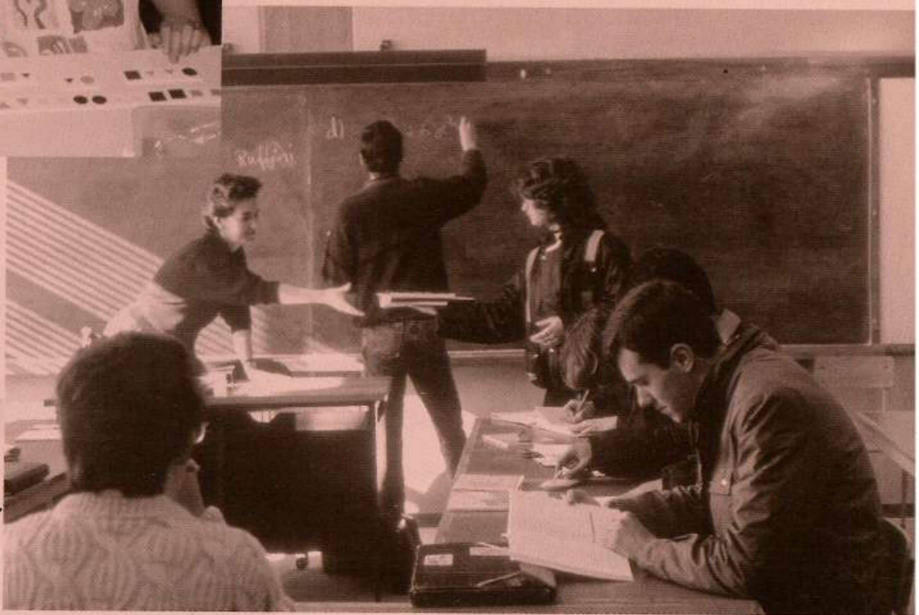
Educação e Matemática

Nº 35

3º trimestre de 1995

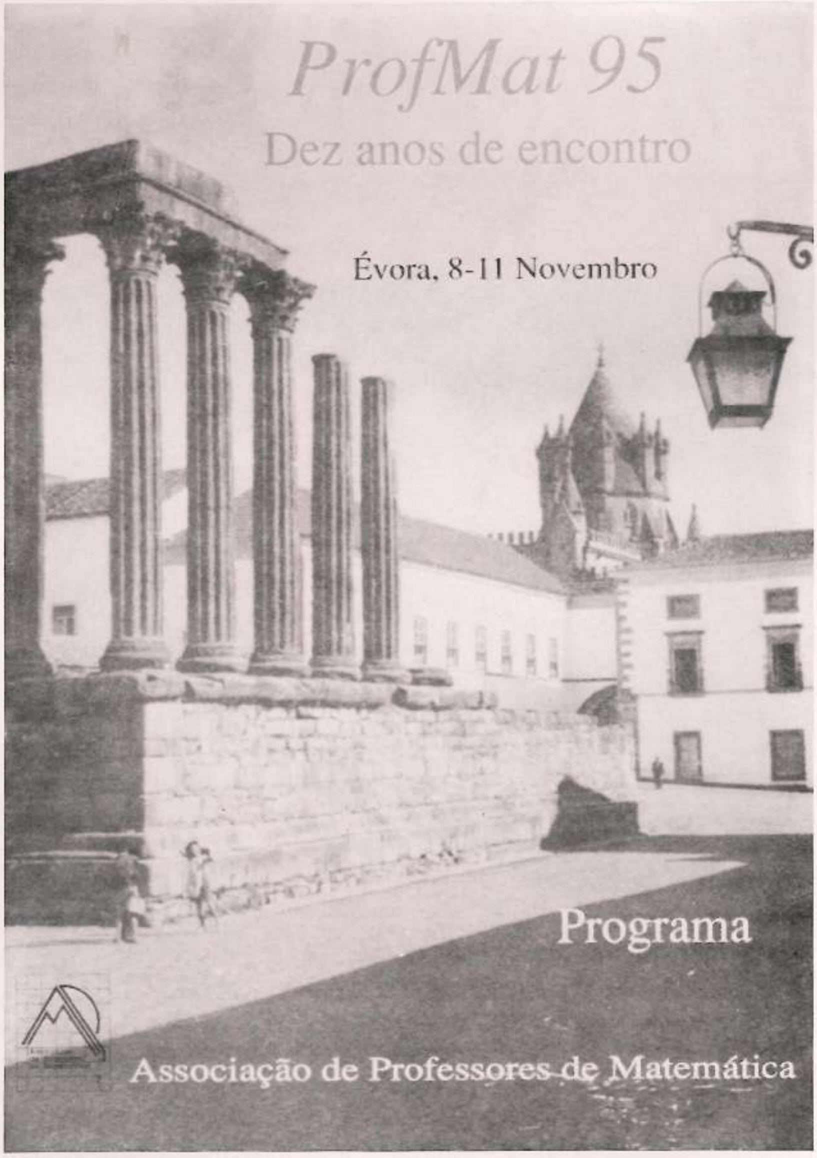
Viver e pensar



a aula de Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

O programa do *ProfMat 95* foi publicado e enviado a todos os participantes inscritos em Setembro. Com 1450 professores inscritos e mais de 120 sessões de trabalho, o *ProfMat 95* será, até à data da sua realização, o maior encontro sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática jamais realizado em Portugal.



Neste número colaboraram

Alexandra Virote, Elvira Ferreira, Fátima Guimarães, Graciosa Veloso, Helena Fonseca, Helena Rocha, Isabel Dias, José Paulo Viana, Leonor Vieira, Lina Brunheira, Paula Teixeira.

Sobre a capa

A capa deste número inclui três fotografias cedidas para o efeito pela própria APM, por Henrique Guimarães e por Graciosa Veloso (respectivamente, de cima para baixo) e dizem respeito a aulas de Matemática no 1° ciclo, no secundário e no 3° ciclo (pela mesma ordem). As restantes fotografias que surgem neste número foram igualmente cedidas pela APM (foto da pág. 8), por Henrique Guimarães (pág. 35 e 37) e por Graciosa Veloso (pág. 40 e 45).

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 1995.

nº 35
3º trimestre
de 1995

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Eduardo Veloso
Helena Lopes
Henrique M. Guimarães
Isabel Amorim
Maria João Lagarto
Maria José Boia
Rosário Ribeiro

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 91158/95

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos
1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Viver e pensar a aula de Matemática

Paulo Abrantes

Este número de *Educação e Matemática* tem por tema "a aula de Matemática". Embora integrando diversos tipos de contributos, a maior parte do seu conteúdo consiste em textos nos quais episódios reais são descritos e comentados pelos próprios professores ou por colegas que observaram as aulas e ajudaram a interpretá-las. Há uma razão para isso.

A aula de Matemática é um "acontecimento" muitas vezes identificado com rotina, com repetição. Há uma imagem da aula de Matemática como um período bem definido de tempo durante o qual se corrige o trabalho de casa, o professor explica a nova matéria, os alunos começam a fazer os novos exercícios, o professor passa um novo TPC. A esta imagem de aula está muitas vezes associada uma imagem do professor competente como aquele que "explica bem", não "dá" a matéria tão depressa que poucos alunos acompanhem nem tão devagar que não consiga cumprir o programa. Nesta visão, o bom professor "domina" a matéria, "controla" a turma e prepara as explicações e as actividades para um "aluno médio".

Temos que reconhecer que esta imagem não foi criada por algum espírito irónico que nunca tenha frequentado aulas de Matemática...

É certo que não parece sensato rejeitar toda e qualquer rotina. A actividade do professor, como se passa em todas as profissões, mesmo nas mais criativas, requer que se dominem certos procedimentos e se criem certas rotinas sob pena de total incapacidade de gerir as situações do dia-a-dia. Também não parece sensato ignorar a importância de regras de funcionamento colectivo quando se trata de viver numa instituição como a escola.

No entanto, hoje temos boas razões para questionar aquela maneira de "ver" a aula de Matemática. Ela baseia-se em mitos como o do "aluno médio" e em ideias como a de que uma aula é boa se o professor domina a matéria, explica bem e controla os alunos. Na verdade, como notam Bishop e Goffree, num excelente texto que escreveram em 1986, cada turma é uma "combinação única de pessoas", com a sua identidade e o seu ambiente únicos, com "a sua própria história, criada, partilhada e recordada entre as pessoas do grupo". E as pessoas do grupo são *aquele* professor e *aqueles* alunos.

A aprendizagem tem a ver com os significados matemáticos que cada aluno vai construindo como resultado das actividades que realiza e do modo como elas se relacionam com os seus conhecimentos anteriores, do ambiente que se vai desenvolvendo na turma, da comunicação e das interacções que se vão estabelecendo entre os alunos e entre estes e o professor.

Esta visão obriga-nos a rejeitar a ilusão de que há um método "ideal" de ensinar Matemática, a abandonar as análises simplistas e a admitir que o processo de discutir a aula de Matemática é muito mais complexo do que, se calhar, chegámos a imaginar.

Não podemos discutir a aula de Matemática em abstracto. Precisamos de "conhecer" os alunos, o professor, algo sobre a história da turma e da sua relação com a Matemática. Precisamos de falar do que se passou e tentar compreender reflectindo sobre o que se passou. Temos que viver e pensar a aula de Matemática.

O professor tem sempre razão, nunca se engana e raramente tem dúvidas?

Ana Vieira

Integrado num curso de Especialização em Ensino da Matemática, participei há uns meses num seminário sobre *Didáctica e Desenvolvimento Profissional*, em que me foi "apresentado" Donald Schön, filósofo, professor de Estudos Urbanos e de Educação no MIT (Massachusetts Institute of Technology) nos EUA.

Segundo D.Schön o conhecimento e a formação profissional estão desadequados do profissionalismo necessário aos professores. Para se ser um bom profissional, e portanto um bom professor, é importante que se adquira e fomente uma grande capacidade de reflexão, sem a qual se cai numa prática mecânica e tecnicista. Assim, Schön equaciona como fundamentais, entre outras, a capacidade de reflexão-na-acção e reflexão-sobre-a-acção. No artigo *Formar professores como profissionais reflexivos*, explica de forma sucinta a diferença entre estes dois tipos de atitudes:

> Existe, primeiramente, um momento de surpresa: um professor reflexivo permite-se ser surpreendido pelo que o aluno faz. Num segundo momento, reflecte sobre esse facto, ou seja, pensa sobre aquilo que o aluno disse ou fez e, simultaneamente, procura comreender a razão por que foi surpreendido. Depois, num terceiro momento, reformula o problema suscitado pela situação (...) Num quarto momento, efectua uma experiência para testar a sua nova hipótese; por exemplo, coloca uma nova questão ou estabelece uma nova tarefa para testar a hipóteses que formulou sobre o modo de pensar do aluno. Este processo de reflexão-na-acção não exige palavras.
>
> Por outro lado, é possível olhar retrospectivamente e reflectir *sobre* a reflexão-na-acção. Após a aula o professor pode pensar no que aconteceu, no que observou, no significado que lhe deu e na eventual adopção de outros sentidos. Reflectir *sobre* a reflexão-na-acção é uma acção, uma observação e uma descrição, que exige o uso de palavras.

Ao ser surpreendido por questões levantadas pelos alunos, o professor pode ficar confuso com a resposta a dar, com a forma como deve interpretar e ultrapassar os problemas que surgiram. Será legítimo reconhecer essa confusão perante a turma? Ou deverá simplesmente fazer o possível por disfarçá-la e passar à frente? No mesmo artigo, Schön aborda esta questão da seguinte forma:

> É impossível aprender sem ficar confuso.(...) E há algo mais incómodo ou marcante do que a confusão? (...) Um professor reflexivo tem a tarefa de encorajar e reconhecer, e mesmo dar valor à confusão dos seus alunos. Mas também faz parte das suas incumbências encorajar e dar valor à sua própria confusão. Se prestar a devida atenção ao que as crianças fazem, então o professor também ficará confuso. E se não ficar, jamais poderá reconhecer o problema que necessita de explicação.
>
> O grande inimigo da confusão é a resposta que se assume como verdade única. Se só houver uma única resposta certa, que é suposto o professor saber e o aluno aprender, então não há lugar legítimo para a confusão.

No seminário referido, depois da apresentação das ideias de Donald

Numa profissão em que as horas são contadas e planeadas anualmente, as planificações revistas trimestralmente, os programas difíceis de cumprir, com excesso de alunos por turma, com aquele toque da campainha de hora a hora, de 10 em 10 ou 5 em 5 minutos, que nos obriga a correr de sala em sala,..., e tudo o mais que faz da profissão de professor uma profissão de risco por excesso de *stress*, haverá lugar para a reflexão-na-acção e sobre-a-acção, tal como Shön preconiza?

Schön, gerou-se alguma polémica sobre se é ou não possível ou viável que existam estas duas práticas no exercício da profissão docente, se é vulgar que um professor altere a sua planificação em consequência de questões inesperadas que surjam de repente nas aulas. Procurando confrontar estas reflexões com a minha experiência, surgiram-me dois exemplos que passo a descrever, e que me parecem ilustrativos de uma resposta positiva a essa questão.

Linda-a-Velha, Novembro de 1993. Os alunos do 8º4ª entram na aula de matemática e preparam as mesas e cadeiras para se sentarem em grupo. Desde o princípio do ano que era esta a forma de trabalho habitual, pelo que já nem perguntam: "Hoje é trabalho de grupo?".

Depois de ditar o sumário: *desigualdade triangular*, começo a pôr em cima da mesa o material necessário para aquela aula. Ficam curiosos quando me vêem tirar uma caixa de palitos.

Pergunto-lhes: — *Quantos lados tem um triângulo?* — risos — *Acham que sempre que se tem três segmentos de recta é possível juntá-los de modo a construir um triângulo?*

Resposta: — *Sim!!!* (opinião unânime).

Sem fazer qualquer comentário a esta resposta, distribuí as fichas de trabalho (figura 1) e alguns palitos a cada grupo, e pedi que resolvessem a actividade proposta [1].

Durante a aula fui incentivando os grupos a escrever as conclusões a que iam chegando. Todos os grupos nomearam um redactor, que escrevia as frases que cada um ia dizendo. Nalguns grupos surgiam pequenas discussões pois só queriam escrever o que fosse unânime. Noutros grupos escreviam tudo o que se lembravam.

Dados três segmentos de recta quaisquer, será sempre possível construir um triângulo?

Para responder a esta questão, vamos fazer uma pequena investigação usando palitos todos do mesmo tamanho.

Primeiro, escolhe três palitos e forma um triângulo, colocando-os extremidade com extremidade, no mesmo plano. **Que tipo de triângulo se constrói? É possível, com os mesmos palitos, formar outro triângulo diferente?**

Agora escolhe quatro palitos e responde às mesmas perguntas.

Depois repete com cinco palitos, seis, etc.

Para apoiar a investigação, vai preenchendo a tabela anexa.

Sempre que chegares a alguma conclusão, discute-a com os colegas do grupo, e registem as diversas opiniões.

número de palitos	é possível obter um triângulo?	medidas dos lados

fig. 1

Na aula seguinte, retomámos o trabalho. Começámos então a analisar as várias conclusões de cada grupo, procurando exemplos e contra-exemplos sempre que se justificasse, para provar que uma afirmação era falsa ou procurando uma justificação adequada sempre que uma afirmação parecia verdadeira.

Surgiram muitas conclusões, algumas escritas de forma confusa, de que são exemplo as seguintes:

- Com três segmentos de recta nem sempre é possível construir um triângulo.
- Sempre que um dos segmentos for o dobro dos outros 2 juntos não é possível obter-se um triângulo.

Porque não se consegue fazer altura para separar os três segmentos de recta.

- A soma do número de palitos de 2 dos lados do triângulo não pode ser equivalente ou inferior ao número de palitos da base considerada.
- Todos os múltiplos de três dão triângulos equiláteros.
- Podemos obter triângulos equiláteros sempre que o número de palitos for múltiplo de 3. A razão porque isto acontece é que o triângulo equilátero tem três lados iguais, basta ir juntando sempre um ou mais palitos de cada lado.

Em todos os grupos surgiram afirmações relacionadas com a desigualdade triangular. Era esse o objectivo da ficha. No entanto, as duas últimas afirmações foram as mais discutidas e que mais enriqueceram a aula. Quatro grupos (em cinco) tinham afirmado que sempre que temos um número de palitos múltiplo de três temos necessariamente um triângulo equilátero. Esta afirmação foi facilmente desmontada pois rapidamente surgiram exemplos de triângulos em que tal não acontecia (por exemplo 3,4,5). No entanto, a última afirmação não se pode dizer que esteja errada.

Apesar de não ser objectivo da aula discutir esta situação, mas apenas a desigualdade triangular, pareceu-me que não o fazer seria estar a desperdiçar uma oportunidade de responder a algo que os alunos tinham descoberto por eles próprios, e que era o facto de realmente existir uma relação entre a soma da medida dos lados de um triângulo equilátero e os múltiplos de três. Surgiu então a pergunta:

— *Qual a diferença entre dizer: se temos um número de palitos múltiplo de 3 o triângulo é equilátero, ou se o triângulo é equilátero então temos um número de palitos múltiplo de três?*

Isto começou a gerar discussão e principalmente muita confusão na cabeça dos alunos. No geral, diziam que era a mesma coisa, e que portanto ambas as afirmações eram falsas, exemplificando com casos concretos.

Resolvi então escrever no quadro o que tinha dito. Utilizando giz de cor, escrevi:

- Se o triângulo é equilátero então o número total de palitos é múltiplo de três.
- Se o número total de palitos é múltiplo de três então o triângulo é equilátero.

Todos os alunos escreveram isto no caderno, utilizando três cores diferentes. *Se...então* a uma cor, *o triângulo é equilátero* a outra cor e *o número total de palitos é múltiplo de três* a cor diferente. A utilização das cores ajudou a mostrar que tínhamos as mesmas afirmações escritas por ordem inversa.

Gerou-se grande discussão sobre a veracidade de cada uma das frases. Procuraram-se exemplos que ilustrassem uma ou outra e verificou-se que bastava um contra-exemplo para se poder dizer que a segunda afirmação era falsa. Procurámos demonstrar que a primeira afirmação era verdadeira utilizando letras de forma a generalizar a conclusão ($a+a+a=3a$, e $3a$ é um múltiplo de 3).

Por fim disse-lhes que o que eles estavam a discutir já era matéria de anos mais avançados. Ficaram muito orgulhosos. Falei-lhes que em Matemática se podia escrever de forma abreviada $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$, se designássemos cada afirmação correspondente por A ou B. Os termos implicação, antecedente e consequente foram ouvidos com grande curiosidade, de quem está a aprender algo de muito importante, e quiseram escrever tudo no caderno.

Nunca pensei dar uma aula de Lógica no oitavo ano. A Lógica enquanto capítulo próprio do programa de Matemática, é algo que não tenho gostado de ensinar. No ano anterior, numa turma de 10º ano, foi um capítulo que nunca cheguei a dar, embora fizesse parte do programa (o 10º ano não era na altura um ano de Reforma). Mas no contexto desta aula pareceu-me que vinha a propósito. Os alunos seguiram com atenção e curiosidade e participaram activamente em toda a aula, dando sugestões, procurando exemplos e justificações.

Penso que o que se passou nesta aula pode ser um exemplo do que D. Schön chama reflexão-na-acção. Nem todas as etapas que ele define como fazendo parte deste processo foram igualmente importantes. Considerando como etapas a surpresa, interpretação, reformulação e experiência, talvez a menos importante neste caso tenha sido a primeira, pois embora os alunos tenham levantado questões que não esperava, não eram questões muito difíceis de discutir e compreender. Mas houve reformulação completa da aula.

Por vezes a surpresa perante um acontecimento na aula é tão grande, que não tenho capacidade para responder no momento, e o que poderia ser uma reflexão-na-acção passa, no melhor dos casos, a ser uma reflexão-sobre-a-acção. Um exemplo disso é o que me aconteceu ainda há bem pouco tempo numa aula também de geometria, noutra turma do 8º ano. Os alunos estavam a observar sólidos e a procurar registar o maior número possível de características que descobrissem para cada um. Um aluno chamou-me para dar conta de algo que tinha concluído, e que era o seguinte:

> Num poliedro em que cada vértice é o ponto de encontro de 4 arestas, o número de arestas é igual ao dobro do número de vértices.

Fiquei completamente atordoada com esta conclusão, e não lhe consegui dizer de imediato se ela era verdadeira ou não. Pensei no assunto durante toda a aula, mas só ao fim de alguns dias, e depois de trocar impressões com outros colegas, consegui perceber que estava correcta. Elaborei então uma ficha que distribuí a todas as minhas turmas de 8º ano, para discutir esta questão (figura 2).

Como é evidente, isto deu discussão para várias aulas, além de me ter ocupado umas quantas horas para ler e comentar as respostas dadas, que se estenderam na maior parte dos casos, a duas e três páginas. As opiniões não eram unânimes, mas o

Problemas de contagem

Durante o estudo dos poliedros, o Luis (8º6ª) afirmou o seguinte:

"Num poliedro em que cada vértice é o ponto de encontro de 4 arestas, o número de arestas é igual ao dobro do número de vértices"

Luis Ciríaco
nº16 - 8º6ª

Será que o Luis tem razão?

Por vezes é complicado contar as arestas e os vértices dos poliedros. Cada pessoa tenta encontrar uma forma simplificada de o fazer. Depois de muito pensar, um amigo meu disse-me algo parecido com a afirmação do Luis:

"Começa-se por contar o número de vértices. Depois, vê-se quantas arestas se encontram em cada vértice, e multiplica-se esse número pelo número de vértices. Finalmente divide-se o valor encontrado por dois, e obtemos o número de arestas do poliedro."

Será verdade?

Escreve um pequeno comentário acerca destas duas afirmações. Se necessário, recorre aos poliedros que estudaste nas últimas aulas, para exemplificar a resposta.

fig. 2

1- A situação do Luis não está errada, mas ele só fala numa unica situação, que é quando um vértice une 4 arestas. Se fizermos esta experiência num poliedro ñ regular esta afirmação é falsa.
Portanto a afirmação do Luis não é totalmente certa.
Para estar completamente certa o Luis tinha que dizer:
- Num poliedro $\boxed{\text{regular}}$ em que...

2- Esta afirmação está completamentamente certa.
Fizemos esta experiencia num prisma hexagonal e numa pirâmide triângular e ambos os sólidos deram resultado positivos ou seja:
- Na pirâmide triangular cada vértice une 3 arestas e dá 4 vértices, podemos multiplicar 4 por 3 que dá 12 dividimos por 2 e na verdade é o número de arestas
- o mesmo aconteceu com o prisma hexagonal
Esta afirmação é mais aceitável do que a 1ª porque fala-se dos sólidos duma maneira geral.
Marta Raposo

fig. 3 A

mais importante neste trabalho foi observar o esforço que os alunos fizeram para argumentar por escrito os seus pontos de vista, o que não é fácil. Alguns limitaram-se a observar dois ou três sólidos e a partir daí concluir se as afirmações estavam certas ou erradas, outros tentaram generalizar conclusões com o maior rigor possível. Não é possível neste artigo fazer uma análise exaustiva deste trabalho, mas é interessante ler algumas respostas que ilustram o que disse (figuras 3 A e 3 B).

Estes pequenos episódios do dia-a-dia das aulas de matemática, fazem parte de um conjunto de experiências interessantes que vivi este ano com os meus alunos do oitavo ano. Eles servem para ilustrar que não só é possível existir na prática docente reflexão na e sobre a acção, como é gratificante que aconteça. Embora não se possa dizer, em relação à reflexão-na-acção, que existe todos os dias, também não se pode dizer, na minha opinião, que nunca existe. Há condições que podem facilitar o seu aparecimento, condições essas dependentes quase exclusivamente da predisposição do professor.

O professor tem de estar à partida predisposto a ser flexível quanto à planificação que tinha previsto, tem de ter um grande respeito pelos seus alunos, pensar que eles são seres inteligentes, possivelmente com um grau de inteligência superior ao seu e que muitas vezes descobrem coisas de que nós, professores, nunca nos tínhamos lembrado, pois não têm o raciocínio condicionado por um esquema mental rígido como por vezes nós temos.

A forma como o professor planifica as aulas pode ajudar a incrementar este género de situações. Nos dois exemplos que referi, os alunos estavam a resolver questões abertas. No primeiro exemplo estavam a fazer uma pequena actividade de investigação, em que é fácil surgirem conclusões de que não se está à espera. No segundo exemplo estavam a tentar descobrir o maior número possível de características de vários poliedros, considerando-se características de cada sólido o que os distingue uns dos outros, sendo assim uma actividade muito aberta. Se o professor criar situações destas nas suas aulas, é impossível que não surjam bons exemplos dos dois tipos de reflexão que Schön sistematiza.

A concepção dos professores quanto ao ensino da Matemática, como não

1- Problema

Problema 1 está certo, porque se formos ver o ex. do cuboctaedro está certo. Vamos ver:

Ex: Cuboctaedro.

Eu sei que este poliedro tem 12 vértices e 24 arestas mas faz de conta que não sei. Então vou partir do estado zero e vou contar o nº de vértices

DADOS

12 - vértices, todos os pontos de intersecção de 4 arestas.

12 vértices × 2 = 24.

R. Quer dizer que se o dobro é 24, são 24 arestas.

Como vimos está correcto pois com as análises que a turma tinha feito, este sólido tem 24 arestas. Portanto se o dobro dos vértices dá 24, a afirmação do Luís está certíssimo.

2- Problema - 1ª hipótese

O 2º Problema também está certo.
Vamos ver o ex. da Pirâmide triangular.

Ex: Pirâmide triangular

Eu sei que este poliedro tem 4 vértices e 6 arestas. E sei que cada vértice é o ponto de intersecção de 3 arestas.

DADOS

4 - vértices → todos com intersecção de 3 arestas. $4 \times 3 = 12$ $\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 0 & 6 \end{array}$

R: Deu o resultado 6 portanto tem 6 arestas.

Como vimos está certo porque com as observações que eu tinha dava 6 arestas. Portanto a afirmação está certa mas vou fazer agora com outros sólidos a ver se está correcto.

2- Problema

2ª Hipótese

Vamos ver agora com a pirâmide quadrangular em que os vértices não têm o mesmo nº de arestas como intersecção.

DADOS

4 vértices → 3 arestas
1 vértice → 4 arestas

$4 \times 3 = 12$ $\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 0 & 6 \end{array}$ R: Deu 6 arestas

$1 \times 4 = 4$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{array}$ R: Deu 2 arestas.

Somamos agora as duas respostas
$6 + 2 = 8$ arestas

Sim, também está correcto porque eu contei e dá 8 arestas.

Carina

fig.3 B

podia deixar de ser, é também um aspecto determinante. Se pensarmos que o fundamental é "despejar conteúdos", então daremos necessariamente pouca importância a situações destas, mas se pensarmos que o nosso papel é estimular a curiosidade, o interesse e o gosto de aprender, então estas situações tomam uma importância que ultrapassa a preocupação de apenas cumprir conteúdos.

É preciso também que o próprio professor tenha gosto em aprender e sinta que o pode fazer com os seus alunos. O professor tem de gostar de desafios, gostar de problemas novos.

Finalmente a experiência profissional, embora não seja determinante, é uma boa ajuda para que um professor se sinta cada vez mais à vontade para incrementar o aparecimento de situações destas. No entanto, poder-se-ia pensar que com muitos anos de prática já nada surpreenderia o professor. Embora não tenha ainda muito tempo de serviço, parece-me que isto é profundamente errado, pois acontece-me muitas vezes ser surpreendida pelos alunos. As surpresas vão mudando. Há uma experiência que se vai acumulando sobre as reacções características a certos tipos de questões ou conteúdos, mas isso é uma ajuda para colocar novos desafios. Se já prevemos como os alunos reajem, então estamos mais à vontade para colocar questões mais elaboradas, ou fazer actividades mais abertas.

Encarada desta forma, a actividade docente permite criar situações desafiantes que contrariam o espírito rotineiro e incrementam o gosto de ser professor, e é claro que como qualquer ser humano o professor também se engana, sem sempre tem razão, e acima de tudo, como professor, tem dúvidas frequentemente.

[1] Actividade adaptada das Normas do N.C.T.M.. Originalmente o material de apoio são fósforos em vez de palitos.

Referências

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. Em A. Nóvoa (coord.), *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Publicações D.Quixote/IIE

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

Ana Vieira
Escola Secundária de Linda-a-Velha

Uma aula no 1º ciclo

Elvira Ferreira

No âmbito de um programa de Formação Contínua de professores do 1º Ciclo, do qual fui formadora juntamente com a Isabel Rocha, foi feita uma selecção de textos para reflexão no referido programa.

"Uma Teia Temática e as Normas Curriculares para o 1º Ciclo", publicado na revista *Arithmetic Teacher* de Fevereiro de 1994, foi um dos textos que mais me motivou. As ideias nele veiculadas apontam para actividades que permitem estabelecer conexões entre as diferentes áreas curriculares e permitem também que as ideias matemáticas possam surgir associadas aos interesses e ao quotidiano dos alunos.

Estava em causa o tema a escolher para a teia. Este surgiu após a leitura do livro "O Grande Planeta Azul" de José Jorge Letria. A praia, o mar aqui tão próximos, neste final de Verão, fazendo parte do quotidiano dos alunos, foram o motor para a escolha do tema. Do entusiasmo desta leitura surgiu o tema para a teia: "O Mar".

Então, construímos uma teia temática que permitiria conhecer melhor o mar e tudo o que o rodeia. Assim, delineámos a nossa teia (fig. 1).

É de salientar que esta teia irá sendo desenvolvida ao longo de três anos, seleccionando eu os objectivos a tratar em cada ano, ou alterando de acordo com os interesses dos alunos, ou tendo em conta acontecimentos importantes.

Uma das aulas dedicada à exploração da teia baseava-se numa actividade com carácter lúdico, que permitiu a exploração de conceitos ligados às probabilidades como: "mais provável", "menos provável" e o uso da

Foi uma aula interessante e movimentada em que os alunos trabalharam diversos tópicos matemáticos em conjunto, em que eu própria estava dependente dos acontecimentos do momento, sem discursos pré-elaborados, sem soluções estudadas, também eu aprendendo com este tipo de aulas.

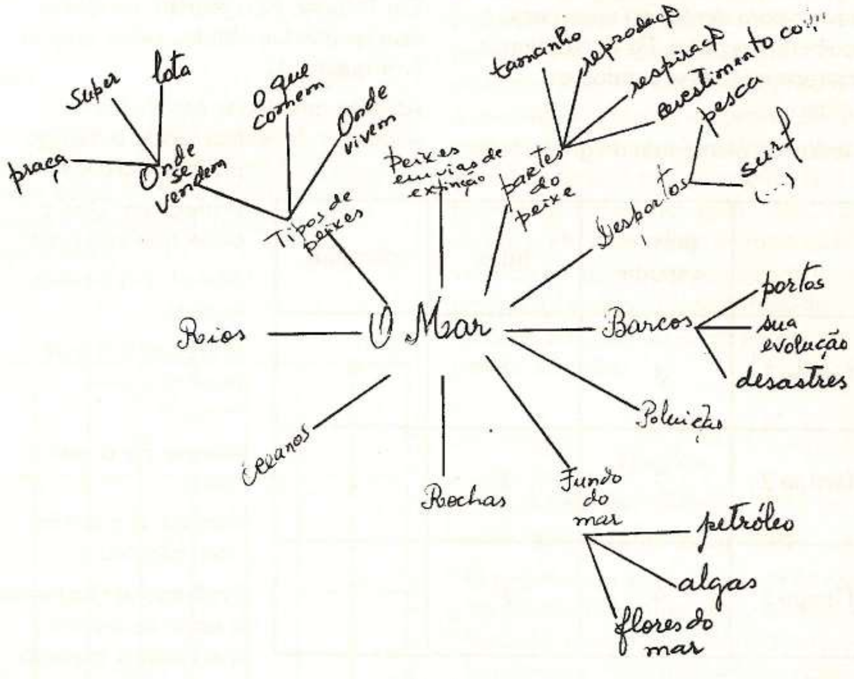


fig. 1

estimação. Esta actividade foi realizada com 11 alunos do 2º ano de escolaridade na 1ª quinzena de Novembro de 1994.

E por que não começar uma aula com uma canção?

Acendeu-se a televisão, ligou-se o vídeo e eis a Canção do Mar, da Dulce Pontes, que entusiasmou os alunos e professores presentes (participantes no Programa de Formação).

Como é bom começar um dia de trabalho bem dispostos!

A aula parecia começar bem. Depois, os alunos vislumbraram um saco com fichas e disseram "hoje temos um jogo".

Com os alunos já dispostos em grupos (2 de quatro alunos e 1 de três), iniciámos o nosso trabalho.

A cada grupo foi distribuída uma folha com a actividade (ver caixa) e um saco (de cor opaca) que continha fichas de três variedades de peixes, peixe-espada, carapau e lulas. Foi recomendado que lessem a actividade e que, caso fosse necessário, solicitassem algumas explicações.

Alguns alunos começaram a fazer perguntas e até alguma "batota": olhavam para dentro do saco para escolherem o peixe. Fiz então alguns esclarecimentos para todos os grupos:

- todos os elementos do grupo tiram uma ficha, um de cada vez, e fazem o seu registo;
- não devem olhar para dentro do saco;
- ponham sempre a ficha dentro do saco e baralhem as fichas antes de tirar.

Em seguida, cada grupo executou a actividade e fez o registo dos dados.

Após todos os grupos terem concluído, fiz a discussão com o grande grupo.

Em 1º lugar, fiz o registo, no quadro, dos resultados obtidos pelos grupos (ver quadro 1).

Através dos dados recolhidos e anotados, foi estabelecido o diálogo professor-alunos:

	peixe-espada	lulas	carapau
Grupo 1	8	2	0
Grupo 2	7	2	1
Grupo 3	6	3	1

quadro 1

Professora: Qual o peixe que saiu mais?

Aluno1: Foi o peixe-espada.

Professora: E qual o peixe que saiu menos?

Alunos: Foi o carapau.

Aluna 2: A nós não saiu carapau.

Professora: Qual será a razão de saírem mais peixes-espada?

Silêncio!

Professora: Reparem, eu não vos disse quantas fichas de cada peixe pus no saco, mas em todos os grupos saíram mais peixes-espada, por que será?

Aluna 3: Puseste lá mais fichas de peixe-espada.

Professora: Muito bem. Então qual o peixe que saiu menos?

Alunos: Foi o carapau.

Professora: Qual a razão para saírem menos carapaus?

Aluno 2: Puseste menos carapaus.

Professora: Reparem, se voltarem a tirar uma ficha do saco, qual o peixe mais provável de sair?

Aluno 4: É o peixe-espada.

Professora: E o menos provável de sair?

Aluna 2: É o carapau, a nós nem saiu nenhum, e pode não sair outra vez.

Professora: Isso mesmo, estão a pensar muito bem.

Após este diálogo, bastante entusiasmante, disse aos alunos que dentro do saco estavam 70 fichas e pedi, a cada grupo, que estimasse o número de fichas de cada peixe.

Professora: Não se esqueçam de observar o quadro relativo aos peixes que saíram.

Fui passando entre os grupos e era

visível alguma preocupação na contagem das fichas, nem sempre tendo em atenção que eram 70 fichas.

Foi demorada esta parte.

Sem ter apagado o que já tinha registado das tiragens feitas, anotei as conclusões dos grupos (ver quadro 2).

Professora (para o Grupo 1): Eu já vos tinha dito o total de fichas que estavam no saco, lembram-se?

Alunos: São 70.

Professora: Quantas fichas estimou o vosso grupo?

Alunos (Contaram 20+10+5): São 35.

Professora: Têm de alterar alguma coisa, não acham?

Enquanto este grupo ficou a reformular as estimativas, dirigi-me ao Grupo 2. Este reparou que não tinha as 70 fichas e foi reformular.

Dirigi-me, então, para o Grupo 3.

Professora: Vocês consideram as 70 fichas no saco, muito bem, mas puseram o mesmo número de lulas e de carapaus. Olhem para o vosso quadro, era isso que vos tinha acontecido?

Alunos: Não

	peixe-espada	lulas	carapau
Grupo 1	**20**	**10**	**5**
Grupo 2	**30**	**10**	**10**
Grupo 3	**50**	**10**	**10**

quadro 2

Professora: Então pensem novamente.

A estimativa do Grupo 3 foi a que mais se aproximou do número real de fichas. Por isso, após este diálogo, este grupo chegou a uma estimativa que coincidiu com o número exacto de fichas (40, 20, 10).

Os outros grupos tiveram dificuldades que nos levou a reflectir sobre esta questão, chegando às seguintes conclusões:

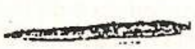
- A relação existente entre o número de fichas de peixe-espada e lulas (relação de dobro), tiradas pelo Grupo 3, coincidiu com a relação existente no saco, pelo que a primeira estimativa deste grupo foi a melhor, o que não aconteceu com os outros grupos.
- A extracção de 10 fichas terá sido insuficiente.

Foi uma aula interessante e movimentada em que os alunos trabalharam diversos tópicos matemáticos em conjunto, em que eu própria estava dependente dos acontecimentos do momento, sem discursos pré-elaborados, sem soluções estudadas, também eu aprendendo com este tipo de aulas.

Elvira Ferreira
Escola de Moita-Alcobaça

Actividade

Dentro de um saco estão fichas de peixes-espada, carapaus e lulas. Sem olhares, deves tirar 10 vezes seguidas uma ficha do saco. Regista o resultado de cada tiragem numa folha. A ficha deve ser posta, no saco, cada vez que é tirada.

											total
											
											
											

Nota final:

Na verdade, a lula não é um peixe. No entanto, foram os alunos que a incluiram entre os exemplos de peixes. Atendendo à idade das crianças, a professora decidiu manter a escolha dos alunos e aproveitou para, após a conclusão da actividade, trabalhar na sala de aula o tema dos animais que vivem na água. Falou-se de um certo número de animais que, vivendo na água, não são peixes (por exemplo, baleias), e esclareceu-se então que a lula não é um peixe mas sim um molusco.

História
e Educação Matemática
Braga 24-30 Julho 1996

O segundo anúncio está a ser enviado a todos os professores que manifestaram a intenção de participar neste encontro. Para mais informações, contacte a sede da APM.

Uma aula de Matemática e os saberes subjacentes

Fátima Guimarães

Neste texto, descreve-se uma aula de Matemática. Apresenta-se, profissionalmente, a professora, explicitando o muito que lhe é possível fazer dentro dos constrangimentos e pressões escolares, e dá-se a conhecer os seus saberes. Através da descrição da sua prática pedagógica, referindo os aspectos gerais (o ambiente da aula, e a gestão e organização da sala), as tarefas matemáticas desenvolvidas e o modo como se processa a comunicação e negociação de sentido matemático, tenta-se fazer sobressair e tornar evidentes os aspectos do conhecimento profissional da professora aí mobilizados.

Introdução

É frequente ouvir dizer-se que a escola não dá a formação adequada, nem sob o ponto de vista científico e técnico, nem sob ponto de vista cultural e humano, e que o ensino que aí se administra não prepara os alunos para as necessidades da sociedade actual e muito menos para a sociedade de futuro. Insistentemente se divulga a ideia que os professores não possuem a formação matemática e pedagógica necessária, não são profissionais competentes, sabem pouco, e/ou não sabem ensinar e por isso os alunos não aprendem Matemática. Os professores não têm sido vistos, como possuidores de conhecimento específico, sendo esta uma das razões da desvalorização da profissão docente, do desprestígio social do professor, das tensões entre os próprios professores, os encarregados de educação e os alunos.

A degradação do estatuto socioprofissional e do nível económico dos professores em Portugal, durante os anos 80, não favorecendo o seu empenho nos projectos reformadores, conjuntamente com a pobreza científica e conceptual da inadequada formação que tiveram, levaram a que os professores se funcionalizassem, menosprezando o valor do seu saber e atribuindo um papel insignificante à sua experiência. A organização das escolas, igualmente, não tem favorecido a partilha do saber de cada um, nem o investimento nos percursos de formação. Realmente, embora, na teoria, o professor possa reformular e comparar experiências, de facto, não o faz, pois, dadas as condições de trabalho existentes nas escolas, vai ter poucas oportunidades para, de um modo organizado, trocar e articular experiências.

A relação da desvalorização dos saberes do professor e da redução do seu estatuto com as preocupações públicas com a qualidade de ensino e com as pressões políticas para melhorar a educação vem reforçar a necessidade de se projectar uma imagem do professor como alguém que sustenta e usa determinado conhecimento específico, imprescindível para lidar com as situações de trabalho e guiar a sua prática. Numa época em que a reforma da educação é quotidianamente referida, torna-se cada vez mais importante desenvolver uma compreensão conceptual do que é e poderá ser o ensino, partindo-se da análise do próprio processo de ensino para que se perceba como os profissionais resolvem os conflitos e os dilemas que se lhes apresentam no seu dia a dia.

Partindo da importância da alteração da visão que a sociedade tem sobre o professor e que o professor tem sobre si próprio e sobre a profissão para a necessidade da valorização da carreira do professor e consequentemente para a qualidade de ensino no nosso país, vai pois descrever-se uma aula de matemática fazendo sobressair o conhecimento do professor que aí é mobilizado.

A professora

Elisa lecciona há mais de vinte anos, sendo professora efectiva de Matemática desde 75. Tem quarenta e tal anos, alta, aspecto reservado e temperamento introvertido; num grupo pouco numeroso e familiar é, no entanto, boa conversadora e de fácil trato. Apesar da sua expressão séria e pouco exuberante, mantem com os alunos uma relação próxima e afectuosa tratando-os pelo nome e tendo sempre uma palavra amiga quando se cruza, com eles, nos corredores.

É divorciada e sem filhos, mas dedica as suas horas vagas à família. Apesar de não ter muito tempo livre pois desde há muito opta por um horário misto, que lhe permita dar as suas aulas com calma, com horas extraordinárias de apoio e outras actividades, disponibiliza-se frequentemente para auxiliar, nos estudos, os filhos das colegas e dos funcionários, pelo que é uma pessoa querida e considerada na escola onde lecciona e a cujo quadro actualmente pertence.

A profissão desempenha um papel importante na sua vida, tendo posto muitas vezes a vida profissional à frente de outras coisas. Pelo modo da Elisa falar transparece o gosto pela profissão, pelo ensinar e pelas crianças. Aquilo que a atrai no ensino é, fundamentalmente, o contacto com os alunos, poder contribuir para desenvolver neles determinadas capacidades e conhecimentos importantes para a sua vida futura e, genericamente, sentir utilidade social. Também contribui o facto da profissão de docente lhe permitir uma certa actualização. Relativamente à escola valoriza o contacto com os colegas e a troca de impressões que aí acontecem naturalmente, pois considera que é um local de certo modo privilegiado no que concerne à facilidade de se estabelecerem relações quer a nível de trabalho quer em geral.

O que parece gostar menos na profissão está associado a aspectos que constituem entraves no dia a dia, os quais, embora o não tenha explicitamente afirmado, têm conduzido a um certo desânimo por serem impeditivos do uso de metodologias mais adequadas e que, como referiu, estão relacionados, entre outras coisas, com o funcionamento da escola em si, a falta de material, a falta de dinheiro, o próprio edifício e o número de alunos por turma.

Sobressai na Elisa a grande importância que atribui à relação professor/aluno e o papel que lhe consagra no processo de ensino/aprendizagem. No seu tempo de liceu, com excepção de algumas aulas onde segundo a Elisa lhes era permitido intervenção e discussão de dúvidas, a interacção professor/aluno praticamente não existia, e as aulas eram de tipo expositivo. Desta forma era esse o modelo de ensino que tinha presente quando começou a leccionar:

> "Sabes o que, quando comecei a dar aulas, tentei fazer? Foi arranjar daqueles professores que me tocaram positivamente, ir buscar o que gostava em cada um deles. E por oposição não ser aquilo que me tinha marcado negativamente ..."

De facto, o tipo de ensino que de início praticou foi uma adaptação, à sua maneira de ser, do ensino tradicional que teve. Após já alguns anos efectiva, quando passou para o Ciclo e simultaneamente para a Matemática, o seu tipo de ensino mudou, uma vez que os métodos, as estratégias, as actividades e o seu papel na sala de aula passaram a ser diferentes. A partir daí, e durante muito tempo, a Elisa diz que valorizou os métodos em detrimento dos conteúdos, não tendo grande preocupação no cumprimento do programa.

Por volta de 88/89, começou a leccionar também o 7° e 8° ano de escolaridade, passando a preocupar-se mais com os programas e a sacrificar os métodos e os processos aos conteúdos. Esta mudança teve a ver, segundo ela, com a sua própria constatação das queixas que sempre ouviu dos professores do ensino secundário sobre o deficit no conhecimento dos conteúdos:

> "os alunos não levavam os conteúdos que deviam levar...(são) as carências, verificadas por mim quando comecei a dar o 7° ano. .Considero ter tido um retrocesso, quando passei a preocupar-me mais com os programas, a sacrificar os métodos, os processos, aos conteúdos. O desenvolver determinadas capacidades e atitudes, pôr os miúdos a falar e ao mesmo tempo cumprir programas há uma incompatibilidade total. Os programas não estão elaboradas para isso."

A Elisa considera que o seu ensino actual é um ensino de compromisso. A sua prática actual não a satisfaz inteiramente, mas justifica a sua opção pelo tempo que métodos alternativos necessitariam.

Sendo a Elisa desde há muito delegada, sempre fez planos a médio e a longo prazo, ou seja por trimestre e por unidade. Relativamente às suas aulas sempre planificou e ainda hoje planifica, despendendo com essa tarefa um tempo que considera adequado. Actualmente muita da sua preparação de aulas é mental. Utilizou uma frase interessante quando se referiu a esse tipo de preparação: "Vejo as aulas, faço uma ideia do que vai acontecer....". No entanto, e apesar disso, quando vai apresentar na aula qualquer material ou problema novo, faz sempre antecipadamente uma experiência prévia. A sua planificação é orientada para o aluno médio, adaptando-a depois a cada caso. Para "as boas turmas" pensa sempre em algo que possa fazer chegar mais longe os alunos. Na preparação das aulas recorre fundamentalmente a manuais escolares, em primeiro lugar ao adoptado na escola, mas também a outros de onde retira ideias e exercícios. Não atribui ao livro de texto um papel indispensável, sente, porém, uma certa obrigação em o utilizar, dado que é o adoptado: "Mas saio dele, regresso a ele. Uso o livro, não me limito a ele mas não sou escrava dele". Esta capacidade adquirida com a prática, com a experiência, leva-a a considerar o livro dispensável, atribuindo-lhe utilidade, fundamentalmente, como fonte de exercícios e para o aluno estudar.

A prática pedagógica da professora

A aula é de uma turma do 6° ano, com características um pouco particulares dado que tinha integrados dois alunos deficientes, e foi definida pela Elisa como "calminha e normal, com alunos bonzinhos, mas com outros com bastantes dificuldades". Com uma relação rapaz/rapariga bastante equilibrada, por ser uma turma de estatuto especial, é constituída unicamente por 15 alunos, cuja idade média ronda os onze anos, e de estrato socioeconómico que se pode considerar baixo.

A aula desenrolou-se num clima agradável, ligeiro e saudável. As atitudes ou sentimentos que a Elisa manifestou para com a generalidade dos alunos foram de grande paciência e atenção, revelando sempre calma e naturalidade nas relações, bem como interesse pelo que os alunos faziam, decorrendo, assim, as aulas sem tensões aparentes. Usualmente os alunos entram na sala com a professora e, logo de seguida, dirigem-se para os seus lugares e organizam-se em grupo, arrumam as cadeiras e as mesas, começando, prontamente, a trabalhar.

A gestão da aula feita pela Elisa demonstrou a segurança que duas dezenas de anos de ensino lhe concedeu, controlando a classe com naturalidade e sem grandes preocupações. Os alunos estão sempre agrupados, sendo visíveis regras de funcionamento social que os alunos parecem ter interiorizado.Isto acontece porque a Elisa, no início do ano, promove uma discussão na classe onde se estabelecem as obrigações recíprocas e as normas de funcionamento dos grupos e classe, sujeitas assim a um processo de negociação.

Apesar de os alunos estarem sempre dispostos em grupo isso não introduziu qualquer perturbação nos outros tipos de trabalho que na aula houve, nomeadamente no trabalho individual, ou entre pares de alunos, ou no trabalho envolvendo simultaneamente a turma toda.

As tarefas matemáticas em aula

As tarefas principais, ou pelo menos aquelas a que atribuiu mais tempo (15-20 minutos), foram apresentadas por escrito e, num ou noutro caso, complementadas oralmente por outras mais pequenas e rápidas, dirigidas a grupos de quatro alunos, uma vez que era intenção da professora que se realizassem em trabalho de grupo. Algumas, das mais curtas, foram sugeridas à turma oralmente e ocasiões houve em que se verificou a apresentação de determinada tarefa a um aluno individual.

Elisa selecciona os materiais a utilizar com cuidado, de modo a que sejam adequados ao arranjo espacial da turma, sendo de salientar a variedade utilizada nas quatro aulas que constituíam a unidade: geoplano; cartolinas para recorte com tesoura; transparências e canetas de acetato para cada grupo utilizar na projecção do processo de resolução da tarefa; e papel vegetal para decalque. A adequação das tarefas ao nível etário dos alunos e à organização dos alunos é um aspecto que valoriza e, para conseguir a mediação do saber matemático, a professora utilizou tarefas a realizar pelos alunos de modo a que eles construíssem o seu conhecimento, embora, como reconheceu, guiados por ela:

> Elisa (Na discussão da ficha para encontrar as figuras equivalentes) — "Não faço discussão intergrupos. Eu sou intermediária. Já consegui fazer em tempos, isto com outras turmas e com outras características, diálogo sem eu interferir. (Isso tem a ver com) características da turma e não só. Isso é um treino. Neste caso eles só foram meus alunos este ano. Não estavam habituados ao diálogo, nem a falarem. Se eu tivesse continuado... Já consegui fazer isso mas não faço muitas vezes."

O saber foi apresentado de uma forma concreta e a sequência de actividades propostas foi apresentada de modo a conduzir o aluno à abstracção. A Elisa escolhe formas para definir o saber a ensinar seleccionando tarefas que parecem ter em conta o saber anterior do aluno: de facto, geralmente os alunos começavam a trabalhar e nunca a professora acrescentou a informação incluída na ficha que não fosse como ajuda aos alunos com mais dificuldades.

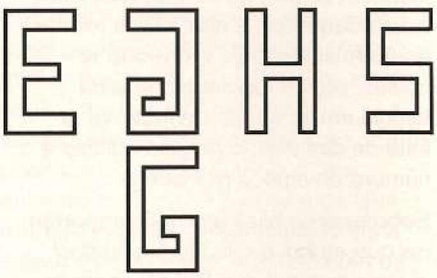
Para a Elisa é muito importante a exploração da situação. Na verdade, para a escolha das tarefas, não tem critério preciso, preocupando-se com o seu grau de dificuldade e que permitam ao aluno chegar ao conceito por um processo de descoberta, investindo fundamentalmente na sua exploração.

> "Há uma coisa que eu faço, é que nunca vou para a aula em que um problema que é posto ao aluno eu não o tenha resolvido primeiro. Até para ver os vários caminhos que possam surgir, até porque acho muito importante que dentro de uma aula se aceitem os mais variados caminhos para resolver uma situação... Preciso de ter grande conhecimento do que vou fazer, para não rejeitar nada e conseguir acompanhar todos os caminhos e aproveitar mesmo alguns que não levem a nada mas que têm uma parte que ainda se pode aproveitar..."

Para além do que se disse sobre as características essenciais das tarefas desenvolvidas na aula, falta referir que foram motivadoras, dado que os alunos estiveram atentos e interessados no trabalho, o que é sinónimo de uma implicação afectiva e cognitiva.

Exemplificaremos os dois tipos de tarefas que surgiram para tratar das áreas do rectângulo, do triângulo e do paralelogramo. A abordagem que a professora utilizou parecia pretender que os alunos chegassem à fórmula para a determinação da área dessas figuras. O primeiro exemplo, é uma das quatro questões de uma ficha de trabalho apresentada aos grupos, onde se pretende fazer a revisão do que são figuras geometricamente equivalentes e identificar figuras equivalentes:

> Descobre quais as figuras que ocupam a mesma porção de plano.



À medida que ia distribuindo as fichas ia salientando a necessidade de resolverem a ficha com calma, como quisessem, mas em diálogo com os colegas do grupo. A professora circula pelos grupos, começando no grupo dos alunos deficientes, desloca-se depois para outros grupos e, a perguntas do género "Usamos a régua ou o papel vegetal?", responde, repetindo variadas vezes "Isto é que vocês têm de discutir. Eu não estou cá". Torna-se aqui aparente o estímulo ao trabalho independente e à discussão entre os pares. Os alunos vão tentando resolver a questão, contando (muitas vezes alto) o número de quadrados de cada figura, conferindo com os colegas e registando seguidamente no caderno.

Seguiu-se um momento de discussão entre os grupos e a professora, no qual o papel da professora foi essencialmente o de orientadora da discussão que, a maioria dos alunos, com entusiasmo acompanhava. Após ter indicação que todos os grupos tinham concluído a tarefa, começou por solicitar a um dos porta-voz de grupo que esclarecesse o pretendido na pergunta, deixando transparecer a preocupação que tem em compreender o que o aluno compreendeu.

> Porta-voz — Entendi que se ocupam a mesma porção de plano tem o mesmo número de quadrados.

E imediatamente, sem sequer o deixar concluir a Elisa questionou se estava a falar por si ou em nome do grupo, chamando a atenção e recordando as regras de funcionamento de grupo.

> Professora — Então quais as figuras que ocupam a mesma porção de plano?

O aluno não dá a resposta, diz "Fomos contar os quadrados". A professora, não comenta parecendo contentar-se com isso, demonstrando uma valorização dos processos utilizados e da explicitação desses processos. Dirige-se a outro grupo, repetindo a pergunta.

> Porta-voz (de outro grupo) — Figura J, S, G.

Apesar da resposta não estar correcta a Elisa não o deixa transparecer, evitando assim avaliar a resposta do aluno, tentando que sejam os alunos a validar ou a corrigir. A Elisa tem a preocupação de devolver as respostas à turma esperando que os próprios alunos detectem qualquer incorrecção. Assim, continua dirigindo-se à turma perguntando se "Estão de acordo?". Desta forma, entrega aos membros da turma a decisão sobre o sentido da resposta, tentando fomentar também a discussão. Porém só se ouvem uns nãos enquanto que se vêm uns braços no ar. Uma aluna responde à solicitação da Elisa deste modo:

> Diana — Não estamos de acordo. As figuras são a J, S, G, H.
>
> Professora — Vais explicar porquê.
>
> Diana — Os do outro grupo enganaram-se ou então contaram mal.

A professora quer assegurar-se que foi por lapso e não por incompreensão que o grupo respondeu incorrectamente e continua:

> Professora — O grupo da Diana acha que vos escapou uma figura. Qual foi?
>
> Porta-voz — A figura H
>
> Professora — Então e porquê? Quantos quadrados ocupa a letra H?
>
> O porta-voz — 16
>
> Professora — E as outras figuras J, S, G?
>
> Porta-voz — Também 16
>
> Professora — Estamos então de acordo que as letras que ocupam a mesma porção de plano são a J, S, G, e H?
>
> Porta-voz — Sim

Após esta sequência seguiu-se um novo diálogo entre a professora e a turma, em que a professora foi fazendo perguntas, indicando qual o aluno que devia responder, aproveitando as suas respostas, mesmo que não correctas, e tentando vários caminhos ("Ora vamos lá ver de outra maneira") de modo que os alunos chegassem onde queria. A importância de considerar vários métodos para resolver um problema sobressai com regularidade e é também usado como um meio de motivar os alunos. Neste exemplo fica, também, bem expressa a exigência, quase sistemática, desta professora pela apresentação das razões e justificação das respostas. Neste caso, não havia, grande coisa a explicar, mas sim a constatar, pois o tipo de tarefa apelando a saberes matemáticos de nível elementar, não dava oportunidade para a troca de raciocínios, de argumentos, de explicações e justificações.

O segundo exemplo tinha como objectivo chegar à fórmula da área do paralelogramo a partir da área do rectângulo equivalente e foi assim apresentado:

> Representa no geoplano um paralelogramo utilizando os elásticos distribuídos. Em seguida representa um rectângulo tendo uma base de comprimento igual à do paralelogramo.
>
> Qual será a área do paralelogramo?
>
> Que relação haverá entre as áreas das duas figuras? Porquê?
>
> Qual será a fórmula para determinar a área do paralelogramo?

Embora sem grande complexidade, esta situação de características mais abertas que a anterior, permitia a discussão e a colaboração entre pares, a comunicação sobre a matemática, propiciando o discurso de modo a construir novos significados e possibilitando o alargamento e desenvolvimento do conhecimento dos alunos. Porém não surgiram representações, estratégias de resolução, ou soluções muito diferentes. A razão, segundo a Elisa, teve a ver com o modo como a exploração foi conduzida:

> "Se tivesse pegado na tarefa assim integral e deixasse os miúdos chegarem à área podia ter a certeza que eles tinham feito a abstracção. Das duas uma, ou lhes dava liberdade absoluta (para a explorarem), ou lhes dava mais exemplos e perguntava a conclusão a tirar. (Assim) perde-se o processo, o processo não serviu para nada, foi uma brincadeira e a conclusão que deveria vir do processo aparece desligada. Eles decoram a fórmula e esquecem, ou não percebem, tudo aquilo que apareceu."

Deste modo a Elisa constata que além do carácter problemático da situação, há outro aspecto essencial que se prende com o seu desenrolar, questionando o modo como, muitas vezes, orienta as discussões. Isto prende-se com outro aspecto essencial do trabalho do professor, a interacção que acontece nas aulas.

Comunicação e Negociação

Criando condições para que os alunos entendam claramente o que se pretende (altura de voz, dicção, momento em que o faz, local da sala em que se coloca quando o faz, capacidade e simplicidade de explicitação), foi saliente, o investimento da Elisa no desenvolvimento da comunicação, valorizando a importância de os alunos falarem e da sua participação activa.

As regras de funcionamento para a execução de qualquer tarefa são apresentadas pela professora, que, no entanto, realça a liberdade do grupo recorrer ao que quiser para a resolver. Relativamente às regras do grupo parecem ser de mútuo consentimento e já estarem bem interiorizadas pois os alunos começam quase de seguida a trabalhar, sabendo precisamente quem fica com o material, quem é o porta-voz e como se distribuem de modo a participarem na resolução da tarefa proposta. É o tempo de execução da tarefa que, apesar de não ser explicitado, se vê sempre negociado, pois, quando ao informar os alunos que vai proceder à correcção, aparecem solicitações no sentido de se aguardar um pouco mais, e deu sempre mais tempo para acabarem, nunca levantando problemas.

Vamos ilustrar o tipo de interacção predominante que surge nas aulas desta professora, com a discussão da tarefa explicitada em cima. A professora distribuiu a cada grupo um geoplano e elásticos de várias cores, solicitando que com aquele material, representassem um paralelogramo. Os alunos começam logo a fazer, sabendo precisamente quem fica com o material e como distribuem as tarefas de modo a resolverem a proposta de trabalho. Enquanto os alunos, sem grande demora, se dedicam à realização da tarefa, a professora desloca-se pelos grupos, começando pelos alunos deficientes. Depois de lhes prestar ajuda, a professora continua junto aos grupos, observando o andamento dos trabalhos e salientando alguns aspectos ou repetindo de outra forma a mesma questão e estimulando a discussão entre os alunos: "Este é um paralelogramo muito especial. Porquê?" ou, junto de outro grupo, "Eu queria que vocês fizessem um maior" ou, ainda, "Será que o que fizeram é um paralelogramo?".

Após ter dado tempo para os alunos resolverem as questões apresentadas, a professora, depois de dar a volta por todos os grupos, vendo que num deles os alunos não conseguiam chegar lá, recorreu à turma e começou a discussão da seguinte maneira:

> Professora — Olhem lá num paralelogramo o que se verifica?
>
> Aluno — Tem os lados opostos paralelos.
>
> Professora — Sim senhora. Tem os lados opostos paralelos.

E pegando num geoplano maior, que expõe para a turma, mostra num paralelogramo os lados paralelos dois a dois. A seguir, traça a altura do paralelogramo enquanto pergunta para a turma "Se eu traçar assim, o que estou a traçar no paralelogramo?". Sem dar exactamente a resposta acrescentou algo mais, "Não há dúvida que é a distância entre os dois lados. Então, será ...?", sendo curto o intervalo de tempo que decorreu entre a pergunta que fez e o esclarecimento que deu à sua pergunta. Um aluno responde: "Altura". A Elisa aproveita esta resposta para esclarecer melhor o que é a altura. Dá, seguidamente, mais algum tempo para os alunos continuarem a tarefa de construção de um rectângulo de base igual à do paralelogramo. Segue de grupo em grupo, ouvindo-se questionar os alunos com perguntas do tipo "Onde está a base do paralelogramo? Será a base do rectângulo a mesma que a do paralelogramo?" ou "Qual é o comprimento da base do paralelogramo? E do rectângulo?". Ou ainda, "Este paralelogramo é um losango. Vocês olhando para lá vão construindo o rectângulo no paralelogramo, vejam se descobrem alguma coisa de especial. Comparem o rectângulo com o paralelogramo."

A professora segue de grupo em grupo e, após ter feito a ronda, pára e dirige-se à turma "Vamos lá ver se estão todos de acordo" e estimulando a discussão entre os alunos, repete a questão de outra maneira:

> Professora — Vamos ver ao que cada grupo já chegou. Cada grupo vai tentar completar o que disse o anterior, para não se repetirem. Vai começar o grupo da Diana.
>
> Aluno — A base do paralelogramo é a mesma base do rectângulo. O rectângulo tem os lados iguais dois a dois.
>
> Professora — Isso já vocês sabiam.

E repete o que os alunos disseram, fazendo o que frequentemente faz, ou seja, sempre que possível aproveitar as respostas dos alunos.

> Professora — Eu queria ver se viram mais alguma coisa. Digam lá. O João quer falar.

O João disse algo que a professora repetiu para tornar perceptível "Aqui formou-se um triângulo e aqui também está outro triângulo". Continua a questionar, solicitando os alunos sobre a apresentação das suas conclusões. É o Bruno que responde:

> Bruno — Encaixando. Esta parte que está de fora faz parte do rectângulo e este faz parte do paralelogramo.
>
> Vera — Este bocadinho encaixado aqui dá o rectângulo.

Após os comentários dos alunos acerca da questão posta, é a Elisa que tira a conclusão:

> Professora — Então podemos dizer que as áreas do rectângulo e do paralelogramo são iguais?
>
> Aluno — A área deste losango tem de ser igual à área deste rectângulo.
>
> Professora — Então vamos lá ver, parece que essas duas áreas são geometricamente iguais. Como se calcula a área do rectângulo?
>
> Ana — Multiplica-se a base pela altura.

A professora pega novamente no geoplano que mostra à turma, dizendo:

Professora — Eu já vi que o paralelogramo é idêntico ao rectângulo. Como poderei então determinar a sua área?

Aluno —Multiplico a sua base pela altura.

Professora — Porquê?

Aluno — Porque esse paralelogramo pode transformar-se no rectângulo.

Professora — Todos perceberam?

E volta a repetir o modo de calcular a área do paralelogramo, preocupando-se em dar outros exemplos onde os alunos pudessem esclarecer as dúvidas que ainda tivessem. Os alunos, de um modo geral, concluíram que as áreas das duas figuras eram iguais, sendo a professora a encaminhar o seu raciocínio de modo a que eles chegassem à fórmula pretendida.

Procurou-se descrever dois aspectos essenciais do trabalho do professor, as tarefas, e a comunicação e negociação desenvolvidas em aula.

As tarefas descritas demonstram a capacidade desta professora seleccionar e usar recursos e materiais adequados ao currículo e aos alunos. De facto um professor tem de preocupar-se com as estratégias a desenvolver de modo, não só a estimular os alunos, como a criar um contexto onde seja possível o desenvolvimento do raciocínio matemático que permita aos alunos, fazerem conexões com as outras áreas do saber. As tarefas propostas, utilizadas para introduzir um conteúdo, para possibilitar a utilização e prática de conceitos e técnicas ou ainda para servir de suporte à aquisição de outras competências matemáticas, foram, na sua generalidade, limitadas aos conteúdos disciplinares, proporcionando algumas hipóteses de descoberta. Essencialmente de dois tipos, e geralmente retiradas do livro, umas tiveram como objectivo a aplicação e verificação do conhecimento de conteúdos já tratados; as outras serviram como meio para introduzir e/ou desenvolver conceitos, ou ainda como contexto de aquisição de certas competências matemáticas.

O tipo de interacção predominante foi entre a professora e os alunos. A discussão com toda a turma foi o formato predominante, escolhido por esta professora para encorajar a colaboração e operacionalizar o tempo de aula da melhor forma possível. Poderia esperar-se que os próprios alunos tomassem a iniciativa de dialogar entre si, sem passar pela professora. Reconhecendo que neste nível de ensino é difícil criar este tipo de interacção, a Elisa considerou que, dadas as características desta turma, o nível de comunicação que acontece no diálogo entre pares, foi difícil acontecer, ao que a pressão do cumprimento programa não foi alheia, acabando por assumir o papel de condutora da discussão.

"o trabalho (dos alunos é) que se podia prolongar muito mais. Eu vou cortando porque eu quero avançar um pouco também. Repara que até à reforma nunca acabava um programa de matemática. Neste momento eu sinto esse peso. Estou a querer fazer duas coisas. Não abandonar a estratégia, mas também dar mais matéria. É de facto um dilema. Ás vezes sacrifico a estratégia, o processo...."

Através deste comentário é ainda visível o conflito com que, a Elisa, tal como muitos professores, se debate: "pôr os miúdos a falar/ter tempo de cumprir os programas", passar para os alunos a validação das várias respostas/ser a autoridade e a responsável pelo andamento da aula, intervir como organizadora e facilitadora do processo de comunicação tendo em vista chegar a um consenso na resposta/conduzir os estudantes até as respostas certas. Sobressai, também, a preocupação da Elisa para que os alunos digam o que fizeram, convidado-os a falar, para a turma e professor, apelando constantemente à participação de todos. Igualmente foram evidentes as frequentes solicitações no sentido dos alunos apresentarem os seus raciocínios, criando possibilidades de argumentação, formulação e reformulação das questões e o pensar em voz alta. O diálogo situou-se ao nível professora-aluno, sendo este o nível mais comum de interacção que se estabeleceu. Através dele pôde a Elisa compreender o que o aluno compreende. Por outro lado, permitiu a cada aluno exercitar a verbalização do seu saber e aos colegas que ouvem, a conscien-cialização das várias interpretações, concepções e significados presentes.

O seu incentivo à comunicação entre os alunos ou grupos foi visível, estimulando o diálogo entre os alunos, que, no entanto, sabe difícil de acontecer. De facto essa preocupação da Elisa, que demonstra o papel que atribui às explicações e à troca de ideias entre pares na partilha do poder na sala de aula e no aumento de oportunidades para a resolução de conflitos e negociação do significado, muitas vezes não tem resultados práticos: se a Elisa, por um lado, considera fundamental o desenvolvimento de determinadas capacidades nos alunos, na angústia de lhe faltar tempo para cumprir o programa, e, na ânsia de avançar na matéria, reconhece com frequência que "dá, de vez em quando, os saltos que deviam ser dados pelos alunos" se não houvesse a pressão do programa. Esta preocupação é a razão pela qual, principalmente em fim de aula, os momentos de discussão entre os grupos, — propícios ao desenvolvimento da discussão entre pares, à apresentação dos pontos de vista dos alunos, às justificações dos seus pensamentos e dos seus comentários e sobre perspectivas dos colegas — foram substituídos por discussão de grande grupo e o diálogo predominante foi entre professor - aluno. Parece ser assim que a Elisa procura resolver o dilema que permanentemente sente, optando nessas alturas por promover a interacção, entre professora e turma. Não obstante, não sente que essa forma de organização seja impeditiva da responsabilização de um aluno pela explicação ou da correcção do trabalho de outro, sendo a participação de todos os alunos uma preocupação real desta professora.

Fátima Guimarães
Escola Preparatória do Lumiar

Investigar na aula de Matemática

Lina Brunheira
Helena Fonseca

"Oh professora, investigações com espelhos!? O que é isso?" Foi assim que o Pedro reagiu, naquele dia, ao olhar para o sumário que estava escrito no quadro. Esta aula, de que vamos falar, enquadrou-se num capítulo de Geometria do 7º ano, embora se tenha realizado numa turma do 8º ano. Nela experimentámos uma ficha de trabalho envolvendo investigações com espelhos.

No último ano lectivo, leccionámos os mesmos anos de escolaridade, na mesma escola. Assim, pudemos trabalhar em conjunto na preparação das aulas e, ao mesmo tempo, pudemos analisá-las e discuti-las no sentido de aperfeiçoar o trabalho futuro. Foi com este objectivo que organizámos esta aula, na qual participámos as duas, uma como professora da turma e a outra como observadora.

Para a realização desta actividade organizámos os alunos aos pares, distribuímos uma ficha de trabalho por aluno e um livro de espelhos por cada par. Pedimos também que cada par entregasse por escrito as respostas às questões 3, 4 e 5. Esta ficha ocupou-os durante duas aulas. Na primeira delas, começaram por mostrar alguma surpresa em relação ao novo material com que iam trabalhar. Após serem distribuídas as fichas e os espelhos, muitos alunos começaram por encarar o espelho não como um material de trabalho, mas sim como habitualmente o utilizam. Depois desta fase inicial, começaram a trabalhar e a utilizar o espelho nas suas investigações. Para transmitir melhor como decorreu a aula, vamos ilustrar a nossa descrição com alguns diálogos.

Sandra: Oh professora, os espelhos são para quê?

Prof.: Já leste com atenção o início da ficha?

Sandra: Mais ou menos...

Como nos apercebemos que alguns alunos estavam com dificuldade em iniciar o trabalho, resolvemos explicar para toda a turma o fim a que se destinava o espelho.

As investigações acerca dos eixos de simetria dos vários polígonos regulares tomaram várias formas. Uns alunos descobriam todos os eixos de simetria colocando o espelho em todas as posições sobre a figura. Outros, depois de uma investigação inicial com o espelho, imaginavam o eixo de simetria e desenhavam-no já sem a ajuda do material.

Entretanto, alguns alunos começavam já a preencher a tabela.

Marco: Mas não há aqui polígonos de quatro lados.

Prof.: Então como se chama um polígono regular de quatro lados?

Marco: Ah claro! É um quadrado. Está no caderno.

Depois de ter encontrado 3 eixos de simetria no triângulo, 4 no quadrado e 5 no pentágono, a Carla disse um pouco insegura:

— Estou a ter uma ideia mas não sei se está certa.

Atacou então o hexágono já com a sua conjectura que, no entanto, não se arriscou a explicitar.

Enquanto observávamos o trabalho dos alunos, percebemos que, apesar de já terem chegado à conclusão pretendida na questão 2, a maioria deles manifestava uma certa relutância em explicá-la por escrito.

Ainda na primeira aula, muitos alunos chegaram a avançar com as investigações sobre eixos de simetria em triângulos, quadriláteros e no círculo. A primeira reacção da maioria foi responder de imediato que um triângulo tem três eixos de simetria, pois naturalmente identificam um triângulo como sendo sempre equilátero. Foi então necessário chamar-lhes a atenção para a existência de outros.

No final desta aula recolhemos as respostas pedidas para posteriormente serem analisadas. A questão relativa aos eixos de simetria do círculo foi a que recolheu respostas mais interessantes. Quase todos os alunos sabem intuitivamente que existem infinitos eixos, mas substituem esse termo por outros não equivalentes, tais como: muitos, *montes*, milhares, milhões, ... Houve apenas algumas respostas como 4, 8, 30 e 360! Para além do esboço a ilustrar a resposta, alguns acrescentaram ainda que os eixos têm de passar pelo centro e uma aluna afirmou que estes são os "diâmetros".

Na segunda aula, os alunos exploraram primeiro a parte II da ficha e depois passámos a uma fase de discussão do trabalho realizado. O problema das estrelas não apresentou dificuldades iniciais. Os alunos perceberam como tinham de colocar os espelhos e contaram bem o número de pontas. Ultrapassada esta fase alguns alunos deram o problema por terminado.

Rui: Professora, já acabei.

Prof.: Então qual foi a relação que descobriste?

Rui: Relação!? O que é isso?

Prof.: Tenta descobrir que ligação existe entre o ângulo formado pelos espelhos e o número de pontas da estrela.

Daniel: Então, quanto mais abrimos o livro, menos pontas temos.

Rui: Quanto maior for o ângulo, menor é o número de pontas!

Prof.: Sim, é verdade. Mas podem descobrir mesmo uma regra. Por exemplo, se o ângulo for de 60°, conseguirão descobrir o número de pontas da estrela sem utilizarem o livro?

Hugo: São seis.

Prof.: Como descobriste?

Hugo: São seis porque temos de multiplicar o 60° por 6 para dar 360°, que é a volta toda.

João: Não estou a perceber nada.

Hugo: Não vês que as multiplicações dão sempre 360°, 120° x 3 = 360°, 36° x 10 = 360°, 72° x 5 = 360°.

Prof.: Então qual é a regra?

Ana: O ângulo vezes o número de pontas dá sempre 360°.

Durante a aula alguns alunos inventaram ainda novas explorações.

Luísa: Oh professora, se em vez de uma ponta de estrela tivermos um traço, podemos obter um triângulo, um quadrado, um pentágono, ...

Prof.: Muito bem! Também podes tentar encontrar uma regra para esse caso.

Entretanto tocou. Enquanto arrumavam as suas coisas, alguns alunos manifestavam o seu agrado por este tipo de aulas.

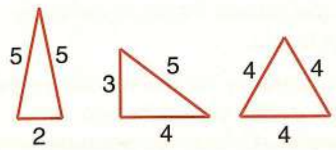
Investigações em Matemática

Uma investigação matemática é uma viagem até ao desconhecido. Ela torna possível aproximarmo-nos da matemática do mesmo modo que os matemáticos o fazem, porque seremos nós a escolher quais as direcções a seguir.

O processo de investigação matemática pode ser ilustrado pela chamada metáfora geográfica: "O importante é explorar um aspecto da matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino" (Pirie, 1987, citado em Ernest, 1991, p.285). No caso da resolução de problemas, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. Consideramos este um processo convergente ao contrário da investigação matemática que é um processo divergente.

Um exemplo de uma "investigação pura" é descrito por Lerman (1989, p. 77). Num seminário de pós-graduação com alunos que não eram de matemática, ele apresentou a seguinte investigação:

> Considera os triângulos de lados inteiros e de perímetro 12. Investiga.



Alguns grupos ficaram desconcertados, dizendo que não percebiam o que se pretendia, já que nenhuma questão fora colocada. Outros grupos trabalharam em áreas de triângulos, perímetros de triângulos e de rectângulos, etc. Todos os grupos consideraram esta investigação bem diferente das que já tinham experimentado anteriormente, e ao mesmo tempo muito desafiante.

A atitude de desorientação que Lerman descreve em alguns alunos é natural ser observada em actividades tão abertas como esta. Devemos então considerar uma fase anterior a este nível de propostas. A aula que acabámos de descrever é exemplo disso. A actividade de investigação que apresentámos possuía algumas linhas condutoras, no entanto, havia espaço para que os alunos enveredassem por caminhos diferentes fazendo novas descobertas e criando outras questões, tal como aconteceu com a Luísa.

Qual o valor de uma investigação matemática?

Sabendo que este trabalho levanta algumas dificuldades, porquê propô-lo? Ao analisar várias situações, ao construir estratégias e ao descobrir soluções, o aluno poderá melhorar a capacidade de **resolver problemas quer na matemática, quer na vida real.**

As actividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos **trabalharem em grupo**. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos.

Quando propomos actividades de investigação corremos por vezes o risco dos alunos seguirem por um caminho errado. No entanto, torna-se necessário que seja a própria experiência a mostrar o erro. Não dizer logo se as ideias avançadas pelos alunos estão certas ou erradas parece encorajá-los a desenvolver melhor as suas próprias ideias. Se o aluno não consegue sair do erro em que se envolveu, então será necessário ajudá-lo a perceber que escolheu um caminho incorrecto.

Outro aspecto importante é o **apoio que o professor poderá prestar**. Neste tipo de actividades é vulgar surgirem questões não rotineiras, que suscitam nos alunos uma certa insegurança, e que por vezes os leva a desistir facilmente. Foi o que aconteceu com o Rui que terminou o seu trabalho quando lhe surgiu uma questão mais problemática. Nesta altura é essencial a intervenção do professor dando orientações, ajudando à interpretação e tentando de outra forma que os alunos descubram o que se pretende. Recordemos a discussão:

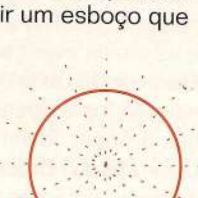
Rui: Quanto maior for o ângulo, menor é o número de pontas!

Prof.: Sim, é verdade. Mas podem descobrir mesmo uma regra. Por exemplo, se o ângulo for de 60°, conseguirão descobrir o número de pontas da estrela sem utilizar o livro?

As sugestões do professor devem ser eficazes, contudo não devem deixar o aluno com a impressão que não foi ele que respondeu à questão. As melhores sugestões são as que questionam os alunos e não as que lhes respondem directamente às questões. Elas devem levá-los a descobrir as limitações das suas abordagens, ou a clarificar as suas próprias ideias.

O perigo de algumas orientações é que estas retirem a parte mais relevante de uma investigação matemática: a de descobrir uma estratégia adequada. Ao aluno não deverá restar apenas a tarefa secundária de fazer alguns cálculos.

Pedir aos alunos que **expliquem por escrito** o seu raciocínio e as suas descobertas é um aspecto que melhora a capacidade de comunicação oral e escrita. Por outro lado, este é também um momento de reflexão sobre aquilo que acabaram de explorar. Eventualmente, também poderá ser apropriado pedir um esboço que ilustre a resolução de um problema. O desenho ao lado é um exemplo claro deste procedimento.



Uma fase muito importante em actividades de investigação é a **discussão**, com toda a turma, do trabalho realizado. É nesta altura que os alunos apresentam os resultados das suas investigações e que o professor tem oportunidade de clarificar ideias, de modo a esclarecer eventuais dúvidas. Será recomendável guardar para esta fase algumas questões mais ambiciosas, pois deste modo, e com a ajuda do professor, os alunos poderão fazer raciocínios mais complexos, o que garantirá a compreensão do problema.

Dificuldades a enfrentar

A introdução de actividades de investigação na aula de matemática levanta dificuldades que merecem alguma reflexão. Uma das possíveis dificuldades relaciona-se com a **gestão do tempo**. Os alunos necessitam de tempo para compreender e analisar o problema, no entanto, não se deverá prolongar demasiado a actividade pois isso poderá conduzir a uma perda de motivação. Por outro lado, os alunos têm ritmos diferentes e, embora tenhamos de respeitar isso, não podemos esperar pelos mais demorados todo o tempo necessário. Se o fizermos, corremos o risco de haver uma dispersão por parte dos alunos e de perder o controlo da aula.

Outro aspecto a considerar é o **nível das propostas** apresentadas. Todas elas deverão conter algumas tarefas acessíveis a todos os alunos, caso contrário poderá desencadear-se um sentimento de frustração naqueles que têm mais dificuldades o que, em última análise, conduzirá também a uma dispersão. A Carla, que interveio na primeira aula, é uma aluna esforçada, no entanto, com dificuldades e alguma insegurança. Para ela esta actividade foi bastante significativa, pois ao perceber que também era capaz de responder às propostas, o seu entusiasmo cresceu e tornou-se uma das alunas mais empenhadas nesta tarefa.

Habitualmente, os alunos não estão familiarizados com este tipo de propostas. O facto de algumas questões serem mais abertas coloca-lhes dificuldades, as quais se reflectirão no trabalho do professor. Estas questões são de alguma forma caracterizadas por terem objectivos pouco definidos, o que torna necessário o recurso a capacidades como a intuição de modo a encontrar uma possível estratégia de resolução. Além disso, os alunos normalmente esperam encontrar questões relacionadas com o capítulo em estudo e resolver exercícios e problemas pela simples aplicação dos conhecimentos adquiridos. Quando isto não acontece, é natural que manifestem alguma insegurança e uma maior dependência em relação ao professor.

Como Lerman (1989, p. 74) afirma, o maior obstáculo à consideração de um currículo orientado para o processo de fazer matemática é a nossa própria relutância, como professores, cuja formação esteve sempre ligada aos conteúdos. Citando o autor:

> Eu lembro-me da minha reacção alguns anos atrás, quando me foi oferecido o lugar de investigador matemático numa equipa de cientistas, para a construção do modelo matemático da poluição de um importante lago. Eu não me lembrava de ter estudado *Modelos matemáticos de lagos* na Universidade e, num estado de pânico, recusei o trabalho. Eu não me estava a ver ser capaz de fazer matemática de uma forma criativa, mas apenas a reproduzir o que me tinham ensinado.

Nota: A elaboração da ficha de trabalho e a análise da actividade relatada neste artigo foram levadas a cabo no grupo de Geometria do projecto "Matemática Para Todos — Investigações na Sala de Aula", que se desenvolve no âmbito do CIEFCUL (Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa).

Referências

Lerman, Stephen (1989). Investigations: Where to Now? Em Paul Ernest (ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art*. NY, Falmer Press.

Ernest, Paul (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. NY, Falmer Press.

Lina Brunheira
Esc. Sec. Eça de Queiroz
Helena Fonseca
Esc. Sec. Luisa de Gusmão

Escola.. Professor(a)....................................

Ano/Turma.................... Data...................... Aluno(a)....................................

Investigações com espelhos

I. Os desenhos de algumas bandeiras são figuras com eixos de simetria.

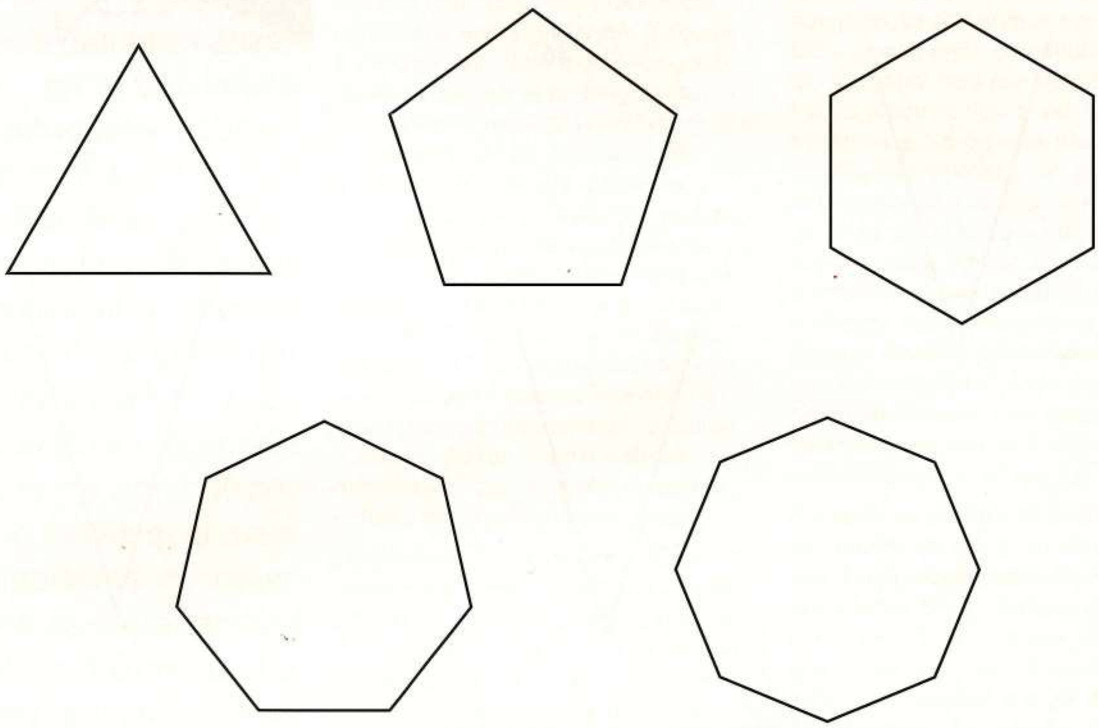
Colocando o espelho sobre o eixo de simetria, consegues, a partir de uma parte da figura, obter a figura completa.

Com a ajuda de um espelho, faz as seguintes investigações:

1. Desenha um quadrado no teu caderno e descobre quantos eixos de simentria tem. Faz um desenho que explique o que concluíste.

2. A seguir estão desenhados alguns polígonos regulares teus conhecidos.

a) Descobre todos os eixos de simetria de cada polígono. (Experimenta e regista na tabela)



Nº de lados do polígono regular	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	**n**
Nº de eixos de simetria								

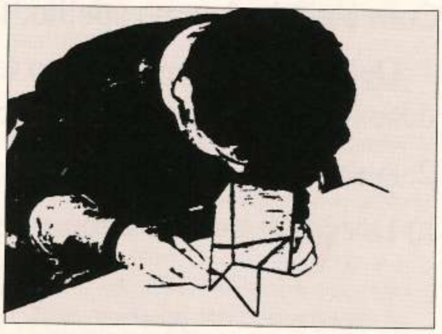
b) Observando a tabela que preencheste, a que conclusões podes chegar?

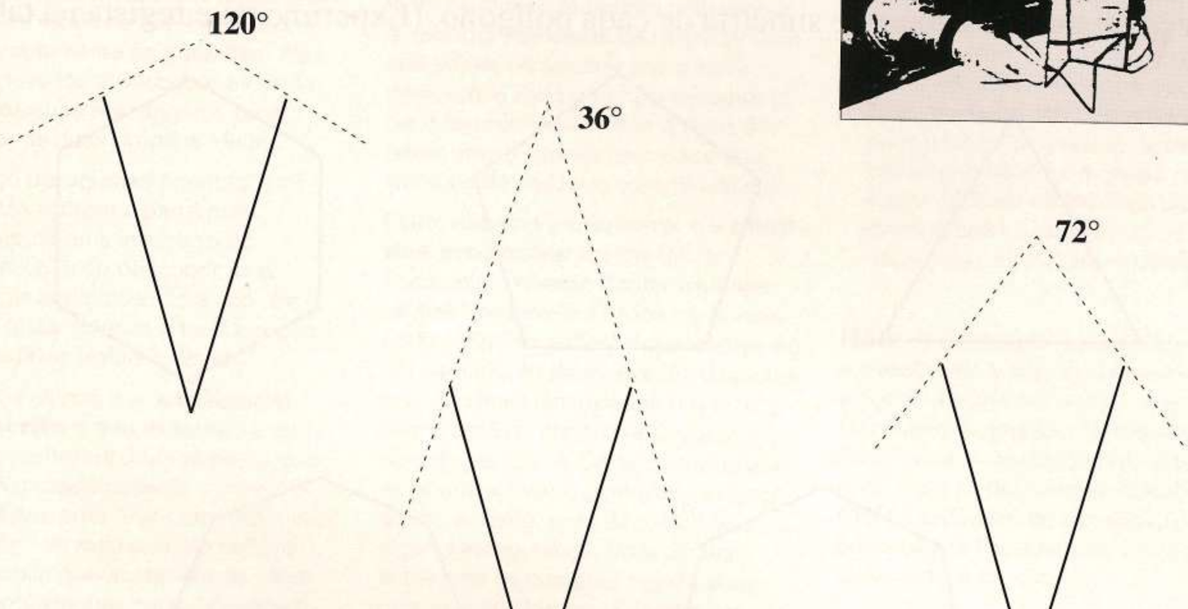
3. Quantos eixos de simetria tem um triângulo?
Experimenta para vários tipos que conheces e escreve as tuas conclusões.

4. Também existem muitos quadriláteros: rectângulos, losangos, trapézios, ...
Descobre, para cada um deles, quantos eixos de simetria há? Faz um esboço das tuas descobertas.

5. E um círculo, quantos eixos de simetria tem?

II. Com um livro de espelhos podemos obter uma sequência de várias imagens que formam uma nova figura.
Coloca o livro de espelhos na zona a tracejado das figuras e observa as estrelas que se obtêm.





Quantas pontas de estrela obténs para cada ângulo?
Experimenta outros ângulos.
Que relação existe entre o ângulo formado pelos espelhos e o número de pontas da estrela?

Ficha de trabalho desenvolvida pelo Projecto *Matemática Para Todos - Investigações na Sala de Aula*

Uma aula de que gostei

Paula Teixeira

Nunca, mas nunca, me tinha passado pela cabeça escrever sobre uma aula de que tivesse gostado. A ideia que tenho é que na maior parte das vezes preferimos falar sobre o que nos corre mal. Desabafar. Mas, para os outros, isso deve ser enfadonho e pouco lucrativo. Cada um aprende com os seus erros, mas pouco aprende com os erros dos outros. Daí que talvez seja mais importante escrever sobre as experiências positivas. Claro que há muitas coisas que nos correm mal, mas essas deixemo-las para "o nosso grupo de amigos da matemática" que têm a obrigação de nos aturar aqueles relatos tristes...

Quando me sugeriram que escrevesse sobre uma aula que gostei de dar e na qual eu penso com prazer percebi que não era uma tarefa nada fácil.

Normalmente, os melhores momentos são indescritíveis porque fazem parte de um longo processo iniciado semanas ou meses antes. Muitas das alegrias surgem quando um aluno ou um grupo de alunos fazem algo que não esperávamos, mostrando que o trabalho anterior que tínhamos feito com eles afinal tinha muito mais sentido do que aquilo que nos tinha parecido.

Cada vez que penso no que de agradável aconteceu nas aulas, recordo com muito mais facilidade aquilo que, numa aula sobre funções, a Cristina descobriu e qual a reacção da Ana Teresa a essa descoberta. O que a Diana me disse baixinho sobre a investigação de um problema de geometria. Ou no que me dizem sempre a Soraia e a Graciete no fim de cada aula. Muitas vezes não há relação entre o entusiasmo com que preparo uma actividade e o entusiasmo com que os alunos a recebem e trabalham. O que acabo de dizer tem uma excepção: quando proponho a utilização de computadores, calculadoras ou qualquer outro material manipulável (por exemplo, cubos), o entusiasmo é praticamente geral.

Lembrei-me de uma aula de duas horas numa turma do 10º ano em que propus que os alunos, em grupos, se debruçassem sobre pequenas investigações que depois, nas duas aulas seguintes, seriam apresentadas à turma. Estávamos no início do estudo das funções. Ainda não tínhamos passado à fase da formalização. Os alunos já tinham trabalhado no computador com um programa de gráficos, sabiam utilizar razoavelmente a calculadora gráfica e já todos os grupos tinham feito alguma apresentação utilizando o *viewscreen*.

Era o segundo grande trabalho desse ano. O primeiro tinha sido logo no início do ano quando estudámos a Estatística e os alunos fizeram a maior parte desse trabalho fora da sala de aula. Eles não tinham aceite bem o facto de terem de se encontrar para além das aulas e nem tudo tinha corrido da melhor maneira. Por isso este segundo trabalho era para ser todo feito nas aulas.

Os alunos também já tinham trabalhado várias vezes em grupo na aula, em trabalhos mais pequenos. Tínhamos combinado que de tempos a tempos os grupos mudavam a sua composição e, por isso, embora a forma de trabalho já fosse habitual na aula, a composição dos grupos era nova. Dois grupos eram constituídos por bons alunos, dois por alunos mais fracos e outros dois tinham alunos melhores e outros mais fracos. Em ocasiões anteriores e em grupos heterogéneos, tinha-me apercebido que nos casos em que não havia uma relação afectiva forte entre os seus elementos, havia tendência para os melhores alunos assumirem uma pseudo-simpatia pelos mais fracos que me perturbava. Daí o facto de só se terem formado dois grupos heterogéneos nos saberes. Todos os grupos tinham rapazes e raparigas.

Havia várias propostas de trabalho e cada grupo de cinco alunos recebia a sua. Propositadamente, nem todas as actividades tinham o mesmo grau de dificuldade. Desejava que todos os grupos terminassem sentindo que tinham conseguido chegar ao fim.

Tinha aproveitado parte da aula anterior para organizar o trabalho. Os alunos sabiam que se deviam sentar em grupo, organizando a sala logo que chegassem à aula, que tinham duas horas para fazer o trabalho e que nas duas aulas seguintes apresentariam o problema aos colegas. Sabiam que os trabalhos propostos aos vários grupos eram diferentes. No final da aula, todos os grupos tinham que entregar uma folha com o que tinham feito. Não precisavam de se preocupar muito com a apresentação mas era necessário que eu percebesse tudo o que tinham feito.

Distribuí os enunciados pelos grupos. Os dois grupos melhores começaram imediatamente a trabalhar. Percebi que tinham entrado em competição. Não podendo comparar os trabalhos do ponto de vista da matemática, porque os problemas eram diferentes, para eles "ganhava" quem conseguisse resolver o problema com a menor ajuda possível. O problema constituia um grande desafio e nunca quiseram a minha presença a não ser na fase final para confirmar que estava tudo bem e fazer sugestões para a apresentação.

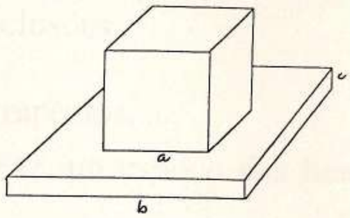
Fiquei assim com o trabalho facilitado. Só precisava de acompanhar quatro grupos. Estes pararam depois de fazer a leitura da sua actividade, foram ler os problemas propostos aos outros grupos (mas dos "bons" ninguém se atreveu a aproximar) e acharam que as propostas dos outros eram mais acessíveis. Propus a troca de enunciados. Dois dos grupos aceitaram e todos se voltaram a sentar.

Mais problemas com cubos

Existe uma história acerca de um monumento cúbico que se situava numa praça "quadrada". Tanto o cubo como a praça foram construídos com o mesmo número de cubos mais pequenos. A praça é duas vezes mais larga do que o cubo.

Quantos cubinhos são necessários para construir o monumento e a praça?

(Atenção: os dados não dizem que a praça só pode ter um "cubinho" de altura. O desenho é somente um esboço.)



a - nº de cubos por lado "do cubo"

b - nº de cubos por lado "da praça"

c - nº de cubos por altura "da praça"

"Tanto o cubo como a praça 'quadrada' foram construídos com o mesmo número de cubos mais pequenos". Logo, os volumes são iguais: $a^3 = b \times b \times c$ *(1)*

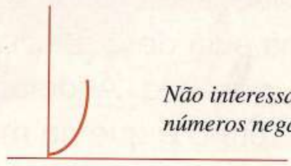
"A praça é duas vezes mais larga do que o cubo". Logo: $b = 2a$ *(2)*

Substituindo (2) em (1): $a^3 = 2a \times 2a \times c = 4a^2 \times c$, *logo* $a = 4c$

Se o c for igual a 1 cubinho serão precisos 128 cubinhos para construir o monumento e a praça.

Se o c for igual a 2 cubinhos serão precisos 1024 cubinhos para construir o monumento e a praça.

Se o c for igual a 3 cubinhos serão precisos 3456 cubinhos para construir o monumento e a praça.



Não interessam números negativos

Enunciado de um dos problemas e resposta de uma aluna habitualmente "fraca"

22 de Novembro de 1995

Cara amiga ,

Espero que esteja tudo bem contigo!

Aqui estou eu , no meio do ar, do céu, a viver algo que nunca imaginaria . Isto é fantástico!

Uma sensação de liberdade incrível! Cada vez me orgulho mais de ter conseguido vencer o prémio.

Tal como leste comigo no jornal são apenas 20 segundos de loucura.

O avião alcança os 7620 metros normalmente, depois em apenas 20 segundos atinge os 8840 metros, e aí se inicia o voo parabólico nos seguintes 20 segundos o avião alcança os 10060 metros e regressa aos 8840 metros. São nestes 20 segundos que se dá o fenómeno da microgravidade descrevendo uma parábola. A aceleração do avião neste momento, gera uma força contrária que é exercida pela gravidade, anulando-a. Como sabes o objectivo é esse mesmo: atingir as condições de ausência de gravidade e poder fazer ao mesmo tempo algumas experiências científicas.

Foi uma pena não teres concorrido também. Essa desculpa de não seres de Ciências é absurda, eu ajudar-te-ia e agora estaríamos juntos a viver esta magnífica experiência. Prometo-te quando chegar contar-te tudo, tudo...

Mil beijinhos

Resposta de uma aluna à última questão da ficha *Às cambalhotas num avião* (reproduzida na página seguinte na secção *Materiais*)

Nas duas horas de aula que se seguiram fui saltando entre estes quatro grupos fazendo sugestões e lançando perguntas, mas nunca indicando resposta nenhuma (esta é sempre a parte mais difícil para mim).

Durante as duas horas ninguém quis sair da sala. Os grupos terminaram o que lhes era proposto e estávamos todos visivelmente bem dispostos. Sobretudo eu. Tinha assistido a um acontecimento perfeitamente inesperado: uma das alunas mais fracas da turma tinha explicado ao grupo a resolução do problema e entregue um relatório perfeitamente organizado e muito bem justificado. Mas para perceberem a minha satisfação era necessário que tivessem conhecido antes esta aluna.

P.S. Por maior que seja o meu optimismo com algumas aulas, não posso deixar de pensar no que me disseram os meus alunos este ano no início das aulas: "Setora, não vote no PS! Acabámos de ouvir o Guterres dizer que, se formasse governo, as famílias podiam ficar descansadas porque os jovens iam ficar na escola desde manhã até ao fim da tarde".

Paula Teixeira
Escola Secundária da Damaia

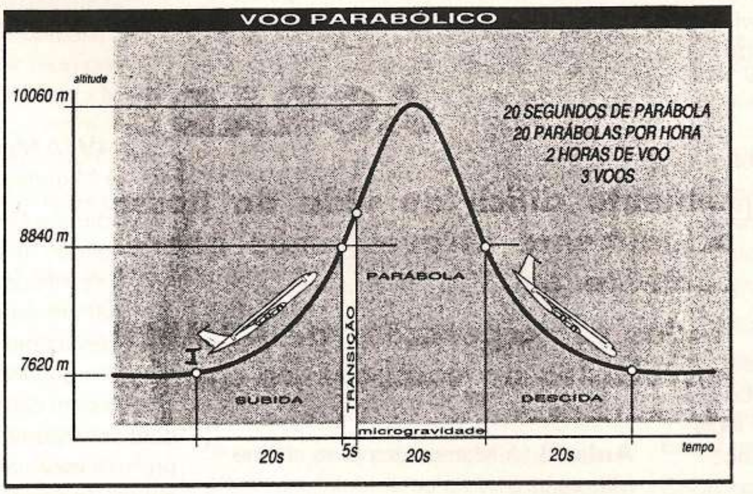
Escola.. Professor(a)..................................

Ano/Turma.................... Data....................... Aluno(a).......................................

Às cambalhotas num avião

Teresa Firmino

Flutuar no espaço e realizar uma experiência científica é o sonho de qualquer candidato a astronauta. É assim que os alunos das áreas ligadas ao aeroespacial imaginam o seu futuro. A Agência Espacial Europeia propõe-se realizar uma parte do sonho. Abriu um concurso para os estudantes sentirem a microgravidade e fazer ciência a bordo de um avião.



Os voos parabólicos, feitos em aviões ou foguetões, simulam as condições de quase ausência de gravidade verificada em órbita, através de uma trajectória especial dos aparelhos. Como mostra a imagem publicada, um voo destes tem várias fases. Primeiro, o Caravelle subirá até 7620 metros de altitude; a seguir, em apenas 20 segundos, atingirá os 8840, altitude a que se iniciará o voo parabólico propriamente dito. O avião subirá então até aos cerca de 10060 metros tornando a descer até aos 8840 em apenas outros 20 segundos, descrevendo uma parábola. E é neste curto intervalo que se criam as condições de mirogravidade pondo a tripulação a flutuar como se estivesse no espaço.

PÚBLICO, 30/4/94

Lê com atenção a notícia publicada no jornal *Público* de 30/4/94, "Às cambalhotas num avião", e observa o gráfico que descreve a trajectória do avião. Considera, para facilitar a leitura, o ponto I como origem da contagem do tempo.

1. Entre que instantes é produzido o fenómeno da microgravidade?

2. Em que instante se iniciou o voo parabólico? Em que instante atingiu o avião a altura máxima? Qual foi essa altura?

3. Designa por f a função que te permite descrever a trajectória do avião no período de microgravidade. Qual o valor de $f(20)$, de $f(35)$ e de $f(25)$?

4. Indica as coordenadas do vértice da parábola.

5. Tenta descobrir a expressão analítica da função f.

6. Confirma os valores que indicaste em 3.

7. A função f tem zeros? Quais? Terão algum significado neste problema?

8. Imagina-te nesta viagem e escreve uma carta a um amigo relatando-lhe o acontecimento. Descreve a emoção mas não esqueças também o fenómeno científico.

Actividade adaptada de uma ficha de trabalho de Adelina Precatado, Esc. Sec. Camões (Lisboa)

Depoimentos

Quando penso nas minh

Motivados pelo tema deste número da revista — a aula de Matemática — decidimos pedir a alguns professores de outras disciplinas e a alguns alunos depoimentos escritos através dos quais nos transmitissem os sentimentos e as ideias que lhes ocorrem quando pensam nas aulas de Matemática que tiveram (ou ainda têm). Pediu-se-lhes que escrevessem livremente, sem qualquer guião e sem tópicos previamente indicados. Recebemos três respostas — de duas professoras (uma de Biologia e a outra de Português) e de um aluno do 11º ano — que a seguir reproduzimos na íntegra. Apenas os títulos são da responsabilidade da Redacção de Educação e Matemática.

Não conheço bem nenhuma língua que me ajude a decifrar o que está naquele quadro...

Aula I [~1963] (A Matemática chama-se Aritmética)

Há carimbos grandes e pequenos. Escolho um grande cinco e um coelho pequeno.... preciso pintar, com lápis de cor, sem sair das linhas, o cinco grande que ocupa agora o canto superior à direita da página. É fácil. Depois carimbo cinco vezes o coelho pequeno. Cinco. A professora disse: "cinco, como os dedos da mão". Um, dois, três, quatro, cinco coelhos já pintados, cada um de sua cor. E uma linha comprida de sinais — números cinco — todos certinhos. Três riscos pequenos e uma barriga redonda, querem dizer: cinco. Muitos cincos. É fácil.

Aula II [~1967] (A Matemática ainda se chama Aritmética)

Revisões para a Prova: três Problemas e cinco Questões. Metros de tecido, preço por metro, lucro por metro, quanto lucrou o sr. Joaquim. Indicação à esquerda, Operação à direita. Arrobas de batatas, venderam-se três quintos, quantos quilos ficaram no armazém. Prova real pela operação inversa: está certo. Resposta sempre com uma frase completa. A mãe do António comprou sardinhas. Dois quarteirões de sardinhas. Quanto recebeu de troco. Indicação. Operação. Resposta completa. Prova real pela mesma operação. Está certo.Reduzir duas horas a segundos. Quantos lados tem um hexágono. Um ângulo obtuso. Reduzir quilos a decagramas. Quantas faces tem um cubo. Oxalá tenha Muito Bom.

Aula III (A Matemática já se chama Matemática)

Aprendemos Geometria no espaço. A professora desenha no quadro, em cima do estrado, e vê-se perfeitamente: três planos perpendiculares entre si, com letras gregas, com giz de várias cores. Os pontos, as rectas, as semi-rectas e os ângulos têm todos nomes de letras. Será que pode mesmo existir matemática sem números? Não percebo por que insistem em demonstrar o que é tão fácil de ver: se quaisquer três pontos não pertencentes à mesma recta definem um plano, então um ângulo maior que zero graus também define um plano, um ponto e uma recta que não o contenha também definem um plano. O caderno enche-se de desenhos: três planos, segmentos de recta em cada um deles e outros, suspensos no vácuo, com origem num plano e fim noutro. A sala é grande, há uma mesa para cada aluna e é difícil conversar sem a professora dar por isso. Modelos com arames, vidros e linhas coloridas vão passando de mão em mão. Só fechando os olhos consigo ver as semi-rectas rumando ao infinito.

Aula IV (A Matemática ainda se chama Matemática)

Aprendemos Geometria Analítica. Uma função matemática, poço sem fundo de infindáveis operações que terminam invariavelmente mal, afinal representa uma figura geométrica. Será a reconciliação dos traços e das curvas com os números, estará a obsessão do rigor enfim justificada? A professora é calma e compreensiva, autora do manual que usamos, e, sem dúvida, muito competente. A sala é grande, pelas janelas entra toda a luz de um dia após a revolução de Abril. Há ainda uma mesa para cada aluna mas o mundo está inteiro lá fora, à nossa espera, e conversa-se muito, baixinho. Não é culpa da Geometria ter, de repente, tão pouco interesse. Mesmo assim é curioso: considerando os dois eixos X e Y, tudo o que desenharmos nos quatro quadrantes que eles definem pode ser expresso em equações e em relações de intersecção e de reunião entre conjuntos.

Aula V (A Matemática chama-se Cálculo)

Derivadas. Na aula estão mais de cinquenta alunos. Muitos, como eu, a fazer a cadeira em atraso. Há ali reminiscências da Geometria Analítica, se bem que não veja a utilidade de saber o declive da tangente à curva da função em cada ponto. No entanto, faz sentido que uma constante tenha derivada zero: porque precisarei de o demonstrar? Conseguirei ter alguma cotação dando a resposta em mais

s aulas de Matemática...

palavras que expressões matemáticas? A professora acaba de dizer que os exercícios que vão sair no teste serão parecidos com os das aulas mas, naturalmente, mais difíceis. Só me resta voltar a estudar tudo do princípio, voltando aos livros do liceu. Mas nunca acreditarei que as rectas se curvam e que os infinitos se tocam.

Aula VI (A Matemática chama-se Estatística)

À hora de almoço há uma das aulas a que posso ir. Os colegas são bem mais novos do que eu e parecem perceber o que se passa no quadro. O anfiteatro é confortável e luminoso. Escrevo páginas e páginas de apontamentos que não entendo. Acredito que não daria pela falta de algum bocado de mensagem, se saltasse umas linhas de somatórios e módulos. Sinto-me solidária com Champollion perante a Pedra de Roseta mas não tenho tempo nem conheço bem nenhuma língua que me ajude a decifrar o que está naquele quadro.

"... e aí temos mais uma pessoa que, confessadamente, é um falhado em matemática. É triste que esses "falhados" se culpem a si próprios, em vez de se verem como pessoas razoavelmente competentes e inteligentes que foram expostas a um programa de aprendizagem desastroso. Então que lições podemos tirar da análise desta situação, que é, infelizmente, tão comum?"

Frances Clegg, *in* Estatística para Todos (Gradiva, 1995)

Paula Amaral,
professora de Biologia

A figura esbelta e erecta e aparentemente sisuda do primeiro dia de aulas...

A expectativa à porta da sala 1 do pavilhão II era grande. Íamos conhecer o(a) professor(a) de Matemática, a disciplina *papão*...

Finalmente tocou e entrou na sala, com o livro de ponto debaixo do braço, uma figura esbelta, erecta e sisuda. Seguimo-la calados, sentámo-nos e esperámos. O silêncio revelava a nossa ansiedade e ao mesmo tempo a nossa curiosidade em conhecer a professora da disciplina com mais tradição em "chumbos".

Ouvimos, então, a sua voz segura e grave. Apresentou-se e revelou-nos as "regras do jogo". Pareceu-nos muito rígida e exigente. Saímos com a sensação de que a nossa vida não iria ser fácil... e esta era a disciplina com maior carga horária!

Passou a segunda aula, veio a terceira, a quarta... a décima... a vigésima, e o entusiasmo à volta da Matemática foi aumentando, não porque as estratégias utilizadas fossem muito variadas e/ou inovadoras, mas sobretudo porque a exposição dos conteúdos era de tal modo clara e viva (vivida) que conduzia rapidamente ao passo seguinte: o prazer da descoberta na resolução dos exercícios propostos.

As aulas práticas eram uma constante e as mais activas: a magia dos números e a disponibilidade da professora em esclarecer dúvidas cativavam a maioria.

Criou-se um clima de sedução e de prazer que nunca teria existido sem a sensibilidade e delicadeza reveladas pela figura esbelta e erecta e aparentemente sisuda do primeiro dia de aulas.

Lurdes Gonçalves,
professora de Português

A aula de hoje até não tinha sido má...

"Triiiiiim". Segue-se a aula de matemática! O olhar dos alunos ganha uma expressão de desespero. "Bem, lá vamos nós ao castigo de hoje", ouve-se por entre suspiros. "Eu até nem desgosto de matemática", diz uma rapariga um pouco a medo. E prossegue: "é uma aula que destoa um pouco das outras. Não se está só a ouvir e a escrever. Obriga-nos a pensar". Um seu colega concorda: "é a minha disciplina preferida. Não sei porquê, todo o mistério dos números, das suas propriedades... fascina-me. Há sempre uma explicação, uma resposta para os problemas". Por alguns instantes a questão fica no ar.

"Vocês devem estar malucos. É a disciplina onde têm pior nota e é a que gostam mais?". "Nós não dissemos que gostávamos da aula, dissemos que a matemática nos fascinava", responderam os dois em uníssono. Perante o impasse foi um repetente que ficara calado até aí que concluíu: "O pá, a matemática é para crâneos". Fez-se um longo silêncio... todos concordavam.

A aula iniciou-se. Ponto 1: Correcção do tpc.

"Houve dúvidas no tpc?", atirou a professora para o ar. Uma das alunas, sentada ao pé da janela, olhou lá para fora. Não percebera nada do trabalho de casa, por isso, nem sequer tinha dúvidas. Contudo, dissera para si mesma que não passaria este exercício sem o perceber e por isso pôs o dedo no ar e respondeu: "eu tive dúvidas". Os colegas olharam para ela incrédulos: deve estar doida. Entretanto, a professora já enchera o quadro com números e letras, perguntando logo a seguir: "Agora percebeste?". A rapariga olhou para o quadro em desespero. "Desculpe lá, podia-me explicar como lhe deu x igual a 7". Agora o desespero passara para a expressão da professora. Apagou tudo e voltou a escrever o mesmo ainda mais depressa. A rapariga desistiu. Decidiu copiar o que estava no quadro mas não conseguiu acabar pois entretanto a professora precisara do quadro para escrever outra coisa.

Ponto II: "Abram o livro na página 125 e façam todas as alíneas".

Um dos repetentes olhou determinado para o livro e pensou para si mesmo: "hoje vou tentar fazer os exercícios". Ao princípio foi difícil mas lembrou-se que precisava da nota para passar e depois de perguntar algumas fórmulas aos colegas conseguiu fazer uma das alíneas. Deu 33. Certificou-se que era esse o resultado: era! Resolveu fazer todas as outras alíneas. A matemática começava a ter lógica na sua cabeça e isso dava-lhe imenso gozo. E foi com tristeza que ouviu a professora dizer "Pronto. Já tiveram imenso tempo. Quem não fez é porque estava a brincar!", e preparar-se para pegar no giz e escrever as respostas aos exercícios. Ele fez um imenso esforço para não olhar para o quadro e, entretanto, prosseguiu na tentativa de resolver as outras alíneas. Cinco minutos mais tarde, quando o rapaz já se encontrava na alínea f, numa das suas rondas pela sala a professora deu conta de que o aluno ainda não estava na página 140: "Então os exercícios que eu tinha pedido? Assim, como é que queres ter positiva! Ainda vais na página 125? Isso já foi há séculos, passa lá para os outros exercícios". Ao rapaz apetecia-lhe chorar, olhou para o lado e o seu colega fazia desenhos na mesa. Ele é que tinha razão quando um dia dissera: "Isso da matemática não é para nós. É só para marrões. Para quê dar-nos ao trabalho de dia após dia enchermos cadernos que no fim do ano vão para o lixo com expressões complicadíssimas que nunca usaremos na vida e cujos resultados já estão na última página do livro".

Ponto III: Nova matéria

Mais uma vez de giz em punho a professora enche o quadro mas desta vez com expressões cheias de letras que mais pareciam frases e a que chamara fórmulas. A primeira dúvida que assaltou os alunos foi: como é que alguém chegou a esta fórmula e não a outra qualquer? E, logo de seguida, outra muito mais pertinente: quando terei eu que usar esta fórmula e porque não usar outra qualquer? Uma breve explicação da professora em grande velocidade não serviu para tirar as dúvidas que ficaram no ar. Na verdade, apenas uma aluna conseguia (e com grande esforço) seguir a explicação da professora. E eis que detectou um erro! "Ali em x maior que 0 não devia ser maior ou igual?". A professora corou. Olha para o quadro, de novo para a turma e novamente para o quadro. De repente eis que toda a turma ficara calada pressentindo o nervosismo que se apoderara da professora. Finalmente uma aluna vencera a professora. Olhava triunfante para todos os lados da sala recebendo olhares de orgulho e de respeito, conseguira calar a professora. Esta respondeu a medo: "Pois... todos nós nos enganamos, não é verdade? Eu escrevo isto tão depressa... Mas eu vou ver aos meus apontamentos". Os alunos estavam finalmente alegres. A professora também se enganava e de agora em diante iam ter desculpa para os seus erros. Mas eis que toda a turma acalmou perante as declarações agora mais convencidas da professora, que voltava à carga: "Não, nos meus apontamentos está assim e eu passei isto dum livro que tenho lá em casa, portanto passem assim. Eu na mesma vou verificar e amanhã digo-vos". Estava a tocar. A aula de hoje até não tinha sido má, teria mesmo sido boa se a professora não terminasse com um: "Façam para tpc a página 167".

Pedro,
aluno do 11º ano

Materiais para a aula de Matemática

A actividade apresentada consiste numa adaptação de *Connecting Mathematics*, Addenda Series das *Normas* do NCTM, e foi proposta a alunos do 11º ano na sequência do estudo gráfico de diversos tipos de funções, sendo igualmente adequada para alunos que estudem este tema no 10º ano.

Durante a realização desta actividade, os alunos precisam de descobrir e alterar funções de modo a, por tentativa e erro, conseguirem encontrar as que verificam determinadas condições. Neste processo torna-se indispensável dispor de uma ferramenta gráfica, sendo a calculadora gráfica bastante adequada para o efeito. De facto, a calculadora gráfica não só torna possível a marcação dos pontos conhecidos e o traçar do gráfico de funções como permite desenhar circunferências, conhecidas as coordenadas do seu centro e o raio.

Não posso deixar de referir a surpresa de alguns alunos ao aperceberem-se da multiplicidade de funções que se adequam à situação inicial, bem como uma certa desilusão se descobrem que nenhuma das suas previsões corresponde à efectiva trajectória do cometa.

A última questão da actividade é idêntica à segunda, pelo que pode eventualmente ser deixada como trabalho de casa ou ser retirada... apesar da tranquilidade que traz aos habitantes de *Abcissa* !

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

Escola....................................... Professor(a)....................................

Ano/Turma.................. Data...................... Aluno(a)....................................

Emergência cósmica

Uma das estações espaciais do planeta estacionário *Abcissa* acaba de informar o centro de comando galáctico que detectou um cometa nas coordenadas galácticas (50, 50). O computador prevê que o cometa passe pelo centro galáctico de coordenadas (0, 0) dentro de duas semanas mas, devido a uma deficiente programação, não tem disponível qualquer informação quanto à sua trajectória.

- Procura encontrar expressões que possam corresponder à trajectória do cometa.

  Para cada uma delas investiga se haverá colisão com o planeta *Abcissa* que tem centro nas coordenadas galácticas (4, 3) e raio 2.

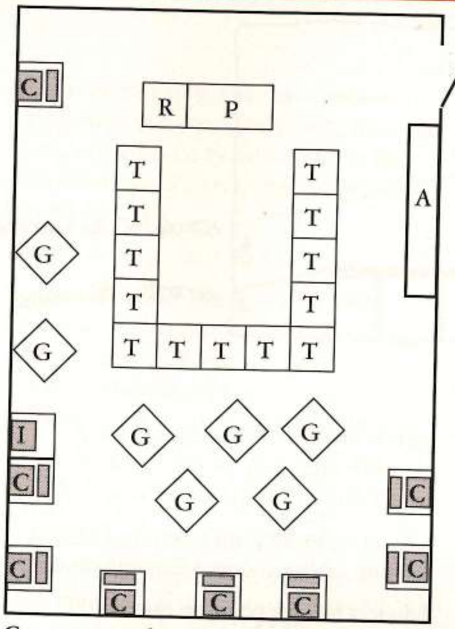
- Num contacto posterior, a estação espacial comunica que as actuais coordenadas do cometa são (40, 48) e que a trajectória seguida parece ser parabólica.

  Determina se haverá ou não colisão com o planeta.

  Se concluires que não haverá colisão, procura saber se o cometa passará muito próximo do planeta pois, se este passar a menos de um terço de unidade galáctica, provocará danos na flora e fauna do planeta.

- Houve um erro na transmissão das coordenadas do cometa, estas não são (40, 48) mas sim (40, 32). É portanto necessário repetir o estudo já efectuado.

Actividade adaptada de *Connecting Mathematics*, Addenda Series das *Normas* do NCTM



C - computador; I - impressora;
T - mesas para trab. com toda a turma;
G - mesas para trabalho de grupo
P - mesa da prof.; R - rectroprojector
A - armário

fig. 1

Susana e as sombras

Eduardo Veloso

Uma aula no ano 2002... Podemos imaginar mudanças nos programas e nas condições de trabalho dos professores, podemos imaginar até um Ministro da Educação que convença os seus colegas a trocar uma auto-estrada por equipamento escolar... Mas, em qualquer caso, a qualidade de uma aula dependerá sempre, essencialmente, da atitude do professor face aos seus alunos, em particular se acredita que é mais importante ouvir, do que ser ouvido.

Um pouco antes das oito da manhã, como de costume, a professora Guida entrou no café Helsínquia e dirigiu-se para a "sua" mesa do canto. Instantes depois, o café bem quente e o queque da praxe foram colocados sobre a mesa, e uns habituais bons dias afectuosos foram trocados com o empregado também habitual.

Guida olhou para o relógio e pensou que tinha apenas 20 minutos para fazer as últimas reflexões sobre a sua primeira aula do ano com a sua turma do 9º ano. Desde o 7º ano que era professora desta turma e sabia o acolhimento simpático que as suas alunas e alunos lhe iam dispensar neste recomeço do ano. Por esse lado tudo bem. Mas embora tivesse reflectido longamente, durante as férias em Agosto e nas primeiras semanas de Setembro, sentia que o seu plano para o próximo ano, relativamente a esta turma, não estava ainda muito claro.

Abriu a pasta, tirou uma caneta de tinta permanente e escreveu, no topo da primeira página do caderno novo: "Segunda, 23 de Setembro, 2002."

Ä frente, depois de hesitar um pouco, escreveu: "centro de interesse?". Aí residiam as suas principais dúvidas.

É preciso dizer que a Esc. 3+S de Alvalade tinha sido escolhida, juntamente com três das suas professoras, entre as quais Guida, para realizar uma experiência anual de inovação no ensino da Matemática. Na realidade, depois de um período de discussão de alguns anos sobre as reformas no ensino da Matemática, tinha-se chegado a um consenso sobre a necessidade de evitar as reformas globais, universais, cortando radicalmente com o passado, e os seus crónicos ajustamentos nos anos posteriores. A evolução no ensino da Matemática deveria ser resultado de contínuas e progressivas alterações do currículo, nas suas várias dimensões, para o fazer corresponder a um conjunto de necessidades e condições, elas próprias também em evolução contínua — novas perspectivas sobre a Matemática e sobre a formação inicial e contínua dos professores, mudanças nas condições de trabalho nas escolas, etc., etc.. Assim, seria todo o *sistema* da educação matemática que estaria permanentemente em transformação. Para acompanhar e tomar inciativas sobre essa evolução existiam grupos de trabalho regionais, nomeados pelo Ministério da Educação, e formados por representantes das Universidades (Matemática e Educação Matemática) e dos professores (APM e SPM). O principal motor dessa evolução do sistema eram experiências inovadoras no ensino da Matemática, realizadas todos os anos, e depois avaliadas, difundidas, e utilizadas na formação inicial e contínua dos professores.

Algumas experiências propostas para o ano lectivo 2002-2003 pretendiam estudar até que ponto, no 9º ano, poderia a existência de um "tema unificador" — como dizia a linguagem um pouco *dépassée* da proposta — despertar o interesse dos alunos e facilitar o ensino dos temas matemáticos próprios deste nível.

Guida e as suas colegas tinham aceite o desafio de fazer essa experiência com três turmas do 9º ano. E depois de muitas reuniões, ainda antes de férias, tinham escolhido como tema a Astronomia. Havia várias condições que favoreciam esta escolha: a escola tinha, desde há dois anos, um planetário insuflável; a Guida e uma outra das três professoras gostavam particularmente do tema, e já tinham alguns conhecimentos, resultado de curtas experiências anteriores; a escola tinha adquirido no ano anterior um programa de computador Voyager II, dedicado à Astronomia, e com o qual alguns alunos da turma da Guida já tinham contactado no 8º ano.

Tudo parecia portanto bem encaminhado. No entanto, Guida continuava com algumas dúvidas. Parecia-lhe um tema demasiado geral. Preferiria qualquer coisa mais "palpável", mais directamente ligada às vidas e experiências dos alunos. Mas o quê?

Olhou para o relógio e assustou-se: oito e vinte e cinco!. Pagou e correu para a escola, que era a dois passos. Na véspera tinha preparado os computadores da sala e instalado o Voyager II em todos eles. Na aula de duas horas do 9º ano — entre as 8.30 e as 10.30 — ia familiarizar os alunos com este programa, fundamental em tudo o que se ia passar durante o ano.

Às oito e trinta em ponto estava a entrar, com as suas 21 alunas e alunos, na sala 2.5, uma das salas da escola onde tinham sido feitas obras durante as férias, para corresponder às necessidades das experiências que se iam desenrolar este ano (ver fig. 1).

Pediu aos alunos que se sentassem nas mesas do meio, para uma conversa inicial com toda a turma. Havia algum barulho e muita confusão. Guida já contava com isso, na primeira aula. Esperou portanto com paciência que terminassem os reencontros e as exclamações perante as novidades da aula: "oito computadores!", "já viste o armário e os duais que nós construímos no ano passado?", "anda cá ver a impressora!", "olha um bengaleiro para pormos os kispos, até que enfim!", ...

Depois de todos se sentarem, Guida explicou a que se devia terem uma sala renovada. E descreveu em poucas palavras o que estava planeado para esse ano: qual era o tema principal a que se iam dedicar — a Astronomia —, por onde iam começar — a familiarização com o programa Voyager II —, e alguns pontos do programa — o estudo da esfera e da circunferência, um breve estudo das cónicas, sobretudo da elipse, a matemática da navegação, as coordenadas celestes, a representação plana da Terra, mapas e projecções.

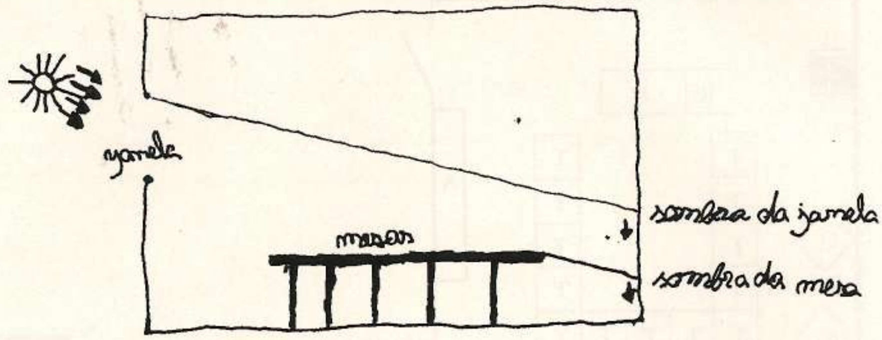


fig. 2

À medida que falava, ia olhando em torno da mesa. Sentia que os alunos estavam a ouvi-la com atenção, mas não mais do que isso. Esperava cruzar o seu olhar com o da Susana, uma das alunas mais interessadas dos anos anteriores, a quem o tema da Astronomia devia entusiasmar, dada a sua imaginação e curiosidade. Mas, para seu espanto, Susana parecia completamente distraída. Olhava fixamente para a parede à sua direita, e fazia medições com os dedos e a mão esticada, espreitando o relógio de vez em quando.

Guida: Susana, que se passa?

Susana: Acho que a sombra da janela vai apanhar a sombra da mesa daqui a vinte minutos, mas não tenho a certeza...

Todos os alunos pareceram subitamente despertos e interessados, tentando entender o que Susana estava a dizer. Guida compreendeu que não era possível deixar de interromper a conversa anterior. E disse: Explica no quadro o que estás a pensar.

Susana foi ao quadro e, enquanto ia fazendo um esboço da situação (ver fig. 2), disse: desde que me sentei que a sombra da janela na parede está a andar para baixo, e a sombra da mesa também; mas já percebi que a sombra da janela anda mais depressa que a sombra da mesa, portanto há-de apanhá-la, mais tarde ou mais cedo...

Guida volta-se para a turma: Estão a compreender o que a Susana disse?

Muitos alunos acenam que sim. E João acrescenta: continua a diminuir a distância entre as duas sombras, vê-se bem!

Guida: alguém sabe explicar porque andam as duas sombras a velocidades diferentes?

Apenas o braço do Carlos, além do da Susana, se levanta. Guida pede a Carlos para dar a sua explicação.

Carlos: acho que é porque a janela está mais distante da parede que a mesa.

Guida: Susana, que dizes da resposta do Carlos?

Susana: Concordo com o Carlos; queria só fazer aqui um desenho que mostra que, para duas posições do Sol, estes dois triângulos (ABC e A'B'C') são semelhantes, mas não são iguais, só seriam se a mesa estivesse à mesma distância da parede que a janela (ver. fig. 3).

Guida, para o resto da turma: alguém tem agora dúvidas? Todos acenam que não. Mas o Carlos acrescenta: já

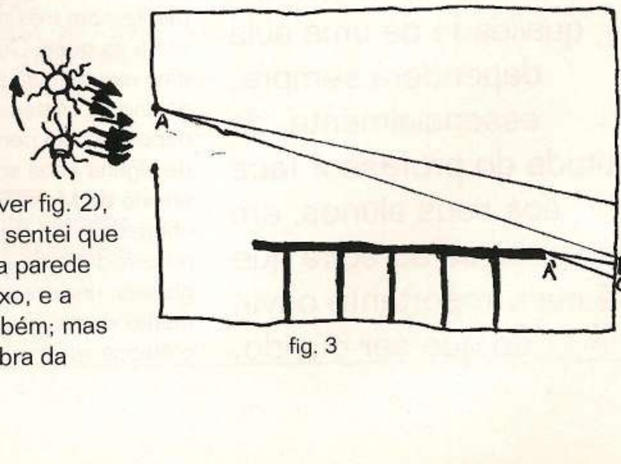


fig. 3

passaram dez minutos, as sombras estão cada vez mais próximas, mas como adivinhou a Susana que se iam encontrar daqui a mais dez minutos? E estará certo?

Guida: Susana, que dizes?

Susana: A certa altura, abri a mão e aproximei-a da parede até a distância entre as sombras ser um palmo. Fui tirando notas da experiência no caderno, como a professora Guida nos ensinou. Dois minutos depois, coloquei a mão no mesmo sítio e a distância era menos de um palmo, a diferença era um dedo. Como um palmo tem cerca de dez dedos, dá vinte minutos. É um pouco como aprendemos no ano passado que os romanos faziam. Mas gostava de saber fazer isto à séc. XXI!

Guida: A que horas fizeste a primeira observação?

Susana, olhando para o caderno: às 8h 37m.

Guida: faltam 3 minutos; vamos esperar para ver se a Susana acertou.

A sala estava agora completamente silenciosa. O espaço entre as sombras parecia diminuir mais rapidamente. Às 8h 58m, as sombras confundiram-se uma com a outra. Muitos alunos bateram palmas, enquanto outro dizia: Bravo, Susana, erraste apenas num minuto!

Guida tentou pôr um pouco de ordem na sala, mandou-os sentar de novo. Susana estava visivelmente satisfeita, e tomava notas no caderno sobre a conclusão da experiência. Um pouco depois, olhando casualmente para o bordo da sua mesa, que era a primeira do lado esquerdo da professora, exclamou: agora há uma sombra a correr sobre o tampo da mesa!

João: vamos medir aos palmos e calcular quando a sombra chegará ao fim da mesa!

Entretanto, Guida reflectia rapidamente. O seu plano para esta aula estava evidentemente posto em causa. Não tinha qualquer sentido insistir nele. Por outro lado, tinha-lhe acontecido aquilo por que qualquer professor decente de Matemática anseia: os

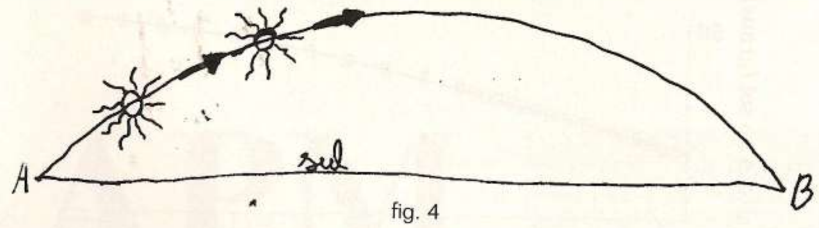


fig. 4

seus alunos estavam profundamente interessados numa questão que tinha, podia ela entrever, conexões importantes com vários temas da matemática. Era uma ocasião a não perder.

Guida: Bom, vamos realmente estudar o movimento dessa sombra, mas vamos utilizar vários processos e não apenas o dos romanos, como diz a Susana. Utilizaremos também computadores, que são processos do nosso século.

António: Stôra, há também uma sombra vertical a mover-se na parede!

Susana: É a sombra da parte lateral da janela.

Guida: Está bem, estudaremos também essa sombra, mas agora acabou; não quero saber de mais nenhuma sombra, duas já chegam para percebermos o fenómeno do seu movimento. Vamos trabalhar em grupo durante o resto da aula, mas antes quero discutir umas coisas com vocês. Em primeiro lugar, porque é que as sombras estão a mover-se?

Ana: Porque o Sol está sempre a andar durante o dia.

Guida: E porque razão a primeira sombra que a Susana estudou se estava a deslocar-se para baixo?

Vários: Porque de manhã o Sol está a subir!

Guida: Mas agora, é o mesmo Sol a subir, e a sombra está a andar sobre a mesa, sempre à mesma altura? Como explicam isto?

Alguns momentos de silêncio...

Guida: Onde estava a sombra cujo movimento a Susana mediu?

Teresa: Na parede... ah, já sei, o movimento da sombra tem a ver com o sítio onde ela cai; na parede, que é a direito (faz um gesto com a mão e Guida acrescenta: vertical) a sombra só podia descer ou subir...

Susana interrompe: e na mesa, que é horizontal, a sombra, coitada, apenas pode andar na horizontal!

Guida: Mas a sombra que o António descobriu é vertical, está na parede vertical, e está a deslocar-se de lado... como explicam isto?

Ana: Essa sombra é diferente, acontece porque o Sol, além de subir, está também a andar para o lado, durante o dia.

Susana: Nós vimos isso no ano passado, no planetário. Tenho aqui no caderno. O Sol faz uma curva no céu, de leste para oeste.

Guida: Susana, faz um desenho no quadro, para se ver melhor.

Susana no quadro, enquanto vai desenhando (ver fig. 4): esta é a curva que o Sol faz, nasce aqui para o lado do oriente, num ponto A, e põe-se para o lado do ocidente, no ponto B. Entre dois pontos, de manhã, como vemos, não só sobe, como anda para a direita. Isto mede-se com umas coordenadas, mas não me lembro dos nomes.

Guida: Alguém se lembra?

Carlos: Altura e azimute. Isso pode ler-se no programa *Voyager*, mas não sei bem o que são...

Guida: Susana, obrigado, podes sentar-te.

Guida projecta, com o data-show, uma janela do Voyager II, onde os astros, inclusivamente o Sol, podem ser referenciados por estas duas coordenadas. Explica o que são e onde se podem ler a altura e o azimute do Sol, e como é possível fazer variar a hora e ir lendo os valores da altura e do azimute.

Guida: Bom, o grupo do Carlos vai trabalhar com o programa Voyager, e responder aos pedidos que lhe façam os outros grupos. Depois preciso de dois grupos para ir trabalhar com o computador: vão usar o Cabri, que já

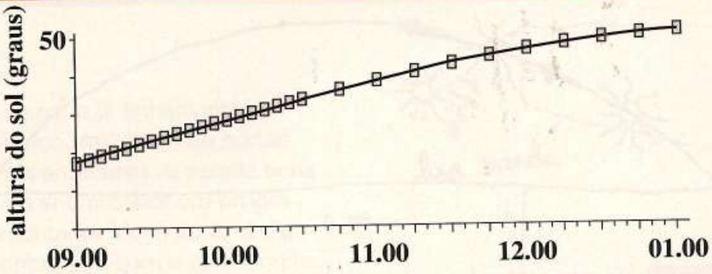


fig. 5

conhecem. Um dos grupos vai traçar um esquema que possa ser animado e onde se possa perceber o movimento da sombra sobre o tampo da mesa; podem usar uma tabela animada para calcular as várias posições da sombra sobre o tampo. O outro vai fazer o mesmo para a sombra vertical na parede. Os dados que precisarem sobre o Sol pedem por escrito ao grupo do Carlos. Outros dois grupos vão também estudar cada uma das sombras, também com computadores, mas utilizando o Excel para traçar as curvas de variação da altura e do azimute do Sol ao longo do tempo. Vão estudar a forma dessas curvas, para ver se podemos prever com algum rigor o movimento das sombras. Finalmente, outros dois grupos vão colar tiras de papel de cenário sobre o tampo da mesa e na parede, de modo a poderem medir e calcular a velocidade das sombras. Depois compararemos os vários resultados obtidos. Toca a trabalhar!

Utilizando toda a experiência da professora e dos alunos neste tipo de situações, o trabalho organizou-se rapidamente.

Guida olhou para o relógio: 09.40. Já não ia dar para terminarem tudo o que havia a fazer, mas podiam adiantar bastante e terminavam amanhã.

Os pedidos começaram a chover sobre a mesa do grupo do Carlos. Eram todos semelhantes. Um deles dizia: "Precisamos dos valores da altura do Sol, de cinco em cinco minutos, entre as 9.00 e as 10.30. Queremos os valores em graus, com três casas decimais. Despachem-se e escrevam de maneira que se perceba."

Guida começou a movimentar-se na sala, percorrendo os vários grupos. Tinha a grande vantagem destes seus alunos estarem já habituados a este tipo de situações, sabendo que deviam tentar resolver em princípio as dúvidas por si próprios. A certa altura, aproximou-se do grupo da Ana, um dos dois que estava a trabalhar com o Excel. Sabia que estes grupos iam precisar de mais apoio, pois embora já tivessem prática de folha de cálculo, não era neste tipo de situações. O grupo já tinha tabelado os valores da altura do Sol entre as 09.00h e as 01.00h da tarde. E tinha passado o gráfico correspondente para um programa de desenho. Guida ajudou-os a ver que entre as 09.00h e as 10.30h, que era o período que lhes interessava, o gráfico parecia uma linha recta, o que simplificava os cálculos. Desafiou.os a utilizarem o gráfico e a tabela para calcularem quando a sombra atingiria o fim da mesa. Guida dirigiu-se depois para o grupo da Susana, que estavam a fazer o mesmo tipo de trabalho em relação à sombra vertical.

Os grupos dos romanos, como os colegas lhes começaram a chamar, começaram a marcar a posição da sombra sobre o papel de cenário e a fazer medições, não aos palmos mas com réguas e compasso. Marcavam as posições das sombras e as respectivas horas, pelo que iam ficar com um registo da "realidade" para depois comparar com os resultados dos cálculos e dos desenhos dos outros grupos.

Os grupos que estavam a utilizar o Cabri fizeram também medições da altura da janela, das distâncias da parede da janela às bordas da mesa, etc. E depois discutiram a escala a utilizar para fazerem o desenho no ecrã. Passado algum tempo, apareceram os primeiros desenhos. Guida ia circulando entre os grupos, dando aquele tipo de apoio e estímulo que já era intuitivo depois de tantos anos a fazer este género de trabalho. Ao ouvir algumas discussões dentro dos grupos, percebeu a necessidade de, posteriormente, discutir uma série de questões geométricas implícitas na questão das sombras: porque eram as sombras do tampo e da janela paralelas? e porque era vertical a sombra da parte lateral? Se o que estivesse a produzir as sombras fosse uma lâmpada a curta distância e não o Sol, considerado a distância infinita, o que havia a alterar? Um verdadeiro programa de trabalho para os próximos tempos, pensou...

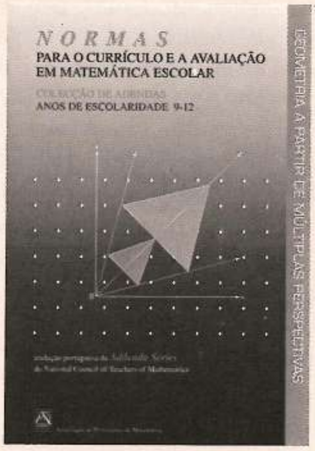
Cinco minutos antes do fim, Guida fez as últimas recomendações sobre o que deviam escrever para preparar os relatórios, os quais iriam ser completados depois da aula do dia seguinte, que era apenas de uma hora.

A seguir à aula, ainda antes de ir ter com as outras colegas, Guida foi tomar a bica do meio da manhã ao Helsínquia. Sentada outra vez na "sua" mesa, com o café à sua frente, abriu de novo o caderno e viu aí escrito: "centro de interesse?" Não hesitou, riscou o ponto de interrogação e escreveu à frente "sombras!". Graças à Susana e aos colegas, tinha encontrado o tal tema palpável, muito concreto, e ao mesmo tempo rico, que poderia unificar as experiências matemáticas de grande parte do 9º ano. Havia agora muito a trabalhar, para refazer o plano segundo esta perspectiva. Mas pensou que muito poderia ser aproveitado do plano anterior. E o trabalho não a assustava, pelo contrário. Estava desejosa de ir ter com as suas colegas da experiência ao Dep. de Matemática da Escola, para ver o que tinha acontecido nas outras duas turmas. Tinham todos os dias uma hora, entre as 10.30 e as 11.30, para fazer o ponto da situação. Quanto a ela, Guida, tinha já muito para contar. Respirou fundo, um novo ano estava a começar. Levantou-se decidida, e dirigiu-se para a escola.

Eduardo Veloso
Desenhos das fig.2,3 e 4 de
Tiago Sousa

Publicações APM

Normas Profissionais para o Ensino da Matemática
tradução portuguesa dos Professional Standards
do National Council of Teachers of Mathematics
Preço 3 000$00 (sócios 2 100$00)



Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas
Colecção de Adendas 9-12 às Normas do NCTM
Preço 1200$00 (sócios 850$00)

Dia-a-dia com a Matemática
Agenda do Professor 1995/1996
Preço 750$00 (sócios 550$00)

A Aprendizagem da Matemática e o Jogo
Preço 1750$00 (sócios 1250$00)

No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem).
As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%
de 2501$00 a 5000$00 - 15%
mais de 5000$00 - 10%

Entrevista com Leonor Vieira

"Na aula, não se pode parar"

Leonor Vieira foi professora de Matemática durante 38 anos. Primeiro, no antigo ensino liceal; depois, naturalmente, no ensino secundário. No início da sua carreira profissional, ensinou em Leiria e na Guarda. O estágio, realizado no Pedro Nunes, em Lisboa, entre 1958 e 1960, sob a orientação do professor Leote, teve uma influência muito grande na sua forma de encarar o papel do professor na aula. Depois do estágio, ensinou em África (Nampula), em Lisboa e em Braga. Aqui, em meados dos anos 60, leccionou durante quatro anos turmas piloto no âmbito da reforma da "Matemática Moderna". Um trabalho que prosseguiu no liceu Rainha D. Leonor, quando regressou e se fixou em Lisboa, tendo sido também orientadora de estágio. Em 1980, mudou-se para a então criada Escola Secundária de Benfica onde permaneceu até ao fim da sua carreira e onde voltou a ser orientadora. Entre 1989 e 1992, leccionou duas turmas no âmbito da pré-testagem dos novos programas no 3º ciclo, o que significa que esta professora esteve ligada a turmas experimentais de duas importantes reformas da Matemática escolar distanciadas cerca de 25 anos. Ao longo desta notável carreira, apenas durante um ano não deu aulas, quando trabalhou no Ministério na organização de acções de formação de professores. Um ano "muito difícil", em que lhe faltaram "aquelas caras daqueles miúdos quando descobrem coisas".

Hoje, Leonor Vieira já não dá aulas porque está reformada. Continua a sentir a falta do contacto diário com os alunos. Mas continua a trabalhar na área do ensino e aprednizagem da Matemática, sendo actualmente membro da Direcção da APM. A entrevista que amavelmente concedeu à Redacção de Educação e Matemática, e de que a seguir se apresentam as passagens consideradas mais significativas, foi conduzida por Paulo Abrantes e Henrique Guimarães.

P.A. - A Leonor viveu profissionalmente a reforma da matemática moderna dos anos 60. Do ponto de vista do que se passa nas aulas de Matemática, que diferenças é que a Leonor encontra? Não digo só entre os anos sessenta e agora. Mas que evolução dá a impressão de ter ocorrido no que é a aula de Matemática?

L..V. - É um bocado difícil de responder porque a evolução na aula também depende das pessoas, não é? Não é só pelas orientações que vêm das instâncias superiores, é pela maneira de ser das pessoas. Por exemplo, quando foi a experiência das turmas piloto [nos anos 60] começámos a trabalhar com os alunos em grupos. Não seria propriamente trabalhos de grupo mas eram trabalhos com os alunos dispostos em grupos. Havia já nessa altura um interesse muito grande em não lhes dar as coisas fabricadas, mas em serem eles a fabricá-las.

Se formos às instruções que vêm de cima, pensando nas turmas piloto dessa época, e nas de agora, não me parece que haja assim uma grande diferença. É claro que as aulas... Sinceramente não sei, porque cada um faz as aulas à sua própria maneira, não é? E há pessoas que, mesmo com estas instruções todas, continuam a despejar coisas num instante e a mandar os meninos fazer exercícios. E outros que não fazem isso, são incapazes de fazer, porque tiveram uma experiência de que gostaram e fazem de outra maneira.

Mas eu tenho a impressão que não posso dizer qual é a diferença entre as aulas antigas e as aulas modernas porque em todas as épocas houve pessoas que fizeram aulas muito interessantes e para desenvolver capacidades e outros que despejaram coisas para encher cabeças. Eu tenho a impressão que isso acontece em todos os tempos mesmo com os programas que agora temos e com as recomendações que lá estão.

P.A. - E os alunos são hoje muito diferentes do que eram?

L.V. - São, isso são. Eu tive sempre mais jeito para trabalhar com alunos mais velhos e durante muitos anos raramente tive outros níveis que não fosse o complementar. Quando vim para Benfica a escola ainda não tinha complementar portanto tive outros anos e notei que nos 7º, 8º e 9º que tive os alunos eram mais turbulentos, mais mexidos. Não sei porquê mas naturalmente têm maior liberdade já para trás, provavelmente é isso. E às vezes há dificuldades mesmo de fazer com que eles se concentrem no trabalho. Acho que há uma diferença grande.Também me parece que noutros tempos se fazia mais trabalho em casa e que agora as coisas se fazem um pouco mais no ar. Provavelmente, o efeito das televisões, etc. Claro que a televisão também é um meio para eles aprenderem coisas fora da escola, mas acontece que ficam com muito pouco tempo depois das aulas...

H.G. - E a nível da preparação matemática?

L.V. - Eu penso que também é mais fraca... Bom, há de tudo. Há uns que aparecem bem preparados e há outros que aparecem bastante fracos. Com as indicações que há uns anos vieram do Ministério, pressões para que houvesse sucesso, com preocupações estatísticas (risos), aconteceu que muitos alunos que provavelmente deveriam ter reprovado, vieram ter às nossas mãos com bastantes lacunas.

P.A. - Eu gostava de retomar uma

questão que é a seguinte. Compreendo muito bem o que a Leonor diz quando refere que no fundo uma grande parte das recomendações que se fazem hoje, com algumas "nuances" eventualmente já se faziam há alguns anos atrás. No entanto, hoje parece haver, por exemplo muito maior insistência na ideia de que os alunos devem trabalhar em grupo. Por outro lado, há calculadoras, há vários livros para escolher. Este tipo de coisas como é que se põem ao professor? Quer dizer, como é que a Leonor vê estes aspectos?

L.V. - Bom, realmente gostei da introdução da calculadora, gostei de trabalhar com as calculadoras com estes garotos de 7º, 8º e 9º. Dava-lhes oportunidades de pesquisa de algumas coisas, o que acho importante, e ficavam mais soltos para resolver os problemas. Pensar no próprio problema e não estarem com dificuldades a fazer cálculos e a perder tempo com isso.

P.A. - E a utilização dos livros?

L.V. - Os livros são talvez em demasia. Tenho ouvido colegas queixarem-se que têm imensa dificuldade em escolher um livro com critério porque são muitos. Nem tanto ao mar, nem tanto à terra, nem um só como dantes, nem tantos.

P.A. - Entre a matemática moderna e a reforma actual, houve muita coisa que entretanto se passou. Passou-se, por exemplo, o 25 de Abril, houve grandes mudanças na escola, houve tentativas de mudar os programas. Enfim, aconteceu muita coisa, não sei se a Leonor gostaria de comentar alguma.

L.V. - Bom, eu tenho a impressão... Eu nem sempre concordei com o que foi acontecendo. Por exemplo, eu lembro-me que nas turmas experimentais [da Matemática Moderna] nós tínhamos 6 horas por semana. Acho que os programas eram óptimos. Realmente o professor Sebastião e Silva era uma pessoa extraordinária com uma bagagem matemática e cultural muito grande e isso permitiu-lhe escrever aqueles livros, aqueles guias que eram muito úteis. E tinha sempre uma preocupação muito grande de fazer notar para que é que as coisas serviam.

Lembro-me, por exemplo, daqueles problemas de programação linear que se davam na altura. Eram problemas simplezinhos mas faziam com que as pessoas vissem para que é que se andava a estudar geometria analítica. Alguns colegas diziam que a programação linear não era aquilo e sei que tive algumas discussões sobre isso. Como achavam que aquilo não era nada, tiraram-na na primeira oportunidade. Acho que foi um erro. Eu sei que os problemas de programação linear serão mais complexos, simplesmente aqueles davam uma ideia de alguma utilidade do que se estava a estudar. Sem isso voltavam as dificuldades de responder aos alunos: "Para que serve a geometria analítica?" "O que é que andamos a estudar aqui?" Era uma coisa que para eles era muito abstracta e aquilo que concretizava, desapareceu.

É claro que houve a redução para 5 horas e os programas também eram extensos nessa altura. Mas eu tenho a impressão que foram sendo retiradas algumas coisas que eram realmente importantes.

Por exemplo, outra coisa sobre a qual eu tenho dúvidas é se o que ficou da geometria, no 7º, 8º e 9º, era o que devia ficar ou não. A maneira como ficaram as transformações geométricas não me parece que tenha sido grande coisa. Não havia tempo para as fazer com instrumentos de desenho, o que talvez fosse adequado para aquelas idades, e depois pretendia-se fazer demonstrações que às vezes eram círculos viciosos...

P.A. - Leonor, já que falou na geometria, hoje, por exemplo, parece haver um certo esforço de alguns professores para a valorização de materiais que os alunos possam manipular. Acha que isso é uma coisa relativamente nova ou não? Isso traz alguma coisa de novo para a aula?

L.V. - Eu não sei a que tipo de materiais se refere. Há materiais que já eram usados quando entrei para o estágio em 1958...

P.A. - Por exemplo?

L.V. - O geoplano. O geoplano, material cuisinaire, e coisas assim... Por exemplo, sei lá, as barras do mecano... Lembro-me que quando andava no estágio havia uma preocupação em usar materiais... enfim, para visualizar algumas coisas, particularmente na geometria, mas também na aritmética. Havia um livro nessa altura, que tinha algumas ideias sobre concretizações diversas, por exemplo um método para ensinar o algoritmo da raíz quadrada que depois de experimentar, quando era estagiária, nunca mais deixei de utilizar. Era com quadradinhos que faziam aparecer o

algoritmo com facilidade. Portanto penso que, em relação ao tempo do meu estágio, não há grandes diferenças.

P.A. - Mas a ideia que eu tenho é que por alturas de setenta e tal, oitenta, a utilização dos materiais era quase nula.

L.V. - Mais uma vez isso dependia das pessoas. Também estou convencida que a maioria não fazia isso. Aquilo de que eu ainda agora lhe falei, da raíz quadrada com os quadradinhos, era uma coisa que meia dúzia de pessoas fazia, mas o resto não. O geoplano depois perdeu-se... Era feito com pregos e aqueles pregos arranhavam, tornou-se um instrumento de agressão às vezes dentro da aula (risos). Mas realmente sempre houve pessoas que não gostavam da utilização de materiais e penso que continuará a haver.

H.G. - Nunca sentiu que queria fazer coisas mas que não podia porque os programas não permitiam?

L.V. - Há uns anos, quando apareceu o [o computador] Spectrum e começou a haver possibilidades de usar uns programazitos de matemática, tive ocasião de fazer estudar funções trigonométricas e os respectivos gráficos. Tinha uma turma do 12º ano muito fraca mas que tinha muito poucos alunos e eu fiquei com a turma exactamente para ver se conseguia dar a volta aquilo. Foi o primeiro ano em que fiz a experiência de levar os alunos para o computador. Como eram poucos, eu pude pô-los a trabalhar com o Spectrum usando algumas fichas com indicações do que eles deveriam procurar ver e a seguir inferir. Foi engraçado ver que aqueles alunos tão fracos, nunca tiveram problemas em determinar períodos de funções trigonométricas, contradomínios, etc... Tive pena de não poder fazer isto com as outras turmas. Consegui com estes porque eram poucos alunos. Quando havia os computadores do Minerva, ainda lá podíamos ir de vez em quando, e levar meia dúzia de alunos mas depois aquilo passou tudo para as tecnologias e o horário dessas aulas está completamente cheio.

Sobre outro tipo de experiências, eu nunca fui muito para isso. Fui mais para cumprir aquilo que me mandavam fazer (risos) e não fiz assim experiências fora dos programas ou do que estava pensado, não fiz...

P.A. - A Leonor disse, e parece-me indiscutível, que há coisas que não são de agora. No entanto, a ideia que se tem das aulas de matemática dos anos 60 ou 70 é que não eram aulas de discussão ou de trabalho em grupo, ou de utilização de materiais. Será que um dos desafios que hoje temos é tentar promover um ensino da matemática que num certo sentido sempre houve em casos pontuais ou para elites e queremos agora fazê-lo para todos?

L.V. - Penso que sim, que é isso. E que há hoje mais pessoas a tentarem esses métodos, isso parece-me que sim. Basta lembrar que os programas antigos não traziam senão conteúdos, mais nada, não traziam indicações nenhumas sobre métodos. As pessoas quando começavam sem ter feito o estágio antes (que foi o meu caso) tinham a preocupação de expor tudo muito bem, que os meninos fizessem os exercícios. Também fiz a mesma coisa, nos primeiros anos que eu ensinei, um bocado por imitação do que eu tinha recebido, do que eu tinha visto na Faculdade.

Quando comecei a dar aulas era muito diferente de quando saí do estágio. Quando vi o Dr. Leote a dar aulas aprendi que se podia fazer de outra maneira e que era muito mais interessante fazer de outra maneira. Mas realmente houve pessoas que não tiveram a sorte de ter o metodólogo que eu tive e não havia indicações do ministério. Havia os inspectores que vinham assistir às nossas aulas, frequentemente, e depois saiam das aulas e não nos diziam nada. Ao menos podiam dizer qualquer coisa (risos). Escreviam, escreviam, escreviam e nós íamos olhando, eles a escrever e depois nada.

P.A. - Pensando na aula de Matemática, a Leonor vê vantagens em que a aula de Matemática, como acontece nalgumas disciplinas, seja feita num certo tipo de sala, uma sala diferente das outras? Ou isso não lhe parece uma coisa muito importante?

L.V. - No Pedro Nunes havia salas de Matemática... Tinham um ambiente especial e tinham as coisas ali à mão... Materiais que... que era preciso utilizar e estavam ali à mão. Mas eu não vejo um interesse especial em haver uma sala própria para a Matemática... Não acho que seja essencial.

P.A. - Desde que as pessoas tenham acesso a... materiais...

L.V. - Sim, se os materiais forem ter à sala, qualquer sala pode servir... No Pedro Nunes havia um corredor que tinha quase só aulas de Matemática, mas havia uma sala própria da Matemática com os armários e as vitrinas onde as coisas estavam...

É importante que haja possibilidade de mudar a disposição das mesas onde os alunos estão...

P.A. - E a prática, que antes não era tão comum e agora já é mais frequente de de haver aulas de Matemática com duas horas seguidas?

L.V. - Eu não tenho muita experiência das duas horas seguidas de Matemática. Quase sempre tive as horas isoladas... Depende das horas do dia. Se são turmas do turno da tarde e são as duas últimas horas, acabam por não render nada. Os alunos estão cansadíssimos e já não fazem nada. Quando foi a experiência do novo programa do 7º ano, sugerimos que se fizesse isso por causa dos trabalhos de grupo. Para trabalho de grupo, penso que há vantagens nas aulas de duas horas, mas era preciso que não fossem as tais duas últimas horas do turno. Mas acho mais importante o trabalho com meia turma, alternando com outra disciplina, como já se fez nalgumas escolas.

P.A. - A Leonor acha que é muito diferente dar aulas no terceiro ciclo e no secundário?

L.V. - Há uma diferença muito grande. É muito mais complicado dar aulas a alunos do 3º ciclo do que do Secundário.

P.A. - E isso tem a ver com as idades dos alunos?

L.V. - Tem a ver com a idade dos alunos... Naquelas idades dos 12, 13, 14 anos... Realmente são idades de mudança... É mais difícil por causa do comportamento...

H.G - Voltando à questão dos alunos serem diferentes. Acha que os alunos de hoje gostam menos de Matemática ou têm uma atitude mais relutante em relação à Matemática?

L.V. - Penso que desde sempre houve a ideia de que a Matemática era uma coisa muito complicada e alguns alunos apareciam já com a ideia de que não iam gostar de Matemática. Isso não é de agora, acho que foi sempre assim. Sempre houve essa ideia de que a Matemática é um bicho de sete cabeças.

H.G. - A ideia que dá é que isso não tem muito a ver com a Matemática... Sempre houve atitudes...

L.V - Tem e não tem. Realmente, quando se usa a Matemática para fazer selecção... dos alunos... Este papel de seleccionador faz com que as pessoas tenham mais medo... Talvez por não se praticar... a resolução de problemas que é uma novidade de hoje nos programas. Penso que torna as coisas mais interessantes... Há alunos que aderem muito bem, outros que ficam... Não sei, não sei muito bem qual é o efeito, mas dá-me ideia que continua a haver, como sempre, uns que gostam muito e outros que... A Matemática acaba por ser de extremos. Uns que detestam outros que gostam muito. É impossível tornar as coisas agradáveis a uns e a outros mas às vezes consegue-se para alguns.

Alguns alunos continuam a gostar mas realmente há outros que perdem o interesse. Porquê não sei, mas às vezes tem a ver com o gostar ou não do professor que lhes ensina Matemática.

P. A. - E a preparação dos professores é uma coisa muito crítica...

L.V. - Tem uma influência muito grande...

P.A. - E a Leonor quando fala na sua experiência do estágio mostra bem que a formação acaba por ser um momento decisivo... E a época que passámos fez entrar no sistema uma quantidade de professores que não teve acesso a nenhuma preparação.

L.V. - Uma das coisas mais importantes é a pessoa ver. Até mesmo que não seja bom. Em França assisti a uma aula dum professor que esteve toda a aula expondo e escrevendo muito bem no quadro, sempre. E era considerado um bom professor porque se não, não nos tinha deixado assistir à aula dele. Os alunos faziam tudo menos olhar para lá, não tomavam sentido nenhum, lançavam papelinhos uns aos outros, faziam trinta por uma linha. Isto ao nível dos alunos que aprendiam trinómios do 2º grau, do nível do nosso complementar. Não ouviram nada do que o professor disse durante a aula toda. E o professor esteve ali a escrever e a expor muito bem, muito direitinho, aquilo tudo, mas eles não aprenderam nada nem tomaram atenção nenhuma. Era considerado um bom professor, porque em França eles eram um bocadinho pela a elegância da exposição... Davam ênfase à elegância da exposição, mas os alunos é que não ouviam nada.

P.A. - A Leonor assistiu a aulas em França e em mais países?

L.V. - Não, só em França... E, das aulas a que assisti em França, lembro-me de uma que gostei imenso. O professor tinha uma grande vivacidade, dava a volta às coisas, expondo-as de tal maneira que os alunos estavam interessados, e toda a gente participava.

P.A. - Tirando esse caso mais especial, não diria que as aulas eram melhores que as portuguesas ?

L.V. - Não, não eram. Eram iguais e às vezes piores (risos).

H.G. - Tendo já deixado de dar aulas, o que é que teve pena de deixar. De que é que sente falta?

L.V. - Durante estes anos todos houve um ano em que eu não dei aulas. Um único ano, nestes trinta e oito. Foi um ano em que eu tive que fazer acções de formação para professores, estive a trabalhar no Ministério com a Yolanda e a Maria Inês e fiquei com a dispensa total de serviço. Foi um ano muito difícil para mim, porque me faltava, sabe o quê? As caras daqueles miúdos quando descobrem coisas. Aqueles olhinhos a brilhar (risos). Fazia-me falta isso. Aquele contacto com eles para mim era essencial. Uma coisa de que eu gostei muito. Acho que era isto que eu devia fazer. E faz falta, realmente isso faz um bocadinho de falta quando uma pessoa se reforma.

P.A. - Apesar que se diz, e com alguma razão, que é uma profissão muito desgastante.

L.V. - Sim. O desgaste é muito grande. Há várias coisas que contribuem para esse desgaste. Não é só a preparação das aulas que talvez até seja o mínimo. É o termos que estar atentos e actuantes durante aquele tempo todo em que estamos lá. São os toques da campainha, agora sai, depois entra. Tudo isso contribui para o desgaste. Ter que se estar sempre atento e sempre em situações novas, ter que resolver problemas novos. Não é a mesma coisa, penso eu, que um trabalho de escritório em que a pessoa pode variar de vez em quando, parar um bocadinho, etc. Na aula, não se pode parar...

A importância de inserir a preparação das aulas no contexto de uma planificação a longo e a médio prazo

Alexandra Virote
Graciosa Veloso

A actividade de preparar as aulas tem a ver com um determinado professor e um determinado grupo de alunos. Mas ela ganha uma nova dimensão se for inserida no contexto de um planeamento a longo prazo (que permite construir uma visão global do trabalho ao longo do ano) e de planificações a médio prazo (que incidem sobre unidades programáticas e estabelecem um eixo orientador para cada unidade). E nestas, a importância do trabalho de grupo, entre professores, pode ser muito grande. O processo de planificação tem assim uma vertente de reflexão individual e outra de reflexão de grupo, ambas insubstituíveis.

A discussão de determinadas questões é bastante mais viva, natural e perceptível quando se apoia em experiência já vivida. Este artigo contém algumas reflexões inerentes à preparação de aulas. Exemplifica o trabalho que realizámos a nível de planificações, mais concretamente a relativa ao estudo da proporcionalidade inversa como função, no 9º ano de escolaridade.

No ano lectivo passado trabalhámos na mesma escola, no âmbito do estágio pedagógico. A existência de um clima de trabalho de equipa entre orientadora e estagiárias permitiu uma discussão em conjunto, uma reflexão mais proveitosa e uma tomada de decisões mais sólida e madura sobre o mais variado tipo de questões em particular no que respeita à preparação de aulas.

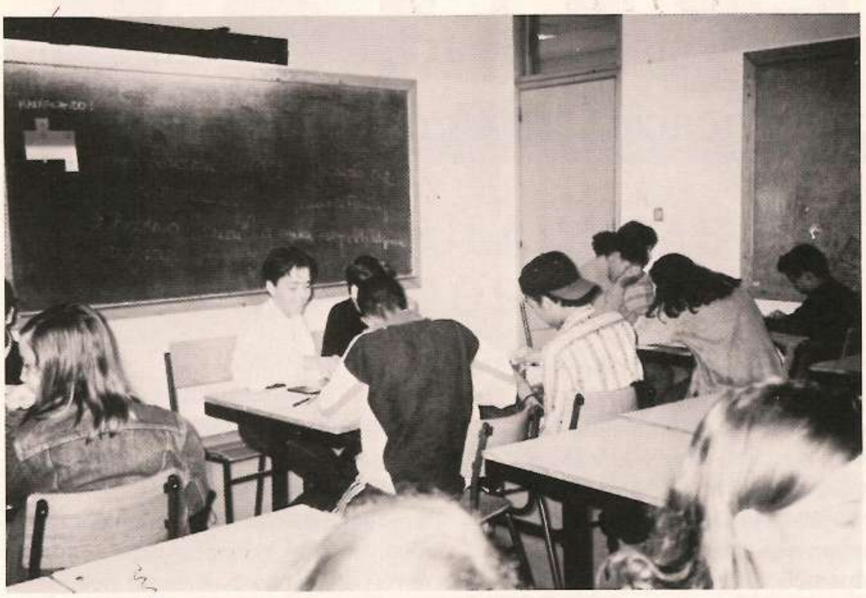
No início do ano, antes de começarem as aulas, com base no "Plano de Organização de Ensino-Aprendizagem", elaborámos a planificação de longo prazo. Nesta altura e após termos verificado que era impossível cumprir o programa na totalidade, seleccionámos os objectivos curriculares relativamente aos alunos que iam terminar o período da escolaridade obrigatória. Este planeamento consistiu resumidamente em equacionar e responder às seguintes questões:

- quais os objectivos prioritários relativamente às aprendizagens dos alunos; - como organizar uma sequência dos temas programáticos de acordo com as prioridades referidas anteriormente; - como proceder a uma distribuição do tempo, tendo em linha de conta os dois aspectos anteriores. Nesta fase procurou-se definir também algumas linhas orientadoras relativamente à distribuição de cada tema pelos anos do mesmo ciclo.

A interpretação de gráficos e a matematização de situações da realidade utilizando funções foram aspectos que mereceram logo a nossa preferência. Para além da importância de todos os conceitos matemáticos envolvidos neste tema, pensámos que também seria uma boa oportunidade para que os alunos discutissem intuitivamente ideias matemáticas melhorando o seu discurso e desenvolvendo competências no campo das aplicações da Matemática.

Esta primeira planificação permitiu construir uma visão global do trabalho ao longo do ano, o que significa que, por exemplo, se tenha consciência das prioridades definidas e dos diferentes tipos de actividades a realizar. A tomada de decisões fica melhor sustentada, pois torna-se mais fácil decidir que "cortes" têm de ser feitos no programa caso surjam situações inesperadas, provocadas por exemplo por uma redução do tempo de trabalho.

Uma vez realizada a planificação para o ano, e com base em manuais escolares, literatura de Educação Matemática e materiais vários, passou-se à fase da elaboração do plano relativo à unidade das funções. A nível de objectivos demos maior ênfase à representação e interpretação gráfica. Ao planificarmos este subtema concluímos que deveríamos



incluir actividades que permitissem trabalhar em grupo, que valorizassem a discussão, o raciocínio matemático e que promovessem a comunicação matemática. As situações contemplavam fenómenos da realidade, de outras ciências ou da própria Matemática. Achámos necessário conhecer a experiência anterior dos nossos alunos quanto à representação e interpretação gráfica. Como a maioria deles já tinha neste campo experiência do ano anterior, com colegas nossas estagiárias, preocupámo-nos com que as propostas deste ano dessem sequência à experiência já realizada. A preparação das aulas que fizemos procurou ter em conta os objectivos que tínhamos privilegiado para a unidade de funções e as preocupações pedagógicas já manifestadas. Por decisão do grupo esta unidade didática foi trabalhada no 2º período, tendo incidido sobre a proporcionalidade inversa e a representação gráfica. O quadro 1 apresenta os aspectos que orientaram a planificação exemplificada.

As planificações de médio prazo incidem sobre unidades programáticas e visam estabelecer um eixo orientador intrínseco à unidade e relacioná-la com o planeamento de longo prazo elaborado anteriormente. Nesta fase procurou-se também inventariar as aprendizagens anteriores necessárias para a unidade que se ia iniciar. Uma vez efectuada esta planificação a médio prazo, em cada aula iriam ser trabalhados fragmentos desse todo. Não podíamos perder o fio condutor da unidade já pensada e procurámos que cada aula tivesse também um significado próprio a nível das aprendizagens e do ensino. Uma vez elaborados estes dois tipos de planificação, em equipa, passámos a um trabalho essencialmente individual de operacionalização de cada aula. Justifica-se esta prática individual, por dizer respeito já a um nível de trabalho mais pormenorizado e personalizado a nível de turma, de alunos e da própria professora.

A título de exemplo apresentamos a ficha de trabalho nº 17, "Proporcionalidade Inversa", que foi adaptada de um livro sobre funções e gráficos pelo núcleo de estágio. Foi nosso objectivo que os alunos desenvolvessem as capacidades de interpretação e de representação gráfica, nomeadamente no que diz respeito à compreensão de fenómenos da realidade e de diferentes tipos de curvas. Os alunos resolveram-na em grupo e depois de já terem sido trabalhados alguns aspectos da linguagem gráfica.

Para terminar e em jeito de síntese, gostaríamos de realçar os aspectos do processo de planear e planificar a actividade curricular no que diz respeito à sua componente lectiva, que para nós tiveram maior significado. Em primeiro lugar pensamos que, por mais experiência que se tenha, o processo de ensino-aprendizagem tem de ser orientado por um conjunto de objectivos e de meios que devem ser explicitados através de uma reflexão crítica e flexível. Crítica, porque deve ter em conta as concepções próprias do professor relativamente à Matemática, à aprendizagem e ao ensino, de par com as orientações curriculares gerais. Flexível, porque deve ter presente que um plano é um guião de uma prática que, para além do professor, envolve cada aluno e o grupo turma.

Um segundo aspecto que nos parece muito importante é o de inserir o plano da aula num contexto mais geral de planificação de uma unidade. Ao darmos maior destaque a esta planificação estamos a valorizar a reflexão sobre os aspectos principais a nível de objectivos e de conteúdos de cada unidade. Deste modo, o plano de cada aula, que também deve ser feito, além de valer por si, vale como fragmento de um todo. Nesta óptica, o professor poderá ganhar flexibilidade relativamente à execução da aula, pois com a integração desta num todo, não está mais do que a antecipar a possibilidade de introduzir alterações que possam surgir provocadas por exemplo por intervenções de alunos ou por acontecimentos pertinentes.

Um terceiro aspecto prende-se com a importância de articular no processo de planificação, as vertentes de reflexão individual e de grupo. Em limite podemos afirmar que é para nós tão importante que as planificações de médio e de longo prazo sejam feitas em grupo, como que o plano de aula seja feito individualmente.

Alexandra Virote
Esc. Sec. Braancamp Freire (Pontinha)
Gaciosa Veloso
Esc. Sec. Nº1 de Loures

Quadro 1 - Representação gráfica de funções, proporcionalidade inversa, 9º ano

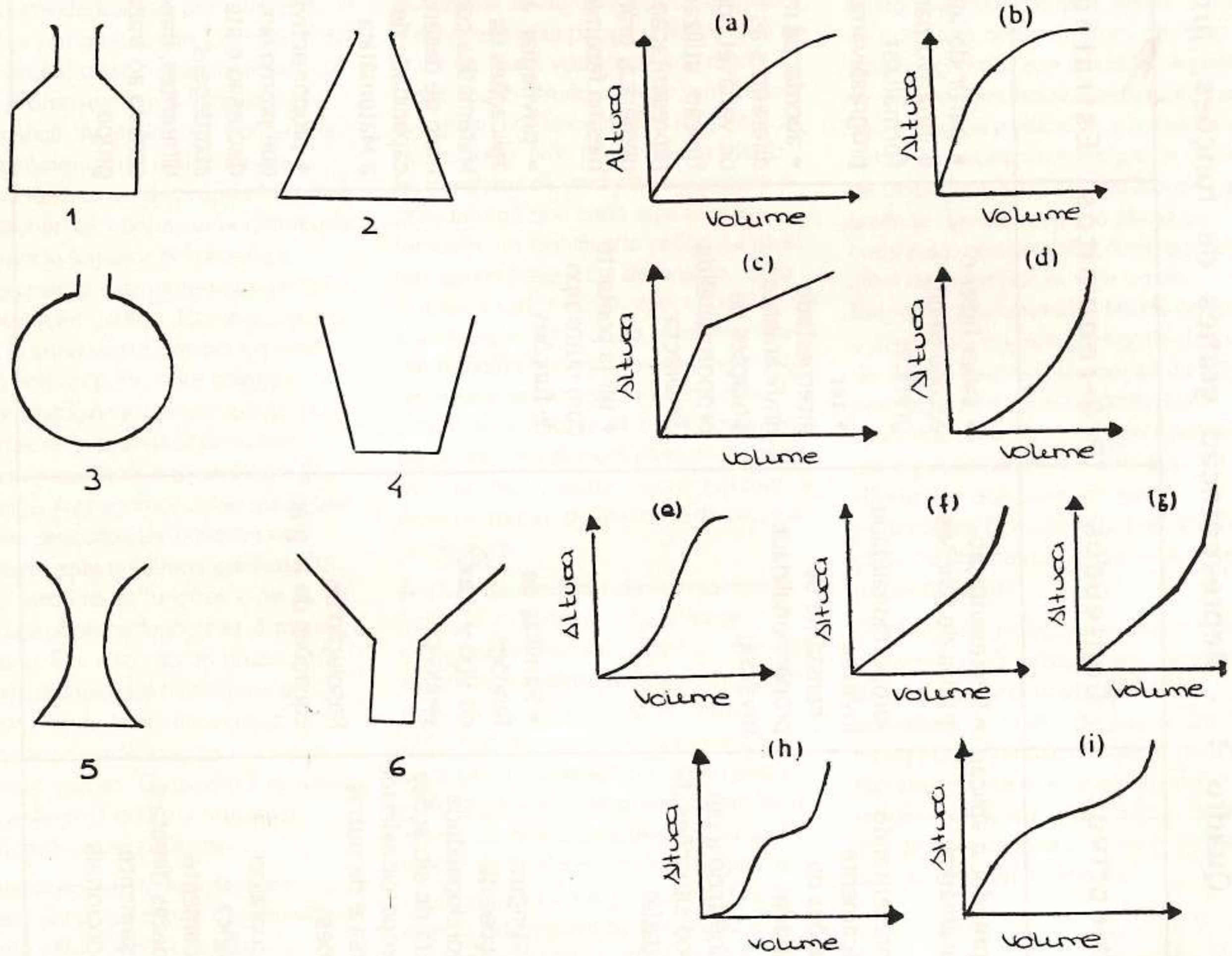
Objectivos	Conteúdos	Pré-requisitos	Estratégias	Materiais organizados e recursos	Avaliação
• Aprender a aplicar a Matemática: - representando graficamente situações da realidade; - associando a um gráfico situações da realidade; • Distinguir situações de proporcionalidade directa de situações de proporcionalidade inversa e de outras funções • Reconhecer numérica e graficamente grandezas directa e inversamente proporcionais	• Representação gráfica de funções -proporcionalidade inversa - constante de proporcionalidade inversa; • Famílias de funções do tipo $y = ax^2$, $y=ax^2+c$ Resolução de equações do 2º grau	• saber fazer o esboço de um gráfico; • ter interpretado graficamente situações de proporcionalida de directa; • ter já contacto com outro tipo de funções	• partir do informal e intuitivo para formalizar progressivamente ; • abordar de modos diferentes as ideias de variável, de função, utilizando a representação numérica, gráfica do mesmo fenómeno. • privilegiar as aplicações da Matemática como meio de desenvolver a capacidade de aplicar a Matemática • propor actividades que promovam discussão e até abordagens diferentes, dando sentido ao trabalho de grupo	• 5 fichas de trabalho • calculadora gráfica ou computador	• Apreciação de cada aula • Relatório de grupo sobre actividades de exploração • Teste individual

ESCOLA SECUNDÁRIA Nº1 DE LOURES Ficha de Trabalho nº17 PROPORCIONALIDADE INVERSA	MATEMÁTICA 9º C Fevereiro - 95.

A seguir estão desenhados 6 garrafas e 9 gráficos que relacionam a altura com o volume da garrafa. A cada garrafa corresponde um único gráfico.

1. Escolhe o gráfico correcto para cada uma das garrafas e explica as tuas respostas.

2. Para os três gráficos que restam constrói as garrafas que lhes correspondem.



Ficha de trabalho sobre "Proporcionalidade inversa" referida no artigo de Alexandra Virote e Graciosa Veloso

Para este número seleccionámos

O conteúdo intelectual das salas de aula da reforma

Walter G. Secada, Sherian Foster, Lisa Byrd Adajian

O texto que incluímos hoje em Para Este Número Seleccionámos é uma tradução de parte de um artigo publicado originalmente no NCRMSE Research Review — The Teaching and Learning of Mathematics, vol.4, nº1, 1995, uma revista do Center for Education Research da Universidade norte-americana de Wisconsin-Madison. No artigo, cujo título original é "Intellectual Content of Reformed Classrooms", os autores dão conta dos parâmetros de observação de aulas que foram criados por um projecto que visa estudar o que se passa efectivamente em aulas de professores que alegadamente seguem um currículo renovado e uma prática inovadora de ensino da Matemática.

Como o próprio texto afirma, pode-se observar uma variedade muito grande de aspectos quando se vai assistir a uma aula. A preocupação destes parâmetros é estabelecer quais são os principais aspectos a observar (e a avaliar) quando se está interessado no "conteúdo intelectual" da aula. Neste sentido, o texto pode constituir um interessante elemento de reflexão e discussão entre nós e, muito especialmente, entre todos aqueles que desempenham funções que implicam observação, análise e discussão de aulas.

A tradução diz apenas respeito à parte do artigo que explicita o significado de cada um dos 10 aspectos que, no seu conjunto, permitem avaliar o "conteúdo intelectual" da aula. Mas é importante referir que, na parte final do artigo, os autores chamam a atenção para o facto de que não se está a afirmar que em todas as aulas se possa (ou mesmo se deva) verificar uma pontuação alta relativamente a todos os 10 parâmetros — o que é, como dizem, uma "questão empírica". No entanto, acrescentam que este método sistemático de observação tem-se revelado útil ao ajudar os investigadores a focar a sua atenção no conteúdo intelectual da aula, a compreender como é que alguns professores conduzem as suas aulas e a justificar as apreciações críticas que emergem das observações efectuadas. Além disso, tem-se revelado igualmente útil para os professores ao fornecer-lhes instrumentos de análise das suas próprias aulas.

Dezassete escolas que têm realizado esforços concretos para renovar a matemática escolar fazem parte de um estudo sobre a reforma dirigido pelo *National Center for Research in Mathematical Sciences Education* (NCRMSE). As escolas foram seleccionadas com base em dados recolhidos em cerca de 400 escolas situadas em vários locais dos Estados Unidos e em entrevistas telefónicas a um subconjunto de 50 das 400 escolas iniciais.

A qualidade das experiências matemáticas dos alunos são variáveis de umas escolas para outras, segundo os investigadores que participam no grupo de trabalho para a implementação da reforma do NCRMSE, mas os alunos devem encontrar nas escolas seleccionadas uma educação matemática que difere, em muitos aspectos, da educação recebida em escolas que seguem currículos e uma prática matemática convencionais. Os observadores, todos membros do projecto, visitam cada escola, observando duas ou mais aulas de cada turma em estudo. Este artigo descreve as escalas desenvolvidas para documentar as observações de aulas.

Conteúdo intelectual do ensino

Determinar onde fazer incidir as observações durante uma aula é uma tarefa desafiadora. Os observadores podem ver o que os professores fazem, como organizam a turma, como ensinam pequenos grupos ou toda a turma, quais os padrões de interacção do professor com os alunos individualmente ou em grupo. Podem centrar-se no comportamento dos estudantes como um todo numa determinada turma, se os estudantes estão a prestar atenção, que tipo de respostas dão, que estudantes respondem mais frequentemente, quais dominam a turma. Ou podem centrar-se nas decisões do professor, no modo particular como actua em determinadas situações e se os seus comportamentos revelam as suas crenças ou conhecimentos acerca da matemática ou do ensino.

Os investigadores envolvidos neste estudo consideraram muitas destas possibilidades, mas optaram por focar a sua atenção na *substância intelectual* da turma. Com a finalidade de captar diferentes dimensões dessa substância intelectual, os membros do NCRMSE desenvolveram 10 escalas de alta inferência que especificam o conteúdo de uma aula em termos do comportamento do professor e dos alunos, do envolvimento dos alunos e das regras partilhadas pela turma reveladas através dos padrões de interacção da turma. As escalas centram-se em facetas conceptualmente distintas de uma sala de aula. Visto que elas resultaram de documentos da reforma e de investigações sobre o ensino, fornecem uma base de transformação das recomendações da reforma em prática. Cada escala é acompanhada por critérios específicos para codificar as aulas. Para algumas, a pontuação é numérica; noutras, é descritiva.

Conceitos matemáticos

A escala de *Conceitos Matemáticos* é não numérica. Divide o conteúdo da aula em uma ou mais áreas importantes do estudo da matemática escolar. Embora seja possível dar um conceito importante de formas superficiais, esta escala qualitativa não avalia a profundidade do tratamento que recebe o conceito em causa, apenas determina o domínio ou conceito matemático que está a ser dado. O conteúdo que os observadores determinam como o foco da aula é referenciado nos termos das categorias da matemática escolar que se encontram no *On the Shoulders of Giants* (MSEB, 1991) e no *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* do NCTM (1989). Se a aula envolver um domínio matemático ao qual, segundo estes documentos, se deve retirar ênfase, somente o domínio na generalidade será referenciado no mapa. Por exemplo, no caso do desenvolvimento de capacidades mecanizadas de cálculo, só o amplo domínio das operações numéricas seria seleccionado.

Utilização da análise matemática

A escala da *Utilização da Análise Matemática* avalia em que medida os estudantes se empenham na análise matemática. A análise matemática pode ser considerada como um raciocínio de ordem superior que envolve matemática e que vai para além de memorizar ou relatar mecanicamente factos matemáticos, regras e definições, ou de aplicar algoritmos de uma forma mecânica. Envolve procurar padrões matemáticos, estabelecer conjecturas e justificá-las. Inclui organizar, sintetizar, avaliar, especular, argumentar, formular hipóteses, descrever padrões, criar modelos ou simulações, e inventar procedimentos originais. Em todos estes, o conteúdo do raciocínio de ordem superior é a matemática.

Profundidade do conhecimento e compreensão do aluno

A escala da *Profundidade do Conhecimento e Compreensão do Aluno* mede a complexidade e profundidade com que foi desenvolvido o conhecimento matemático do aluno numa aula. Em vez de recitarem fragmentos soltos de informação, os alunos devem desenvolver uma compreensão relativamente sistemática, integrada ou holística dos conteúdos matemáticos identificados na escala dos *Conceitos Matemáticos.*

Os alunos podem também produzir novos conhecimentos ao descobrirem relações matemáticas, ao resolverem problemas, ao fazerem conjecturas, ao justificarem hipóteses ou ao retirarem conclusões.

O conhecimento matemático dos alunos é superficial quando ideias importantes foram tratadas de forma trivial pelo professor ou pelos próprios alunos. O conhecimento é reduzido quando a compreensão de importantes conceitos matemáticos por parte dos alunos apenas inclui um contacto superficial com o seu significado. Isto pode dever-se a estratégias educacionais que cobrem grandes quantidades de ideias fragmentadas e de pedaços de informação de uma forma que não estabelece conexões com outros conhecimentos. A compreensão dos alunos é pouco profunda quando estes não são capazes de utilizar os seus conhecimentos para fazer distinções ou produzir argumentos claros, para resolver problemas ou para desenvolver entendimentos mais complexos de fenómenos relacionados. É possível haver uma aula que contenha conhecimentos substantivamente importantes e profundos. Os alunos podem não se envolver ou podem não mostrar compreender a complexidade ou significado das ideias. Esta escala examina a profundidade que os alunos atingem no conteúdo da aula.

Conexões matemáticas

A escala de *Conexões Matemáticas* avalia em que medida os tópicos das diferentes áreas matemáticas que fazem parte da aula estão relacionados uns com os outros. As questões que relacionem os domínios matemáticos são valorizadas porque ajudam os alunos a desenvolver um conhecimento integrado que é aplicável através de vários domínios. O uso de representações múltiplas — por exemplo, uma representação gráfica de uma fracção — não merece automaticamente uma pontuação alta nesta escala. Dado que as conexões entre domínios encontradas nas representações múltiplas são muitas vezes tácitas, as pontuações serão baixas a não ser que as conexões em si mesmas sejam objecto de estudo.

Relações interdisciplinares

A escala de *Relações Interdisciplinares* mede até que ponto os tópicos matemáticos estão relacionados com outras áreas disciplinares. A interdisciplinaridade ou os currículos integrados são valorizados porque os alunos desenvolvem conhecimento integrado que pode ser aplicado em múltiplas disciplinas. Os tópicos matemáticos podem ter aplicações ou estar relacionados doutra forma com outras disciplinas, mas para que uma aula receba uma alta pontuação nesta escala, as conexões têm que ser tornadas explícitas e ser exploradas pelos alunos.

A matemática pode ser usada como uma ferramenta para desenvolver a compreensão de outra disciplina; uma outra disciplina pode fornecer um cenário para o estudo da matemática. Um equilíbrio entre as exigências das duas disciplinas tem que ser mantido e a verdadeira integração, em que o estudo de uma enriquece o estudo da outra, é necessária para obter uma boa pontuação nesta escala.

Valor para além da aula

A escala do *Valor Para Além da Aula* avalia em que medida a aula de matemática tem valor e significado para além do seu contexto de ensino. Valor e significado para além da aula são importantes porque os alunos desenvolvem uma compreensão das aplicações e da importância no mundo real da matemática que estudam. Uma aula ganha este valor quando se relaciona com o mais largo contexto social em que os alunos vivem. Duas áreas nas quais o trabalho dos alunos estabelece esta relação são (a) problemas públicos nos quais os estudantes se confrontam com um assunto ou problema actual, como por exemplo o uso da análise estatística para preparar um relatório sobre os "sem abrigo" para a Camâra local; (b) experiências pessoais, aspirações ou situações dos alunos sobre as quais a aula seja construída. Podem ser obtidas altas pontuações quando a aula incluir uma ou ambas as áreas.

Uma aula de matemática em que este valor é baixo ou nulo tem actividades que contribuem para o sucesso na escola no presente ou no futuro, mas não para quaisquer outros aspectos da vida. O trabalho do aluno serve apenas para confirmar o nível de competência ou de cumprimento das normas ou rotinas da escolaridade formal.

Discurso matemático e comunicação

A escala do *Discurso Matemático e Comunicação* mede até que ponto a fala (ou a linguagem gestual, se for apropriada) é usada na sala de aula para aprender e compreender a matemática. Duas coisas são importantes: o conteúdo matemático e a natureza da conversação.

Em turmas caracterizadas por um discurso e uma comunicação matemática de alto nível, existe uma considerável interacção professor-aluno e aluno-aluno acerca das ideias de um assunto. A interacção é recíproca, promove uma compreensão partilhada e tem três características. (1) A conversa é sobre matemática e inclui raciocínios de ordem superior tais como fazer distinções, aplicar ideias, formar generalizações, levantar questões, ao invés de meramente relatar experiências, factos, definições ou procedimentos. (2) A conversação envolve a troca de ideias e não é guiada ou controlada por uma parte, como sucede com perguntas retóricas do professor.

Permite aos participantes explicarem-se ou colocarem questões por meio de frases completas, e permite respostas directas a comentários de oradores anteriores. (3) A conversação assenta coerentemente nas ideais dos participantes de modo a promover uma compreensão maior e partilhada de um tema ou tópico matemático e não requer uma proposição sintética explícita. O discurso e comunicação matemática parecem-se com a exploração apoiada de um con-teúdo que é característica de um seminário onde as contribuições dos alunos levam a compreensões partilhadas.

Aulas nas quais há pouco ou nenhum discurso matemático consistem tipicamente numa exposição com recitação, onde o professor se desvia muito pouco de dar um corpo de informação e fazer um conjunto de perguntas previamente planeadas e os alunos dão respostas muito curtas. Dado que as perguntas do professor vêm sobretudo de listas de perguntas, factos e conceitos já preparadas, o discurso é muitas vezes solto em vez de coerente, e há pouca sequência para as respostas dos alunos. Um tal discurso pode ser considerado como o equivalente oral das questões que consistem em preencher-se os espaços em branco ou que apenas pedem uma resposta curta.

O uso de terminologia matemática não assegura a existência de discurso matemático. O uso não apropriado de terminologia pode até interferir no desenvolvimento das compreensões colectivas e dos significados partilhados. Quando são utilizados termos matemáticos, eles devem ser significativos e apropriados; devem ser usados para apoiar a conversação.

Centro da autoridade matemática

A escala relativa ao *Centro da Autoridade Matemática* mede até que ponto uma aula apoia um sentido partilhado de autoridade na validação do raciocínio matemático dos alunos. Para que uma aula receba uma alta pontuação nesta escala, o professor e os alunos devem respeitar-se reciprocamente quando tentam convencer-se a si próprios ou uns aos outros de que o seu raciocínio é consistente e as suas respostas correctas. A escala não mede o controlo que os alunos têm sobre o conteúdo de uma aula. Os professores decidem que matemática e que actividades vale a pena explorar em pormenor. As decisões curriculares tomadas pelos professores não devem inviabilizar a partilha de autoridade matemática na turma.

Apoio social ao sucesso dos alunos

A escala do *Apoio Social ao Sucesso dos Alunos* avalia em que medida professores e alunos se apoiam através da partilha de expectativas altas. Estas expectativas incluem aceitar riscos e tentar ultrapassar desafios académicos, aprender conhecimentos e capacidades importantes, e criar um clima de respeito mútuo entre todos os membros da turma. Alunos com menos capacidade ou proficiência num assunto são tratados de forma a serem encorajados e a valorizar a sua presença. Se desacordos ou conflitos se desenvolverem na turma, o professor ajuda os alunos a resolverem-nos de modo construtivo. O simples registo das acções ou respostas dos alunos não constitui prova de que estão a receber apoio social da parte dos professores.

O apoio social pode ser prejudicado pelo comportamento dos alunos ou do professor, por comentários ou acções que desencorajem o esforço, a participação, a aceitação de riscos ou a expressão de pontos de vista. Comentários do professor ou dos alunos que minimizem a resposta de um aluno e esforços por parte de alguns alunos para impedir que colegas tomem verdadeiramente parte activa, minam seriamente o apoio para o sucesso. O apoio pode também falhar quando, embora não ocorrendo abertamente actos como os anteriores, a atmosfera global da turma é negativa devido a acontecimentos anteriores.

Empenhamento dos alunos em fazer matemática

A escala do *Empenhamento dos Alunos em Fazer Matemática* avalia em que medida os alunos mostram um sério investimento psicológico no trabalho da aula. Os comportamentos dos alunos que demonstram esse envolvimento incluem estar atento, fazer o trabalho proposto e mostrar entusiasmo levantando questões, contribuindo para as tarefas do grupo e ajudando os colegas. A falta de empenhamento é identificável por comportamentos de alheamento das tarefas e que revelam aborrecimento ou falta de esforço, como dormir, sonhar acordado, falar com os colegas de assuntos extra-aula, fazer barulho ou perturbar a turma. Estes comportamentos indicam que os alunos não estão a encarar o trabalho da turma de uma forma séria.

Referências

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: Author.

Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy.* Washington: National Academy Press.

Tradução de Isabel Dias

O problema do trimestre

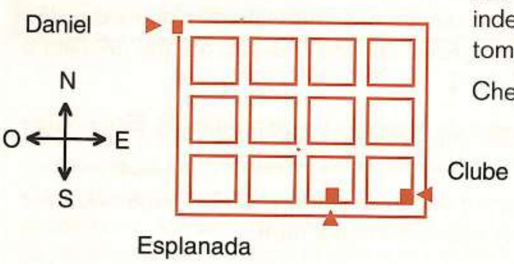
Sobre o problema anterior

Na última edição de *Educação e Matemática* propusemos o problema **"O Daniel e a namorada"**:

O Daniel está à entrada do bairro e resolveu ir até ao clube seguindo um pouco ao acaso. Assim, em cada cruzamento vai deitar uma moeda ao ar para saber se vai para sul ou para leste.

A namorada está sentada numa esplanada, sem saber que o Daniel já chegou ao bairro.

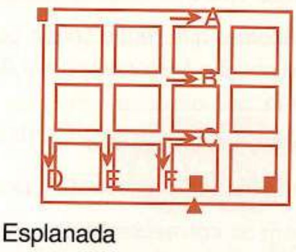
Qual é a probabilidade de eles se encontrarem?



Desta vez chegaram sete respostas, vindas de Alberto Canelas (Queluz), Carlos Rosmaninho (Évora), Eduarda Santos (Évora), Judite Barros (Lisboa), Luis Carmelo (Tondela), Luis Mota (Lisboa) e Manuela Ribeiro (Mem Martins).

A aparente semelhança deste problema com um outro bastante conhecido pode induzir em erro. Para calcular a probabilidade pedida não podemos dividir o número de caminhos que passam na esplanada pelo total de caminhos desde a entrada do bairro até ao clube. E não podemos fazê-lo porque os caminhos não são todos equivalentes, isto é, há caminhos mais prováveis que outros.

A maneira mais elegante de resolver o problema é a proposta por Judite Barros.



Desde que o Daniel chegue ao caminho A, B ou C só pode ir parar ao clube não encontrando a namorada, independentemente das decisões que tome nos cruzamentos seguintes.

Chegando ao caminho D, E ou F irá sempre passar pela esplanada, encontrando a namorada.

Dada a simetria destas situações, a probabilidade de o Daniel chegar aos caminhos A, B ou C é exactamente igual à de chegar aos caminhos D, E ou F. Portanto, **a probabilidade de encontro é de 50%.**

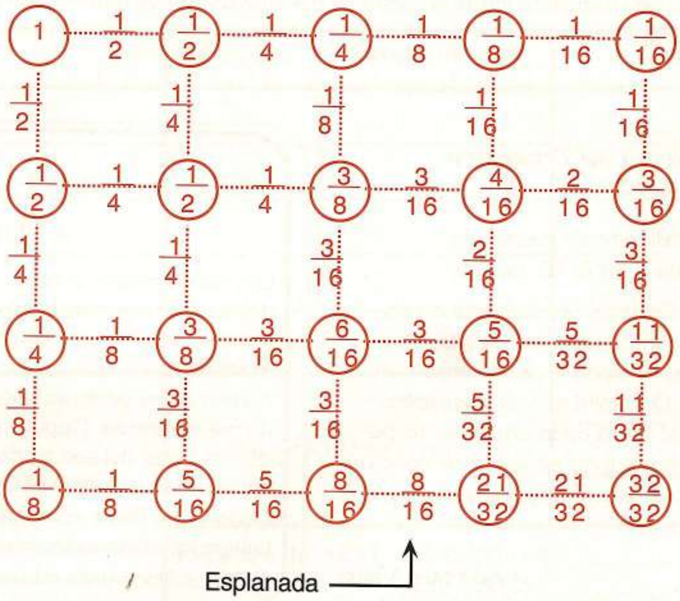
Luis Mota propõe uma resolução geral para problemas deste tipo que permite saber a probabilidade de passar em cada cruzamento e em cada quarteirão (ver figura abaixo).

A probabilidade à entrada do bairro é evidentemente 1.

Em cada cruzamento em que haja duas opções a seguir, a probabilidade é dividida ao meio (metade para cada quarteirão).

A probabilidade de passar num cruzamento é a soma das probabilidades dos caminhos que lá vão dar.

(continua na pág. seguinte)



Como pode colaborar com a *Educação e Matemática*

1. Envie-nos um artigo, que escreveu sozinho ou em colaboração com colegas, sobre uma questão que considera relevante no ensino-aprendizagem da Matemática. O texto

- pode ser uma descrição e análise de uma aula, uma sequência de aulas, uma experiência nova que tentou, algo que aconteceu numa aula ou na escola;
- ou uma reflexão pessoal baseada na sua experiência e/ou em leituras que fez;
- ou então uma opinião sobre os programas, as condições do ensino da Matemática, a situação ou formação dos professores, etc., etc..

Não hesite em pedir uma opinião — e mesmo ajuda, se achar necessário — a algum colega da Redacção. De qualquer modo, o seu artigo será lido com atenção e nós comunicaremos as nossas sugestões para o melhorar, se for caso disso.

2. Envie-nos materiais (em especial fichas de trabalho) que tenha criado ou adaptado para usar nas suas aulas e que lhe pareçam de interesse para possível divulgação na secção *Materiais para a Aula de Matemática*. Junte os seus comentários sobre o uso desses materiais se achar necessário.

3. Envie-nos materiais para alguma das outras secções da Revista:

- *O Problema do Trimestre* — proposta de problemas ou a resposta a problemas saídos;
- *Vamos Jogar* — um jogo para usar na aula com as correspondentes explicações;
- *Pense Nisto* — uma questão para pensar;
- *Para Este Número Seleccionámos* — um texto já publicado mas que seria interessante reproduzirmos na *Educação e Matemática* (traduzido se o original estiver escrito noutra língua); nós pediríamos autorização para reproduzi-lo.

4. Escreva-nos uma carta com a sua reflexão pessoal, ou com uma simples ideia que teve, a propósito de alguma questão que lhe pareça de interesse. A Revista não publica só "artigos", tem uma secção destinada a ideias, pontos de vista e comentários breves.

5. Envie as suas reacções a artigos e materiais surgidos na Revista, quer sejam de apoio ou de discordância. Seria muito bom mantermos discussões sobre questões polémicas nas páginas da Revista.

6. Comunique-nos ideias para temas a tratar na Revista, mesmo que não queira escrever sobre eles. Em especial, pode ser importante sabermos que valeria a pena fazermos uma reportagem numa escola ou numa turma.

7. Envie-nos notícias e informações sobre acontecimentos que lhe pareçam relevantes para publicação, incluindo fotografias e outras ilustrações.

O Problema do Trimestre (continuação)

A probabilidade de passar na esplanada é de 8/16 ou 0,5.

Alberto Canelas faz algumas extensões do problema. Na mais curiosa, abandona o plano e passa para o espaço. O Daniel entra num centro comercial e em cada cruzamento ou segue para sul ou segue para leste ou apanha um elevador para o piso seguinte...

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)

PROBLEMA PROPOSTO

A HERANÇA DO VELHO SENHOR

Um velho homem, prestes a morrer, mandou chamar os filhos para se despedir deles e distribuir o dinheiro que guardava num cofre. No entanto o homem estava tão mal que já não se lembrava do valor da sua fortuna nem sequer de quantos filhos tinha.

Apesar disso, pediu ao filho mais velho para tirar 1000 contos mais a sétima parte do que sobrasse. Depois, disse ao segundo filho para tirar 2000 contos mais a sétima parte do que ainda houvesse. A seguir, o terceiro filho recebeu 3000 contos mais a sétima parte do restante. E assim sucessivamente.

Quando os filhos compararam o que tinham recebido, verificaram que todos tinham recebido exactamente o mesmo.

Quantos filhos tinha o homem e quanto recebeu cada um?

Quota 1995

No ano de 1995 o valor da quota é de **4500$00** (3500$00 para o sócio estudante e 5000$00 para os sócios estrangeiros).

Para as Escolas ou outras Instituições ligadas à Educação existem três modalidades:

a) mediante o pagamento de **2.500$00** a Instituição assinará a revista Educação & Matemática, recebendo 1 exemplar de cada um dos quatro números anuais.

b) mediante o pagamento de **4.500$00** a Instituição receberá 1 exemplar de cada um dos quatro números anuais da revista Educação & Matemática, o Boletim APM*Informação* e poderá adquirir qualquer publicação da APM a preço de sócio.

c) mediante o pagamento de **8.000$00** a Instituição receberá 2 exemplares de cada um dos quatro números anuais da revista Educação & Matemática, o boletim APM*Informação* e as Actas do Profmat (Encontro Nacional de Professores de Matemática), realizado nesse ano. A Instituição poderá, ainda, adquirir qualquer publicação da APM a preço de sócio.

Pode efectuar o pagamento da sua quota ou assinatura enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática
ESE de Lisboa, Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, MasterCard ou EuroCArd, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número ⎵⎵⎵⎵ ⎵⎵⎵⎵ ⎵⎵⎵⎵ ⎵⎵⎵⎵

Visa ☐ VISA   MasterCard ☐ MasterCard   Eurocard ☐ EUROCARD

Validade ____________ o valor de ______________ correspondente a ______________

______________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática.**

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente às despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes: até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%

Se residir no estrangeiro poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7166424 da quantia a enviar para os portes de correio.

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário	Custo

Sócio da APM ☐ Nº ☐ Assinatura

Não sócio ☐ ______________

Subtotal	
Portes de Correio (ver acima)	
Valor Total	

Nome ______________________________

Morada ______________________________

______________ C.P. ______________

Data de pedido ______________

Para uso da APM Assinatura   Recebido em ______________   Enviado em ______________

índice