Educação e Matemática

N.º 2

Abril de 1987

Associação
de Professores
de Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Vamos todos encontrar-nos, alguns com as lembranças de Lisboa e Portalegre, outros pela primeira vez. Haverá comunicações, workshops, sessões de discussão, sessões plenárias e muito, muito espaço para discutir sobre a Educação Matemática em Portugal no fim dos anos oitenta.

Como novidade, o Encontro será precedido por dois dias (7, 8 de Setembro) em que se realizarão mini-cursos sobre Logo, Folha de Cálculo, Probabilidades e Estatística, Materiais manipulativos no Ensino Primário, com inscrição limitada e independente do Encontro.

No que se refere ao Encontro propriamente dito voltamos a apostar forte nos workshops, mas esperamos ter aprendido com os erros de Portalegre e por isso haverá algumas modificações na organização. Por um lado as comunicações serão agrupadas por temas, de forma que possa ser dinamizada uma discussão integrante no fim de uma série de comunicações. Esta discussão será orientada por elementos da organização que estarão ligados à própria recepção dos resumos das comunicações. Isto significa também que se pretende manter desde o início um contacto personalizado com todos os que desejem vir a apresentar comunicações a fim de tornar mais vivo e enriquecedor o espaço destinado à sua apresentação.

Por outro lado, as sessões de discussão dos grupos de trabalho da APM (Computadores, Logo, Clubes de Matemática, Programas/Curriculum), que se realizarão em paralelo, terão um tempo próprio e exclusivo para que se concretize a participação activa de todos, isto porque os grupos de trabalho são a aposta de futuro da APM no sentido de que nenhuma associação deste tipo terá continuidade se não assentar num trabalho de base que envolva a maior parte dos seus associados. Esperamos que em Bragança se reforcem os grupos já em acção neste momento e que se criem, enventualmente, outros.

Como é habitual neste tipo de Encontros, não poderão faltar as indispensáveis sessões plenárias, as sessões culturais organizadas e espontâneas e evidentemente uma Assembleia Geral da APM.

No intervalo das sessões, decorrerá uma «Feira de Ideias» com venda de publicações, mostra de programas de computador e outro material didáctico. Este é mais um espaço que conta com a vossa participação, porque muitos têm alguma coisa para mostrar que todos sempre gostam de ver.

Os aspectos ligados a inscrições, envio de comunicações, e alojamentos são indicados numa ficha de inscrição, que pode ser fotocopiada, e se encontra em anexo a esta revista.

Com esta descrição pretendemos dar uma visão do panorama geral do que vai ser o Profmat-87. Embora na organização deste Encontro não se tenha definido a priori um tema unificador pode assentar-se numa preocupação unânime dos que de alguma forma estão ligados à sua organização e realização: Educação Matemática ao virar a década de oitenta — Que realidades? Que mudanças?

E porque acreditamos que esta preocupação é de todos os professores de Matemática deste país, contamos com a vossa presença em Bragança no fim do Verão.

A organização

Ficha técnica

Educação e Matemática n.º 2
Data: Abril de 1987
Composição, montagem e fotografia executadas e oferecidas pela Texto Editora
Impressão: Costa e Valério
Tiragem: 1500 exemplares

Correspondência: Henrique M. Guimarães ou Paulo Abrantes
Faculdade de Ciências - Departamento de Educação
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

Os Professores e a Revolução Informática

João Pedro Ponte, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

No seu recente livro sobre Tecnologias da Informação, Helder Coelho indica dois grupos de pessoas e actividades que, na sua opinião, terão sorte radicalmente oposta devido à revolução informática. No grupo dos que verão aumentado o seu prestígio e a sua importância social contam-se os projectistas, os deficientes físicos, as mulheres domésticas e, naturalmente, os informáticos. No grupo dos «grandes derrotados», Helder Coelho situa os carteiros, os bibliotecários, os trabalhadores sem qualificação, os intermediários, e... os professores.

De facto, existem já hoje planos muito concretos para desmantelar o ensino nocturno e transformá-lo em algo semelhante ao Propedêutico: um ensino à distância, baseado na televisão, com Centros de Apoio Distritais.

Este tipo de ensino mobilizará recursos tecnológicos muito mais sofisticados que o ensino actual, envolvendo muito menos professores e pessoal de apoio. Será por isso muito mais «rentável» e possivelmente mesmo mais eficiente.

A Escola tem manifestado grande incapacidade de se aperceber do ritmo acelerado das mudanças sociais e tecnológicas que se têm processado à sua volta. Os professores surgem aos olhos da opinião pública como um grupo social fortemente agarrado a práticas tradicionais, fechado sobre si próprio, temeroso da mudança, e, eventualmente, sem futuro.

Na verdade, muitos currículos escolares estão profundamente desadaptados das realidades actuais. Continua-se a privilegiar a aquisição simples de conhecimentos factuais, abstractos e desfasados das necessidades e interesses dos alunos. Negligencia-se o saber fazer, o saber aprender, o saber enfrentar de forma positiva os problemas que a realidade constantemente nos coloca. O professor desempenha assim o papel de transmissor dum saber já constituído, perfeitamente delimitado nos programas e livros de texto, onde não há nada para descobrir, não há aventura, nem imprevisto, nem novidade.

Nessas funções de armazenamento e transmissão de saberes formais, fortemente rotinizadas, o computador pode desempenhar um papel precioso e mesmo substituir com vantagem, pelo menos em certos aspectos, o professor tradicional. É o mínimo que se pode esperar das poderosas máquinas que estão a ser desenvolvidas pelos cientistas que trabalham em Inteligência Artificial, como Helder Coelho. Nos seus modelos protótipos elas são já capazes de resolver complexíssimos problemas de diagnóstico médico, de microbiologia molecular, ou de prospecção geológica.

No entanto, as necessidades mais vitais da educação dos jovens de hoje tem já pouco a ver com o saber de tipo formal, baseado na memorização, característico do nosso sistema educativo actual. Um mundo em mudança complexa coloca como desafio a necessidade de desenvolver capacidades cognitivas mais elevadas, implicando a procura e selecção de informação relevante para a resolução dos nossos problemas, o seu tratamento e análise crítica, a sua utilização consciente e a avaliação dos respectivos resultados. Para isso é necessário que a escola saiba contribuir igualmente para o desenvolvimento social e emocional dos jovens, tornando-os independentes, confiantes nas suas próprias capacidades, e habituados à cooperação e ao trabalho de grupo.

A um saber cristalizado, rotineiro e formal é preciso contrapor um saber evolutivo, dinâmico, desenvolvido em conjunto e em colaboração pelos professores e pelos alunos.

Para que a escola possa contribuir para desenvolver nos alunos tais capacidades e atitudes é necessário que os professores constituam eles próprios um modelo vivo dessas qualidades. É indispensável que os professores tenham uma atitude de abertura à mudança, um gosto pela aprendizagem permanente, por fazer coisas novas, por melhorar incessantemente, um espírito de descoberta em comum com os alunos. Um bom terreno para desenvolver esse espírito é o trabalho com os alunos em Clubes ou Núcleos de Informática, por exemplo em projectos de programação em LOGO.

As grandes resistências que tantos professores manifestam em relação ao computador não terão muito a ver com a falta de disponibilidade para aprender coisas novas, para repensar as práticas pedagógicas, para estabelecer uma relação diferente com os alunos, para assumir uma atitude verdadeiramente positiva perante o processo educativo?

A tecnologia e o computador podem certamente competir com o professor no sistema de ensino tradicional, baseado na transmissão de um saber já feito. Mas é muito duvidoso que possam ser encarados como substitutos do professor num processo mais global de educação, em que se visem objectivos cognitivos de ordem mais elevada, e objectivos sociais e afectivos mais ambiciosos.

O computador e a tecnologia não devem ser vistos em oposição ao homem, mas em interligação. O declínio das actividades ligadas ao ensino tradicional é irreversível. Mas seria errado deduzir daí que a educação é uma área profissional sem futuro. Pelo contrário, o professor verá modificar-se o seu papel e desenvolverá novas competências. O futuro da educação pertencerá a toda uma gama de novas profissões, simultaneamente mais generalistas e mais especializadas, cada vez mais exigentes, criativas, e compensadoras.

OPINIÕES • CRÍTICAS • NOTÍCIAS • OPINIÕES

Começamos por agradecer os incentivos que algumas das cartas que acompanhavam os cheques para o pagamento das quotas, traziam relativos à publicação do n.º 1 de «Educação e Matemática». Durante estes meses foi grande o movimento do correio (já há cerca de 600 sócios!); chegaram cartas de todo o País, mais de uns sítios do que de outros como era de esperar, de Bragança aos Açores (quando será lá um PROFMAT?!). Poucas cartas traziam, no entanto, «opiniões, críticas, notícias»...

Este espaço, como se disse no número anterior desta revista, pretende-se lugar «de opinião e de crítica, de intercâmbio e de informação»; um espaço aberto e vivo onde as pessoas apresentem «pequenas coisas» do seu quotidiano de professores, do seu trabalho com pessoas que estão a aprender Matemática: uma ideia que se teve para uma actividade com os alunos; uma proposta de trabalho que se experimentou numa(s) aula(s); reflexões pessoais sobre actividades realizadas com os alunos, sobre a Matemática ou sobre algum aspecto particular do seu ensino; reflexões sobre a profissão de professor, sobre educação...

Aqui serão bem-vindas notícias sobre realizações relevantes para o ensino da Matemática (locais, regionais, nacionais...), o seu anúncio, a descrição do modo como decorreram, a sua crítica; esperadas são também, como o dissemos já, críticas e sugestões a esta mesma revista, à sua organização, às suas secções e artigos, ao seu aspecto gráfico...

A APM está legalizada

Foi em Fevereiro, no dia 2, numa daquelas casas em que costumam estar «encerrados» os notários em Lisboa, velhas, bolorentas, cheirando a papel e a bafio — até era uma cave! — que se realizou a escritura que deu existência jurídica à APM. Temos já direito a tempo de antena e ao número de contribuinte.

Estiveram presentes a Leonor Filipe, a Leonor Moreira e a Cecília Monteiro para assinar a dita escritura. Henrique M. Guimarães fotografou o acontecimento. Aqui fica para a posteridade.

O Projecto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro

A Universidade Federal do Rio de Janeiro lançou no final de 1983 um projecto, o Projecto Fundão, que visa a melhoria do ensino das Ciências.

Este desafio à Universidade, tem nas suas equipas de trabalho, professores da Universidade, professores da rede oficial de ensino primário, preparatório e secundário, e alunos finalistas da licenciatura em Educação. Estas equipas procuram conciliar a investigação universitária, a prática dos professores em serviço e a integração dos futuros professores.

Ao longo do trabalho, os professores envolvidos no projecto planificam, estudam, executam experiências, avaliam e divulgam os trabalhos realizados. Assim procuram melhorar o ensino, adaptá-lo às características reais dos seus alunos e às necessidades da comunidade.

A nossa vontade de saber o que se passa noutros países, de pôr em comum experiências realizadas, de não «descobrir» o que já está «descoberto» encontrou eco na Universidade Federal do Rio de Janeiro: os trabalhos disponíveis foram oferecidos à nossa Associação. Primeiro passo para o intercâmbio entre a nossa Associação e a congénere brasileira que esperamos nasça breve.

Uma palavra de agradecimento é devida aos professores cooperantes do Projecto Fundão, à coordenadora geral do projecto, professora Maria Laura Leite Lopes e à coordenadora do sector de Matemática, professora Lúcia Tinoco que prolongando as suas ordens de trabalho me receberam e facilitaram o conhecimento dos trabalhos desenvolvidos.

É Natal, as árvores nas ruas estão enfeitadas. Chove mas não há frio. A temperatura ronda os 39° centígrados... o menino Jesus no Rio não precisaria do bafo dos animais para se aquecer...

Odete Bernardes
Dezembro de 1986

LOGO em Portalegre

Realizou-se na Escola Superior de Educação de Portalegre, de 4 a 7 de Março, a 1.ª SEMANA DO LOGO, organizada por aquela Escola em colaboração com o Núcleo do Projecto MINERVA do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa. Reunindo cerca de 70 professores de todos os graus de ensino, este encontro constituiu um espaço para troca de experiências e reflexão sobre a utilização da linguagem LOGO nos ensinos primário, preparatório e secundário. A componente prática desta realização permitiu o aperfeiçoamento de um grande número de professores na utilização do LOGO, nomeadamente através de sessões de trabalho sobre

(continua na página 31)

LOGO e a Educação Matemática

João Filipe Matos, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Introdução

A utilização de computadores no ensino da Matemática é muitas vezes encarada em duas perspectivas. Existem por um lado aqueles que entendem que os computadores nada trarão de novo, argumentando que os alunos têm que adquirir um conjunto de conhecimentos que os computadores são incapazes de ensinar. Por outro lado, existem os optimistas que encaram os computadores, com software «adequado», como máquinas capazes de «ensinar» aos alunos os algoritmos e os conceitos matemáticos fundamentais.

Estas duas visões, aparentemente opostas, têm muito de comum. Ambas consideram a Matemática como um corpo de conhecimentos que o professor tem que transmitir aos alunos, devendo servir-se ou não dos computadores para atingir esse fim. A Matemática é vista numa mitir aos alunos, devendo servir-se ou não dos comjputadores para atingir esse fim. A Matemática é vista numa perspectiva estática. Simultaneamente o professor é encarado como a fonte única do conhecimento e a ênfase é colocada na forma da sua transmissão aos alunos.

Uma perspectiva radicalmente diferente permite encarar o ensino da Matemática duma forma dinâmica em que os alunos assumem um papel central como construtores do seu próprio conhecimento. Ao professor competirá fornecer os meios adequados e criar as condições que tornem possível o envolvimento dos alunos num ambiente estimulante em que as situações de aprendizagem constituam uma constante.

Os computadores podem constituir um meio de criar instrumentos de trabalho que possibilitem aos alunos realizar um trabalho criativo em Matemática. As suas possibilidades são praticamente inesgotáveis.

No entanto, a sua utilização pode revestir as formas do ensino mais tradicional e directivo, ou, colocando nos alunos grande parte da responsabilidade na condução das actividades, favorecer o trabalho independente, a reflexão crítica e estimular a sua iniciativa.

As actividades de programação

Uma das formas criativas de utilização dos computadores no ensino da Matemática é através de actividades de programação. No entanto, esta influência das actividades de programação no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos não deve ser conceptualizada como uma consequência directa da aprendizagem da programação em si mesma. O tipo de efeito resultante poderá ser interpretado de uma forma mais subtil. O facto de os alunos programarem cria uma oportunidade aos professores de ensinarem em novos moldes e de os alunos aprenderem num contexto diferente. Mas o aproveitamento desta oportunidade requer **acção** por parte dos professores e alunos.

Por outro lado, ao falarmos de actividades de programação devemos ter em mente que estas actividades podem ser concebidas em diversos níveis. Podemos partir das instruções primitivas de uma linguagem de programação, ou de um conjunto de programas previamente preparados e que os alunos programarão num nível mais elevado sem terem necessidade de dominar completamente todos os pormenores da linguagem. Por exemplo, os alunos podem ser envolvidos no estudo da geometria através de um conjunto de pequenos programas que definem novas primitivas para marcar pontos e vectores no plano, adicionar vectores, etc, que constituirão elementos de trabalho para as sua actividades.

A linguagem LOGO

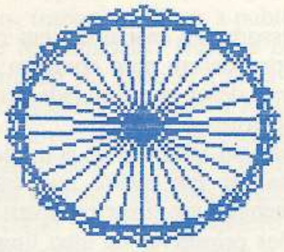
A linguagem LOGO constitui um instrumento de trabalho extremamente poderoso para realizar uma utilização dos computadores nesta perspectiva. Desenvolvida no final dos anos sessenta no Instituto de Tecnologia de Massachussets por uma equipa liderada por Seymour Papert (veja-se artigo nesta Revista), a linguagem LOGO foi construída de forma a ser acessível aos alunos desde o início do ensino primário. No entanto, trata-se de uma linguagem que não se confina a este nível de ensino, pelo contrário permite a construção de programas altamente elaborados permitindo estudar problemas complexos como por exemplo a teoria da relatividade ou a simulação do comportamento de animais.

A metáfora em que se baseiam as actividades iniciais em LOGO é «ensinar a tartaruga a realizar uma tarefa a partir daquilo que ela já sabe», isto é, construir um **procedimento** a partir das instruções primitivas do LOGO. Por exemplo, a partir das primitivas **forward** (**fd**, para a frente) e **left turn** (**lt**, virar à esquerda) podemos «ensinar» a tartaruga a desenhar um triângulo equilátero de lado 40:

```
to triângulo
repeat 3 [fd 40 lt 120]
end
```

A partir deste momento a tartaruga «conhece» uma nova primitiva que tem o nome de triângulo. Com este novo conhecimento podemos realizar novos procedimentos.

```
to rosa
repeat 30 [triângulo lt 12]
end
```



As crianças são iniciadas desta forma em actividades de programação, numa linguagem simples e interactiva e que encoraja a decomposição do problema a resolver em sub-problemas mais simples, sugerindo portanto a utilização de uma estratégia modular.

Convém notar que a geometria inerente à utilização das capacidades gráficas do LOGO - vulgarmente designada por Geometria da Tartaruga — é uma geometria «intrínseca», como se pode verificar com o exemplo do procedimento **triângulo** apresentado. Mas o LOGO é muito mais do que a Geometria da Tartaruga. De facto, as suas capacidades ultrapassam o que seria de esperar de uma linguagem de programação que inicialmente permite um acesso bastante fácil. O controlo de processos recursivos e o processamento de listas constituem algumas das estruturas mais poderosas desta linguagem e que podemos inclusivamente utilizar no contexto da Geometria da Tartaruga.

A linguagem LOGO tem um número reduzido de instruções primitivas. Quando começamos a programar em LOGO sentimos necessidade de diversas instruções e funções não existentes, mas que podemos construir e incorporar no LOGO, usando-as sempre que necessário. Por exemplo, a função valor absoluto pode ser programada facilmente através do procedimento **abs**:

```
to abs :numero
if :numero < 0 [output — :numero]
output :numero
end
```

O conceito matemático de função está ele próprio presente no procedimento. E a sua construção (e a discussão que propicia) pode contribuir para uma compreensão profunda não só do conceito de função mas também em particular da função valor absoluto.

Projectos

As actividades realizadas pelos alunos com suporte na linguagem LOGO podem assumir diversas formas. Os alunos podem envolver-se num projecto com um objectivo bem definido, como por exemplo, a construção de um conjunto de procedimentos para realizar transformações geométricas. Mas o projecto pode centrar-se num conteúdo não especificamente matemático como por exemplo a construção de uma simulação do comportamento de um insecto perante uma fonte de luz.

Ao realizar um projecto deste tipo, os alunos serão levados a reflectir não só nos algoritmos que terão que criar ou combinar, mas também noutros aspectos relevantes em educação matemática como sejam a formulação adequada do problema, a definição de modelos para a situação em estudo e as diferentes estratégias da resolução do problema. E ao definirem uma dada estratégia, refinada durante a resolução, eles serão levados a reflectir sobre a sua própria forma de pensamento.

Por outro lado, os conteúdos matemáticos necessários para a implementação do projecto podem não ser totalmente conhecidos à partida. Surgirão definições pessoais que os alunos criarão no contexto do conhecimento matemático que possuem e que evoluirão através da sua aplicação em novos projectos.

Investigar para aprender

Outra perspectiva de utilização da linguagem LOGO em Matemática é a exploração de um procedimento com vista a investigar um problema.

Esse procedimento poderá ser alterado pelos alunos em maior ou menor grau, dado que é suficientemente «transparente» para ser por eles entendido. Um exemplo deste tipo de utilização encontra-se na secção LOGO.MAT desta revista.

Este tipo de actividade propicia uma atitude investigativa fornecendo meios facilitadores que seria muito difícil ou mesmo impossível de realizar sem uma linguagem de programação apropriada. Na verdade, a linguagem LOGO constitui, neste momento, um dos elementos mais poderosos que temos ao nosso dispôr para realizar actividades criativas em Matemática com o auxílio dos computadores. Ao possibilitar a construção de diferentes micromundos matemáticos e simultaneamente a simulação de processos e fenómenos que podem constituir um contexto interessante para a construção da Matemática, a utilização da linguagem LOGO coloca desafios permanentes e constitui um meio importante para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

O LOGO e o currículo

Naturalmente que a filosofia deste tipo de utilização dos computadores não se enquadra no currículo de Matemática existente. Não será mesmo desejável que o LOGO

(continua na pág. 8)

Quantas Maçãs Tinha a Maria?

Eduardo Veloso, colaborador do Projecto Minerva

Um bom professor deve compreender e convencer o seus alunos que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer; mediante suficiente estudo e reflexão podemos melhorar qualquer solução e, em todos os casos, podemos sempre melhorar a nossa compreensão da solução.

G. Polya, *How to solve it*

O problema

Maria tinha um cesto com maçãs. Encontrou um amigo e deu-lhe metade das maçãs que levava e mais meia maçã. Depois encontrou outro amigo e deu-lhe metade das maçãs que ainda tinha e mais meia maçã. Finalmente encontrou um terceiro amigo e deu-lhe também metade das maçãs que lhe restavam e mais meia maçã, ficando sem nenhuma. Quantas maçãs tinha a Maria, antes de encontrar o primeiro amigo?

A (má) solução habitual

O ensino actual da Matemática leva a pensar que a solução para **todos** os problemas consiste em «pô-los em equação» e depois «resolver a equação». Mas as receitas aprendidas para transformar palavras em incógnitas e frases em equações esquecem rapidamente e, portanto, mesmo naqueles casos em que esse tipo de resolução funciona, as vagas recordações da escola são insuficientes para a pôr em prática.

No caso presente podemos realmente escrever, sendo n o número inicial de maçãs,

$n-n/2-1/2$ ... número de maçãs depois do primeiro amigo;

$n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2$ ... número de maçãs depois do segundo amigo;

$[n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2]-[n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2]/2-1/2$ ... número final de maçãs.

E igualando esta última expressão a zero, teremos a equação procurada. Caso tenhamos paciência para resolver esta equação em N, obtemos $n=7$, que é efectivamente a solução do problema posto. Mas temos que reconhecer que pouco ou nada aprendemos com este processo!

O método das tentativas

Existe uma tendência natural para procurar resolver este tipo de problemas «por tentativas», pelo menos enquanto o ensino tradicional não a esmaga («tentivas não são matemática!»). Em princípio, nada há a opor a este método, o qual, de resto, está a ser recuperado pela moderna pedagogia como processo adequado para atacar diferentes classes de problemas. É em muitos casos uma abordagem óptima, pelo menos numa fase inicial, até se «sentir» o enunciado do problema. O que deve ser sugerido, a quem se lance nesta via, é que o método das tentativas só tem sentido e pode ser eficaz na medida em que há alguma orientação na sequência das tentativas e, **sobretudo, se essa orientação é corrigida em face dos resultados que se vão obtendo.**

Por exemplo, depois da primeira tentativa (que é natural ser feita com um número ímpar de maçãs, quanto mais não seja para que a Maria não comece a cortar maçãs ao meio, logo ao encontrar o primeiro amigo...), deve perceber-se imediatamente se a segunda tentativa deve ser feita com mais ou menos maçãs (conforme, está claro, o número de maçãs com que Maria fica nesse caso é negativo ou positivo). Além disso, se em duas tentativas sucessivas se obtêm, para resto das maçãs, números de sinal contrário, isso reduz drasticamente as tentativas a fazer.

Mas, ao seguir-se por este caminho, mais cedo ou mais tarde a sugestão lógica é recorrer-se ao computador, o «rei» das resoluções de problemas por tentativas.

Resolução com recurso ao computador

Trata-se de desenvolver um programa que faça as tentativas por nós, de modo sistemático e com a rapidez que caracteriza os computadores.

Mesmo para quem seja apenas um iniciado em programação BASIC, não é difícil imaginar um tal programa (em que as tentativas consistem em supor que a Maria tinha inicialmente uma, duas, três, ... maçãs e verificar se sim ou não depois de encontrar os três amigos, fica sem nenhuma):

```
10 N=1
20 M=N
30 FOR I=1 TO 3             REM os três amigos
40 M=M-M/2-1/2              REM a mesma operação
50 NEXT I
60 IF M=0 THEN GOTO 80      REM a solução
70 N=N+1:GOTO 20            REM outra alternativa
80 PRINT N:STOP
```

O loop 30 a 50 corresponde às três vezes em que Maria dá metade das maçãs que tem e mais meia maçã, e M é a variável que contém, em cada momento, o número de maçãs com que Maria vai ficando. Se, no fim do loop, M = 0, o programa imprime N e pára. Enquanto isso não acontecer, vão sendo feitos ensaios com um número inicial de maçãs cada vez maior (N = N + 1, na linguagem trapalhona do BASIC).

Embora este programa resolva o problema posto, não é de modo nenhum, em minha opinião, uma solução interessante e instrutiva. Segue-se uma outra que pode dar lugar a certos desenvolvimentos com interesse.

Outra resolução do mesmo problema

Se, ao encontrar o terceiro amigo, Maria lhe deu metade das maçãs que tinha e mais meia maçã, e **ficou sem nenhuma**, então nessa altura Maria **tinha necessariamente uma maçã.** Com efeito, é claro que **uma** maçã é o único número de maçãs que verifica a condição seguinte: subtraindo-lhe metade (ou seja meia maçã) e mais meia maçã, ficam zero maçãs ($1 - 1/2 - 1/2 = 0$).

Por sua vez, se depois de encontrar o segundo amigo e lhe dar metade das maçãs e mais meia maçã Maria fica com uma maçã, então antes de o encontrar tinha três maçãs. Com efeito, se assim for, Maria dá $3/2 + 1/2 = 2$ maçãs e fica portanto com uma. Finalmente, do mesmo modo se vê que antes de encontrar o primeiro amigo Maria tinha 7 maçãs, pois só assim, ao dar $7/2 + 1/2 = 4$ maçãs, ficará com três maçãs.

Um caminho para chegar à solução apresentada no ponto anterior

Ao tentar, em primeiro lugar, compreender bem o enunciado do problema, surge naturalmente a ideia de que Maria repete 3 vezes a mesma operação: dar metade das maçãs que tem e mais meia maçã. Vemos assim que a própria formulação do problema o decompõe em três problemas mais simples, todos com a forma seguinte:

«Maria tem x maçãs, dá metade de x e mais meia maçã, e fica com y maçãs; quanto vale x?»

É claro que sem conhecer y (as maçãs com que Maria fica) é impossível calcular x (as maçãs que Maria tinha). Mas daqui nasce a ideia fundamental: em relação ao terceiro amigo, conhecemos o valor de y, pois diz-se no enunciado que Maria **fica sem nenhuma maçã,** ou seja $y = 0$; e daí conclui-se, como vimos, que $x = 1$. Então, por repetição sucessiva do mesmo raciocínio, chega-se à solução do problema posto.

Exploração do resultado e generalização

É natural (e deveria ser habitual na aprendizagem da Matemática) perguntar: **como depende a solução do problema dos dados iniciais?** Ou seja:

1. Se mantivermos todo o enunciado excepto a frase «mais meia maçã», substituindo-a por «mais uma maçã», qual será o resultado? Seguindo o método anterior de resolução, é fácil ver que Maria teria inicialmente, neste caso, 14 maçãs. Podemos ainda ensaiar outros casos e construir uma tabela, em que m é o número de maçãs que Maria tinha inicialmente e a o número de maçãs que dá a cada amigo, para além de dar «metade das que tinha» (isto é, $a = 1/2$ no enunciado, $a = 1$ se Maria dá «mais uma maçã», etc.).

a	m
1/2	7
1	14
1 + 1/2	21
2	28
3	42

Constatamos assim que, para os valores de a ensaiados, sempre que dobramos o valor de a, o valor de m vem multiplicado por 2, o que leva à

Conjectura 1: m depende linearmente de a, ou seja,

$$m = k \cdot a, \text{ com k constante.}$$

2. Vejamos agora como varia o resultado deste problema com o número de amigos. Seguindo ainda o mesmo método, facilmente construímos uma outra tabela, em que n é o número de amigos e m o número inicial de maçãs, mantendo-se sem alteração o resto do enunciado do problema:

n	m
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Somos levados assim à

Conjectura 2: sendo n o número de amigos e m as maçãs que Maria tinha inicialmente,

$$m = 2^n - 1$$

3. Os resultados anteriores estimulam-nos a procurar uma expressão que resolva este problema no caso geral. Seja então n o número de amigos que Maria encontra, 1/b a parte das maçãs que dá a cada um (b = 2 se dá «metade das maçãs que tinha», b = 3 se dá «um terço das maçãs que tinha», etc.) e a as maçãs que Maria dá a cada amigo além de dar 1/b das que tinha (a = 1/2 no enunciado, por exemplo). Supomos que no fim, tal como no enunciado original, Maria fica sem nenhuma maçã.

Comecemos por ver qual o número de maçãs (m_1) que Maria tinha antes de encontrar o último amigo. Como:

$$m_1 - m_1/b - a = 0$$

tem-se

$$m_1 = a \,.\, b/(b-1) \qquad (I_1)$$

Quantas maçãs teria Maria antes de encontrar o penúltimo amigo?

De

$$m_2 - m_2/b - a = m_1$$

resulta que

$$m_2 = a \,.\, [b/(b-1) + b^2/(b-1)^2] \qquad (I_2)$$

Somos levados assim à

Conjectura 3. Se for n o número de amigos, o número m_n de maçãs que Maria tem antes de encontrar o primeiro amigo é dado por (fazendo para simplificar $c = b/(b-1)$)

$$m_n = a \,.\, (c + c^2 + \ldots + c^n) = a \,.\, \sum_{i=1}^{n} c^i \qquad (I_n)$$

Tentemos provar, por indução finita, que (I_n) é verdadeira para qualquer natural n. (I_1) é verdadeira, como vimos. Provemos então que (I_n) implica (I_{n+1}):

Tem-se

$$m_{n+1} = c \,.\, (a + m_n)$$

e portanto

$$m_{n+1} = a \,.\, c \,.\, (1 + \sum_{i=1}^{n} c^i)$$

ou seja

$$m_{n+1} = a \,.\, \sum_{i=1}^{n+1} c^i \qquad (I_{n+1})$$

A conjectura 3 é portanto, verdadeira. Em particular, fixando b e n,

$$k = \sum_{i=1}^{n} c^i$$

é constante e

$$m = k \,.\, a \qquad \text{(Conjectura 1)}$$

E se

$$b = 2 \text{ e } a = 1/2,$$

$$m_n = 1/2 \,.\, \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^n - 1$$

(Conjectura 2)

Outra exploração do mesmo método de resolução

Vejamos como pode ser obtido, na resolução apresentada no ponto anterior, o número de maçãs que Maria tem antes de encontrar cada amigo. Utilizaremos para isso notações e conceitos que podem ser úteis noutras situações (em que também tenhamos de resolver problemas «do fim para o princípio», como aqui).

Observemos com algum pormenor o que se passa quando Maria encontra um amigo e lhe dá 1/b das maçãs que tem e mais a maçãs. Se for x o número de maçãs que tinha e y o número de maçãs com que ficou, y obtém-se de x por meio de duas operações (ou funções, ou aplicações) sucessivas.

— a aplicação f, que consiste em subtrair x/b a x

$$f(x) = x - x/b = (1 - 1/b) \cdot x$$

— a aplicação g, que consiste em subtrair a maçãs.

Assim, f pode exprimir-se como «multiplicar por $(1-1/b)$» e g como «subtrair a». E de cada vez que encontra um amigo, Maria executa a composição das duas aplicações, ou seja, primeiro multiplica x por $(1-1/b)$ e depois subtrai a ao resultado da primeira operação. Na notação habitual

$$y = (gof)\ (x)$$

em que gof representa a composição de f com g (primeiro f, depois g).

Isso é o que Maria faz... Mas nós, para resolvermos o problema, precisamos de executar o inverso do que Maria faz, pois apenas conhecemos o resultado final (fica sem nenhuma maçã). Precisamos de passar de y para x — proceder do fim para o princípio. Ora o esquema seguinte

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[rr, bend right=50, "gof"'] & \bullet \arrow[l, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[r, shift right, "g"'] & y \arrow[l, shift right, "g^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=50, "(gof)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

mostra bem que a aplicação inversa de gof se obtém executando primeiro g^{-1} (ou seja, a inversa de g) e depois f^{-1} (a inversa de f). Como g^{-1} = «adicionar a» e f^{-1} = = «dividir por $(1-1/b)$», é agora claro como podemos passar de y para x: adicionamos a a y e dividimos por $1-1/b$. Em particular, no problema dado, como $a = 1/2$ e $b = 2$, se depois do terceiro amigo Maria fica sem nenhuma maçã ($y = 0$), então antes de o encontrar tinha

$$x = (0 + 1/2)/(1 - 1/2) = 1;$$

antes de encontrar o segundo tinha

$$(1 + 1/2)/(1 - 1/2) = 3;$$

e antes de encontrar o primeiro tinha

$$(3 + 1/2)/(1 - 1/2) = 7.$$

Notas pedagógicas

1. A maior dificuldade que surge habitualmente na resolução deste problema resulta de o enunciado apresentar a sequência de acontecimentos numa determinada ordem e a solução ter de ser encontrada raciocinando na ordem inversa, do fim para o princípio. Este método exige que se vença uma certa resistência psicológica (reforçada talvez pelo vício do «pôr em equação») a alterar a ordem em que as condições ou dados de um problema são apresentados. Mas aí reside precisamente o principal interesse do problema, a introdução e exploração de um método de resolução comum a muitos problemas de níveis diferentes de complexidade (a «backtracking strategy» da inteligência artificial).

2. Este problema presta-se para diversificar o ensino, de acordo com os interesses e aptidões diferentes que sempre coexistem na aula. Para muitos alunos, a procura de uma solução para o problema original, a utilização de tentativas e a resolução por computador serão actividades suficientes. Outros mostrarão interesse bastante para justificar o tipo de exploração do resultado apresentado no ponto em que se faz a generalização, incluindo ou não a demonstração da expressão geral. Outros ainda, certamente em menor número, terão interesse numa sistematização dos conceitos que estão na base da resolução deste e de outros tipos semelhantes de problemas e de questões de Matemática, e por isso entrarão com prazer (sobretudo se pressentirem no professor o mesmo prazer...) no género de considerações apresentadas no ponto anterior.

DESAFIO AOS «LOGOISTAS»:

Construir um programa em LOGO para resolver este problema **no caso geral.** Admitir, mesmo, que a pobre Maria fica, no fim, com algumas maçãs. A melhor solução que chegar à redacção de *Educação e Matemática* será publicada no próximo número.

LOGO e a Educação Matemática *(continuação da pág. 4)*

seja colocado ao serviço de um currículo estático, qualquer que ele seja. Pelo contrário, parte-se do pressuposto de que a aprendizagem da Matemática é um processo dinâmico que exige um currículo com grande maleabilidade. Afirmar que se trata de um ensino sem currículo seria adoptar um conceito extremamente limitado de currículo. No entanto, é possível realizar actividades em LOGO com currículo actual de Matemática mas para isso será necessário assumir alguns compromissos. O maior destes compromissos será assumir, de uma vez por todas, que cumprir os programas é essencialmente cumprir os grandes objectivos desses programas, e para tal será eventualmente necessário trabalhar em tópicos de Matemática não contemplados nos programas actuais assim como dar um tratamento menos aprofundado noutros desses conteúdos.

Aliás esta poderá ser uma forma interessante de os professores reflectirem nos actuais programas, questionarem-se acerca da pertinência de alguns dos seus tópicos e contribuirem para uma reformulação gradual que é entendida em geral como imprescindível.

O LOGO como instrumento de trabalho

A linguagem LOGO deve ser considerada, nas actividades com os computadores em educação, como instrumento de trabalho. A sua aprendizagem deve ser realizada gradualmente, de acordo com as exigências dos problemas que queremos resolver. Não é preciso saber tudo de uma vez. Novos comandos e novas operações serão aprendidas de acordo com as necessidades dos projectos que vamos desenvolvendo.

Neste momento, existem diversas versões de LOGO disponíveis para diferentes tipos de computadores. A possibilidade de usar diversas tartarugas, de as programar de forma dinâmica e de definir formas especiais para atribuir a essas tartarugas, abre possibilidades cujos limites são a nossa própria imaginação. E é aqui que reside a questão fundamental. A criação de situações de aprendizagem nesta perspectiva exige do professor trabalho e criatividade.

O LOGO e o professor

A experiência vem demonstrando que é exactamente no contexto do trabalho realizado com os alunos que as ideias poderosas surgem e que a própria aprendizagem da linguagem ganha mais sentido. Naturalmente que o professor não deve esperar ir para a aula 'armado' com todas as ideias e sugestões ou esperar 'saber LOGO' para iniciar as actividades. Grande parte das iniciativas vêm dos alunos, e mais do que ninguém são eles que determinam o êxito deste tipo de actividades.

O objectivo das actividades de programação na linguagem LOGO é o problema ou a situação que queremos investigar. Deste modo, a aprendizagem da linguagem LOGO faz parte do próprio processo de trabalho. Não é necessária uma longa e árida aprendizagem prévia dos elementos de programação antes de se começar efectivamente a programar. Pelo contrário, estamos sempre a aprender novas combinações de instruções para produzir determinado efeito. E é exactamente esta característica simultaneamente de facilidade de utilização e de abertura aos nossos projectos que faz a linguagem LOGO um instrumento de trabalho poderoso e aliciante, desafiando permanentemente a nossa imaginação.

Um Ciclo Vicioso

Henrique M. Guimarães, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

(...) e disse-lhe estendendo a mão aberta com uma castanha:
—«Stora» gosto mais de si do que da Matemática.
(uma aluna da E.P. de Caneças) (1)

Penso que não exagerarei muito se disser que em muitas escolas e na maior parte das disciplinas — sobretudo em Matemática — há, por parte dos alunos, um sentimento mais ou menos generalizado de desinteresse, de desmotivação com tudo o que isto acarreta de práticas de demissão e de aborrecimento, de mal estar e de desgosto, perante as chamadas matérias escolares quando não pela aprendizagem em geral, pelo saber e até, sabemos bem, por aquilo que cada um é. Em muitos alunos, quando essa matéria escolar é a Matemática, sentimentos de incapacidade ou de deficiência tornam-se também notórios, fazendo sentir fortemente os efeitos da sua presença que, em muitos casos, acompanharão para sempre o aluno em questão. Por outro lado, a muitos professores, cada vez agrada menos o que fazem, os resultados do seu trabalho, o modo como os alunos reagem àquilo que eles lhes ensinam.

Pegando apenas nos resultados mais «visíveis», no dito «sucesso», ou melhor ainda, no aproveitamento escolar dos alunos, um estudo recente (2), relativo aos anos lectivos 84/85 e 85/86, recolheu dados sobre esse aproveitamento, apenas para alunos do ensino secundário, 7°, 8° e 9° anos, das escolas da área pedagógica cinco (Lisboa). Esse estudo, que envolveu mais de cinco mil alunos, apresenta uma taxa de reprovações que se aproxima dos 30% e, relativamente aos alunos que no terceiro período tiveram os níveis 1 ou 2 em Matemática, o seu número é quase metade do total (ver tabelas I e II).

TABELA I (3)

	Alunos	Alunos Reprovados	% de Reprovações
84/85	5602	1634	29.2
85/86	5798	1613	27.8

TABELA II (3)

	Alunos	Alunos Reprovados a Matemática	% de Reprovações a Matemática
84/85	5602	2778	49.6
85/86	5740	2838	49.4

É isto o que se «vê», um «insucesso» escolar grande para o qual o mau aproveitamento em Matemática parece concorrer de forma importante. Mas, o que mais me espanta é que isto não cause espanto; que para muita gente e sobretudo que para muitos professores, isto seja aceite mais ou menos passivamente, visto como natural ou normal; que ninguém se espante quando alguém diz que não gosta ou que não entende nada de Matemática.

Estou agora a lembrar-me das pessoas que nos restaurantes rejeitam sempre fazer as contas — «Faz tu que és de Matemática!» — e, não penso que seja só por preguiça (e se for, porquê aqui a preguiça?). Este talvez seja um exemplo pobre dada a «matéria» em questão, no entanto, sabemos bem como reagem muitas pessoas quando há «números», tabelas, «contas», em jogo, quando se confrontam com «problemas» ou outros assuntos identificáveis como matemáticos. Sabemos bem que há pessoas que são incapazes de ler seja o que for que «meta» números; passam à frente, rejeitam ou ficam como que bloqueadas. Para elas, de facto, isso parece-lhes «opaco», «espesso», como diria o jornalista que adiante se refere.

Não é considerado, em geral, imperdoável cometer erros de ortografia ou pronunciar incorrectamente palavras portuguesas? Pouca gente desculpa estes erros ou mesmo certa ignorância de factos importantes da História Nacional, da Geografia ou das Ciências da Natureza. No entanto, a tolerância perante a rejeição, ou o que habitualmente se chama de ignorância, em Matemática, mesmo ao seu nível mais elementar, é enorme; toda a gente «compreende» que se tenham dificuldades em Matemática, que não se goste desta disciplina. Esta é a normalidade.

> *(...) medida violenta? A verdade é que a ignorância da nossa Língua está cada vez mais generalizada e atinge proporções escandalosas. Não deixa de ser lamentável que, para muitos, o Português surja tão* **espesso como a Matemática**. *Culpa de quem? Quando, há algumas dezenas de anos, suprimiram, nas primeiras classes do liceu, o Latim, começou o desastre. Não tanto por causa do conhecimento. (...)*
>
> (in *Diário Popular,* 18.9.86)[4]

Este «recorte de jornal» fala do Português e da Matemática. Penso que a opinião aí expressa a propósito desta última, é bem capaz de traduzir um sentimento generalizado sobre esta disciplina. A Matemática é tida como «espessa», mais ou menos impenetrável, como um lugar longínquo e difícil a que, naturalmente, só alguns especialmente dotados poderão ter acesso. É, pois, «normal» rejeitar ou ter dificuldades em Matemática; socialmente é mais bem aceite não gostar de Matemática do que gostar. A criança parece dar-se conta disso muito cedo o que, possivelmente, poderá dar aso ao desenvolvimento de atitudes negativas em relação a essa disciplina(5).

É a «bola de neve» a crescer; começa assim a entrever-se um ciclo vicioso: um ambiente em que se considera «normal» não gostar de Matemática, em que o que mais se espera das crianças é que tenham dificuldades na sua aprendizagem, está, possivelmente, na origem de sentimentos de rejeição, de desprazer ou de desgosto, de incapacidade e de angústia perante essa matéria. Estes sentimentos começam a desenvolver-se mal a criança toma contacto com a disciplina em questão embora as idades entre os 11 e os 13 anos pareçam ser «particularmente importantes»(6), e, muitas vezes, acompanharão essas crianças que irão ser os futuros pais... Para além disto, acreditar nessa «normalidade» leva a um certo imobilismo, a que nada se faça para que a situação se modifique.

É preciso quebrar o «ciclo». Apesar de toda a «evidência» não creio que a situação que procurei descrever seja natural, que corresponda a um destino a que se não possa fugir por fatalidade da natureza humana ou por essência da Matemática.

A criança, assim que nasce, começa logo a aprender, avidamente. Nos primeiros anos de vida aprende muito, e aprende bem, e é bem visível o interesse e o prazer com que realiza a aprendizagem, mesmo de futuras matérias escolares. Quantas vezes não se vêem crianças, ainda fora da escolaridade, a manifestarem um profundo (e «espontâneo») desejo em aprender, uma grande alegria por já saberem as «letras», os «números», as «contas», as «figuras»...? Quantas vezes não se encontram crianças que mostram um enorme prazer em contar, sei lá até quanto..., inventando, se preciso for, maneiras próprias para poderem prolongar a sua contagem? E os que ficam contentes quando descobrem um número, ou uma figura geométrica?... A criança gosta de aprender, sabe e é capaz de aprender. É à medida que prossegue prossegue na escolaridade que esta sua relação com o saber e com a aprendizagem, se modifica, se inverte mesmo, na maior parte dos casos. Aprender torna-se aborrecido, sobretudo se for Matemática. Só alguns se «revelam» capazes e a Matemática torna-se mais ou menos inacessível. Acredito, no entanto, que a Matemática não é necessariamente assim, inacessível, aborrecida, «espessa». Não que pretenda defender «facilidades»; aprender, certamente, exige persistência e esforço, obriga a enfrentar e a ultrapassar obstáculos. Aprender Matemática neste sentido, como outros assuntos aliás, não terá que ser fácil mas poderá ser interessante.

Por isso digo que é possível quebrar o «ciclo». Os professores de Matemática não são certamente, os únicos responsáveis por essa situação, pelo perpetuar desse ciclo; terão que ser eles, no entanto, os primeiros a contribuir para que ele termine.

Notas:

(1) Contou-me um dia a Professora Manuela Paisana.

(2) Estudo não publicado realizado por Maria Alice Inácio.

(3) Estas tabelas foram construídas a partir dos dados fornecidos pela autora do estudo referido anteriormente.

(4) Este recorte foi extraído de um artigo publicado no referido jornal assinado por P. A.

(5) Veja-se: Kulm, G. (1980). Research on Mathematics Attitude. In R. Shumway ed.. *Research in Mathematics Education*, 356-387. Reston: NCTM.

(6) Veja-se: Aiken L.R. (1985). Mathematics, attitude towards. In *The International Encyclopedia of Education, vol. 6.* 3233-3236. New York: Pergamon.

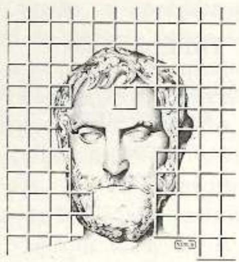
A APM e a Sociedade Andaluza de Professores de Matemática

A Sociedade Andaluza de Professores de Matemática «Thales» apresentou, em devido tempo, a candidatura da cidade de Sevillha para a realização do ICME-7 (international Congress of Mathematics Education) em 1992 — ver notícia sobre o ICME-6 (Budapeste, 1988) em «Educação e Matemática» n.º 1. Existe pelo menos uma outra candidatura, do Canadá.

A Direcção da APM decidiu manifestar o seu apoio à candidatura de Sevilha uma vez que a escolha de Espanha para a realização daquele importante Congresso, se vier a concretizar-se, será muito vantajosa para a possível participação de professores portugueses e ainda porque mantemos excelentes relações de trabalho e de amizade com os nosso colegas da Andaluzia (que, aliás, estiveram representados no Profmat-86 em Portalegre). Na mesma ocasião, propusemos à Sociedade «Thales» a permuta regular entre as revistas das duas Associações.

Agora, recebemos uma resposta da Sociedade Andaluza, agradecendo-nos o apoio manifestado e declarando a sua concordância relativamente à proposta de permuta das revistas. Portanto, a APM receberá regularmente todos os números da revista «Thales», a partir do n.º 6 inclusive.

O intercâmbio com Associações e movimentos de professores de Matemática de outros países é, para nós, sem dúvida, um factor de estímulo e enriquecimento, sobretudo tratando-se de países com os quais temos grandes afinidades. Por isso, todas as contribuições neste sentido serão bem-vindas.



E a Lua Aqui Tão Perto

(a propósito do estudo das progressões geométricas)

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Há cerca de um ano, uma professora estagiária procurou-me para me pedir uma sugestão de trabalho que pudesse ser motivadora para os alunos do 11.º ano a propósito do estudo das progressões geométricas. Não se sentia particularmente entusiasmada com as ideias mais usuais (como, por exemplo, a do prémio pedido em grãos de trigo pelo inventor do jogo de xadrez) porque, segundo ela, os alunos encontrariam certamente esses exemplos nos manuais ou nos livros de Matemática Recreativa.

Sugeri-lhe então que explorasse uma situação imaginária, provavelmente menos conhecida, que consistia em supor-se que poderíamos dobrar ao meio sucessivamente uma folha de papel até atingirmos uma determinada altura. Concretamente, o problema poderia ter o seguinte enunciado:

Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?

Pusemos esta questão a algumas pessoas que entretanto encontrámos, pedindo apenas um palpite sobre a ordem de grandeza do resultado. Obtivemos respostas do tipo: um milhão; biliões; um milhão elevado a um milhão.

Obviamente, estas respostas (em especial a última) revelam um incrível desconhecimento da ordem de grandeza destes «números grandes». A «melhor» resposta que obtivémos, no entanto, foi a de uma assistente do Departamento de Matemática da Faculdade que disse: «Estas situações envolvendo progressões geométricas enganam muito... o número não deve ser muito superior a 500».

Para determinar com exactidão o número pedido era necessário conhecer a distância da Terra à Lua (consultámos um livro de Astronomia e ficámos a saber que era de 384400 km aproximadamente) e atribuir um valor à espessura da folha de papel (estimámos que 0.1 mm corresponderia a uma folha bastante fina).

Depois disso, um computador executaria facilmente os cálculos, através de um programa muito simples em BASIC:

```
10 LET X=0.0001
20 LET N=1
30 PRINT N, 2 * X
40 LET X= 2 * X
50 IF X> = 3844 * (10↑15) THEN STOP
60 LET N=N+1
70 GO TO 30
```

Apresentam-se, a seguir, alguns extractos da resposta obtida com este programa, indicando-se, na coluna da esquerda, o número de dobragens e, na da direita, o correspondente valor da altura atingida (de notar que este é dado em metros):

1	.0002
1	.0002
2	.0004
3	.0008
4	.0016
5	.0032
....	....
13	0.8192
14	1.6384
15	3.2768
16	6.5536
....	....
37	13743895
38	27487791
39	54975581
40	1.0995116E+8
41	2.1990233E+8
42	4.3980465E+8

Ficámos assim a saber que, após a 42.ª dobragem, a distância da Terra à Lua seria largamente ultrapassada. Este resultado não deixa de ser algo surpreendente mesmo para quem está «de pé atrás» em relação ao problema proposto.

A forma como a aula decorreu veio confirmar as nossas expectativas. O problema despertou nos alunos um grande interesse e curiosidade, pelo que acabou por constituir uma excelente motivação para o estudo das progressões geométricas.

Por esta altura, o problema tornou-se alvo de conversas com colegas e com alunos. Curiosamente, apenas uma pessoa (um professor de Matemática, claro...) se dispôs a utilizar lápis e papel antes de arriscar uma resposta:

$$10^{-4} \times 2^n \geqslant 3844 \times 10^5$$
$$2^n \geqslant 3844 \times 10^9$$
$$n \geqslant \log_2 (3844 \times 10^9)$$
$$n \geqslant \log_2 3844 + 9 \times \log_2 10$$
$$n \geqslant (\ln 3844/\ln 2) + 9 \times (\ln 10/\ln 2)$$

e com o auxílio de uma calculadora:

$$n \geqslant 11.908 + 9 \times 3.322$$
$$n \geqslant 41.806$$

Este resultado confirmou, naturalmente, aquilo que já sabíamos. O que é curioso é que o professor referido, ao chegar a este ponto, exclamou «não pode ser!» e dispôs-se a verificar cuidadosamente todos os cálculos que efectuara.

De facto, parece haver uma importante diferença entre obter-se um resultado e «sentir-se» esse resultado. Esta diferença pode ter implicações na aprendizagem da Matemática. Muitas vezes, perante uma abordagem lógica, o aluno sente-se forçado a aceitar determinada conclusão mas fica com a impressão de que algo lhe escapa. Utilizando uma expressão da linguagem corrente, dir-se-ia que fica vencido mas não convencido...

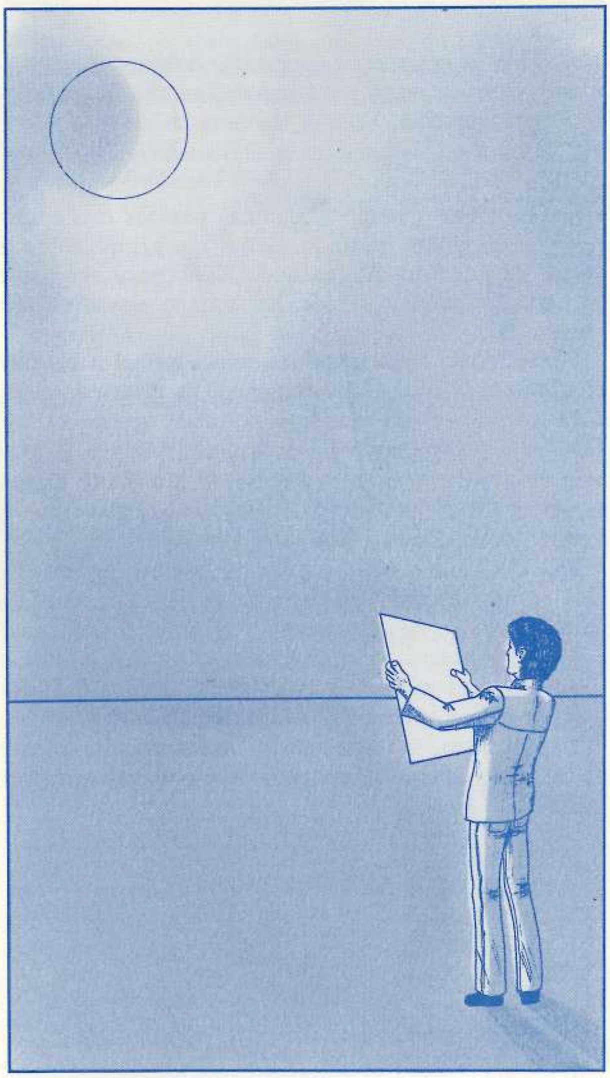
A este respeito, pode ser interessante reflectir-se no que ocorreu quando o mesmo problema foi utilizado por uma outra professora numa escola diferente e de um modo diverso do anterior. Neste caso, a situação foi proposta como uma aplicação do estudo, já anteriormente feito, das progressões geométricas. O programa foi ligeiramente modificado para se salientar o que era o 1.º termo, a razão, o valor do termo de uma dada ordem, etc. O facto de surgirem no ecrã todos os termos até ao 42.º (o que, aliás, já sucedia na primeira versão) revelou-se útil pois alguns alunos sentiram necessidade de examinar os sucessivos valores para compreenderem a situação. Isto deu lugar a observações do tipo «chega-se à Lua em 42 dobragens mas com 41 ainda se vai a meio caminho e com 40 está-se muito mais perto da Terra» ou «com 14 dobragens ainda mal se atingiu a altura de uma pessoa».

Bastante significativa terá sido a atitude de um aluno que, quando a aula terminou, pediu para fazer algumas modificações no programa. Começou por mudar o valor inicial de X (espessura da folha de papel), fez algumas experiências variando esse valor e observou os resultados obtidos. O número final de dobragens não se alterava substancialmente com essa variação. Depois, substituiu a distância da Terra à Lua e verificou o que sucedia com diferentes valores, maiores ou menores. Não fez praticamente qualquer pergunta, agradeceu, despediu-se e saiu da sala.

Aquilo que este episódio me sugere é a importância que julgo dever ser atribuída a actividades em que os alunos tenham liberdade para realizar experiências pessoais podendo assim procurar respostas para as suas dúvidas. Quando se tenta aprender qualquer coisa, muitas vezes só o próprio sabe quais são as perguntas para as quais precisa de resposta, e elas podem não ser exactamente as mesmas que ocorreriam a uma outra pessoa numa situação idêntica.

Surge assim a ideia de substituir, no processo de ensino-aprendizagem, o esquema «certo ou errado» por uma abordagem do tipo «que acontece se...». De facto, a exploração sugerida a propósito do problema das dobragens sucessivas pode conter este aspecto que é comum quando se trabalha com simulações e que permite colocar o aluno no papel de «investigador» em vez de lhe atribuir a tarefa habitual de dever acertar na solução pré-estabelecida. O problema aqui apresentado envolve uma situação artificial cujo único interesse parece ser de natureza matemática mas esta perspectiva de trabalho — que é aceite, com mais naturalidade, no estudo das ciências experimentais, envolvendo simulações de fenómenos ou situações reais — pode ser muito útil na aprendizagem da Matemática.

A ideia de poder mudar os valores de uma ou mais variáveis (ou de factores aleatórios), analisar os efeitos produzidos por essas mudanças e tentar, a partir daí, extrair conclusões ou apenas interpretar melhor a situação que se está a estudar, sugere imediatamente o uso do computador. Foi, afinal, o que se fez neste caso, tendo-se construido um programa muito simples em BASIC. Contudo, uma alternativa à programação poderia ser o uso de uma «spreadsheet» (folha de cálculo electrónica).



RECORDES — Um Incentivo à Atitude Crítica

Maria da Conceição Mesquita, Escola Secundária do Alto da Damaia

O programa RECORDES foi construído durante a realização de um trabalho de projecto, por se ter sentido necessidade de proporcionar aos alunos uma discussão sobre a validade e limites do modelo de regressão linear. Embora essa discussão surgisse a propósito de uma situação concreta que consistia na estimação de recordes de determinada modalidade desportiva para um dado ano, baseada nos recordes obtidos em anos anteriores, ela afigurou-se de começo bastante difícil por várias razões, nomeadamente: (1) com os alunos dos níveis mais elementares (7.º e 8.º anos), devido aos conceitos matemáticos envolvidos, apenas poderia ser feito um estudo quase exclusivamente baseado numa análise gráfica; (2) com os alunos do 11.º ano, embora podendo usar-se explicitamente o método dos mínimos quadrados, qualquer discussão teria que basear-se necessariamente no cálculo de um elevado número de recordes, o que parecia constituir uma tarefa bastante pobre do ponto de vista de capacidades envolvidas.

Foi assim que «surgiu» um programa que, para além de ter um evidente aspecto utilitário, pode por si só permitir dar um salto qualitativo na discussão que se pretende desencadear.

SALTO EM ALTURA — FEMININO
(em metros)

1.65	Jean Shiley (USA)	Los Angeles	7	Aug	32
1.66	Dorothy Odam (GBR)	Brentwood	9	May	39
1.66	Esther Van Heerden (RSA)	Stellenbosh	29	Mar	41
1.71	Fanny Blankers-Koen (HOL)	Amsterdam	30	May	43
1.72	Sheila Lerwill (GBR)	London	7	Jul	51
1.73	Aleksandra Chudina (URS)	Kiev	22	May	54
1.76	Mildred McDaniel (USA)	Melbourne	1	Dec	56
1.77	Cheng Peng-Yung (PRC)	Beijing	17	Nov	57
1.82	Iolanda Balas (RUM)	Bucuresti	10	Oct	58
1.84	Iolanda Balas (RUM)	Bucuresti	21	Sep	59
1.86	Iolanda Balas (RUM)	Bucuresti	9	Jul	60
1.91	Iolanda Balas (RUM)	Sofia	16	Jul	61
1.92	Ilona Gusenbower (AUT)	Wien	4	Sep	71
1.94	Yordanka Blagoyeva (BUL)	Zagreb	24	Sep	72
1.95	Rosemarie Witschas (GDR)	Roma	8	Sep	74
1.96	Rose Witschas-Ackerman (GDR)	Dresden	8	May	76
2.00	Rose Witschas-Ackerman (GDR)	Berlin	26	Aug	77
2.01	Sara Simeoni (ITA)	Brescia	4	Aug	78
2.02	Ulrike Meyfarth (FRG)	Athinai	8	Sep	82

Figura 1

Descrição e Funcionamento do Programa

Convém, no entanto, abrir aqui um breve parêntesis para apresentar o programa RECORDES:

1. *Introdução dos dados.*

O utilizador começa por introduzir no computador um determinado número (à sua escolha) de recordes conhecidos de determinada modalidade desportiva (a figura 1 mostra uma tabela, relativa ao salto em altura, de onde esses dados poderiam ser retirados).

2. *Tratamento gráfico dos dados.*

No ecrã, aparece então uma tabela com os valores introduzidos, após o que o computador marca os pontos correspondentes num gráfico cartesiano. Em seguida, surge o traçado da recta que melhor aproxima esse conjunto de pontos, referenciada como sendo a recta em que se basearão futuras estimações (figura 2).

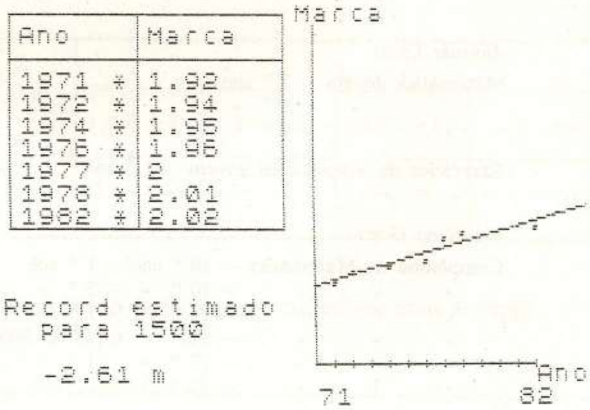


Figura 2

3. *Estimação de valores.*

Finalmente, é dada ao utilizador a possibilidade de estimar valores de recordes para quaisquer anos à sua escolha.

Na prática...

Tem-se verificado que, numa primeira fase, os alunos começam por utilizar o programa para estimar recordes para anos muito próximos daqueles de que conhecem já os recordes efectivamente alcançados. No entanto, depressa a sua curiosidade os remete para a procura de respostas relativas a anos muito distantes. É nessa altura que acontece aquilo que eles nunca esperariam: os valores obtidos para o salto em altura para o ano 2000 ou 3000, por exemplo, chegam a ser superiores a 10 metros e para o ano 0, ou 1500, haveria recordes negativos... Os resultados obtidos são assim demasiado «estranhos» para que possam não «incomodar» e ainda que, no começo possam ser procuradas justificações mais ou menos fantásticas (a anatomia humana modificar-se-á de modo a que seja possível saltar 10 metros?!...), melhor ou pior fundamentadas («o computador está maluco!...»), os alunos acabarão por concluir que aquele programa parece não resolver com a mesma eficácia todas as questões que se lhe colocam. A partir daqui os dados estão então lançados...

Mas perguntar-se-á qual o interesse efectivo que este programa poderá ter para o ensino secundário a não ser para uma ou outra actividade extra-curricular. Se, por um lado, é certo que a Estatística não figura nos actuais currículos, parece no entanto não ser tão seguro que essa situação se venha a prolongar por muito tempo. Pelo menos, a tendência que se vem revelando noutros países aponta para a sua introdução nos currículos, desde os níveis mais elementares (Pereira-Mendoza e Swift, 1981).

Mas mesmo no contexto dos actuais currículos, e uma vez que se trata duma situação susceptível de motivar bastante os alunos, sugere-se que este programa seja utilizado para explorar, entre outras, questões como a construção e análise de gráficos cartesianos, o conceito de função, respectiva representação gráfica e monotonia, bem como diversas noções de Geometria Analítica.

Uma preocupação fundamental

Os alunos que frequentam actualmente as nossas escolas estão habituados a que se lhes proporcionem situações em que «tudo funciona», não há precalços, nem margem para dúvidas. O professor, ao preparar as suas estratégias constrói situações, mais ou menos elaboradas, mais ou menos irreais, de modo que isso possa acontecer. Aqui, a novidade é que em vez de dar respostas acabadas, é possível suscitar as dúvidas, pôr os alunos a «especular», a tentar encontrar justificações para as situações «rebeldes». Embora possa, à primeira vista, parecer um absurdo, algumas das situações mais enriquecedoras no uso deste programa são as que, noutro contexto, poderiam tornar-se embaraçosas.

A questão está sobretudo, como nos sugere um velho provérbio, em acreditar que, mais do que dar um peixe aos nossos alunos, é importante que os ajudemos a aprender a pescar.

Referências

Pereira Mendoza, L. e Swift, J. (1981). Why teach Statistics and Probability — a rationale. In *Teaching Statistics and Probability*. U.S.A.: National Council of Teachers of Mathematics (1981 Yearbook).

Saber de Cor a Tabuada: Problema ou Mito?

Alice Inácio

Um dos problemas de que mais frequentemente se ouve falar, quer entre os Professores que utilizam a Matemática nas suas aulas, quer entre os Pais de alunos que frequentam o Curso Unificado (3.º Ciclo do Ensino Básico, de acordo com a Lei de Bases aprovada), é o do desconhecimento que os alunos têm da tabuada da multiplicação. Ora este parece-me ser, na realidade, um falso problema: desconhecimento da tabuada temos nós todos, em grau mais ou menos profundo — quantas vezes nos falha a memória e temos de nos socorrer de outros métodos para sabermos certos valores «mais antipáticos» da tabuada?

Parece-me já estar a ouvir algumas vozes: lá vai esta defender a não memorização da tabuada!... Pois bem, realmente não é isso que eu vou defender. Entendo é que a aprendizagem «de cor» da tabuada não deve ser encarada como um fim em si mesmo, donde a sua não aprendizagem não poder ser apontada como causa de insucesso. Poderão — e deverão — fazer-se exercícios de treino da memória — sem esta não há conhecimento —, e a tabuada pode ser usada como instrumento de treino — em certo nível etário, as crianças até gostam deste tipo de exercício repetitivo — mas será um erro tomar por finalidade o que não deve ser senão um meio.

O conhecimento das operações numéricas penso dever ter três finalidades fundamentais, de índole diferente:

1. formativo — permitir ao aluno desenvolver determinado tipo de abordagem da realidade: a quantitativa;
2. social — permitir ao aluno preparar-se para a vida de todos os dias, nomeadamente para a resolução de problemas correntes;
3. científico específico — permitir ao aluno desenvolver:
   - o conhecimento da estrutura do sistema numérico vulgarmente utilizado;
   - a capacidade de o generalizar.

Nesta linha, o «saber a tabuada na ponta da língua», só pode interessar com vista à rapidez na resolução de operações. No que respeita ao estabelecimento de relações numéricas, uma aprendizagem feita com base na memorização é de pouca ajuda, porque dificilmente se transfere, auxiliando somente na resolução de situações semelhantes àquela em que a aprendizagem se efectuou. Ora, a rapidez na resolução de operações com lápis e papel está hoje completamente ultrapassada e isso é do conhecimento de uma larga percentagem das nossas crianças, quando entram para a Escola.

Onde me parece ser fundamental investir é, portanto, na capacidade de estabelecer relações numéricas; esta capacidade está dependente do maior ou menor domínio que o aluno tenha da estrutura dos conjuntos numéricos (não confundir domínio de estrutura com conhecimento dos nomes das propriedades das operações numéricas elementares). O desenvolvimento desta capacidade ajudará a caminhar na direcção dos três objectivos anteriormente apontados e poderá ser promovido utilizando actividades variadas, de que à frente se dão alguns exemplos. Mas — e isto parece-me ser o mais importante — não se pode pensar que esta capacidade se alcança de uma vez e para sempre. Estas actividades têm de ser feitas ao longo da vida escolar do aluno, não todos os dias, mas a intervalos, que só a nossa intuição de professores nos indicará, face a cada situação concreta. E isto independentemente dos programas chamarem ou não a atenção para estas actividades: qualquer licenciado em Matemática sabe não ser possível avançar na utilização ou no estudo desta ciência sem um domínio mínimo da estrutura numérica e a possibilidade de decidir qual a actividade mais conveniente em cada momento para os alunos que se tem na frente é uma das principais razões por que o ensino programado nunca poderá substituir o presencial.

Passo, seguidamente, a indicar algumas actividades que poderão ser utilizadas no sentido antes indicado:

A — Exercícios de deteminação de resultados da tabuada da multiplicação por «números grandes», utilizando a propriedade distributiva, como

X	8			
	5+ 3= 8	4+4=8	2+...=8	...+...=8
7	35+21=56	...+...=...	...+...=...	...+...=...

que levarão facilmente a exercícios mais complexos do tipo

X	83	142
	80+3=83	100+40+2=142
7	560+...=...	............=...

útil para o cálculo mental e para a estimação de resultados.

B — Exercícios de cálculo mental — e, aqui, gostaria de apontar a experiência da colega Maria Augusta de Setúbal, com o «Jogo do Faz de Conta». Faz de conta que vai às compras, que adapta uma receita às quantidades de ingredientes que se têm, que ... tudo o que nós tivermos a coragem de deixar que a imaginação das crianças nos ensine.

C.1 Exercícios de «adivinhação» de algarismos com base no estabelecimento de relações numéricas como:

93×8__=8____1	9805÷8__=__2
83__×__6=46816	23×3__×__7=13294
____6×84__=232668	91__7–__7__=8271
3____×__7=18001	5418÷____=8__
4____6÷8__=48	7×(__8–2__)=112

(Um destes exercícios é impossível. Qual? Porquê?)

C.2 — Exercícios de estimação, como:

(37 ? 21) ? 223 = 1000	(3461 ? 276) ? 101 = 37
(756 ? 18) ? 29 = 1218	(2^9 ? 8^2) ? 9 = 64
27 ? (36 ? 18) = 675	619 ? 316 ? 425 ? 196 = 924
31 ? (87 ? 19) = 2108	6975 ? (36 ? 39) = 93
476 ? (2040 ? 24) = 391	(967 ? 34) ? (1023 ? 654) = 369369

«?» representa uma das operações +, –, ×, ÷.

Estes dois últimos tipos de exercícios poderão ser tentados de forma diferenciada pelos alunos, quer utilizando uma estratégia de tentativa e erro, mais ou menos sistematizada, quer utilizando em maior escala as relações numéricas. Servirão para mostrar como o domínio da estrutura numérica permite poupar tempo em exercícios deste tipo. A utilização de calculadoras permitirá ao aluno, por um lado concentrar-se nos conceitos e nas relações em vez de ter de fazer cálculos cansativos, e, por outro lado, permitir-lhe-á verificar facilmente as suas intuições. A discussão das várias formas de resolução surgidas poderá ser interessante. Os enunciados poderão ser adaptados ao nível etário/escolar dos alunos. Pode-se, por exemplo, numa primeira fase do ensino primário, começar por __ 8 - __ = 13; em níveis mais avançados, pode passar-se a exemplos em que, por exemplo, seja uma função trigonométrica que falte: ? 30° + cos 44° = 1,2967.

Estes enunciados podem também servir de base para exercícios de programação. Será, talvez mesmo, interessante jogar a «vencer o computador»: tendo este programado para determinar **a**, **b** e **c** de tal forma que 97x8a = 8bc6, com um programa que faça **a**, **b** e **c** a variarem de 0 a 9, não é difícil que um aluno que tenha medianamente operacionalizada a estrutura numérica ganhe ao computador.

D — Exercícios numéricos do seguinte tipo: «Como, com uma calculadora com 8 dígitos, efectuar operações com números que tenham mais de 8 algarismos?»
Estes exercícios levarão à utilização das propriedades comutativa, associativa e distributiva.

E — Cálculo de valores aproximados de raízes quadradas, com calculadora, com erro cada vez menor. Estes exercícios permitirão exercitar a estrutura dos números decimais.

F — Exercícios de exploração da estrutura dos números decimais racionais:

1. Determinar a diferença entre 4,61538462 e 4 8/13.
2. Determinar 2/13 + 11/13, por um lado, utilizando números fraccionários, por outro lado, reduzindo, com calculadora, cada fracção a número decimal.
3. Determinar a diferença entre 1 e 0, (9).

Bibliografia

Hewitt, Dave (1982). Nought point nine recurring; *Mathematics Teaching*, 99, 48 — 53.

Johnson, D.C. (1981). Calculator exploration for concept reinforcement; *Mathematics Teaching*,95, 28 — 29.

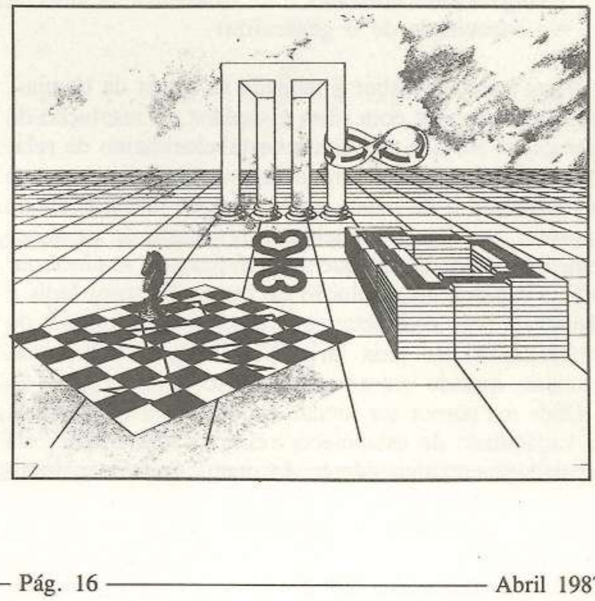
Winkles, J. (1981) Better mathematics and more problem solving with a calculator; *Mathematics Teaching*, 96, 19 — 23.

Horizontes Matemáticos

Por iniciativa da Aliance Française de Coimbra e do Museu Nacional da Ciência e da Técnica (com o patrocínio do Montepio Geral), está neste momento em Portugal a exposição itinerante «Horizontes Matemáticos» que é uma co-produção IREM-APMEP.

A APM dará todo o apio possível a esta iniciativa, convidando desde já professores e alunos a visitar a referida exposição.

Locais e datas: Coimbra — até ao fim de Abril
(Museu Nacional da Ciência e da Técnica)
Braga — de 4 a 17 de Maio
(Universidade do Minho)
Porto — de 18 a 31 de Maio
(responsável: Instituto Francês do Porto)
Lisboa — de 3 a 30 de Junho
(responsável: Instituto Franco-Português)



A Propósito do Pense Nisto...

Raul Fernando Carvalho, Escola Superior de Educação de Setúbal

O Filipe e a Mafalda são de facto figuras da banda desenhada bem familiares aos nossos estudantes, com os quais, aliás, alguns se chegam a identificar. Assim muitos jovens sabem, por exemplo, que o Filipe é um estudante muito preocupado com a escola mas, simultaneamente, muito distraído e predisposto à preguiça; a sua identificação com o «Cavaleiro Solitário» tem-lhe mesmo criado muitos problemas quando, nas aulas, é apanhado a «sonhar» com aquela personagem...

Nestas condições, poder-se-ia admitir, como muito provável, que o que quer que a professora de Matemática lhe tivesse escrito no caderno não fosse demasiado gratificante. Acresce o facto de o Filipe apresentar um ar, de certo modo apreensivo, no que, aliás, é acompanhado pela própria Mafalda.

Não parece serem pois de estranhar os resultados obtidos no trabalho apresentado que, de certa forma, corroboram a crença de não ser habitual os professores, particularmente os de Matemática, utilizarem o caderno diário como via privilegiada para a produção de elogios ou de qualquer outra forma de reforço positivo.

Resolvi, no entanto, PENSAR NISSO... e fazer uma pequena experiência, tendo como base o trabalho do colega Henrique Guimarães.

Utilizando o mesmo «quadradinho», modifiquei apenas a disciplina, passando de Matemática para **Ciências.** Aplicando a questão em duas turmas do oitavo ano de uma escola secundária do Barreiro, em aulas de Geografia, obtiveram-se resultados que eu agrupei em três classes:

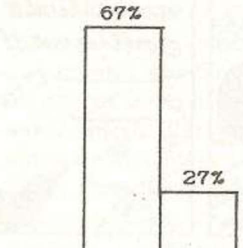
- positivo — afirmações do género:
  — o Filipe está a melhorar;
  — o Filipe tem feito os trabalhos de casa.

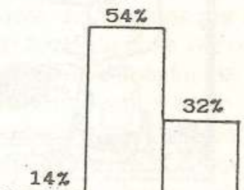
O Filipe acabou de sair de uma aula de Ciências. O que terá a sua professora escrito no caderno que ele está a mostrar à Mafalda?

- negativa — afirmações como:
  — o Filipe está sempre distraído;
  — o Filipe não estudou em casa.

- neutro — afirmações como:
  — o Filipe precisa de cortar a franja;
  — o Filipe precisa de um aparelho para os dentes.

No quadro seguinte apresentam-se estes resultados em termos percentuais, a par dos obtidos anteriormente, por Henrique Guimarães (à direita)





Como se pode ver, os resultados agora obtidos, e relativos à disciplina de Ciências, são ainda mais esmagadores do que os referidos por H. Guimarães relativamente à Matemática...

Poder-se-á conjecturar que o sentimento dos alunos, relativamente ao que os professores podem escrever nos cadernos diários, não deixa de ser negativo com outra disciplina, que não a Matemática? Estará o problema mais centrado no professor do que na disciplina? E no professor de determinada discilina ou no professor em geral?

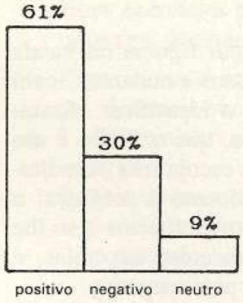
Vejamos então uma variante da experiência.

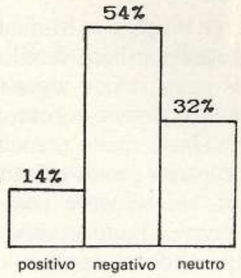
Mantendo a disciplina de Matemática transformei o «quadradinho» pretendendo «dar» ao Filipe um ar mais alegre e à Mafalda um ar menos triste.

Apliquei a questão em duas outras turmas do oitavo ano, da mesma escola, em aulas de História.

O Filipe acabou de sair de uma aula de Matemática. O que terá a sua professora escrito no caderno que ele está a mostrar à Mafalda?

À esquerda apresentam-se os resultados obtidos e, para se poder comparar, à direita, os obtidos pelo colega H. Guimarães.





Pode verificar-se como que «inversão» nos resultados; de facto, 61 % de afirmações positivas é fundamentalmente diferente dos 6 % por mim obtidos atrás ou dos 14 % do colega H. Guimarães.

Influência do «boneco»? Certamente. Mas, 30 % de afirmações negativas, apesar do «boneco», não será de mais?

PENSE NISSO... e repare que sempre vai havendo quem use o caderno diário para estimular os seus alunos pela positiva. Quem não acredita pode ficar com a «banda» de onde foi utilizado o quadradinho que motivou toda esta reflexão.

* Este interessante artigo de Raul F. Carvalho é um bom exemplo do que *Educação e Matemática* pretende conseguir no diálogo com os seus leitores: que o que vai sendo publicado tenha «eco», provoque reacção; que as pessoas que a lêem digam e façam coisas «a propósito» do que nela se publica. Assim esse diálogo poderá ser rico, animado, frutuoso. Assim o leitor poderá, também, ser um fazedor desta revista.

Um esclarecimento apenas relativo à experiência em que se baseou o «Pense nisto» referido (como também o que neste número se publica). Ela foi realizada no princípio deste ano lectivo, antes do Filipe e outros personagens se terem tornado amplamente conhecidos entre os nossos alunos pela série que a televisão está a transmitir.

H. M. G.

Para este número seleccionámos

Seymour Papert, professor de Matemática e Educação no Massachusetts Institute of Technology, é conhecido internacionalmente como o criador do LOGO, uma linguagem de programação que assenta numa concepção totalmente nova de ensino e aprendizagem.

Trabalhou durante cinco anos com Piaget, tendo-se interessado especialmente pela natureza do pensamento e pela forma como as crianças se tornam pensadores. Em 1964 começou a trabalhar no MIT, onde a preocupação principal estava no problema da Inteligência Artificial: como fazer máquinas que pensem?

Do choque destes dois mundos surgiu-lhe a ideia de usar a teoria de processamento da informação, não apenas como fonte de modelos para explicar como funciona a aprendizagem e o pensamento, mas, possivelmente, melhorar a forma como as pessoas aprendem e pensam.

No artigo que seleccionamos, escrito em 1983, Papert explicita, sucintamente, alguns pressupostos teóricos que o conduziram à concepção do ambiente LOGO, que acredita rico em «sementes» culturais propiciadoras da aprendizagem nas crianças.

O Computador, Torta de Barro

Seymour Papert

As crianças são aprendizes notáveis. Basta pensar na enorme quantidade de coisas que aprendem antes do ensino formal — comer, andar, falar... — para chegarmos a essa conclusão. Aprender a falar, por exemplo, é um processo tremendamente complexo que exige muito da criança. No entanto, a criança não tem aulas para aprender a falar. Falar faz parte da vida, acontece, aprende-se de forma natural.

É espantosa a quantidade de coisas que as crianças aprendem desta forma! Mas, mal entram na escola o panorama modifica-se. Há crianças que progridem, mas muitas, se não a maioria, têm problemas de aprendizagem. Porquê? Em minha opinião, isso deve-se ao facto da actividade escolar nada ter a ver com o quotidiano das crianças.

Jean Piaget defende que certos tipos de aprendizagem só acontecem depois dos dez ou onze anos. À aprendizagem que começa nesta fase chamou «aprendizagem formal». O que se aprende no estádio formal não tem raízes na vida real, isto é, na vida social e afectiva da criança e no meio cultural que a cerca. Segundo Piaget, a criança «tem» de aprender essas coisas por meio do ensino formal.

Considero que Piaget se enganou ao pensar que determinados conhecimentos e «skills» têm de ser aprendidos formalmente, enquanto outros são aprendidos naturalmente. Acredito, tal como Piaget, que a criança constrói as suas próprias estruturas intelectuais. O meu ponto de discórdia é quanto ao papel atribuído ao meio cultural como fonte de «materiais de construção». É a abundância do meio cultural em determinados «materiais» que proporciona que determinadas aprendizagens se processem de forma natural, enquanto a ausência de outro tipo de materiais pode levar a que outras aprendizagens só ocorram após ensino deliberado. A questão fundamental está, pois, em como criar uma cultura, um ambiente rico em «materiais» que estimule a aprendizagem natural.

Concretizando o abstracto

Há cerca de quinze anos, quando procurava uma resposta para esta questão, surgiu-me a ideia de integrar uma linguagem de programação no mundo concreto dos acontecimentos visíveis e, assim, conseguir que os factos e conceitos matemáticos fizessem parte do dia-a-dia da criança. Para isso concebi «tartarugas» cibernéticas que, controladas por computador, deixam «rasto» ao deslocar-se, possibilitando a execução de desenhos.

A tartaruga é um objecto real que se pode tocar. A criança pode brincar com ela tal como brinca com água e barro para fazer «tortas». Desenhar com tartarugas permite abordar concretamente conhecimentos que, de outra forma, só eram acessíveis através de processos formais. Com a tartaruga, a criança aprende determinados conceitos de forma natural.

A criança não faz «tortas» de barro dez minutos por dia porque o horário indica que são horas de fazer «tortas» de barro. Também não deve usar o computador ou aprender Matemática porque um horário assim o determina. Para evitar esta situação é necessário um mundo em que a criança tenha livre acesso ao computador, em que decida o que quer fazer e onde quer chegar; um mundo em que possa manipular o computador sem adultos a espreitar por cima dos ombros.

A criança tem de viver uma situação de desafio, tem de adquirir o conhecimento para um propósito pessoal, tem de experimentar o conhecimento como fonte de poder; é o sentimento de «Eu consigo dominar esta coisa. Posso pô-la a fazer o que eu quero». O micromundo Logo proporciona esta experiência às crianças.

A geometria da tartaruga: uma abordagem natural da Matemática

Vejamos, de forma breve, o que uma criança pode fazer com um aspecto do LOGO a que chamo geometria da tartaruga. Nesta forma de utilização, a tartaruga é um instrumento que desenha comandado por computador. Pode ser uma tartaruga-robot que transporta uma caneta ou pode ser uma pequena figura que aparece no ecrã. Quando a criança a manda mover, a tartaruga desenha uma linha a branco, a preto ou a cores.

Desenhar é uma coisa em que a criança, naturalmente, se empenha. Para desenhar com a tartaruga, a criança tem de descrever, em termos matemáticos, o que a tartaruga está a executar. Tem de programar a tartaruga.

A criança que quer desenhar um quadrado depressa descobre, por ensaio e erro, que se escrever VIRAR A DIREITA 90, a tartaruga roda de um ângulo recto. Combinando a instrução PARA A FRENTE com diferentes números, obtém segmentos de recta com diferentes comprimentos. Continuando as experiências, provavelmente descobrirá como construir um quadrado.

Numa folha de papel, a criança podia ter desenhado, de forma bastante satisfatória, um quadrado ou um rectângulo. A actividade teria sido divertida, atractiva e, possivelmente, de algum valor. Contudo, aprendendo a dar instruções a uma tartaruga para esta desenhar um quadrado, a criança aprendeu, a um nível intuitivo, alguma geometria euclideana. Apercebeu-se que o número 90 está, de alguma forma, associado a uma viragem de um ângulo recto; que precisamente quatro dessas viragens põem a gartaruga na posição inicial; que, para «fechar» a figura, os lados têm de ser iguais ou que «o de cima» tem de ter o mesmo comprimento que «o de baixo». Eventualmente, poderá ter adquirido a ideia de que um quadrado é um rectângulo em que todos os lados têm o mesmo comprimento.

Poderíamos esperar que esta aprendizagem ocorresse de qualquer forma, com ou sem computador, com ou sem tartaruga. Mas o uso do computador permite à criança formar estes conceitos mais rapidamente e de forma mais profunda. Consequentemente, a criança poderá, precocemente, criar uma relação de desafio pessoal com a Matemática. Assim que souber como ensinar à tartaruga a desenhar um quadrado, perguntará: «Como é que poderei mandá-la fazer um círculo?» Eu teria relutância em dizer à criança como o fazer. O escândalo da educação é que cada vez que se ensina qualquer coisa a uma criança se priva essa criança da oportunidade de a aprender. Assim, eu encorajaria a criança a fazer de conta, a pôr-se no lugar da tartaruga e descrever um círculo, andando pela sala. Há muito mais identificação pessoal neste procedimento do que em desenhar um círculo no papel. Depois, a criança descreve, em «linguagem de tartaruga», o que fez: «Dei um passo para a frente, depois virei um bocadinho à direita, depois outro passo em frente, depois virei um bocadinho à direita...»

Este processo — imediato e pessoal — de aprender Matemática é muito diferente da Matemática ensinada na escola. Na escola, a Matemática feita com papel e lápis é uma coisa alheia e abstracta que não toca a criança. Para fazer Matemática como um matemático é preciso estar «por dentro».

A maior parte do nosso conhecimento geométrico é adquirido quando começamos a andar e a orientarmo-nos no espaço. Adquirir a sensação de fazer Matemática, desta forma pessoal e primitiva, pode mudar todo o nosso sentimento global relativamente à Matemática. É nesta mudança de percepção que a utilização do computador deve ter a sua mais forte influência.

Uma oportunidade a não perder

Dar esta relevância ao uso dos computadores pressupõe a existência de uma quantidade razoável de equipamentos. Talvez esta opção seja económica e politicamente difícil. É frequente ouvir dizer: «Porque não se espera?» É provável que daqui a cinco anos o preço dos computadores seja a quarta parte do que é hoje. Mas, daqui a cinco anos, quando os computadores inundarem o mundo já não é altura para começar a pensar em como usá-los. Já não é altura de iniciar o professores na sua utilização, de forma que integrem o computador na sua forma de estar com os alunos. Se esperarmos, é muito provável que da expansão súbita dos computadores, resulte a imposição da sua integração no sistema educativo dentro de uma filosofia e de uma estrutura tecnocráticas. A única maneira que temos de preservar a nossa cultura e valores é, de forma lenta mas imediata, mergulhar na nova tecnologia. Os professores devem crescer com ela e influenciá-la e não deixar que os computadores se expandam e surjam, de repente, como «produto pronto a usar nas escolas».

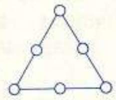
É perfeitamente razoável prever que, dentro de cinco ou dez anos, cada pessoa tenha o seu próprio computador e que o utilize para quase tudo. Que ilacções devemos tirar daqui?

O educador deve actuar como um antropólogo; deve identificar as tendências que estão ocorrendo no mundo em que vivemos e intervir de acordo com elas. A sua tarefa consiste em descobrir que materiais, de entre os disponíveis, são relevantes para o desenvolvimento intelectual. Precisamos de descobrir como proporcionar às crianças — através do LOGO, do processamento de texto ou de outros meios criativos — experiências de aprendizagem que permitam o desenvolvimento de projectos pessoalmente significativos, em relação de continuidade com o conhecimento pessoal estabelecido de cada um e com sentido em termos de um contexto social mais amplo.

Este empreendimento é muito mais ambicioso do que a introdução de uma mudança no programa, mas é algo plausível nas condições que começam agora a emergir.

Tradução e adaptação de: **Eduarda Fonseca**
Leonor Moreira

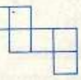
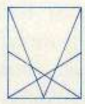
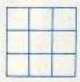
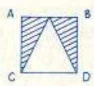
Abril

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado
		1 $a=b$ $a^2=ab$ $a^2-b^2=ab-b^2$ $(a+b)\ (a-b)=b(a-b)$ $a+b=b$ Se $a=b=1$, então $2=1$ Onde está o erro?	**2** Coloque 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nos círculos de modo que a soma nas 3 direcções seja a mesma. 	**3** Se cortarmos um canto de um rectângulo quantos cantos ficam? 	**4** Tendo 10 caixas e 44 berlindes, será possível pôr todos os berlindes nas caixas de forma que em cada caixa fique um n.º diferente de berlindes?
6 Numa classe com 4 raparigas e 6 rapazes, de quantas maneiras diferentes se podem formar grupos de 5 alunos, incluindo pelo menos uma rapariga em cada grupo.	**7** Pense num número, multiplique-o por 2, some 5, multiplique por 5, subtraia 25 e divida por 10. Compare o resultado obtido com o número inicial.	**8** Os senhores Branco, Rosa e Castanho vestem camisa e gravata de cor branca, rosa e castanha, mas a roupa de nenhum deles é da cor do seu nome. Se a gravata do sr. Branco for da cor da camisa do sr. Castanho, qual é a cor da camisa do sr. Rosa?	**9**	**10** Se △⬠ = 15, △▵ = 9, ⊡ = 8 e ◬ = 6, então □⊡ = ?	

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado
27 Um número automórfico é o que reaparece como último algarismo do seu quadrado. Exceptuando o 0 e o 1, os únicos números automórficos com 1 algarismo são o 5 e o 6: $5^2=25$ e $6^2=36$ Descubra todos os números automórficos com 2 algarismos, 3 algarismos e 4 algarismos. Existirá alguma lei?	**28**	**29** Repare que $2+2=2\times 2$ Descubra alguns pares de números diferentes, a e b, tais que: $a+b=a\times b$	**30** 1777 n. **Carl Friedrich Gauss:** escreveu mais de 300 artigos sobre todos os ramos da Matemática.		

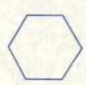
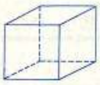
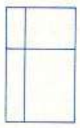
DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

Maio

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado
					2 Coloque parêntesis na expressão de modo que fique verdadeira: $2.1+2.3-2.2-1 = 12$
4 Quais são os números que quando divididos por si próprios dão um resultado maior do que quando multiplicados por si próprios?	**5** Se neste momento forem 11h e 11m, que horas serão daqui a 143 999 999 993 minutos?	**6**	**7**  A figura é formada por 6 quadrados geometricamente iguais e a sua área mede $294 cm^2$. Qual é o perímetro da figura?	**8** De quantas maneiras diferentes se pode escrever 525 como soma de números inteiros consecutivos?	**9** 1746 n. **Gaspard Monge:** escreveu vários trabalhos sobre Geometria Descritiva.
11 Calcula 11^2, 111^2 e 1111^2. Quanto é $111\,111^2$ sem efectuar cálculos?	**12**  Quantos resultados obtidos no lançamento de 2 dados são um número divisível por 3?	**13** Calcule o valor da seguinte expressão: $\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{2^2}\right)^2}\right)^4}\right)^2}}$	**14** Quantos quadriláteros existem na figura? 	**15** Número primo é qualquer inteiro maior que 1 cujos divisores sejam o próprio e 1. Qual é o próximo ano que é primo?	**16** 1718 n. **Maria Caetana Agnesi:** autora de *Analytic Institutions*, um estudo de Álgebra, Geometria e Cálculo.
18 1827 n. **Bertrand Russel:** filósofo, lógico, co-autor de *Principia Mathematica.*	**19** Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números inteiros de 5 algarismos se podem escrever sem repetição de algarismos?	**20** Um barril vazio pesa 10 quilos. O que se há-de pôr no barril para que ele fique a pesar 9 quilos?	**21** Construa um quadrado mágico de 3×3 com os números primos 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101 e 113 de modo que todas as linhas, colunas e diagnonais tenham a mesma soma.	**22** 	**23** Quais são os números inteiros entre 1 e 10 que podem ser designados pela diferença de 2 quadrados perfeitos?
25 1972 f. **José Sebastião e Silva:** notável matemático e pedagogo português.	**26** 1667 n. **Abraham de Moivre:** provou que $(r(\cos\Theta + i \operatorname{sen}\Theta))^n = r^n(\cos n\Theta + i \operatorname{sen} n\Theta)$	**27**	**28**  Se [ABCD] for um quadrado de 12 cm de lado, qual é a área da zona sombreada?	**29** Calcula $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$	**30** De entre os números inteiros menores que 200 encontre os que têm apenas 3 divisores, incluindo o 1 e o próprio número.

COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA COM A MA

Junho

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado
1 Simplifica: $\cfrac{\text{sen } A}{\cfrac{\text{tg } A}{\cfrac{\text{sec } A}{\cfrac{\text{cotg } A}{\cfrac{\cos A}{\text{cosec } A}}}}}$	**2** Qual é o n.º positivo que é igual à soma do seu quadrado com o seu simétrico?	**3** Se a área de um quadrado com 2 cm de lado aumentar 12 cm², quais são as dimensões do novo quadrado?	**4**  Divide um hexágono regular em 12 partes com a mesma área mas que não sejam todas geometricamente iguais.	**5** João e Joana são irmãos. João tem tantos irmãos como irmãs. Joana tem 2 vezes mais irmãos que irmãs. Quantas raparigas há na família?	**6**
8	**9**  Numere os 8 vértices de 1 cubo, de 1 a 8, de modo que a soma dos números nos vértices de cada face seja 18.	Feriado	**11** De quantas maneiras diferentes se pode ler **Matemática** no triângulo?	**12** Faça 4 cópias da figura. Forme com elas: 1. Um paralelogramo. 2. Um quadrado.	**13** 
15 O perímetro de um triângulo rectângulo é 324 cm e a sua hipotenusa mede 135 cm. Qual é o raio do círculo que pode ser inscrito no triângulo?	**16** Uma barra de queijo com 4 cm × 5 cm × × 6 cm foi coberta com papel de prata. Se o queijo for cortado em cubos de 1 cm de aresta quantos cubos não terão cobertura de papel de prata?	**17** M A A T T T E E E E M M M M M A A A A A A T T T T T T T I I I I I I I I C C C C C C C C C A A A A A A A A A A	Feriado	**19** Num dia «primo» tanto o mês como o dia são n.ºs primos. Quantos dias «primos» existem em 1987? Ex: 2/2/1987	**20** O número total de ângulos internos de 2 polígonos é 13, e o número total de diagonais é 25. Quantos ângulos internos tem cada polígono?
22 Eu sou o primeiro número perfeito porque a soma dos meus divisores, sem contar comigo, é igual a mim. Quem sou eu?	**23** O Tiago comeu 100 amendoins em 5 dias. Em cada dia comeu mais 6 que no dia anterior. Quantos amendoins comeu o Tiago no primeiro dia?	**24** Se um centel valer 13 escudões, e um escudão valer 23 tostavos, aceitaria trocar 8000 tostavos por 26 centéis?	**25** Quantos rectângulos há na figura? 	**26** 1948 f. **Bento de Jesus Graça:** autor do «Conceitos Fundamentais da Matemática» e co-fundador da «Gazeta da Matemática».	**27** Multiplicando um número de 4 algarismos, abcd, por 4, obtém-se um resultado em que os algarismos aparecem por ordem inversa, isto é: abcd × 4 = dcba Determine abcd.
29 Qual é o quarto termo da sequência 77, 49, 36,...	**30** Qual é o maior factor primo de 93093?	Este «calendário» foi adaptado e desenvolvido por Cristina Loureiro e António Bernardes com base numa realização idêntica publicada pelo *National Council of Teachers of Mathematics*			

TEMÁTICA • DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA

PROBLEMAS • IDEIAS • SUGESTÕES • PROBL

Há uma tendência generalizada para sobrevalorizar os conhecimentos e procedimentos aritméticos, quando, na verdade, a maioria das pessoas é constantemente confrontada com problemas geométricos. E isto, tanto no trabalho — pedreiros, arquitectos, estilistas — como noutras actividades do nosso quotidiano — arrumar o carro no parque de estacionamento, jogar ténis, etc.

De facto, o mundo físico é, essencialmente, geométrico e a sua compreensão requer o desenvolvimento da percepção espacial e da capacidade de representação desse mesmo mundo. Por outro lado, a geometria parece ser um domínio bastante rico para o desenvolvimento do pensamento heurístico.

Não se compreende, pois, que a geometria seja a «gata borralheira» na história da nossa prática docente — a maior parte das vezes banida, muitas vezes mal tratada. Não querendo, com isso, assumir o papel de «fada madrinha», aqui deixamos, hoje, algumas sugestões de actividades no campo geométrico.

Construção de um cone

Muitos objectos e construções representam no seu todo ou em alguma das suas partes um cone (ampulheta, foguetão, lápis, moinho, etc.). Constroi um modelo de cone.

Nível de escolaridade — secundário.

Notas metodológicas — Um problema sem dados cria à partida dificuldades na sua resolução, mas permite, por outro lado, maior liberdade na descoberta e grande diversidade de soluções.

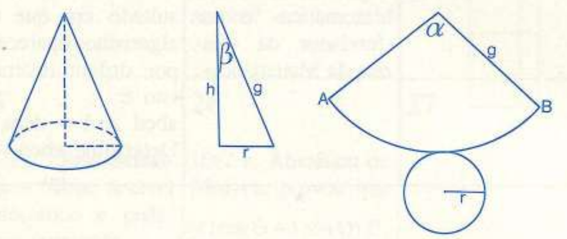
Por onde começar?

O ponto de partida terá de ser a análise de modelos em que facilmente se podem detectar as variáveis em jogo. É interessante verificar a dependência que existe entre essas variáveis, o que não permite fixar *a priori* todas elas.

O cone que queremos construir, obedecendo a certas condições (por exemplo: altura e raio da base, altura e abertura do cone) levar-nos-á a fixar algumas dessas variáveis e a partir delas determinar o valor de outras indispensáveis à construção.

Temos assim um problema de construção geométrica que recorre necessariamente à Análise

Proposta de resolução:



1.ª Fixando o raio da base e a altura do cone o problema será, feito o esboço de planificação, determinar a amplitude do ângulo do sectgor circular de forma que o comprimento de $\widehat{AB}$ seja igual ao perímetro da base.

O raio do sector circular, designado por *g*, obtém-se a partir da relação $g^2 = r^2 + h^2$.

$P_b = 2\pi r$

$C_{\widehat{AB}} = 2\pi g\ k$ com $k = \dfrac{\alpha}{360^o}$

Igualando as duas expressões obtém-se:

$$\frac{r}{g} = k \Longleftrightarrow \frac{r}{g} = \frac{\alpha}{360^o}$$

2.ª Uma outra forma de «pegar» no problema será relacionando os ângulos de amplitude α e β, em que β representa a abertura do cone.

$$\begin{cases} \dfrac{r}{g} = \text{sen}\ \beta \\ \dfrac{h}{g} = \cos\beta \end{cases} \qquad (1)$$

Como $\dfrac{r}{g} = \dfrac{\alpha}{360^o}$ pode concluir-se que

$$\alpha = 360^o\ \text{sen}\ \beta \qquad (2)$$

As relações (1) e (2(permitem-nos obter todos os dados necessários à construção do cone dados a abertura β e a altura do cone ou o raio da base.

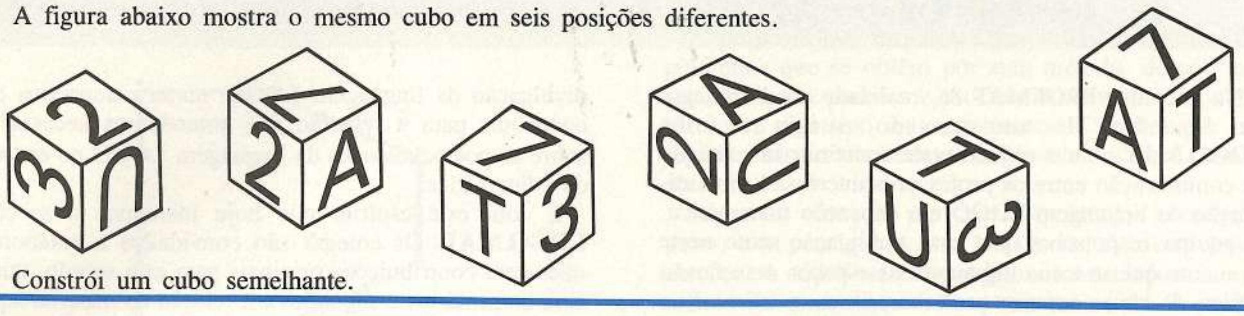
Em qualquer dos casos se deve referir que é necessário e suficiente fixar 2 dos 4 elementos considerados no triângulo gerador do cone para opbter uma solução única para o problema.

Em todo este problema considerou-se apenas a construção de um cone de revolução.

Desenvolvimento — Ao nível do complementar este problema pode sugerir outras propostas. Por exemplo, e tendo em vista a construção de um cone com uma dada geratriz, poder-se-á estudar a variação do volume do cone em função da altura.

Qual é o cubo, qual é ele?

A figura abaixo mostra o mesmo cubo em seis posições diferentes.



Constrói um cubo semelhante.

Nível de escolaridade — básico.

Material — cubos de madeira ou plástico e quadrados de papel com dimensões iguais às das faces dos cubos.

Notas metodológicas — é preferível que esta actividade seja realizada em grupos de dois alunos.

• À partida, poucas crianças deste nível de escolaridade poderão, por análise da figura, descobrir como se dispõem as faces dos cubos. Terão, por isso, de desenhar as «faces» nos quadrados de papel fornecidos e, por sucessivos ensaios, reproduzir o cubo original, colando as «faces» de papel sobre o cubo «em branco».

• Com alunos de 10-11 anos, um objectivo a perseguir é, realmente, que as crianças venham a constatar que são opostas as faces que não aparecem como adjacentes em nenhuma das perspectivas do cubo. Nesse sentido, deve-se propor-lhes o problema de desenvolvimento.

Desenvolvimento — (1) Construam um cubo em que cada face tenha cor (ou desenho) diferente das outras; (2) Desenhem o vosso cubo no menor número possível de posições, de forma a que outro grupo possa construir um cubo semelhante.

António Bernardes, Cristina Loureiro e Leonor Moreira

A propósito de mandarins, ladrões e peças de tecido

Passados 1132 anos havia na Escola Preparatória da Brandoa um grupo de alunos curiosos que depois de resolverem na aula e pelo método das tentativas o problema «Mandarim também tem exame», aparecido no número 1 de *Educação e Matemática* resolveram desafiar o computador a fazer o mesmo.

Depois de vários falhanços e alguma ajuda de «intérpretes» do Núcleo de Informática da escola conseguiram «dizer» à máquina o programa listado abaixo. Os limites inferiores dos intervalos de variação de p — número de peças — e de l — número de ladrões — decorreram da análise das condições do problema. Os limites superiores foram arbitrados, o que obrigou ao seu sucessivo aumento, pois as soluções não se achavam nos intervalos primeiramente definidos.

```
10 REM mandarim
20 FOR l=2 TO 10
30 FOR p=6 TO 30
40 IF (p-2)/l=4 AND (p+4)/l=5
THEN PRINT p, l
50 NEXT p
60 NEXT l
```

Verificaram, no final, que o computador também conseguia resolver o problema.

E se os mandarins já tivessem computadores como teriam resolvido o problema? Da forma atrás exposta ou assim:

```
10 REM mandarim
20 LET l=1
30 IF 4 * l+2=5 * l-4 THEN GO TO 60
40 LET l=l+1
50 GO TO 30
60 PRINT l, 4 * l+2
70 STOP (ou GO TO 30)
```

Nota: A instrução 70 dependerá de se ter discutido ou não, previamente, a existência de uma só solução. Neste caso, STOP será a instrução conveniente.

Fernando Nunes

N. R. — Em reposta ao «convite» que fizemos, chegou-nos da E. P. da Brandoa o artigo de Fernando Nunes que agora publicamos. Esperamos que esta e outras formas de diálogo se aprofundem nos próximos números.

LOGO·MAT

No encontro PROFMAT 86, realizado em Portalegre em Setembro do ano passado, surgiu a folha **LOGO.MAT** com o objectivo de constituir um veículo de comunicação entre os professores interessados na utilização da linguagem LOGO em educação matemática. A equipa responsável por essa publicação sente neste momento que se torna urgente criar espaços de reflexão e troca de ideias entre os professores e em particular no âmbito da utilização criativa dos computadores no ensino da Matemática.

Desta forma pareceu oportuno criar na revista da A.P.M. uma secção especialmente vocacionada para a divulgação da linguagem LOGO, numa perspectiva de contribuir para a reflexão que entendemos necessária sobre as potencialidades da linguagem LOGO no ensino da Matemática.

É com este espírito que hoje iniciamos a secção **LOGO.MAT**. Os colegas são convidados a colaborar quer com contribuições originais para esta secção, quer com comentários e sugestões em relação ao material aqui publicado.

FD2000!

Eduardo Veloso e **João Filipe Matos**

CRUZAMENTO DE POLÍGONOS
Uma proposta de investigação em Matemática

A utilização da linguagem LOGO em educação pode revestir diversas formas. Uma das que julgamos mais interessantes é o envolvimento numa investigação em Matemática, proporcionada por um conjunto de procedimentos simples construídos em LOGO. A proposta de hoje consiste exactamente em investigar um problema que chamaremos de **Cruzamento de polígonos**

Desenho de polígonos

O procedimento **desenho.poli** permite desenhar um polígono qualquer.

```
to desenho.poli :angulo
make "c 0
poli :angulo
end

to poli :angulo
vector :c* :angulo 40
make "c :c+1
poli :angulo
end

to vector :ang :comp
seth :ang
fd :comp
end
```

Convém notar que o procedimento **desenho.poli** admite o input :angulo, inicializa a variável *c* com o valor 0 e manda executar o procedimento **poli.** Por sua vez este procedimento desenha um vector com orientação :c * :angulo e comprimento 40, incrementa o *c* de uma unidade e volta a executar o procedimento **poli**. Se iniciarmos o trabalho fazendo **desenho.poli 90,** serão desenhados vectores sucessivamente com as orientações 0, 90, 180, 270, 360, etc., surgindo um quadrado. O procedimento **poli** é recursivo não terminal, de modo que para pararmos a sua execução teremos que o interromper com BREAK.

Convém experimentar alguns valores no procedimento **desenho.poli** antes de passar propriamente à investigação que iremos propor. Note-se que os polígonos são desenhados de forma «intrínseca», isto é, em cada momento a tartaruga orienta-se para o lado (ou vector) que vai desenhar.

Experimente utilizar no procedimento **desenho.poli** os valores 45, 90, 120, 144 e 2. Se a tartaruga sair do ecrã convém diminuir o valor do lado (isto é o valor da variável :comp no procedimento **vector**).

Cruzamento de polígonos

Suponha agora que temos dois polígonos desenhados com o procedimento desenho.poli, com os valores de 90 e 120 para a variável :angulo. Trata-se de um quadrado e de um triângulo, respectivamente (ver figura 1).

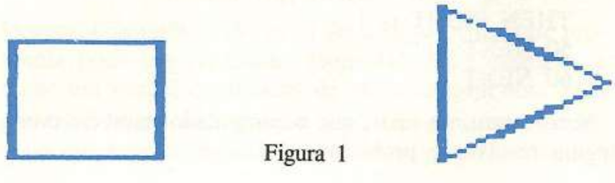


Figura 1

Uma forma de cruzarmos estes dois polígonos é desenhar os lados de cada um alternadamente (ver figura 2).

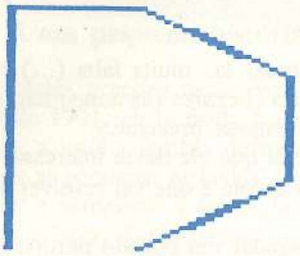


Figura 2

Para conseguirmos cruzamentos de polígonos com o auxílio do LOGO podemos utilizar o procedimento **cruza.poli** que é uma extensão dos anteriores.

```
to cruza.poli :angulo1 :angulo2
make "c 0
cruza :angulo1 :angulo2
end

to cruza :angulo1 :angulo2
poli :c * :angulo1 30
poli :c * :angulo2 40
make "c :c + 1
cruza :angulo1 :angulo2
end
```

A figura 3 mostra o resultado de alguns ensaios com o procedimento **cruza.poli**. É evidente que o cruzamento de polígonos que propomos é bastante mais do que a simples «adição» dos lados dos polígonos.

A proposta que fazemos é investigar a natureza dos polígonos que se obtêm por este método, descobrindo semelhanças e padrões e procurando construir uma teoria sobre este tipo de cruzamentos. Convém por isso registar sistematicamente os resultados que vamos obtendo.

Sugere-se começar por cruzar quadrados com triângulos, com pentágonos, com hexágonos, etc., e só depois começar a trabalhar com polígonos estrelados.

Será interessante podermos prever o tipo de polígonos que se obtêm ao cruzar polígonos diferentes. Numa segunda fase podemos considerar como variáveis os lados dos polígonos e introduzir assim novos parâmetros que darão mais generalidade à teoria que entretanto conseguirmos elaborar.

Mais tarde poderemos avançar para o estudo do cruzamento de mais de dois polígonos generalizando o procedimento **cruza.poli** (e a teoria que entretanto desenvolvemos...), e poderemos ensaiar cruzamentos de polígonos de segunda geração, tentando prever a possibilidade de retrocessos, isto é, o aparecimento de polígonos «mutantes».

Trata-se de um processo investigativo que terá a dimensão que quisermos, o limite será a nossa imaginação. E será curioso ir verificando que nesse processo teremos oportunidade de «fazer matemática», descobrindo relações que não suspeitaríamos entre o que tradicionalmente consideramos como Álgebra e Geometria.

João Filipe Matos

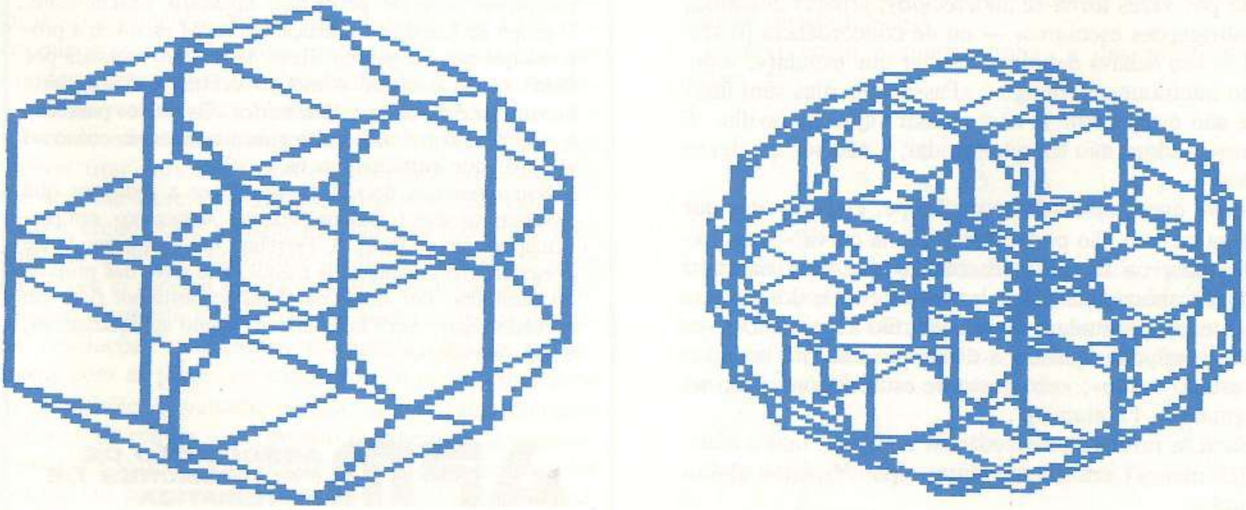


Figura 3

PENSE NISTO:

Os alunos gostam de estudar? De ir às aulas? De ir à escola?

Tem-se dito muito mal da Escola e certamente com razão na maior parte das vezes. Penso, no entanto, que a maioria dos nossos alunos até gosta de lá ir. A este propósito confessou um dia um aluno a um colega nosso: «É pena é termos de assistir às aulas»!

Bom, mas não se trata aqui de discutir estas diferenças; pretende-se apenas conhecer melhor o modo como os alunos encarariam uma situação que lhes permitisse não ter que estudar. Para isso propus a um grupo de alunos que respondessem à seguinte questão:

Imagina que o Filipe está a falar contigo ao telefone. O que lhe responderias?

Esses alunos — 28 — constituíam uma turma do 8.º ano. Vejamos como responderam.

Pelo que escreveram nas respostas que deram, poucos alunos denunciaram uma atitude compreensiva relativamente ao que o Filipe dizia [2 alunos] — «estudar muito por vezes torna-se aborrecido«; «(para) descansar das obrigações escolares» — ou de concordância [6 alunos] — «eu achava delicioso não ter que estudar»; «concordo inteiramente contigo»; «Passar uns dias sem fazer nada não é tão bom? E não estudar? Que maravilha. É divino»; «adoro não ter que estudar, a não ser que tenha ponto».

Houve quem discordasse do Filipe, claro — «ter que ficar na cama e não poder dar a minha curva?»; «eu prefiro estudar ou ir para a escola do que ficar na cama sozinha e aborrecida»; «não preciso de estar doente para não estudar»; «estudar não é assim tão aborrecido»; «eu gosto de estudar, quando a disciplina não me interessa não estudo muito»; «não gosto de estar doente e não ter Matemática» [7 alunos].

Assim as razões da discordância variavam, mas a maioria [15 alunos] era de um outro tipo. Vejamos alguns exemplos:

«És maluco, não vês que estando doente e não estudando não passas de ano?»

«Olha que estudar faz muita falta (...) estás a perder aulas (...) quando chegares (às aulas) não sabes a matéria porque não estavas presente.»

«Eu responderia que ele devia interessar-se mais pela escola porque a escola é que vai resolver o que ele será no futuro.»

«(...) podia estudar um bocado porque assim poderia não se atrasar na matéria.»

«Que ele pensava mal porque é ele que estava a ser prejudicado, assim não aprendia o que devia e ficava mais burro que os seus amigos.»

O que estará por detrás destas respostas?

Um certo discurso do adulto que ainda não se é mas que se aspira a ser? São as respostas ajuizadas por pensarem que são as que deles se desejam? Ou, traduzem alguma sensatez e realismo, alguma responsabilidade, afinal, nos nossos alunos?

Repare-se, ainda, que ninguém (quase) falou em gostar de estudar. Houve quem preferisse estudar a estar doente, mas repare-se, porque isso significava que não iria à escola e ficaria em casa «sozinha e aborrecida». Seria por certo interessante conhecer o que os alunos diriam se, na frase do Filipe, em vez de estudar estivesse «ir à escola», «ir às aulas», «aprender Matemática». De qualquer modo isto já dá que pensar.

Henrique M. Guimarães

A APM já tem Logotipo

Em resposta ao apelo que publicámos no n.º 1 de *Educação e Matemática* — «Logotipo, precisa-se» — recebemos diversas propostas, dezasseis exactamente. O grupo de Lisboa da Direcção da APM escolheu a proposta que nos chegou de Viana do Castelo assinada por ISAB e que constitui o motivo central da capa deste número de *Educação e Matemática*. Os nossos parabéns à autora cujo trabalho conseguiu um enorme consenso entre os que participaram na escolha.

Não queremos deixar de agradecer a todos os que enviaram os seus trabalhos para este «concurso», em particular aos alunos da E. S. Ferreira Dias do Cacém donde chegaram, nada mais nada menos, que nove das propostas recebidas. Por sinal uma delas acabaria por ficar em segundo lugar. Aqui fica também, como agradecimento, a sua reprodução.

APM ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMATICA

MATEMANIA, POESIA, MAGIA
— A face oculta da Matemática —

Uma pequena história

Durante as férias grandes desse Verão (nascido em 3 de Outubro de 1901, eu ia fazer 7 anos), certa tarde de muito calor, a minha família dormia a sesta depois do almoço, com as persianas fechadas. Eu não tinha vontade de dormir e sentei-me à mesa da sala de jantar, diante do papel e lápis. Tanto quanto posso reconstituir lembranças tão distantes, pedaços de excitação que me tinham trazido as minhas observações já de há alguns anos — sobre os múltiplos dos inteiros — deviam flutuar ainda na minha cabeça. Porque tive eu a ideia de confrontar, não cada inteiro com os outros, mas cada inteiro consigo próprio (sempre a partir da multiplicação que se me impunha, sem que eu disso tivesse consciência)?

O resultado foi o seguinte:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	~~3~~6	49	64	81

Dito de outra forma, eu tinha elevado cada número ao quadrado, sem conhecer, contudo, esta expressão.

Terei eu pressentido que este novo exercício me poderia trazer uma revelação? Subitamente, um véu se levantou, deixando-me aperceber neste alinhamento sem interesse uma ordem de uma beleza clássica. Mas, para que ela fosse evidente, era preciso consentir, sem discutir, numa amputação: riscar os algarismos das dezenas, quando apareciam, e só conservar os das unidades:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	6	5	6	9	4	1

Para o adulto a quem se contar esta graça mostrando-lhe este quadro, não haverá, provavelmente, mais que a constatação de uma banal simetria. Para a criança que a encontrou ela própria, sem para isso ter sido incitada, foi o encantamento. No mesmo instante tive a impressão que acabava de abordar um domínio vastíssimo que guardava certamente uma multidão de tesouros escondidos. Só me restava cavar no solo desse domínio. Eu tinha colocado a mão numa ponta de abundância da qual poderia tirar frutos de sabores diferentes, de cada vez que sentisse desejo, e durante toda a minha vida.

Com efeito, este mesmo método que me tinha feito constatar a beleza resultante da multiplicação de cada inteiro por si próprio não me poderia desiludir se eu continuasse a solicitá-lo; ele não me poderia deixar de trazer revelações não menos excitantes com os cubos, depois com as potências sucessivas, e assim por diante até ao infinito. Conclusão prática: quando num momento qualquer da minha vida, eu não tivesse nada de apaixonante para fazer, contentar-me-ia em partir da linha em que tivesse parado, calcular a linha seguinte, examiná-la, interrogá-la e descobrir que harmonia inédita ela não poderia deixar de me trazer.

Que horas seriam no momento em que tive esta revelação que devia determinar, em certa medida, uma parte do resto da minha vida? Três ou quatro horas da tarde, talvez. Ainda faltava muito tempo para a hora do jantar. Que melhor maneira de empregar o tempo senão continuar a aventura?

Primeiro os cubos, conservando só as unidades, bem entendido:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	6	5	6	9	4	1
1	8	7	4	5	6	3	2	9

À primeira vista, esta nova colheita, revelou-se decepcionante. A simetria da segunda linha tinha desaparecido; nada de interessante a substituira. Mas eu ia jurar que era impossível, nesta etapa da minha conquista, que o caos se tivesse apossado da sociedade, até aqui tão bem organizada, dos números. Era preciso procurar obstinadamente. E, de repente, uma vez mais, o véu se levantou. Os algarismos que ocupavam posições simétricas, não eram iguais, eram complementares em relação a 10:

1 8 7 4 5 6 3 2 9

Mais tarde, mas não no mesmo dia, tomei consciência de que este fenómeno de complementaridade em relação ao 10 já se produzia na série natural da primeira linha.

A tarde ia já avançada, mas sobrava-me ainda, antes de entrar no mundo dos humanos — isto é, antes de retomar o contacto com os meus pais para o jantar — bastante tempo para tratar quatro ou cinco linhas... na condição da dificuldade não aumentar, ultrapassando as minhas possibilidades!

Escrevi então a quarta linha, a das potências de ordem 4:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	6	5	6	9	4	1
1	8	7	4	5	6	3	2	9
1	6	1	6	5	6	1	6	1

Oh! Surpresa. Esta quarta linha era mais regular, mais simples e por isso menos densa que as três precedentes. Com efeito, além da simetria em relação ao meio, cada um dos lados apresentava uma repetição em relação a si próprio:

1 6 e 1 6 ; 6 1 e 6 1

O conteúdo numérico tinha empobrecido, não ia além do 1, 5 e 6.

Esta experiência tomou-me pouco tempo. Que me iria trazer a etapa seguinte? Maior simplicidade ou maior complexidade? Experimentemos. Mal tinha começado a quinta linha e a verdade já explodia como uma pequena bomba: 1, 2, 3, ... Antes de continuar compreendi o que seria a linha inteira:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Simultaneamente o encantamento foi acompanhado de uma evidência desoladora. Porque, estava claro, a linha seguinte (a sexta potência) não poderia senão reproduzir a segunda; a seguinte (a sétima) a terceira, etc. Eu não poderia voltar a obter linhas diferentes das quatro primeiras, o meu programa de alegrias matemáticas estava esgotado; as matemáticas tinham terminado. Como Nietzche, eu tinha descoberto o princípio do «retorno eterno».

A sete décadas de distância desta aventura infantil, não estou seguro de ser capaz de relembrar quais foram as minhas reacções emotivas, mas posso tentar imaginá-las.

A hora do jantar chegou, depois fui deitar-me, muito pensativo certamente. Na manhã seguinte, sem esperar pelo pequeno-almoço, voltei a considerar o que tinha sido o campo de batalha dos meus $4 \times 9 = 36$ números, e que estava em vias de se tornar, senão um cemitério pelo menos um museu. Ter-me-ia revelado tudo o que me poderia dizer? Tê-lo-ia eu feito exprimir tudo o que ele continha? Seria que continuando a espremer o limão obteria ainda algumas gotas?

Adaptado de um testemunho de François Le Lionnais em *La Mystification Mathématique*, de Alain Bouvier

Esta é uma pequena história de números e sonho.

Quantas histórias e poesias não conhecemos nós, que nos encantam e maravilham? Quanta magia da Matemática nos deslumbra e delicia? Quem disse que ela é fria e rigorosa? Quem disse que não gosta dela, a Matemática, porque ela é distante e difícil? Quem disse não a conhece, ou então não gosta do que é belo, poético e ao mesmo tempo maravilhoso e mágico.

Sobre a Matemática habituámo-nos ou habituaram-nos a conhecer e ensinar os seus aspectos lógicos e rigorosos, instrumentistas e mecanicistas, de ciência hipotético-dedutiva que é, por excelência. Até que ponto conheceremos tão bem a sua outra face, a do sonho e da magia — a face oculta da Matemática?

Nesta página de *Educação e Matemática* propomo-nos divulgar Matemática de uma forma diferente, a sua beleza e poesia, os seus aspectos mágicos, as suas ligações com a música e a natureza, até, porque não, os seus vícios e desenganos, as suas dúvidas e expectativas.

Esta página, aberta a todos, é uma proposta ambiciosa mas aliciante que vos fazemos, porque sabemos quão importante vai ser a vossa colaboração para desvendar... a face oculta da Matemática.

Cristina Loureiro
Raul Fernando Carvalho

Geometria da Tartaruga, Processamento de Listas, LOGO/Música, LogoWriter, Sprites e LOGO Português.

A formação de professores na utilização da linguagem LOGO em educação constituiu um dos temas dos grupos de discussão em que se apontaram já algumas pistas definidoras de direcções de trabalho.

João Filipe Matos

Gaston Mialaret na Universidade de Évora

No dia 14 de Fevereiro passado o Prof. Mialaret proferiu no anfiteatro da Universidade de Évora uma conferência, destinada a todos os docentes e educadores em geral, subordinada ao tema: «La Technologie, la Societé et l'Éducation».

(...)

Da comunicação do Prof. Mialaret apresentamos, em síntese, as seguintes ideias-chave:

— As estruturas espaciais e temporais estão em constante mutação com o avanço da técnica.

— A revolução tecnológica tem possibilitado uma maior velocidade na transmissão do saber. A técnica moderna é caracterizada pela reprodução imediata. A título de exemplo, referiu que:
  - — o livro transmite o saber de ontem;
  - — o jornal dá o saber de hoje;
  - — a rádio e a televisão apresentam o saber do presente.

— A necessidade de colocar a técnica ao serviço do homem e de preparar os alunos para a desenvolverem e não para serem dominados por ela.

— A necessidade de abrir a escola à comunidade e ao mundo, colocando o aluno em contacto com a sociedade para que é desenvolvido.

— O educador deve sentir uma inquietação fecunda de evolução constante e a consciência de que a técnica muda a maneira de viver e de pensar.

— A importância do computador:
  - — Traz outra relação na transmissão do saber; relaciona todo o saber.
  - — A actividade psico-motriz acompanha a percepção.
  - — Apaixona os jovens, colocando-os em constante acção na procura do saber e na construção daquilo que fazem.
  - — Possibilita a cada um impor o seu próprio ritmo de trabalho e de aprendizagem.
  - — Conduz o aluno ao universal sem esquecer o particular.

Antes de terminar o Prof. Mialaret esclareceu algumas questões que lhe foram colocadas pelos presentes.

José Tiago Courelas Filipe

José Tiago Filipe enviou-nos, juntamente com o texto que acabámos de transcrever, o programa de um encontro de professores que se realizou em Évora, no passado dia 11 de Março. Este encontro, cuja organização foi da responsabilidade do Núcleo de Évora da APM e da Divisão de Pedagogia e Educação da Universidade dessa cidade, tinha como tema «A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NOS PRIMEIROS NOVE ANOS DE ESCOLARIDADE». Reuniu professores de vários graus de ensino — do Ensino Primário ao Ensino Superior — e com responsabilidades diversas ao nível da formação de professores (Docentes universitários, Delegados de Disciplina, Orientadores de Estágio, representantes do CIFOP, da Direcção Geral de Educação de Adultos, da Inspecção Pedagógica). O trabalho que foi proposto visava a apreciação dos programas de Geometria em vigor, analisando os seus conteúdos e objectivos, procurando «conceitos unificadores» e discutindo os seus aspectos formativos e informativos. Visava ainda a formulação de «formas alternativas de articulação das várias rubricas programáticas».

No próximo número serão divulgadas as principais conclusões deste Encontro.

Recebemos, também, notícias de Setúbal. Uma sobre um clube de Matemática, outra sobre uma semana dessa disciplina. Apresentamos a seguir alguns extractos dos textos que nos chegaram:

Semana da Matemática na E. S. de Bocage

De 23 a 27 de Fevereiro, na Escola Secundária de Bocage, em Setúbal, decorreu a «Semana da Matemática», com a finalidade de estimular nos alunos o gosto pela Matemática.

Foram programadas actividades para os diferentes dias, nomeadamente:

- concurso de problemas;
- passatempos (palavras cruzadas, puzzles, curiosidades matemáticas);
- exposição de trabalhos realizados pelos alunos entre os quais se destacaram biografias de matemáticos, passatempos e outros temas inerentes à disciplina;
- galeria de matemáticos (sequência cronológica);
- exposição de material didáctico.

Em sobreposição com todas estas actividades realizaram-se duas palestras seguidas de debate, cujos temas foram respectivamente: «A Investigação em Matemática», «Vida e Obra de José Anastácio da Cunha» e uma sessão de computadores com a colaboração da E. S. E.

Para a realização das palestras houve a participação da S. P. M. através dos professores, Graciano Oliveira e António Brotas.

(...)

Verificou-se, na realidade, uma certa dinâmica antes e durante esta semana e mais uma vez se pode confirmar que na actividade livre, sem o peso da sala de aula, o aluno se entrega de uma forma interessada, suscitando-lhe assim o impulso de curiosidade e desencadeando até um sentido de responsabilidade, de motivação e criatividade diferentes.

Finalmente a «Semana da Matemática» pode auxiliar a perspectivar a disciplina de uma forma um pouco diferente, para alguns alunos, na medida em que a diversidade de actividades faz-lhes sentir, na prática e de uma maneira simples, um largo espectro de actuação no dia a dia.

Maria Violante Mestre

O Clube da Matemática da E. P. Luisa Todi

(...)

As actividades realizadas ao longo do 1.º período foram fundamentalmente as seguintes:

— Estabelecimento de regras e normas de funcionamento com os alunos e planeamento das actividades a realizar;

— dinamização de um concurso a nível de Escola para seleccionar o símbolo do Clube de Matemática, construção cuidada do símbolo seleccionado e reprodução do mesmo para emblemas;

— dinamização de iniciativas para angariação de fundos para a aquisição de um computador;

— colaboração com o jornal da Escola: criação de um «cantinho» exclusivo do clube;

— realização de jogos didácticos como: mastermind, xadrez, jogo das cores, jogo da fuga, auto-estrada e outros;

— construção de «puzzles» geométricos para o clube;

— construção do jogo «Torres de Hanói» e sua concretização (estratégias anotadas por escrito);

— realização de jogos de equipa como: carta escondida e «mensagem recebida» (jogo criado no clube que funciona como simulação da linguagem «Logo» sem a utilização do computador.

(...)

No segundo período iniciaram-se as actividades Logo (computador «on»), pelo desenvolvimento de pequenos projectos a ser concretizados no computador.

(...)

Vai ser igualmente criado um jornal de parede que, entre outros assuntos incluirá material relacionado com a linguagem Logo.

O entusiasmo dos alunos tem sido grande e o clima, propício a alguns resultados interessantes. Alguns alunos (que denotavam dificuldades de aprendizagem a Matemática, falta de confiança e auto-conceito negativo) encontram-se num processo de «crescimento» e rápida evolução no sentido de conquistarem maior confiança em si, capazes de persistir no seu trabalho (reagindo positivamente aos desafios), apresentando desembaraço no reconhecimento dos erros e reformulação das estratégias no sentido de os superarem. No segundo período iniciou-se igualmente a exploração do «Art Studio» e do jogo «Trinca-Espinhas» que obtiveram bastante êxito.

Está previsto vir a ser organizado um pequeno campeonato no clube com estes programas educativos. Tem-se trabalhado também com o problema da semana e enviado a outras Escolas como intercâmbio de experiências.

Muito mais se faria se as condições o proporcionassem!

(Trabalho realizado por um aluno do Clube)

Do Estrangeiro

Para terminar não queríamos deixar de referir duas cartas que a Leonor Filipe recebeu. Uma de Emma Castelnuovo, pessoa bem conhecida nos meios internacionais do ensino da Matemática e que por várias vezes esteve entre nós, onde saúda a criação da APM de que soube através da «Educação e Matemática» n.º 1 que lhe tinha sido enviada; outra de Francis Michel, por enquanto o único sócio estrangeiro da APM, onde refere expressamente a nossa revista e agradece a tradução do seu artigo aí publicado: «je felicite l'APM et son président pour le bonne terme de sa revue, trés professionnelle mais aussi ouverte et progressiste. J'aime le ton et la présentation, simple mais soignés (...)». Os nossos agradecimentos.

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Director
Leonor Moreira

Redacção
Conceição Mesquita, Henrique M. Guimarães, José Manuel Duarte e Paulo Abrantes

Conselho Editorial
Carlos Próspero, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, João Filipe Matos, João Ponte, Leonor Filipe, Maria João Costa.

Colaboraram neste número:

Alice Inácio, António Bernardes, Conceição Mesquita, Cristina Loureiro, Eduarda Fonseca, Eduardo Veloso, Henrique M. Guimarães, João Filipe Matos, João Pedro Ponte, Leonor Moreira, Paulo Abrantes e Raúl Fernando Carvalho.

ÍNDICE

Pág.

EDITORIAL

Os Professores e a Revolução Informática
João Pedro Ponte 1

ARTIGOS

Logo e a Educação Matemática
João Filipe Matos 3

Quantas Maçãs Tinha a Maria?
Eduardo Veloso 5

Um Ciclo Vicioso
Henrique M. Guimarães 9

E a Lua Aqui Tão Perto
Paulo Abrantes 11

RECORDES: Um Incentivo à Atitude Crítica
Maria da Conceição Mesquita 13

Saber de Cor a Tabuada: Problema ou Mito?
Alice Inácio 15

A Propósito do Pense Nisto
Raul Fernando Carvalho 17

SECÇÕES:

Opinião • Críticas • Notícias
Henrique M. Guimarẽs 2

Para este Número Seleccionámos
Leonor Moreira e *Eduarda Fonseca* 19

Dia a Dia com a Matemática
Cristina Loureiro 21

Problemas • Ideias • Sugestões
Cristina Loureiro e *Leonor Moreira* 24

LOGO.MAT
Eduardo Veloso e *João Filipe Matos* 26

Pense Nisto
Henrique M. Guimarães 28

Matemania, Poesia, Magia
Cristina Loureiro e *Raul Fernando Carvalho* 29