

O teorema da Marion

## *Próximos encontros nacionais organizados pela APM*

- **VI Seminário de Investigação em Educação Matemática**, 6 e 7 de Novembro de 1995, em Évora. Inscrições ainda possíveis até 18 de Setembro.
- **ProfMat 95**, de 8 a 11 de Novembro de 1995, em Évora. Último prazo para inscrição, com agravamento de preço: 29 de Setembro.
- **História e Educação Matemática**, 24 a 30 de Julho de 1996, em Braga. Encontro internacional, organizado em colaboração com o Departamento de Matemática da Universidade do Minho. Para receber o segundo anúncio, envie a sua pré-inscrição ou contacte a sede da APM.

### *Não se esqueça também:*

- **ICME-8, 8º Congresso Internacional de Educação Matemática**, 14 a 21 de Julho de 1996, em Sevilha. Para beneficiar do preço especial para sócios da APM, deverá enviar o boletim de inscrição até 16 de Setembro.

### **Neste número colaboraram**

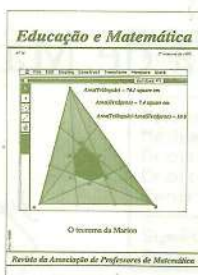
António Abrantes, António Luis da Silva, Arsélio Martins, Graziela Fonseca, Jaime Carvalho e Silva, J. Orlando Freitas, J. Paulo Viana, João Pedro Ponte, Lina Vicente, Lúcia Grilo, Maria Natália Serrazina, Paula Teixeira. Foi ainda inserido um texto de John Mason.

### **Sobre a capa**

A capa deste número reproduz uma construção feita no programa *Geometer's Sketchpad*. Os três lados de um triângulo qualquer são divididos em três partes, e os pontos de divisão unidos com os vértices opostos. A área do hexágono resultante,  $[DEFGHI]$ , vale um décimo da área do triângulo inicial  $[ABC]$ . Por arrastamento de um dos vértices do triângulo, verifica-se que enquanto muita coisa varia, inclusivamente as áreas do triângulo e do hexágono, a razão das áreas permanece constante e igual a 10. Os cálculos das áreas e da sua razão são feitos instantaneamente pelo programa, à medida que o triângulo se vai transformando. É este o teorema da Marion. Ele foi anunciado por Al Cuoco, Paul Goldenberg e June Mark, do *Connected Geometry Project*, numa carta enviada ao *Mathematics Teacher* de Novembro de 1993. Este facto mostra que nem tudo está já descoberto, na geometria elementar, e como um programa deste tipo pode ajudar a transformar as aulas de Matemática em verdadeiros laboratórios de investigação. A escolha desta capa foi motivada pelo artigo de João Pedro Ponte e pelo texto de John Mason, que podem ser lidos neste número de **Educação e Matemática**.

### **Data de publicação**

Este número foi publicado em Julho de 1995.



n.º 34  
2.º trimestre  
de 1995

## A APM na Internet? Porque não?

Eduardo Veloso

### EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

**Director**  
Paulo Abrantes

**Redacção**  
Alexandra Pinheiro  
Ana Boavida  
Ana Paula Canavarro  
Ana Vieira  
Eduardo Veloso  
Helena Lopes  
Henrique M. Guimarães  
Isabel Amorim  
Maria João Lagarto  
Maria José Boia  
Rosário Ribeiro

**Entidade Proprietária**  
Associação de Professores  
de Matemática

**Periodicidade**  
Trimestral

**Tiragem**  
3500 exemplares

**Composição**  
Gabinete Técnico da APM

**Capa**  
Gabinete Técnico da APM

**Montagem, fotolito e impressão**  
Costa e Valério  
N.º de Registo: 112807  
N.º de Depósito Legal: 91158/95

**Correspondência**  
Associação de Professores  
de Matemática  
Escola Superior de Educação de  
Lisboa  
Rua Carolina Michaelis de  
Vasconcelos  
1500 Lisboa  
Tel/Fax: (351) (1) 7166424

**Nota:** Os artigos assinados  
são da responsabilidade dos seus  
autores, não reflectindo  
necessariamente os pontos de vista  
da Redacção da Revista.

Pronto, já estou a imaginar alguns a murmurar: "aí está, basta haver uma moda para eles pegarem nela...", "ainda as escolas não têm calculadoras gráficas para os alunos e já estes malucos estão a querer a APM na Internet, depois as escolas na Internet, depois os alunos na Internet e assim por diante...!" Realmente, à primeira vista pode parecer absurdo. Sobretudo para quem nunca esteve ligado à Internet. Mas insisto: a APM na Internet? Porque não?

Que poderíamos fazer com isso?\*

Começo com um exemplo. Há tempos encontrei na Internet um local chamado *The Geometry Forum*. É uma espécie de centro de recursos sobre geometria: problemas e projectos em geometria, artigos, software (ainda ontem lá fui buscar uma versão de demonstração do CABRI II), anúncios de encontros, de livros acabados de sair, tudo isto e muito mais, como grupos de discussão sobre a geometria na Universidade, a geometria no ensino não superior, investigações em geometria e assim por diante. O acesso é livre, e já encontrei uma aluna do secundário a pedir ajuda para um projecto de geometria em que estava a trabalhar e a obter resposta de John Conway, um matemático famoso de Princeton.

A educação é um sector forte da Internet e locais como este existem em grande número, dedicados aos mais variados assuntos.

Em Portugal já existem alguns locais com interesse para nós na Internet. Por exemplo, as propostas de ajustamento ao programa de Matemática no secundário estão num local gerido por Jaime Carvalho e Silva na Universidade de Coimbra, e um *forum* de discussão sobre esse ajustamento e outras questões está a decorrer diariamente num local da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Depois da APM ter um local na Internet (se é que não o tem já quando sair este número da revista) poderíamos, a pouco e pouco, além das facilidades:

- ter grupos de discussão sobre temas que nos interessem: programas, condições nas escolas, formação de professores, etc. etc.;
- ter acesso imediato às notícias mais importantes relativas à APM e à educação matemática em geral;
- apoiar a organização do ProfMat e dos encontros regionais;
- e, porque não, a médio prazo, colocar *online* as revistas Educação e Matemática e Quadrante, de modo que os sócios e outros professores possam copiar artigos de números que não possuam, copiar actividades para a aula de Matemática, etc. etc..

Quanto aos professores e alunos de Matemática das escolas portuguesas, devemos exigir para eles que progressivamente todas as escolas tenham um computador, um modem e uma ligação à Internet, o que não é uma exigência disparatada em termos económicos. Ainda ontem recebi — pela Internet, claro... — a notícia de que a Escola Municipal de Salvador, na Baía, Brasil, ia ligar-se à Internet, ao que se seguirão mais 24 escolas nos próximos meses. Há escolas secundárias portuguesas já ligadas, como a Anselmo de Andrade em Almada. Não se aflijam, portanto, não vamos ser pioneiros...

A APM na Internet? Porque não?

\* Para pormenores técnicos, veja pág. 32.

# Novas tecnologias na aula de Matemática\*

João Pedro da Ponte

As novas tecnologias colocam desafios irrecusáveis à actividade educativa dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e estender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência. Trata-se de poderosas ferramentas intelectuais, que permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento criativo. Mas estas tecnologias não ensinam por si só. Ao professor cabe um papel decisivo na organização das situações de aprendizagem.

As novas tecnologias computacionais (NT) assumiram um papel de primeiro plano no ensino da Matemática na última década. Neste artigo, procurarei ilustrar o partido que se pode tirar, em diferentes níveis de ensino, de materiais já perfeitamente testados, largamente disponíveis e susceptíveis de generalizada utilização.

Programas como a linguagem LOGO, a folha de cálculo, o Cabri-Géomètre, o Derive e o Mathematica já viram o seu interesse educacional largamente reconhecido em muitos países e são parte integrante da prática corrente do ensino-aprendizagem em vários níveis de ensino. No nosso país as possibilidades do computador foram objecto de atenção do Projecto MINERVA (1985-1994), que mobilizou um largo número de professores e de alunos, e marcou um momento decisivo de questionamento das práticas pedagógicas e da própria escola. O MINERVA fomentou a constituição de equipas de professores e investigadores, proporcionou a realização de numerosos projectos e uma rica acumulação de experiência<sup>1</sup>. Muito em especial, evidenciou que os professores e os alunos são capazes de realizações verdadeiramente criativas e de grande alcance matemático — desde que lhes seja proporcionado o estímulo e os apoios necessários.

## O que trazem as NT ao ensino da Matemática?

Este projecto mostrou que os computadores e as calculadoras podem ser usados com uma variedade de propósitos educacionais. Nomeadamente, podem servir para apoiar a aprendizagem de tópicos matemáticos específicos, para a execução de

algoritmos e processos rotineiros, como meios auxiliares para o arquivo, análise e apresentação de informação e como ferramentas para a realização de explorações e investigações.

De essencial, constatou-se que as NT permitem trazer ao ensino-aprendizagem desta disciplina:

- uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora muito mais rápida e eficientemente;
- um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;
- uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
- um crescendo de interesse pela realização de projectos e actividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática;
- uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza.

Estas tecnologias conduziram ainda a um renovado interesse pelas questões de filosofia e epistemologia da matemática, colocando questões como: qual a importância dos algoritmos em matemática? Qual afinal

\* Este artigo baseia-se parcialmente numa conferência integrada no encontro "A Matemática em Exame", realizado na Universidade de Lisboa, em Maio de 1995.

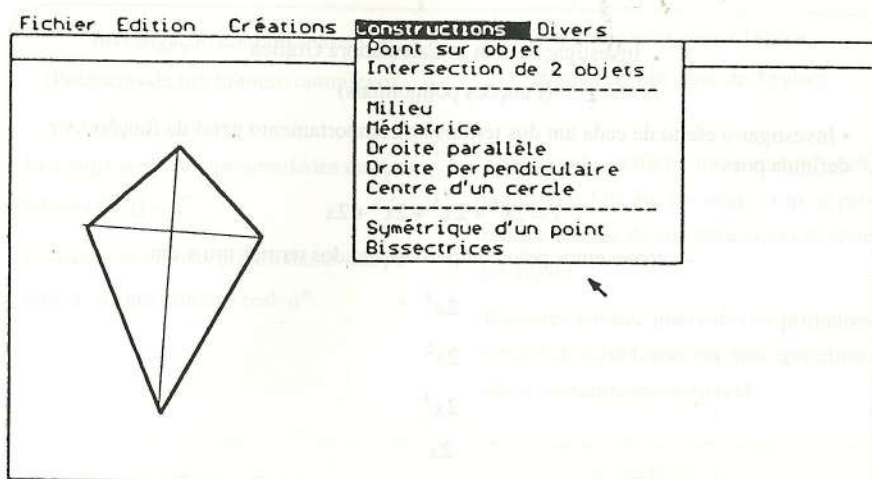


Figura 1. Aspecto típico do ecrã do programa Cabri, onde se construiu um papagaio (um quadrilátero com os lados consecutivos iguais dois a dois)

### Investigação com o Cabri-Géomètre

(Propriedades geométricas)

- 1) Constrói um "papagaio" dinâmico;
- 2) Verifica que se trata de facto dum papagaio dinâmico, isto é, que fica sempre com a forma de papagaio seja qual for o modo como se transforma a figura;
- 3) Constrói os pontos médios dos lados e liga-os dois a dois de modo a construir um quadrilátero inscrito;
- 4) O que se nota relativamente a este quadrilátero? És capaz de formular uma conjectura?
- 5) "Arrasta" o vértice do papagaio para uma nova posição. Confirma-se a tua conjectura? Se não, podes modificá-la?
- 6) Repete o mesmo processo várias vezes. A tua conjectura é verdadeira quando o papagaio é côncavo?
- 7) Usa o verificador de propriedades do Cabri para dizer se a tua conjectura é ou não válida em geral;
- 8) És capaz de dizer porque é verdade? Tenta demonstrá-lo a partir de resultados geométricos bem conhecidos;
- 9) Compara as tuas explicações com as dos teus colegas. São semelhantes ou diferentes? Quais são as mais satisfatórias?

Quadro 1

Algumas notas sobre a actividade anterior (Quadro 1):

Os pontos 1-3 destinam-se a criar a situação de investigação. Os pontos 4-6 constituem neste caso a essência do processo de investigação, podendo levar à formulação de diversas conjecturas. Os pontos 7 e 8 sugerem a demonstração dos resultados obtidos. Finalmente, o ponto 9 evidencia a necessidade de discussão e comparação de resultados dos alunos.

a natureza desta ciência? Qual o impacto dos computadores na prática da investigação matemática?<sup>2</sup>

As experiências realizadas com o computador mostraram que este pode levar ao estabelecimento duma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interacção e colaboração. Estas experiências ajudaram igualmente a definir uma nova visão do professor, como uma pessoa que, longe de se poder considerar formada no fim da sua formação académica, tem de continuar em formação permanente ao longo de toda a sua vida profissional. Depois de um período inicial marcado pelo receio que o computador viesse a substituir o professor, tornou-se claro que as NT vêm sobretudo reforçar o seu papel na preparação, condução e avaliação do processo de ensino-aprendizagem.

### Cabri

O programa Cabri-Géomètre constitui um ambiente de trabalho para a realização de todo o tipo de construções geométricas (figura 1). Tirando partido do interface rato/menus descendentes, típico da tecnologia do computador Macintosh, permite a realização imediata de todo o tipo de experiências — o que acontece a esta ou aquela relação entre objectos geométricos se mudarmos a posição de um ponto, o comprimento de um segmento, a amplitude de um ângulo?

A ficha de trabalho sobre "papagaios" apresentada no Quadro 1 (adaptada de Villiers, 1995), mostra uma das possibilidades de exploração deste tipo de *software*, neste caso com alunos do 8.º ou 9.º ano de escolaridade. Estabelecida uma conjectura, ela pode ser verificada para todos os casos que pretendermos. O aluno pode utilizar um comando que verifica a existência ou não de certa propriedade para comprovar a sua conjectura, o que pode servir de ponto de partida para tentar uma prova geométrica clássica. Trabalho semelhante pode igualmente ser realizado tanto em níveis mais elementares como mais avançados.

### Calculadora gráfica

A calculadora gráfica é em tudo semelhante a uma calculadora vulgar, excepto no ecrã, que é um pouco maior. É capaz de realizar todo o tipo de cálculos (como qualquer calculadora científica), desenhar gráficos, trabalhar com matrizes e em modo estatístico, correr programas e, em alguns casos, realizar manipulações simbólicas. O seu traço mais significativo é que, sendo um objecto facilmente transportável e não muito caro, pode constituir um recurso de natureza pessoal do aluno.

Na ficha de trabalho que proponho no Quadro 2, os alunos podem estudar propriedades das funções polinomiais. O tratamento gráfico não dispensa o raciocínio analítico, mas altera por completo a abordagem das questões. Primeiro vem o estudo intuitivo, contemplando os aspectos globais dos objectos matemáticos relevantes (figuras 2 e 3). Depois é que se faz a análise dos aspectos mais específicos, e, quando for caso disso, a verificação e a demonstração.

#### Investigação com a Calculadora Gráfica

(Funções polinomiais)

- Investigar o efeito de cada um dos termos no comportamento geral da função r.v.r. definida por

$$y = 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + 2x$$

— comecemos pelo comportamento dos termos um a um:

$$2x^7$$

$$2x^5$$

$$2x^3$$

$$2x$$

— vejamos o que resulta de os somarmos dois a dois:

$$2x^3 + 2x$$

$$2x^5 + 2x^3$$

- E se for uma função polinomial com termos de grau par?

$$y = 2x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 2$$

- E uma função polinomial com termos de grau par e de grau ímpar?

$$y = 2x^7 + 2x^6$$

Quadro 2

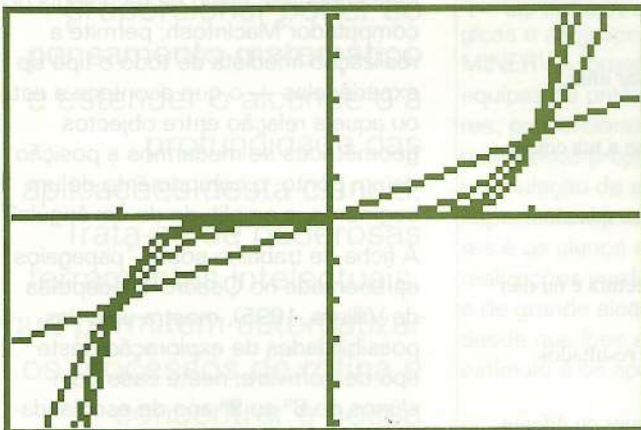


Figura 2. (intervalo  $[-15;15]$  e  $[-5;5]$ )

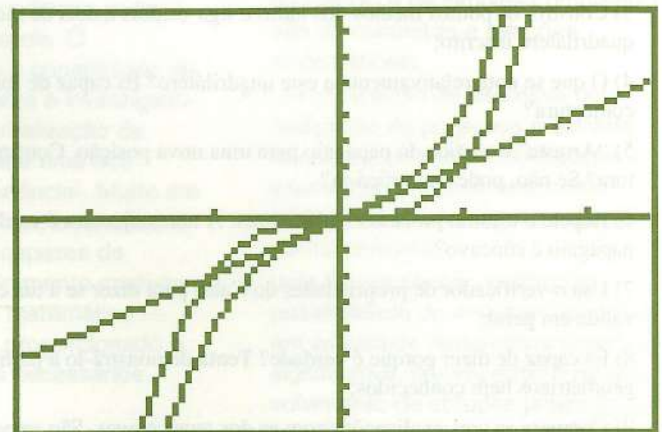


Figura 3. (intervalo  $[-2,5;2,5]$  e  $[-7,5;7,5]$ )

Ecrã onde se visualizam em sobreposição as funções definidas por  $y = 2x^7$ ,  $y = 2x^5$ ,  $y = 2x^3$ ,  $y = 2x$  nos intervalos  $[-15;15]$  para  $x$  e  $[-5;5]$  para  $y$ . Todos os gráficos se intersectam nos pontos  $(-1;-2)$  e  $(1;2)$ . Os gráficos sugerem que para  $|x| > 1$  a função  $y = 2x^7$  é a que tem maior valor e  $y = 2x$  a que tem menor valor absoluto; para  $|x| < 1$  dá-se o inverso, sendo a função  $y = 2x^7$  a que assume valores mais próximos de zero.

O gráfico sugere que para valores de  $|x| \gg 1$  a função  $y = 2x^3 + 2x$  tende a acompanhar de perto a função  $y = 2x^3$ ; para valores de  $|x| \ll 1$  a mesma função tende a acompanhar pelo contrário a função  $y = 2x$ ; a zona  $|x|$  próximo de 1 estabelece a transição entre os dois tipos de comportamento.

A notação  $\gg$  utiliza-se com o significado de muito maior, e da mesma forma  $\ll$  significa muito menor.

Investigação com o Derive  
(Potências de um número complexo)

Investiga possíveis propriedades das potências de  $(1+i)^n$ .

Compara-as com as propriedades das potências de um número real  $a^n$ .

Quadro 3

Investigação com o Derive  
(Expansão em série de Taylor)

Sobrepondo gráficos num mesmo ecrã, compara a função  $y = \text{sen}x$ , com os primeiros termos da sua expansão em série de Taylor.

Investiga em que intervalos os primeiros termos da série fornecem uma aproximação eventualmente aceitável.

Quadro 4

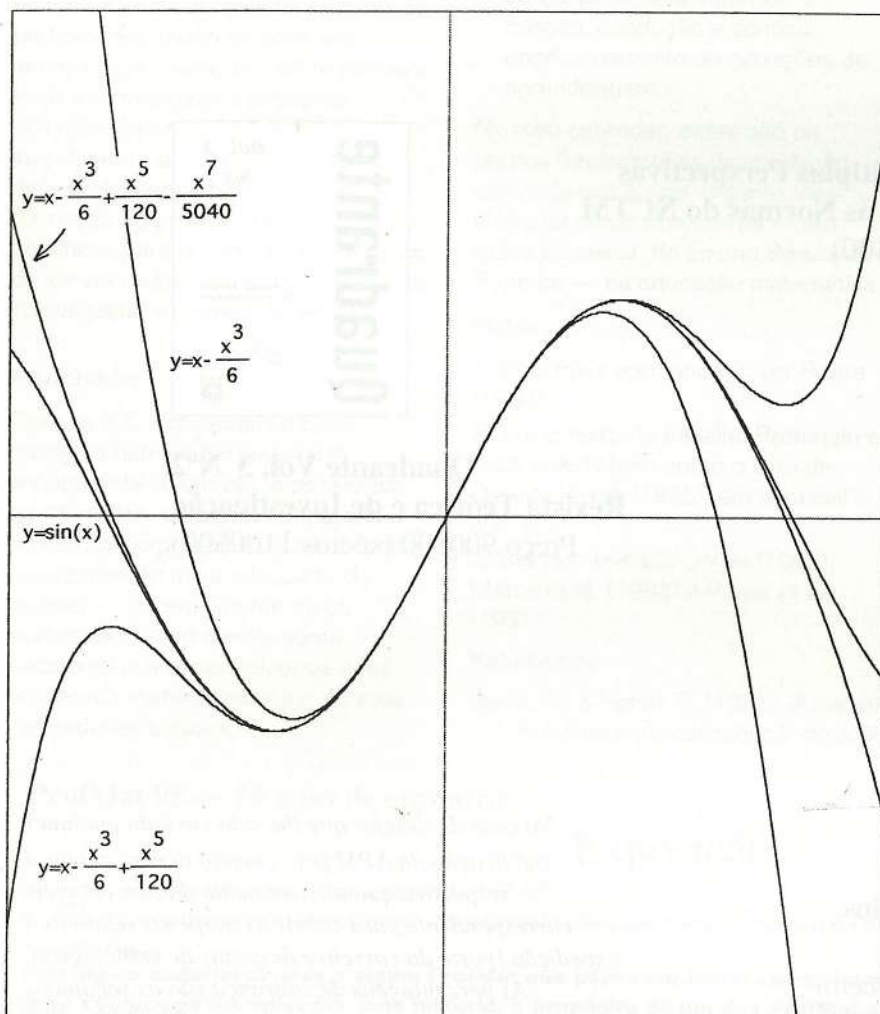


Figura 4. (Intervalo  $[-2, 2]$  e  $[-5, 5]$ )

Gráfico da função  $y = \text{sen}x$  e de diversas aproximações obtidas juntando sucessivos termos à sua série de Taylor.

## Derive

O programa Derive é capaz de realizar manipulação simbólica, representação gráfica de funções e aritmética exacta. Assim, ele é capaz de adicionar fracções, dando o resultado sob a forma fraccionária, calcular factoriais com a aproximação que se desejar, realizar aritmética de base  $n$ , calcular com números complexos e números irracionais, calcular com vectores e matrizes, incluindo determinantes, valores próprios e vectores próprios, calcular limites e soma de séries, diferenciar e integrar expressões, determinando derivadas (ordinárias e parciais) duma função e fazendo a sua expansão em série de Taylor, e determinando integrais definidos e indefinidos, factorizar e simplificar expressões algébricas, resolver exactamente equações com raízes reais e complexas, fazer gráficos de funções de  $\mathbf{R}$  em  $\mathbf{R}$  e de  $\mathbf{R}^2$  em  $\mathbf{R}$  em coordenadas rectangulares e polares e na forma paramétrica, e realizar muitas outras operações.

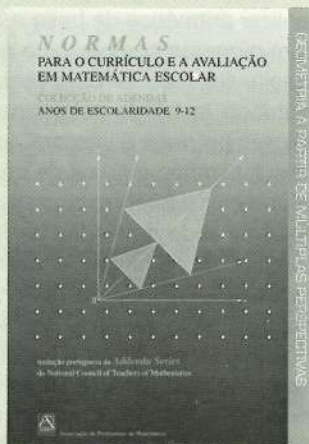
Proponho duas pequenas investigações, nos Quadros 3 e 4, que mostram as potencialidades deste *software*, respeitante às propriedades das potências de um número complexo e à expansão duma função em série de Taylor (ver figura 4).

## As NT nos novos programas e na prática pedagógica

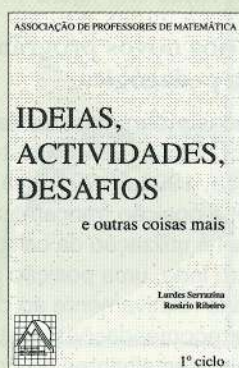
Nos novos programas de Matemática em vigor desde 1991 (Ministério da Educação, 1991a, 1991b) há, por um lado, uma posição francamente favorável à utilização da calculadora e, por outro lado, uma posição muito moderada relativamente ao computador. As recomendações nesta matéria são muito semelhantes no Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Diversos estudos feitos com o objectivo de avaliar o processo de experimentação e generalização dos novos programas<sup>3</sup> mostram que apesar das suas recomendações e das experiências muito positivas realizadas no âmbito do Projecto MINERVA, a maioria dos professores não faz ainda hoje qualquer utilização

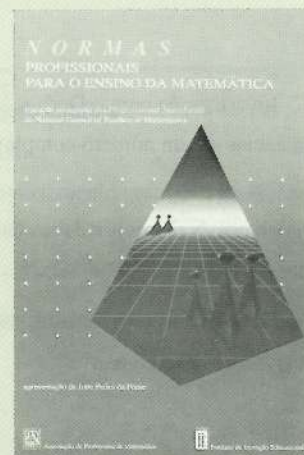
# Publicações APM



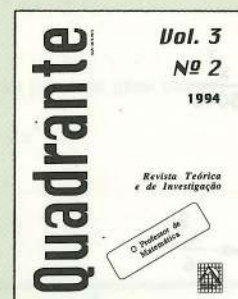
**Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas**  
**Colecção de Adendas 9-12 às Normas do NCTM**  
Preço 1200\$00 (sócios 850\$00)



**Ideias, Actividades, Desafios**  
**e outras coisas mais**  
Lurdes Serrazina  
Rosário Ribeiro  
1.º ciclo  
Preço 850\$00 (sócios 600\$00)



**Normas Profissionais para o Ensino da Matemática**  
tradução portuguesa dos Professional Standards  
do National Council of Teachers of Mathematics  
Preço 3 000\$00 (sócios 2 100\$00)



**Quadrante Vol. 3 N.º 2**  
**Revista Teórica e de Investigação**  
Preço 900\$00 (sócios 1100\$00)

*No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem).  
As percentagens de cobrança são as seguintes:  
até 2500\$00 - 20%  
de 2501\$00 a 5000\$00 - 15%  
mais de 5000\$00 - 10%*



do computador. O mesmo não se passa com as calculadoras. Com a sua introdução como instrumento obrigatório assiste-se a todo um leque de práticas pedagógicas que inclui a sua utilização corrente, a sua utilização apenas em certas unidades e a sua virtual ausência tanto nas aulas como em provas de avaliação.

Deste modo, o computador e a calculadora encontram-se hoje em situações muito diversas nas práticas pedagógicas em Portugal. O primeiro deixou praticamente de ser utilizado, sendo visto como algo que poderá vir a ter maior relevância apenas num futuro ainda distante. A segunda conhece uma presença significativa nas práticas de um grande número de professores, muito embora nem sempre seja usada da melhor maneira. Para se ultrapassar a presente situação, é necessário um forte investimento em duas áreas: (a) o desenvolvimento curricular e (b) a formação de professores. Mas estes domínios, para progredirem, precisam de ser apoiados num esforço sério de investigação e desenvolvimento.

### Conclusão

Com as NT, a matemática pode tornar-se numa actividade mais experimental. Contudo, a possibilidade de realizar facilmente um grande número de experiências pode impedir o pensamento mais adequado de ocorrer — especialmente se os alunos não forem devidamente encorajados a desenvolver os seus processos metacognitivos e as suas capacidades críticas.

As NT vêm por isso exigir uma reformulação do trinómio Matemática-aluno-professor, de modo a que:

- na aprendizagem se contacte com uma matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza a actividade dos matemáticos;
- o aluno passe a desempenhar um papel muito mais activo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço uma variedade de ferramentas para o seu estudo;
- o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem.

No meu entender, estes são os termos fundamentais da revolução que cada vez é mais urgente levar a efeito de modo irreversível — em todos os níveis, do Ensino Básico ao Superior — na educação matemática.

### Notas

1. Para mais pormenores, ver Ponte (1994).
2. Ver o texto de Pavelle, Rothstein e Fitch (1991) bem como o livro de Davis e Hersh (1985), em especial o cap. 8.
3. Ver por exemplo Jorge (1995), Matos et al. (1993) e Ponte et al. (1991).

### Referências

Davis, P., & Hersh, R. (1985). *A experiência matemática* (tradução de João

Bosco Pitombeira). Rio de Janeiro: Francisco Alves.

Jorge, M. A. (1995). *A generalização da Reforma Curricular na Matemática — Um estudo sobre o 5.º ano de escolaridade*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Matos, J. F., J. P. Ponte, H. M. Guimarães e M. L. C. Leal (1993). *A Aplicação do Novo Programa de Matemática do 11.º Ano: Um Estudo de Caso*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática: Ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Pavelle, R., Rothstein, M., & Fitch, J. (1991). Álgebra por computador. In J. P. Ponte (Ed.), *O computador na educação matemática* (pp. 11-27). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). *O Projecto MINERVA: Introduzindo as NTI na educação em Portugal*. Lisboa: DEPGEF.

Ponte, J. P., Matos, J. F., Guimarães, H. M., Leal, L. C., & Canavarró, A. P. (1991). *O processo de experimentação dos novos programas de Matemática*. Lisboa: IIE.

Villiers, M. (1995). An alternative introduction to proof in dynamic geometry. *Micromath*, 11(1), 14-19.

João Pedro da Ponte  
Universidade de Lisboa

## ProfMat 95 — 10 anos de encontro

### Exposição

Em Évora vai comemorar-se o 10.º aniversário do ProfMat.

No âmbito das comemorações vai realizar-se uma exposição sobre este *nosso* encontro onde se pretende dar uma ideia do que foi o seu percurso, a sua evolução.

**Tem algum material alusivo a algum ProfMat que pense ser interessante integrar na exposição?**

**Quer contar-nos um episódio, uma história, a propósito de um dos ProfMat em que participou?**

Envie-nos a *história* ou escreva-nos a dizer que *material* pode ceder para figurar na exposição. Pode mesmo telefonar deixando recado. Nós contactaremos consigo depois.

Ficamos à espera, não deixe para amanhã.

**Escrever para:** APM, Exposição 10 anos de ProfMat, ESE de Lisboa, R. Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500, Lisboa. Tel. e fax.: (01) 7166424.

Uma experiência de formação de professores

## Projecto "Geometria: do concreto ao abstracto, da indução à dedução"

António Luis da Silva e Maria Natália Serrazina\*

Um grupo de professores do 1º ciclo da Benedita, a leccionar em 5 escolas diferentes, conscientes de que era necessário fazer algo para combater a rotina e a ideia de que a Matemática é uma "chatice" e tendo por hábito reunirem-se, ocasionalmente, para discutirem assuntos ligados à prática pedagógica (hábito este surgido após a participação no ProfMat de Caldas da Rainha), resolveu participar no projecto "Geometria: do Concreto ao Abstracto, da Indução à Dedução" do Núcleo de Leiria da APM que integrava 36 professores divididos em 5 grupos, um de cada ciclo, sendo 2 do 1º ciclo.

Pareceu-nos ser esta a melhor forma de dar consciência à ideia de formação de professores que temos. Pensamos que só através da experimentação e troca de experiências conseguiremos avançar na nossa atitude pedagógica.

Embora de escolas diferentes, mas não muito distantes conseguimos espaços (à noite e ao Sábado) para podermos trabalhar em conjunto, pois como sabemos o trabalho de projecto emana sobretudo do trabalho de grupo.

Foi esta metodologia de trabalho que melhor respondeu às nossas necessidades, pois íamos construindo o nosso saber ao mesmo tempo que trocávamos experiências.

### Trabalho desenvolvido

No início do desenvolvimento do projecto dedicámos várias sessões à pesquisa: organização de bibliografia, estudo vertical e horizontal do programa do 1º Ciclo, listagem de material e suas potencialidades dentro da área

da geometria e recolha de problemas da vida real relacionados com o tema.

Com a nossa participação neste projecto foi dada uma nova dinâmica aos diversos materiais, tanto aos que já utilizávamos, como aqueles que fomos produzindo. Construimos material sempre com a preocupação de que ele fosse acessível e valorizámos outro, existente na escola e pouco aproveitado.

Foram elaboradas fichas de trabalho adaptadas aos diferentes materiais para construção dos diversos conceitos geométricos pois, pensamos que devem ser estes privilegiados em detrimento das definições.

Estudámos as potencialidades de: tangram, geoplano, formas geométricas e Cuisenaire, fósforos, pavimentações, sólidos, etc..

Dos diversos materiais utilizados, destacamos as formas geométricas de material plástico, existente na maioria das escolas, uma vez que, neste material, descobrimos novas potencialidades (pavimentações, áreas, perímetros, volumes, sólidos, etc.).

Em relação aos restantes materiais atrás referidos, houve um aprofundamento do conhecimento que nos permitiu elaborar propostas que iriam facilitar a construção dos conceitos que íamos trabalhando.

Sentimos que estes materiais vieram influenciar positivamente a atitude dos alunos face à Matemática, estimulando os que demonstravam mais dificuldades quando os conceitos eram trabalhados de uma forma mais abstracta, permitindo-lhes atingir com mais facilidade alguns dos objectivos

para os quais estavam menos motivados.

Na fase de aplicação: planificámos actividades para os alunos, analisámos os resultados e reformulámos propostas e estratégias. Estas actividades iam permitindo desenvolver capacidades de: visualizar, manipular e interpretar relações visualmente, manipular mentalmente objectos, imaginar transformações, verbalizar (troca de ideias, negociar significados, desenvolver argumentos).

Procurámos desenvolver capacidades de organização e sentido espacial, explorando as relações geométricas sobre perspectivas diversas em vários momentos com os materiais referidos.

Elaborámos também uma brochura com propostas de trabalho para professores.

A par destes trabalhos fomos participando em acções de formação externa que tiveram o apoio do Centro de Formação da APM.

### Metodologia com os alunos

Numa 1ª fase foi possibilitado o contacto com os diversos materiais em actividades livres, seguindo-se actividades dirigidas, privilegiando o trabalho de grupo. Na mesma turma os alunos tinham por vezes trabalhos diferentes em cada grupo e as actividades diferenciadas permitiam que cada aluno avançasse ao seu próprio ritmo. Havia actividades para todos e o trabalho de uns não interferia com o trabalho dos outros. Este dinamismo levava o professor a uma grande movimentação dentro da aula mas os alunos foram adquirindo autonomia e aprenderam a gerir o seu

\* Este artigo foi-nos enviado assinado por estes dois colegas em nome do Grupo da Benedita

## Indução à dedução”

tempo, facilitando a vida ao professor.

Este tipo de trabalho fomentou o debate de ideias, opiniões individuais e de grupo, possibilitando a cada um desenvolver e aprofundar o seu próprio conhecimento.

### Divulgação

A divulgação de trabalho ocorreu de várias formas.

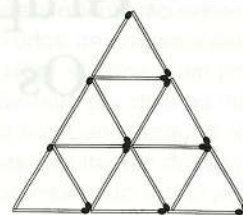
No LeiriMat dinamizámos uma sessão prática que envolveu a experimentação de materiais e propostas elaboradas pelo grupo (brochura acima referida).

Os materiais produzidos fizeram parte da exposição do 1º ciclo no ProfMat 94 e reforçaram o Centro de Recursos do Núcleo. Cabe aqui referir que o envolvimento de professores do 1º ciclo neste projecto contribuiu fortemente para a organização e dinamização do Baú que neste momento já se encontra ao serviço das Escolas da região.

O trabalho desenvolvido pelo grupo suscitou o interesse, de professores não envolvidos, por quererem experimentar novas formas de trabalhar a geometria. Atendendo ao interesse demonstrado organizámos uma mostra de materiais tendo por base o Baú referido e que designámos por “1ª Semana da Matemática – 1º ciclo” e que decorreu de 13 a 17 de Março último, na Benedita. Esta realização teve uma vertente direccionada para os alunos, professores e público em geral e uma acção especificamente para professores do 1º ciclo subordinada ao tema “Os materiais manipuláveis na construção de conceitos matemáticos”. De salientar que esta actividade envolveu cerca de meio milhar de alunos e meia centena de professores.

Com 18 fósforos construiu-se um triângulo grande que contém nove triângulos pequenos.

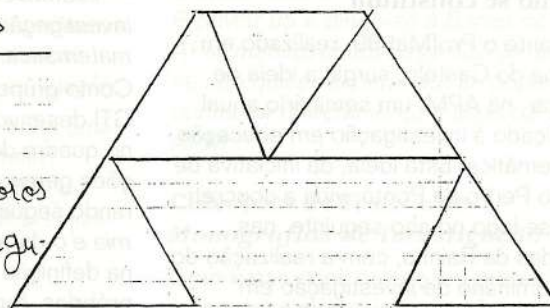
Retira cinco fósforos de modo a ficarem apenas cinco triângulos



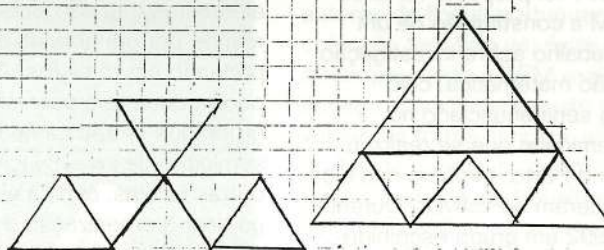
94 - 02 - 01

Priscila - 9 anos

Soluções encontradas tirando 5 fósforos ficando 5 triângulos



Encontrámos outras:



Conclusão  
Este trabalho obrigou-nos a pensar e a observar mas gostamos muito de descrever

Uma proposta de actividade e a resposta do grupo da Priscila

### Balanco final

O trabalho que desenvolvemos levou-nos a uma troca de experiências e saberes que julgamos ser a última fase de qualquer formação de professores.

Esta forma de trabalho permitiu-nos não confundir objectivos com os meios. Não nos preocupamos em cumprir formalidades, mas em dar resposta às nossas necessidades no trabalho com os alunos e na nossa valorização pessoal.

Temos consciência de ter deixado algum “rasto” e de ter criado espaços que irão levar a novas formas de organização.

Ao fazermos este balanço fica-nos a sensação de que quanto mais aprendemos mais sentimos a necessidade de prosseguir a nossa formação.

António Luis da Silva  
Esc. Prim. n° 2 de Azambujeira  
Mª Natália Serrazina  
Esc. Prim. de Cabecinha

# Grupo de Trabalho de Investigação

## Os primeiros anos de actividade

Ana Maria Boavida, Henrique Manuel Guimarães

### Como se constituiu

Durante o ProfMat 89, realizado em Viana do Castelo, surgiu a ideia de lançar, na APM, um seminário anual dedicado à investigação em educação matemática. Esta ideia, da iniciativa de João Pedro da Ponte, viria a concretizar-se logo no ano seguinte, nas Caldas da Rainha, com a realização do 1º seminário de investigação em educação matemática (SIEM I) que curiosamente se intitulou "Pré-sessão sobre Investigação em Educação Matemática no âmbito do ProfMat 90". Em 1991 foi proposta na direcção da APM a constituição de um grupo de trabalho sobre investigação em educação matemática, cujo lançamento seria anunciado no segundo seminário que se realizou nesse ano no Porto, também nos dias que antecederam o ProfMat. Durante o ano de 1992 um grupo escolhido para o efeito<sup>1</sup> preparou um documento base contendo os objectivos do grupo bem como algumas linhas orientadoras para a sua organização e desenvolvimento de actividades. Este documento viria a ser aprovado durante o SIEM III, realizado em Viseu em 1992. Estava criado o *Grupo de Trabalho de Investigação em Educação Matemática* (GTI).

### O que é e como funciona o GTI

O GTI é um grupo de trabalho da APM que pretende reunir pessoas interessadas em investigação em educação matemática e a que pode pertencer qualquer sócio que manifeste esse desejo<sup>2</sup>. São objectivos do GTI:

— *Constituir-se como um espaço de expressão da comunidade investigativa no campo da educação matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados;*

— *Promover a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da matemática.*

Como grupo de trabalho da APM, o GTI desenvolve as suas actividades no quadro dos objectivos e orientações gerais desta associação, procurando seguir os princípios da *autonomia* e o da *auto-suficiência*: autonomia na definição de objectivos específicos próprios, formas de funcionamento e actividades a realizar; auto-suficiência em termos financeiros.

As actividades do GTI são coordenadas por uma comissão de nove elementos que são eleitos nominalmente, por um período de dois anos, podendo ser reeleitos. A eleição ocorre durante a assembleia geral do grupo que se realiza no final do seminário de investigação anual. Entre outras tarefas, cabe a esta comissão garantir a organização dos seminários de investigação, assistir a Direcção da APM dando pareceres ou sugestões sobre questões relacionadas com a investigação em educação matemática e apresentando propostas relativas à dinamização de actividades neste domínio, participar na definição da política editorial da *Quadrante* e promover a organização e disponibilização de informações e materiais de investigação.

As principais actividades que se têm vindo a desenvolver no âmbito do GTI, relacionam-se, essencialmente, com a organização anual do seminário de investigação, com a publicação da revista *Quadrante* e com a edição da colecção *Teses* e da colecção *Monografias de Investigação*.

### O seminário de investigação em educação matemática

O seminário de investigação que desde 1990, sem excepção, se vem

efectuando anualmente, é uma realização da APM que, pensamos, tem já os seus créditos firmados, e que, em cada ano, é certamente esperada por todos os que se interessam pela investigação em educação matemática. Pretende-se, com estes seminários, manter um espaço de divulgação e de reflexão sobre trabalhos realizados neste campo e proporcionar um *forum* de discussão e aprofundamento de ideias.

Desde a sua primeira realização os SIEM ocorreram sempre nos dois<sup>3</sup> dias que imediatamente antecederam o ProfMat de cada ano. Corresponde esta opção à necessidade de promover a articulação entre investigação em educação matemática e ensino da matemática, um dos grandes objectivos do GTI. Para organizar o seminário, têm sido convidados grupos de professores do ensino superior.

### VI Seminário de Investigação em Educação Matemática



Évora, 6 e 7 de Novembro de 1995

É assim que, desde 1990, já organizaram o SIEM professores agregados às ESE's de Viana do Castelo e de Setúbal, à Faculdade de Ciências, à Universidade Nova de Lisboa e à Universidade do Minho. O seminário

deste ano é da responsabilidade de um grupo de professores da ESE de Portalegre.

Durante os seminários os trabalhos decorrem em sessões plenárias, comunicações, painéis de discussão e mesas redondas. A preocupação de valorizar a componente heurística do processo de investigação, conduz a incentivar a apresentação e discussão de trabalhos ainda em fase de desenvolvimento, a criar espaços para apresentação de projectos, e a estimular o debate de questões de carácter metodológico. Entre os temas que têm sido abordados nos vários SIEM podemos destacar: *resolução de problemas, formação de professores, utilização educativa de computadores e calculadoras, aprendizagem de conceitos matemáticos, concepções e atitudes de alunos e de professores em relação à matemática, experiências de inovação curricular, processos de construção do conhecimento matemático, fundamentação teórica para o campo da educação matemática e, mais recentemente, metodologias de investigação, saberes profissionais e desenvolvimento profissional dos professores de matemática.*

Os SIEM são dirigidos a todas as pessoas interessadas em investigação, quer se encontrem ou não inseridas em instituições mais tradicionalmente vocacionadas para este campo, incentivando-se, nomeadamente, a participação de professores envolvidos em projectos de investigação. É de realçar o aumento progressivo do número de participantes que nos últimos seminários rondou já a centena e que inclui docentes do ensino superior e não superior.

*A propósito, já se inscreveu no VI seminário de investigação em educação matemática que irá realizar-se nos dias 6 e 7 de Novembro de 1995 em Évora? Caso não o tenha feito, poderá ainda enviar a sua inscrição, o mais tardar, até 18 de Setembro para Unidade de Matemática e Informática, ESE de Portalegre, Praça da Repúbli-*

*ca, Apartado 125, 7301 Portalegre.*

### A revista *Quadrante*

A *Quadrante*, outra das actividades do GTI, é uma publicação periódica especialmente vocacionada para estimular o intercâmbio de ideias e experiências, divulgando trabalhos relacionados com a investigação em ensino e aprendizagem da matemática. Esta revista deu os seus primeiros passos na sequência da realização anual dos seminários de investigação.

No seu início, a *Quadrante* tinha uma periodicidade anual e o primeiro número surge em 1992 publicando textos baseados em sessões realizadas no II SIEM.



Logo no seu segundo ano, a *Quadrante* passa a semestral, começando a publicar artigos expressamente elaborados para a revista. Simultaneamente reconhece-se a possibilidade de editar números de incidência temática.

Nesta nova fase da vida da revista entra em funcionamento um *Conselho Editorial*, com funções de orientação geral da revista e de formulação de critérios de aceitação e revisão de artigos, e um *Conselho Consultivo* que poderá ser solicitado a rever artigos e a dar pareceres ou sugges-

tões sobre a orientação editorial da revista. Todos os artigos a publicar passam a ser sujeitos a um processo de revisão feito por dois ou mais revisores recebendo o autor as indicações resultantes desse processo. Até ao momento foram já publicados cinco números da *Quadrante*.

*Já assinou a Quadrante? É muito simples fazê-lo... Poderá aproveitar o ProfMat 95 e dirigir-se à Banca da APM manifestando esse desejo ou, se não quiser esperar até aí, poderá contactar directamente a sede da APM.*

### Colecções de Teses e de Monografias de Investigação

Com estas duas colecções pretende-se contribuir para a divulgação de trabalhos de investigação. A primeira é dedicada a trabalhos realizados ao nível de provas de mestrado e de doutoramento levados a cabo por autores de língua portuguesa. Esta colecção tem tido um êxito assinalável e tem permitido à APM realizar um serviço importante e muito pouco vulgar, de forma simples, eficaz e com qualidade. Conta já com mais de 30 títulos, com alguns trabalhos de autores brasileiros e a procura tem sido significativa (não só em Portugal, pois há casos de pessoas no Brasil e em Espanha que encomendaram uma colecção de todas as teses).

Com a colecção *Monografias de Investigação*, o objectivo é divulgar outro tipo de trabalhos de investigação na mesma área. Até este momento esta colecção tem só um título, estando em estudo a possibilidade da sua extensão a breve prazo.

Os trabalhos editados em qualquer das colecções podem ser adquiridos ou consultados na sede da APM, bem como as teses editadas pelo Projecto Minerva do Pólo do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa que a APM também distribui<sup>4</sup>.

*É talvez o momento de lhe fazer um apelo. Se realizou uma tese de mestrado ou doutoramento relacionada com educação matemática e está*

interessado em que ela integre a colecção Teses, o que tem de fazer é muito simples. Por favor envie um exemplar, em bom estado, para sede da APM solicitando uma declaração, que depois deverá devolver devidamente preenchida, autorizando a inclusão da tese na colecção.

### Outras actividades

A organização e divulgação de informação sobre a investigação em educação matemática em Portugal, tem sido desde sempre uma das preocupações do GTI. A constituição das colecções de teses e de monografias e a sua divulgação decorrem precisamente dessa preocupação.

Com o mesmo objectivo, tem-se também procurado manter e actualizar uma base de dados sobre autores e trabalhos de investigação que já deu origem a uma brochura intitulada *Quem é Quem na Investigação em Educação Matemática*. Esta publicação pretende tornar mais acessível um conjunto de informações sobre trabalhos realizados e respectivos autores, uma vez que se pensa que esta informação pode ser útil a todos os que se interessam pela investigação em educação matemática.

Uma outra das preocupações do GTI é intensificar a articulação entre a investigação em educação matemática e o ensino da matemática. Neste sentido, como primeiro esforço, tem-se tentado fazer sentir no ProfMat, o trabalho levado a cabo no âmbito do grupo. Promove-se, deste modo, a divulgação das suas publicações e reserva-se um espaço próprio onde se dá conta dos principais aspectos que foram abordados no SIEM desse ano e onde se divulgam informações sobre a *Quadrante* e outras actividades desenvolvidas.

No ProfMat 95 o GTI tem previsto organizar uma sessão temática subordinada ao tema *Reflexão sobre a Prática*. Nesta sessão procurar-se-á explorar novas possibilidades de potenciar a interacção entre a investigação e o ensino da matemática, a

partir da análise, feita conjuntamente por professores e investigadores, de dados de investigação.

Em finais de 1993, o GTI celebrou um protocolo de colaboração com a Secção de Educação Matemática (SEM) da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (SPCE) com o objectivo de apoiar, reforçar e incrementar a investigação em educação matemática em Portugal. O âmbito deste protocolo é muito diverso, sendo de destacar a igualdade de tratamento dos sócios, da APM ou da SPCE, nas realizações relacionadas com a investigação em educação matemática promovidas por cada um dos grupos, a participação ao nível do Conselho Editorial da revista *Quadrante* e a divulgação recíproca de actividades.

### O que temos em mãos e o futuro que antevemos

Vem aí o SIEM VI e está a decorrer todo o processo de organização. Preparam-se novos números da *Quadrante*, entre os quais um número temático sobre *Perspectivas sócio-culturais da aprendizagem da matemática*. Estudam-se formas possíveis de levantamento e divulgação de projectos de investigação que têm vindo a ser realizados. Continuam a ampliar-se as colecções Teses e *Monografias de Investigação*.

Para o desenvolvimento do seu trabalho os objectivos do GTI parecem manter-se pertinentes. A comunidade portuguesa de investigação em educação matemática continua a crescer, em autores e instituições envolvidos, em projectos e trabalhos de investigação realizados. É pois importante manter e desenvolver os espaços de expressão e de comunicação que já foram criados no GTI e incrementar a divulgação de trabalhos e o alargamento e aprofundamento da discussão e confronto de ideias e experiências.

No que se prende com a articulação entre o campo da investigação e o campo do ensino da matemática, prevê-se este ano, como dissémos, organizar uma sessão no ProfMat —

*Reflexão sobre a Prática* — em que se propõe que professores e investigadores pensem em conjunto sobre questões e dilemas que se colocam ao ensino e aprendizagem da matemática. Essa sessão pode constituir um importante ponto de partida para que seja dado mais um passo na compreensão das complexidades e subtilidades da articulação entre aqueles dois campos.

Ser um grupo de investigação numa associação de professores confere ao GTI uma natureza particular e uma responsabilidade especial. Tradicionalmente, pensamos, há dificuldades na relação entre investigação e ensino. Continuamos a acreditar que há condições, se não para resolver, pelo menos para melhorar, em ambos os sentidos, essa relação: o modo como é visto o trabalho de investigação pelos professores e o modo como estes e o seu trabalho são vistos pelos investigadores. O GTI pode aí ter um papel e, pensamos, tem-no já desempenhado de alguma maneira. Sentimos, no entanto, que muito há para fazer no que temos designado por *articulação entre investigação e ensino*. E neste campo, são bem vindas todas as ideias e todas as sugestões.

### Notas

1. Foi criada uma espécie de comissão instaladora que funcionou durante esse ano de que faziam parte João Pedro Ponte, José Manuel Matos, Henrique Manuel Guimarães.
2. Tem-se pedido o preenchimento de um formulário, que se encontra disponível na sede da APM, para se ficar com um conjunto de dados sobre a pessoa interessada de modo a tornar mais eficaz o contacto com ela ou o envio de informações sobre as actividades do grupo.
3. Com a excepção do primeiro que durou apenas um dia.
4. A lista de títulos disponíveis é apresentada na página seguinte.

Ana Boavida  
Universidade Nova de Lisboa  
Henrique Manuel Guimarães  
Universidade de Lisboa

## Colecção de Teses e Monografias de Investigação

### Teses editadas pela APM\*

- *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação-com recurso à folha de cálculo*  
Susana Carreira. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1992.  
2.200\$00 - 2.650\$00
- *A calculadora no percurso de formação de professoras de Matemática*  
Albano Silva. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1991.  
2.600\$00 - 3.400\$00
- *A model for software evaluation*  
Maria da Conceição Costa. Tese de Mestrado, Universidade de Boston, 1984.  
900\$00 - 1.200\$00
- *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7.º ano de escolaridade*  
Joana Porfírio. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
1.800\$00 - 2.350\$00
- *A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática. Um estudo no 1.º ciclo do ensino básico*  
Maria de Fátima Gordo. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 1993.  
1.650\$00 - 2.180\$00
- *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática*  
António Borralho. Tese de Mestrado, Universidade de Salamanca, 1990.  
1.200\$00 - 1.550\$00
- *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*  
Maria Leonor Cunha Leal. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1992.  
2.000\$00 - 2.650\$00
- *Avaliação de necessidades de formação dos professores dos Centros Escolares de Informática do Projecto Minerva das escolas de Viana do Castelo*  
José Portela. Tese de Mestrado, Universidade do Minho, 1991.  
1.500\$00 - 1.950\$00
- *Calculadoras na educação matemática: Uma experiência na formação de professores*  
Maria Cristina Loureiro. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1991.  
2.100\$00 - 2.750\$00
- *Computer programming and ninth-grade students' understanding of variable*  
Maria da Conceição Almeida. Tese de Doutoramento, Universidade de Vanderbilt, 1989.  
1.200\$00 - 1.550\$00
- *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de Matemática: Um estudo longitudinal de três casos*  
Maria Isabel do Vale. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
1.620\$00 - 2.100\$00
- *Concepções e práticas de professores de Matemática: Três estudos de caso*  
Ana Paula Canavaro. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
1.900\$00 - 2.500\$00
- *DJA: Mathematical conversations with a Portuguese speaking bilingual student*  
Darlinda Maria Pacheco Moreira. Tese de Mestrado, Universidade de Massachusetts, 1994.  
1.260\$00 - 1.600\$00
- *Efeitos de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do ensino básico*  
Maria Helena Fernandes. Tese de Mestrado, Universidade do Minho, 1990.  
1.350\$00 - 1.780\$00
- *Ensinar Matemática, concepções e práticas*  
Henrique Guimarães. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1988.  
1.500\$00 - 1.950\$00
- *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs*  
João Pedro da Ponte. Tese de Doutoramento, Universidade da Geórgia, 1984.  
1.400\$00 - 1.800\$00
- *Identidade profissional dos professores de Matemática. Processos de formação*  
Diamantina Carmona. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 1993.  
1.850\$00 - 2.400\$00
- *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie*  
Ana Maria Mesquita. Tese de Doutoramento, Universidade Louis Pasteur, 1989.  
1.200\$00 - 1.550\$00
- *Meios informáticos na planificação do ensino-aprendizagem: Recurso a uma base de conhecimento*  
Maria Odete da Conceição João. Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 1993.  
1.300\$00 - 1.850\$00
- *Novas Tecnologias de Informação: Um programa de formação de professores de Matemática*  
Maria Graciosa Velloso. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1991.  
2.800\$00 - 4.000\$00
- *O computador na Educação Matemática: Percursos de formação*  
José António Duarte. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
1.750\$00 - 2.300\$00
- *O computador no ensino da Matemática: Uma contribuição para o estudo das concepções e práticas dos professores*  
António Filipe Azevedo. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 1993.  
2.200\$00 - 2.650\$00
- *O tipo de escrita da língua materna e a sua influência na aprendizagem da Matemática*  
João Sampaio Maia. Tese de Mestrado, Universidade do Porto, 1990.  
1.100\$00 - 1.450\$00
- *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789*  
Paulo Manuel Caetano Abrantes. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 1994.

- 3.400\$00 - 4.850\$00
- *Os professores de Matemática e a resolução de problemas: Três estudos de caso*  
Maria José Delgado. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
1.600\$00 - 2.100\$00
- *Perspectivas dos professores sobre o ensino da Matemática*  
Elisabete da Fonseca Rodrigues. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1993.  
2.350\$00 - 3.360\$00
- *Processos de resolução de problemas: Uma abordagem à construção do conhecimento matemático por crianças do ensino primário*  
Maria Isabel Valente Pires. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 1993.  
1.400\$00 - 1.800\$00
- *Resolução de problemas em Educação Matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*  
Ana Maria Boavida. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 1993.  
1.800\$00 - 2.350\$00
- *Students' alternative frameworks about the notion of limit*  
Maria Eduarda Moura. Tese de Mestrado, Universidade de Cornell, 1993.  
1.200\$00 - 1.600\$00
- *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*  
Marcelo de Carvalho Borba. Tese de Doutoramento, Universidade de Cornell, 1993.  
2.400\$00 - 3.420\$00
- *Teaching mathematics in mixed ability classes*  
Ana Paula Mourão. Tese de Mestrado, Universidade de Londres, 1988.  
1.100\$00 - 1.450\$00
- *The impact of an in-service teacher training programme on teachers involved with computers in education*  
Maria Cecília Monteiro. Tese de Doutoramento, Universidade de Londres, 1994.  
2.300\$00 - 3.280\$00
- *The introduction of a problem solving strategy as a means to teach mental arithmetic*  
Pedro Palhares. Tese de Mestrado, Universidade de Londres, 1992.  
1.500\$00 - 1.950\$00
- *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil*  
Guida de Abreu. Tese de Doutoramento, Universidade de Cambridge, 1993.  
2.025\$00 - 2.630\$00
- *The use of calculators in mathematical problem solving*  
Graça Cebola. Tese de Mestrado, Universidade de Londres, 1992.  
900\$00 - 1.200\$00
- *Um estudo de etnomatemática: Sua incorporação na elaboração de uma proposta pedagógica para o "Núcleo-Escola" da favela de Vila Nogueira - São Quirino*  
Marcelo de Carvalho Borba. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, 1987.  
1.850\$00 - 2.650\$00
- *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum*  
Teresa Assude. Tese de Doutoramento, Universidade Joseph Fourier, 1993.  
2.000\$00 - 2.650\$00
- *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal*  
José Manuel Matos. Tese de Mestrado, Universidade de Boston, 1984.  
1.250\$00 - 1.650\$00

### Monografias\*

- *Viver a Inovação, viver a Escola*  
João Pedro da Ponte, Henrique Manuel Guimarães, Ana Paula Canavaro, Leonor Cunha Leal, Albano Silva. Co-edição APM e Projecto DIC, 1993.  
1.000\$00 - 1.300\$00

### Teses editadas pelo Projecto Minerva

Podem ser adquiridas na APM as seguintes teses editadas pelo Projecto Minerva:

- *A folha de cálculo na educação matemática: Uma experiência com alunos do ensino preparatório*  
Maria Leonor Moreira. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1989.  
(esgotada)
- *Centros de Recursos Educativos, potencialidades e actualidades*  
Cecília Bento. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1991.  
1.000\$00
- *Logo na educação matemática. Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos*  
João Filipe Matos. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 1991.  
(esgotada)
- *O computador e o programa ESTUDUFUNC no estudo de funções*  
Fernando Duarte. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1992.  
(esgotada)
- *O computador na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade*  
Manuel Saraiva. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1992.  
(esgotada)
- *O computador na recuperação em Geometria de alunos do 9.º ano*  
Maria Augusta Neves. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1988.  
(esgotada)
- *Os computadores e a mudança educacional: Estudo de uma escola preparatória*  
Ana Cristina Esgalhado. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 1988.  
1.000\$00

\* Preços reduzidos para sócios da APM e da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação

## Debate Nacional sobre o Ensino da Matemática

## Matemática em exame

Paula Teixeira

Não ia com uma expectativa muito positiva sobre este Encontro, mas saí dele bastante satisfeita. Pela primeira vez pude assistir a uma reunião onde praticamente todos os professores intervenientes como animadores da discussão e conferencistas eram do ensino superior e não estavam de acordo uns com os outros. Pela primeira vez assisti a um debate muito vivo sobre ideias inconciliáveis. No futuro pode ser que haja uma maior aproximação entre as posições mais extremadas. Afinal este foi o primeiro debate!

Decorreu nos dias 19 e 20 de Maio, na Reitoria da Universidade de Lisboa, um debate sobre o Ensino da Matemática, com o título Matemática em Exame, organizado pela Universidade Aberta de Lisboa e pela Faculdade de Ciências em representação da Universidade de Lisboa.

Esta iniciativa foi anunciada às escolas em Dezembro e no anúncio podíamos ler que tinha como objectivos "congregar de forma unificadora, vários temas com relevância no contexto actual da educação matemática". Nada era especificado sobre o formato do debate ou sobre os intervenientes. Posteriormente, os cerca de duzentos professores que se inscreveram, tiveram acesso ao programa, enviado com uma semana de antecedência.

A maioria dos professores inscritos eram do Ensino Secundário. Havia alguns colegas que costumo encontrar nos ProfMats, mas grande parte daquela assistência era-me estranha. Curiosamente muitos dos colegas que encontrei da APM eram do Algarve, Marinha Grande, Abrantes, etc., e tinham-se deslocado a Lisboa para participar neste debate. Fiquei espantada e com uma enorme admiração por eles.

No primeiro dia pudemos assistir a duas conferências: uma proferida por Rocha Trindade, Reitor da Universidade Aberta e outra por Luís Paixão, da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Na sua intervenção, Rocha Trindade fez uma análise explicativa do "terror" que a Matemática inspira a muitas pessoas e defendeu uma visão da Matemática como instrumento ao serviço das outras áreas. Este é o exemplo de uma das ideias que está longe de ser consensual. Durante a

sua conferência, Rocha Trindade, fez uma crítica aos programas do ensino básico, afirmando que eles estão longe das finalidades deste nível de ensino e que continuam a estar muito virados para o prosseguimento de estudos: "No Ensino Básico só devemos ensinar instrumentos que tenham relevância para todas as profissões, quer seja a de pescador, agricultor, pintor ou engenheiro. Estaremos nós interessados em conhecer esses instrumentos, ou damos mais importância a outros aspectos que só deveriam aparecer por acréscimo, como por exemplo a criatividade e a inteligência brilhante?[...] Muitas vezes não se ensina do modo mais fácil, mas do modo intelectualmente mais difícil e mais abstracto, como se fosse cientificamente indispensável e pedagogicamente correcto".

A segunda intervenção do dia, feita por Pinto Paixão, teve como tema central o insucesso observado na Faculdade de Ciências nas disciplinas de Matemática. Ao analisar as causas do insucesso — falta de estudo, programas extensos no secundário, avaliação, etc. — referiu algo muito animador, quando disse "...seria fácil para os docentes do ensino superior dizer que os alunos vêm mal preparados, mas não é essa a nossa postura na Faculdade de Ciências. [...] Há programas que não foram cumpridos, há conhecimentos que não foram devidamente integrados, todavia nada pode justificar atitudes do tipo se não sabem deviam saber". Pinto Paixão fez uma crítica aos exames e às provas globais do Ensino Secundário pelo facto de condicionarem negativamente o tipo de ensino que se faz e apontou como uma causa de insucesso na Universidade a extensão dos





programas do ensino não universitário, que conduz à superficialidade no aprofundamento das matérias, prejudicando fortemente o amadurecimento das ideias e dos conceitos.

### Matemática e selectividade

Da parte da tarde teve lugar um debate sobre Matemática e selectividade. A mesa era constituída pela Maria Eugénia Martins, Susana Nápoles, João Pedro Ponte e Jaime Carvalho e Silva, que tinham como função lançar a discussão através de uma pequena intervenção inicial.

Maria Eugénia Martins fez a primeira intervenção e disse que achava que não havia selectividade na Matemática porque:

- está socialmente desculpabilizado o insucesso em Matemática;
- não é preciso saber Matemática para entrar na Universidade porque, na medida em que as provas específicas não são eliminatórias, os alunos chegam na mesma às Universidades sem saberem nada de Matemática.

Maria Eugénia referiu que hoje em dia as expectativas que tem, relativamente aos alunos que recebe na Universidade, são nulas. As expectativas viram-se mais para o Português. Se os alunos souberem entender,

raciocinar e escrever já não é mau, referiu esta professora da Faculdade de Ciências da Univ. de Lisboa. Disse ainda que os alunos continuam a escrever com muitos erros ortográficos e que vários dos alunos que estão na Faculdade de Ciências de Lisboa obtiveram 3 pontos em 100 nas provas específicas. Considerou que a culpa de toda esta situação "é dos agentes de ensino. Há muita gente que não é professor de Matemática".

De seguida João Pedro Ponte, da Faculdade de Ciências da Univ. de Lisboa, numa intervenção bem diferente da anterior, afirmou que de facto existia uma grande tradição, associada à Matemática, de selectividade e elitismo. Acrescentou que "não temos dados para afirmar que os alunos hoje sabem menos. É gratuito dizer que a situação é pior do que a que existia". Depois enunciou algumas acções que se poderiam pôr em prática para combater o insucesso:

- deixar de medir o insucesso exclusivamente sob a forma de resultados obtidos nos exames; conseguir um 10 é provavelmente mais um indicador de insucesso do que de sucesso;
- a avaliação penaliza quem é menos vocacionado para testes escritos; devemos também privilegiar a oralidade;

- todo o sistema de acesso ao ensino superior baseado somente em provas escritas, está errado; provas escritas tipo testes são profundamente injustas;
- deveria haver diferenciação curricular de acordo com os cursos a que os alunos se destinam.

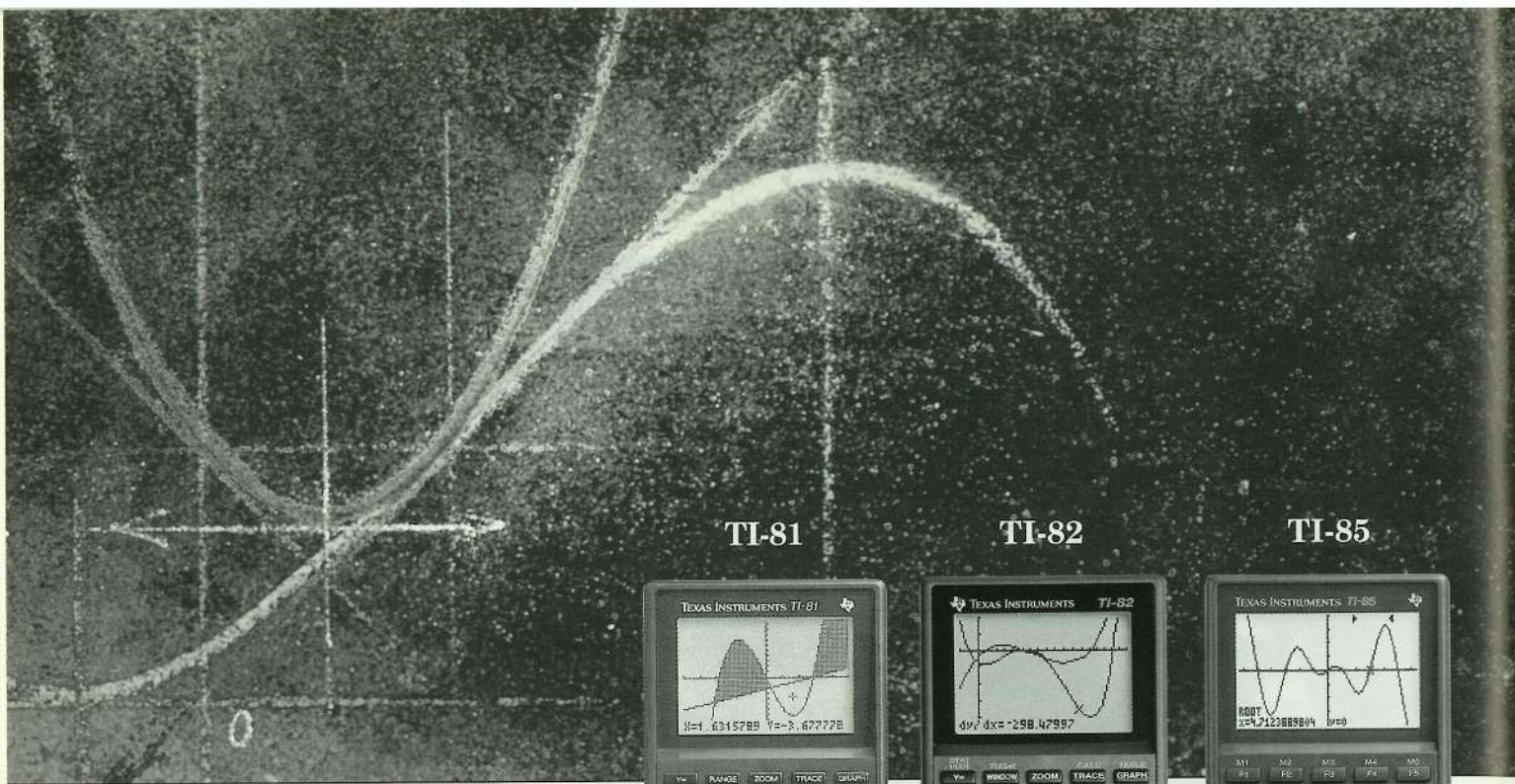
Susana Nápoles, também da Faculdade de Ciências da Univ. de Lisboa, referiu a necessidade de diferenciar o que se ensina em Matemática, defendendo a criação de alternativas antes do 10.º ano. Defendeu que o programa do ensino secundário deveria ser reduzido e que deveria haver uma maior ligação entre os vários graus de ensino porque há uma degradação de ano para ano no conhecimento dos alunos do 1.º ano das Universidades.

Na sua intervenção, Jaime Carvalho e Silva criticou o facto do sistema escolar marcar para o resto da vida um aluno que não passa numa prova de selecção, o que não deveria nunca acontecer. Daí a desconfiança que tem das cadernetas escolares. Afirmou que todos os alunos têm hipótese de ter sucesso real e por isso deveriam ser criadas estruturas para auxiliar os alunos que tropeçam. Defendeu também que a entrada na Universidade deveria ser feita de forma diferente, e mostrou-se contra o facto de se fazerem somente provas de um determinado tipo. Afirmou ainda que a Universidade se tem alheado deste tipo de problemas, só se manifestando para responsabilizar o ciclo anterior. Na sua opinião a Universidade deveria intervir, por exemplo, desempenhando um papel importante na formação de professores.

O facto de João Pedro Ponte e de Jaime Carvalho e Silva assumirem posições muito diferentes das anteriores tornou mais vivo o debate.

### Novas Tecnologias

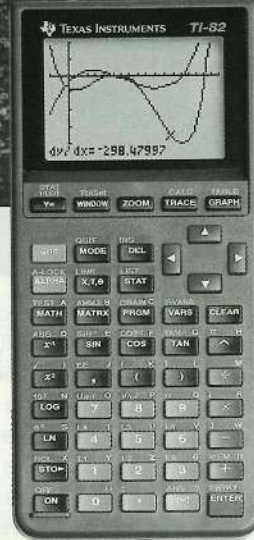
Na manhã do dia seguinte assistiu-se a uma esplêndida conferência intitulada *Novas Tecnologias: Uma revolução urgente*, de João Pedro Ponte, (ver artigo na página 2 desta revista) que



## Calculadoras Gráficas TI

Prestamos muita atenção aos professores quando nos disseram aquilo de que precisavam para ensinar. E prestamos muita atenção aos alunos quando nos disseram aquilo de que precisavam para aprender.

O resultado? A gama de calculadoras gráficas TI, que representa um vasto conjunto de recursos de ensino e aprendizagem abrangendo todos os níveis de ensino - ensino básico, secundário, universitário - com o tipo de funcionalidade adequada.



# OS ALUNOS MERECEM O MELHOR. E VOCE TAMBÉM!

As calculadoras gráficas não mostram apenas os cálculos finais, também explicam os conceitos. É a rápida apreensão dos conceitos que torna a matemática mais acessível, deixando mais tempo livre para a exploração e desenvolvimento de um interesse genuíno sobre a matéria.

Observe a gama de calculadoras gráficas da Texas Instruments. A TI-81 para o ensino básico (3º ciclo), a TI-82 para o ensino secundário e a TI-85 para o ensino universitário. Escolha a mais adequada às suas necessidades. Aumente a eficácia do ensino, facilitando o método de aprendizagem dos alunos.

```
Jcos AX+sin AB
1.38
X^4-4X^2+AX^2-2BX-
4C+3X^3
6194.80
(A+B)(C-X)/2E12
2.47E-8
```

**TI-81:** Visualiza a totalidade das expressões da forma como foram introduzidas e mostra os cálculos finais.

X	Y1	Y2
1.5	2.25	4.5
2.5	6.25	12.5
3.5	12.25	24.5
4.5	20.25	40.5
5.5	30.25	60.5

Y1=9

**TI-82:** A tabela de avaliação das funções mostra os resultados numéricos em formato de tabela.

```
ILLUM=INTEN*HEIGHT</...
ILLUM=2
INTEN=1000
HEIGHT=53.458763246...
BASE=23
bound=( -1r99, 1r99 )
If t-r.t=0
```

**TI-85:** O SOLVER da TI-85 é uma poderosa ferramenta para trabalhar com equações e resolver em ordem às diferentes variáveis.

	TI-81	TI-82	TI-85
- Gráfico da funções	até 4	até 10	até 99
- Gráfico de equações paramétricas	até 3	até 6	até 99
- Gráfico de equações polares		até 6	até 99
- Gráfico de sucessões		até 2	
- Gráfico das soluções de equações diferenciais			até à 9th ordem
- Percorre os gráficos representados	X	X	X
- Resolução de raízes/ Mínimos/Máximos		X	X
- Características do zoom	7	13	15
- Tabelas dos valores das funções		X	
- Número de matrizes	até 3	até 5	ilimitada*
- Dimensão máxima da matriz	6x6	30x30*	50x50*
- Comprimento máximo da lista		99	ilimitado*
- Modelos de regressão	5	8	8
- Gráficos «box & whisker»		X	
- Divisão do ecrã		X	
- Resolução de equações			X
- Números complexos			X
- Espaço em memória 32Kb	4.6Kb	32Kb	32Kb
- 2 anos de garantia	X	X	X

(\*) Os números alteram-se ao com o uso da calculadora, até à saturação da memória disponível (32 kb)

**Beldata** Lisboa Rua Sarmento de Beires 3-A, 1900 Lisboa  
Tel: 01805435/01805268 Fax: 01848512  
Oporto Rua Aval de Cima 139-155,  
Apartado 2089, 4202 Oporto  
Tel: 521735/5500439 Fax: 5503819

**TEXAS  
INSTRUMENTS**

**Tetri** Estrada Exterior da Circunvalação  
798 Apartado 48, 4436 Rio Tinto  
Tel: 02 88 99 532 Fax: 029800527  
**Dismel** Rua do Terreirinho, 4 - 3 Dto. 1100 Lisboa  
Tel: 018861527 Fax: 018880189

causou alguma indignação entre os seus colegas de Faculdade pela defesa que fez da utilização da tecnologia gráfica. Afirmou João Pedro que as novas tecnologias (NT) trazem ao ensino "uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação (coloca o cálculo no seu devido lugar); um reforço da linguagem gráfica e de novas formas de representação; uma maior atenção às capacidades intelectuais de ordem mais elevada; uma visão do professor em formação permanente; um reforço do papel do professor na preparação, condução e avaliação do processo de ensino/aprendizagem; uma nova relação professor/aluno". Terminou com um conjunto de propostas mínimas para os diversos níveis de ensino e defendeu que o professor de Matemática especializado em trabalhar com as NT tenha funções de apoio aos restantes professores.

### Reforma curricular nos ensinos básico e secundário

O debate sobre este tema, que se seguiu à conferência anterior, foi introduzido e animado com intervenções iniciais de Paulo Abrantes (FCUL), Luís Sanches (FCUL) e José Manuel Matos, da Universidade Nova de Lisboa.

Paulo Abrantes foi o primeiro orador e fez uma intervenção onde questionou o que era "Cumprir o Programa". Defendeu que o programa era para cumprir, mas era preciso perceber "o que é o programa" e "o que é cumprir o programa". Um programa é constituído por métodos, conteúdos e objectivos e todas estas vertentes têm um papel igualmente importante. Afirmou que os novos programas representavam um avanço em relação aos programas anteriores, mas que esse avanço não era tão nítido no Ensino Secundário devido à extensão e a formulações ambíguas que levantam dúvidas relativamente às opções que verdadeiramente estão por detrás do programa. Em jeito de conclusão, Paulo Abrantes afirmou "que é preciso integrar:

- aptidões básicas e capacidades de ordem superior;
- saber matemática e saber usar a matemática;
- aspectos cognitivos e aspectos não cognitivos (atitudes, concepções, etc.)"

Terminou dizendo "nós não cumprimos o programa se não dermos por exemplo a geometria, mas também não o cumprimos se a dermos de qualquer maneira"

De seguida Luís Sanches fez uma intervenção defendendo a diversificação dos programas de Matemática em função das saídas dos alunos no fim do secundário. Afirmou ainda que a destreza de cálculo que os alunos possuíam à entrada na Faculdade não era suficiente e que lhe parecia que o mal começava no Ensino Básico porque o cálculo com denominadores, radicais, etc, não era cumprido; o recurso à calculadora deveria ser feito de uma forma moderada e discorda das sugestões feitas no programa oficial sobre a utilização da calculadora no cálculo de raízes aproximadas e no estudo dos infinitésimos; considerou despropositada a ênfase dada aos aspectos históricos da matemática; discordou das indicações metodológicas que reforçam o atender ao ritmo de cada aluno e à sua individualidade porque "isso é sempre um pretexto para nunca se darem os programas".

José Manuel Matos referiu que, do seu ponto de vista, a actividade matemática tinha três dimensões importantes: a dimensão social, a dimensão cognitiva e a dimensão afectiva. Caracterizou de uma forma breve cada uma destas vertentes e a seguir falou de um outro aspecto importante que é a diversidade. Afirmou que a diversidade era encarada segundo dois vectores, a diversidade individual e a diversidade social, tendo dedicado alguns minutos a caracterizá-los.

### Associações e Sociedades Científicas

O encontro terminou com uma mesa redonda muito *morna*. O tema para discussão era *O papel das sociedades*

*científicas e associações profissionais na mudança curricular*. Participavam neste debate representantes das sociedades e associações, sendo Jaime Carvalho e Silva, o moderador. Percebi que, com excepção da APM, só havia "Sociedades" na mesa, onde estavam representantes da Sociedade Portuguesa de Estatística, da Sociedade Portuguesa para a Classificação e Análise de Dados, da Sociedade Portuguesa de Matemática, e da Sociedade Portuguesa de Investigação Operacional.

Quando o debate se iniciou, reparei que a Adelina Precatado era a única professora do ensino não superior presente na mesa e a única mulher. Já depois do debate ter começado chegaram as duas representantes que faltavam, mas que também eram professoras do Ensino Superior.

O moderador fez uma intervenção breve explicando como se iria processar o debate e quais as perguntas que gostaria de ver respondidas, a saber:

- Em que medida e em que termos é que cada associação/sociedade entende que o Ministério da Educação deve pedir a colaboração da associação/sociedade?
- Relativamente ao Ensino Básico: que perspectivas têm e o que deve ser feito para o melhorar. O mesmo relativamente ao Ensino Secundário.
- O que pensa do acesso ao Ensino Superior?
- O que pensa do insucesso no Ensino Superior?

Cada Sociedade começou por se apresentar, contando um pouco da sua história. Percebe-se a posição tomada pelas Sociedades porque, com excepção da SPM, todas eram praticamente desconhecidas dos presentes. Só Adelina Precatado não precisou de apresentar a APM, que é conhecida por quase todos os professores, e por isso pôde responder à pergunta que tinha sido feita, explicando que a APM, juntamente com outras Associações, tem reivindicado junto do Ministério da Educação o estatuto de parceiro social, devendo

## Como pode colaborar com a *Educação e Matemática*

**1.** Envie-nos um artigo, que escreveu sozinho ou em colaboração com colegas, sobre uma questão que considera relevante no ensino-aprendizagem da Matemática. O texto

- pode ser uma descrição e análise de uma aula, uma sequência de aulas, uma experiência nova que tentou, algo que aconteceu numa aula ou na escola;
- ou uma reflexão pessoal baseada na sua experiência e/ou em leituras que fez;
- ou então uma opinião sobre os programas, as condições do ensino da Matemática, a situação ou formação dos professores, etc., etc..

Não hesite em pedir uma opinião — e mesmo ajuda, se achar necessário — a algum colega da Redacção. De qualquer modo, o seu artigo será lido com atenção e nós comunicaremos as nossas sugestões para o melhorar, se for caso disso.

**2.** Envie-nos materiais (em especial fichas de trabalho) que tenha criado ou adaptado para usar nas suas aulas e que lhe pareçam de interesse para possível divulgação na secção *Materiais para a Aula de Matemática*. Junte os seus comentários sobre o uso desses materiais se achar necessário.

**3.** Envie-nos materiais para alguma das outras secções da Revista:

- *O Problema do Trimestre* — proposta de problemas ou a resposta a problemas saídos;
- *Vamos Jogar* — um jogo para usar na aula com as correspondentes explicações;
- *Pense Nisto* — uma questão para pensar;
- *Para Este Número Seleccionámos* — um texto já publicado mas que seria interessante reproduzirmos na *Educação e Matemática* (traduzido se o original estiver escrito noutra língua); nós pediríamos autorização para reproduzi-lo.

**4.** Escreva-nos uma carta com a sua reflexão pessoal, ou com uma simples ideia que teve, a propósito de alguma questão que lhe pareça de interesse. A Revista não publica só "artigos", tem uma secção destinada a ideias, pontos de vista e comentários breves.

**5.** Envie as suas reacções a artigos e materiais surgidos na Revista, quer sejam de apoio ou de discordância. Seria muito bom mantermos discussões sobre questões polémicas nas páginas da Revista.

**6.** Comunique-nos ideias para temas a tratar na Revista, mesmo que não queira escrever sobre eles. Em especial, pode ser importante sabermos que valeria a pena fazermos uma reportagem numa escola ou numa turma.

**7.** Envie-nos notícias e informações sobre acontecimentos que lhe pareçam relevantes para publicação, incluindo fotografias e outras ilustrações.

ser consultada para tudo o que diga respeito ao Ensino da Matemática, nomeadamente programas, recursos a enviar para as escolas e formação de professores.

Natália Bebiano disse que a SPM quer ter voz na política de ensino e investigação, quer fazer parte da Comissão de avaliação dos manuais escolares e quer discutir a existência da disciplina de Métodos Quantitativos no agrupamento das Humanidades. Disse ainda que eram precisos guias de acompanhamento dos manuais escolares.

A representante da Sociedade Portuguesa de Investigação Operacional, teve uma posição muito realista ao dizer que só conhecia o Ensino Superior pelo que não ia dar opiniões

sobre os outros graus de ensino.

Enfim o debate continuou de uma forma desinteressante, principalmente porque entre as associações/sociedades presentes não havia quase nada em comum.

A partir de agora ninguém poderá ficar indiferente. Há que tomar opções. Pela primeira vez pudemos assistir a um confronto entre professores que integram correntes de pensamento opostas e isso foi bom. Este confronto foi essencialmente protagonizado de um lado por João Pedro Ponte e Jaime Carvalho e Silva e do outro por professores de Análise, Álgebra e Estatística da Faculdade de Ciências de Lisboa. Pela palavra confronto, não se deve

entender que há uma guerra. O confronto foi de ideias, foi o primeiro debate público, e por isso foi positivo. Significa que o debate está lançado e isso irá com certeza levar a uma reflexão mais profunda que só poderá ser benéfica para o ensino da Matemática.

Paula Teixeira  
Esc. Sec. da Damaia

### *Materiais para a aula de Matemática*



Da colega Lúcia Grilo, da Esc. Sec. D. João II, de Setúbal, recebemos a ficha de trabalho da página seguinte, inspirada numa ideia de um teste de avaliação.

Escola.....

Professor(a).....

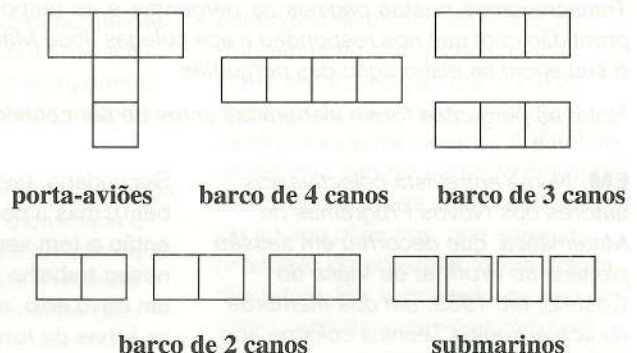
Ano/Turma..... Data.....

Aluno(a).....

## Probabilidades na Batalha Naval

A Batalha Naval é um conhecido jogo muitas vezes utilizado para fazer passar mais depressa uma ou outra aula mais aborrecida. É formado por uma quadrícula de 10 por 10 onde se dispõem os vários barcos que o “inimigo” irá tentar afundar com tiros certos. A quadrícula e os barcos que constituem a armada de cada um dos jogadores são os seguintes:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										



- Qual é o barco em que é mais provável acertar? Porquê?
- O que é mais provável, acertar ao 1º tiro no barco de 4 canos ou num dos de 3 canos?
- O que é mais provável, acertar ao 1º tiro no barco de quatro canos ou num dos barcos de 2 canos?
- O teu adversário, ao lançar o 1º tiro, tem mais probabilidade de acertar num barco ou na água?
- Combinaste com o teu adversário que os barcos não se podiam encostar aos quatro cantos. Qual é assim a probabilidade de acertar num submarino? E num de 3 canos? E no porta aviões?
- Combinaste ainda com o teu adversário que os barcos não se podiam encostar aos lados do quadrado. Qual é, agora, a probabilidade do inimigo acertar, ao 1º tiro, num dos submarinos? E num de 3 canos? E no porta-aviões? E agora é mais provável acertar num barco qualquer ou na água? ■

## Ajustamento dos Novos Programa de Matemática do Secundário

### 8 questões colocadas

Como é do conhecimento de muitos professores, o Departamento do Ensino Secundário encomendou a uma Equipa Técnica, formada pelos colegas Graziela Fonseca, Arsélio Martins e Jaime Carvalho e Silva, "uma proposta de Ajustamento do Programa do Ensino Secundário que integrasse os ensinamentos colhidos com o período de experimentação e generalização da aplicação dos Novos Programas de Matemática". Esse estudo deveria obedecer às seguintes condições: i) a carga horária deverá ser de 4 horas semanais em cada ano; ii) deve manter-se a abordagem metodológica proposta no texto dos programas em vigor. O trabalho da Equipa Técnica tem vindo a realizar-se num ambiente de grande abertura às críticas e sugestões da comunidade da educação matemática portuguesa, através de reuniões dos mais diversos tipos. A primeira versão da proposta de Ajustamento foi apresentada e discutida no 1.º MatForum APM/SPM em Abril passado. A redacção de **Educação e Matemática (EM)** tomou a iniciativa de colocar à Equipa Técnica (ET), por escrito, oito questões levantadas pela 1.ª Versão. Transcrevemos nestas páginas as perguntas e as respostas que nos foram enviadas. Agradecemos à Equipa Técnica a prontidão com que nos respondeu e aos colegas José Manuel Matos, João Pedro Ponte, Adelina Precatado e Paula Teixeira o seu apoio na elaboração das perguntas.

Nota: as perguntas foram elaboradas antes de ser conhecida a 2.ª versão do Ajustamento.

**EM.** Numa entrevista colectiva aos autores dos Novos Programas de Matemática, que decorreu em sessão plenária no ProfMat de Viana do Castelo, em 1989, um dos membros da actual Equipa Técnica colocou aos referidos autores a seguinte questão (eventualmente não exactamente nestes termos): "quando se deu a reforma da Matemática Moderna, independentemente dos seus méritos ou defeitos, ao menos nós tínhamos uma ideia clara de qual era o eixo dessa reforma – a teoria dos conjuntos e uma visão estruturalista da natureza da matemática; pergunto eu agora: qual é o eixo, quais são as linhas de força desta nova reforma?" Na altura os autores tiveram alguma dificuldade em responder a esta questão. Embora no momento presente se esteja a proceder apenas a um ajustamento, com certeza que a Equipa Técnica reflectiu sobre a mesma questão antes de proceder às alterações que agora propõe. Por isso tem sentido perguntar: quais são as linhas de força, qual é o eixo das propostas de alteração que estão agora a ser feitas?

**ET.** Em Viana do Castelo não se falava dos programas do Ensino

Secundário, (se nos lembrarmos bem), mas a pergunta tinha sentido então e tem sentido agora, embora o nosso trabalho seja, não tanto definir um novo eixo, mas encontrar o eixo e as linhas de força do programa que se está a "afinar". Se então estivéssemos a falar do Ensino Secundário, queríamos interrogar o programa de Matemática na sua contribuição essencial para "promover o desenvolvimento, consolidação e aprofundamento de formas rigorosas e científicas de raciocínio", para "assegurar a compreensão dos elementos fundamentais da metodologia científica e a utilização das técnicas principais do trabalho intelectual" e para "proporcionar as bases teóricas necessárias para que os alunos se familiarizem com alguns grandes sistemas de interpretação da realidade". Redutora ou não, no programa anterior (antes de todos os cortes) adivinhava-se uma ideia geral para abordar a contribuição da Matemática, mesmo só pensando nos conteúdos. Essa ideia geral foi esboçada pela moda dos objectivos comportamentais que levaram alunos e professores a seguir a via do treino para responder mecanicamente a directivas, que embora

mais diversas não deixavam de ser pobres. "Pensar" pode não ser um comportamento facilmente observável... Se, neste programa, não é fácil encontrar, para a forma de pensar e para a aprendizagem da matemática, um conteúdo organizador, devia ser fácil perceber quais os critérios de escolha dos conteúdos fundamentais e dentre eles os que são "fundadores" e devia ser fácil perceber que trabalho se pretende com cada um deles ou a partir de cada um deles. Dito de outro modo, é preciso definir cada aquisição fundamental da forma mais eficaz – com apropriação efectiva de conceitos e técnicas, mas também de formas e modos de pensar da matemática (ela mesma), meio de interpretação da realidade, ciência de problemas e instrumento para resolução de problemas. Tentámos escolher os "precisos" (fundamentais e fundadores) de entre os conteúdos previstos no programa e tentámos colar a cada um dos "precisos" uma pretensão formativa "pensante" (transferível para outros estudos, para outras abordagens...) e uma construção – ela mesma – construtora de conhecimento matemático e científico. Talvez seja

## as à Equipa Técnica

pouco, mas é um caminho entre um programa em exercício e o programa do devir. No fundo, tentaremos organizar o trabalho de docência por temas-temas (conteúdos, objectivos, metodologias), tentando lançar algumas bases para o trabalho experimental em Matemática, para a comunicação matemática, para a interpretação matemática, para a educação matemática... O ajustamento exige algumas escolhas radicais, porque é um ajustamento de um programa que nasceu "mentiroso", no sentido de não ser exequível para as condições que lhe deram para viver, com falta de respeito por si próprio, habituado a viver de "recursos mentirosos".

**EM.** *Uma inovação que o novo programa do secundário introduziu foi o facto da geometria no espaço e no plano serem tratadas em paralelo. Qual a razão porque no ajustamento ao programa, agora proposto, este aspecto positivo se perde com o facto de se separar a geometria no plano, que fica no 10º ano, da geometria no espaço que seria leccionada no 11º?*

**ET.** A escolha dos "precisos" e as ligações com outras ciências pode obrigar a cortar algumas "pontes", pode obrigar a reorganizações. A tentativa de concretizar alguma coordenação interdisciplinar com a Física obrigou a repensar a organização da geometria e mesmo a localização temporal da sua leccionação. Ouvidas muitas opiniões, nelas incluídas as dos autores dos programas de Física, estamos a pensar voltar a uma geometria no plano e no espaço, sem que caiamos na ilusão de considerarmos que elas algum dia estiveram em paralelo na prática. Se lermos bem os textos oficiais estavam

mais em alternância do que em paralelo.

Vale contudo a pena dizer que sobre essa "inovação" do programa, as opiniões mais elaboradas (e algumas menos elaboradas) não nos conduzem directamente a alterar a separação dos tratamentos plano e espaço, mas sim a reforçar a necessidade de se estudar no Ensino Secundário geometria tanto no plano como no espaço, pois caso contrário uma componente metodológica importante da matemática perder-se-á.

A questão do modo como a geometria deve ser seleccionada e ensinada é claramente um problema em aberto e achamos necessário que a reflexão sobre este tema se aprofunde nos próximos tempos em Portugal (Geometria métrica? Geometria por via axiomática? Geometrias não euclidianas como em Itália? Geometria analítica? No plano? No espaço? Qual o lugar da visualização? Geometrias finitas? *Connected Geometry?*...)

**EM.** *Porque é que só no 12º ano e depois do estudo das derivadas se considera que o aluno deve trabalhar de uma "forma tão completa quanto possível a modelação e discutir a sua importância no mundo"?*

**ET.** Embora presente em todos os tempos e temas do programa, entendemos que, depois do estudo das derivadas, a modelação pode ser explorada com exemplos a exigir um nível de cientificidade razoável. E entendemos que uma coisa é trabalhar com modelações, outra é discutir a sua importância no mundo ou abordar o assunto como conteúdo em si. Para evitar equívocos como o que transparece na pergunta estamos a pensar dar uma organização diferente

a este e outros temas, talvez à margem dos tempos e dos temas.

**EM.** *A proposta de Ajustamento dos Novos Programas do Ensino Secundário prevê que no 10º ano seja dedicado o terceiro período à estatística, num total de 20 aulas. Aquilo que adianta em relação à estatística do 3º Ciclo é a distinção entre variável estatística discreta e contínua, os diagramas de extremos e quartis como representação gráfica, e as medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio padrão. A estatística indutiva não faz parte do programa, sendo apenas feita uma breve referência ao seu objectivo, que surge a propósito do objectivo da estatística descritiva. Por outro lado, as calculadoras gráficas, cuja obrigatoriedade de utilização é referida na proposta de Ajustamento, tomam fácil e rápida uma abordagem intuitiva, via gráfica, de diagramas de dispersão, coeficiente de correlação e recta de regressão. Neste contexto, surgem algumas questões: Tendo em conta que a estatística é um domínio em que se pode e deve privilegiar a relação da matemática com a realidade – uma das preocupações globais dos novos programas – não seria importante incluir na proposta de Ajustamento a exploração da ideia da correlação e da recta de regressão? Uma vez que parece tão fácil e natural a articulação dos objectivos gerais dos novos programas com o trabalho que pode ser feito pelos alunos em torno da ideia de correlação, porquê, então, a opção de não contemplar esta ideia na proposta de Ajustamento?*

**ET.** Estamos a verificar se podemos incluir alguns temas como este entre "os precisos". A primeira ideia foi efectuar cortes no programa dando

espaço e exemplos para que as metodologias e objectivos preconizados se concretizassem. Estamos a constatar que aqui os cortes talvez tenham sido demasiados e desproporcionados. Contudo não somos favoráveis a que se use a calculadora gráfica sem se entender o que está por trás de tudo; não concordamos em particular que o aluno trace rectas de regressão sem que tenha pelo menos uma ideia de onde vem tal recta; não achamos isso formativo, nem pensamos que o aluno fique capaz de usar a recta de regressão de modo crítico e proveitoso. E aqui há uma oportunidade de ligar a estatística com as funções e a geometria se formos mais além e o aluno souber que a recta de regressão passa pelo centro de massa dos pontos da distribuição e que o seu declive pode ser obtido de um modo relativamente simples.

Nesta como noutras áreas estamos todos a aprender...

**EM.** *A Proposta de Ajustamento propõe que o Departamento de Ensino Secundário "encomende a equipas exteriores a produção e promova a edição de materiais" escritos em diversas áreas (p. 40). Por um lado, o passado do Ministério da Educação na área da produção de materiais não tem sido por vezes muito abonatório. Por outro lado não parece que a existência de "materiais oficiais" seja muito recomendável. Em que medida não seria possível propor ao IIE a abertura de um concurso sobre este tema, com a publicação simultânea de diversos materiais? Ou tentar outros processos de o Ministério subsidiar a produção de materiais?*

**ET.** Propusemos ao IIE que encomendasse (ou abrisse concurso) trabalhos sobre diversos temas do programa, assim como propusemos ao DES o apoio para tais iniciativas, de modo a que fosse possível uma distribuição pelas escolas e a venda pública a preços muito baixos. Ao mesmo tempo, interrogámos pessoas, associações e sociedades sobre o interesse e disponibilidade para participar na elaboração de materiais. Não se trata obviamente de "materi-

ais oficiais", mas de materiais suplementares para apoiar o trabalho do professor (e seria até desejável que existissem propostas diferenciadas relativamente a cada tema para que o professor tivesse a possibilidade de uma escolha crítica da sua própria estratégia).

**EM.** *Atendendo à importância que os computadores têm cada vez mais na matemática (tanto na investigação como nas suas aplicações), e atendendo às suas potencialidades específicas para diversas áreas do currículo (geometria, cálculo algébrico), não deveriam merecer uma maior ênfase nas recomendações metodológicas?*

**ET.** Os computadores merecem maior ênfase como recomendação nos programas de ensino, nos programas de formação de professores, mais tratamento em concreto nos documentos de apoio aos professores... Proporemos que se considere um computador e um "datashow" como equipamentos indispensáveis nos Laboratórios de Matemática.

**EM.** *As Indicações Metodológicas da proposta de Ajustamento do Programa do Ensino Secundário apresentam, globalmente, diversas sugestões muito ricas e inovadoras, em termos do ensino e aprendizagem da Matemática, evidenciando-se, claramente, que o estudo de conceitos matemáticos não constitui um fim em si mesmo, mas um pretexto e um meio de fomentar, nos alunos, o desenvolvimento de diversas capacidades de ordem superior, tão necessárias na complexa sociedade de informação dos nossos dias. Levar à prática estas sugestões requer que os professores adquiram não apenas competências científicas mas também adoptem metodologias de ensino diferentes de muitas das que hoje predominam em diversas salas de aula de Matemática. Tudo isto traz para primeiro plano a importância da formação de professores. Como perspectivam os autores da proposta de Ajustamento esta formação? Que alterações consideram fundamentais na formação científica e pedagógica dos futuros*

*professores? Que competências profissionais pensam ser importantes para que as intenções da proposta sejam, de facto, concretizadas?*

**ET.** Obviamente porque os sistemas são sistemas e por isso lentos nas adaptações às mudanças e às novidades, os professores não têm, à partida para a profissão docente, formação que lhes permita enfrentar o que têm de fazer hoje. Foram sempre preparados para ontem. Algumas medidas que propomos para a formação dos professores não contemplam mais do que pequenos apoios à formação permanente dos professores em exercício. Porque sabemos que há as mais diversas formações iniciais (desequilibradas e desactualizadas, quer do ponto de vista científico, quer do ponto de vista pedagógico) propomos que seja na formação contínua (especialmente, na auto-formação) que se vão encontrar as forças da mudança, as capacidades para enfrentar o ensino de hoje e de amanhã — científicas (quantos temas secundários há que não foram sequer abordados nas licenciaturas?), metodológicas (quem disse que não há lacunas ao nível da metodologia da ciência e do ensino da ciência e quem pode afirmar hoje que a metodologia da matemática não é matemática?). Em muitos destes aspectos não há quem forme, há quem possa ajudar a formar os professores que querem autoformar-se. Tal como para os alunos, também para os professores o processo pode ser tudo ou nada. O inventário não adianta grande coisa, porque é uma lista de dificuldades a ser vivida.

**EM.** *É fácil reconhecer que as condições em que a Equipa Técnica está a proceder ao Ajustamento dos Novos Programa do Secundário não são as melhores: pouco tempo para propor e discutir novas propostas, trabalho não exclusivo para os membros da Equipa Técnica e limitações impostas pela manutenção obrigatória da carga horária, apenas para citar algumas delas. O que gostaríamos de propor à Equipa Técnica é um exercício de imaginação.*



Pensem, por um momento, que o vosso trabalho não tem estas condições limitativas - o prazo de entrega das novas propostas é aceitável, não se trata de mero ajustamento mas é possível alterar objectivos, conteúdos e propostas metodológicas dos programas de acordo com as opções pedagógicas da ET, a carga horária semanal pode ir até às seis horas desde o 10º ao 12º, podem ser feitas propostas complementares sobre condições nas escolas, regime de avaliação, acesso ao Ensino Superior, formação de professores, etc.. A pergunta é a seguinte: de maneira necessariamente resumida, quais seriam as propostas fundamentais que a Equipa Técnica faria num programa de matemática verdadeiramente renovado e não meramente ajustado?

**ET.** A Equipa Técnica enquanto tal não tem resposta para esta pergunta. É uma questão subjacente ao nosso trabalho, mas que não aprofundámos por as nossas prioridades serem outras. Além do Ajustamento fizemos uma proposta de Plano de Emergência para vigorar já a partir do próximo ano lectivo, elaborámos uma proposta de programa para os Exames Nacionais a vigorar a partir do próximo ano lectivo, elaborámos um parecer sobre o uso de calculadoras gráficas em exames oficiais...

Recentemente foi feita a "chamada" reforma educativa e dentro dela aquilo a que chamaram a reorganização dos planos curriculares dos ensinos Básico e Secundário que tenta compreender (e pretende ser) uma interpretação das orientações curriculares da Lei de Bases do Sistema Educativo, aprovada em Assembleia da República. Essa definição legal toma opções curriculares com seus critérios de selecção para as matérias curriculares (entre as quais se encontra a Matemática) e define princípios orientadores da estrutura curricular. A Matemática é uma das matérias consideradas em todas as configurações da educação. Assim é na configuração da educação secundária.

Muitas das questões polémicas que se estão a levantar com o Ajustamento (e muito bem!) mexem na configuração da educação secundária. Particularmente, as alterações da carga horária mexem com tudo e significam alterações dos planos de estudos gerais e não só da Matemática. Esta discussão tem de tocar os fundamentos dos planos de estudos. Começam a revelar-se algumas interpretações do que deve ser a educação secundária da Matemática. E, com o ajustamento, começa a revelar-se que, só para falar dos conteúdos, os conteúdos que lá estão nem todos são essenciais e que há outros (que nem foram considerados) que são essenciais e não podem aparecer (por via do ajustamento) no corpo dos programas. Vamos fazer algumas propostas de experiências a realizar à margem do actual plano de estudos, das quais já se falou com o IIE.

Uma delas tem a ver com as disciplinas de opção. Na 1ª versão da proposta de Ajustamento fazíamos uma série de propostas de curto prazo relativamente à criação de disciplinas de opção. Por um lado a criação de disciplinas de opção novas tropeça nalguns obstáculos legais (ultrapassáveis apenas se for feita forte pressão nesse sentido) e por outro uma crítica pertinente afirmava que

é importante que no ensino da Matemática transpareça, com clareza e apoiada em exemplos, a vivacidade da actividade criativa na matemática contemporânea e a sua contribuição para o desenvolvimento das áreas da tecnologia e da ciência na actualidade.

Não sendo possíveis alterações de fundo por se tratar de um simples ajustamento, já é possível ir fazendo algo com as disciplinas de opção. E se as disciplinas de opção forem mesmo importantes para uma parcela significativa de alunos, será mais fácil impô-las na prática. Nesse sentido resolvemos alterar a proposta de disciplinas de opção para uma só, *Tópicos de Matemática Contemporânea*.

O programa seria o seguinte

#### Tema I - Teoria de Grafos

Questões elementares com referência a problemas como o Teorema das Quatro Cores e o Problema do Caixa-Viajante.

#### Tema II - Teoria de Números

Recuperando uma parte da antiga Aritmética Racional e levando até à moderna Teoria dos Códigos Secretos de Chave Pública.

#### Tema III - Sistemas Dinâmicos

Estudo elementar baseado essencialmente em sucessões, que introduza temas actuais com o do Caos.

Para que esta disciplina funcione efectivamente, é preciso que as pessoas tenham a coragem de avançar com propostas de concretização, com a produção de manuais para estes tópicos e que invistam na formação e na auto-formação nestas áreas.

Entendemos que será sobretudo uma oportunidade de experimentar novas áreas e estratégias, reflectindo ao mesmo tempo no papel que deve ter o Ensino Secundário.

De qualquer modo, nenhuma Equipa Técnica deve ir além de esboçar uma opinião, a sua. Este assunto carece de ser debatido, técnica e politicamente, e todo o pensamento existente deve ser escutado, para ser organizado. Estamos em crer que teríamos sempre de aceitar um plano de estudos aberto a mudanças, um programa de Matemática que contivesse em si condições para as suas adaptações às mudanças que inevitavelmente ocorrem (científicas e tecnológicas, mas também sociais e políticas) a um ritmo muito superior à velocidade com que as legislaturas correm. E teríamos de ter professores capazes de se adaptar a essas corridas num sistema que valorizasse a formação permanente dos seus cidadãos.

# CASIO®

## CALCULADORAS ESCOLARES PARA TODOS OS GRAUS DO ENSINO

A CASIO, lider nacional e mundial no mercado das calculadoras, possui a linha mais completa pensada para as necessidades do ensino. Na época 95/96 há grandes novidades que serão apreciadas pelos educadores, com a habitual garantia de alta qualidade/preço.

A CASIO apoia os professores há largos anos em Portugal e possui programa de preços para o ensino e preços especiais para professores.

### CIENTÍFICAS



#### FX - 82 Super

NOVA

- 139 Funções • 10+2 dígitos
- Fracções • Trigonometria
- Permutações • Combinatórios
- Percentagens • Memórias.

#### FX - 570 S

A científica mais avançada do mundo com o novo sistema V.P.A.M. e 284 Funções.



#### FX - 3900 PV

Científica programável  
Best Seller Nacional  
189 Funções, 300 passos, integrais, programação fácil, preço económico.



REPRESENTANTE

**BELTRÃO COELHO, LDA.**

LISBOA • PORTO • AVEIRO • COIMBRA • SETÚBAL • BRAGA • SANTARÉM • FUNCHAL

### GRÁFICAS

A CASIO inventou as calculadoras gráficas e continua a inovar tendo a linha mais completa, sofisticada e económica do mercado em Portugal.



#### CFX - 9800 GE

NOVA

#### GRÁFICOS A CORES

Todas as funções do modelo 9700 GE com gráficos a cores para melhor entendimento por parte dos alunos das funções gráficas.



#### FX - 7300 G

NOVA

- Económica, potente e com visor grande.



#### FX - 6300 G

A Gráfica mais vendida em Portugal.  
Tem tudo por um preço incrível.



## Formação de professores-normalização-avaliação\*

António Abrantes

Gostaria de deixar aqui alguns tópicos de reflexão e partilhar algumas preocupações que decorrem da experiência pessoal e de *un certain regard* sobre a educação matemática que se vai fazendo nas escolas portuguesas.

Modelos antigos têm sido os maiores formadores de novos professores. Os professores que galhardamente enfrentámos a partir dos bancos da escola, ainda são uma referência importante para muitos de nós e talvez constituam um importante modelo para os professores. A importância não advém de termos tido excelentes professores de Matemática, mas sim de a sua influência atingir muitos dos actuais professores. Quer se queira quer não, as exigências de hoje pedem-nos uma matemática diferente daquela que enfrentámos há alguns (mesmo há poucos) anos.

Formação inicial de professores — como se estão a formar os novos professores? A formação está entregue a professores universitários (e não só) o que, por si só, não é garantia de qualidade de formação. Há formadores universitários de grande modernidade, mas as Universidades também não têm sido um modelo em qualidade pedagógica, nem as Escolas Superiores têm respondido com a primazia da qualidade.

Programas de formação contínua têm sido desenraizadas da prática de qualidade e têm jogado em necessidades e motivações individualistas, mas legítimas, de progressão na carreira dos professores. A formação contínua dos professores existe muito pela vontade do professor, não existindo

como uma necessidade institucional. O sistema de avaliação de desempenho não exige que se faça esforço para uma melhor prática pedagógica, mas que se consiga dar a imagem de que não somos um mau professor, de que não temos uma má relação na comunidade escolar e social. A formação de professores tem que passar pela investigação do desempenho profissional do professor, ir dentro da sala de aula, entrar nas relações da comunidade, com um sentido da melhoria do desempenho e não ir procurar trunfos para dar o xeque mate ao professor, para o crucificar. Para isso, torna-se necessário mobilizar os melhores (?) professores para trabalhar não só com os alunos, mas também com os professores. A formação de professores não se faz por circular ou despacho, mas por professores com professores. Parece um *slogan* político, mas sem professores não há mudanças... e são precisas mudanças para mudar os professores.

Relativamente aos novos programas, assistimos a uma divulgação e estudos pouco dinâmicos. Não se pode argumentar que os professores têm capacidade para estudar os novos programas. Se nos cingirmos aos conteúdos, claro que isto é verdade, mas o problema do ensino, não só da Matemática, é fazer com que os alunos aprendam, se transformem; os factores de aprendizagem não se estudam ou equacionam como um teorema. Um professor, por si mesmo, não cria um geoplano se não o conhece; não utiliza calculadoras gráficas se não souber que elas existem; não planifica as suas aulas e

A situação do ensino da Matemática em Portugal não é, certamente, aquela que os professores de Matemática desejariam.

Podemos estabelecer como pressuposto que existe a vontade dos professores em mudar a situação preocupante em que aquele se encontra, mas, muitas vezes, não se sabe como ter sucesso nessa tarefa.

\* Comunicação apresentada no Debate Nacional sobre o Ensino da Matemática — *Matemática em Exame* —, ver artigo na pág. 14.

as condições de aprendizagem dos seus alunos em torno da resolução de problemas se não conhece tal dinâmica ou, conhecendo-a, não sabe como se pratica. E depois disto, como vai cumprir programas e como responde às grandes solicitações que pendem sobre a matemática? São necessários professores formadores que acompanhem principalmente todos os professores, os que têm estágio pedagógico há mais de 20 anos e aqueles que o fizeram há menos de 20 anos.

Queixámo-nos e manifestámo-nos bastas vezes contra o livro único e com razão. O monolitismo nunca deu grandes resultados, mas a ausência de normas ou a sua existência de tal modo alargada também os não dá. A falta de normalização de práticas, de metodologias, de ênfases, de processos de ensino, de processos avaliativos, de materiais e recursos é uma forma quase libertária que torna difícil a existência de um núcleo central de formação de matemática em Portugal. O programa deveria apresentar um núcleo central de conteúdos, de métodos de trabalho, de critérios de avaliação, de critérios do sucesso, dos materiais a utilizar, da profundidade exigida, de formas de registos de observação, de problemas a resolver, etc.. Este núcleo não esgotaria o programa nem constituiria programa mínimo, mas seria um compromisso entre os níveis de qualidade exigida e a prática do professor à qual seria ainda deixada uma margem de manobra para desenvolver actividades com os alunos num clima de liberdade e ensaio, desenvolvendo interesses eventualmente pessoais ou mesmo regionais. Pensamos que isto não tem nada a ver com centralismos, mas pode ser uma forma de divulgar um

*modus faciendi* matemática. A prova de que o programa existente não constitui uma norma credível é ver o que se passa com os manuais de um mesmo ano escolar de diferentes autores. São tão díspares os tratamentos que são dados a um mesmo assunto que, só por especial deferência nossa, aceitamos que se estão a referir ao mesmo.

Muitas escolas apresentam recursos escassos ou inexistentes. Os equipamentos, os materiais, os recursos que as escolas têm, dependem dos professores que essas escolas têm. A qualidade do corpo docente é determinante para dotar as escolas do material que se supõe ser necessário para fazer uma certa matemática. Nós não somos todos iguais (felizmente!), nem somos igualmente eficazes e há professores que ensinam mais e melhor matemática que outros. Manter as coisas como até aqui é manter as desigualdades, deixar as escolas entregues a si próprias é proporcionar que o amanhã seja igual a hoje. As escolas ricas continuarão a ser ricas, talvez mais ricas, as escolas pobres continuarão a ser pobres, mais afastadas da vanguarda. A disseminação dos métodos de trabalho tem que ser realizada de um modo institucional, não se podendo confinar ao trabalho de associações de professores. A dotação de materiais não se pode esgotar naquilo que os seus profissionais são capazes de sugerir ou adquirir. Porque não um conjunto base de materiais para todas as escolas?

A pressão sobre a disciplina de Matemática vinda dos professores dos níveis mais altos, das autoridades, da sociedade não é favorável a um ambiente de tranquilidade que se

deseja para a actividade matemática. A matemática não cativa a maior parte dos alunos porque ela não se revela útil, não dá prazer agora. Tem sido e continua a ser uma espécie de *wild card* para entrar na Universidade. Trabalha-se tendo as grandes provas de exame como meta, sacrificando processos de crescimento, empanturrando os alunos de coisas despidas de sentido. O que parece ser importante é uma certa forma de cumprir os programas.

A matemática curricular apenas timidamente está lançada nas novas tecnologias. Não existe uma opção clara de a operacionalizar em torno das potencialidades tecnológicas. Mesmo os professores que têm possibilidades de o fazer têm uma angústia enorme, porque os seus alunos terão que prestar provas e não imaginam se o que para eles era ou é importante, também o será para os fabricantes de provas a que os alunos serão sujeitos. Também é muito grave que a avaliação decorra em condições diferentes daquelas em que ocorrem as aprendizagens.

Em Portugal, vai-se fazendo investigação em educação matemática. Certamente que uma das preocupações da investigação é o desempenho profissional dos professores. Há ideias acerca de atitudes, comportamentos, métodos, avaliação, estratégias que têm dado bons resultados. Como chegam aos professores os resultados desses trabalhos? Será que chegam?

Mas o insucesso da Matemática será mesmo maior que o das outras disciplinas, ou é apenas mais visível por ser a disciplina mais pressionada?

António Abrantes  
Esc. Sec. de Seia

## **ProfMat 95 Évora, 8 a 11 de Novembro**

- Mais de 1200 inscritos • 4 sessões plenárias • 4 painéis • cerca de 30 grupos temáticos
- mais de 20 conferências • dezenas de sessões práticas e comunicações • materiais •

**Último prazo para inscrição (com agravamento de preço): 29 de Setembro**

# O problema do trimestre



## Sobre o problema anterior

Na última edição de *Educação e Matemática* propusemos o problema "Mensagens trocadas":

*Na véspera da batalha de Aljubarrota, D. Nuno Álvares Pereira estava no acampamento das tropas portuguesas quando enviou um mensageiro a pé em direcção ao Norte com uma carta para o alcaide de Coimbra.*

*Quinze minutos depois enviou outro mensageiro, também a pé, em direcção a Sul com uma carta para o alcaide de Lisboa.*

*Passados mais quinze minutos, D. Nuno apercebeu-se que se tinha enganado nas cartas: a de Lisboa ia para Coimbra e vice-versa.*

*Chamou um cavaleiro e encarregou-o de ir ter com os mensageiros, desfazer a troca de cartas e regressar depois ao acampamento.*

*O cavaleiro, que se deslocava quatro vezes mais depressa que uma pessoa a pé, ficou indeciso em direcção a qual dos mensageiros se dirigir primeiro.*

*Como seria mais rápido e portanto menos cansativo: ir primeiro para Norte ou para Sul?*

Chegaram-nos sete respostas, enviadas por Cristina Assis, Eduarda Santos (Tavira), Helena Rocha (Lisboa), Judite Barros (Lisboa), Manuela Ribeiro (Mem Martins), Paulo Lourenço (Massamá) e Raul Gonçalves (Valongo).

A resolução geométrica foi a preferida de quase todos e tem a vantagem de ser não só simples de executar como visualmente muito clara.

Vamos representar o tempo no eixo

horizontal e a distância ao acampamento no eixo vertical. O ponto M1 corresponde ao momento em que o primeiro mensageiro partiu, M2 ao instante de partida do segundo e C ao do cavaleiro. As semi-rectas com origens em M1 e M2 representam as "viagens" dos mensageiros e devem fazer o mesmo ângulo com a horizontal. Como o cavaleiro anda quatro vezes mais depressa, as semi-rectas que partem de C devem ter um declive 4 vezes maior.

Os pontos T representam os momentos do regresso do cavaleiro ao acampamento: T1 se arrancar em direcção a Coimbra e T2 se começar por ir no sentido de Lisboa.

É perfeitamente claro que o cavaleiro poupa alguns minutos se partir em direcção ao sul.

Se fizermos o desenho com algum cuidado, podemos saber aproximadamente quantos minutos o cavaleiro ganha com a segunda opção. No entanto, o valor exacto pode ser obtido algebricamente através da resolução de várias equações. Foi o que fizeram vários leitores.

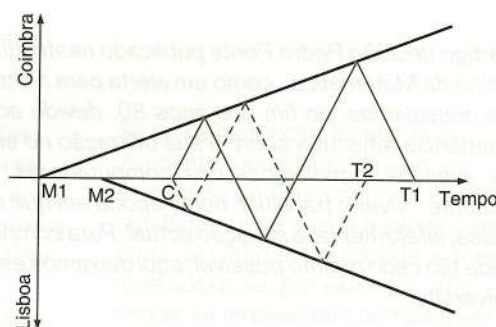
Se o cavaleiro for primeiro para norte demora 830/3 min 92 min 13 seg.

Indo primeiro para sul demora 640/9 min 71 min 7 seg.

O cavaleiro poupa portanto cerca 21 minutos e 6 segundos.

A Eduarda Santos enviou uma interessante resolução utilizando progressões geométricas.

O enunciado do problema prestava-se



a outras interpretações, como salientam Judite Barros, Raul Gonçalves e Helena Rocha.

Podemos considerar que o primeiro mensageiro a ser encontrado pelo cavaleiro lhe entrega a sua carta e prossegue a sua marcha, ou que se senta a descansar e espera que o cavaleiro volte com a carta correcta, ou ainda que volta para trás de modo a diminuir o percurso a efectuar pelo cavaleiro.

A decisão dependerá da urgência das mensagens, da falta que o cavaleiro faça no acampamento ou... do cansaço do mensageiro.

(Helena Rocha)

Os leitores interessados poderão resolver estas duas novas versões e confirmar as soluções.

Se o mensageiro parar, o cavaleiro demora 46,6 minutos (sul) ou 63,2 (norte).

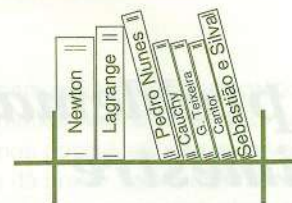
Se o mensageiro retroceder, o cavaleiro demora respectivamente 36,6 ou 45,9 minutos.

Em todos os casos é vantajoso ir primeiro para sul.

José Paulo Viana  
Esc. Sec. de Carnide

Ver problema proposto na pág.36.

## Para este número seleccionámos



### O “quê”, o “porquê” e o “como” em matemática

John Mason

O artigo de João Pedro Ponte publicado neste número pode ser interpretado, relativamente à utilização dos computadores no ensino da Matemática, como um alerta para a situação de marasmo em que hoje vivemos a este respeito. A posição dianteira que possuíamos, no fim dos anos 80, devido ao Projecto Minerva, não no número de computadores nas escolas, mas na experiência reflectida sobre a sua utilização no ensino da Matemática, poderia ter conduzido a uma situação em que, devido aos avanços tecnológicos nos computadores, muitos alunos e professores pudessem, como John Mason, considerar excitante “viver e trabalhar numa época em que a verdadeira natureza do que constitui a matemática está em evolução”. Não é essa, infelizmente, a situação actual. Para compreender o que estamos a perder e como é importante lutar para que a situação mude tão cedo quanto possível, aqui deixamos este artigo publicado na revista *Micromath* por John Mason, professor da *Open University*.

Considero deveras excitante viver e trabalhar numa época em que a verdadeira natureza do que constitui a matemática está em evolução. A existência de ecrãs onde se podem traçar gráficos, de microprocessadores poderosos e ainda a possibilidade de manipulação directa de objectos no ecrã, está a reorientar substancialmente a direcção em que se desenvolve a matemática, transformando o modo como as ideias matemáticas são apresentadas e o modo como as pessoas se relacionam com o pensamento matemático e o aplicam.

A principal questão que pretendo tratar neste artigo é a separação que se está a dar entre o “quê”, o “porquê” e o “como” em matemática e as consequências que tal facto está a ter, e terá, no ensino e na aprendizagem da Matemática. Estou particularmente preocupado com a crescente insatisfação entre os professores do Ensino Superior, acerca do que os alunos sabem fazer, o que querem retirar da sua educação, o que significa agora aprender matemática e como isto está relacionado com o que se passa na escola.

#### O fenómeno da manipulação directa de objectos no ecrã

Platão queixava-se acerca do modo como as crianças gregas eram educadas, louvando a orientação prática dos métodos de ensino no Egipto, através de jogos e actividades. O reconhecimento da importância das actividades práticas, da manipulação com vista à atribuição de significado a uma ideia e depois da passagem gradual da “atribuição de significado” à “articulação”, ou seja à exposição clara da ideia (abstraindo portanto do contexto particular), foi proclamado vezes sem conta em educação matemática, através de Dewey, Piaget, Bruner, Vygotsky & Davidov, Froebels, Montessori, Gattegno e Skemp. Essa importância é promovida na formação inicial e contínua de professores (onde ainda existe) na Grã Bretanha e em muitos outros países. Na *Open University* [Universidade Aberta inglesa — n.t.] promovêmo-la através de enquadramentos como *Do-Talk-Record* (Faça-Fale-Registe) e *Manipulating-Getting-a-sense-of-Articulating* (Manipular -Dar sentido-Articular).

Mas fazer actividades não é em si suficiente, pois a atribuição de significado não resulta automaticamente da manipulação. Também a capacidade de articular uma ideia não resulta automaticamente da atribuição de significado. Para encorajar e apoiar estas transições é requerida a atenção de um perito, o professor.

Os objectos no ecrã proporcionam uma nova forma de instrumento ou material manipulável. Por exemplo, a linguagem Logo, em particular os gráficos da tartaruga, oferecem à criança o acesso directo à construção de comandos para fazer a tartaruga desenhar no ecrã. O interface entre a tartaruga e a criança reside nos comandos, proporcionando uma situação em que o utilizador (mas não será assim se não for guiado para determinados objectivos) imagina o que quer que aconteça e transforma isso em articulação na linguagem do computador (possivelmente através de palavras). Os procedimentos também apoiam o sentido de generalização, dado que um procedimento opera em qualquer tartaruga, em qualquer altura e qualquer que seja o estado da tarta-

\* Artigo reproduzido da revista *Micromath*; número da Primavera de 1995, vol. 11 (1), com autorização da *Association of Teachers of Mathematics*. Outros artigos sobre o Cabri estão incluídos nesta revista, que existe na biblioteca da Faculdade de Ciências da U. de Lisboa.

ruça, e que existe a possibilidade de utilizar parâmetros para controlar variações no modo de realizar o procedimento. Papert previu que, ao construir procedimentos em Logo, as crianças contactariam com ideias significativas em matemática ou em ciência da computação. O potencial está lá, certamente, mas é necessário mais do que computadores e o programa Logo para educar a consciência crítica das crianças. Requer a consciência que o professor tem do próprio pensamento matemático e da ciência da computação das crianças, e requer confiança para aguentar o esforço suplementar inicial para lidar com os detalhes, de modo a reconhecer os reais desenvolvimentos no pensamento matemático a longo prazo. Existem infelizmente, em competição com isto, demasiados pedidos de atenção e expectativas de sucesso a curto prazo.

O sistema operativo do Macintosh popularizou a ideia da manipulação directa de objectos no ecrã por meio do movimento físico do dedo e do braço através do rato, do *tracker-ball* e agora do *pad*, substituindo o interface formal entre o utilizador e o ecrã, baseado nos comandos de uma linguagem, que é típico do Basic ou do Logo. Enquanto os programas de design e de engenharia têm utilizado a manipulação directa no ecrã desde há algum tempo, o software para matemática foi relativamente lento, até há pouco tempo, a incorporar este tipo de interface física. Finalmente o Cabri-Géomètre, o Geometer's Sketchpad, o Stella e o Numerator abriram o caminho, o Mathematica possuirá esse tipo de interface na próxima versão e outros sistemas para álgebra e para gráficos de funções seguirão o mesmo trajecto. Mas há ainda muito caminho para percorrer. Novos sistemas para matemática especializada estão a possibilitar aos investigadores apoiar as suas imagens mentais e explorar a manipulação directa no ecrã em arquitectura, engenharia e medicina. Refiro-me a esta tendência porque vejo como através do *Mouse-Plotter* e em particular do Cabri-Géomètre, os alunos na escola podem experimentar

novas possibilidades para o pensamento matemático quase em paralelo com os investigadores matemáticos. Está claro que este facto também é fonte de dificuldades.

### Separando o Quê, o Porquê e o Como

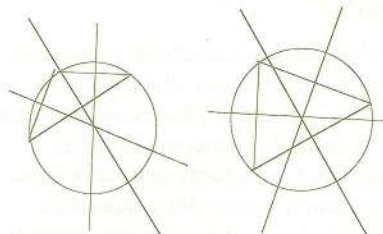
Quando eu estudava matemática na Escola e na Universidade, havia para mim uma fusão (talvez uma confusão) entre:

- o que era verdadeiro matematicamente (definições, teoremas, lemas, etc.);
- porque razão era verdadeiro (as definições pareciam verdadeiras platonicamente, os teoremas e os lemas eram demonstrados à minha frente e por vezes eu até gostava deles);
- como as técnicas eram levadas a cabo e como eram obtidos os resultados.

Parece-me que a possibilidade de manipulação directa de objectos no ecrã está a separar estes três aspectos, e penso que o Cabri-Géomètre fornece uma boa ilustração disso.

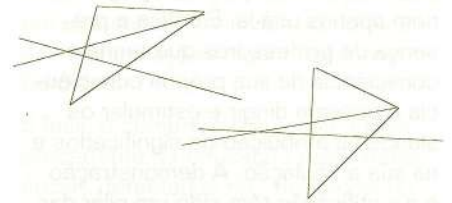
### O Quê

No Cabri pode-se fazer uma construção geométrica e depois arrastar os seus elementos sobre o ecrã. Por exemplo, podemos começar com três pontos e construir a circunferência circunscrita, depois arrastar um dos vértices e ver a circunferência ir atrás.



Ou pode-se desenhar um triângulo, traçar a bissetriz de um dos ângulos internos, a mediatriz do lado oposto e, seja qual for o modo como movermos os vértices dos triângulos, veremos

sempre a intersecção da bissetriz e da mediatriz cair fora do triângulo (supor que cai dentro do triângulo permite provar que "todos" os triângulos são isósceles!).



Se se tem atenção ao que fica invariante, quando se movem os elementos da figura sobre o ecrã, rapidamente se chega a várias conjecturas. O Cabri até responde a questões sobre se, por exemplo, três rectas se intersectam sempre num ponto, ou se um ponto construído pertence sempre a uma recta construída. O que quero dizer é que somos conduzidos a fazer conjecturas de que algum facto tem sempre lugar. A utilização do Cabri pode educar (evito utilizar o Papertiano "educará") o aluno no reconhecimento da presença de propriedades geométricas, independentemente de qualquer necessidade de demonstração ou justificação. Ao manipular directamente as figuras com o rato, desenvolve-se uma forte convicção do que é verdadeiro. Prevejo na utilização do Cabri e de outro software de manipulação directa do ecrã um forte apoio a uma intuição matemática muito mais ampla do que é ou virá a ser verdadeiro.

Numa das disciplinas que fiz na Open University (o MT 129) propus que a importância da geometria (de gloriosa memória) na escola residia no facto dos alunos ficarem conscientes de que existem propriedades geométricas, mais do que memorisarem algumas específicas. Mais geralmente, há coisas que são sempre verdade, coisas que podem ser verdade umas vezes e outras não e coisas que nunca podem ser verdade. Aprender geometria era ficar consciente do necessário, do possível e do impossível.

Existe analogia com o papel das calculadoras no acesso aos grandes números e no apoio que dão ao desenvolvimento do sentido de número. Em ambos os casos, tanto nos números como na geometria, não é suficiente ter a tecnologia, nem apenas usá-la. É crítica a presença de professores que tenham consciência da sua própria consciência e possam dirigir e estimular os alunos na atribuição de significados e na sua articulação. A demonstração e a justificação têm sido um pilar das matemáticas no séc. XX. Não estou convencido que continuem a desempenhar para muitos um papel central. Uma das consequências das calculadoras cada vez mais poderosas e dos programas de computador poderá vir a ser uma população mais informada numericamente e visualmente, mesmo se, tal como as gerações que a precederam, não chegar a adquirir os porquês fornecidos pelas demonstrações.

### O Como

As explorações sobre como o Cabri pode ser utilizado na sala de aula (descritas no *Micromath* ou noutros locais) sugerem que existem dificuldades consideráveis na familiarização com as construções do Cabri e com a noção de figura do Cabri, na qual os aspectos com interesse se mantêm, enquanto elementos da figura são arrastados pelo rato ("baralhadors", nas palavras de Healy, Hoelzel, Hoyles e Noss no *Micromath* 10.1, p.14-16). O análogo dos procedimentos do Logo são no Cabri as macros, construções que se destinam a obter determinados objectivos. Por exemplo, no Cabri é muitas vezes útil ser capaz de construir a tangente comum a duas circunferências, ou a circunferência inscrita ou circunscrita a um triângulo, ou copiar um ângulo para outro local. Os entusiastas do Logo debateram o problema de saber se deveria ser mostrado aos alunos como utilizar o procedimento ARCO (para traçar um arco de circunferência de determinada amplitude), ou se deveriam primeiro descobrir por eles como se construía

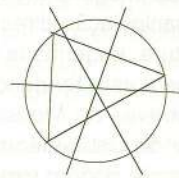
uma circunferência. Cada nova versão do Cabri ou do Sketchpad oferece novas e úteis macros através do menu (por exemplo, "compasso", para transferir o comprimento de um segmento de um local para outro), e há muito para discutir sobre a sequência pedagógica até aceder a tais construções. O importante aqui é que, por causa da verdadeira natureza da manipulação dos objectos no ecrã e do desenvolvimento do software, o porquê de uma construção geométrica não é um aspecto muito entusiasmante. Se pretendo fazer qualquer coisa realmente complicada, não quero ser incomodado pelos detalhes (este é também um dos aspectos positivos dos programas de cálculo simbólico). Mas pode ser pedagogicamente necessário ou desejável trabalhar alguns detalhes antes de utilizar um instrumento que faça isso por mim. Esta parece-me ser uma questão que necessita de uma discussão cuidadosa. Não penso que seja necessário cavar um buraco no chão com uma pá antes de utilizar uma pá mecânica; nem praticar a multiplicação com papel e lápis, com grandes números, antes de usar a tecla da multiplicação na calculadora; e não estou sequer convencido que preciso de ser capaz de factorizar uma quadrática antes de utilizar software que o faça por mim. Mas suspeito que para usar um instrumento matemático com eficácia, pode ser necessário gastar algum tempo a examinar o que está por trás dele, como funciona, e mesmo como isso poderia ser feito, em princípio, "à mão".

A atenção dos estudantes na escola está naturalmente voltada para o "como". Precisam de saber como se comportar de maneira a obter as notas que precisam nos exames (ou seja, como responder a questões típicas). A arte do professor consiste em centrar a sua atenção e dirigir as suas energias de modo a que o "porquê" seja também contemplado. No caso do software matemático, têm que aprender como utilizar a ferramenta e como a ferramenta é usada. Evidências de carácter informal sugere

rem que onde estes dois aspectos estão separados, os alunos deparam-se com grandes dificuldades. Aulas para aprender "que tecla premir, que item do menu usar" são aborrecidas e ineficazes, ao passo que aulas em que os alunos estejam a realizar tarefas que requerem o uso de determinada tecla ou item do menu fornecem um contexto no qual a aprendizagem tem lugar, precisamente porque a atenção global é dirigida para longe daquilo que necessita ser automatizado. (A tese de Dave Hewitt, que lhe pode ser pedida para Birmingham, desenvolve este tema). Além disso basta mostrar a um ou outro dos alunos alguma particularidade, para que o resto da turma a apanhe muito rapidamente.

### O Porquê

A geometria costumava ser ensinada, está claro, para treinar os alunos no raciocínio lógico. Os professores julgavam que estavam a ensinar os alunos a demonstrar porque é que certas propriedades geométricas eram verdadeiras. Suspeito, no entanto, que a maior parte dos alunos aprendiam a realizar os passos dedutivos, mas muitas vezes não tinha sentido para eles o que estavam a fazer, nem a generalidade do que estavam a provar. O Cabri fornece uma nova perspectiva, pois substitui a demonstração pela construção. Com o fim de construir uma figura no Cabri, tem-se muitas vezes que conhecer um considerável conjunto de propriedades geométricas e construções. A sequência em que se faz a construção produz uma figura particular, e se mais tarde decidimos que queremos poder variar outro elemento, podemos ter que fazer uma construção inteiramente nova. Por exemplo, em Mason e Nevile (1994), examinámos como construir a circunferência circunscrita a um triângulo e considerámos como





poderíamos construir uma figura no Cabri que permitisse ao utilizador mover dois dos lados do triângulo e o circuncentro, ou o circuncentro, três mediatrizes e o raio.

O diagrama no papel não contém em si tal estrutura, enquanto a figura no Cabri a possui. Isto ilustra uma analogia geométrica com o tema do fazer-desfazer, que é tão central no pensamento algébrico: tomando uma figura no Cabri, reconstruí-la de modo que outros elementos possam ser movidos livremente. Quando se trabalha neste tipo de actividades é muitas vezes um bom auxiliar utilizar a heurística de remover uma restrição e procurar o lugar geométrico dos pontos em que se está interessado. Isto muitas vezes sugere qual a construção a fazer, mas não a razão porque essa construção funciona.

O Cabri não fornece muita ajuda na procura da razão porque certa propriedade é verdadeira, ou porque certa construção funciona. Para procurar porquê, para justificar ou demonstrar geometricamente alguma conjectura, tem muitas vezes que se fazer mais do que rever a sequência da construção, porque é necessário encontrar alguma razão estrutural para que a conjectura se verifique sempre. Por detrás do ecrã do Cabri existe, está claro, uma versão algébrica que o Cabri utiliza para responder a questões gerais de (co)incidência. Se se podem exprimir relações algebricamente, podemos muitas vezes manipulá-las para descobrir o que queremos. Mas a geometria diz respeito a relações, não a valores, e portanto não podemos esperar que um sistema de manipulação geométrica possa gerar demonstrações.

Continuo a prever uma versão do Cabri que dê acesso aquela álgebra (do mesmo modo que o programa Stella dá acesso às equações subjacentes), juntamente com um utilitário para cálculo simbólico que permita ao utilizador empregar também argumentações baseadas em coordenadas cartesianas. Quando isso acontecer, o sonho de Descartes estará verdadeiramente realizado: a

geometria sintética ou estrutural dará literalmente a mão à álgebra das coordenadas. Mas, de momento, a separação entre "o quê" e o "porquê" continua a dar-se.

### Implicações para a escola

Para a escola, como implicações do software de manipulação directa do ecrã, temos que, tal como nas calculadoras, mas em maior grau, os alunos podem ser atraídos a trabalhar em explorações mais substanciais, com o fim de desenvolverem as suas intuições e a sua consciência dos conteúdos (o "quê") da matemática. Na presença de professores conscientes da sua própria consciência e do seu pensamento matemático, os alunos podem ser atraídos para considerar os porquês, para explorações "por métodos manuais", de modo a poderem apreciar o que é que os instrumentos estão a fazer. Ao serem desafiados e ao mesmo tempo apoiados a articularem os significados e as conjecturas que vão fazendo sobre as "invariâncias no meio das mudanças", é possível que as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas se tomem não apenas o assunto mas o objecto do estudo. Mas tudo isto se verifica sem a utilização destas ferramentas de computador, da mesma forma! Contudo, a presença dos objectos no ecrã pode ampliar o alcance da mente humana. Acredito que é importante que muitos alunos encontrem os instrumentos utilizados na sua sociedade tão cedo quanto for possível e razoável. Não vejo qualquer razão para que sejam excluídos da utilização de instrumentos que não lhes causam danos físicos (como guiar carros ou utilizar tornos, etc.). Mas há muito que fazer acerca do apoio a dar ao uso dos instrumentos, da apreciação do que é que fazem e da percepção da razão porque funcionam.

### Implicações para o Ensino Superior

Existem queixas generalizadas de que os estudantes que entram no Ensino Superior sabem muito menos do que

dantes, e mesmo que não mostram qualquer desejo de adquirir os conhecimentos que não possuem. Existe mesmo a preocupação de que pode já ser muito tarde para esses estudantes atingirem a facilidade que as gerações anteriores tinham, porque os períodos em que seriam sensíveis ao domínio das manipulações algébricas foram perdidos.

É fácil, e sempre o foi, culpar a fase precedente da educação pelas deficiências detectadas no "desempenho matemático corrente". Cícero lamentou-se acerca da falta de interesse, aplicação e motivação dos jovens do seu tempo, e este sentimento teve eco em todas as gerações subsequentes. Isto não quer dizer que não existam problemas. Manifestamente existem. Mas só vejo solução num esforço de adaptação. A ardósia, a régua de cálculo, a calculadora, a calculadora gráfica e o computador, cada um diminui a necessidade de fortalecer e empregar certas faculdades humanas (visualização e memória, facilidade de cálculo, lógica e raciocínio, conservação da simplicidade). Por muito que uma pessoa lamente a perda de facilidade que se tinha (e a correspondente perda do prazer de possuir essa facilidade), é necessário recolocar as características essenciais nas práticas correntes.

Acredito que o progresso no software está a tornar ainda mais importante que os professores e alunos, em todos os níveis, alarguem o seu horizonte, afastando-se de um comportamento rotineiro necessário para "responder a questões estereotipadas", de modo a serem capazes de pensar matematicamente, tanto como indivíduos como em grupo. Estou no entanto consciente que existe um contrapoder social que mecaniza tanto quanto possível, com o objectivo de eliminar o elemento humano, de basear tudo no comportamento (prestação de contas, testes de competência, produtos, desempenho, minimização de custos). Suspeito que esta força é a que tem maior influência nas mudanças que os estudantes evidenciam.

Acredito que é vantajoso para a socie-

## Breves indicações sobre a Internet

### 1. Equipamento básico

Se tem um computador relativamente actual e um telefone, já tem grande parte do caminho andado para se ligar à Internet. Faltam-lhe duas coisas:

- comprar um modem, ou seja, uma pequena peça de equipamento electrónico que serve para ligar o computador ao telefone (e que já vem com o software correspondente para essa ligação); há modem's piores e melhores, por menos ou por mais dinheiro; mas duas ou três dezenas de contos já chegam para comprar um razoável — escolha um modem que comunique com a máxima rapidez possível, nunca menos de 14.400 bps.

### 2. Ligação à Internet

Para se poder ligar à Internet, tem que fazer a sua inscrição numa entidade que possa servir de intermediário na sua ligação à Internet. Se está numa Universidade, muito provavelmente ela já está ligada à Internet — informe-se. Se quer ligar-se a partir de casa tem que recorrer a um dos dois fornecedores desse serviço que existem

- a TELEPAC — veja na lista dos telefones ou vá à loja do Forum Picoas em Lisboa;
- o PUUG — que funciona na Universida-

de Nova de Lisboa e cujo telefone é (01) 294 28 44.

Tem que pagar a inscrição e a assinatura mensal — informe-se bem sobre os preços, mas com cerca de dois contos iniciais e depois três ou quatro por mês pode estar ligado trinta horas por mês; a isto apenas tem que acrescentar as chamadas telefónicas (locais — Lisboa, Porto e outras cidades — ou inter-urbanas), está claro.

A ligação à Internet que lhe interessa chama-se PPP (*Point to Point Protocol*), pois permite usar um interface gráfico (ver mais à frente) muito fácil nessa ligação.

### 3. Software

Precisa de três tipos de software:

- software próprio para o seu computador poder fazer essa ligação PPP — este software é fornecido pela TELEPAC (só para MS-DOS) ou pelo PUUG. Se tiver um Macintosh e quiser ligar-se pela TELEPAC — que é mais barato do que o PUUG — contacte a APM;
- software para correio electrónico — um dos melhores é o Eudora, fácil de obter (contacte a APM);
- software para pesquisas na Internet — o melhor é o Netscape (contacte a APM).

Note que depois de estar ligado à Internet todo o software que vai precisando pode ser obtido através da própria Internet, transferindo para o seu computador (chama-se a isto *download*) os ficheiros que quiser.

### 4. Que fazer com a ligação à Internet?

Apenas dois exemplos, para além do correio electrónico normal:

- Participe no fórum electrónico sobre temas de educação matemática, criado pela Secção de Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Esse fórum chama-se SEM e para participar nas discussões basta enviar uma mensagem para [listserv@cc.fc.ul.pt](mailto:listserv@cc.fc.ul.pt) contendo apenas o seguinte texto

subscribe sem

- Utilizando o programa Netscape, desloque-se pela World Wide Web, visitando locais um pouco ao acaso. Se quiser aceder a um dos melhores, no menu file do Netscape faça

open <http://forum.geometry.edu>

Espere um pouco e estará num local óptimo para perceber quais são as múltiplas possibilidades que lhe pode dar a Internet.

Eduardo Veloso

### Continuação da pág. anterior:

#### O "quê", o "porquê" e o "como" em matemática

dade como um todo, e em particular para os matemáticos com responsabilidades e interesses na situação do ensino da matemática, que um número cada vez maior de pessoas tenham uma experiência mais ampla relativamente ao "quê" da matemática, com as suas intuições e consciência enriquecida, com base na sua experiência de manipulação de objectos no ecrã. Na medida em que amplia a sua percepção do conteúdo da matemática, a mesma experiência não pode deixar de gerar também interesse no "como" e no "porquê". Suspeito que haverá também progressos que religarão o "quê" e o "porquê", através da utilização de vários níveis de icons, objectos no ecrã e álgebra subjacente. Mas, entretanto, espero ver transformações importantes no modo como as ideias matemáticas são apresentadas e experimentadas

pelos alunos. O acompanhamento destes progressos representa por si só, e assim continuará a ser no futuro, um esforço considerável.

#### Referências

- Hewitt, D. (1994). *Economy and Learning Mathematics*. PhD Dissertation, Open University, Milton Keynes, (pedidos ao autor para a Universidade de Birmingham).
- Mason, J. & Nevile, L. (1994). *Diagrams as Functions in Geometry*, in *New Directions in Geometry Education*, Conference Proceedings, Queensland University of Technology, Brisbane.

John Mason  
The Open University

Tradução de E. Veloso. Agradece-se ao colega J. P. da Ponte a revisão da tradução. Os erros que existam são da responsabilidade da redacção.

### Materiais para a aula de Matemática



A actividade para utilização do programa Cabri da página seguinte é adaptada da Revista Micromath (Spring 1955, vol 11(1)) e acompanha aí o artigo de Michael de Villiers intitulado *An alternative introduction to proof in dynamic geometry*. Nesse artigo é defendido que a demonstração, face à existência de programas de geometria dinâmica como o Cabri, não tem já tanto um papel de verificação, para dissipar dúvidas sobre uma conjectura, mas sim um papel de tentativa de explicação das razões porque uma dada propriedade geométrica é verdadeira.

Escola.....

Professor(a).....

Ano/Turma..... Data.....

Aluno(a).....

## Ponto de Fermat de um triângulo

1. Em primeiro lugar, constrói um triângulo qualquer  $[ABC]$ .
2. Constrói triângulos equiláteros  $[DAB]$ ,  $[EBC]$  e  $[FCA]$  sobre os lados do primeiro triângulo. Apaga todas as construções não necessárias.
3. Constrói os segmentos  $[DC]$ ,  $[EA]$  e  $[FB]$ . O que notas?
4. Arrasta um dos vértices do triângulo. No meio de tudo o que muda, o que notas que se mantém invariante? Escreve a tua conjectura.
5. Transforma o triângulo inicial arrastando outros vértices e alterando assim o triângulo de várias maneiras. Qual é a tua conclusão?
6. Compara com as conclusões dos teus colegas — é a mesma ou é diferente?
7. Poderás explicar **porque razão é verdadeira** a tua conclusão? Tenta explicá-la através de outros resultados geométricos que saibas serem verdadeiros. Sugestões:
  - constrói as circunferências circunscritas aos triângulos  $[DAB]$  e  $[EBC]$ ; chama  $O$  ao seu ponto de intersecção diferente de  $B$ ; mede as amplitudes dos ângulos  $A\hat{O}B$  e  $B\hat{O}E$ .
8. Compara as tuas explicações com as dos teus colegas. Concordas ou discordas com as suas explicações? Porquê? Que explicações te parecem mais satisfatórias? Porquê?

### Nota histórica:

É atribuída ao matemático amador francês Fermat, que viveu nos princípios do séc. XVII, a descoberta desta propriedade dos triângulos. Ao ponto  $O$  é habitual chamar *ponto de Fermat* do triângulo  $[ABC]$ .

- Actividade prevista para ser utilizada com o programa CABRI.
- Actividade adaptada da Worksheet 3 do artigo “An alternative introduction to proof in dynamic geometry”, de Michael de Villiers, in *Micromath*, vol. 11 (1)



## 103 ANOS AO SERVIÇO DAS ARTES GRÁFICAS

### **ESCRITÓRIOS**

Travessa do Convento de Jesus, nº 4 1º  
Telefs. 395 18 18 / 395 26 75 / 60 45 53  
1200 Lisboa

### **OFICINAS**

Rua do Sol a Santa Catarina, 29 - 29A - 30B  
Telef. 342 88 73 • 1200 Lisboa

### **ARMAZÉNS**

Rua do Sol a Santa Catarina,  
36A - 36B • 1200 Lisboa

## Pontos de vista, reacções, ideias...



### Uma pedra no sapato ... ou porque não escrevo para a Revista

Há já algum tempo, muito tempo mesmo, que penso escrever para a Revista, mas nunca escrevi.

Primeiro ia apresentando, a mim mesma, desculpas: ando muito ocupada, fica para quando tiver mais tempo para reflectir e redigir um artigo. Depois esta desculpa já não servia e eu ia arranjando outras: não faço nada que seja assim tão diferente, tão importante que valha a pena contar aos colegas, não escrevo tão bem que mereça ser impresso e por aí ia vivendo.

Até que um dia, há sempre um dia nestas coisas, uma colega estava a mostrar-me fotografias duma exposição que tinha havido na Escola dela e ao mostrar as fotografias, ela ia contando como os alunos tinham aderido, de como a Escola foi vivendo aquela actividade de Matemática. Porque não mandas isto para a Revista? E ela, ela que é muito mais viva nestas coisas que eu, disse logo: "Para a Revista, Deus me livre! É tudo tão perfeito! Tudo tão bem feito, tudo tão bem acabado, não, nunca. E aí fez-se *click* na minha cabeça. Eu também não escrevia para a Revista por isso mesmo, porque é tão perfeita, tão completa, tão, tão... Traduz sempre "coisas" tão bem experimentadas, tantos sucessos, que eu acabava também por nunca escrever para a Revista. Mas decidi-me. Tinha que dizer alguma coisa.

Será que os professores no seu dia-a-dia, com os seus 30 alunos por turma, com as salas de aula sem materiais, com alunos pouco interessados nas actividades propostas, não fazem mudanças? Não quererão também eles contar dos seus pequenos sucessos e dos muitos insucessos? Das frustrações que se vão sentindo pelo pouco reconhecimento social da nossa profissão?

Será que nos revemos na Revista? Ou ficamos ainda mais isolados na nossa insegurança? Será que não há lugar para nós na Revista? Como é que se pode

fazer? Se se tiver uma experiência, fichas de trabalho, mas não se quiser mais do que contar aos colegas, se quiser contar um pouco como vou sentindo os desaires que vou vivendo, mas sem grandes reflexões, sem grandes textos, poderá vir a ser publicado?

Eu não queria que a Revista deixasse de ter artigos que me fazem reflectir, que me fazem pensar, ter ideias para as aulas, mas queria isso sim, que a Revista mostrasse os sucessos e falasse também dos nossos insucessos. O que eu gostava mesmo era que a minha colega me tivesse mostrado as fotografias e me tivesse dito: "tirei-as pensando em mandá-las para a Revista." E a minha pedra teria logo saltado do sapato.

P.S. Na última Revista vinha uma página inteirinha à espera de artigos, saberiam eles, os da Revista, do meu artigo? Saber, não sabiam, mas palpitava-lhes... anda por aí muita gente a fazer coisas e a pensar artigos...

Lina Vicente  
Esc. C+S Pedro de Santarém



### Método de Indução — uma grande lacuna nos novos programas de Matemática

O Método de Indução não faz parte dos novos programas de Matemática do ensino secundário. Programas estes que dão muito valor à intuição, o que é bom, mas sabemos que ela nos engana muitas vezes. Quando se quer ver que determinada regra é hereditária verificamos com alguns naturais mas isso não chega para acreditar ou mesmo provar. Se pensarmos na sucessão 5, 11, 17, 23, 29, ..., como todos os números indicados são primos, podemos pensar que  $29+6$  também é primo, o que é realmente falso. O Teorema de Fermat

já foi "provado" para muitos casos; usando a metodologia dos novos programas pode acreditar-se no resultado de Fermat, pois foi já verificado para  $n=3$ ,  $n=4$  e para muitos outros: conclusão esta que é errada. Mas o melhor exemplo que se pode dar aos alunos no secundário é o Problema de Collatz: escolhe-se um número natural; se for par divide-se por 2, caso seja ímpar multiplica-se por 3 e soma-se 1; repetimos o processo infinitamente. Ex.: 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Para qualquer número experimentado até agora, caiu-se sempre no ciclo 4, 2, 1. A metodologia dos novos programas leva a que os alunos pensem que tal resultado seja verdade. E pode ser que o seja, só que até agora ainda ninguém o conseguiu provar. Ainda referente ao problema de Collatz, penso que se poderá conjecturar que seja uma das proposições das quais não se saberá o seu valor lógico, baseando-se no Teorema da Incompletude de Gödel.

Tem vindo ao público que os programas de Matemática são extensos, em vez de se dizer que o número de aulas semanalmente é que é escasso, principalmente para os que farão as provas específicas. E não é com cortes radicais, como o que aconteceu com o método de indução que fazia parte do novo programa do 10º ano no início da reforma, que se resolve a situação.

J. Orlando de Freitas  
Esc. Sec. Rodrigues de Freitas, Funchal



### "Vamos repensar o ProfMat?"

Juntamente com o artigo de Helena Fonseca, "A minha visão do ProfMat 94...", que saiu no n° 32 da revista, foi publicada uma carta que a colega Lúcia Grilo teve a boa ideia de enviar, com o título acima. Gostava de fazer, a título inteiramente pessoal, algumas observações que me suscita esta carta.

Lúcia Grilo diz que "não gostou de algumas coisas." Algumas delas dizem respeito ao comportamento de alguns participantes — que vão aos Grupos temáticos sem estarem inscritos ou não vão no segundo dia, ou que falam sem parar durante uma sessão plenária. A colega diz que "contra isto a APM. nada pode fazer além de alertar a consciência de cada um de nós". Certamente, e como a APM somos todos nós, os sócios, e neste caso particular os participantes do encontro, é principalmente da nossa auto-disciplina que depende a correcção dos problemas apontados. Quanto aos organizadores do ProfMat, julgo que o conjunto de recomendações e apelos que foram feitos neste último encontro constituem o limite superior possível quanto a "alertar consciências". Para além disso, entrariamos num sistema controlado antipático que eu não gostaria de ver instituído.

Outra coisa de que a colega não gostou foi o facto de haver muitas sobreposições de Conferências, Com. Oraís, etc. etc.. o que teria facilitado o "chegar tarde aqui, sair cedo ali, baldar acolá...". E em relação a este problema, pergunta se não seria possível:

- "reorganizar e juntar as sessões sobre temas semelhantes?" — isso seria agradável para quem gosta de ir a sessões sobre temas semelhantes, mas tudo leva a crer que existem também outros gostos, por exemplo o de tentar ter um panorama do que se passa, indo a coisas diferentes...; quem deverá ficar satisfeito?;

- "definir "dois ou três grandes temas para o ProfMat e todos os trabalhos se subordinassem a esses temas" — julgo que isto iria limitar grandemente a troca de experiências, a apresentação de comunicações, a organização de sessões práticas e outra participação activa de muitos professores; além disso não resolveria o problema da sobreposição;

- "remeter as sessões práticas para os núcleos, reservando o ProfMat para questões mais teóricas e gerais" — aqui sim, concordo que um modelo de ProfMat baseado sobretudo em conferências teóricas plenárias ou semi-plenárias resolveria de uma penada muitos dos "problemas" que a colega aponta. Mas será desta forma que se evita o desaparecimento. como diz, daquele espírito que faz com que o nosso Encontro seja único, o espírito ProfMat?;

Diz a colega que "pensa e insiste que é urgente repensar o ProfMat". Bom, é isso que todos os anos uma comissão organizadora tenta fazer. Mas, com 1200 ou mais participantes, não há muitos modelos possíveis que evitem, como a colega diz, que desapareça "aquele espírito que faz com que o nosso Encontro seja único". Ninguém é dono do "espírito ProfMat", mas cada um de nós tem uma ideia do que possa ser. Para mim, é a luta para que o encontro seja cada vez mais participado, que existam cada vez mais professores a apresentar comunicações, a organizar sessões práticas, a trocar experiências. Isso tem vindo a acontecer ao longo dos

anos e coexiste com um aumento sempre crescente do número de participantes, para além do que muitos imaginariamos possível há alguns anos. Sinceramente, parece-me francamente contraditória a posição da colega, ao sugerir que se altere o tipo de encontro — optando pelas questões mais teóricas e gerais e pela abolição das sessões práticas — para que se conserve o tal "espírito" e não se percam "para a Associação e para o Encontro muitos professores".

Uma nota final: a carta da colega Lúcia Grilo e o artigo de Helena Fonseca, apresentando duas visões opostas do ProfMat, foram publicados na revista 32, em Janeiro deste ano. Sei que até hoje, dos milhares de professores que receberam e leram a revista, não chegou qualquer reacção à redacção de **Educação e Matemática**. Na mesma página em que Helena Fonseca fala do "excepcional ambiente de trabalho e convívio aí vivido", Lúcia Grilo diz que se tem de repensar o ProfMat "sob pena de perdermos para a Associação e para o Encontro muitos professores" e "desaparecer [...] o espírito ProfMat". Como poderão tantos leitores de **Educação e Matemática** ficar indiferentes a estas duas visões da situação, ou pelo menos achar que *não vale a pena* intervir?

Eduardo Veloso

## Problema do trimestre

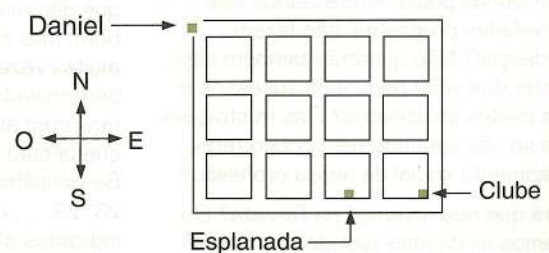
### Problema proposto

O Daniel está à entrada do bairro e resolveu ir até ao clube seguindo um pouco ao acaso. Assim, em cada cruzamento vai deitar uma moeda ao ar para saber se vai para sul ou para leste.

A namorada está sentada numa esplanada, sem saber que o Daniel já chegou ao bairro.

Qual é a probabilidade de eles se encontrarem?

### O Daniel e a namorada





## **índice**

- 1 A APM na Internet? Porque não?**  
*Eduardo Veloso*
- 2 Novas tecnologias na aula de Matemática?**  
*João Pedro da Ponte*
- 8 Projecto "Geometria: do concreto ao abstracto, da indução à dedução"**  
*António Luis da Silva e Maria Natália Serrazina*
- 10 Grupo de Trabalho de Investigação — os primeiros anos de actividade**  
*Ana Maria Boavida e Henrique Manuel Guimarães*
- 14 Matemática em Exame**  
*Paula Teixeira*
- 19 Materiais para a aula de Matemática**  
Probabilidades na Batalha Naval
- 20 Ajustamento dos Novos Programas de Matemática do Secundário' – 8 questões colocadas à Equipa Técnica**
- 25 Formação de professores – normalização – avaliação**  
*António Abrantes*
- 27 O problema do trimestre**
- 28 Para este número seleccionámos**  
O "quê", o "porquê" e o "como" em matemática
- 33 Materiais para a aula de Matemática**  
Ponto de Fermat de um triângulo
- 35 Pontos de vista, reacções, ideias...**