processo de construção por etapas das provas a nível nacional, onde professores e alunos no terreno devem ser chamados a darem o seu contributo. Se é verdade que este processo deve ser o seguido em toda e qualquer situação, se tivermos em conta que não existe em Portugal qualquer banco de itens, e se ignora quais são as práticas actuais (é urgente a investigação incluir na sua agenda esta temática), este procedimento é ainda mais premente e indispensável. Sem ele, corremos sérios riscos de montar um complexo e dispendioso dispositivo de exames, para dispormos, no final, de um conjunto de resultados sobre os quais não é possível tirarem-se conclusões com um mínimo de rigor e correcção.

Mesmo que as duas ordens de limitações anteriormente referidas não fossem por si só suficientes para porem em causa a fé cega nos exames, existe ainda uma terceira questão. Diz ela respeito às limitações inerentes a toda e qualquer prova escrita feita em tempo limitado e individualmente. É por demais evidente que existem muitos aspectos considerados como pertinentes e indispensáveis, no que se entende hoje que é, nomeadamente, saber Matemática, que ficam de fora e não podem por esta via ser testados. Só a título de exemplo, refira-se que decidir se um aluno é ou não um bom resolvedor de problemas, não passa por colocá-lo numa situação de tempo limitado. Não importa se ele é mais ou menos rápido a resolver um problema, o que está em causa é se ele tem capacidade para enfrentar uma nova situação, se é capaz de desenvolver uma estratégia por si escolhida, se a valida e se, caso ela se revele como inadequada, é capaz de recomeçar o processo. Ou como testar se o aluno tem capacidade para ouvir os outros, argumentar e defender as suas ideias, se está a trabalhar individualmente? Ou ainda como testar a sua capacidade de comunicação oral se a prova é escrita?

Assim, é chegada a hora de abandonarmos esta crença não fundamentada racionalmente, mas apenas justificável pela necessidade que temos de acreditar que é possível determinar de uma forma justa e objectiva uma medida do saber do aluno. Por um lado, o reconhecermos a complexidade da avaliação cria-nos decerto maiores angústias e inseguranças mas, por outro, permite-nos, igualmente, disponilizarmo-nos para a procura de vias alternativas mais promissoras e pedagogicamente mais adequadas.

Argumentos a favor dos exames

Serão apresentados, em seguida, alguns dos argumentos que têm servido para defender a necessidade e pertinência dos exames. Para cada um deles será feita uma análise crítica e apresentados argumentos que, segundo a minha interpretação, tornam aqueles pouco ou nada pertinentes.

Hierarquizar

É inquestionável que uma das funções primordiais de qualquer avaliação sumativa, seja ela interna ou externa, é a de diferenciar os alunos, colocá-los segundo qualquer escala de valores, apontando os "bons", os "médios" e os "maus" alunos, de acordo com um conjunto de critérios implícitos ou explícitos.

Esta função não apresenta, contudo, nenhum aspecto pedagógico, isto é, não contribui de nenhum modo para a aprendizagem do aluno, mas sim tem uma função social, quer esta se dirija para informar os pais, a escola, o mundo do trabalho ou a sociedade em geral.

Mas pergunta-se: o que ficamos a saber sobre o aluno a partir de um único valor numérico? Será que ficamos a saber quais são as capacidades que tem mais desenvolvidas, quais são as suas principais competências, em que é que tem mais dificuldade, quais os saberes que domina e quais são aqueles que não aprendeu ainda? Não é assim de estranhar que, por exemplo, quando uma empresa quer recrutar um recém estudante, o processo de selecção não passa na maioria dos casos pela escolha daquele que teve melhor classificação final no exame, mas sim por submeter os candidatos a entrevistas e a outros tipos de situações de forma a conseguir respostas às questões do tipo das atrás anunciadas. Deste modo, a eficácia de uma hierarquização como função social é no mínimo questionável.

Note-se aliás, que justificar a existência de exames pela necessidade de diferenciação dos alunos é por si só pouco sustentável pois, mesmo sem a sua existência, os alunos continuam segundo o actual sistema educativo português a serem hierarquizados através da avaliação sumativa interna, considerada explicitamente nos dois sistemas de avaliação do desempenho dos alunos, do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

Promover a equidade

Outra das razões também usualmente apresentadas para defesa da existência de exames é o facto destes introduzirem uma certa justiça, uma vez que todos os alunos são sujeitos a uma mesma situação.

Este argumento apresenta, na minha perspectiva, dois pontos fracos marcantes que anulam irremediavelmente esta "boa causa".

Por um lado, parece ignorar-se que a população a quem se vai aplicar o mesmo é já de si, e à partida, distinta por duas ordens de razões: porque é constituída por seres humanos que são necessariamente diferentes, quer nas suas características, quer nas suas potencialidades próprias e porque a própria Escola lhes proporcionou anteriormente experiências escolares igualmente diversificadas (condições escolares múltiplas, professores com diferentes perspectivas quanto ao que é ensinar, aprender, quais são os objectivos educativos e, em particular, os da disciplina, nomeadamente da Matemática, ...). Ora, querer aplicar o mesmo a um grupo diferenciado, não introduz qualquer tipo de igualdade, mas antes pelo contrário acentua as diferenças. Assim, o que à primeira vista poderia ser encarado como uma intenção nobre corre o risco de, numa segunda análise, se tornar num cinismo encapotado ou, no mínimo, numa situação que traduz uma grande irresponsabilidade.

Por outro lado, parece igualmente ignorar-se que por muito complexo que tenha sido o dispositivo de exames montado não há fuga possível aos efeitos provenientes de causas múltiplas. "A forma como uma prova é feita, aplicada e corrigida é tão determinante como o seu conteúdo." (Perrenoud, 1986, p.9). Em particular, atenda-se ao enviesamento produzido pelos correctores, denunciado há mais de uma vintena de anos (Piéron, 1963). Se tal não fosse ainda actualmente uma realidade, não se explicaria o número elevado de pedidos de revisão de provas atendidos, que acontecem anualmente no nosso país.

Em última instância, poder-se-ia defender que o facto de sujeitarmos todos os alunos a uma mesma situação poderia servir para introduzir um factor de correcção de forma a uniformizar critérios distintos utilizados em diversas instituições escolares. Tal, contudo, também não é o caso, uma vez que, ao contrário do que acontece noutros países, não são considerados índices de normalização na determinação da média final, mas sim aplica-se uma média ponderada simples aos valores obtidos, quer na avaliação sumativa interna, quer através dos exames.

Garantir a qualidade do ensino

Para que algo possa garantir qualquer coisa, tem necessariamente de intervir nessa coisa de alguma forma. Acontece, contudo, que tal não acontece com os exames.

Entendemos como um ensino de qualidade aquele que é capaz de atingir os objectivos para si propostos, isto é, que não só cria as condições favoráveis, mas que igualmente é capaz de promover a aprendizagem de saberes, desenvolver certas capacidades e atitudes nos alunos. Ora, de que forma um exame que acontece no final do processo pode intervir nesse mesmo processo? Estamos perante um problema temporal intransponível.

Poder-se-á, no entanto, argumentar, que o exame não é útil para o aluno a quem aquele foi aplicado, mas sim aos alunos vindouros. Surge então um novo conjunto de questões: que tipo de análise se faz às respostas dadas pelos alunos de forma a que aquele momento possa de algum modo ser rentável para o futuro educativo? São detectados desajustes na elaboração das perguntas e nas abordagens desenvolvidas pelos professores durante o processo de ensino/aprendizagem? Faz-se um levantamento das principais dificuldades dos alunos e formulam-se possíveis hipóteses explicativas? Detectam-se razões subjacentes para os erros cometidos?

No que diz respeito à realidade portuguesa, o que se poderá dizer é que se faz apenas uma leitura simplista e muitas vezes destorcida, de que os alunos não sabem nada e que o ensino está um caos! As razões explicativas desta leitura são variáveis, dependendo muito mais de quem as faz e dos seus objectivos imediatos do que de qualquer análise mais profunda e reflectida da situação.

Assim, e de acordo com o exposto, não encontro fundamento, nem para o presente, nem para o futuro, para a

defesa dos exames enquanto estratégia que garanta um ensino de qualidade.

Dar credibilidade ao sistema

Existe uma ideia, quem sabe defendida por muitos, que os exames são a forma mais adequada de legitimar socialmente o sistema educativo. Esta credibilidade está directamente associada à ideia de procura de objectividade, isto é, que a avaliação passe a assumir um estatuto de operação técnica segura, "à prova" daqueles que a realizam. Esta procura de objectividade, da verdade única e escondida, que os humanos insistem em perseguir e que lhes dá uma sensação de segurança *malgré tout* levanta diversas ordens de questões.

Recorrer a uma avaliação externa para testar se aquilo que é feito nas escolas é correcto, traduz uma desconfiança à partida nos diferentes agentes educativos. É como se se partisse do princípio que há desvios, mesmo antes de eles acontecerem. Estamos perante uma filosofia de um ensino centralizado em que os decisores políticos encaram todo o agente de ensino como um potencial mau profissional, incompetente e irresponsável. Para além disso, esta posição revela igualmente o assumir que o estado não tem meios ou não sabe como detectar casos particulares desviantes. Logo, não só passam um atestado de incompetência aos outros, como também a si próprios.

Procurar esquecer que a avaliação é uma actividade humana, passando o actor para segundo plano, permite-nos encará-la como um processo frio, desprovido de sentimentos, dependendo de um conjunto de técnicas bem definidas. Separar a avaliação do avaliador, traduz mais uma vez a concepção de avaliação como a determinação de uma medida. "Contudo, este avaliador que queremos esquecer, lembra-se de nós. Porque o avaliador, felizmente, não faz outra coisa do que se enganar" (Chevallard, 1989, p. 19). Ora, é em situações deste tipo que ofendendo a nossa racionalidade, todo a base desta teoria sofre um forte abalo. Não precisamos de recuar muito para ilustrar o que acabei de afirmar. Recorde-se o sem número de artigos publicados nos jornais deste último Verão, que exploraram de múltiplas formas os diferentes desvios que ocorreram durante a realização dos exames do 12º ano. Não fique, contudo, a ilusão de que se o dispositivo de exames tivesse sido outro, tivesse havido mais cuidado, fosse mais elaborado e complexo, tal não teria acontecido (aliás, este governo teve a preocupação de, desde o meio do ano lectivo, começar a preparar a época de exames, enviando para as escolas orientações para a gestão de programas e provas tipo, constituindo júris nacionais para a elaboração e júris regionais para a sua correcção, formando um Conselho Nacional de Exames, prevendo a visita de inspectores às escolas e sanções e punições para as escolas e professores, caso se detectassem irregularidades, ...). Qualquer que seja o dispositivo montado existirão sempre desvios, uma vez que a avaliação, neste caso, os exames, são realizados por pessoas, não existindo de facto uma "avaliação sem sujeito" (Chevallard, 1989).

Fica a questão de saber se à força de tanto se procurar convencer a sociedade, através de um processo dito objectivo, de que o seu dinheiro está bem aplicado, não acaba pelo contrário exactamente de se provar o contrário, isto é, se "não se vira o feitiço contra o feiticeiro"!

Cumprimento dos programas

Uma razão já anteriormente apontada para defesa das provas globais, e actualmente para a realização de exames, está associada à ideia de que a existência deste tipo de provas leva os professores a serem mais controlados com a gestão do tempo e a "cumprir o programa".

Saber o que se entende por cumprir o programa não é uma questão nova. Por exemplo, esta foi uma problemática muito debatida quando da introdução dos novos programas, nomeadamente quando aparecem explicitados, de uma forma inequívoca, objectivos relativos aos conhecimentos, às capacidades e às atitudes. No entanto, parece que este debate não deixou muitos frutos pois quando se apresenta como potencialidade dos exames exactamente o "cumprir o programa", estamos necessariamente a estabelecer uma quase equivalência entre cumprir o programa e a leccionação de conteúdos. Enfatiza-se o saber, desvaloriza-se o saber fazer e o ser. O que resta, por exemplo, nos programas de Matemática, no que respeita à resolução de problemas, ao conceito de que "saber Matemática é fazer Matemática" (NCTM, 1991), ou ao desenvolvimento nos alunos de uma atitude positiva face à Matemática? Nenhum destes aspectos pode ser avaliado num exame do tipo do do 12º ano. Logo, a influência que este possa determinar no cumprimento do programa é nula.

Mais uma vez, se levanta uma questão ética em relação aos alunos. Supor que, pelo facto de haver exames, todo o professor irá leccionar os conteúdos programáticos, poderá fazer com que certos alunos não só não trabalharam ao longo de todo o ano lectivo todos os conteúdos, como vão ser sujeitos a uma prova (para si de extraordinária importância pelas implicações da classificação que obtiverem) onde serão testados sobre assuntos que desconhecem. Estes alunos serão, assim, duplamente prejudicados.

Por último, e talvez ainda mais importante, o argumento de defesa da existência de exames que estamos a discutir, tem subjacente um grave erro conceptual. Admite-se implicitamente que a avaliação do desempenho dos alunos e a avaliação do sistema é uma e a mesma coisa, ou que a segunda só poderá ocorrer através da primeira. Porque encontrar um meio que sirva de elemento de pressão para se "cumprir programas" não é mais do que uma componente entre outras para garantir um ensino de qualidade, no que ele tem de controlo do papel do professor. Ora, confundirem-se estas duas modalidades de avaliação revela um desconhecimento que não deveria perdurar. Embora Portugal tenha uma fraca tradição na avaliação aferida, conhecem-se já alguns estudos neste sentido — por exemplo, quando da reforma do Ensino Unificado (Pedro et al., 1981), ou, mais recentemente, quando da experimentação dos Novos Programas relativos à reforma ainda em curso (por exemplo, IIE, 1990, 1991, 1992, 1992a; Ponte et al., 1991; Matos et al., 1993). Qualquer destes exemplos mostra bem que uma avaliação aferida não tem de passar pela existência de exames e, acima de tudo, a existência destes não deve ser justificada como forma para que aquela ocorra.

Herança cultural

A análise que tem vindo a ser feita leva-nos a procurar outras razões que poderão estar na base da convicção que muitos ainda têm da pertinência e adequabilidade de exames. Poderíamos pensar que a tradição da sua existência ao longo dos tempos é tão forte no nosso país que oferecemos, de facto, resistência à mudança. Mas se atendermos à nossa história recente, este também não parece ser um argumento consistente.

Portugal levou cerca de 15 anos a abolir todos os exames que então existiam desde o Ensino Primário ao final do Ensino Secundário (em 1968, iniciou-se este processo, sendo o primeiro exame a desaparecer o da Admissão aos Liceus; em 1983 foi concluído o ciclo, acabando-se com os exames finais do 11º e 12º anos, permanecendo apenas o Exame de Aferição - ver Leal, 1991). Assim, tudo leva a crer que se desenvolveu um processo consciente, pensado e determinado de forma a acabar com uma prática que remonta ao século XIX.

Nem tão pouco pretendemos admitir que devido à faixa etária dos decisores políticos, estes não sejam suficientemente informados e responsáveis que procurem o retorno aos seus "bons velhos tempos".

Efeitos de adaptação

A existência de avaliação externa - exames - no Sistema Educativo introduz na maior parte dos casos desvios no próprio sistema. "A avaliação tem um impacto directo quer naquilo que se ensina, quer no modo como se ensina" (Romberg e Zarinnia, 1987, p. 153). É de facto difícil ignorar-se a pressão social, em particular a exercida pelos pais e encarregados de educação, sentida a diferentes níveis na escola. A importância dos exames, traduzida nos seus resultados, é ainda hoje socialmente significativa. Vejamos, em seguida, quais os efeitos que os exames acarretam aos diferentes níveis na escola.

Na escola

A ideia socialmente defendida que a escola é tanto melhor quanto melhores forem os resultados dos exames dos seus alunos é demasiado forte para que se possa ficar indiferente. Tal facto leva a que os diferentes objectivos educativos, expressos na Lei de Bases do Sistema Educativo, passem a ter diferentes níveis de importância, isto é, enfatiza-se os relativos ao prosseguimento de estudos (representando um regresso claro ao passado, a uma visão de escola que se pretende inovar), desvalorizando-se os concernantes ao desenvolvimento pessoal e à preparação para a inserção na vida activa. Em suma, e no que respeita em particular o Ensino Secundário, este deixa de valer por si só e corre o risco de ser encarado apenas como uma via a percorrer para se ter acesso a um ensino de nível mais elevado.

No professor

O efeito que a existência de exames determina a nível do professor e consequentemente no trabalho a desenvolver na sala de aula será quase inevitavelmente uma reinterpretação empobrecida dos programas. Isto é, "o sistema de avaliação clássico obriga os professores a preferirem as competências isoladas e quantificáveis às competências de nível mais complexo (raciocínio, comunicação) difíceis de serem consideradas numa prova individual de papel e lápis" (Perrenoud, 1992, p. 3). O que resta do desenvolvimento de capacidades como a resolução de problemas, a investigação e exploração de situações abertas; e de atitudes como o gosto pela Matemática e a autoconfiança para fazer Matemática?

Já ouvi invocar que o problema está na falta de tempo, na grande extensão dos programas que levam o professor a não ter tempo para trabalhar outros aspectos que não aqueles que espera que serão testados no exame. Mas será que isto é mesmo real? Será que se houvesse mais tempo, os professores iriam de facto fazê-lo ou, pelo contrário, pretenderiam aperfeiçoar a preparação dos seus alunos para o momento final do ciclo onde todos serão publicamente expostos: escola, professores e alunos?

Estamos aqui a pressupor que o professor irá optar por deixar de lado o novo programa do Ensino Secundário de Matemática e trabalhar com um outro mais limitado e reduzido. Mas se assim não o fizer? No fundo, os professores terão que se "confrontar entre respeitar o espírito da reforma ou preparar os seus alunos (...) para os exames a nível nacional. Seja qual for a sua opção, a verdade é que o aluno sairá sempre a perder" (Leal, 1993, p. 29). Algo terá de ser mudado quando um sistema coloca em alternativa os objectivos a curto prazo com os de médio e longo prazo.

No aluno

A pressão de um exame faz-se também sentir necessariamente nos alunos. Um primeiro sintoma é o de estes desvalorizarem tudo aquilo que não se identifica com as características de um saber testável numa prova. Por exemplo, são bem possíveis o desinteresse, e porventura a recusa, no desenvolvimento de trabalhos realizados em grupo, de tarefas que exigem o seu desenvolvimento ao longo do tempo e uma maior autonomia e responsabilidade por parte dos alunos. Estas provas de avaliação externa correm o risco de assumir um papel de tal destaque que "surgem aos olhos dos alunos (e mesmo talvez aos dos professores) como a verdadeira razão para se aprender Matemática" (Hilton, 1981, p. 79 in Rombreg, 1987).

Corre-se igualmente o risco de a preparação para o exame se traduzir por aprendizagens intensivas que apenas se dirigem à memorização a curto prazo, e que passado um curto espaço de tempo a nada se reduzem.

Um outro aspecto liga-se a toda e qualquer situação de diferenciação. Estamo-nos a referir à tendência destas situações privilegiarem o desenvolvimento de atitudes tais como a competitividade e o individualismo que, quando não acompanhadas por outras, exarcebam um conjunto de valores que no mínimo são questionáveis numa sociedade que se deseja ver desenvolvida.

Finalmente, e não menos importante, os alunos arriscam-se a não terem prazer no acto de aprender, isto é, a estabelecerem uma relação de perversidade com o trabalho. "O sistema de avaliação clássico favorece uma relação utilitária com o saber. Os alunos trabalham para a nota." (Perrenoud, 1992, p. 3). Este risco parece-me um desvirtuamento total de todo e qualquer objectivo educativo e a ser evitado a todo o custo, não só pelas consequências nefastas que poderão trazer ao futuro cidadão, mas também ao aluno enquanto indivíduo no presente.

Considerações finais

Reconhecer que a situação do ensino da Matemática não está bem parece ser consensual. Não é um problema obviamente deste ano, como por vezes se pretende fazer crer através de uma leitura simplista dos resultados dos exames do 12º ano, mas sim algo que tem vindo a ser reconhecido há largas dezenas de anos, quer em Portugal, quer na maior parte dos países ditos evoluídos. Note-se que os problemas da educação não se confinam à disciplina de Matemática, são bem mais gerais, o que não é de estranhar uma vez que a Escola não tem conseguido acompanhar a evolução da própria sociedade. Mas, enquanto responsáveis de algum modo pelo ensino da Matemática, é neste aspecto em particular que as nossas preocupações se concentram.

Neste contexto surge inevitavelmente a questão dos exames que, note-se, não correspondem a uma continuidade, mas sim a um ressurgimento, a um voltar ao passado. Desde 1983 que não existiam exames para conclusão de um dado ciclo de estudos (os que permaneceram tinham como objectivo o acesso ao ensino superior, isto é, tinham uma função dirigida para o futuro e não para o passado).

Vários são aqueles que defendem os exames enquanto uma componente para resolver o problema do ensino da Matemática. Como consequência de tudo aquilo que anteriormente expus, é claro que esta não é a minha posição. Mas, debrucemo-nos por alguns momentos no risco que corremos em procurar essa mesma solução através de exames com outro formato, com outras características. Se é verdade que encontrar formas alternativas para este tipo de provas poderá levar-nos a uma aproximação do que hoje se defende para o ensino e aprendizagem da Matemática, não é menos verdade que algumas das suas limitações serão sempre irremediavelmente inultrapassáveis. Qualquer que seja a prova, ela terá sempre as suas potencialidades e limitações. Podemos mudar o formato, podemos mudar as suas restrições, mas não existe qualquer instrumento ou forma de avaliação que abarque todos os aspectos relevantes do que se entende hoje que é saber Matemática. A solução não passa por encontrar um modelo ideal de exame, pois este não existe. É aliás esta a razão porque vários documentos relativos à avaliação do desempenho dos alunos insistem na necessidade de utilizar formas e instrumentos diversificados de avaliação (Cockcroft, 1982; NCTM, 1991, 1995, 1996; APM, 1991).

Para além disso, é importante ter presente que não teremos nunca acesso directo ao saber dos alunos e que qualquer que seja o instrumento de avaliação "ele fornece um écran sobre o qual se projecta o objecto avaliado - a relação do aluno como o objecto do saber" (Chevallard, 1989, p.35). Estas imagens serão sempre parciais, destorcidas, difusas, isto é, num certo sentido todas elas são tendenciosas, caricaturas mais do que retratos equilibrados (Chevallard, 1989, p. 35). Assim, pergunta-se até que ponto será razoável insistir-se numa confiança cega sobre o que os exames poderão de facto indicar e informar? Será que toda a energia, tempo e trabalho deverão ser direccionados para aperfeiçoar os exames (com todas as implicações negativas já referidas e os pressupostos enganadores subjacentes) ou se, pelo contrário, não nos devemos dirigir para a construção de um movimento comum e concertado para se encontrarem vias alternativas para que os nossos alunos possam passar de facto a aprender a fazer Matemática, a ter gosto por esta ciência, a reconhecerem o seu valor, natureza e importância?

Porque o propósito estabelecido é cooperar na criação em cada aluno do poder matemático, este conceito deve constituir a força coerciva para qualquer modelo teórico [de avaliação]. Ele é, para além disso, um conceito sobretudo qualitativo e não quantitativo" (Romberg et al., 1990, p. 29). Fica aqui o desafio: seremos nós capazes de passar da "medida obsessiva da excelência a uma avaliação ao serviço da aprendizagem" (Perrenoud, 1989, p. 3)?

Referências

APM (1991). *Avaliação: uma questão a enfrentar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cardinet, J. (1992). Vers une Pratique Évaluative Raisonnée. Prefácio de J. Veslin w O. Veslin. *Corriger des Copies.* Paris: Hachette.

Chevallard, Y. (1989). Évaluation, Veridiction, Objectivation. La relation didactique comme caprice et miniature. In *L 'Évaluateur en Révolution.* Actas do ADMEE.

Cockcroft, W. (1992). Mathematics Counts. London: HMSO.

Hilton, P. (1981). Avoiding Math Avoidance. In L. A. Steen (Ed.), *Mathematics Tomorrow*. New York: Springer-Verlag.

IIE (1990). *Relatório de Avaliação da Experimentação do Programa do 1º Ano do 1º Ciclo. Ano lectivo 1989-90*. Lisboa: IIE.

IIE (1991). *Opiniões dos Professores do 7º ano de Escolaridade acerca do Processo de Experimentação dos Novos Programas*. Lisboa: IIE.

IIE (1992). *Avaliação da Reforma: A Opinião dos Professores. 2º ciclo*. Lisboa: IIE.

IIE (1992a). *Avaliação da Reforma: A Opinião dos Professores. 3º ciclo*. Lisboa: IIE.

Leal, L. (1991). Evolução e Problemática do Sistema de Avaliação em Portugal. In H. M. Guimarães, L. C. Leal e P. Abrantes (Eds.). *Avaliação: uma questão a enfrentar*. APM.

Leal, L. (1992). *Avaliação da Aprendizagem num Contexto de Inovação Curricular* (tese de mestrado). Lisboa: APM.

Leal, L. (1993). Um Olhar sobre o Novo Sistema de Avaliação dos Alunos do Ensino Secundário. *Educação e Matemática nº 28*.

Matos, J. F., Ponte, J., Guimarães, H. e Leal, L. (1993). *A Aplicação do Novo Programa de Matemática do 11ºAno. Um Estudo de Caso*. Lisboa: IIE.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1996). *Emphasis on Assessment. Readings from NCTM's School-Based Journals*. Reston, VA: NCTM.

Noizet, G. e Caverni, J. P. (1985). *Psicologia da Avaliação Escolar*. Coimbra Editora.

Pedro, E., Leal, L., Colliander, M., Costa, M. L., Coutinho, M- L., Haglund, S. e lundgren, U. (1981). *Avaliação do Ensino Unificado. A Caminho duma Reforma do Ensino Secundário Unicado*. Lisboa: GEP.

Perrenoud, P. (1986). *Évaluation et Orientation Scolaire*. Texte d'un exposé presenté le 27 Fevrier dans le cadre du "Seminaire Orientation 5e", organisé par L'Association Vaudoise des Conseilles d'Orientation.

Perrenoud. P. (1989). Le Point de Vue d'un Sociologue. L'Évaluation entre Hier et Demain. *Coordination, nº 35*, p. 3-5.

Perrenoud, P. (1992). Les Procédures ordinaires d'évaluation, freins au changement des pratiques pédagogiques. Texto da comunicação nas jornadas "Innover ETIOU évaluer", Université de Neuchâtel, 11 de Março.

Piéron, H. (1963). *Examens et Docimologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pinto, J. (1992). Avaliação Pedagógica: um instrumento de gestão do "provável". *Formar, nº 5*.

Ponte, J., Matos, JF., Guimarães, H., Canavarro, AP. e Leal, L. (1991). *O Processo de Experimentação dos Novos Programas de Matemática - Um Estudo de Caso*. Lisboa: IIE.

Kilpatrick, J. (1991). The Chain and the Arrow. From the History of Mathematics Assessment. In *Pre-Proceedings of the ICMI Study Assessment in Mathemtics Education and its Effects*. Barcelona: April, 12th.

Romberg, T. (1987). Measures of Mathematical Achievement. In T. Romberg e D. Stewart (Eds.), *The Monitoring of School Mathematics: Background Papers*. Madison: University of Winsconsin-Madison.

Romberg, T. e Zarinnia, A. (1987). Consequences of the New View to Assessment of Students' Knowledge of Mathematics. In T. Romberg e D. Stewart (Eds.). *The Monitoring of School Mathematics: Background Papers*. Madison: University of Winsconsin-Madison.

Romberg, T., Zarinnia, E. e Collis, K. (1990). A New Worldview of Assessment in Mathematics. In G. Kulm (Ed.). *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Washington: American Association for the Advancement of Science.

Leonor Cunha Leal
Universidade de Lisboa

Debate (cont. da pág. 4)

Por exemplo, se um professor possuir uma turma de ciências, deverá realçar conteúdos da matéria mais significativos para estes alunos, como sejam: o estudo de funções resultantes da análise directa do meio envolvente, o que por vezes não é fácil devido à própria formação de base dos professores, o estudo da estatística versus probabilidades, no fundo o estudo de actividades que envolvam uma certa modelação.

Há que dar a noção aos alunos que esta ciência não é simples e que as suas aplicações nem sempre são imediatas, por vezes leva algum tempo até que se encontre alguma aplicação prática para determinado assunto. Para isso, há que ir à raiz da questão, o professor deverá apresentar os conteudos tendo sempre presente uma determinada perspectiva histórica.

O professor que ensina deve faze-lo em simbiose com o aluno, deve ter uma postura de descoberta permanente para que o aluno sinta que o seu professor embora sabendo os conteúdos, está sempre a aprender. O professor deve ser *suave*, apresentar a formalização de forma gradual de modo a que não se perca a genese do assunto e o aluno não se confunda.

Depende do professor fazer com que os assuntos expostos na disciplina de Matemática sejam suficientemente atractivos. Não quero dizer com isto que devemos apresentar só *flores*. É necessária coerência, a importância dos temas deve ser bem avaliada e devem ser utilizadas todas as técnicas ao nosso alcance para fazer com que a leccionação desta disciplina seja mais atraente, como por exemplo: abordar os temas de uma forma mais intuitiva, evitando demasiado cálculo, fazendo um maior uso das capacidades das calculadoras, gráficas e não só, utilizar mais os computadores num contexto de ensino efectivo, usar e abusar dos beneficios da internet, desenvolver palestras conjuntas com professores de outros grupos disciplinares, etc.

E como é necessário avaliar, há que mudar o processo avaliativo, o qual se encontra ainda demasiado assente em testes escritos. Assim, temos que desenvolver um processo baseado em trabalhos práticos, tendo por epicentro o aluno e não o professor, temos que incentivar a participação oral do aluno e explorar a sua capacidade de pesquisa, etc.

Volto a reafirmá-lo, o problema não está nos programas, a diversidade é uma falsa questão, há sim é que dar, por vezes, mais tempo aos alunos para poderem aprender, cada um tem o seu ritmo, o qual, na maior parte dos casos, não é respeitado, em virtude de no secundário o professor estar a preparar alunos que irão fazer um exame nacional, estando permanentemente mais preocupados com o cumprimento dos programas.

O lugar de destaque é, na maior parte dos casos, ocupado pelo programa de Matemática, lugar esse que deveria pertencer ao aluno.

Helder Martins
Alverca

Sismos, Exponenciais e Logaritmos: uma proposta de modelação matemática

António Bernardes e Teresa Colaço

É importante que os alunos descubram a Matemática que existe no dia-a-dia e a forma como ela é utilizada nas outras ciências. Fazendo uso da sua experiência pessoal, é-lhes mais fácil interpretar as situações, assim como analisar e criticar os resultados que vão obtendo.

As propostas de trabalho sobre aplicações da Matemática

Um dos aspectos que nos agradou quando surgiram os actuais programas de Matemática do Ensino Secundário foi o relevo dado, nas orientações curriculares, às aplicações da Matemática e às conexões desta com a Realidade, bem como com outras disciplinas.

Igualmente, na reformulação dos programas que irão entrar em vigor em 97/98, pode ler-se sobre a capacidade de utilizar a matemática: "A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, nomeadamente a propósito do estudo da Estatística e das Funções, constituem uma oportunidade de abordar o método científico. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia, ..." (M. E., 1995).

Quanto a nós, estas ligações são uma vertente importante do ensino/aprendizagem da Matemática, na medida em que dão uma maior visibilidade à matemática, ou seja, dão significado a certos conceitos e conteúdos matemáticos que de outra forma estão condenados a serem tratados num plano abstracto.

É indispensável todo o trabalho que vá no sentido de serem os alunos a criarem a sua própria imagem dos conceitos e das técnicas matemáticas antes da sua formalização. Por exemplo, é diferente resolver a equação $y = kx$ em ordem a x num contexto puramente matemático, de resolver, por exemplo, a equação $P = np + t$ em ordem a n no contexto de um problema sobre contas telefónicas. Na primeira, a relação de dependência entre as variáveis é tratada num plano abstracto, na segunda essa relação toma um significado concreto, Preço = nº de impulso . preço por impulso + taxa. É evidente que esta perspectiva não dispensa a formalização dos conceitos e o treino de certas técnicas.

É igualmente importante que descubram a matemática que existe no dia-a-dia e a forma como ela é utilizada nas outras ciências na medida em que, ao reconhecerem algo que lhes é familiar, da sua vida ou das outras disciplinas, ganham confiança no trabalho que estão a desenvolver. É-lhes mais fácil interpretar as situações, assim como analisar e criticar os resultados que vão obtendo, pois podem utilizar a sua experiência pessoal.

Esta interacção entre Matemática, "mundo exterior" e outras disciplinas é apontada muitas vezes também como um elemento motivador dos alunos. No entanto, da nossa experiência de trabalho destes três últimos anos, desde a generalização do 10º até ao 12º ano, os alunos não responderam com entusiasmo a problemas que lidavam directamente com conceitos dados na Física. Contudo, mesmo nestes casos, em que a motivação não era grande à partida, logo que eles "entravam" nas situações lidavam com elas com grande empenhamento e tiveram a vantagem de dar um contexto ao tratamento de certos conteúdos matemáticos.

De uma maneira geral, os alunos reagiram melhor a propostas que não estavam directamente ligados a conteúdos de outras disciplinas, encarando com muito mais entusiasmo aquelas que eram construídas a partir de situações do dia-a-dia. Por exemplo:

- Esboçar o gráfico da relação idade/altura desde o nascimento até à actualidade;
- Descobrir o modelo matemático que é utilizado na conta do telefone;
- Elaborar um trabalho estatístico sobre a população da freguesia a que pertence a escola.

As primeiras nem ocuparam uma aula, a última durou um ano lectivo com momentos de trabalho na aula e fora dela. Foram propostas diferentes mas igualmente importantes. O trabalho estatístico foi importante do ponto de vista de aplicação e consolidação dos conceitos e de análise e interpretação dos resultados. Os outros serviram nomeadamente para os alunos se aperceberem de que é possível comunicar e traduzir matematicamente situações tão próximas deles que até passam despercebidas, e que não estão habituados a que sejam abordadas do ponto de vista matemático.

Uma proposta de trabalho: Sismos, Exponenciais e Logaritmos

Desde o início do ano lectivo passado fazia parte do nosso plano de trabalho realizar uma actividade de modelação com os alunos e a trigonometria parecia-nos ser um tema que se prestava para tal. O tempo foi passando e nós sempre à procura de uma situação que nos agradasse, fazendo consultas, folheando livros. O tempo continuava a passar tal como o capítulo da trigonometria, até que nos apareceu um assunto que nos chàmou a atenção pois permitia mexer com muitos dos conteúdos que iríamos tratar no capítulo seguinte, Funções Exponencial e Logarítmica.

Mas como uma proposta não surge de um dia para o outro demorou algum tempo a ser elaborada e as aulas a decorrerem. Logo, por motivos óbvios ela iria ser dada aos alunos no final do capítulo. E assim surgiu a ideia de duas propostas. A primeira em que lhes era dado um modelo matemático e colocadas questões à volta dele, a segunda em que lhes era dada uma situação real e lhes era pedido a construção de um modelo. As duas propostas são apresentadas em anexo.[1]

As propostas e o trabalho com os alunos ...

Segue-se a análise das duas tarefas, e a descrição do trabalho desenvolvido com os alunos. A tarefa 1 foi dada como trabalho de casa, pois envolvia conceitos já dados e trabalhados. Na aula seguinte, de 2 horas, foi corrigida a tarefa 1 e feita a tarefa 2.

Tarefa 1

As primeiras duas questões tiveram como objectivo a familiarização dos alunos com o modelo matemático dado e envolveu apenas a resolução de equações com logaritmos.

Nas outras duas questões foi analisada a forma como a variação de uma das variáveis influenciava a variação da outra. Na questão 1.3, os alunos, usando o modelo dado, verificaram que um sismo 10 vezes mais "intenso" provoca uma variação de apenas 0,67 unidades na escala de Richter. Ou seja:

$M_{10E} - M_E = 0{,}67(\log_{10} 10E - \log_{10} E) = 0{,}67.\log_{10} f(10E;E) = 0{,}67.\log_{10} 1 = 0{,}67$

Na questão 1.4, os alunos concluiram que o acréscimo de uma unidade na escala de Richter provoca um sismo cerca de 31 vezes mais "intenso". Para tal determinaram a inversa da função dada,

$$E = 10^{\frac{M+7{,}9}{0{,}67}}$$

e compararam a variação de energia de um sismo de grau 3 com a de um de grau 2. Ou seja:

$$\frac{E_3}{E_2} = 10^{\frac{3+7{,}9}{0{,}67} - \frac{2+7{,}9}{0{,}67}} = 10^{\frac{1}{0{,}67}} \approx 31$$

A correcção destas quatro questões foi feita rapidamente pois os alunos não tiveram qualquer dificuldade na sua resolução. A partir da discussão dos resultados por eles obtidos surgiu-lhes a ideia de fazer a generalização das questões 1.3 e 1.4 e de discutir o seu significado real, ou seja:

A) Se a energia libertada por um sismo for *k* vezes maior que a de outro qual é a diferença entre as respectivas magnitudes?

B) Qual é a variação de energia provocada pelo acréscimo de *x* unidades na escala de Richter?

Os alunos chegaram às seguintes conclusões:

A) $M_{kE} - M_E = 0{,}67(\log_{10} kE - \log_{10} E) = 0{,}67.\log_{10} f(kE;E) = 0{,}67 . \log_{10} k$

B) $\frac{E_{M+x}}{E_M} = 10^{\frac{M+x+7{,}9}{0{,}67} - \frac{M+7{,}9}{0{,}67}} = 10^{\frac{x}{0{,}67}} = 31^x$

Estes resultados serviram para voltar a discutir o significado do logaritmo de um número. Como o logaritmo de um número é um expoente (Magnitude), uma pequena variação da Magnitude não é tão insignificante quanto possa parecer em termos da variação da Energia libertada. Uma acréscimo de "apenas" 3 unidades na Magnitude corresponde à libertação de uma Energia cerca de $31^3 = 29791$ maior. Pode ser a diferença entre um sismo e um terramoto.

Este facto pode ser observado graficamente, representando as duas funções estudadas numa escala semi-logarítmica (figura 1).

Tarefa 2

Esta tarefa tinha como objectivo a criação de um modelo que se adaptasse aos valores da tabela dada. Para isso, e como este tipo de trabalho não é fácil nem usual para os alunos, as 5 questões tinham como objectivo orientá-los.

A questão 1 pretendia levar os alunos a reflectir sobre a dificuldade de representação dos valores dados num

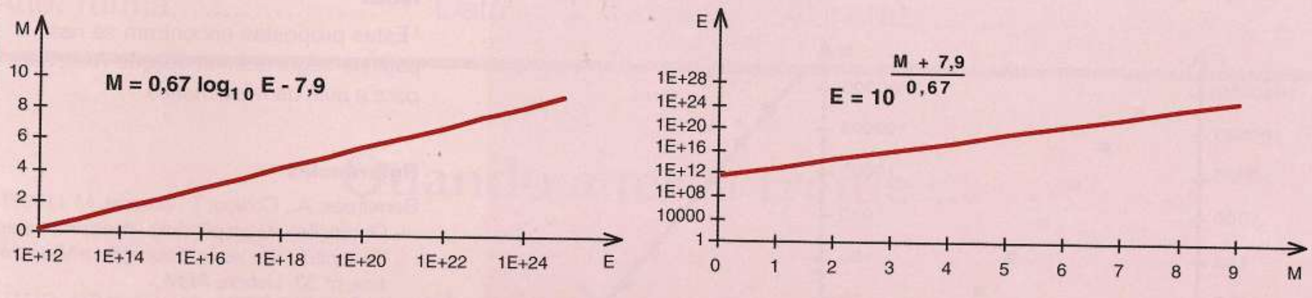


figura 1

referencial, devido à sua grandeza. Tinham a consciência que os pontos do gráfico se dispunham aproximadamente como os de uma função exponencial decrescente, mas cuja expressão não eram capazes de encontrar. Propusemos então o uso de papel semi-logarítmico para a representar. Este era desconhecido de todos os alunos e houve a necessidade de fazer uma interpretação do seu uso, o que não foi fácil. No eixo das abcissas cada marca principal representa, em relação à anterior, um acréscimo de uma unidade na escala utilizada (0, 1, 2, 3, ...). No eixo das ordenadas cada marca principal, a partir do 1, representa em relação à anterior um valor dez vezes superior (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...).

Por exemplo, quando N = 49000, como 49000 = 4,9 x 10^4, aquele valor será representado entre 10^4 e 10^5, aproximadamente 4,7 marcas acima do eixo das abcissas, visto que:

$\log_{10} 49000 = \log_{10} (4,9 \times 10^4) = \log_{10} 4,9 + \log_{10} 10^4 \approx 0,7 + 4 = 4,7$

Assim no papel semi-logarítmico a função que é exponencial aparece com aspecto linear devido à escala do eixo das ordenadas, como se observa no gráfico A (figura 2). Significa que se em vez de representarmos a função N = f(M) numa escala semi-logarítmica, representarmos a função $\log_{10}$ N = f(M) numa escala monométrica, esta terá um comportamento linear pois $N = 10^{\log_{10} N}$, como se ilustra no gráfico B (figura 2).

No gráfico B, os pontos dispõem-se aproximadamente sobre uma recta cuja equação é do tipo $\log_{10} N = mM + b$. Os alunos obtiveram-na a partir de dois dos seus pontos, por exemplo P_1 (2 ; 5,47712) e P_2 (7 ; 1,25527). Chegaram aos seguintes resultados: m = -0,84437 e b = 7,16586.

A equação da recta é:

$\log_{10} N = -0,84437\ M + 7,16586$

Resolvendo esta equação em ordem a N obtêm-se:

$$\mathbf{N = 10^{-0,84437M + 7,16586}}$$

que como se previa representa uma função exponencial decrescente.

Confrontando os valores obtidos a partir deste modelo com os valores

M (Magnitude)	N (Nº de sismos por ano)
8	1
7	18
6	108
5	800
4	6200
3	49000
2	300000

M	$\log_{10}$ N
8	0
7	1,25527
6	2,03342
5	2,90309
4	3,79239
3	4,69020
2	5,47712

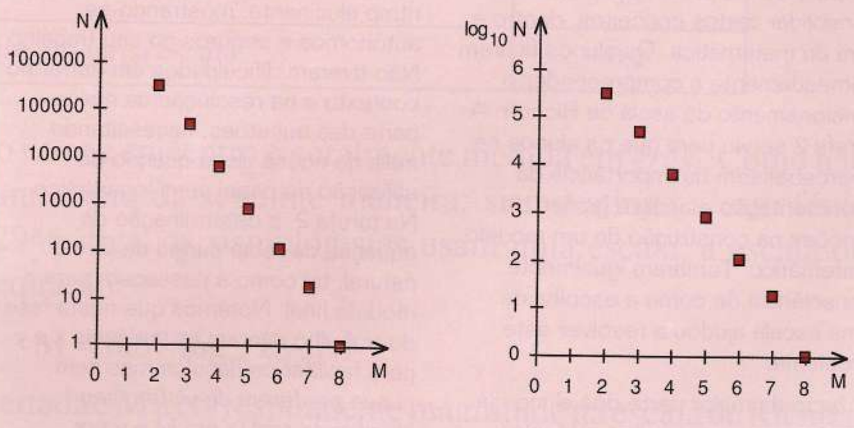
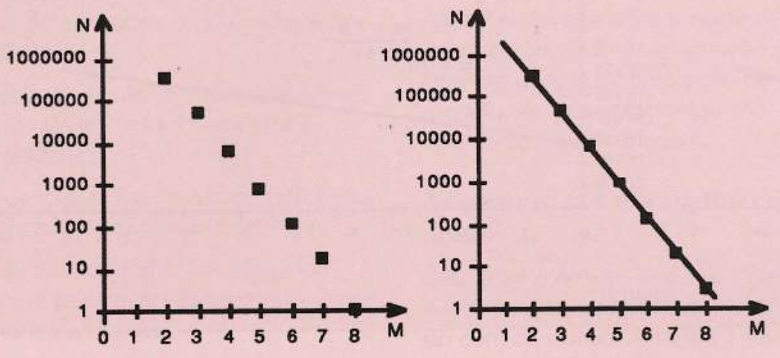


figura 2



M	N (valores reais)	N (valores do modelo)
8	1	2
7	18	18
6	108	126
5	800	883
4	6200	6166
3	49000	43053
2	300000	300608

figura 3

dados na tabela inicial obtém-se o que se ilustra na figura 3.

Algumas considerações finais

As propostas atingiram o que tinhamos estabelecido à partida. A tarefa 1 serviu para relacionar e consolidar certos conceitos, dentro e fora da matemática. Os alunos ficaram nomeadamente a compreeender o funcionamento da escla de Richter. A tarefa 2 serviu para que os alunos se apercebessem da importância da representação e análise gráfica de funções na construção de um modelo matemático. Tomaram igualmente consciência de como a escolha de uma escala ajudou a resolver este problema.

O facto da maior parte dos alunos já dominarem os conceitos e técnicas algébricas necessárias à resolução das tarefas, excepção feita à representação em papel semi-logarítmico, ajudou a que centrassem o seu trabalho na compreensão da situação, na análise do funcionamento dos modelos (tarefa 1) e na criação do modelo matemático da tarefa 2.

Os alunos trabalharam em grupo a um ritmo alucinante, mostrando-se autónomos e seguros no seu trabalho. Não tiveram dificuldades em entrar no contexto e na resolução da maior parte das questões, necessitando mais da nossa ajuda quando da utilização do papel semi-logaritmico. Na tarefa 2, a determinação da equação da recta surgiu de forma natural, tal como a passagem para o modelo final. Notámos que nesta fase do trabalho usaram as variáveis x e y para facilitar os cáculos mas sem nunca perderem de vista o seu significado real (x era M e y era $\log_{10}$N). Quando acabaram os cálculos fizeram a mudança de variável.

Nota

[1] Estas propostas encontram-se nas páginas seguintes, na secção *Materiais para a aula de Matemática.*

Referências

Bernardes, A., Colaço, T., Saraiva, M. (1995). Oscilações de um pêndulo.: duas propostas no capítulo dos reais. *Educação e Matemática*, nº 33. Lisboa: APM.

Farlow, Stanley J. & Haggard, Gary M. (1990). *Introduction to Calculus with Applications.* New York: McGraw-Hill.

Lopes, Ana Vieira e outros (1994). *Matemática 12* (Vol. 1). Manual escolar. Porto: Contraponto.

Ministério da Educação (1996). *Programa de Matemática*, 10º, 11º e 12º Anos, 1997/98. Porto: Departamento do Ensino Secundário.

Waltham, David (1994). *Mathematics: A simple tool for Geologists.* London: Chapman & Hall.

António Bernardes
Escola Secundária de Gil Vicente
Teresa Colaço
Escola Secundária de Gil Vicente

Materiais para a aula de Matemática

As actividades propostas nas três páginas seguintes são aquelas a que se refere o artigo intitulado "Sismos, Exponenciais e Logaritmos: uma proposta de modelação matemática", de autoria de António Bernardes e Teresa Colaço.

Estas propostas de trabalho, que envolvem relações da Matemática com a realidade e actividades de modelação, dizem respeito a conteúdos do programa do secundário relativos ao tema "Função Exponencial e Logarítmica".

Escola...

Ano/Turma..................... Data....................... Aluno(a)..

Quando a terra treme ...

Uma das mais importantes utilizações dos logarítmos é a descrição de fenómenos cujas medições são números muito grandes, muito pequenos, ou que se situam em intervalos com uma amplitude muito grande. Para percebermos melhor como os logaritmos são aplicados na ciência, vamos ver como são usados para definir a escala de Richter em sismologia.

Como o logaritmo de um número é um expoente a variação de, por exemplo, um ponto na escala de Richter (logarítmica) corresponde a uma actividade sísmica muitas vezes superior.

A tabela seguinte ilustra bem o significado da variação dos valores da escala de Richter:

Magnitude (E.Richter)	**Resultado no epicentro**	**Nº por ano**
1,0 - 1,9	Detectável apenas por sismógrafo	Muitos
2,0 -2,9	Sentido por algumas pessoas	800000
3,0 - 3,9	Sentido pela maior parte das pessoas	20000
4,0 - 4,9	Sentido por todos, vidros partidos	2800
5,0 - 5,9	Queda de mobiliário	1000
6,0 - 6,9	Fendas no chão, queda de alguns edíficios	185
7,0 - 7,9	Queda de pontes e barragens	14
8,0 +	Desastre em larga escala	0,2

A energia libertada por um sismo no seu epicentro é geralmente medida em *ergs* . Como não seria muito prático descrever um sismo da seguinte maneira: sismo atinge a estrofénia libertando 47369834360967412946 *ergs*, os sismologistas usam uma escala, a escala de Richter, definida pela seguinte equação:

$$M = 0,67 \log_{10} E - 7,9$$

em que **E** representa a energia libertada e **M** a correspondente magnitude na escala de Richter.

Tarefa 1

1. Em 1985, um terramoto devastou a Cidade do México libertando aproximadamente 4×10^{24} *ergs* de energia. Qual foi a magnitude do sismo na escala de Richter?

2. Em 1976, um terramoto de 8,9 na escala de Richter atingiu a Guatemala matando 23000 pessoas. Qual foi a energia libertada pelo terramoto?

3. Se a energia libertada por um sismo for 10 vezes maior que a de outro, qual é a diferença entre as respectivas magnitudes?

4. Compara as energias libertadas por um sismo de grau 2 e por outro de grau 3.

Quando a terra treme ... (Parte II)

Segundo um estudo realizado por B. Gutenberg e C. F. Richter, publicado em 1954, a média do número de sismos ocorridos por ano em função da sua magnitude entre 1918 e 1945 foi o seguinte:

M (Magnitude)	N (Nº de Sismos por ano)
8	1
7	18
6	108
5	800
4	6200
3	49000
2	300000

Será possível estabelecer uma relação matemática entre as duas variáveis?

Tarefa 2

Material: Papel semi-logaritmico

1. Representa graficamente a função **N = f(M)**. Que questões se colocam ao fazê-lo?

2. Representa a função **N = f(M)** em papel semi-logarítmico.
Que tipo de gráfico obtiveste?
Que tipo de função está representada?
Que vantagens notas ao usar este tipo de representação?

3. Completa a tabela e representa graficamente os valores.

M	$\log_{10} N$
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	

Define a função que melhor se lhes adapta.

4. Define a função **N = f(M)**.

5. Comenta as vantagens (ou desvantagens) que tiveste ao usar logaritmos.

Pontos de vista, reacções, ideias...

Fractais e geometrias num curso de formação em Gaia Nascente

Nunca pensei que a Matemática pudesse ser assim — comentou um aluno no fim da aula em que construiu fractais para aprender "coisas" acerca de sucessões.

Depois da apresentação, acreditação e financiamento começou finalmente a funcionar em Novembro, no Centro de Formação Gaia Nascente, o curso de formação (previsto para Maio anterior) orientado pela autora destas linhas.

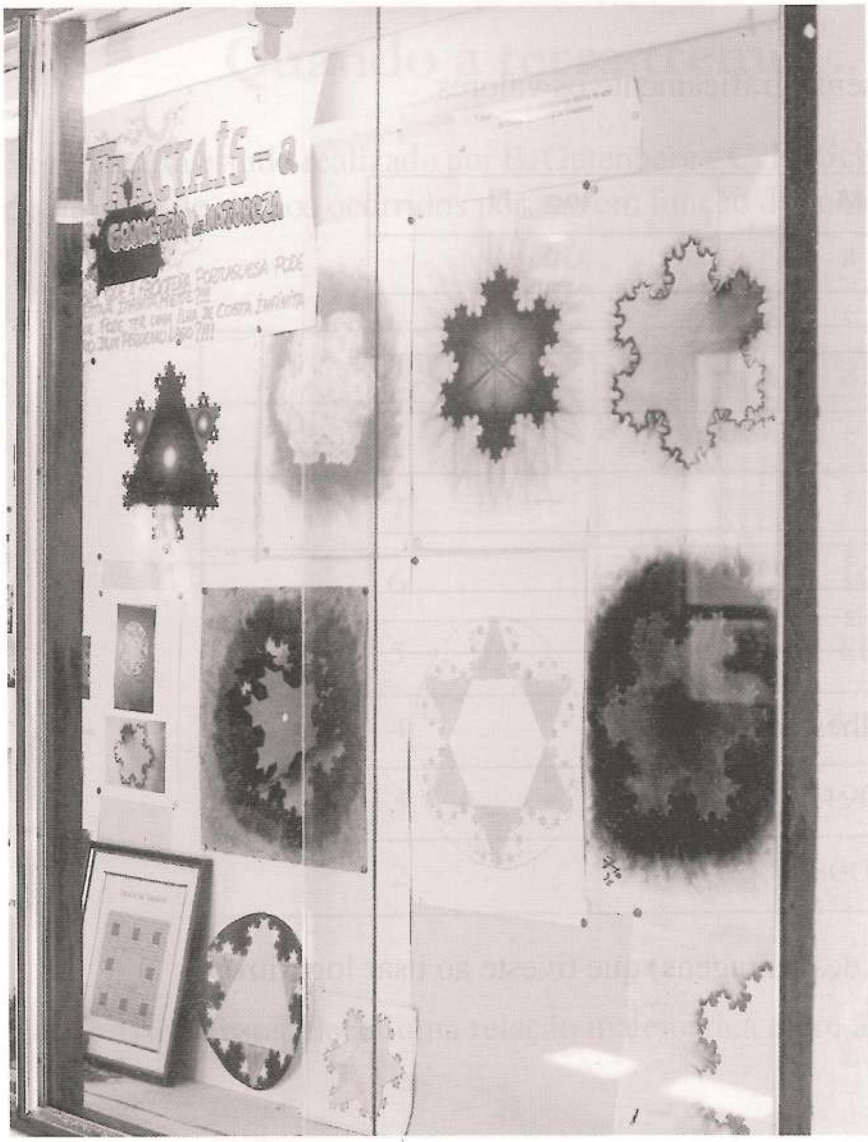
Chamou-se "Temas Actuais de Matemática para o ensino básico e secundário", e tinha como principais objectivos:

• proporcionar uma reflexão sobre o papel das concepções dos professores no processo ensino/aprendizagem da Matemática;

• apresentar uma perspectiva histórico-filosófica do desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos;

• despertar o interesse por questões de desenvolvimento recente e respectiva utilização na sala de aula;

• motivar para o uso de metodologias de ensino que suscitem uma visão dinâmica da matemática.



Teve a duração de 50 horas e decorreu às terças-feiras das 15h e 30m às 18h e 30m e quartas-feiras das 14h e 30 m às 17 h e 30m.

O curso constou de uma parte inicial destinada à abordagem de diversas concepções da matemática e respectiva implicação no ensino, e de uma breve digressão histórica sobre a relação entre conceitos filosóficos e conceitos matemáticos.

Em seguida foram trabalhados dois grandes temas:

• fractais, sua exploração e utilização para o ensino/aprendizagem de alguns conteúdos do ensino básico e secundário;

• geometrias, uma abordagem mais alargada e plural; tópicos de geometria euclidiana e geometrias não euclidianas.

No início estava bastante curiosa e, porque não, um pouco apreensiva acerca do tipo de acolhimento que o curso iria ter, pois uma parte dos formandos eram professores com quase 30 anos de experiência, outros com cerca de 20 e outros com 6 ou 7, logo, à partida, com expectativas e interesses que poderiam ser bastantes diferentes.

Foi com agradável surpresa que fui constatando, à medida que as sessões avançavam, o interesse com que a generalidade dos formandos participava nos trabalhos propostos, passando as três horas de cada sessão, conforme afirmavam, sem darem por isso. De tal modo que algumas formandas elaboraram trabalhos muito interessantes com fractais (incluindo bordados e tapeçarias) e usaram o tema nas suas aulas, estimulando os alunos para a realização de trabalhos em que integraram a Matemática e a Arte, de que resultou uma pequena exposição (foto junto). Foi manifesta a satisfação com o horário em que decorreu o curso, pois, todos concordamos que ocupar o fim de tarde e sábado é altamente penalizante para os tempos dedicados ao lazer e à família.

Devemos referir que a Escola Secundária de Oliveira do Douro disponibilizou todo o apoio pedido, sobretudo a nível de textos e computadores.

Guilhermina Nogueira
Esc. Sec. Almeida Garrett
Vila Nova de Gaia

Uma história da aula de Matemática

A história que passo a apresentar, refere-se a uma vivência ocorrida no ano lectivo anterior, isto é, em 1994/95 na Escola Secundária de Leal da Câmara.

Nesta escola onde desempenho as minhas funções, existe um Clube de Rádio, no qual os alunos desempenham quase todas as tarefas, desde locutores a técnicos de som, de jornalistas a electricistas, etc. Alguns colegas meus, desempenham funções de dinamização deste "espaço". Eu contribuo na área em que sou formado, Matemática.

No início de cada semana vai para o ar uma actividade matemática, que dinamizo, sendo sorteada uma prenda simbólica entre os alunos que respondem correctamente.

Ora acontece que divulgo essa mesma actividade às segundas feiras nas minhas aulas como estímulo e incentivo a aprendizagens. Numa actividade proposta, solicitava a investigação sobre a possível existência de matemáticos alentejanos.

Um aluno meu alentejano, ficou, na altura do lançamento desta actividade, muito aborrecido comigo, pois sentiu-se vítima de enorme chacota entre os colegas, vindo inclusivamente no final da aula falar comigo ...

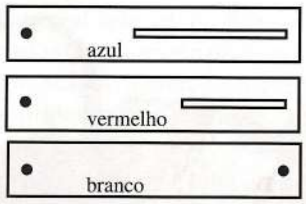
Na semana seguinte na aula deste aluno, quando foi divulgado o exemplo de alguns matemáticos alentejanos importantes, o ego deste aluno ficou engrandecido e sentiu-se extremamente feliz por se fazer saber que entre os seus conterrâneos houve muito mérito, ao ponto de se cunharem moedas com um deles (100$). Não deixou de ser uma história feliz e engraçada a acrescentar às minhas vivências como professor.

Paulo Lourenço
Escola Sec. Leal da Câmara

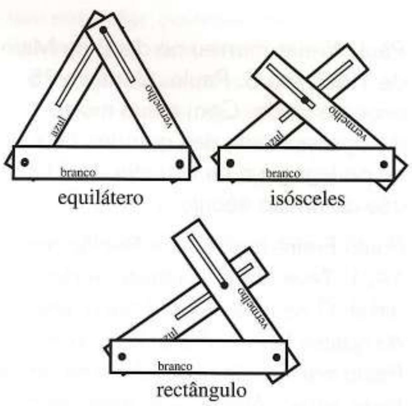
Uma experiência com o triângulo multiformas

O colega Jorge Pereira Barros, da Esc. E. B. 2,3 de Ferreiras enviou-nos um texto a descrever duas aulas que deu no 6º ano sobre o tema "Construção de triângulos na aula de Matemática. Sua classificação de acordo com o comprimento dos lados e amplitude dos ângulos". Na primeira aula "é explicada a actividade que irão realizar e seguidamente distribui-se uma ficha de trabalho a cada aluno". Esta ficha é uma revisão da classificação dos triângulos quanto ao comprimento dos lados e amplitudes dos ângulos. Usando cola, tesoura, ataches e cartolina, os alunos constroem triângulos (equilátero, isósceles e rectângulo).

Na segunda aula o prof. Jorge Barros utilizou o *triângulo multiformas.* Como refere, "este triângulo é construído a partir de três segmentos de recta iguais, em forma de rectângulos, desenhados em cartão, como se pode ver nos seguintes esquemas, e que são adaptáveis à construção dos três triângulos":



Segmentos de cartolina com ranhuras

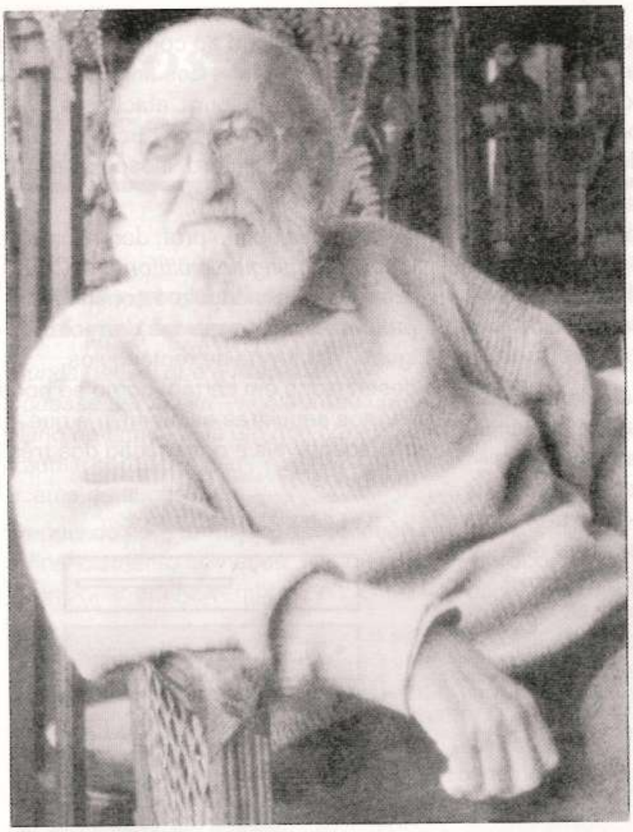


Jorge Manuel da Siva Barros
Esc. E. B. 2,3 de Ferreiras

O ProfMat 97 está em marcha!

Aqueles que, por qualquer motivo, não se inscreveram mas desejam fazê-lo devem estar atentos aos prazos: até 30 de Junho a inscrição está já sujeita a um agravamento de preço mas, depois dessa data e até 10 de Outubro, o agravamento será ainda maior. A organização de um encontro como o ProfMat precisa de saber com o que conta com a maior antecedência possível.

Prof Mat 97



Paulo Freire (1921-1997)

Paulo Freire morreu no dia 2 de Maio de 1997, em S. Paulo. Contava 75 anos de idade. Com a sua morte desaparece uma das grandes figuras da pedagogia e da filosofia da Educação do nosso século.

Paulo Freire nasceu em Recife em 1921. Teve uma juventude muito difícil. O seu pai morreu novo, deixando quatro filhos órfãos, dos quais Paulo era o mais novo (tinha na altura treze anos). Atrasou-se vários anos na escola em relação aos colegas da sua idade mas, com muito trabalho, foi prosseguindo os seus estudos. Embora frequentasse um curso de Direito, foi aos problemas da pedagogia, e muito especialmente da educação de adultos, que dedicou o seu trabalho desde muito cedo. Em 1944, casou-se com Elza Maria de Oliveira, uma professora do ensino primário.

Paulo Freire desenvolveu um método de alfabetização de adultos que o tornou mundialmente conhecido. Experimentou-o pela primeira vez em 1963, trabalhando com camponeses do Brasil mas, no ano seguinte, com o golpe militar, as suas ideias e acções políticas e sociais custaram-lhe a prisão e o exílio sem ter conseguido concretizar um ambicioso plano de alfabetização de milhões de brasileiros. Só com a amnistia de 1979, catorze anos mais tarde, regressou ao Brasil e ao trabalho na Universidade e na política educativa do seu país. Entretanto, trabalhou em muitos países, tanto na alfabetização de adultos como em universidades: primeiro na Bolívia e no Chile e, depois de estabelecido na Suiça, em muitos outros desde os Estados Unidos da América até diversos países de África e da América Latina.

Paulo Freire tem numerosos livros publicados e traduzidos em diversas línguas. O mais conhecido é *Pedagogia do Oprimido*, manuscrito em português em 1968 mas publicado pela primeira vez em inglês e espanhol em 1970. O autor apresenta neste livro o seu método de alfabetização que se baseia em começar por palavras essenciais tiradas da realidade das pessoas a alfabetizar. A aprendizagem é, para Paulo Freire, uma maneira de se pensar a realidade de um modo crítico. Recusando uma perspectiva fatalista, defende que o indivíduo é também criador e sujeito da sua história. O processo educativo

Reprodução da capa da 2ª edição publicada em Portugal de *Pedagogia do Oprimido* da autoria de Paulo Freire (Editora Afrontamento, 1975) não é neutro mas antes "acção cultural para a libertação ou para a dominação". A meta educativa é a libertação cultural como meio de libertação social.

Paulo Freire é uma figura conhecida a nível mundial nos domínios da Pedagogia e da Filosofia da Educação. Na educação matemática, as suas ideias constituem uma referência importante para autores que se têm debruçado sobre o papel do ensino e da aprendizagem da Matemática no desenvolvimento de competências críticas e democráticas (vejam-se por exemplo os trabalhos de Ole Skovsmose).

Educação e Matemática presta aqui a sua homenagem a Paulo Freire. Foi também com este propósito que pedimos um depoimento ao Professor Ubiratan d'Ambrósio que com ele conviveu e teve oportunidade de conversar por diversas vezes sobre Educação em geral e também, especificamente, sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

A Redacção de
Educação e Matemática
Lisboa, Maio de 1997

Ubiratan escreve sobre Paulo Freire

Paulo Reglus Neves Freire nasceu em Recife no dia 19 de Setembro de 1921. Nos anos cinquenta desenvolveu um método de educação de adultos que essencialmente vê o aprendizado como um ato político. Depois de ocupar inúmeros cargos educacionais no Estado de Pernambuco e no governo federal, foi exilado com o golpe militar de 1964. Exerceu, então, importantes funções internacionais, e consagrou-se como um dos mais importantes educadores da atualidade. Com a anistia de 1979, regressou ao Brasil onde exerceu importantes funções acadêmicas e administrativas. Seu nome consolidou-se como um dos mais importantes filósofos da educação da atualidade. Faleceu em São Paulo no dia 2 de maio de 1997, depois de uma rápida crise cardio-vascular.

Paulo Freire nos ensinou muito e continuamos sendo inspirados por suas mensagens, sua vontade de viver e ajudar os outros a viverem na plenitude. Ele via no viver um dom supremo, que só pode ser atingido pelo indivíduo quando no pleno gozo de sua liberdade. Numa conversação recente, Paulo Freire dizia se sentir um ser inconcluso, que tudo que é vivo é inconcluso, mas que ele tinha plena consciência de sua inconclusão e isso o fazia um ser humano na plenitude. Sua missão era colaborar com o despertar dessa consciência em todos os indivíduos.

Com relação à Matemática, Paulo Freire vê no homem uma matematicidade espontânea. Ele revela uma certa amargura por não ter sido dado a ele a oportunidade de deixar florescer sua espontaneidade matemática, aquela capacidade de matematizar o mundo, que é própria a todo o ser humano. Na verdade, amargura por essa capacidade ter sido reprimida nos seus primeiros anos de escolaridade, quando lhe foi insinuado que matemática era coisa de deuses, na melhor das hipóteses de homens geniais. E no seu entender, isso talvez tenha calado um matemático em potencial. E lamentava que muita criança esteja passando por essa angústia e por esse desserviço à sua criatividade.

A aquisição da cidadania plena, que é um dos grandes objectivos da pedagogia de Paulo Freire, não pode ser realizada sem o domínio da matemática. Mas não de uma matemática congelada no formalismo que, pelo contrário, pode agir como uma barreira à criatividade. O que se necessita é a matemática da vida, espontânea, intrínseca ao ser humano. O grande desafio que enfrentamos, como educadores matemáticos, é praticar essa matemática nos sistemas escolares. Nos defrontamos com uma grande dificuldade: como preparar os professores para essa prática? E, o que é ainda mais difícil, como organizar a formação de professores e conseguir que os professores já formados e em serviço mudem a sua postura sobre a Matemática que deve estar presente nos sistemas educacionais.

O discurso de Paulo Freire era crítico e construtivo. Ao mesmo tempo que apontava os males e equívocos da sociedade, indicava direções que, no seu entender, poderiam recuperar no homem sua dimensão humana. E isso só pode se conseguir se o homem estiver imbuído de ética. Paulo Freire destacava no homem a historicidade, a eloquência e a matematicidade, que devem estar subordinadas a uma ética ampla. Dessa qualidades nasce a criatividade. A proposta de uma ética, não só profissional, mas de uma ética de vida, era uma das maiores preocupações de Paulo Freire.

No seu último escrito, Paulo Freire fala de sua opção de estar "a favor da vida e não da morte, da equidade e não da injustiça, do direito e não do arbítrio, da convivência com o diferente e não de sua negação" e diz que "não temos outro caminho senão viver plenamente nossa opção. Encarná-la, diminuindo assim a distância entre o que dizemos e o que fazemos". Autenticidade é uma grande lição que Paulo Freire nos legou.

Ubiratan d'Ambrosio
S. Paulo, Maio de 1997

Alunos e professores em actividades de investigação

Helena Rocha

Como é que os alunos se relacionam com actividades de investigação na aula de Matemática? Como é que estruturam o seu trabalho, que dificuldades sentem, que apoio solicitam ao professor, como vão evoluindo? Neste texto, discutem-se estas questões com base numa experiência realizada numa turma do 11° ano.

Muitas das personalidades que se têm dedicado à problemática do ensino da Matemática referem e reconhecem a importância de atribuir ao aluno um papel activo, permitindo-lhe construir o seu conhecimento; pois só fazendo, experimentando, mexendo, se aprende efectivamente e não apenas vendo fazer ou ouvindo dizer como se faz.

Ou seja, como é mencionado nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991), "o ensino deve privilegiar permanentemente o fazer e não o saber que"(p. 8).

A esse respeito J. Matos (1991) refere mesmo que 'a exploração de situações por parte dos alunos pode tornar-se um aspecto central no ensino da Matemática" (p. 16).

Também nos programas de Matemática do Ensino Secundário é considerado que "os objectivos seleccionados implicam uma renovação metodológica que urge levar a cabo e assenta no pressuposto de ser o aluno agente da sua aprendizagem" (p. 24). é pois reconhecida a importância de adoptar "uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa" (p. 33).

Torna-se portanto importante proporcionar aos nossos alunos a oportunidade de "explorar, formular e testar conjecturas, provar generalizações e discutir e aplicar os resultados das suas investigações"; atribuindo ao professor mais o papel de um "facilitador da aprendizagem do que o de um disseminador de informação" (NCTM, 1991, p. 148).

Há algum tempo atrás resolvi propôr a uma turma do 11° ano do curso tecnológico algumas actividades de investigação (realizadas, não sequencialmente, em 11 tempos lectivos) no âmbito do estudo gráfico de algumas importantes famílias de funções.

Com esta experiência pretendia-se reflectir sobre o modo como os alunos se relacionam com as actividades de investigação, para o que se procurou analisar as suas reacções, o trabalho produzido e o percurso efectuado ao longo das actividades. Mais concretamente, tentou-se compreender: como estruturavam a investigação, que dificuldades sentiam, que género de apoio procuravam junto do professor e como evoluiam à medida que se iam familiarizando com este tipo de propostas. Foi ainda efectuada uma tentativa de compreender as dificuldades enfrentadas pelo professor que efectua este género de propostas de trabalho.

Com base nesta experiência o que se pode então dizer da forma como alunos e professores se relacionam com actividades de investigação?

Tal como I. McLachlan e D. Ryan (1994) também eu penso que os alunos parecem sentir necessidade de algum tempo e experiência para conseguirem efectuar uma espécie de adaptação às actividades de investigação. No entanto tenho dúvidas quanto à sugestão dos autores de que quatro propostas deste género sejam suficientes para a familiarização dos alunos. Com efeito, creio que em algumas turmas (nomeadamente na que serviu de base a este estudo), apesar dos progressos já efectuados e de apenas terem sido realizadas três actividades, há ainda um longo caminho a percorrer até conseguir desenvolver nos alunos o espírito de iniciativa, indispensável na condução duma investigação, bem como uma certa criatividade, espírito crítico, autonomia e confiança nas suas opiniões e capacidades.

A desorientação perante as características de uma proposta de investigação — que são sempre, independentemente do seu grau de estruturação, muito menos guiadas do que as actividades a que os alunos em geral estão habituados — parece ser a primeira e talvez a maior dificuldade com que os alunos se defrontam. Intimamente associada à desorientação surge a falta de autonomia em relação ao professor.

Os alunos em geral começam por demonstrar uma grande necessidade de apoio, procurando obter do professor informações concretas quanto ao que fazer. Esta necessidade vai diminuindo progressivamente à medida que se processa a familiarização dos alunos com este género de propostas, no entanto parece subsistir sempre uma certa necessidade de contactar com o professor.

O professor deve estar preparado para esta desorientação inicial pois não será fácil incentivar os alunos que poderão sentir-se desmotivados ao ponto de quererem desistir da actividade. A gestão desta fase da aula tende a ser bastante complicada para o professor uma vez que a maioria dos alunos sente necessidade do seu apoio sensivelmente ao mesmo tempo. Nestas circunstâncias o professor pode optar por se dirigir a toda a turma colectivamente, no entanto penso que essa nem sempre é a melhor solução. Com efeito, isso poderia significar que o professor assumia a direcção dos trabalhos o que não é de modo algum desejável. Além disso, dada a grande liberdade de abordagens que em geral é permitida por este tipo de propostas a intervenção que auxiliaria uns alunos poderia ser completamente inútil para outros,ou mesmo contraproducente, por ir contra a linha de raciocínio que os alunos estavam a tentar seguir.

Se esta fôr a primeira experiência neste género de actividades tanto para os alunos como para o professor parece-me conveniente preparar bem esta fase. Objecto de especial atenção deve ser o número de grupos que o professor poderá ter que apoiar quase em simultâneo. Com base em experiências anteriores eu recomendaria que não fossem ultrapassados os quatro grupos o que implica a constituição de grupos maiores. Contudo, se a turma fôr numerosa, e porque também não me parece conveniente a constituição de grupos com mais de quatro alunos, o professor poderá optar por não propôr a actividade a toda a turma em simultâneo.

Ultrapassada esta fase a necessidade de apoio tenderá a diminuir mas manter-se-á sempre uma necessidade de contactar com o professor que poderá assumir formas diversas desde a simples comunicação do trabalho produzido até à tentativa de obtenção de respostas ao problema em estudo, passando pela necessidade de confirmação de conjecturas.

O apoio prestado pelo professor é pois muito importante e deve constituir um incentivo para os alunos, levando-os a colocar novas questões e a abordar novas perspectivas sem no entanto guiar o trabalho e evitando assumir o papel de um simples validador/refutador de conjecturas.

A vontade de evitar dirigir o trabalho dos alunos constituíu para mim uma grande preocupação, uma vez que nem sempre é fácil compreender a linha de raciocínio seguida pelos alunos e fazer um comentário que os incentive a prosseguir e não constitua uma mera indicação do passo seguinte. Conseguir alcançar um equilíbrio entre uma postura directiva, que destruiria todo o interesse da investigação, e uma postura quase ausente, pelo receio de se tornar directiva, constitui, a meu ver, a maior dificuldade do professor que propõe uma investigação. Exige uma grande maleabilidade e a capacidade de conseguir abordar os problemas da perspectiva dos alunos, o que requer experiência e, acima de tudo, uma reflexão profunda sobre essa experiência.

Penso, no entanto, que será sempre bastante útil discutir com o grupo os seus erros procurando auxiliar os alunos a analisar a situação e a compreender a sua origem. Este procedimento em alguns casos constituirá uma forma de desenvolver nos alunos uma capacidade de capital importância nestas aulas, o espírito crítico. Provavelmente tal não será fácil e requererá algum tempo, mas cabe ao professor dotar-se da paciência e persistência necessárias, pois só assim poderá ser bem sucedido.

Outro obstáculo que o professor poderá ter de enfrentar situa-se ao nível da comunicação. Alguns alunos estão pouco habituados a expor as suas ideias e a argumentar perante os colegas pelo que tendem a demonstrar dificuldade em fazê-lo com clareza e de forma organizada. Também a comunicação por escrito tenderá a suscitar dificuldades, que em parte têm origem em lacunas nos conhecimentos de Português. No entanto, com o apoio do professor e o acumular da experiência, os progressos começarão a ocorrer embora seja necessário percorrer um longo caminho (que não passa exclusivamente pela aula de Matemática) até alcançar o rigor e a clareza desejáveis.

Com base nas experiências vividas, os alunos vão construindo estratégias de abordar uma proposta de investigação e elaborando uma estruturação própria. Em geral esta estruturação parece englobar a abordagem do problema por partes o que, no caso concreto das actividades propostas (ver caixa), passou pelo estudo de subfamílias. A ideia de fazer uma investigação intermédia, com base no estudo de casos particulares da família de funções a investigar, parece ocorrer com facilidade aos alunos e ser do seu agrado. No entanto, apesar de se subentender alguma preocupação em fazer a subdivisão de forma criteriosa, quase sempre existem falhas nesse processo. Além disso, os alunos parecem ter depois dificuldade em analisar as conclusões parciais e estabelecer uma para o caso geral, dando por vezes a impressão de que nem sequer o tentam.

As preocupações de variar de forma sistemática os parâmetros parecem ser poucas. Inicialmente os alunos apenas fazem experiências utilizando números inteiros positivos mas reconhecem facilmente a necessidade de o fazer também com números negativos. Alguns alunos consideram ainda importante o 0 e outros fazem questão de observar se a conclusão se mantém quando são utilizados números bastante grandes. Curiosamente os números decimais são sistematicamente ignorados pelos alunos.

No que respeita à quantidade de gráficos observados, embora esta tenha sofrido um acréscimo após a primeira actividade, continuo a achar que, em algumas situações, os alunos são excessivamente crédulos nas ideias que as primeiras observações lhes suscitam.

E o que pensaram os alunos destas aulas?

Globalmente penso poder afirmar que a maioria dos alunos gostou desta experiência a que se referem como aulas menos monótonas e mais divertidas. Particularmente valorizado foi o trabalho de grupo, apesar dos alunos não estarem habituados a esta metodologia e terem tido necessidade de se adaptar e aprender alguns aspectos fundamentais para alcançar uma gestão satisfatória deste tipo de trabalho. No entanto, e apesar disso não ter sido dito de forma expressa pelos alunos, penso que a quase inexistência de pré-requisitos para a realização das actividades foi um factor determinante para o envolvimento de muitos alunos; uma vez que alguns encontram frequentemente como obstáculo lacunas ao nível de conhecimentos de base, com as inevitáveis consequências desse facto nomeadamente no interesse e motivação pela disciplina. Também a utilização de calculadoras gráficas parece ter constituído uma fonte de entusiasmo para alguns alunos, que se interessaram por explorar e utilizar as potencialidades da máquina.

Considero que seria bastante interessante prosseguir com esta experiência e tentar analisar se a actuação dos alunos continua a evoluir ou se atinge algum patamar em que subsistem dificuldades e/ou lacunas na estruturação, desenvolvimento e comunicação dos resultados da investigação.

Seria ainda de interesse tentar aprofundar a compreensão do processo desenvolvido pelos alunos durante a realização de investigações, bem como das dificuldades e dilemas enfrentados pelo professor.

Actividade 1

• Estuda a família $y = a + |x|$ atribuindo valores ao parâmetro a.

Observando o gráfico procura descobrir de que modo o valor de a altera o gráfico.

• Repete o estudo para as famílias:

$y= a\,|x|$ $\quad y = |ax|$ $\quad y= |x+a|$

• Elabora um relatório com todas as conclusões a que chegares.

Actividade 2

Ao longo desta aula pretende-se que:

• Observes gráficos de polinómios.

• Tentes generalizar o aspecto dos gráficos de polinómios do mesmo grau.

• Procures descobrir quantos aspectos diferentes podem tomar os gráficos de polinómios do mesmo grau.

• Elabores um relatório com todas as conclusões a que chegares.

Actividade 3

• Investiga qual é o aspecto do gráfico da função que resulta da divisão de dois polinómios de grau um.

• Elabora um relatório com todas as conclusões a que chegares.

Nota

Este artigo baseia-se no Projecto de Investigação e Inovação Educacional, realizado no âmbito do curso de Especialização em Ensino da Matemática do Departamento de Educação da FCUL, sob a orientação de Ana Paula Canavarro.

Referências

DGEBS (1991). *Programas de Matemática e Métodos Quantitativos*. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, EP.

Matos, J. Filipe (1991). *Logo na Educação Matemática: Um Estudo Sobre as Concepções e Atitudes dos Alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto Minerva.

McLachlan, I. & Ryan, D. (1994). A.I.M.S. in the Classroom, in *Mathematics Teacher*, vol. 87 (5), pp. 364-370. Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Helena Rocha
Escola Secundária Patrício Prazeres
(Lisboa)

O problema deste número

Sobre o problema anterior

O problema da revista número 42 foi "16 números num quadrado".

Em cada uma das 16 casas de um quadrado de 4 x 4 está um número natural. Uma pessoa escolhe algumas das casas ao acaso e multiplica os respectivos números. Depois anuncia o resultado da multiplicação.

– Qual é o menor conjunto de números que devo colocar no quadrado para que, ao conhecer o resultado da multiplicação, consiga identificar quais foram as casas escolhidas?

Questão adicional:

– Qual é o menor conjunto de 16 números consecutivos nestas condições?

Bem, que aconteceu aos habituais entusiastas dos problemas? É que desta vez só nos chegou uma resposta. Uma só, vinda de Évora (Évora, sempre Évora...) e é da autoria do Carlos Moura. Eis a sua resolução, em linhas gerais.

O 1 não pode pertencer ao conjunto. Nunca saberíamos se ele tinha saído ou não.

Se os números forem todos primos, pela unicidade da decomposição de um produto, temos a garantia de descobrir os números escolhidos.

Então, os primeiros 16 primos, do 2 ao 53, servem para já.

No entanto, como até aqui cada primo só aparece uma vez, podemos também incluir os quadrados dos números primos mais baixos: o 4, o 9 e o 25 (e eliminamar o 53, o 47 e o 43).

Agora, na decomposição em factores primos, pode aparecer por exemplo uma só vez o 2 (e sabemos que foi escolhido o número 2), ou duas vezes (foi o 4), ou três vezes (foram o 2 e o 4).

Mas agora, como o 2 não aparece mais de três vezes em qualquer decomposição, podemos incluir o 16 (que é 2 elevado a 4) e retirar o 41.

Está encontrado o menor conjunto nas condições pedidas.

2	3	4	5
7	9	11	13
16	17	19	23
25	29	31	37

A pergunta adicional tem uma análise mais complicada e trabalhosa. É preciso investigar cada série de 16 números seguidos e ver onde é que falha.

2–17 falha com 8 x 15 = 10 x 12

(e as séries seguintes também.)

9–24 com 15 x 24 = 18 x 20

16–31 com 20 x 30 = 24 x 25

21–36 com 24 x 36 = 27 x 32

E assim sucessivamente. O mais complicado surge em duas séries onde os produtos têm 3 factores:

37–52 com 38x48x50 = 40x45x52

43–58 com 44x50x54 = 45x48x55

Finalmente, encontramos uma série nas condições pedidas quando chegamos aos números de **46 a 61**.

Carlos Moura explica como depois testou esta solução. Começou por retirar da série todos os números primos ou todos aqueles em que, na sua decomposição aparecia um primo que mais nenhum outro tinha. Ficou apenas com seis números: 48, 49, 50, 54, 56 e 60. Ora, é fácil ver que com estes números não é possível arranjar dois produtos iguais.

Note-se que a noção de "menor conjunto" que aparece no enunciado do problema é ambígua. Podemos admitir que um conjunto é "maior" que outro se o seu máximo for maior que os números do outro conjunto.

O próximo problema, "Dez bolas num saco" é uma variante dos anteriores, embora necessite de uma abordagem diferente. Se o resolverem vão ver que tem uma solução surpreendente!

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

Problema proposto

Dez bolas num saco

Num saco temos dez bolas, cada uma de sua cor, cada uma com seu número. Se alguém retirar **duas** bolas e nos disser a soma dos dois números, conseguimos sempre descobrir as cores das bolas.

Qual é o menor conjunto de números naturais que devo usar para conseguir isto?

(Respostas até 8 de Setembro)

Construção de ambientes propícios à resolução de problemas no 1º ciclo*

Virgínia da Silva Nunes

Diferentes ambientes de trabalho e a utilização de diversos instrumentos pode suscitar o interesse dos alunos e conduzi-los a uma atitude activa de aprendizagem. Neste artigo, descreve-se uma experiência e mostra-se como os alunos exprimiram e partilharam os seus diferentes modos de pensar.

Apesar de toda a importância que vem sendo atribuída à resolução de problemas e da ênfase que o currículo do 1° ciclo lhe confere, considerando-a a actividade fundamental e promotora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, a realidade do processo ensino-aprendizagem da Matemática ainda não se processa em termos concordantes com estas orientações curriculares e metodológicas.

Um dos motivos deste desfasamento, na perspectiva de Frank Lester (1994, p. 19), consiste no facto de "ainda não se ter desenvolvido um programa de matemática que responda adequadamente à questão de tornar a resolução de problemas o foco central do currículo".

Também a escassez de investigação em torno da resolução de problemas, que ainda se faz sentir, a nível do 1° Ciclo, tem vindo a constituir um obstáculo à implementação desta prática pedagógica.

Por isso, é preciso promover a mudança e encarar a Matemática de uma forma diferente, já que ela se torna cada vez mais necessária para dar respostas às questões concretas do nosso dia-a-dia.

Este estudo consiste na construção de ambientes propícios à resolução de problemas, através do desenvolvimento de estratégias e sua implementação numa turma do 4° ano de escolaridade.

Tem como finalidades:

- desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática;
- reforçar positivamente os alunos face à resolução de problemas;
- analisar o empenhamento dos alunos perante as propostas de trabalho apresentadas;
- inventariar diferentes procedimentos utilizados na resolução de problemas;
- observar a evolução dos alunos em relação à capacidade de resolver e formular problemas;
- analisar a interacção professor/aluno, aluno/aluno e escola/comunidade;

e ainda,

- criar variados ambientes propícios e estimulantes à resolução de problemas.

Pretende-se, assim, que os alunos raciocinem e comuniquem claramente, sintam o prazer da descoberta e o sucesso na aprendizagem e desenvolvam auto-estima e confiança enquanto aprendizes.

A experiência

Dado que a tendência actual do ensino da matemática se centra na resolução de problemas, que os actuais programas contemplam, mas que não tem tido uma recepção muito ampla por parte dos professores, resistentes à mudança e muito ligados a práticas rotineiras, foi sentida a necessidade de um trabalho desta índole e com as características de uma investigação/acção.

Através do desenvolvimento e da aplicação de diferentes estratégias (Problema Semanal, dinâmica de grupos nas Oficinas de Problemas, Calendário de Problemas com activi-

* Extraído do relatório do projecto relativo ao CESE em Educação Infantil e Básica Inicial, Ramo de Didáctica do Meio Físico e da Matemática Elementar.

dades desenvolvidas individualmente ou em pares) e da utilização de diversos instrumentos (computador, calculadora, tangram, geoplano, blócos lógicos, material Cuisenaire e outros) pretendeu-se suscitar o interesse dos alunos e conduzi-los a uma atitude activa de aprendizagem, valorizando as suas descobertas, favorecendo a interacção, a troca de saberes e a partilha dos diferentes raciocínios.

E através da observação dos processos revelados pelos alunos, enquanto resolvedores de problemas, foram reformuladas as estratégias e seleccionados os problemas.

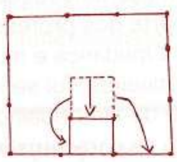
Pretendeu-se também o envolvimento dos pais, através da sua colaboração em alguns pontos deste projecto e da comunidade em geral.

Tal como todos os estudos em investigação/acção, também este teve, assim, um sentido dinâmico, baseando-se na acção, na observação, na reflexão e avaliação do trabalho realizado, tendo como objectivos a melhoria da prática educativa e a qualidade do ensino.

Problema com fósforos

Deslocar apenas três fósforos, de modo a transformar a espiral em dois quadrados.

Estratégia de resolução de um grupo de alunos:



Os alunos consideraram este tipo de problemas muito divertido e motivador e empenharam-se muito na descoberta da solução que, embora fosse quase sempre única, obrigava-os a fazer diversas tentativas para a obtenção do resultado.

Quadro 1

Este estudo decorreu ao longo dos meses de Maio e Junho de 1995, numa turma do 4º ano de escolaridade, numa escola do 1º Ciclo do Ensino Básico, no concelho de Arcos de Valdevez.

A selecção da amostra foi feita por conveniência, dado ser a turma que leccionava a investigadora. Era uma turma constituída por vinte e um alunos, sendo onze do sexo feminino e dez do sexo masculino. Em relação à idade dos alunos, a turma era bastante homogénea, situando-se entre os 9-10 anos, excepto um aluno com 12 anos. Era uma turma com um aproveitamento muito satisfatório, exceptuando duas alunas que revelavam dificuldades de aprendizagem e precisavam de bastante ajuda da professora.

As etapas seguidas foram as seguintes:

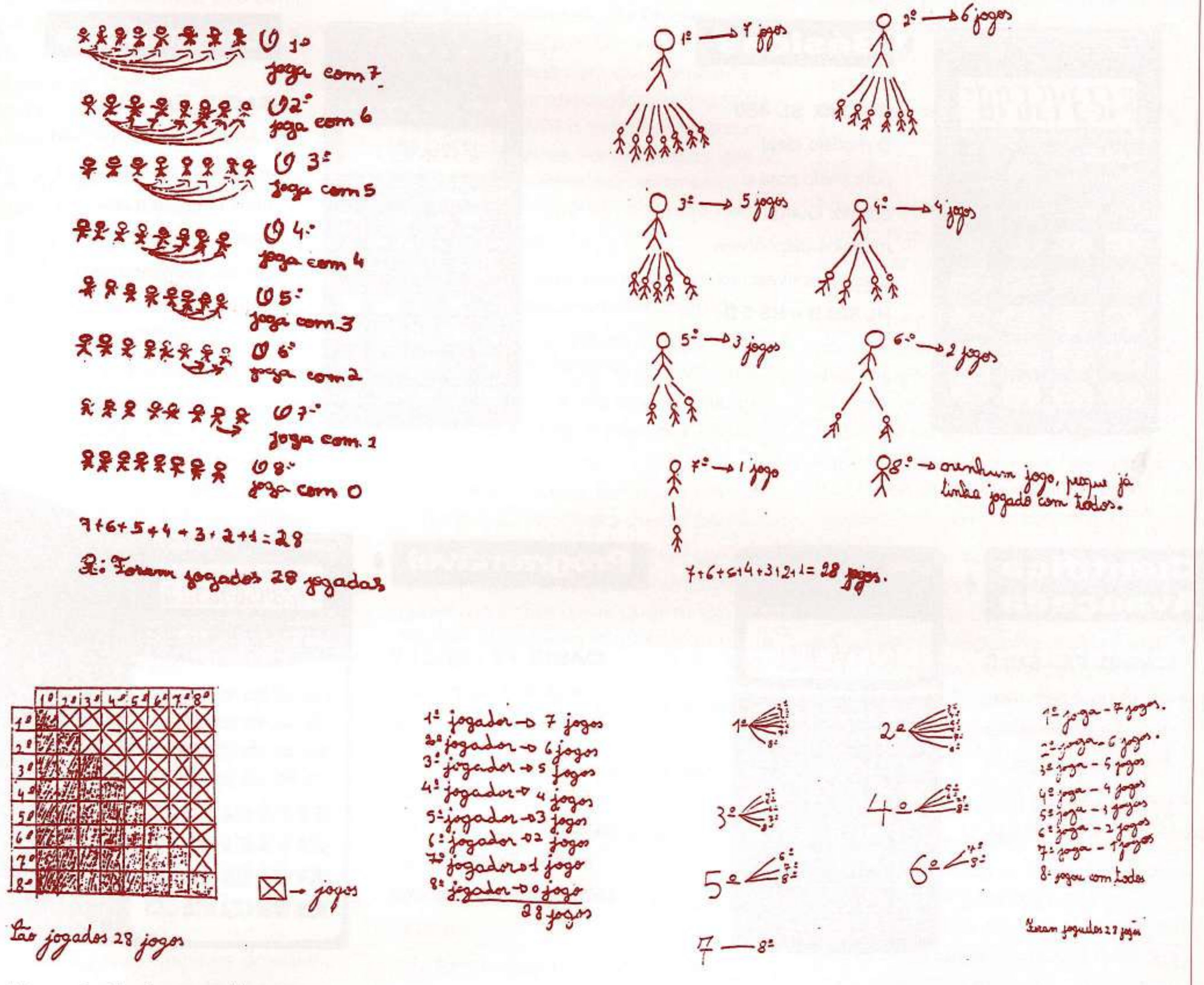
- *Inquérito aos alunos antes da aplicação do programa, destinado* à recolha de opiniões dos alunos acerca do entendimento sobre o que é um problema e das dificuldades encontradas na resolução e formulação de problemas.
- *Publicitação dos problemas,* feita através de cartazes expostos na escola e na sala de aula, tendo por objectivo sensibilizar os alunos para a importância da resolução de problemas e entusiasmá-los na participação deste estudo sobre resolução de problemas.
- *Carta aos pais e encarregados de educação,* com a intenção de alertar os pais para a importância que o programa atribui à resolução de problemas e a influência que esta actividade tem no desenvolvimento dos seus educandos, apelando à sua colaboração em alguns pontos do projecto.
- *Inquérito aos alunos após a aplicação do programa,* com a finalidade de verificar possíveis alterações em relação à opinião dos alunos no primeiro inquérito proposto e analisar as actividades desenvolvidas que foram do seu maior agrado.
- *Inquérito aos pais e encarregados de educação,no final da experiência,* com o objectivo de obter opiniões sobre as actividades desenvolvidas no âmbito da resolução de problemas, principalmente em relação ao Problema Semanal em que eles foram intervenientes.
- *Entrega de diplomas aos alunos,* como forma de valorizar o seu interesse e empenho na resolução e formulação de problemas ao longo da aplicação deste projecto.

As actividades planeadas tiveram, como tema principal, a resolução de problemas e foram apresentadas em três contextos de resolução, procurando-se em cada um uma grande diversidade de problemas que possibilitasse a aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos, bem como a exploração e descoberta de novos conceitos:

- *Calendário de Problemas:* poster realizado em papel de cenário, onde foi desenhado um calendário e, no espaço destinado a cada dia, foi inscrito um problema que era resolvido individualmente ou em pares, seguindo-se uma discussão alargada para partilha de raciocínios e estratégias utilizadas. No quadro 2 podem ver-se um exemplo deste tipo de problemas e algumas estratégias de resolução dos alunos.
- *Oficinas de Problemas:* funcionavam uma vez por semana, em situação de trabalho de grupo. Cada Oficina tinha uma actividade diferente: resolução de um problema, formulação de um problema, problema resolvido com a ajuda de manipulativos (blocos lógicos, material Cuisenaire, tangram, geoplano,...), problema resolvido com a utilização da calculadora e problema resolvido através do computador (Software Educativo no Ambiente Amiga). O trabalho era rotativo com a duração de cerca de quinze minutos por cada grupo. Todos os alunos passavam por todas as Oficinas, resolvendo os problemas e deixando a respos-

O Torneio de Xadrez

Um clube de xadrez organizou uma competição para os seus oito membros. Se cada jogador jogar um jogo com cada um dos outros jogadores, quantos jogos são jogados?



Na resolução deste problema surgiram estratégias muito diversificadas, o que demonstra já uma grande evolução dos alunos em relação aos problemas iniciais, em que se verificava pouca variedade nas estratégias utilizadas.

Quadro 2

ta por escrito. No final havia discussão em grande grupo sobre os processos utilizados por cada grupo e os resultados obtidos. Um exemplo deste tipo de problemas, a estratégia de resolução de um grupo de alunos e comentários da professora podem ver-se no quadro 1 da página anterior.

- *Problema Semanal*: proposto como trabalho de casa e resolvido, se necessário, com a colaboração dos encarregados de educação. Era distribuído aos alunos à sexta-feira e na aula seguinte era feita a partilha de estratégias utilizadas para a obtenção de resultados. Um exemplo deste tipo de problemas pode ver-se na secção *Materiais para a sala de aula*, neste número.

Também foi proposta uma actividade de *recolha de problemas tradicionais e recreativos*, feita com a colaboração dos encarregados de educação. Estes problemas foram propostos posteriormente para os alunos resolverem.

Calculadoras no Ensino - Ano Lectivo 96/97

É natural a adopção das calculadoras no ensino, e tem vindo a processar-se a adopção de matérias, processos e programas a esta nova ferramenta auxiliar para o ensino da Matemática. Nada melhor para um Educador que poder contar na sua sala com o maior número possível de alunos com a mesma calculadora, facilitando assim enormemente o evoluir da matéria e sua explicação. A **CASIO**. possui a melhor linha do mercado, este ano renovada com ainda melhores modelos e a preço mais acessível.

Básicas

CASIO. SL 450

O modelo ideal concebido para o ensino. Outros modelos disponíveis mais acessíveis **HL 820 D e HS 5 D.**

Científicas

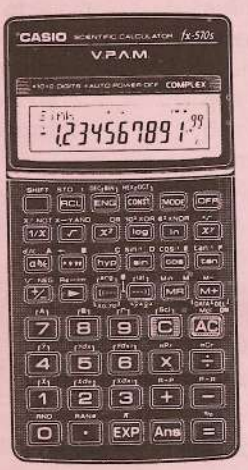
CASIO. FX - 82 SX

A **FX 82** é a máquina mais vendida no mundo, agora renovada para maior conforto e durabilidade. Cálculo com fracções e 139 funções.

Científica Avançada

CASIO. FX - 570 S

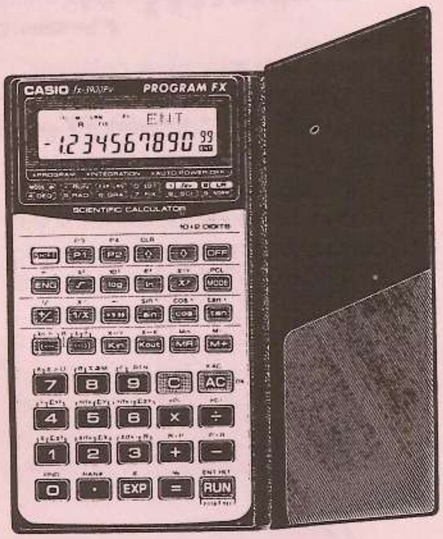
Uma calculadora sem rival, excepcionalmente completa, simples e acessível. Utiliza o novo sistema de cálculo V.P.A.M.



Programável

CASIO. FX - 3900 PV

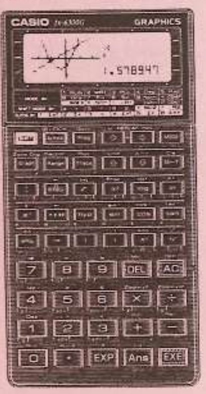
A calculadora programável mais fácil e acessível. 300 passos de programa, integrais, estatística a 2 variáveis. Já à venda novo modelo. **FX 4800 P** com 4500 passos de programa.



Calculadoras Gráficas Científicas Programáveis

CASIO. FX 6300 G

A gráfica mais económica do mercado ! Os gráficos ao alcance de todos. Todas as funções necessárias.



CASIO. FX 7400 G

A nova **7400 G** é a calculadora gráfica por excelência. Todas as funções, fácil de usar e programar, visor grande e 7 Kbytes de memória. Mantém preço acessível.

CASIO. CFX 9850

A gráfica super completa com o visor a cores, 32 Kb de memória, linguagem Tipo Basic, estudo das cónicas, sucessões, tabelas e gráficos.

Resultados

Os cartazes elaborados para sensibilizar os alunos para a resolução de problemas foram muito motivadores e entusiasmaram-nos muito. Surgiram logo muitas questões, tais como: "posso inscrever-me nesta Olimpíada?", "podemos participar todos?", "é para ver qual de nós é o melhor resolvedor de problemas?", "quando começa?", "ganham-se prémios?".

> É algo que não sabemos o que é e temos que resolver.
>
> É uma coisa que nós sentimos que temos que resolver.
>
> É uma coisa que nós devemos resolver e não sabemos como.

Já não referem apenas os problemas numéricos cuja resolução se associa à escolha de algoritmos, como a maior parte referia no primeiro inquérito. Quase todos associam a resolução de problemas à utilização de várias estratégias por eles utilizadas (tabelas, descoberta de padrões e de sequências, representações em árvore, cálculo mental, recurso ao algoritmo...) e referem os problemas recreativos que tanto os divertiram e entusiasmaram.

A percentagem de alunos que gosta de resolver problemas subiu de 71% do primeiro inquérito para 100% no segundo, donde se pode concluir que as actividades envolvidas no estudo despertaram nos alunos o gosto pelos problemas. Transcrevem-se de seguida algumas opiniões dos alunos na justificação da questão "porque gostas de resolver problemas?"

> (...) porque me exercitam a mente e desenvolvem o meu conhecimento matemático.
>
> (...) porque nos dão divertimento e ajudam-nos a pensar.
>
> (...) porque ficamos mais preparados para resolver os problemas que nos vão aparecendo durante a vida.
>
> (...) porque através dos problemas aprendemos coisas novas.
>
> (...) porque são divertidos e ajudam-nos a gostar da matemática.
>
> (...) porque nos obrigam a pensar e a ter imaginação.

Em relação aos contextos de resolução preferidos surgem em primeiro lugar as Oficinas de Problemas, em segundo lugar o Problema Semanal e por fim o Calendário de Problemas. As actividades das Oficinas foram, na verdade, aquelas em que os alunos se sentiram mais envolvidos, porventura porque acharam o trabalho de grupo mais estimulante. As respostas que a seguir se transcrevem evidenciam bem a sua preferência por este tipo de actividades:

> (...) trabalhamos com vários materiais e os problemas são divertidos.
>
> (...) são mais cabeças a pensar e há mais hipóteses de os ter certos.
>
> (...) adoro as aulas de matemática que não são só a falar e a treinar com contas.
>
> (...) assim é que se passa bem o tempo, já são quase quatro horas.

Dado que as Oficinas de Problemas tinham várias actividades também quisemos saber a sua preferência nessas actividades e verificamos o seguinte:

1° - problema resolvido no computador;

2° - problema resolvido com auxílio de manipulativos;

3° - problema resolvido com auxílio da calculadora;

4° - problema resolvido sem qualquer auxiliar;

5° - formulação de um problema.

Através do inquérito que foi proposto aos encarregados de educação, no final desta experiência, pudemos verificar que eles consideraram estas actividades muito enriquecedoras para os seus educandos e que deveriam continuar no futuro. Verificou-se também que na resolução do Problema Semanal não houve apenas o envolvimento dos alunos e seus pais, mas uma participação mais alargada que envolveu outros familiares e amigos, o que demonstrou o grande interesse e empenho por este tipo de actividades.

Envolvimento dos alunos e sua evolução ao longo do programa

Pudemos verificar, ao longo da aplicação deste projecto, que a utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas e a diversidade de material utilizado, constituíram uma fonte de grande motivação para os alunos. O interesse e o empenhamento por eles manifestado foi-se sentindo cada vez mais no trabalho que realizavam.

Nas Oficinas de Problemas foi-se verificando um envolvimento crescente na discussão das propostas apresentadas pelos elementos do grupo, na procura de diferentes processos de resolução e na análise das soluções encontradas. Os alunos sentiam uma maior confiança quando trabalhavam em grupo, já que sendo várias cabeças a pensar havia mais hipóteses de chegar à solução correcta, como eles afirmaram.

O computador foi o instrumento que mais cativou os alunos, devendo-se realçar o efeito da novidade, já que para estas crianças era novo utilizarem o computador em situação de ensino/aprendizagem. Ao proporcionar-lhes o acesso a diferentes materiais manipulativos (tangram, geoplano, blocos lógicos, material Cuisenaire, calculadora...) e dando-lhes oportunidade de experimentar, discutir, descobrir, proporcionámos aos alunos momentos de grande agrado e curiosidade. Não podemos esquecer que estas crianças estão na fase das operações concretas e o seu conhecimento apoia-se na realidade física.

A formulação de problemas foi a actividade das Oficinas que menos despertou os alunos, verificando-se claramente que os alunos preferem resolver do que formular problemas. Talvez isso se deva ao facto de, neste projecto, a formulação de problemas ser menos trabalhada do que a sua resolução. De qualquer modo, foi-se notando um certo progresso, procurando formular problemas com mais criatividade e uma certa preocupação na procura de enunciados cuja resolução pudesse ter mais que uma solução.

Os problemas do Calendário, que eram geralmente resolvidos individualmente, foram os que surgiram em último lugar na preferência dos alunos e onde se verificaram mais dificuldades, principalmente nos alunos que revelavam menor desempenho na resolução de problemas e que precisavam de ser mais apoiados pela professora. Mas também aqui se verificou uma certa evolução, já que começaram a utilizar estratégias mais diversificadas de resolução, maior persistência na procura da solução e mais autonomia em relação à professora.

A diversidade de problemas adoptada contribuiu também para que os alunos ampliassem a noção de problema, já que inicialmente referiam apenas os problemas numéricos, mais rotineiros, mas foram-se apercebendo gradualmente que a resolução de problemas não se resume à prática deste tipo de problemas. E, embora de início, ficassem um pouco perplexos quando não sabiam por onde começar a resolver um problema, foram-se consciencializando que era nesse facto que residia a verdadeira noção de problema e começaram a encarar os problemas como um desafio que eram capazes de ultrapassar.

Também o facto de terem sido integrados no programa de problemas, uma percentagem muito significativa de problemas de processo e ainda de problemas aplicados e tipo puzzle, a que os alunos não estavam habituados, tivesse contribuído para a grande adesão a este projecto.

Envolvimento dos pais e encarregados de educação e outros elementos da comunidade

Este projecto, para além de contribuir para despertar nos alunos o interesse e o gosto pela resolução de problemas e de os tornar mais capazes na prática desta actividade, quer a nível da capacidade de raciocínio e de comunicação, quer na utilização de diversas estratégias, foi muito enriquecedor a nível do envolvimento dos pais e encarregados de educação e de outros elementos da comunidade.

Foi com bastante interesse e empenhamento que os encarregados de educação colaboraram, quer no apoio que deram aos seus educandos na resolução do Problema Semanal, quer na recolha de problemas. Estabeleceram contactos frequentes com a professora e demonstraram sempre muita curiosidade em saber se a solução do problema estava correcta e por diversas vezes pediram aos seus educandos para levarem para casa as soluções e as diversas estratégias utilizadas. Consideraram estas actividades muito enriquecedoras para os seus educandos, salientando uns que deveriam ter sido programadas ao longo de todo o ano escolar e outros adiantaram que deveriam continuar no futuro. Nestas actividades houve acolaboração de outras pessoas, tais como outros familiares e amigos dos alunos, o que revelou o interesse manifestado por esta iniciativa.

Mas o projecto despertou também a curiosidade de outros professores, para quem os cartazes expostos na escola também serviram de sensibilização. Assim, e por diversas vezes, a professora foi abordada quer por colegas da própria escola, quer de outras escolas, que pretendiam trocar impressões acerca desta experiência e pedir exemplares de problemas que lhes foram fornecidos para trabalhar com os seus alunos nas respectivas escolas.

Pode assim considerar-se que foi muito gratificante todo o empenho e mobilização conseguidos em torno deste projecto.

Sugestões para futuras investigações

Com este estudo chegou-se à conclusão que os alunos gostam mais de resolver do que de formular problemas. Quais serão os motivos de tal preferência? Será pelo facto de nas escolas os alunos estarem mais habituados a resolver problemas do que de os formular? Será que, como defende Wittenberg, continuamos a educar crianças a partir de questões que outros levantaram e não a partir de questões que elas próprias colocam?

São algumas questões que se deixam em aberto e que possibilitarão futuras investigações na área de resolução e formulação de problemas.

Referências

Charles, R. e Lester, F. (1984). *Teaching Problem Solving*. London: Edward Arnold Lda.

DGEBS (1990). Ensino Básico - *Programa do 1º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Lester, F. (1994). O que aconteceu à Investigação em Resolução de Problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In Domingos Fernandes, António Borralho e Gertudes Amaro (eds), *Resolução de Problemas: Processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Wittenberg, A., France, S. e Lemay, F. (1963). *Redécouvrir les Mathematiques: Example d'enseignement genétique.* Suisse: Edition Delachaux & Niestlé.

Virgínia Barros da Silva Nunes
Escola EB1 da sede do concelho de Arcos de Valdevez

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta na página seguinte foi utilizada com alunos do 4º ano e é referida no artigo "Construção de ambientes propícios à resolução de problemas no 1º ciclo" da autoria de Virgínia da Silva Nunes.

Reproduzimos aqui o comentário escrito por um aluno:

"Este problema foi muito interessante porque tivemos de fazer a experiência, medir, aprendemos a fazer médias e chama-nos a atenção para o problema da poupança da água que desperdiçamos. Ao fim de uma lavagem, parece pouca água, mas num ano é uma diferença muito grande".

Escola..

Ano/Turma.................... Data........................ Aluno(a)..

Vamos poupar água

A água é indispensável à vida de animais e plantas. Mas... a água não é inesgotável e está a desaparecer no planeta. É preciso poupar água!

Através da experiência que vais realizar, descobre uma maneira simples de poupar água.

1. Lava os dentes com a água da torneira sempre a correr. Mede a água que gastaste com um copo graduado.

Se tivesses utilizado dois copos de água, terias gasto, em média, 0,5 l. Isto significa que, de cada vez que lavas os dentes com água corrente, desperdiças água.

2. Que quantidade de água desperdiças de cada vez que lavas os dentes com água corrente?

3. E se lavares os dentes, três vezes por dia?

4. E ao fim de um ano?

5. E que quantidade de água desperdiçará uma família composta por pai, mãe e dois filhos?

6. Comenta os resultados que obtiveste.

....

....

A Matemática nos estudos secundários desde a época pombalina à implantação da República

Maria Guilhermina Nogueira

Os problemas do ensino da Matemática não devem ser vistos isoladamente mas sim integrados nos da Educação em geral. Mas uma "viagem" no tempo mostra que, em questões de educação e ensino, parece ter havido sempre uma enorme distância a separar as intenções e ideias das práticas...

Na busca de resposta à questão que continuamente nos surge do porquê do enorme desfasamento que se verifica entre a formação cívica e cultural do cidadão português e a dos cidadãos dos outros países europeus, ocorreu-nos procurar relações com a educação que lhes é proporcionada e especificamente com a educação matemática.

Não sabemos, é certo, qual o grau de conexão entre educação matemática e formação cívica e cultural, mas também é certo que constatamos diariamente um enorme défice das duas.

De facto, em nenhum país da Europa com situação política estável, se verificam, hoje, comportamentos que em Portugal são usuais — lançar toda a espécie de detritos pela janela do automóvel em qualquer lugar, deixar o lixo depois do piquenique no pinhal ou na praia, incomodar o vizinho com o rádio ou a televisão muito acima do aceitável, servir-se dos espaços públicos como se estes apenas lhes pertencessem, enorme insensibilidade perante o património histórico e cultural, baixíssimo índice de consumo de cultura e actividades de lazer, acompanhado de elevado consumo de bens ostensivos (ex.: telemóveis) etc..

Pensamos que uma educação que abrangesse todos os cidadãos e que tivesse uma forte componente científica, logo matemática, propiciaria uma formação global que seria, pelas atitudes e valores promovidos, um travão ao desenvolvimento de atitudes como as antes referidas e um motor para o desenvolvimento de outras de cariz mais positivo.

Motivados por esta reflexão fomos procurar esboçar uma imagem do que foi a educação matemática numa época suficientemente afastada para permitir uma análise desapaixonada, mas não tanto que não pudesse já, ser comparada com a actual. Procurou-se observar o ensino da matemática integrado no ensino em geral e no ambiente político, social e cultural de cada época.

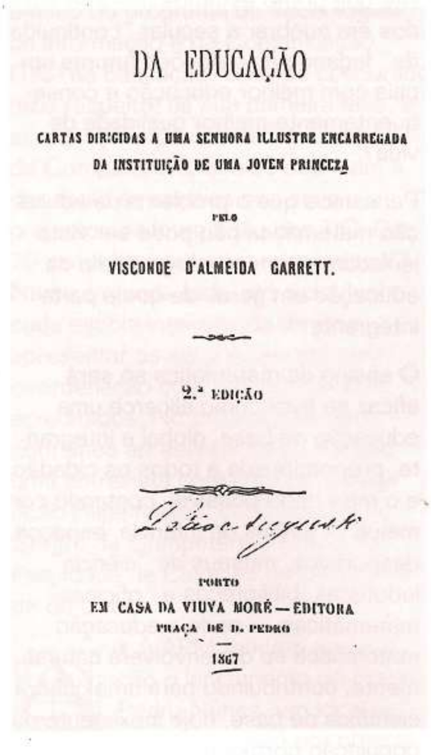
Tomou-se como linha orientadora de pesquisa, a procura de respostas a questões como:

- Que reformas atendiam especificamente ao ensino da Matemática?
- Que personalidades elaboravam essas reformas e com que filosofias?
- Em que enquadramento político-social surgiam?
- Que meios para a sua execução?
- Quem ensinava matemática e onde?
- Existiam já preocupações metodológicas?
- Que compêndios existiam e compostos por quem?

Foi com grande surpresa que verificámos, no decorrer das pesquisas, a preocupação manifestada publicamente, por personalidades relevantes da vida política e cultural do país, acerca da necessidade/importância do ensino elementar e médio da Matemática. De modo geral, a importância desse ensino era referida, quer pela vertente formativa, quer pela vertente utilitária, mesmo que as reformas acabassem, quase sempre, por implantar um ensino teórico e sem qualquer utilidade que resultou na quase nula formação científica do cidadão comum.

Desde personalidades como Martinho de Mendonça e Luís Verney — que pela sua vivência no estrangeiro puderam contactar horizontes culturais inexistentes no país — que influenciaram na Reforma Pombalina a criação do Real Colégio dos Nobres e da Faculdade de Matemática, até Bernardino Machado — deputado na Monarquia e Presidente por duas vezes na 1ª República — que interveio diversas vezes na Assembleia, referindo a necessidade de se preparar professores para o ensino secundário, vamos encontrar, entre outros:

Almeida Garrett — uma das figuras mais importantes da nossa Literatura, político perseguido pelo Absolutismo, ministro do Liberalismo, obreiro da reforma de Passos Manuel (1836) — que escreve, durante o exílio em Londres (1829) a obra *Da Educação*, dedicada à educação da princesa Maria da Glória, futura D. Maria II, onde refere especificamente o ensino da Aritmética e da Geometria indicando como método para aquele ensino, "o de ser quem apprende o artífice de suas próprias ideias, o mestre de si mesmo", método que, ainda hoje, tentamos pôr em prática;


DA EDUCAÇÃO

CARTAS DIRIGIDAS A UMA SENHORA ILLUSTRE ENCARREGADA DA INSTITUIÇÃO DE UMA JOVEN PRINCEZA

PELO

VISCONDE D'ALMEIDA GARRETT.

2.ª EDIÇÃO

PORTO

EM CASA DA VIUVA MORÉ — EDITORA

PRAÇA DE D. PEDRO

1867

Adolfo Coelho — pedagogo e escritor, um dos promotores das célebres *Conferências do Casino* (1871), que abalaram a sociedade da época e tornaram famosa a chamada Geração de 70 de que fizeram parte, entre outros, Antero de Quental e Eça de Queirós — que numa das Conferências critica violentamente o estado do ensino secundário e em especial o de Matemática;

Ramalho Ortigão — outro dos elementos da Geração de 70 e personalidade marcante da história literária do país — que, num discurso como deputado da Assembleia, refere várias deficiências do ensino de Matemática, entre as quais a péssima qualidade dos compêndios;

Jaime Moniz — personalidade da área literária, autor duma das reformas mais sérias do ensino secundário — que criou, como director do Curso Superior de Letras, pela primeira vez em 1901, o curso de formação de professores de Matemática e Ciências para o ensino secundário.

Destacam-se no período estudado, três etapas decisivas, embora com resultados pouco visíveis, porque, como escreveu D. António da Costa (1871), "Destino fatal deste povo. Vingam as leis que o oprimem ou deixam estacionário, e suprimem-lhe as que o regeneram e adiantam".

A primeira etapa é marcada pelas medidas tomadas pelo Marquês de Pombal de que destacamos:

- Estabelecimento de uma rede de ensino oficial, os Estudos Menores, que englobava as escolas de primeiras letras (ler, escrever e contar) e as escolas régias (aulas isoladas de várias disciplinas que não incluíam a Matemática);
- Criação do Real Colégio dos Nobres, para os filhos da nobreza e da alta burguesia, com um forte ensino de Matemática para o qual foi chamado um professor italiano, Miguel Franzini, que também foi encarregado de traduzir os *Elementos de Euclides* e o *Compêndio de Aritmética* de Bézout;
- Criação da Aula do Comércio, para os filhos dos negociantes, em cujo regulamento eram estabelecidas regras precisas para o ensino da Aritmética.

Existiam ainda aulas de Matemática em alguns regimentos de cuja organização e metodologia se encarregou o conde de Lippe, comandante alemão a quem o Marquês entregou a chefia das tropas.

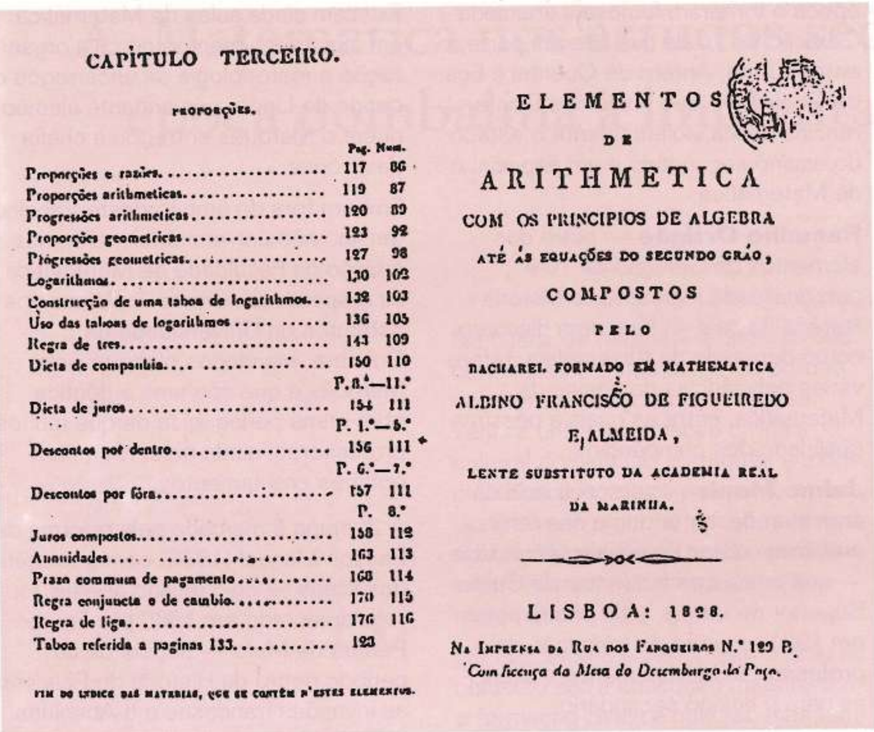
Embora fora do âmbito deste trabalho (ensino não universitário), referimos a criação da Faculdade de Matemática e as respectivas normas incluídas nos Estatutos da Universidade de Coimbra, mandados elaborar pelo Marquês e que são uma autêntica obra prima pedagógica de que muitos professores, ainda hoje, retirariam óptimos ensinamentos.

A 2ª etapa é marcada pela reforma de Passos Manuel (1836) com a criação dos liceus — cujo ensino apenas foi regulamentado em 1860 por Fontes Pereira de Melo — depois de um periodo negro da História do País com as invasões francesas e o Absolutismo a perseguirem e obrigarem ao exílio personalidades cujo contributo para o ensino era imprescíndivel.

É no texto daquela reforma que aparece, pela primeira vez, referida a necessidade de se prepararem professores especificamente para o ensino da Matemática que não existia ou era feito por religiosos. A falta dessa preparação é depois referida ciclicamente, como a causa fundamental da má qualidade do ensino, reflectida, necessariamente, no generalizado atraso científico do nosso país.

Apesar das circunstâncias, dois matemáticos — Garção Stokler e Dias Pegado, também atingidos pelo exílio — elaboraram reformas de ensino que serviram de inspiração à de Passos Manuel. Esta foi pensada e elaborada para provocar uma radical mudança de mentalidades e não apenas uma mudança de sistema de ensino, mas, com as desavenças entre os liberais, Passos Manuel abandona a política e a reforma fica no papel, quase não existindo ensino de Matemática até 1860 em que se regulamenta, pela primeira vez, o ensino nos liceus.

Destaca-se ainda o aparecimento do que pensamos ser o primeiro compên-



CAPÍTULO TERCEIRO.

PROPORÇÕES.

	Pag.	Num.
Proporções e razões	117	86
Proporções arithmeticas	119	87
Progressões arithmeticas	120	89
Proporções geometricas	123	92
Progressões geometricas	127	98
Logarithmos	130	102
Construcção de uma taboa de logarithmos	132	103
Uso das taboas de logarithmos	136	105
Regra de tres	143	109
Dicta de companhia	150	110
	P. 8.ª—11.ª	
Dicta de juros	154	111
	P. 1.ª—5.ª	
Descontos por dentro	156	111
	P. 6.ª—7.ª	
Descontos por fóra	157	111
	P. 8.ª	
Juros compostos	158	112
Annuidades	163	113
Prazo commum de pagamento	168	114
Regra conjuncta e de cambio	170	115
Regra de liga	176	116
Taboa referida a paginas 133	123	

FIM DO INDICE DAS MATERIAS, QUE SE CONTÊM N'ESTES ELEMENTOS.

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

COM OS PRINCIPIOS DE ALGEBRA

ATÉ ÁS EQUAÇÕES DO SECUNDO GRÁO,

COMPOSTOS

PELO

BACHAREL FORMADO EM MATHEMATICA

ALBINO FRANCISCO DE FIGUEIREDO

E ALMEIDA,

LENTE SUBSTITUTO DA ACADEMIA REAL

DA MARINHA.

LISBOA: 1828.

Na Impressa da Rua dos Fanqueiros N.º 129 B.

Com licença da Mesa do Desembargo do Paço.

dio de Aritmética em português, de Albino Figueiredo e Almeida, como alternativa ao de Bézout a quem apontava alguns erros. Este compêndio está escrito com uma perspectiva filosófica e pedagógica que não voltamos a encontrar nos compêndios adoptados até ao fim do século que se resumiam a um amontuado de regras e fórmulas cujo ensino se nos afigura, hoje, quase um processo de tortura.

Na 3ª etapa destaca-se, embora com efeito apenas simbólico, a criação pela primeira vez do Ministério da Instrução e uma série de reformas e contra-reformas, consequência do período de efervescência política e social que o país viveu a partir da década de 70.

Destas reformas, algumas absolutamente *sui generis*, como a dos "concentrados" de disciplinas por ano, aborda-se em pormenor a de João Franco/Jaime Moniz (1894-1895) pois a seriedade com que foi pensada, elaborada e executada fizeram com que, com algumas alterações, perdurasse muito para além da implantação da República. Nela era dado grande destaque aos programas e à metodologia para o ensino da Matemática (em termos não muito diferentes dos actuais) e para as alterações que sofreu (1905) muito contribuiu o Matemático Luciano Pereira da Silva, que veio a ser o primeiro professor de Metodologia das Ciências Matemáticas e História da Pedagogia na faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, já após a implantação da República.

No final da "viagem" no tempo em que consistiu o trabalho de pesquisa realizado, sentimos um certo desencanto provocado, por um lado, pela constatação da enorme distância que sempre separou, em questões de educação/ensino, as intenções e ideias, das práticas, e por outro, pela "continuidade" dos problemas, que se mantêm nos tempos actuais. De facto, a par da sempre reconhecida necessidade de um ensino da Matematica capaz de produzir cultura científica, vemos serem apontadas como causas para a sua má qualidade, as mesmas de sempre:

- falta de preparação dos professores;
- extensão dos programas;
- prática de um ensino teórico e formal;
- má qualidade dos compêndios;
- falta de materiais para um ensino prático.

Não havendo grandes divergências quanto às soluções a adoptar a "continuidade" mantém-se, pensamos, não por qualquer fatalismo histórico, mas essencialmente por duas razões:

- a não disponibilização, por parte dos governos, dos meios, materiais e humanos, necessários a um investimento sério na educação, um desperdício!, que, contrariamente a outros investimentos, não se traduz em resultados eleitorais imediatos, mas apenas na cultura e bem estar das gerações futuras, e
- a passividade chocante com que os cidadãos, acríticos e pouco exigentes, encaram a não satisfação dos seus direitos, que, neste caso, significa o não reconhecimento do real valor da educação e do ensino — atitude reveladora do estatuto cultural de um povo.

Até que ponto estamos nós interessados em quebrar a secular "continuidade" legando às gerações futuras um país com melhor educação e consequentemente melhor qualidade de vida?

Pensamos que o problema da educação matemática não pode ser visto isoladamente mas integrado no da educação em geral, de que é parte integrante.

O ensino da matemática só será eficaz se tiver como alicerce uma educação de base, global e integrante, proporcionada a todos os cidadãos e o mais cedo possível, contando com meios — jardins de infância, espaços desportivos, museus de "ciência", ludotecas, bibliotecas e "oficinas" matemáticas — onde a educação matemática se desenvolverá naturalmente, contribuindo para uma cultura científica de base, hoje inexistente na população portuguesa.

Maria Guilhermina Nogueira
Escola Secundária Almeida Garrett
Vila Nova de Gaia

Tecnologias na educação matemática

O Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal

Foi aprovado pelo Conselho de Ministros e apresentado na Assembleia da República o Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal. Trata-se de um documento que discute o tema do acesso à informação e ao conhecimento e das modificações profundas que neste domínio o mundo está a experimentar, e que aponta os caminhos de adaptação do nosso país a essas transformações. Se é certo que as questões discutidas neste livro interessam a todo o cidadão, é evidente o interesse que tem para nós o seu tema, como professores atentos aquelas transformações e à sua influência na aprendizagem, em particular da Matemática. O cap. 4 do livro intitula-se A Escola Informada: Aprender na Sociedade da Informação, *e inclui as secções: 1) Objectivos e desafios da escola informada; 2) Dinamização estratégica; 3) Equipar os estabelecimentos escolares; 4) Qualificação do professor para a sociedade da informação; 5) Rede de serviços e comunidades específicas; 6) investigação e avaliação de impactos; 7) Medidas. Apresentamos na página seguinte alguns extractos do Livro Verde, com o objectivo de chamar a atenção dos nossos leitores para este importante texto. O livro está disponível em formato electrónico no servidor WWW da Missão para a Sociedade da Informação, no endereço http://www.missao-si-mct.pt.*

Notícias breves

• Como noticiámos no último número da revista, o projecto Nónio Séc. XXI lançou alguns concursos no âmbito do programa de Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) na Educação. Um dos concursos dizia respeito, na sua primeira fase, à acreditação dos chamados Centros de Competência, que se destinam a dar apoio ás escolas nos seus projectos de integração das TIC. Das 79 candidaturas foram aprovadas 23. Numa segunda fase, até 5 de Junho, cada escola interessada deveria apresentar os seus projectos, em coordenação com um dos Centros acreditados. No próximo número contamos apresentar nesta secção uma entrevista com o nosso colega João Filipe Matos, coordenador do Centro de Competência Nónio da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

• A APM tem em preparação o lançamento do Forum Pedro Nunes, um local no WWW que tem por objectivo apoiar os professores e alunos de Matemática das escolas portuguesas a tirar proveito das potencialidades da Internet. O Forum Pedro Nunes terá de início três componentes: Investiga & Partilha (lançamento periódico de actividades de investigação em matemática para os ensinos básico e secundário, recolha das respostas e partilha dos resultados), Pergunta Agora (consultório matemático) e Actividades e Recursos (construção de unidades temáticas e listas anotadas de recursos matemáticos na rede). Pode ver o Investiga & Partilha, ainda experimental, em www.eseset.pt/ip/ (endereço provisório).

• Todos os meses o Math Forum elege um local (*site*) de matemática como "hot spot" do mês. Neste mês de Junho foi escolhido um local de Alexandre Bogomolny, cheio de matemática interactiva e de puzzles. Não deixe de visitar (www.cut-the-knot.com).

• Para pesquisar o Math Forum, podemos ir ao endereço (http://forum.swarthmore.edu/special.html). O *software* educativo de matemática (programas para *download*, críticas, textos de vários tipos, etc.) está em http://forum.swarthmore.edu/shareware/shareware.by.topic.html

ICTE Oslo 1997

• De 10 a 13 de Agosto vai realizar-se em Oslo o *14th International Conference on Technology and Education* (14° Encontro sobre Tecnologia na Educação). O tema geral do encontro é *Changing Practices and Technologies: Decisions Now for the Future*. O programa científico da conferência é subdividido em sete temas:

1) *Information Technology and Educational Policy*
2) *Implementation in the Classroom*
3) *Educational Tools*
4) *Distance and Open Learning*
5) *Teacher Education*
6) *Research Programs*
7) *Education and the Information Technology Industry*

No domingo que antecede a reunião existirão seminários sobre os seguintes temas: *Web Authoring Tools*, Linguagem Java, Intranets na Educação, Autoformação na Web.Boletins de inscrição e de alojamento podem ser impressos a partir da Internet, no endereço http://www.icte.org.

A escola informada: aprender na sociedade da informação

(extractos do cap. 4 do Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal)

Objectivos e desafios da escola informada

Assiste-se a um desenvolvimento significativo da informação disponível para os cidadãos. O aluno chega à escola transportando consigo a imagem dum mundo - real ou fictício - que ultrapassa em muito os limites da família e da sua comunidade. As mensagens mais variadas - lúdicas, informativas, publicitárias - que são transmitidas pelos meios de comunicação social entram em concorrência ou em contradição com o que as crianças aprendem na escola. [...]

Portanto, hoje, escola e professores encontram-se confrontados com novas tarefas: fazer da Escola um lugar mais atraente para os alunos e fornecer-lhes as chaves para uma compreensão verdadeira da sociedade de informação. Ela tem de passar a ser encarada como um lugar de aprendizagem em vez de um espaço onde o professor se limita a transmitir o saber ao aluno; deve tornar-se num espaço onde são facultados os meios para construir o conhecimento, atitudes e valores e adquirir competências. Só assim a Escola será um dos pilares da sociedade do conhecimento. [...]

A educação articula-se com a sociedade de informação, uma vez que se baseia na aquisição, actualização e utilização dos conhecimentos. [...] Assim, a educação deve facultar a todos a possibilidade de terem ao seu dispor, recolherem, seleccionarem, ordenarem, gerirem e utilizarem essa mesma informação.

A escola pode contribuir de um modo fundamental para a garantia do princípio de democraticidade no acesso às novas tecnologias de informação e comunicação [...].

Cabe ao sistema educativo fornecer, a todos, meios para dominar a proliferação de informações, de as seleccionar e hierarquizar, com espírito crítico, preparando-os para lidarem com uma quantidade enorme de informação que poderá ser efémera e instantânea.[...]

Qualificação do professor para a Sociedade da Informação

A importância do papel do professor enquanto agente de mudança, favorecendo a compreensão mútua e a tolerância, nunca foi tão patente como hoje em dia. [...]

Com o desenvolvimento de novos meios de difusão, a informação deixou de ser predominantemente veiculada pelo professor na escola. Mas informação não é conhecimento e o aluno continua a necessitar da orientação de alguém que já trabalhou ou tem condições para trabalhar essa informação.

[...] Munidos destes novos instrumentos os alunos podem tornar-se "exploradores" activos do mundo que os envolve. Os professores devem ensinar os alunos a avaliar e gerir na prática a informação que lhes chega. [...] Certamente que o professor já não pode, numa sociedade de informação, limitar-se a difusor de saber. Torna-se, de algum modo, parceiro de um saber colectivo que lhe compete organizar.

[...] A experiência tem demonstrado que a tecnologia mais avançada não tem qualquer utilidade para o meio educativo se o ensino não estiver adaptado à sua utilização. Há pois que elaborar conteúdos programáticos que façam com que estas tecnologias se tornem verdadeiros instrumentos de ensino, o que pressupõe, da parte dos professores, vontade de questionar as suas práticas pedagógicas. Além disso devem ser sensíveis também às modificações profundas que estas novas tecnologias provocam nos processos cognitivos. Já não basta que os professores se limitem a transmitir conhecimentos aos alunos, têm também de os ensinar a pesquisar e a relacionar entre si diversas informações, revelando espírito crítico.

Tendo em conta a quantidade enorme de informações que circulam actualmente nas redes digitais, ser capaz de nelas se orientar tornou-se um pré-requisito do próprio saber, a necessitar daquilo que alguns já chamam 'nova alfabetização".

O programa T³

T³ PORTUGAL é um programa de formação de professores que está a ser desenvolvido em Portugal pela APM. Este programa tem como objectivo a formação de professores na utilização da tecnologia gráfica, no ensino e aprendizagem da Matemática.

O programa inclui dois tipos de acções:

1. Sessões de apresentação de 3 horas.
2. Cursos creditados de 25 horas.

O programa iniciou-se em Março com as primeiras sessões de apresentação: Arraiolos, Leiria, Seixal, S. João da Madeira e Braga.

Os cursos creditados de 25 horas iniciaram-se em Maio, com o primeiro a realizar-se em Lisboa, imediatamente seguidos dos de Coimbra e Porto. O número de professores interessados foi tão grande que se decidiu fazer segundo curso em Lisboa, a iniciar ainda em Junho.

Para este ano estão previstos cursos em Évora, Figueira da Foz, Leiria e Viseu, para além de um curso especial de 50 horas. Brevemente serão dadas as informações sobre as datas, locais e nomes dos formadores destes cursos.

Os cursos deste ano são de iniciação ao uso das calculadoras gráficas. A partir de Janeiro de 1998 começarão cursos específicos de Cálculo, Estatística e Geometria.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Carnide

Matemática Discreta: relações de recorrência num contexto de resolução de problemas

Graciosa Veloso

Os problemas que se apresentam são problemas de contagem, em que as relações de recorrência se revelam úteis como meio de compreensão ou como modelo de resolução da situação problemática. Este é um possível contributo para a fundamentação de outras metodologias e de outras lógicas de apresentação e de prática do programa de matemática.

Na experiência, recente, como docente do departamento de Matemática de uma Escola Superior de Educação tenho tido responsabilidades na formação científica e didáctica de alunos da variante de Matemática/Ciências Naturais e de alunos de outras variantes. Neste artigo pretendo valorizar o papel formativo de aspectos da Matemática Discreta que foram utilizados em processos de resolução de problemas de contagem.

O primeiro problema aqui apresentado, "O jogo das torres de Hanói" foi proposto a alunos do 1° ano da variante de Matemática/Ciências Naturais, no âmbito da cadeira de Análise Matemática, no capítulo das sucessões, com o propósito de valorizar matematicamente as relações de recorrência em processos de resolução de problemas. Este problema também foi proposto a alunos de outros cursos no âmbito de uma cadeira de resolução de problemas, com o propósito de trabalhar "boas" estratégias de resolução de problemas envolvendo poucos conhecimentos de matemática formal.

O segundo problema, "Qual é o número máximo de regiões definidas?" (NCTM, 1991), foi proposto ao segundo grupo de alunos, inserido num conjunto de problemas de contagem, com dois objectivos: dar importância a aspectos experimentais nos processos argumentativos e compreender o processo gerador de novas regiões utilizando a relação de recorrência como um modelo adequado.

Relações de recorrência e Matemática Discreta

Os métodos e conceitos próprios da Matemática Discreta não são novos, mas ultimamente esta tem-se desenvolvido muitíssimo graças à resolução de problemas, às aplicações da Matemática e à utilização crescente das Tecnologias de Informação. A Matemática Discreta estuda e utiliza, entre outras coisas, as relações de recorrência em processos de resolução de problemas de contagem.

Segundo Johnsonbaugh (1993) uma *relação de recorrência* para uma sequência a_0, a_1, a_2,... fica estabelecida através de uma equação que exprime o termo de ordem n, a_n, em função de termos de ordem anterior, a_0, a_1, ..., a_{n-1}, e do conhecimento de um número finito de termos da sequência, geralmente o primeiro termo.

Os problemas que se apresentam são problemas de contagem, em que as relações de recorrência se revelam úteis como meio de compreensão da situação ou como modelo de resolução da situação problemática. As relações de recorrência surgiram como modelos, naturalmente criados pelos alunos, para responder a certas situações, ou como argumentos para explicarem conjecturas por eles estabelecidas. Estas relações têm exigido saberes acessíveis aos alunos e que muitas vezes não são novos para eles. Do ponto de vista da aprendizagem esta é uma razão que contribui para mostrar a pertinência do tópico invocado. Concordando com Stephen B. Maurer & Anthony Ralston (1991) e Crisler & al. (1994) é de salientar que a utilização da calculadora e do computador requerem permanentemente a construção e a utilização de relações de recorrência.

O primeiro problema está formulado sob a forma de jogo de estratégia e o segundo apela naturalmente ao traçado de uma figura como meio de interpretação e como auxiliar de resolução.

Os problemas aqui apresentados apelam à utilização do raciocínio recursivo. Este tipo de raciocínio é particularmente importante, nomeadamente, porque está na raiz das operações de contagem e é aplicado na utilização do factor constante da calculadora e em algoritmos de computação, como por exemplo nas folhas de cálculo electrónicas.

Nos processos de resolução destes problemas utilizaram-se estratégias e relações que integram tópicos de Matemática Discreta, habitualmente não consideradas como tal e frequentemente pouco aprofundadas. Referimo-nos concretamente a relações de recorrência que integram este ramo recente da Matemática.

Dois problemas

Apresentam-se os aspectos mais significativos da discussão com os grupos de alunos no processo de resolução dos dois problemas.

O jogo das torres de Hanói

Uma das versões do jogo das Torres de Hanói consta de uma placa de madeira, com três hastes metálicas e sete "discos" de diâmetros diferentes. O objectivo do jogo consiste em deslocar para a haste 3 a torre de sete discos colocada na haste 1, com o número mínimo de movimentos. Há duas regras a saber: só pode ser deslocado um disco de cada vez; não pode sobrepor-se um disco de maior diâmetro a um disco de diâmetro menor.

Após uma fase inicial de experimentação, para compreender as regras do jogo, passou-se a uma outra etapa em que os grupos começaram a estudar a situação com 3 discos.

Depois de várias tentativas, de várias confirmações do número de passagens feitas, a organização em tabela das contagens dos movimentos dos discos, modo de organização já utilizado e valorizado em sessões anteriores, revelou-se mais uma vez estruturadora do trabalho:

Nº de discos	1	2	3	...
número mínmo de movimentos para deslocar a torre	1	3	7	

Um dos grupos, após análise desta tabela, propôs como generalização a seguinte fórmula, que exprime o número de movimentos m_n em função do número de discos n:

$m_n = 2^n - 1, n \geq 1$

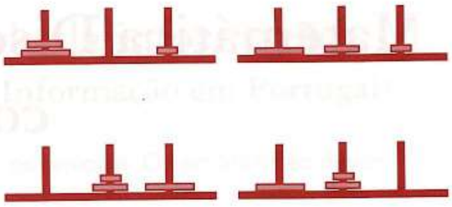
Quando alunos de um dos outros grupos pediram aos colegas que lhes mostrassem como é que com 5 discos efectuavam 31 deslocações, observou-se uma certa perplexidade pois já não conseguiam obter o que ainda há bem pouco tempo tinham conseguido. Nesta fase fiz sugestões no sentido de apoiar a compreensão do processo de transferência dos discos de uma haste para outra. É este processo compreensivo que passo a apresentar.

Para facilitar a discussão que se vai seguir, convém definir algumas variáveis que se vão revelar importantes.

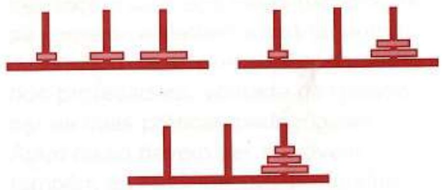
Considere-se que d_1 representa o disco de diâmetro menor, d_2 representa o disco de diâmetro imediatamente superior ao de d_1 e assim sucessivamente, re- presentando d_n o disco de diâmetro maior, para uma torre de n discos. Considere-se ainda que m_n representa o número de deslocações efectuadas, para deslocar a torre de n discos.

Os alunos foram convidados a observar o processo de deslocação da torre constituída por três discos, d_1, d_2, e d_3, da haste 1 para a haste 3:

Os esquemas seguintes representam a primeira parte do processo de deslocação da torre:



Como pode ser observado nas figuras acima apresentadas, para deslocar a torre com os três discos, manteve-se, sem lhe mexer, o disco d_3 na haste 1 e deslocou-se, em três movimentos a torre com os discos d_1 e d_2, da haste 1 para a haste 2. A haste 3 está agora vazia e o disco d_3 continua na haste 1. Só então se deslocou o disco d_3 para a haste 3.



Finalmente, repetiu-se o processo de deslocação da torre com os discos, d_1 e d_2, da haste 2 para a haste 3. A expressão 3+1+3 representa o total de deslocações efectuadas para transferir a torre com três discos, d_1, d_2 e d_3.

Para n = 4 será de esperar 15 movimentos, ou seja, 2 x7+1. Pode aqui conjecturar-se a seguinte relação de recorrência:

$$m_n = 2\, m_{n-1} + 1 \text{ , para } n > 1$$

Esta relação de recorrência exprime a deslocação de n discos em função do número de movimentos para efectuar a deslocação de n-1 discos. Esta formalização traduz o culminar do seguinte processo: o disco d_n deve ficar isolado numa das hastes, para que possa ser deslocado, à espera que uma outra haste fique vaga para poder receber esse disco. Entretanto a torre constituída por n-1 discos deve estar arrumada na terceira haste. Resta agora repetir para n-1 discos o que já fora feito, para se obter a torre com n discos na haste pretendida.

A compreensão do processo de deslocação traduzido pela relação de recorrência anterior não foi imediata. Verificou-se que os alunos, mesmo quando já tinham obtido o resultado óptimo, tinham dificuldades em argumentar, nomeadamente repetindo, com dificuldades ou falhas de memória, as passagens efectuadas anteriormente. A compreensão da relação de recorrência traduzida pela equação

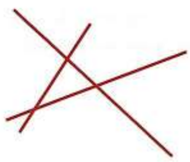
$m_n = 2\,m_{n-1} + 1$, para $n > 1$, como critério de contagem,é importante como contributo para dominar crítica e eficazmente o processo do jogo.

Pode demonstrar-se que são equivalentes as fórmulas $m_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$ e $m_n = 2\,m_{n-1} + 1$, para $n > 1$ (Johnsonbaugh, 1993, pág. 271).

É de sublinhar o significado que os alunos atribuíram a cada uma destas fórmulas: a primeira representou a lei de formação da sequência numérica cujos primeiros termos figuravam na primeira tabela; a compreensão da relação de recorrência permitiu controlar a estratégia óptima do jogo e dar-lhe significado real. Do ponto de vista da capacidade de compreensão matemática esta relação de recorrência revelou-se mais poderosa que a primeira fórmula.

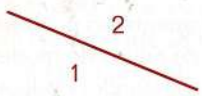
Qual é o número máximo de regiões definidas?

*Qual é o número máximo de regiões definidas no plano por **n** rectas, não paralelas duas a duas, e que se intersectam em pontos diferentes?*

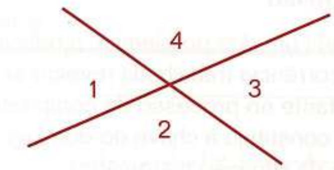


Esta é uma daquelas situações em que a vontade de experimentar deve ser imediatamente satisfeita, porque os esboços ajudam a interpretar o problema e a estabelecer algumas relações:

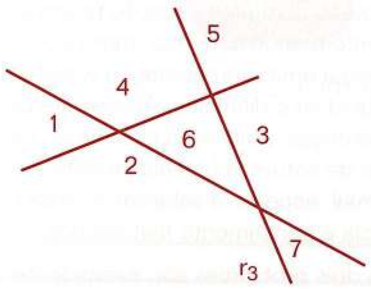
- se se considerar uma recta, o plano fica "dividido" em duas regiões,



- se se considerarem duas rectas, o plano fica "dividido" em quatro regiões,



- se se considerarem três rectas, o plano fica "dividido" em sete regiões,



- se se pensar em zero rectas obtém-se uma só região.

Os alunos recorreram também a uma tabela para registar as contagens já feitas com os esboços anteriores:

nº de rectas	0	1	2	3	...
nº (máx.) de regiões defenidas por n rectas	1	2	4	7	...

Seja r_n o número de regiões definidas por n rectas nas condições do problema.

Alguns alunos conjecturaram como generalização, a seguinte relação de recorrência: o número de regiões obtidas com n rectas é igual à soma de n com o número de regiões definidas com n-1 rectas. A tabela seguinte mostra esta generalização:

nº de rectas	0	1	2	3	n
nº (máx.) de regiões defenidas por n rectas	1	2	4	7	$r_n = n + r_{n-1}$

Para haver garantia de que a generalização proposta era válida foi feita uma discussão que no essencial consistiu no seguinte: a compreensão por visualização de que cada nova recta induz n novas regiões, relativamente às regiões definidas pelas n-1 rectas, ajudará a dar consistência à conjectura estabelecida. No último desenho, a recta r_3 induziu as novas regiões 5,6 e 7.

A fórmula de recorrência permite a construção evolutiva e dinâmica da generalização da situação, o que é de valorizar pois é uma tarefa tão frequente da actividade matemática. Os alunos, após terem feito esta generalização, colocaram a questão de como poder saber quantas regiões se obtinham com n rectas, sem que fosse necessário contar o número de regiões definidas por n-1 rectas.

Para responder a esta questão utilizou-se o método das diferenças finitas. O teorema em que este se baseia pode assim ser enunciado:

"Toda a sucessão de números cujas diferenças de ordem *n+1* sejam nulas, é redutível a um polinómio de grau *n*."

Este método, como ilustra este exemplo, consiste em ir calculando as diferenças entre termos consecutivos até se obter zero.

	dif. ordem 1	dif. ordem 2	dif. ordem 3
$r_0 = 1$			
	1		
$r_1 = 2$		1	
	2		0
$r_2 = 4$		1	
	3		0
$r_3 = 7$		1	
	4		
$r_4 = 11$			

Como as diferenças de ordem 3 são nulas, o polinómio a construir é de grau 2 e pode escrever-se na forma $r_n = an^2 + bn + c$. Há que determinar os valores dos parâmetros a, b e c. Substituindo n por 0 e como $r_0 = 1$ vem $r_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1$ e portanto $c = 1$; Como $r_1 = 2$, e substituindo n por 1 na expressão de r_n, obtém-se a+b+1=2 e de modo análogo para n=2, 4a+2b+1=4. Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas, obtém-se a = 1/2 e b= 1/2.

A expressão r_n=0,5 n^2+0,5 n+1 representa assim, o número de regiões, r_n, definidas por *n* rectas nas condições da situação apresentada.

No processo de resolução deste problema, a interpretação foi fácil e naturalmente feita com os esboços apresentados. A organização da informação pertinente, conseguida com a construção da tabela da contagem das regiões, contribuiu para o estabelecimento da relação de recorrência. Os requisitos matemáticos mobilizados foram simples. Os alunos construiram autonomamente a relação de recorrência já apresentada e que responde satisfatoriamente ao problema. Contudo, foram também os alunos que evidenciaram uma possível limitação da fórmula — a necessidade de se recorrer ao termo anterior — ao perguntarem se não havia possibilidade de encontrar uma expressão para o termo geral r_n que dependesse apenas de n. Foi para dar resposta a esta necessidade matemática dos alunos que foi dada mais informação, ou seja, apresentei o método das diferenças finitas. Os alunos envolveram-se activamente no processo de resolução e de crítica do modelo de recorrência construído. Pode afirmar-se que, num contexto de aplicações, os alunos produziram matemática e fizeram-no com satisfação e sucesso.

Conclusão

Em cada um dos problemas, a relação de recorrência trabalhada revelou-se importante no processo de compreensão e constituiu a chave do domínio crítico da situação matemática inerente. No primeiro problema o contexto da compreensão incluiu material manipulável; no segundo lidou-se com uma situação possivelmente menos concreta, mas que apela a uma representação visual sugestiva e dinâmica. Apesar destas diferenças, ambos os problemas não são de natureza (imediatamente) formal, aspecto a valorizar na experiência e pensamento matemático.

Os dois problemas são exemplo de situações em que os alunos têm de criar modelos eficazes de contagem sistemática. Estes modelos requerem raciocínio crítico mas não exigem muitos conhecimentos de matemática formal, o que, segundo Gardiner (1991) é frequente em muitos problemas que envolvem processos da Matemática Discreta.

É de salientar que a valorização das relações de recorrência nos problemas apresentados é um possível contributo para a fundamentação de metodologias (mais) adequadas à renovação curricular do ensino básico.

Finalmente, fica a ideia de que mais do que propôr "outros" conteúdos programáticos há que continuar a procurar outra(s) lógica(s) de apresentação e de prática do programa de Matemática.

Referências

Crisler, N. & al.(1994). *Discrete Mathematics Through Applications*. New York: Freeman.

Johnsonbaugh, Richard (1993). *Discrete Mathematics*.Prentice-Hall, Inc.

Gardiner, Anthony D.(1991). *A Cautionary Note*. In Margaret J. Kenney & Christian R. Hirsch (eds), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (1991 Yearbook of the NCTM). Reston, Va: NCTM.

Maurer, Stephen B. e Ralston, Anthony (1991) *Algoritms: You cannot Do Discrete Mathematics without them*. In Margaret J. Kenney & Christian R. Hirsch (eds), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (1991 Yearbook of the NCTM). Reston, Va: NCTM.

NCTM(1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Graciosa Veloso

Escla Superior de Educação de Setúbal

Correcção

O artigo da autoria de Cecília Monteiro e Cristolinda Costa, intitulado "Dificuldades na aprendizagem dos números racionais", foi publicado no nº 40 da "Educação e Matemática" com duas gralhas que a seguir se corrigem:

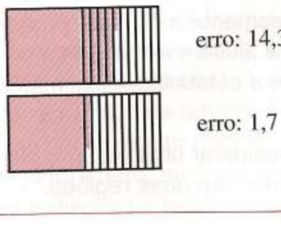
- Na página 62, 3º coluna, ponto 2, 7ª linha, onde está

  "ou 2 como o mais próximo de 0,18"

  deverá estar

  "ou 0,2 como o mais próximo de 0,18"

- Na figura da página 63, 1ª coluna, o 3º e 4º esquemas deverão conter apenas um quadrado inteiro sombreado (em lugar de dois), como se mostra nas figuras aqui reproduzidas.



As nossas desculpas às autoras do artigo e aos leitores da revista.

Quota de 1997

No ano de 1997 o valor da quota é de **6000$00** (4000$00, para o sócio estudante e 6500$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode optar por desconto bancário **até 28 de Fevereiro**. Após esta data deve efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Visa ☐ MasterCard ☐ Eurocard ☐

Validade ____________ o valor de ______________ correspondente a ______________

______________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ____________

Nome ______________________________

______________________________ Tel: ____________

Morada ______________________________

Código Postal ____________ Ano em que começou a leccionar: ____________

Data de nascimento ______/______/______ Nível de ensino: ____________

Escola ______________________________

Localidade ____________ Distrito ____________

Categoria Profissional ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido preenchendo a ficha de pedido de publicações ou fotocópia (ver *Educação e Matemática* nº 28), juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para a morada acima indicada.

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7166424 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice