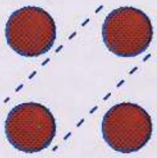
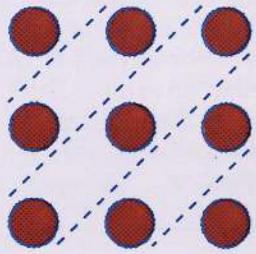
Educação e Matemática

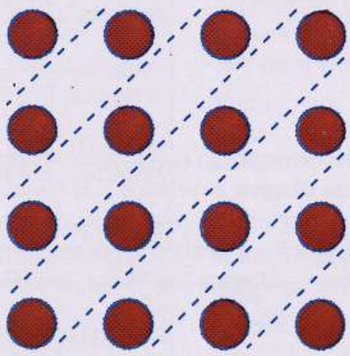
Nº 33 — 1º trimestre de 1995



$$1+2+1=2^2$$



$$1+2+3+2+1 = 3^2$$



$$1+2+3+4+3+2+1 = 4^2$$

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1 = n^2$$

"uma imagem vale mais do que mil palavras"

Preço: 600\$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Um novo modelo gráfico para a *Educação e Matemática*

Como os leitores certamente notarão, este número de ***Educação e Matemática*** apresenta-se com um "visual" diferente. Desde há alguns meses que a redacção tem andado a estudar e a testar aquilo a que temos chamado um *novo modelo* para a nossa revista. Desde que começou a sua publicação, esta é a segunda vez que uma mudança apreciável no aspecto gráfico da revista é empreendida. As mudanças, desta vez, vão principalmente no sentido de tornar a *mancha* — parte impressa de cada página — mais leve, resultando daí, como esperamos, uma leitura mais agradável. Na realidade, devido a vários factores, o "gosto tipográfico" também vai evoluindo com o tempo e algumas das nossas modificações vão no sentido de nos adaptarmos a novas tendências no *design* de publicações deste tipo.

Assim, por exemplo, das duas modalidades possíveis de distinção dos parágrafos de um texto — primeira linha indentada ou um pequeno espaço de separação entre os parágrafos — resolvemos adoptar o segundo. Outra modificação importante, a que porventura alguns leitores se vão custar a habituar, é o facto do texto não ser justificado ("alinhado" dos dois lados) e portanto aparecer em espinha à direita. Isto torna a mancha mais leve, diminui as hifenizações e evita os espaçamentos irregulares entre palavras. Julgamos que vai também contribuir para evitar o carácter um pouco "militarizado", em marcha compacta, que dominava as nossas páginas. Mudámos também de tipo geral de letra, quer no corpo do texto quer nos títulos. Enfim, outras alterações se tornarão visíveis com a leitura deste número e dos seguintes. De resto, só com a experiência real de paginação dos próximos números poderemos afinar este novo modelo. Além disso, ficaremos atentos às reacções dos leitores, que esperamos nos ajudem a melhorar e consolidar esta nossa aventura gráfica, com as suas críticas e sugestões.

Alterações na redacção

Nos últimos meses têm vindo a acontecer várias alterações na composição do corpo redactorial da *Educação e Matemática*. Assim, há uns meses atrás, a Leonor Barão deixou de integrar a redacção da revista o que também veio a acontecer com a Susana Carreira, neste caso no entanto mais recentemente. Damos agora notícia disso, aproveitando para lhes deixar aqui o nosso agradecimento pela sua colaboração, a qual, aliás, como bem sabemos, se manterá ainda que de outro modo. Anunciamos também duas novas "entradas": a Maria José Bóia e a Ana Boavida. Bem vindas e obrigado também.

Neste número colaboraram

António Bernardes, Isabel Cristina Dias, João Pedro da Ponte, José Paulo Viana, Manuel Saraiva, Maria da Graça Correia, Orlando de Freitas, Roberto Ribeiro Baldino, Teresa Colaço.

Sobre a capa

A capa deste número de *Educação e Matemática* reproduz uma "demonstração sem palavras" de origem grega, tal como Martin Gardner a apresenta, incluída no livro *Proofs without words* de Roger B. Nelsen, publicado pela *Mathematical Assotiacion of America* em 1993. O artigo "Quadratura do círculo: uma solução não ortodoxa" e o Pense Nisto nesta revista contêm também referências a esta publicação.

Data de Publicação

Este número foi publicado em Abril de 1995.

nº 33
1º trimestre
de 1995

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Alexandra Pinheiro
Ana Boavida
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Eduardo Veloso
Helena Lopes
Henrique M. Guimarães
Isabel Amorim
Maria João Lagarto
Maria José Boia
Rosário Ribeiro

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 89.062/95

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos
1500 Lisboa
Tel/Fax: (351) (1) 7166424

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

E terá que ser assim?

Cada vez com mais frequência a Matemática é notícia na comunicação social. É talvez neste momento a disciplina escolar mais questionada, mais acusada e mais temida.

Um breve olhar pelos jornais dos últimos tempos faz-nos recordar alguns títulos bombásticos aos quais a matemática vem sempre associada e referida de forma destacada: *as escolas que tratam mal a matemática , os alunos portugueses são os piores num inquérito internacional, a matemática é o caso mais grave da aplicação da Reforma, os alunos do primeiro ano de Engenharia não conhecem o teorema de Pitágoras, cerca de 60000 alunos inscreveram-se para fazer prova de aferição de Matemática* (num total de 90000), ... *as médias das provas de aferição de Matemática são de 30% ...*

Tem-se tentado responsabilizar os professores pelo insucesso: "os professores faltam muito", "os professores não cumprem os programas", "os professores não querem ou não são capazes de motivar os alunos", "os professores ..."

Concretamente, aos professores de Matemática a opinião pública exige e impõe, mais do que ao professor de qualquer outra disciplina, que "cumpra os programas", que prepare os jovens para terem êxito nas "provas globais, nas provas de aferição, nas provas de acesso". Ao professor de Matemática é cada vez mais exigido que "prepare para as provas de selecção ".

E como nos sentimos nós neste papel? Como entendemos estas exigências para "cumprir os programas"? Como sentimos esta pressão no sentido de responder às exigências de selectividade ? Que implicações tem na nossa forma de estar e de ser professor este conflito permanente entre a renovação do ensino e a resposta a este filtro social?

A Matemática, se por um lado é aceite consensualmente, como elemento importante e indispensável na formação geral do aluno, por outro continua também a ser considerada como um "dom" de alguns. Continua a considerar-se uma ciência difícil, abstracta, onde pouco há a fazer quando os alunos não têm "jeito" ou bases...

Sabemos que não é assim e os novos programas contrariam esta visão e abrem perspectivas de mudança. Assim, seria pois natural que a Matemática, hoje, fosse notícia porque estavam a acontecer "coisas" novas nas escolas e nas aulas:

— as escolas estavam a criar espaços de trabalho próprios — Laboratórios de Matemática — com materiais e recursos diversificados onde as tecnologias também estavam presentes;

— os professores preparavam novos materiais, usavam novos recursos, diversificavam formas de trabalho, ...

— os professores estavam entusiasmados, trocavam experiências, davam forma a uma verdadeiro movimento de formação contínua ...

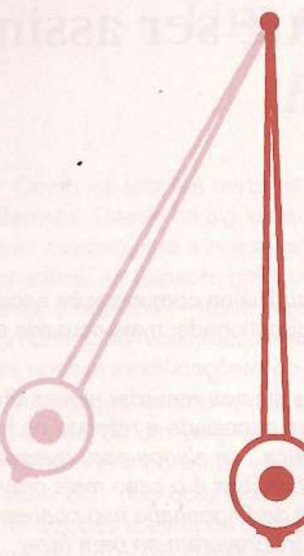
— os alunos desenvolviam actividades mais significativas, em que construíam, descobriam, imaginavam, tinham sucesso e prazer a aprender Matemática...

Porque é que ainda não é assim?

A Direcção da APM

Oscilações de duas propostas no

António Bernardes, Manuel



A generalização dos novos currículos de matemática do ensino secundário, no ano lectivo 1993/94, surgiu-nos como um desafio à nossa prática pedagógica. Sentimos que a melhor forma de o enfrentarmos era trabalhar em conjunto. Os novos programas constituíram o pretexto e a necessidade para iniciarmos um trabalho de equipa de forma regular.

As aplicações da matemática são um dos aspectos contemplados nas novas orientações curriculares e constituem um vector da matemática e do seu ensino/aprendizagem que nos é muito querido.

Para nós, e tal como afirma Ponte (1992), saber matemática não significa forçosamente ter facilidade em a aplicar a situações da vida real ou mesmo a situações de outras disciplinas escolares.

O mundo de hoje está matematizado (Davis, 1988), havendo toda uma utilização de ideias e construções matemáticas, quer na sua forma teórica quer em manifestações em computador, para organizar, para descrever, para regular e para fomentar as nossas actividades humanas.

A própria compreensão do "mundo real", como afirma Burghes e outros (1988), tem sido feita através da transferência dos seus problemas para um meio no qual eles possam ser estudados mais convenientemente — o mundo matemático. Esta interacção provoca criação de matemática e transforma as nossas percepções do mundo exterior que, por sua vez, criam novas interacções.

Propostas de tarefas apresentadas aos alunos baseadas em exemplos da vida real são um aspecto importante da nossa prática docente, embora não as consideremos como a condição necessária para uma boa motivação e aprendizagem. Muitas vezes é mais útil apresentar exemplos dentro da matemática que exemplos reais (por vezes autênticos exemplos "reais forçados") que nada dizem aos alunos. Existem propostas do fôro da matemática pura que têm explorações bastante ricas e são desafiadoras e estimulantes para os alunos. Estes aspectos são, quanto a nós, os mais importantes, e dos quais procuramos que se revistam as nossas propostas, quer estas envolvam ou não aplicações.

Porém, uma coisa é criar uma proposta que lida apenas com conceitos matemáticos, outra coisa é criar uma onde há intervenção de conceitos de outras disciplinas ou áreas do conhecimento que nos devem merecer muita atenção. Neste último caso, há que ter o cuidado de os tratar correctamente e perto da forma como são tratados nas respectivas áreas, para não criar contradições nos alunos. No entanto, a realidade das escolas é a de que os professores desconhecem o que se passa nas outras disciplinas, muito em particular a abordagem de conceitos comuns. Por sua vez, o trabalho interdisciplinar não é frequente, embora se revele de grande necessidade e utilidade. Será que este diálogo vai abrir-se com a área escola?

A actividade que os alunos desenvolvem em torno de propostas que lidam com contextos reais contribui, quanto a nós, para que eles adquiram quer ideias e conhecimentos matemáticos quer uma melhor compreensão do mundo que os rodeia.

Como surgiram e foram elaboradas as duas propostas

A entrada no capítulo dos reais foi feita com alguma descontracção. Sentimos que íamos tratar assuntos onde nos sentiríamos à vontade e onde pensávamos ser fácil fazer aulas inovadoras.

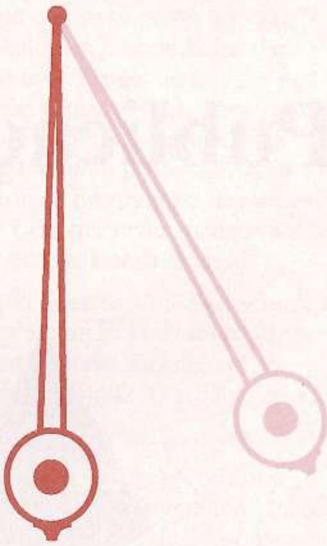
Neste tema valorizámos bastante a evolução histórica do conceito de número e a resolução de problemas envolvendo várias formas de representação dos reais. Neste último caso, nomeadamente sobre potências e radicais, o contexto das propostas foi predominantemente numérico e geométrico.

Mas, à medida que íamos avançando, também iam crescendo algumas dúvidas. Qual o nível de profundidade no tratamento de certos assuntos? Até onde ir no desenvolvimento (mecanização) de certas técnicas de cálculo, em particular nas potências e radicais?

As poucas tentativas de insistência em exercícios de cálculo foram muito pouco proveitosas. Quando fizémos um balanço daquele capítulo ficámos convictos de que o ensino de certas regras de cálculo pode partir da resolução de problemas (e nós até

um pêndulo: capítulo dos reais

Saraiva, Teresa Colaço



tentámos enveredar por aí), não fazendo muito sentido a insistência na resolução de exercícios de mecanização pura e simples. A aplicação dessas regras poderia ser capitalizada mais tarde, no estudo das funções. Estamos, este ano, a ter a confirmação daquela convicção.

Após o tratamento das relações de ordem e as respectivas propriedades, que foram dadas numa base puramente matemática (contextos numéricos ou geométricos — perímetros, áreas e volumes), resolvemos elaborar uma proposta que abordasse de uma forma global o enquadramento de expressões com uma variável e envolvesse a aplicação das propriedades já estudadas. Pensámos também que essa proposta poderia ter como pano de fundo uma situação exterior à matemática.

Como os alunos eram do agrupamento 1 e tinham a disciplina de física no currículo pensámos em criar uma proposta que tivessse como base um modelo daquela área.

Começámos então as conversas com os professores de física. Estas foram no sentido de arranjar modelos físicos a partir dos quais pudéssemos abordar temas do programa de matemática, nomedamente os enquadramentos. Na escolha desses modelos havia a preocupação de que fossem do conhecimento dos alunos ou que a sua compreensão não constituísse um obstáculo à abordagem dos conceitos matemáticos. Também nós, professores, tínhamos a preocupação de encontrar uma situação em que nos sentíssemos à vontade na discussão dos conceitos físicos.

Acabámos por optar por utilizar o modelo que relaciona o período de oscilação de um pêndulo com o comprimento do pêndulo e a aceleração da gravidade, e que é traduzido pela equação

em que T representa o período de oscilação (em segundos), L o comprimento do fio (em cm) e g a aceleração da gravidade (em cm/s^2). A expressão contém as leis do pêndulo estabelecidas por Galileu:

1ª Lei — O período é independente da massa e da natureza do corpo oscilante.

2ª Lei — As pequenas oscilações são isócronas, isto é, têm a mesma duração.

3ª Lei — O período é directamente proporcional à raiz quadrada do comprimento no mesmo local.

Sob o ponto de vista físico, fixar g e analisar a relação entre L e T não é uma situação prática muito rica. Sob o ponto de vista matemático temos um modelo do tipo $y = k\sqrt{x}$.

Contudo, a situação de fixar L e ver a relação entre g e T, tem uma aplicação prática imediata, que é a de permitir o cálculo da aceleração da gravidade a partir da medição de T. Traduz-se à superfície terrrestre na variação da aceleração da gravidade dos pólos para o equador, maior nos pólos porque mais próximo do centro da Terra. Sabe-se que o valor de g varia aproximadamente entre 9,78 e 9,84 m/s2.

Sob o ponto de vista matemático, para estudarmos tal variação podemos isolar g, obtendo

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Temos assim um modelo do tipo

$$y = \frac{k}{x^2}.$$

Note-se que a equação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

é apenas válida para pequenos ângulos de oscilação, de modo que seja válido . Para ângulos que não verifiquem esta condição mostra-se que o período pode desenvolver-se numa série de potências

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2} sen^2 \frac{\theta_0}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{4^2} sen^4 \frac{\theta_0}{2} + \cdots \right)$$

em que é o deslocamento angular máximo.

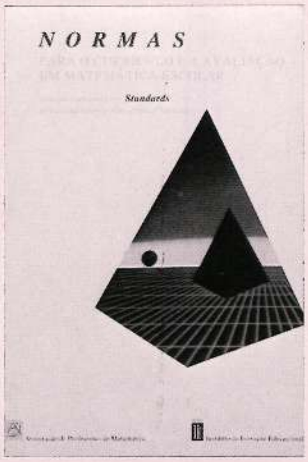
Assim, elaborámos as diversas questões da proposta procurando nunca perder de vista a discussão ao nível da física.

No âmbito da matemática, apontámos no sentido:

- da exploração do conceito de variável,

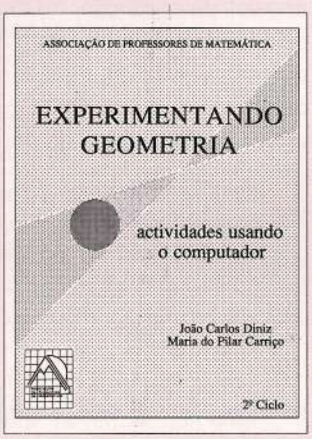
Publicações APM

Normas Profissionais para o Ensino da Matemática
tradução portuguesa dos Professional Standards
do National Council of Teachers of Mathematics
Preço 3 000$00 (sócios 2 100$00)
(co-edição com o IIE)
(Novo)



Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar
tradução portuguesa dos Standards
do National Council of Teachers of Mathematics
Preço 3 000$00 (sócios 2 100$00)

O "OURI"
Um Jogo Caboverdiano
e a sua prática em Portugal
Elísio Santos Silva
Preço 700$00 (sócios 500$00)
(Novo)



Experimentando Geometria
actividades usando o computador
João Carlos Diniz e M. do Pilar Carriço
Preço 430$00 (sócios 300$00)
(Novo)

No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem).
As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%
de 2501$00 a 5000$00 - 15%
mais de 5000$00 - 10%

- da manipulação de equações com várias variáveis (questões 1, 2 e 3 da ficha 1)[1],
- do reconhecimento das relações funcionais entre as diversas variáveis (questão 3),
- da interpretação gráfica da situação (questão 4),
- da aplicação das propriedades das relações de ordem (questão 5a),
- da abordagem intuitiva do conceito de limite (questão 5b).

Na fase de elaboração verificámos imediatamente que não poderíamos abordar algumas questões matemáticas que considerávamos importantes sem cair no ridículo de uma situação sem sentido físico. Por exemplo, não teria sentido explorar a variação de T em função de L, quando L toma valores muito pequenos (próximos de 0) ou muito grandes. Aliás, esta última situação só poderia ser posta se imaginássemos um pêndulo com um comprimento muito grande, "pendurado de uma nuvem, talvez seguro pelo Santo António".

Era pois necessário dar o salto do contexto físico para um contexto puramente matemático. Surge assim a proposta "Expressões com variáveis e enquadramentos" (ficha 2). Nesta, para além dum aprofundamento e consolidação das questões matemáticas atrás referidas, introduziram-se questões (2b) em que os alunos teriam que lidar com números reais na forma de potências e descobrir leis de formação. Nesta ficha de trabalho, as perguntas centraram-se na utilização da equação

$$a = \pi\sqrt{\frac{z}{s}}$$

semelhante à do pêndulo, mas em que foi valorizada a relação entre *a* e *z*, menos explorada na outra ficha.

Como correram as aulas

A proposta "As oscilações de um pêndulo" foi apresentada numa aula de duas horas, realizada em grupo, e os alunos utilizaram como meios auxiliares calculadoras não gráficas.

Estes alunos já tinham trabalhado várias vezes em grupo noutras actividades, não constituindo, por isso, qualquer motivo de perturbação a proposta daquela metodologia de trabalho.

Em todas as questões houve um momento de interpretação das situações sob o ponto de vista físico e um de discussão da sua resolução do ponto de vista matemático, nem sempre por esta ordem.

Apesar de alguma surpresa inicial por "verem" a física na aula de matemática, entraram rapidamente na realização da actividade. Globalmente, podemos dizer que o contexto físico foi facilmente apreendido pelos alunos. Pensamos que essa compreensão funcionou como factor facilitador da realização de algumas questões e a discussão no plano da física deu significado às propostas matemáticas.

A questão 1 constituiu o período de "aquecimento". Nela os alunos tiveram o primeiro contacto com o modelo.

Na questão 2 surgiram os primeiros problemas. Os alunos tiveram dificuldade em verificar que era necessário resolver a equação em ordem a g e manifestaram também dificuldades na sua resolução.

A partir daqui, a maior parte das questões não ofereceram grandes obstáculos.

Na questão 3, a partir do cálculo de T na Lua, Júpiter e Neptuno, os alunos concluíram facilmente que T2 variava na razão inversa de g. No entanto, as respostas às três perguntas seguintes não foram uniformes. Alguns alunos optaram por apresentar valores concretos confirmados com cálculos, outros optaram por escrever que bastava considerarem-se valores de g superiores aos dados (para um T inferior a qualquer dos obtidos), e valores de g inferiores aos dados (para um T superior a qualquer dos obtidos).

A interpretação gráfica proposta na questão 4 foi feita por leitura aproximada e abordou os enquadramentos apenas sob esse ponto de vista. A aplicação das propriedades das relações de ordem só foi feita na questão seguinte (5a). Serviu esta para reforçarmos a utilidade do enquadramento progressivo (da construção progressiva das expressões) pela aplicação sucessiva das propriedades necessárias.

A última questão (5b) foi discutida em conjunto com toda a turma. Tratou-se de uma primeira abordagem ao conceito de limite. Quando $g \to 0$, $T \to +\infty$, e quando $g \to +\infty$, $T \to 0$.

A actividade "Expressões com variáveis e enquadramentos" foi dada aos alunos no final da aula para ser resolvida individualmente em casa. A discussão foi feita na aula seguinte.

As questões 1 e 2a, bastante semelhantes à da ficha do pêndulo, foram resolvidas sem dificuldades, bem como a questão 2c. É curioso registar que na resolução desta, os alunos utilizaram expressões como "tende para 0" ou "toma valores para o infinito" a par de outras do tipo "toma valores muito pequenos" ou "toma valores muito grandes".

A primeira pergunta da questão 2b não foi resolvida por todos, embora muitos tenham reconhecido que para s fixo, sempre que z aumenta 100 vezes, a aumenta 10. A segunda pergunta dessa questão foi a que levantou mais dúvidas. Muitos alunos não reconheceram que sempre que a aumentava 4 vezes (22, 24, 26, ...,) z teria que aumentar 16 vezes.

Conclusões

Ao analisarmos as actividades desenvolvidas pelos alunos, existem alguns aspectos que vale a pena salientar. São eles: i) o trabalho de grupo na realização da ficha do pêndulo, ii) a forma como foi encarada pelos alunos a ligação com a física e iii) o trabalho no campo da matemática.

O nosso papel ao longo do trabalho centrou-se no acompanhamento da actividade dos alunos, no desbloqueamento de certas situações (resolução da equação da questão 2 da ficha do pêndulo), na discussão com toda a turma de algumas questões mais delicadas (o comportamento de T para valores de g próximos de 0 ou muito grandes — significado matemático e físico).

Tal como já referimos o trabalho decorreu em "velocidade de cruzeiro" sendo de assinalar positivamente a discussão entre os alunos dos grupos e a entreajuda em certos momentos da resolução da ficha.

Os alunos não ficaram particularmente delirantes por a situação apresentada estar ligada à física. Isso não impediu porém a discussão dos conceitos ao nível daquela disciplina e o empenhamento na realização das tarefas propostas na ficha. Pensamos que a situação da física funcionou não tanto como motivação, mas mais como uma forma de dar sentido a um cálculo algébrico que muitas vezes é mecanizado e tratado fora de qualquer contexto real.

Do ponto de vista matemático, as propostas atingiram os objectivos que pretendíamos. Serviram para evidenciar (tornar claras) as relações entre as variáveis de uma equação literal. Por outro lado, os alunos ficaram a trabalhar bem com os enquadramentos, inclusivé nos enquadramentos de expressões com mais do que uma variável (enquadramento da soma e do produto). Serviu igualmente para discutirmos a utilização de valores exactos ou valores aproximados quando estamos a fazer enquadramentos. Alguns destes aspectos já foram confirmados neste ano lectivo.

Pensamos ainda que estas situações têm uma natureza que não se esgota no trabalho realizado. Podem ser retomadas no estudo das funções com ganhos matemáticos evidentes, nomeadamente a exploração gráfica em paralelo com o cálculo algébrico.

1 As fichas referidas neste artigo estão reproduzidas na secção de materias para a aula de matemática, pp. 7-9.

Nota: Agradecemos à professora de física Maria da Graça Ventura a colaboração no tratamento de alguns conceitos físicos abordados na ficha do pêndulo e neste artigo.

Referências

Afonso, L., Bernades, A., Colaço, T., Saraiva, M. (1994). Reflexões sobre a aplicação dos novos programas do 10º ano. Actas do ProfMat 94. Lisboa, APM.

Burghes, D., Huntley, I., McDonald, J. (1988). Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling, Chichester, EllisHorwood.

Davis, P. (1988). Applied Mathematics as a Social Contract. ZDM, 88/1, 10-15.

Ponte, J. (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real, Revista da Educação, II/2, 95-108. Lisboa, DEFCUL.

António Bernardes
Escola Secundária de Gil Vicente
Manuel Saraiva
Universidade da Beira Interior
Teresa Colaço
Escola Secundária de Gil Vicente

III Encontro Nacional de Didácticas /Metodologias da Educação Universidade do Minho, Braga 21-23 de Setembro de 1995

O Departamento de Metodologias da Educação, do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho vai organizar, nos próximos dias 21-23 de Setembro de 1995, o III Encontro Nacional de Didácticas/Metodologias da Educação.

Com a realização deste Encontro pretende-se:

1. Debater objectivos, percursos e resultados de trabalhos de investigação no âmbito das Didácticas/ Metodologias da Educação.
2. Discutir objectivos, percursos e resultados de projectos de formação de professores/educadores.
3. Analisar experiências educativas realizadas no âmbito das escolas e/ou das diferentes disciplinas escolares.
4. Discutir o estatuto das Didácticas/ Metodologias da Educação.

Serão conferencistas convidados os Professores J. Veiga Simão (Portugal), A. Choppin (França) e K. Zeichner (EUA). Realizar-se-ão mesas redondas subordinadas às temáticas seguintes: Didáctica e Formação de Professores, Reforma Curricular: abordagens retrospectivas e prospectivas, Estatuto das Didácticas/Metodologias da Educação. Haverá, ainda, lugar à apresentação de comunicações livres e à realização de workshops e symposia cujos resumos (máximo 150 palavras) deverão ser enviados até 15 de Maio.

Contactos:

Comissão Organizadora do III END/ME
Instituto de Educação e Psicologia
Universidade do Minho
Campus de Gualtar
4719 Braga Codex
Tel: (053)604240/41
Fax: (053)604244

Materiais para a aula de Matemática

As actividades propostas nas páginas seguintes são as actividades a que se refere o artigo "Oscilações de um pêndulo: duas propostas no capítulo dos reais" de António Bernardes, Manuel Saraiva e Teresa Colaço.

Ao longo do artigo essas actividades são comentados pelos autores com base na experiência que realizaram em turmas do 10º ano.

Aos colegas que as desejarem utilizar nas suas aulas aconselhamos a leitura do referido artigo.

Os autores certamente que gostariam de receber comentários sobre as actividades suscitados por novas experiências realizadas por outros professores.

Escola.. Ano/Turma.....................

Nome.. Data..............................

Oscilações de um pêndulo

Introdução

O período de oscilação de um pêndulo é o tempo que este leva de uma posição até voltar à mesma posição. Depende do comprimento do fio e da aceleração da gravidade local. Pode ser calculado através da fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

em que **T** representa o período (em segundos), **L** o comprimento do fio (em cm) e **g** a aceleração da gravidade (em cm/s^2).

Questões

1. Na Terra a aceleração média da gravidade é **g** = 980 cm/s^2. O período de oscilação de um pêndulo com um comprimento de 50 cm pode ser calculado da seguinte forma:

L = 50 cm $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{50}{980}} \approx 1{,}419$ s

- Qual é o significado deste valor do período?

2. Embora normalmente se considere **g** = 980 cm/s^2, como a Terra é achatada nos Pólos o valor da aceleração da gravidade não é igual em todos os pontos da superfície terrestre. O período de oscilação de um pêndulo com 50 cm de comprimento é:

nos Pólos $T \approx 1{,}416$ s

no Equador $T \approx 1{,}421$ s

- Determina o valor da aceleração nos Pólos e no Equador.

3. Iniciemos agora uma viagem pelo Sistema Solar. Como os diversos planetas têm massas diferentes a aceleração da gravidade em cada um deles é também diferente. Sabemos que:

planeta	aceleração g(cm/s)	planeta	aceleração g(cm/s)
Mercúrio	360	Júpiter	2590
Vénus	880	Saturno	1130
Terra	980	Urano	1150
Lua	160	Neptuno	1160
Marte	370	Plutão	450

• Considera um pêndulo com o comprimento **L** = 50 cm. Determina o período de oscilação desse pêndulo nos seguintes planetas:

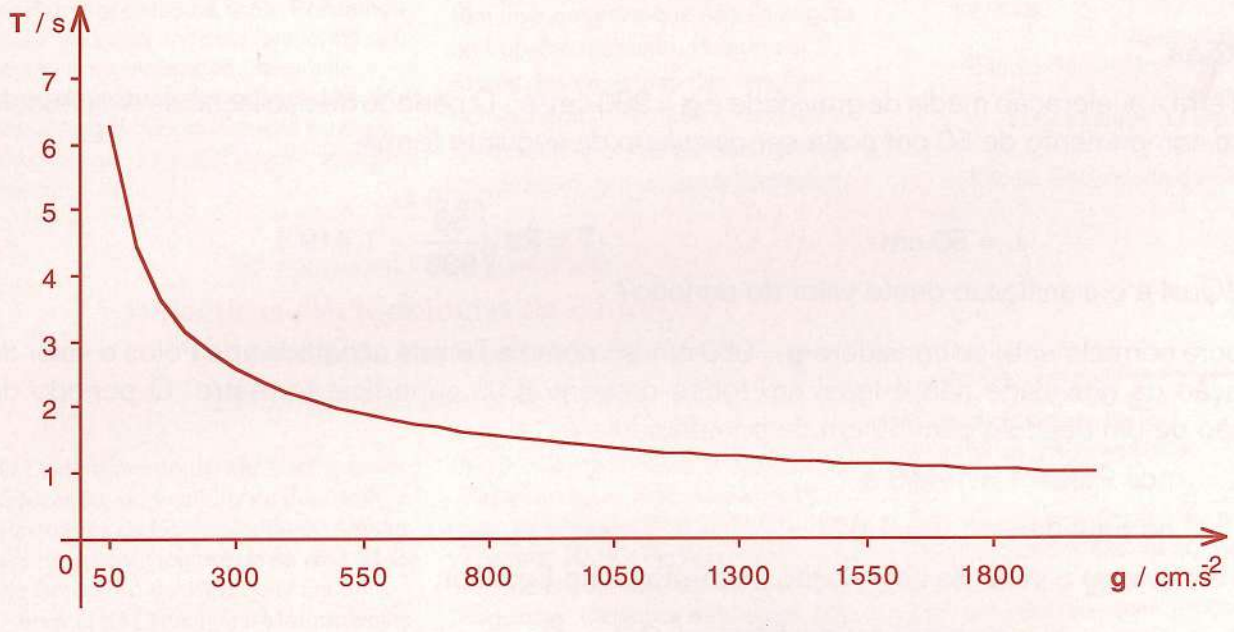
- Lua
- Júpiter
- Neptuno

• Que valor poderá ter **g** para obteres um período de oscilação superior a qualquer dos anteriormente calculados?

• Que valor poderá ter **g** para obteres um período de oscilação inferior a qualquer dos anteriormente calculados?

• Qual é a influência que o valor de **g** tem na variação de **T**?

4. O gráfico mostra a variação do período **T** em função da aceleração **g**. Considerou-se um pêndulo com L = 50 cm.



A partir da leitura do gráfico responde às seguintes questões:

• Qual é valor aproximado de **T** para **g = 800 cm/s²**?

• Qual é valor aproximado de **g** para **T = 3 s**?

• Quando g varia entre **300** e **1300 cm/s²**, entre que valores varia **T**?

5. Para **L** = 50 cm:

a. Entre que valores varia o período de oscilação **T** quando a aceleração **g** (em cm/s²) for **50 < g < 2500**?

b. Quando **g** toma valores muito pequenos o que acontece ao período de oscilação? E quando **g** toma valores muito grandes?

Escola.. Ano/Turma..........................

Nome.. Data.................................

Expressões com variáveis e enquadramentos

Considera a expressão $a = \pi\sqrt{\frac{z}{s}}$.

1. Fixando **s** = 500, determina o valor de **a** quando:

z = 10

z = 75

z = 200

- Que valor poderá ter **z** para obteres um valor de **a** superior a qualquer dos anteriormente calculados?
- Que valor poderá ter **z** para obteres um valor de **a** inferior a qualquer dos anteriormente calculados?
- Qual é a influência que o valor de **z** tem na variação de **a**?

2. Para **s** = 500:

a. Entre que valores varia **a** quando **5 < z < 50**?

b. Completa a tabela:

- Sem efecturares cálculos és capaz de prever o valor de **a** para **z** = 10^{10}? E para **z** = 10^{12}?
- E que valor deverá ter **z** para obteres **a** = 4? E para **a** = 16 ? E para **a** = 64?

c. Quando **z** toma valores muito pequenos o que acontece à variável **a**? E quando **z** toma valores muito grandes?

Da aritmética para a álgebra e o domínio da linguagem simbólica

Maria José Carinha Bóia

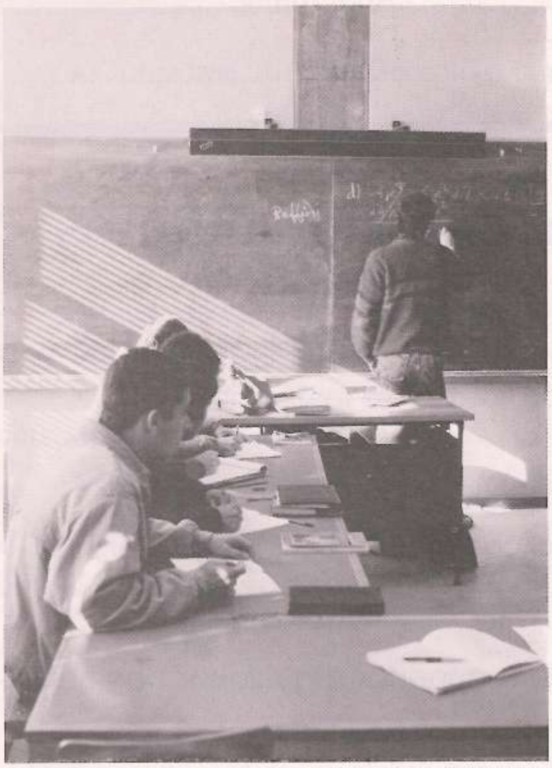


Foto: H. M. Guimarães

Dentro dos objectivos gerais dos programas de Matemática dos 2º e 3º ciclos e na perspectiva de desenvolver a capacidade de comunicação, é indicado o seguinte objectivo: "transcrever mensagens matemáticas da língua materna para a linguagem simbólica e vice-versa".

Este objectivo reaparece, no desenvolvimento do programa, escrito sob outras formas: "traduzir em linguagem matemática uma situação dada em linguagem corrente e reciprocamente", ou, "traduzir dados de um problema de uma linguagem para outra (verbal, gráfica, simbólica)", ou ainda, "traduzir um problema por meio de uma equação", etc.

Na minha prática lectiva lembro-me de actividades mais ou menos penosas em que se pretende que o aluno escreva a expressão numérica que "traduz uma afirmação" ou que "traduz o problema" ou ainda, numa tentativa de se ser mais rigoroso na linguagem, que "traduz o processo seguido para chegar à solução". Há ainda o problema inverso em que se pede ao aluno que invente ou complete um problema cuja solução é dada por uma determinada expressão numérica.

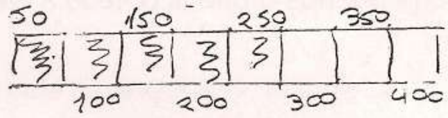
No meu entender estas actividades são inibitórias na resolução de problemas e apenas um número demasiado reduzido de alunos as consegue realizar com sucesso. A escrita das expressões numéricas envolve a consideração simultânea de vários passos e alguns alunos parecem não ser capazes de o fazer com facilidade.

Os resultados destas actividades não são satisfatórios. Os alunos oferecem resistência a fazer traduções formais e tendem a procurar outro tipo de representações que lhes são mais compreensíveis.

Como exemplo transcrevo a resolução de um problema de um aluno do 6º ano, numa altura em que eu esperava (desejava?) que na resposta aparecesse uma expressão numérica.

Problema

Na 2ª feira passada, a cantina recebeu 400 bolos. No turno da manhã venderam-se 5/8 dos bolos. Quantos bolos ficaram para a tarde? (apresenta os cálculos)



$50 \times 3 = 150$

R: Ficaram 150 Bolos

Tenho abordado esta questão com várias colegas, questionando a eficácia destas traduções ao nível do 2º ciclo, sem ter, contudo, chegado a conclusões satisfatórias. Algumas objecções são no sentido de que este é o salto necessário que tem em vista uma crescente abstracção, uma gradual apropriação da linguagem simbólica e a transição próxima para a álgebra. As vantagens enunciadas justificam o desânimo e frustação que criam? A que nível se situam as dificuldades que os alunos revelam a este propósito?

Actualmente, o estudo das equações faz-se no 7º ano mas, nos anteriores programas, era iniciado no 5º ano . Os argumentos de que as dificuldades assentam numa abstracção e formalização precoces, ou no não reconhecimento da vantagem do uso das equações para resolver problemas que os alunos estavam habituados a resolver mentalmente ou por outros processos, terão perdido o seu fundamento?

Tendo em mente as dificuldades sentidas com os meus alunos, interessei-me pelo estudo "Dificuldades conceptuais na tradução de problemas para equações" (Matos,1985), feito com alunos do 10º e 11º anos, e que é mais um contributo para o conhecimento dos processos cognitivos utilizados pelos alunos neste tema.

Este estudo tinha como objectivos:

- identificar estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas através de equações lineares;
- clarificar processos de raciocínio;
- identificar e interpretar as dificuldades conceptuais dos alunos na tradução para equação de problemas verbais, nomeadamente no que respeita ao conceito de igualdade e de variável.

As estratégias utilizadas pelos alunos foram categorizadas em quatro grupos:

- arranjo ordenado de palavras, em

que "o aluno assume que a ordem das palavras chave vai ter uma correspondência directa com a ordem dos símbolos que irão surgir na equação";

- comparação estática, onde o aluno, "embora fazendo um arranjo ordenado de símbolos de acordo com a sintaxe do texto", faz, também, "uma leitura semântica do problema, na medida em que procura o significado do texto";
- comparação operativa, onde parece surgir uma preocupação em construir operações que permitam, respeitando o sentido do texto, obter uma equivalência;
- abordagem funcional, em que, usando naturalmente a comparação operativa, há uma preocupação em encontrar uma relação que parece ser vista no sentido dinâmico.

A primeira e a segunda estratégias foram as mais utilizadas. Como pontos críticos na tradução de um problema verbal para equação, o autor refere : o uso das letras, a explicitação da relação funcional entre as variáveis e, o desenvolvimento do conceito de igualdade.

Assim, de acordo com o estudo, os alunos não dão uma definição precisa e estável às letras que utilizam. O significado inicial da letra (variável, incógnita) perde-se ao longo da resolução do problema, sendo a letra utilizada em termos distintos e contraditórios dentro de um mesmo problema. Os alunos mais velhos (11° ano) são os que mostram maior sensibilidade à abordagem funcional dos problemas, sendo esta relação funcional que permite evidenciar o carácter dinâmico das variáveis e, portanto, da equação.

Refere-se ainda o desenvolvimento do conceito de igualdade como uma das "mais críticas e subtis mudanças na aprendizagem da matemática", diferenciando este conceito no contexto da aritmética e no contexto algébrico. No contexto aritmético o sinal de igual é utilizado como:

- uma relação entre um problema colocado e o resultado da sua execução;
- uma relação entre expressões com o mesmo valor;
- um continuador de um processo de cálculo (por exemplo: 3x(5-2)=15-6=9)

No contexto algébrico das equações lineares foram identificados os seguintes conceitos de igualdade:

- operador de relação, em que a igualdade é vista como o fiel de uma balança, num sentido estático, não tendo as variáveis um papel estabilizador naquele equilíbrio;
- operador resultado, em que se manifesta uma confusão entre a solução da equação e o valor numérico que se encontra no segundo membro;
- verbalizador-continuador, em que a igualdade é utilizada em contexto algébrico e aritmético sem distinção e o sinal de = é o suporte para verbalizar uma acção habitualmente decorrente do 1° para o 2° membro da equação.

Nas suas conclusões o autor refere que a resolução de problemas não deve ser encarada como a aplicação de conhecimentos (neste caso do conceito de equação e do conhecimento da sua resolução). Diz também que os conceitos de equação e de variável devem ser objecto de actividades que permitam aos alunos conceber as equações numa perspectiva operativa e funcional, isto é, as equações representam operações activas sobre variáveis criando uma relação de igualdade. Os alunos dominam razoavelmente as técnicas de resolução de equações mas não realizam com sucesso a construção e interpretação de equações face a uma situação problemática, o que leva a abordar a questão entre conhecimento e representação do conhecimento. Para o professor o conhecimento das estratégias utilizadas e das estruturas conceptuais envolvidas na tradução de problemas para equações pode facilitar a definição de estratégias de ensino e o delineamento de actividades que permitam aos alunos encarar os problemas com confiança e resolvê-los com sucesso.

Comentários e reflexões

A utilização de equações é uma estratégia de resolução de problemas que apresenta vantagens na eficácia e rapidez para atingir a solução. É importante que os alunos sintam essa vantagem e possam comparar a resolução de um problema feito por tentativa e erro, por exemplo, com a sua resolução por meio de uma equação. A capacidade de resolução de problemas não pode ser desenvolvida usando apenas a resolução de equações. No entanto, ela tem de ser praticada porque exige uma técnica que se adquire praticando e aplicando a problemas variados. A questão está em não confundir o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas com o desenvolvimento de automatismos e de técnicas de cálculo.

As dificuldades conceptuais encontradas na tradução de problemas em equações centram-se nos conceitos de variável, função e de igualdade. Estes conceitos são indispensáveis no estudo da álgebra. A detecção destas dificuldades levanta algumas questões de ordem prática: que processos se podem utilizar para a aquisição destes conceitos? que etapas se devem ambicionar nos diferentes níveis de ensino?

Alguns professores consideram que os alunos devem construir o conceito de equação intuitivamente antes de oformalizarem, ancorando-o em conceitos aritméticos que lhe dêem significado. Assim, por exemplo, propõem processos de expansão progressiva do significado do sinal de igual (de resultado de uma operação, até ao de identidade aritmética com várias operações de "ambos os lados") e a construção de equações a partir de identidades aritméticas em que as letras substituem "números escondidos".

Para estes professores, mesmo que os alunos não desenvolvam grande capacidade de tradução de problemas verbais ou de descoberta de estratégias para a resolução de problemas, podem compreender o que é a álgebra, sem que ela seja completamente mistificada e sem que eles se sintam intelectualmente inadaptados.

Esta perspectiva engloba uma outra que considero muito importante e que é a de que a aquisição de conceitos deve ser feita por etapas, definidas para os diferentes níveis etários. O conceito de variável, por exemplo, poderá ser introduzido na escola primária, ou nos anos mais elementares, de tal modo que o significado das letras surja de um modo natural e intuitivo, adequado à maturidade dos alunos. Muitas vezes os percursos são muito rápidos e compactos, o que não dá_ tempo a que o aluno se sinta confortável com os conceitos adquiridos já que, na semana seguinte, uma forma mais sofisticada vem substituir a anterior. A falta deste alargamento progressivo e espaçado dos conceitos faz com que os alunos não compreendam e, por vezes, aceitem muito mal o uso das letras.

O conhecimento das estratégias utilizadas pelos alunos e dos conceitos por eles adquiridos é muito importante para a compreensão de todo o processo de ensino aprendizagem. Penso, agora, que o meu aluno estava certo, quando não atendeu aos meus esforços para desenvolver nele processos mais formais, sem os quais passava bem, ou até ... melhor. Para tudo é preciso tempo. Sinto gosto em ver como ele faz uma representação do "todo", a divide em oito partes iguais, e distingue cinco partes das restantes, o que revela domínio correcto do conceito de fracção. A intervalos iguais faz corresponder valores iguais de um modo alternado, para ser mais claro na exposição, até atingir o "todo" (400), usando uma noção intuitiva de escala. Finalmente... saberá o significado do multiplicador e do multiplicando num produto? Talvez não, mas sabe quais são as vantagens de um produto sobre uma soma de parcelas iguais.

A matemática tem um grande poder para representar e comunicar ideias de forma concisa. Nos anos mais avançados, os métodos de comunicação matemática tornam-se mais simbólicos e formais. O desembaraço na linguagem e na notação matemática permite aos alunos elaborarem múltiplas representações de ideias, exprimir relações e formular generalizações.

No entanto, a utilização do simbolismo tem de evoluir como uma extensão natural e um aperfeiçoamento da linguagem dos alunos, desempenhando a comunicação um papel importante como elo de ligação entre as noções informais e intuitivas e a linguagem abstracta e simbólica da matemática. A comunicação, isto é, falar, ouvir, ler, escrever, representar, ajuda o aluno a clarificar o pensamento e a aguçar a compreensão. Cabe ao professor estimular o aparecimento de situações que a favoreçam.

Referências

Matos; J. F. (1985). Dificuldades conceptuais na tradução de problemas para equação. In D. Fernandes (ed.) *ProfMat 1. Lisboa: APM*

Maria José Carinha Bóia
Escola C+S de Queijas

Problemas de linguagem

Há uns meses atrás uma amiga minha, também professora de matemática, tentava explicar ao filho a diferença entre linguagem corrente e linguagem matemática. O filho frequentava o ciclo preparatório e não estava a perceber esta questão, tendo pedido ajuda à mãe. Já sem muita paciência (não sei bem porquê, mas parece-me que temos sempre menos paciência para ensinar os nossos filhos), uma vez que a criança não estava a perceber o que a mãe lhe dizia, esta perguntou:

— Mas afinal, diz-me lá: onde é que tu ouves falar em linguagem corrente?

— Nas aulas de Matemática! — respondeu prontamente o filho, sem qualquer hesitação.

Ao ler o artigo "Da aritmética à álgebra" da M.José Boia, incluído nesta revista, veio-me esta história à memória, contada um dia na sala de professores. Juntamente com esta recordação, muitas interrogações: que sentido faz obrigar crianças tão novas a distinguir estes dois tipos de linguagem? Não deverá a linguagem matemática ser inserida de modo natural ao longo do ensino, sem obrigar os alunos a expressarem-se de uma forma que não sentem? Não estaremos com isto a exigir às crianças um nível de abstração exagerado para a sua idade, e a transformar algo que pode ser intuitivo em autêntico *chinês*, contribuindo desta forma para o afastamento em relação à matemática?

Num livro do 5º ano pode ler-se:

"(...) em linguagem corrente dizemos o Malhado, a Branquinha e o Riscado são pombos-correio do meu vizinho Sr. João; em linguagem matemática dizemos o conjunto formado pelo Malhado, a Branquinha e o Riscado é o mesmo que o conjunto formado pelos pombos-correio do meu vizinho Sr. João; em linguagem simbólica da Matemática escrevemos {Malhado, Branquinha, Riscado}={pombos-correio do meu vizinho Sr. João}. Em linguagem corrente dizemos que dez não é um número ímpar, em linguagem matemática dizemos dez não é elemento do conjunto formado pelos números ímpares, e em linguagem simbólica matemática dizemos... (segue-se a notação adequada com tudo escrito como deve ser).

Felizmente, pensei, é um texto relativo ao antigo programa. Consultei o índice de alguns livros actuais do 7º ano e num deles encontrei uma secção intitulada linguagem matemática/ linguagem corrente. Entre os muitos exercícios propostos, pede-se: "calcule o quadrado do simétrico do inverso de 4". Pobres crianças de 12 anos!

Ana Vieira
Escola Secundária de Linda-a-Velha

Filosofia da matemática para professores?

Maria da Graça Correia

A forma como cada um de nós, professores, encara a matemática, vai influenciar as nossas decisões na sala de aula, particularmente a nossa abordagem dos assuntos, e a ênfase que atribuímos a determinados temas em prol de outros.

O que devem os professores de Matemática saber acerca da filosofia da matemática

Com certeza que ninguém põe em causa a importância do conhecimento de alguma matemática para o professor de Matemática, pelo menos da matemática que ele ensina, aliás, dir-se-ia que isso nem é discutível. Mas quando se trata da filosofia da matemática, a questão muda de figura.

Lembro-me da conversa que tive com duas das minhas colegas, depois de termos lido os textos dos *Cadernos de Educação e Matemática nº 1* — A Natureza da Matemática — editados pela APM. Nessa altura, qualquer uma de nós já tinha vários anos de ensino e a questão da natureza do saber que leccionávamos nunca se nos tinha posto. O nosso ensino era, e julgo que continua a ser, bastante influenciado pelo que tínhamos observado nos nossos professores, donde se explica, talvez, as nossas diferentes concepções sobre a matemática e consequentemente, sobre o seu ensino. Se a leitura dos textos provocou alguma mudança na nossa prática, isso é difícil de afirmar, mas com certeza que permitiu trocas de opiniões e reflexões.

Todas nós estávamos de acordo que a matemática era uma ciência exacta, constituída por tópicos logicamente encadeados e rigorosa nos seus métodos; no entanto, para duas de nós, não eram estas as características que nos tinham levado a optar pelo seu estudo. Do que nós gostávamos era do desafio inerente à matemática, dos jogos de raciocínio que ela nos permitia e era assim, que queríamos transmiti-la aos nossos alunos. Na leitura do último texto desses cadernos, a visão nova que o matemático Imre Lakatos propõe, de uma matemática crescendo por provas e refutações dentro de uma sala de aula, distinta do estudo formal de sistemas abstractos, usualmente apresentados nos livros num estilo estritamente dedutivo, foi para nós duas reconfortante. Era dessa tentativa e erro, desse processo dialéctico seguido na descoberta de novas soluções, que nós mais gostávamos.

A outra colega era mais apologista de uma visão formal, dizendo que era necessário incutir nos alunos desde cedo a necessidade do rigor em matemática. Aliás, passou-se connosco um episódio, que julgo ser significativo: esta nossa colega estava a corrigir um teste que tinha dado aos alunos do 11º ano, onde, numa das questões pedia para demonstrar que a sucessão de termo geral n^2-2n-3, era um infinitamente grande positivo. Uma das alunas resolvia o problema tratando a sucessão como se fosse uma função quadrática e, determinando os seus zeros e vértice, concluía que os pontos da sucessão se encontravam sobre o ramo ascendente de uma parábola, pelo que a sucessão tendia para infinito positivo. O problema da nossa colega era, então, o da classificação que deveria atribuir à questão, uma vez que para ela não se podia chamar demonstração àquela forma de resolução, onde a definição de infinitamente grande não era ponto de partida. Esse problema, para nós, nem se punha, não havia exigência expressa do uso da definição e a aluna tinha sido capaz de utilizar, numa situação nova, um conhecimento anterior. No mínimo, deveria ser-lhe atribuída a classificação máxima.

A forma como cada um de nós, professores de Matemática, encara a disciplina que lecciona, desde esse saber com que lidamos à forma como entendemos o que é ensinar e aprender Matemática, vai influenciar as nossas decisões na sala de aula, particularmente a nossa forma de abordagem dos assuntos e a ênfase que atribuímos a determinados temas em prol de outros. Neste sentido, René Thom afirma, "toda a pedagogia da matemática, mesmo que pouco coerente, assenta numa filosofia dessa ciência", o que nos pode levar a concluir que mudanças nas concepções dos professores sobre a matemática podem contribuir para mudanças significativas no ensino desta ciência.

A filosofia da matemática torna-se deste modo fundamental para um professor de Matemática, pelo que é então importante decidir quais dos seus temas têm, neste caso mais, relevância.

Que assuntos e problemáticas da filosofia da matemática?

A matemática não é uma entidade definida num texto de um filósofo, ela é um aspecto da nossa experiência, da nossa realidade. Mas, desde sempre, o pensamento matemático assentou em alicerces filosóficos, mais ou menos explícitos, que guiaram a história da matemática e o desenvolvimento desta ciência.

Uma melhor compreensão do que é a matemática só pode ser enriquecida e encorajada pelo conhecimento das fontes dos problemas, os quais renovam e mantêm a matemática, permitindo-nos observar as mudanças que se foram operando ao longo dos tempos e até arriscar predições futuras. Assim, a história da matemática mostra-nos uma, matemática em mudança constante, desafiando a visão ainda prevalecente de uma ciência estática, de verdades acumuladas. No entanto, a História não é final nem certa, mas dependente das filosofias da matemática que guiam as nossas reconstruções; deste modo, estaremos fazendo um mau serviço ao sugerir que os métodos histórico ou o de provas e refutações devem simplesmente suplantar o método axiomático, como uma metodologia intocável para a educação matemática. O que se deve sugerir é um ecletismo disciplinado em direcção a um conhecimento mais profundo das várias possibilidades alternativas de escolha, quando se quer ensinar Matemática. Muitos pontos centrais podem emergir quando se opta por uma visão global, mas perdem-se com certeza na visão estreita do tipo axioma-teorema-prova. As questões podem nascer das diferentes naturezas da matemática, bem como da sua origem e desenvolvimento.

Assim, o que se sugere é uma visão geral da filosofia da matemática, ligada à história desta ciência, donde nunca poderá ser separada e com ênfase especial no seu período crítico, a "crise nos fundamentos". A visão de Lakatos, que resulta das novas tendências da filosofia da ciência, colocando a matemática, no contexto informal, como falível e questionável, crescendo através de elaborações de conjecturas cada vez mais plausíveis, deverá ser obrigatória para qualquer professor de Matemática.

Mas o que é, de facto, importante é que cada professor reflicta sobre as diferentes visões da natureza da matemática e na razão da sua existência. Como surgiu a matemática? Como se faz matemática? O que é para mim a matemática? Quais são os objectos com que lida esta ciência? Que relação tem a matemática com o indivíduo e com a sociedade? Porque ensinamos matemática? Como devemos ensinar Matemática? Estas interrogações devem ser preocupação de todo o professor de Matemática e é aí que a filosofia pode realizar o seu papel fundamental.

Por que razões privilegiar estas problemáticas da filosofia da matemática?

Davis e Hersh (1981) argumentam que o platonismo, o formalismo e o construtivismo são diferentes maneiras de olhar para a matemática. Esses autores usam a analogia de uma pessoa sentada na consola de um sistema de gráfico interactivo, manuseando no teclado as diferentes representações de um hipercubo, rodando-o para perceber como uma visão se transforma na outra. O observador, gradualmente, constrói uma visão compreensiva da coisa em si, distinta das visões parciais observadas. Do mesmo modo, cada professor de Matemática pode construir a sua visão da matemática integrando as várias imagens que lhe são fornecidas pelas várias filosofias da matemática, quer as de tradição fundamentista, indicadas atrás, quer a completamente distinta apresentada por Lakatos. Só através do ecletismo já referido, o professor poderá encontrar a sua resposta às questões fundamentais descritas anteriormente e, assim, contribuir, se não para uma melhoria significativa do ensino da Matemática, pelo menos para uma melhor fundamentação da sua prática, a qual deve estar sempre presente em qualquer reflexão filosófica sobre o ensino da Matemática.

A ênfase a atribuir à época crítica da filosofia da matemática (a crise dos fundamentos) e à visão de Lakatos justifica-se pelas diferentes visões que apresentam sobre a matemática, permitindo discussões mais alargadas. Em particular, a visão de Lakatos, mais próxima da realidade da prática da matemática, mostrando que o formalismo é apenas a imagem pública que a matemática usa oferecer, torna-se fundamental em qualquer filosofia da matemática, providenciando as bases de um trabalho produtivo à volta das questões da natureza da Matemática e das implicações educativas das diferentes filosofias.

Nas publicações sobre assuntos matemáticos, os métodos de trabalho e descoberta estão completamente ausentes, embora, em casos eventuais, uma muito leve alusão possa ser feita. Mas o papel do professor não é simplesmente transmitir um corpo de conhecimentos livresco, mas sim ajudar o aluno, clarificando e não escondendo, o modo como se obtiveram esses conhecimentos, bem como favorecendo a aprendizagem através de diferentes abordagens, garantindo sempre a liberdade de o aluno fazer perguntas e exprimir as suas ideias, sem medo de errar, utilizando exemplos, contra-exemplos e aplicações dos assuntos tratados. Só assim o professor poderá incutir no aluno uma visão mais real do que é a matemática, bem como o espírito filosófico cada vez mais necessário nos nossos dias, onde a reflexão anda distante do quotidiano. Para isso, o professor deve ser ele próprio dotado desse espírito, que uma filosofia da matemática bem conduzida pode ajudar a desenvolver.

Como levar a cabo a formação de professores em filosofia da matemática?

Qualquer formação em filosofia deve ter em conta, a meu ver, mais do que o estudo de textos filosóficos, o estudo filosófico de textos. É assim que encaro a formação dos professores de Matemática em filosofia da matemática, quer ela se passe ao nível da formação inicial e, neste caso, inserida na cadeira de Metodologia da Matemática, quer se processe em acções de formação ao nível de uma formação contínua. Neste último caso, julgo ser imprescindível o trabalho em grupos pequenos, onde a reflexão e a troca de ideias são possíveis e, talvez, num tempo alargado, tomando mais a forma de seminários.

A partir daqui, cabe ao professor, individualmente, reflectir sobre o saber matemático e o seu ensino. O trabalho de adaptação, de interrogação e de crítica está nas suas mãos. É desse poder que ele deve fazer uso dentro da sala de aula.

Referências

Davis, P.J.&R.Hersh (1980). *The mathematical experience*. Boston; Birkauser. (cap. 7)

Guimarães, H. M. (1990). (Tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Higginson, W (1980). On Foundation of Mathematics Education. *For the learnings of Mathematics*, Vol1, num 2, 3-7.

Kilpatrick, J. (1981). The Reasonable ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the learning of Mathematics*, vol,8 num 2, 22-28.

Nickson, M. (1985). Aspects of Professional Life of Teachers. *For the learning of Mathematics*, vol 5, num 2, 29-30.

Pimm, D. (1983). Why the History and Philosophy of Mathematics Should not be Rated X. *For the learning of Mathematics*, vol 3, num 3, 12-14.

Plunkett, S. (1981). Fundamental Questions for Teachers. *For the learning of Mathematics*, vol 2, num 2, 46-48.

Maria da Graça Correia
Universidade da Madeira

Dificuldade na visualização dos objectos matemáticos

J. Orlando de Freitas

"Quem não vê é como quem não sabe."

Leia o seguinte texto[1], supondo que depois será questionado sobre o mesmo.

> Um jornal é melhor do que uma revista. Um cume ou encosta é melhor do que uma rua. Ao início parece que é melhor correr do que andar. É preciso experimentar várias vezes. Prega várias partidas, mas é fácil de aprender. Mesmo as crianças podem achá-lo divertido.
>
> Uma vez com sucesso, as complicações são minimizadas. Os pássaros raramente se aproximam. Muitas pessoas às vezes fazem-no ao mesmo tempo, contudo pode causar problemas. É preciso muito espaço. É necessário ter cuidado com a chuva, pois destrói tudo. Se não houver complicações, pode ser muito agradável. Uma pedra pode servir de âncora. Se alguma coisa se partir perdêmo-lo e não teremos uma segunda hipótese.

Cada frase parece fazer sentido, mas a maior parte das pessoas ficará com a sensação de que na realidade não percebeu praticamente nada do conteúdo. Volte atrás e tendo agora em atenção que o presente texto relata sobre papagaios de papel, leia-o novamente e compare com a primeira leitura.

Consegue ver a diferença da sua compreensão nesta segunda leitura? Agora é possível visualizar mentalmente tudo o que é referido no texto. Esta visualização é quase sempre sinónimo de entendimento. Na verdade, quando sabemos do que se trata, é muito mais fácil compreender e contribuir para uma melhor memorização e motivação sobre o assunto.

A seguir são apresentadas duas situações em que se exemplifica que o trabalhar no abstracto faz confusão a certos cidadãos. No filme *Perigo Eminente* há uma cena em que um médico, ao estudar a inteligência de um seu paciente, lhe diz: "Suponha que você estava no meio de um deserto e..." De repente, o paciente interrompe perguntando: "Mas qual?". Num dos programas de questionários da RTP, perguntaram a um participante quanto era 12x6 e este desconfiado pergunta: "12 vezes 6 quê (metros, litros, etc.)?" E foi então que o apresentador lhe disse "12 vezes 6 litros", e assim o concorrente lá conseguiu fazer o respectivo cálculo.

Na disciplina de Matemática passa-se algo de semelhante. A maioria dos alunos não consegue visualizar os elementos e conceitos matemáticos que se dão. De facto, a maior parte da Matemática infelizmente ainda é apresentada de uma maneira muito abstracta e formal. O que parece ser concreto para um professor de Matemática pode não ser visto da mesma maneira por parte de seus alunos. Há mais de 50 anos, Brownell (1935) verificou que os estudantes do ensino básico têm mais dificuldade em fazer cálculos com números desprovidos de situações concretas (como por exemplo, 5+7) do que quando lhes é associada uma unidade (exemplo, 5 laranjas + 7 laranjas). Quando as unidades são omitidas, a soma indicada não só se torna mais difícil como também se transforma numa abstracção a ser memorizada. E quando as unidades estão presentes, os estudantes aparentemente visualizam a situação como real e são capazes de responder correctamente.

O mesmo problema acontece a estudantes do ensino secundário, perante questões acerca de funções divorciadas de uma situação real. Quando estes estudantes as investigam em relação a situações concretas (por exemplo, na relação espaço/tempo, representada por uma parábola, quando do lançamento de uma pedra), ficam aptos a dar sentido aos resultados matemáticos com a experiência real da situação exemplificada.

Quando os alunos inventam falsos raciocínios (por exemplo, $x^2+y^2=(x+y)^2, \forall x,y$), provindos não se sabe de onde, talvez simplesmente estejam reagindo à falha que têm em relacionar cada um dos conceitos matemáticos com o seu significado real. Estes estudantes estão motivados para aprender e, por outro lado, estão mas é tentando dar sentido à Matemática. Estão também mandando a importante mensagem: "Eu não vejo significado real e, como tal, utilidade nesta matéria, por isso dêem-me exemplos concretos".

É preciso pintar as ideias matemáticas dadas aos alunos. Os exemplos apresentados servem para justificar tal necessidade, mas muitos outros exemplos no campo da Matemática são comuns no dia-a-dia dos estudantes. E nós professores de Matemática, muitas vezes, não sentimos a necessidade de materializar os objectos matemáticos pois, na verdade, somos parte dos poucos sobreviventes de uma Escola passiva e destinada a craques.

[1]Extraído do livro Effective Problem Solving, de Marvin Levine (1988)

Bibliografia

Brownell, William A. (1935). "Psycological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic." In the teaching of Arithemetic (pp.131), Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: NCTM e Teachers College Press (Columbia University).

Carroll, Lewis. Alice no País das maravilhas.

Davis, Robert A. (1984). Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Ablex Publishing Co.

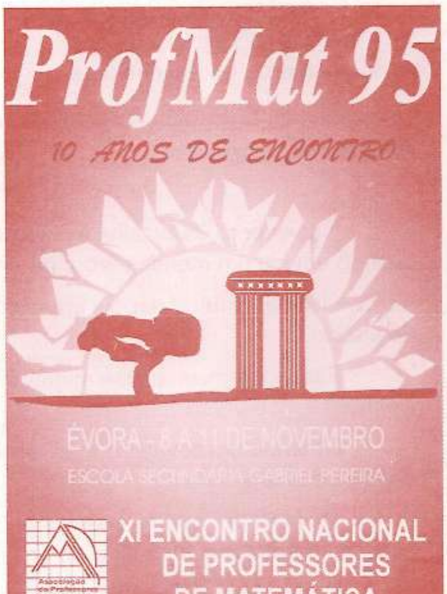
Farrel, Margaret A. (1982). Learn From Your Studentes. Mathematics Teacher. 85: 656-659.

Levine, Marvin (1988). Effective Problem Solving. New Jersey: Prentice Hall

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics.

J. Orlando G. Freitas
Escola Secundária Francisco Franco
(Funchal)

ProfMat 95
Dez anos de encontro



Já foi distribuído o segundo anúncio, que contém as fichas de inscrição e de participação. Recordamos aqui algumas datas limites importantes:

- 5 de Maio — primeiro prazo para envio das fichas de inscrição no ProfMat (sem multa) e nos cursos, e das fichas de participação com respectivos resumos.
- 30 de Junho — segundo prazo para envio de ficha de inscrição no ProfMat 95 (com primeiro agravamento de preço) e nos cursos. Último prazo para fichas de participação.
- 29 de Setembro — último prazo para inscrição no ProfMat (com segundo agravamento de preço) e nos cursos. Fim do prazo para desistência com reembolso de 50% do preço.
- 6 e 7 de Novembro — Seminário de Investigação e Cursos. No dia 7, a partir das 18 horas, início da recepção do ProfMat 95.
- 8 a 11 de Novembro — ProfMat 95

Se ainda não recebeu informações, contacte a Comissão Organizadora para Apartado 5, 7000 Évora. Tel.: (066) 743991.

O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

Na última edição de ***Educação e Matemática*** propusemos um problema que apareceu há uns anos na *PLOT*, a revista de uma associação regional francesa de professores de Matemática:

Temos quatro números reais A, B, C e D, todos maiores que 1.

Há dois cuja soma é D.

Há dois cuja diferença é D.

Há dois cujo produto é D.

Há dois cujo quociente é D.

Quais são os números?

Dois ou três dias depois da revista ter sido enviada pelo correio chegou a primeira resposta, num record de rapidez! É da autoria de Raul Aparício Gonçalves, de Valongo. Mas depois dessa só chegou outra, de Alberto Canelas (Queluz).(*)

Eis, resumidamente, como Alberto Canelas resolve o problema:

Como os números são superiores a 1:

– da 1ª e 3ª condições resulta que dois dos números (a que chamaremos A e B) são menores que D;

– da 2ª e 4ª condições resulta que o outro número (C) é maior que D.

A 1ª e 3ª condições dão origem a duas equações:

$$D=A+B \text{ e } D=AB$$

A partir da 2ª e 4ª condições, há a considerar cinco casos diferentes.

1. $D=C-A$ e $D=\frac{C}{A}$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações mais estas duas, em ordem a A, vem A=1, o que é impossível.

2. $D=C-A$ e $D=\frac{C}{B}$

Resolvendo o sistema das quatro equações vem

$$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\text{número de ouro } \Phi$$

$$B=A^2=\Phi^2$$

$$C=A^3=\Phi^3$$

$$D=A^4=\Phi^4$$

3. $D=C-A$ e $D=\frac{C}{D}$

Resolvendo em ordem a B vem

$$B^3-B^2+1=0$$

Como B>1, então logo não há soluções nas condições do problema.

4. $D=C-D$ e $D=\frac{C}{A}$

Resolvendo o sistema vem

A=2 B=2 D=4 C=8

5. $D=C-D$ e $D=\frac{C}{D}$

Resolvendo em ordem a D vem D=0 ou D=2, o que é impossível porque D>2.

Conclusão, o problema tem duas soluções:

(I)	2	2	4	8
(II)	Φ	Φ^2	Φ^3	Φ^4

(*) Já este artigo estava pronto quando chegou uma terceira resolução (correcta) enviada por Judite de Barros (Lisboa).

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Carnide

Problema proposto

MENSAGENS TROCADAS

Na véspera da batalha de Aljubarrota, D. Nuno Álvares Pereira estava no acampamento das tropas portuguesas quando enviou um mensageiro a pé em direcção ao Norte com uma carta para o alcaide de Coimbra.

Quinze minutos depois enviou outro mensageiro, também a pé, em direcção a Sul com uma carta para o alcaide de Lisboa.

Passados mais quinze minutos, D. Nuno apercebeu-se que se tinha enganado nas cartas: a de Lisboa ia para Coimbra e vice-versa.

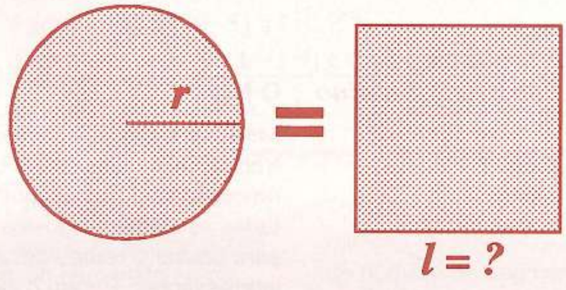
Chamou um cavaleiro e encarregou-o de ir ter com os mensageiros, desfazer a troca de cartas e regressar depois ao acampamento.

O cavaleiro, que se deslocava quatro vezes mais depressa que uma pessoa a pé, ficou indeciso em relação a qual dos mensageiros se dirigir primeiro.

Como seria mais rápido e portanto menos cansativo: ir primeiro para Norte ou para Sul?

Quadratura do círculo: uma solução não ortodoxa

Eduardo Veloso



A *quadratura do círculo* é um dos três problemas clássicos da geometria grega. Os outros dois são a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. No caso da quadratura do círculo, o problema é o seguinte:

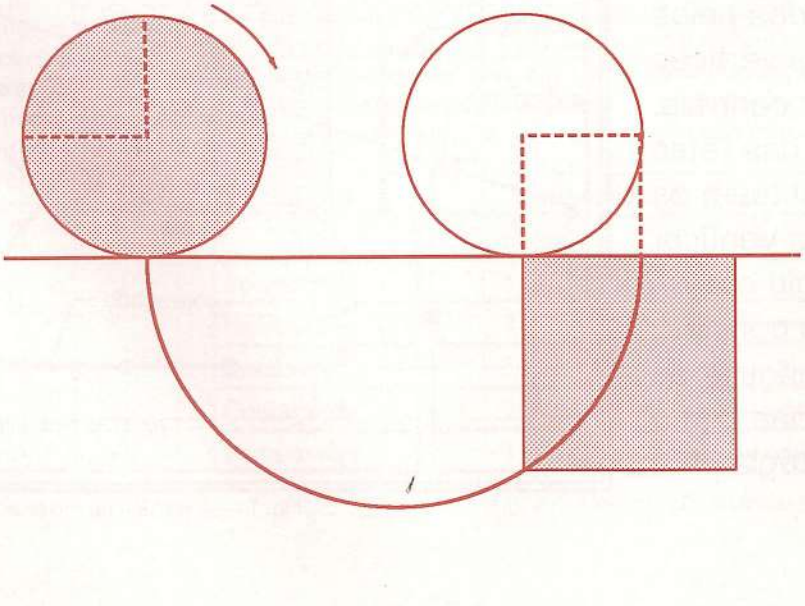
> *Dado um círculo, determinar, com régua e compasso, o lado de um quadrado de igual área.*

Este problema atraiu a atenção de inúmeros matemáticos de todos os tempos e, devido à dificuldade encontrada em o resolver (dificuldade que na realidade é mesmo impossibilidade), passou à tradição popular como sinónimo de dificuldade inultrapassável. São conhecidas inúmeras soluções "não ortodoxas", isto é, utilizando instrumentos ou processos geométricos não aceites na geometria de Euclides. Na Grécia o problema foi estudado na Escola Pitagórica, por exemplo por Anaxágoras, Hipócrates de Chio, Antiphon e outros.

Alguns matemáticos gregos inventaram curvas especiais, denominadas quadratizes, para resolver a quadratura do círculo. Presume-se que já teriam a convicção de que este problema, tal como os outros dois, era impossível de resolver apenas com régua e compasso. No entanto, ainda no séc. XVI, Oronce Finée, professor em Paris, julgou ter resolvido de modo elementar os três problemas. Mas Pedro Nunes, na obra *De erratis Orontii Finaee*, provou que as soluções de Oronce estavam erradas.

Apenas no séc. XIX, como consequência dos trabalhos de Gauss e de Abel sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais, pôde ser demonstrado que qualquer dos três problemas é impossível de resolver dentro dos cânones da geometria euclidiana. No livro *Proofs Without Words*, de Roger B. Nelsen, editado pela *Mathematical Association of America*, aparece um processo geométrico para fazer a quadratura de um círculo, apresentado por Thomas Elsner no *Mathematics Magazine*, vol. 50, nº 3 (Maio de 1977), pág. 162. É mostrada apenas a figura seguinte, sem quaisquer palavras — como é próprio de um livro chamado "Demonstrações sem Palavras" —, encimada pela frase "o círculo que rolando se quadra a si próprio".

Para os leitores que queiram descobrir como é resolvida desta forma a quadratura do círculo, aqui fica a figura. Para aqueles que acham que "algumas palavras sempre ajudam...", podem vê-las na página 36.



Malvinas: batalha aeronaval[1]

Roberto R. Baldino

O jogo

Malvinas é um jogo semelhante ao da tradicional batalha naval, encontrado no comércio e jogado por crianças de todas as idades, inclusive à socapa, para passar o tempo em aulas menos interessantes. Porém o alcance didático é bem maior. Cada jogador usa duas *planilhas de mísseis* (v. fig. 1) e uma *folha de controle* (v. fig. 2). Sobre uma das planilhas, distribui sua frota e sobre a outra tenta descobrir onde o outro jogador distribui a frota dele. Sobre a folha de controle anota as coordenadas dos dois pontos P e Q que determinam a trajetória do míssil que envia. Remete a folha de jogo com esses dados ao outro jogador que a devolve, depois de anotar nela a equação da reta que passa por P e Q, as informações sobre os alvos que o míssil atingiu e o número de pontos obtidos.

Como se joga

É claro que os jogadores devem sentar-se de modo a que um não veja a planilha de mísseis do outro. Em sala de aula é preferível organizar o jogo entre duplas de parceria. Arruma-

Nesta "batalha naval" as "embarcações" são segmentos de reta distribuídos sobre as divisórias de um quadriculado e os "mísseis" são retas que passam por dois pontos escolhidos pelos jogadores nos vértices dos quadrados centrais. As equações das retas que constituem os mísseis permitem verificar se o míssil atingiu o alvo. A formação do conceito de coeficiente angular da reta funciona como estratégia para

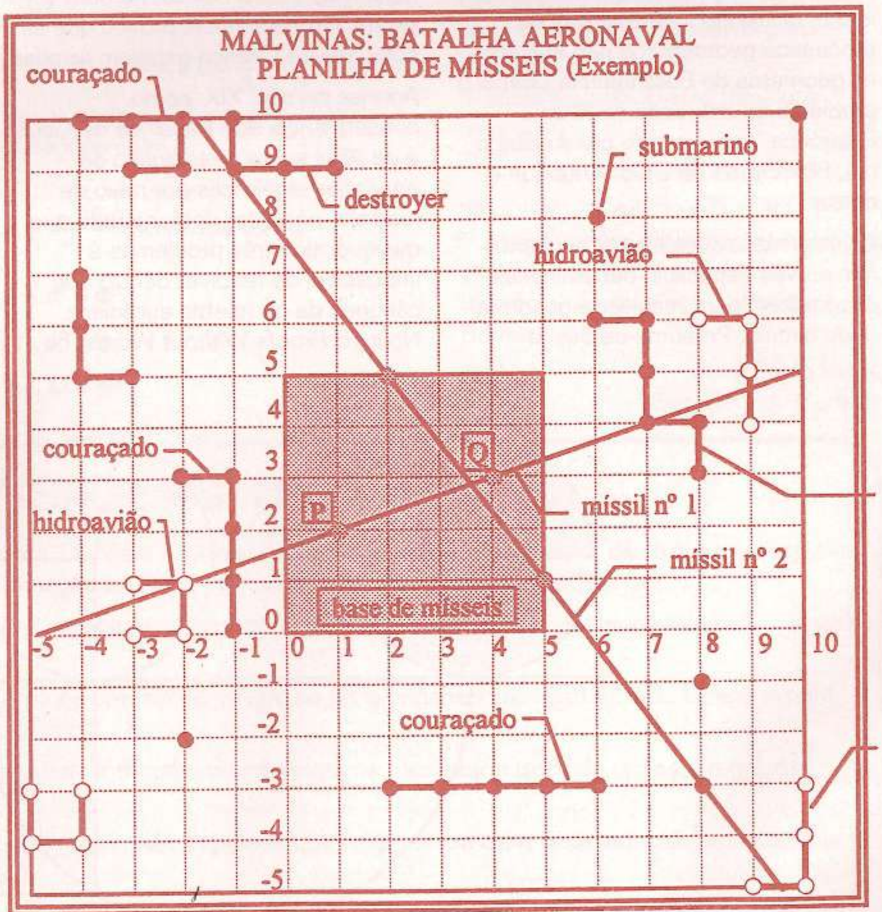


Fig. 1 — A planilha de mísseis

Folha de Controle (Exemplo)				
Nº	Míssil :	Equação da trajetória:	Atingiu:	Pontos
1	(1,2) (4,3)	$y=2+\frac{1}{3}(x-1)$	Porta-aviões de (8,4) a (7,4) e de (7,4) a (7,5) Hidroavião de (9,4) a (9,5) Couraçado de (-1, 1) a (-1,2)	4
2	(2,5) (5,1)	$y=5-\frac{4}{3}(x-2)$	Submarino em (8,-3) Hidroavião de (9,-5) a (10,-5) Destroyer de (0,9) a (-1,9) e de (-1,9) a (-1,10)	4
3				
4				

Fig. 2 — A planilha de mísseis

se a sala de modo a que duplas adversárias sentem-se de costas uma para a outra. Cada jogador distribui a sua frota sobre as linhas divisórias dos quadradinhos em volta do quadrado cinza, denominado *base de mísseis*, no centro do tabuleiro. Cada embarcação é constituída por *segmentos* e nós: são 5 submarinos, 4 hidroaviões, 3 destroyers, 2 couraçados e 1 porta-aviões, com os formatos indicados na figura 3.

Os jogadores devem distribuir suas frotas de modo a que duas embarcações não se toquem e não toquem a base de mísseis. Uma embarcação pode ser disposta em linha quebrada mas não pode tocar-se a si mesma. Os *mísseis* são retas. Cada Míssil é determinado por dois pontos localizados segundo a vontade do jogador sobre a base de mísseis, constituída pelo quadrado cinza na planilha de mísseis. Ao jogar, o jogador A escolhe um míssil, determinado, por exemplo, por (1,2) e (4,3). Anota essas coordenadas na folha de controle e a remete ao jogador B. Este desenha a reta correspondente a esse míssil em sua planilha e mostra que entendeu de que reta se trata escrevendo a equação

$$y=2+\frac{1}{3}(x-1)$$

que deve ser confirmada pelo jogador A. A seguir o jogador B informa o jogador A que segmentos de sua frota foram afundados, pelo míssil, escrevendo esses segmentos na folha de controle.

O míssil que atingir um segmento de uma embarcação sem atingir o nó, afunda *apenas o segmento atingido.* O míssil do exemplo afundou o segmento (9,4) a (9,5) do hidroavião e o segmento (-1,1) a (-1,2) do couraçado. O míssil que atingir o nó de uma embarcação *afunda os segmentos contíguos* ao nó atingindo, *excepto se o nó pertencer a um hidroavião.* Assim, o míssil do exemplo afundou os segmentos (7,5) a (7,4) e (7,4) a (8,4) do porta-aviões mas *não afundou* os segmentos (-3,1) a (-2,1) a (-2,1) a (-2, 0) do hidroavião. As extremidades das embarcações, salvo as dos hidroaviões, são consideradas nós. Quando atingidas, o primeiro segmento da embarcação afunda. Considera-se que todas as embarcações situadas na reta do míssil, tanto para um como para o outro lado desta, são atingidas, mesmo as que estiverem situadas atrás de outras, como é o caso do primeiro míssil do exemplo, que atingiu o hidroavião que está atrás do porta-aviões. Para cada segmento afundado conta-se um ponto. Para cada embarcação completamente afundada, conta-se mais um número de pontos igual ao quadrado do número de segmentos da embarcação afundada. Ganha o jogador que afundar toda a frota do adversário ou, caso o jogo seja interrompido antes disso, aquele que tiver marcado mais pontos.

Os casos de dúvida, sobre se um míssil atingiu ou não o alvo, podem ser resolvidos, quer pela geometria euclidiana, quer pela geometria analítica. Considere o problema de saber se o segundo míssil no exemplo atingiu ou não o nó do couraçado em (-2,10). Pela geometria analítica basta decidir se (-2,10) satisfaz à equação da da reta

$$y=2+\frac{1}{3}(x-1)$$

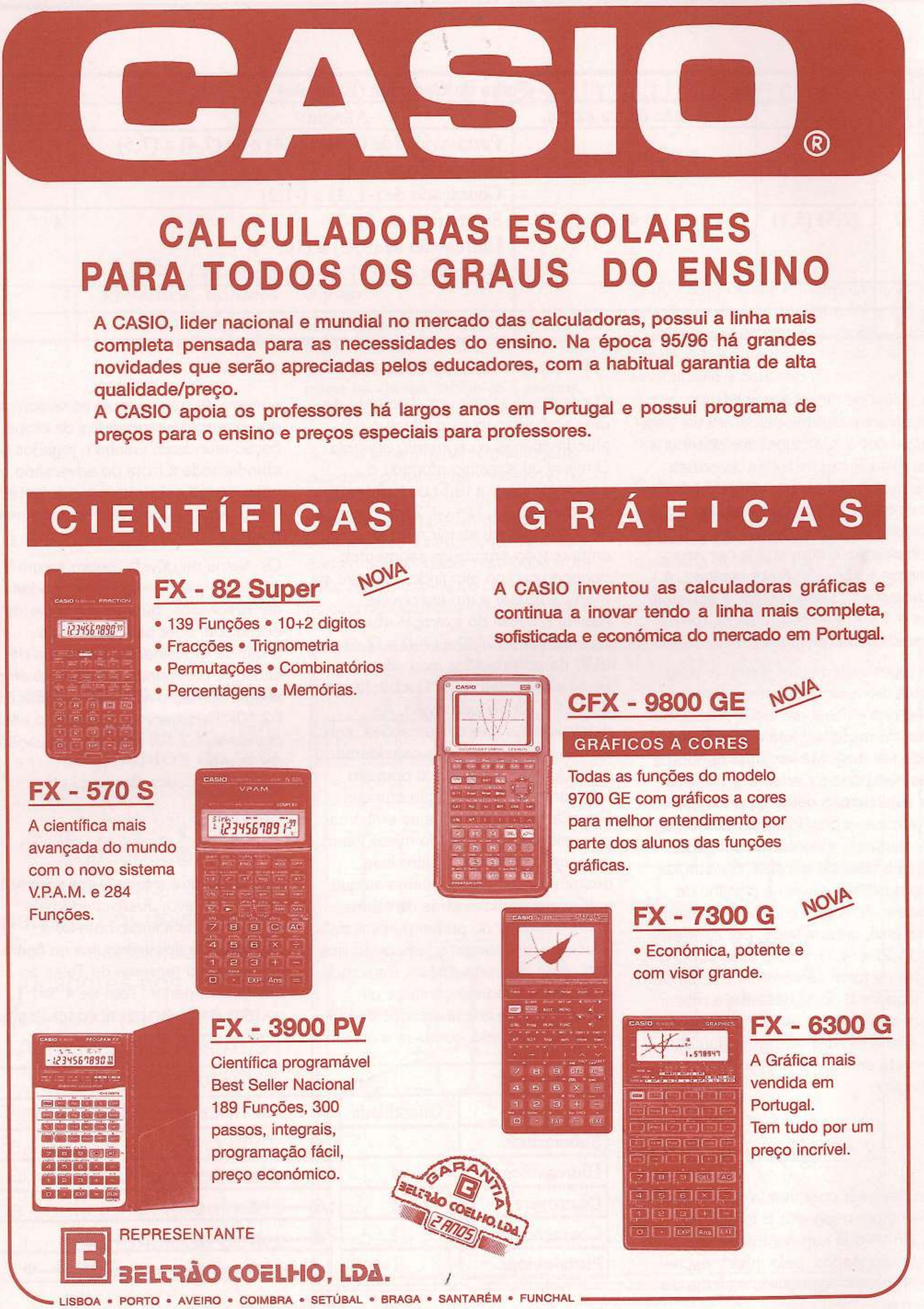
Como

$$5-\frac{4}{3}((-2)-2)=\frac{31}{3}\neq 10$$

conclui-se que o míssil, por pouco, errou este alvo. Justificando pela geometria euclidiana, nota-se a congruência dos triângulos na figura 4 e aplica-se o teorema de Tales ao triângulo superior. Tem-se 4:3≠1:1, portanto também por aí conclui-se que o míssil erra o alvo.

Composição da frota		
Tipo	Quantidade	Representação
Submarinos	5	
Hidroaviões	4	
Destroyers	3	
Couraçados	2	
Porta-aviões	1	

Fig. 3 — Composição da frota


CASIO®
CALCULADORAS ESCOLARES
PARA TODOS OS GRAUS DO ENSINO
A CASIO, lider nacional e mundial no mercado das calculadoras, possui a linha mais completa pensada para as necessidades do ensino. Na época 95/96 há grandes novidades que serão apreciadas pelos educadores, com a habitual garantia de alta qualidade/preço.
A CASIO apoia os professores há largos anos em Portugal e possui programa de preços para o ensino e preços especiais para professores.
CIENTÍFICAS
FX - 82 Super
NOVA
• 139 Funções • 10+2 digitos
• Fracções • Trignometria
• Permutações • Combinatórios
• Percentagens • Memórias.
FX - 570 S
A científica mais avançada do mundo com o novo sistema V.P.A.M. e 284 Funções.
FX - 3900 PV
Científica programável
Best Seller Nacional
189 Funções, 300 passos, integrais, programação fácil, preço económico.
GRÁFICAS
A CASIO inventou as calculadoras gráficas e continua a inovar tendo a linha mais completa, sofisticada e económica do mercado em Portugal.
CFX - 9800 GE
NOVA
GRÁFICOS A CORES
Todas as funções do modelo 9700 GE com gráficos a cores para melhor entendimento por parte dos alunos das funções gráficas.
FX - 7300 G
NOVA
• Económica, potente e com visor grande.
FX - 6300 G
A Gráfica mais vendida em Portugal.
Tem tudo por um preço incrível.
GARANTIA BELTRÃO COELHO, LDA. 2 ANOS
REPRESENTANTE
BELTRÃO COELHO, LDA.
LISBOA • PORTO • AVEIRO • COIMBRA • SETÚBAL • BRAGA • SANTARÉM • FUNCHAL

Comentários

O jogo Malvinas visa a instituir situações-problema que os alunos resolvam naturalmente pela geometria euclidiana e que possam servir de base para a introdução da geometria analítica.

Deixando-se de lado a equação da reta, pode-se jogá-lo desde a quinta série (11 anos). Nesse nível o jogo se relaciona aos seguintes objectivos didácticos: 1) localizar números como pontos da reta e não como segmentos ou intervalos, tal como ocorre na batalha naval tradicional; 2) coordenar a correspondência entre pares ordenados e pontos do plano; 3) constituir a proporcionalidade como objecto; 4) incluir a reta geométrica no plano coordenado. O uso da equação da reta para dirimir dúvidas pode ser introduzido desde a primeira série do segundo grau (15 anos). Nesse nível os objectivos didáticos são: 5) tornar operacional o conceito de coeficiente angular; 6) tornar operacional a equação reduzida da reta; 7) possibilitar a passagem da geometria euclidiana para a analítica.

As primeiras experiências feitas com o jogo Malvinas foram feitas com alunos de cálculo. Visava-se a resolver dificuldades deles na leitura de velocidade a partir de gráficos espaço-tempo. Essas aplicações revelaram algumas surpresas. Apesar do jogo lhes ter sido apresentado logo após

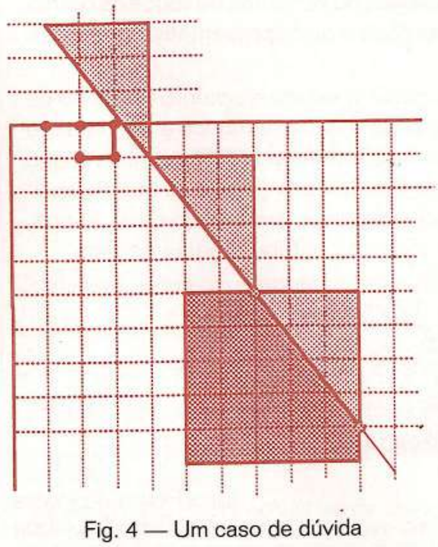


Fig. 4 — Um caso de dúvida

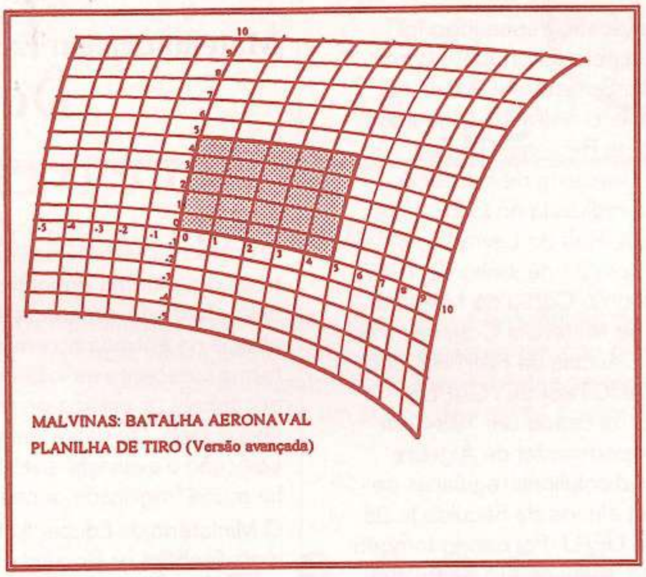


Fig. 5 — Planilha de reticulado curvo

uma exposição "recordando" o teorema de Tales e a equação da reta, nenhum desses alunos se valeu espontaneamente da equação da reta para dirimir dúvidas. A maioria deles também não se valeu de raciocínios de proporcionalidade: em caso de dúvida refaziam cuidadosamente o traçado. A distorção natural do quadriculado, decorrente da fotocópia, desorientava-os. Das duas sugestões, para que se usassem raciocínios de proporcionalidade e calculassem a equação da reta, preferiam a segunda. Quando se insistia para que usassem algum método de proporcionalidade, perguntavam: *não pode usar a equação?* A resposta era: *Sim, mas ache uma solução só geométrica.* Apesar da sugestão para que usassem a forma

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

preferiam usar

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

A preferência por esta segunda forma, desajeitada, da equação da reta revelou-se tão persistente que terminou gerando outros estudos (Baldino et al, 1994, e Baldino, 1995).

Algumas das planilhas de mísseis, recolhidas logo após o jogo, continham apenas trajectórias horizontais, verticais ou diagonais. Na aula seguinte tarefas do tipo *verifique se tal míssil atinge tal alvo*, permitiram contacto mais próximo com esses alunos. Verificou-se que eles se mostravam indecisos sobre se o prolongamento de uma diagonal de um dos quadrados da base de mísseis passava necessariamente pelos vértices dos quadrados interceptados por esse prolongamento. Para decidir, apanhavam a régua e partiam para verificar cuidadosamente o traçado. A informação de que todos os quadrados eram iguais parecia não fazer sentido algum.

Para eles, o padrão geral do tabuleiro não se constituía como atrator das trajetórias, como seria de esperar se a proporcionalidade estivesse sendo usada "em acção".

O teste definitivo para saber se os objectivos didácticos de MALVINAS foram alcançados é saber se os jogadores conseguem jogá-lo usando um tabuleiro com o reticulado curvo da figura 5. Aos interessados em introduzir jogos na sala de aula, recomendamos a leitura de Cabral (1993). Para um estudo aprofundado da proporcionalidade em situação de quadriculados, indicamos Sanchez (1991). Para um acervo de materiais lúdicos, testados e experimentados em situações de ensino real, recomendamos Giménez (1993).

[1]A primeira versão desse jogo foi apresentada pelo autor, junto com Maria Eulália Souza Vani, Maria de Fátima Pacheco e Wanda Mohamad, na Reunião da Regional-Rio da Sociedade Brasileira de Educação Matemática realizada no CIEP José Pedro Varela, Rua do Lavradio, Rio de Janeiro RJ, em 27 de junho de 1987, representando o Curso de Matemática através de Materiais Concretos do Centro de Ciências da FAPERJ, com apoio do PADCT/SPEC/CAPES. MALVINAS foi usado em 1984 em disciplina experimental de Álgebra Linear e em disciplinas regulares de Cálculo para alunos da Faculdade de Farmácia da UFRJ. Foi usado também no Curso de Treinamento de Professores G-Rio de 1985 a 1988 e recentemente tem sido usado por Aparecido Donizeti na Escola Einstein em Limeira (SP), e por Luciana Scheufler nos Colégios Farroupilha e Rosário em Porto Alegre (RS).

Bibliografia

Baldino, R. R., Ciani, A. B., Cirino, M. C. de C. T., Lopes, A. R. L.V., Pereira, P. S. (1994). *Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: critica ao ensino actual e proposta alternativa.* UNESP, Rio Claro, Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática, V ENEM, mimeografado. (Submetido para publicação à revista *Quadrante.*)

Baldino, R. R. (1995). *Object of knowledge and object of desire in a cooperative learning calculus course.* UNESP, Rio Claro. Mimeografado.

Cabral, T. C. B. (1993). Do Jogo ao Ludo ou da Sedução à Significação. *Boletim da SBEM-SP*, ano 7, nº 2 abril/junho.

Giménez, J. (1993). *Aprendendo álgebra a traves de juegos.* Universitat Rovira i Vigili, Barcelona.

Sanchez, L. B. (1991). *O Desenvolvimento da Noção de Semelhança na Resolução de Questões de Ampliação e Redução de Figuras Planas.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da USP.

Roberto R. Baldino
UNESP, Rio Claro, Brasil

Matemática em Exame

Debate nacional sobre o ensino da Matemática

O ensino da Matemática continua a constituir um dos sectores mais problemáticos do sistema educativo português. Nos últimos anos, a Matemática tem sido chamada a desempenhar o papel de principal filtro seleccionador dos alunos na entrada no ensino superior. Esse papel tem vindo a condicionar de forma crescente as expectativas dos alunos e pais relativamente à disciplina e, por tabela, a prática pedagógica dos professores, principalmente no ensino secundário. Os estrangulamentos provocados por um sistema inadequado de selecção e avaliação estão a ter efeitos devastadores neste ponto do sistema, há muito fragilizado, ameaçando alastrar aos outros níveis.

O Ministério da Educação tem emitido sinais contraditórios quanto aos programas. Embora os documentos oficiais, com força de lei, contemplem um leque diversificado de objectivos e competências, certas determinações recentes parecem sobretudo preocupar-se com a leccionação forçada dos conteúdos. Desapareceu assim todo o respeito pelo ritmo de aprendizagem dos alunos sublinhado nos próprios documentos programáticos.

O ensino superior não está à margem deste ambiente conturbado. Pelo contrário, em quase todas as Faculdades onde se lecciona Matemática existe uma ou mais disciplinas onde os níveis de insucesso são absolutamente incompreensíveis. Mas como isso não acontece a todas as disciplinas, a responsabilidade não pode ser simplesmente assacada à proverbial "má preparação" dos alunos. O ensino superior tem, de resto, emitido sinais muito contraditórios acerca dos aspectos que mais valoriza nas competências dos alunos que nele ingressam. Enquanto que nuns casos se dá especial atenção à capacidade de raciocinar matemáticamente, noutros casos parece sobretudo pretender-se um grande domínio de técnicas de cálculo. E, enquanto isso, continua a tirar-se muito pouco partido das possibilidades das novas tecnologias — o que neste nível de ensino é completamente injustificável.

Estas questões têm sido debatidas em diversos foruns, mas raramente duma forma global e articulada. É isso que se pretende no debate nacional sobre o ensino da Matemática organizado pelas Universidades Aberta e de Lisboa, com a participação de docentes das áreas da Matemática e da Educação Matemática de diversas instituições do ensino superior, de docentes de todos os outros níveis de ensino, bem como das organizações mais representativas ligadas à Matemática, incluindo a APM.

A elaboração de um diagnóstico da situação e o estabelecimento de linhas de diálogo entre todos os intervenientes no ensino da Matemática é um primeiro passo, essencial, para a concertação de uma estratégia de acção e intervenção que permita redefinir o papel educativo da Matemática e fazer da sua aprendizagem um experiência verdadeiramente formativa para todos os alunos. Esperemos que este debate possa dar um bom contributo neste sentido.

Local e data
Reitoria da Universidade de Lisboa, 8 e 9 de Maio de 1995
Alameda da Universidade, 1600 LISBOA
Informações
Secretariado Matemática em Exame
Universidade Aberta
Rua da Escola Politécnica, 141, 1250 LISBOA
Telefone 01-3972334; Fax 01-3973229

João Pedro da Ponte
Universidade de Lisboa

Pense Nisto

A propósito de um problema

É conhecido o famoso problema de Gauss da soma dos *n* primeiros números naturais e a forma engenhosa como foi resolvido. Num artigo sobre formação de professores [1] encontrei várias formulações da solução do referido problema, apresentadas em conjunto com algumas questões. As formulações que apresento são as mesmas mas acrescento uns esquemas encontrados numa outra publicação [2]. As questões que proponho são um pouco diferentes. Escreva-nos a dizer o que cada uma o levou a pensar.

Henrique M. Guimarães

$$\frac{n}{2}\,(n+1)$$

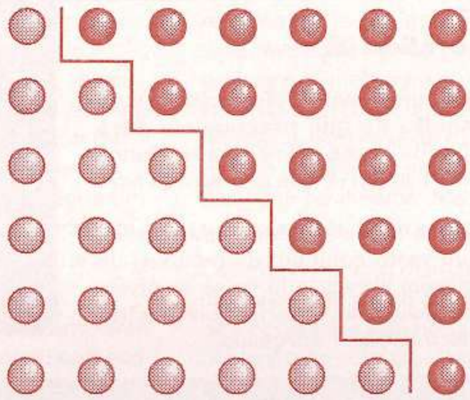
$$n\,\frac{(n+1)}{2}$$

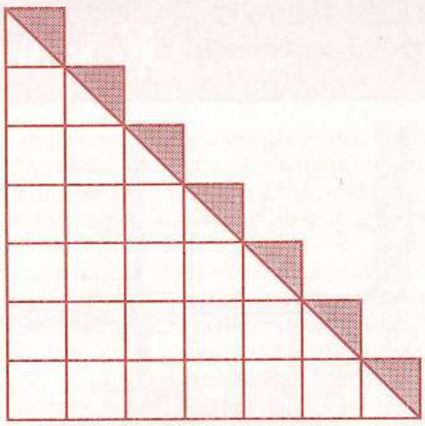
$$(n+1)\,\frac{(n-1)}{2} + \frac{(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n$$

$$\frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\,(n+1)^2 - \frac{1}{2}\,(n+1)$$





Qual das formulações apresentadas prefere? O que o leva a essa preferência?

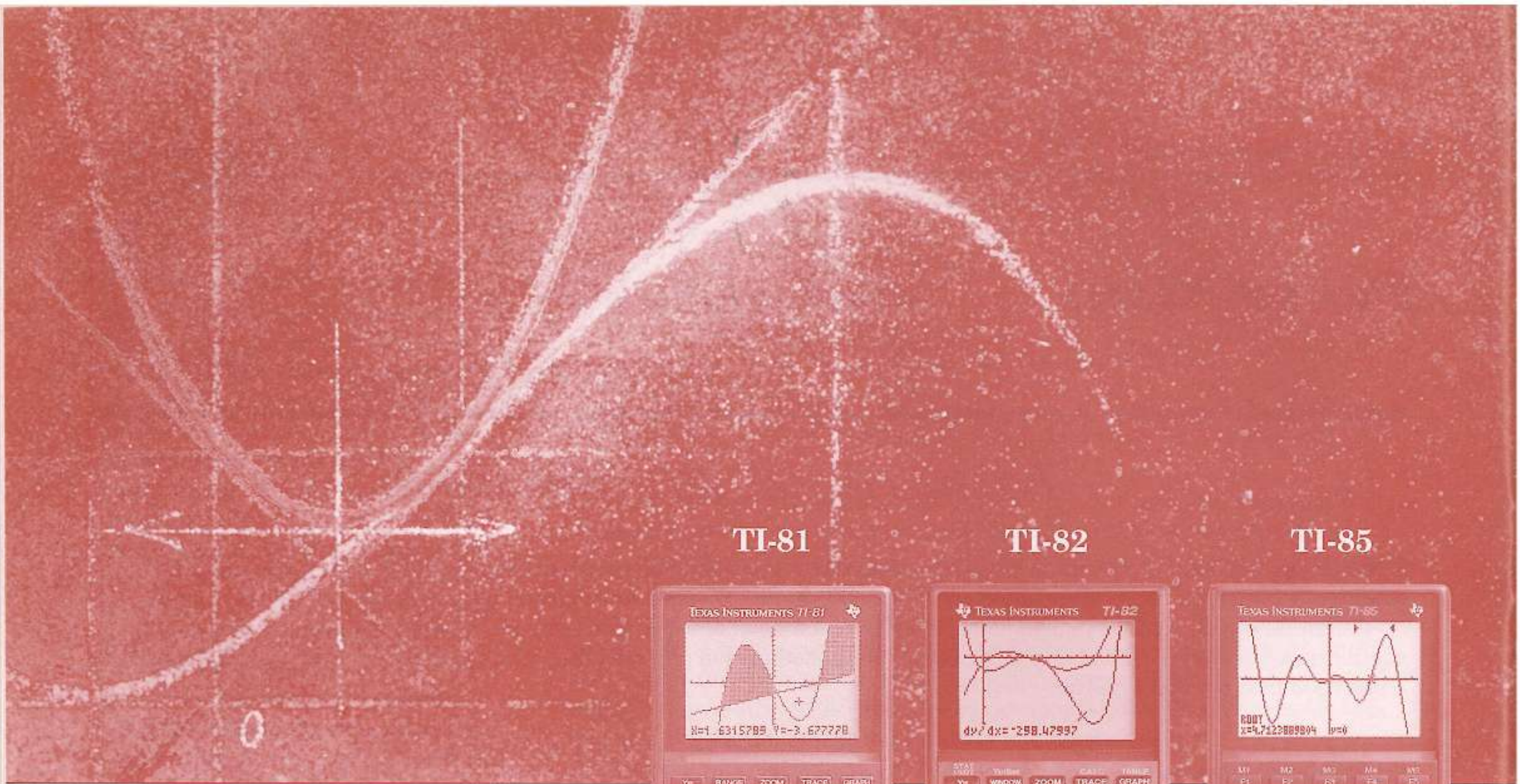
O que *vê* em cada uma das expressões?

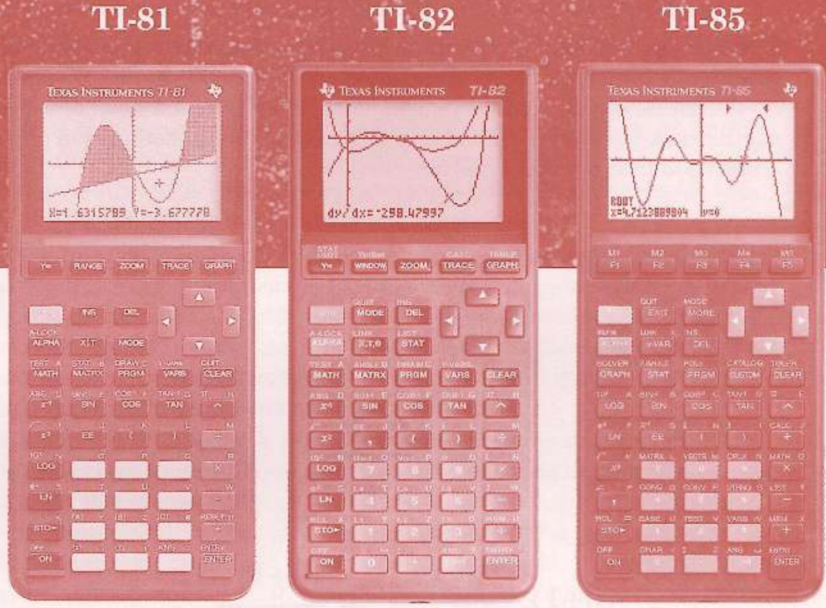
Que expressões associa a cada um dos esquemas apresentados?

Costuma usar este tipo de questões com os seus alunos? Com que objectivos?

[1] Brown, S.I. (1982). On humanistic alternatives in practice of teacher education. *Journal of Research and Developmente in Education, Vol. 15, 4.* pp.13-18.

[2] Trata-se do livro *Proofs without words* publicado pela *Mathematical Association of America* em 1993, onde autor R. B. Nelsen, apresenta os referidos esquemas como sendo de origem grega e tal como Martin Gardner os divulgou.



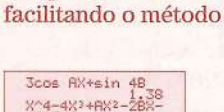


Calculadoras Gráficas TI

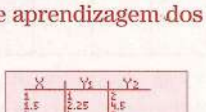
Prestamos muita atenção aos professores quando nos disseram aquilo de que precisavam para ensinar. E prestamos muita atenção aos alunos quando nos disseram aquilo de que precisavam para aprender.
O resultado? A gama de calculadoras gráficas TI, que representa um vasto conjunto de recursos de ensino e aprendizagem abrangendo todos os níveis de ensino - ensino básico, secundário, universitário - com o tipo de funcionalidade adequada.

OS ALUNOS MERECEM O MELHOR. E VOCE TAMBÉM !

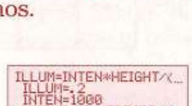
As calculadoras gráficas não mostram apenas os cálculos finais, também explicam os conceitos. É a rápida apreensão dos conceitos que torna a matemática mais acessível, deixando mais tempo livre para a exploração e desenvolvimento de um interesse genuíno sobre a matéria.
Observe a gama de calculadoras gráficas da Texas Instruments. A TI-81 para o ensino básico (3° ciclo), a TI-82 para o ensino secundário e a TI-85 para o ensino universitário. Escolha a mais adequada às suas necessidades. Aumente a eficácia do ensino, facilitando o método de aprendizagem dos alunos.



TI-81 : Visualiza a totalidade das expressões da forma como foram introduzidas e mostra os cálculos finais.



TI-82 : A tabela de avaliação das funções mostra os resultados numéricos em formato de tabela.



TI-85 : O SOLVER da TI-85 é uma poderosa ferramenta para trabalhar com equações e resolver em ordem às diferentes variáveis.

	TI-81	TI-82	TI-85
- Gráfico da funções	até 4	até 10	até 99
- Gráfico de equações paramétricas	até 3	até 6	até 99
- Gráfico de equações polares		até 6	até99
- Gráfico de sucessões		até 2	
- Gráfico das soluções de equações diferenciais			até à 9th ordem
- Percorre os gráficos representados	X	X	X
- Resolução de raízes/ Mínimos/Máximos		X	X
- Características do zoom	7	13	15
- Tabelas dos valores das funções		X	
- Número de matrizes	até 3	até 5	ilimitada*
- Dimensão máxima da matriz	6x6	30x30*	50x50*
- Comprimento máximo da lista		99	ilimitado*
- Modelos de regressão	5	8	8
- Gráficos «box & whisker»		X	
- Divisão do écran		X	
- Resolução de equações			X
- Números complexos			X
- Espaço em memória 32Kb	4.6Kb	32Kb	32Kb
- 2 anos de garantia	X	X	X

(*) Os números alterar se ão com o use da calculadora, até à saturação da memória disponível (32 kb)

Beldata Lisboa Rua Sarmento de Beires 3-A, 1900 Lisboa
Tel: 01805435/01805268 Fax: 01848512
Oporto Rua Aval de Cima 139-155,
Apartado 2089, 4202 Oporto
Tel: 521735/5500439 Fax: 5503819

TEXAS INSTRUMENTS

Tetri Estrada Exterior da Circunvalacao
798 Apartado 48, 4436 Rio Tinto
Tel: 02 98 99 532 Fax: 029800527
Dismel Rua do Terreirinho, 4 - 3 Dto. 1100 Lisboa
Tel: 018861527 Fax: 018880189

Jack Price e a APM

No último número chegado a Portugal do boletim do National Council of Teachers of Mathematics *(NCTM), a associação de professores de Matemática dos Estados Unidos, Jack Price, presidente do NCTM, escreve um artigo intitulado* In Reform we are not alone *(Na reforma não estamos sózinhos), em que se refere à sua estadia em Portugal durante o ProfMat 94, a convite da APM. Segue-se a transcrição desse artigo.*

Nós, norte-americanos, julgamos muitas vezes que estamos sózinhos nos nossos esforços de mudança da educação matemática. Este sentimento está mais espalhado do que queremos admitir. Alguns de vós podem estar interessados — ou ficar surpreendidos — em saber que o NCTM tem relações de trabalho com 14 *corresponding societies* (associações correspondentes) em 13 países. Uma "corresponding association" é uma organização num outro país que tem as mesmas preocupações que o NCTM em relação à matemática escolar. Há troca de ideias e de publicações, e muitas dessas "associações correspondentes" são também sócias colectivas do NCTM. Muitas vezes, os esforços de reforma nesses países foram iniciados muito antes dos nossos. Este facto tornou-se claro para mim em Novembro passado, quando participei no encontro nacional da Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM).

Cerca de 1500 professores participaram no encontro em Leiria, cidade 130 km ao norte de Lisboa. Este país tem cerca do tamanho do Tennessee com uma população igual a um terço da população da Califórnia. Os participantes eram entusiastas, interessados, extremamente simpáticos e hospitaleiros e muito semelhantes àqueles de vós que participam nos encontros regionais e anuais do NCTM. Fiquei impressionado com o número de jovens professores e estudantes que participaram.

Os organizadores reservaram bastante tempo para a interacção entre os participantes, jogos, e um "convívio" no fim de cada dia. O banquete, por exemplo, foi servido em estilo de buffet sem mesas de jantar, permitindo assim às pessoas deslocarem-se enquanto comiam e falavam. Não havia qualquer programa excepto um conjunto tocando música da região. Foi um modo admirável de estabelecer contactos e saber o que estava a acontecer noutras partes do mundo.

Embora a interacção e a simpatia fossem privilegiadas, o profissionalismo estava presente de modo patente. Por exemplo, os oradores [nas comunicações, conferências, sessões plenárias...] entregaram os seus textos até meados de Setembro. Dois meses depois, durante a recepção, era entregue um volume com os textos traduzidos de todos os oradores [de língua não portuguesa].

A APM ofereceu-me dois exemplares com as traduções do *Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics* e do *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Estavam orgulhosos por as suas traduções apresentarem exactamente o mesmo aspecto que os documentos originais e pelo facto da tradução para português dos *Standards* Profissionais ter sido publicada antes da tradução espanhola.

Um painel, com representantes de Espanha, França, Brasil, do Reino Unido, de Portugal e dos Estados Unidos discutiu os esforços de reforma nestes países. Foi para mim uma revelação ver de que modo era grande a semelhança entre os nossos interesses e preocupações. Concordámos que o ritmo da mudança é lento e de que estamos todos a caminhar na mesma direcção, embora a velocidades diferentes.

Devemos dedicar mais tempo a compreender o que se passa para lá dos oceanos e das nossas fronteiras. Milhares de colegas nossos, em todo o mundo, partilham a nossa visão e as nossas preocupações relativamente a todas as crianças. Verdadeiramente, devemos ampliar os nossos horizontes. Obrigado, APM, por teres alargado os meus.

Almoço de preparação do painel a que se refere Jack Price. Da esquerda para a direita : Ubiratan D'Ambrosio, Paulo Abrantes (moderador), Jack Price, Evelyne Barbin, Barbara Price, Maria Jesus Luelmo. Peter Ransom, representante do Reino Unido, foi o fotógrafo.

Vamos jogar

De um lado ao outro[1]

Número de jogadores: 2

Número de calculadoras: 1

Materiais: 1 lápis vermelho e 1 lápis azul

Objectivo:

Ligar dois lados opostos do tabuleiro com uma linha contínua passando alternadamente por quadrados e círculos.

Regras:

Cada jogador escolhe uma cor. O jogador azul selecciona, como ponto de partida, um círculo qualquer e o jogador vermelho um quadrado qualquer.

Os jogadores movem-se um de cada vez no tabuleiro realizando as operações adição, subtracção, multiplicação ou divisão, utilizando a calculadora quando necessário.

Se o jogador usar adição ou a subtracção joga apenas uma vez; se o jogador usar a multiplicação ou a divisão pode jogar duas vezes seguidas.

Se um jogador dá uma resposta errada, não pode fazer a ligação e perde a vez.

Exemplo:

O vermelho decide começar no 7 na linha de cima. Faz entrar o número 7 na calculadora e diz que quer mover-se para o número 23. Para poder ocupar esse círculo, tem que informar o colega da operação que vai usar, na calculadora, para transformar o 7 no número 23. (7+16=23)

Se a operação for bem sucedida pode traçar uma linha ligando o 7 ao 23.

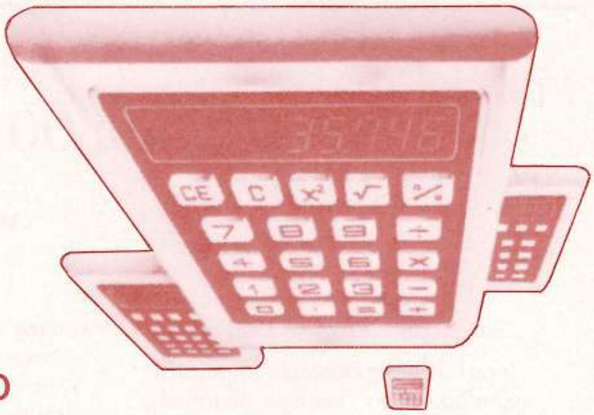
Agora é a vez do azul.

Decide começar no 6 à esquerda do tabuleiro. Faz entrar o 6 na calculadora e diz que deseja mover-se para o 36. Decide transformar o 6 em 36 através da multiplicação. (6x6=36)

Como a operação foi bem sucedida, pode ligar os dois números com uma linha azul. Porque usou a operação multiplicação, joga outra vez.

1. Jogo adaptado do livro *Electronic Calculators, Teacher's Handbook*, de Gordon Haigh e Andy Bailey, da colectânea Nuffield Maths, ed. Longman, 1984.

De um lado ao outro



Vermelho

Azul

	10		16		51		14		7		23	
40		48		25		28		23		42		16
	34		12		5		46		18		21	
6		17		40		19		22		9		15
	36		20		37		38		16		45	
48		18		9		4		48		34		26
	21		36		47		19		8		13	
38		7		12		6		48		50		33
	4		40		49		24		25		17	
22		56		19		13		8		10		28
	14		28		35		52		45		43	
9		8		7		46		17		8		18
	12		36		52		51		34		29	

Azul

Vermelho

Certamente que já pensou em enviar um texto seu para a *Educação e Matemática*, mas ainda não foi ainda desta que se decidiu a metê-lo no correio...

Estivémos à espera. Continuamos à espera.

Afinal, de quem é a revista?

Dirk Struik fez 100 anos![1]

Maria João Lagarto

É raro as homenagens a um centenário terem a colaboração do próprio, mas foi o que aconteceu a 30 de Setembro do ano passado com Dirk Struik. Struik festejou o seu centésimo aniversário na Universidade de Brown, nos Estados Unidos, onde lhe "cantaram os parabéns" e cortou um bolo com o formato do numeral 100, depois de ter proferido uma conferência intitulada *Mathematicians I Have Known* (Matemáticos que eu conheci).

Struik nasceu em Roterdão em 1884, onde o seu pai ensinava numa escola primária. Depois de ter estudado na Universidade de Leiden foi, durante um curto espaço de tempo, professor numa escola secundária, o que aliás tinha sido a sua aspiração, colocando os seus objectivos um degrau acima do estatuto social atingido pelo seu pai. Struik volta à Universidade para fazer o doutoramento, que completa em 1922, ano em que fica noivo da sua futura mulher e colaboradora no campo da história da matemática, Ruth Ramler. Em 1926 Struik fixa-se nos Estados Unidos como professor do MIT (*Massachussets Institute of Technology*).

Dirk Struik é conhecido em Portugal por ser o autor do único livro sobre história da matemática traduzido no nosso país: *História Concisa da Matemática*. Este livro revela o seu interesse pela forma como a matemática e as ideias matemáticas interagem com a sociedade e a cultura onde nascem e se desenvolvem, o que era relativamente pouco usual no contexto da história da matemática.

No último capítulo do livro, onde aborda a matemática da primeira metade do século XX, podemos tomar contacto com muitos dos matemáticos de que Struik fala na sua conferência centenária.

O seu mentor e principal colaborador foi J. A. Scouten, perito em análise vectorial e tensorial. No seu primeiro trabalho conjunto, em 1918, explicaram, utilizando apenas o cálculo tensorial, as perturbações do movimento de Mercúrio que, na altura, eram a única confirmação experimental da teoria de Einstein.

Um outro matemático que o influenciou, e por quem tinha grande admiração, foi Levi-Civita. Struik foi para Roma em 1924, atraído pelo trabalho de Levi-Civita que estabelecia uma notação para a "geometria diferencial absoluta", a qual se tornou famosa quando em 1913 Einstein adoptou esta notação para a Teoria da Relatividade Geral e lhe deu o nome de Cálculo Tensorial.

Levi-Civita animou Struik a não trabalhar sempre no mesmo campo e a expandir os seus interesses a outras áreas. Deu-lhe um problema de hidrodinâmica — a investigação do comportamento das ondas num canal de profundidade finita. Mais tarde, os seus resultados foram confirmados experimentalmente no Instituto de Tecnologia da Califórnia e Struik afirmou que "as ondas obedeciam muito bem às minhas equações".

Dirk Struik em 1973

Struik foi marcado pelo "terreno histórico da Itália", onde conheceu, entre outros, Volterra e onde começou a interessar-se seriamente pela história da matemática.

No ano seguinte, no prosseguimento de uma bolsa de estudo oferecida pela fundação Rockfeller, Struik trabalhou sobre a supervisão de Richard Courant na Alemanha, em Göttingen, o grande centro matemático da época. A atmosfera, muito menos cortês que a italiana, onde os matemáticos "gostavam de dizer piadas uns dos outros", foi um choque para Struik.

Em Göttingen, Struik conviveu com David Hilbert, que era ali considerado "o grande senhor das matemáticas". Ali conheceu também Norbert Wiener, que mais tarde lhe ofereceu um lugar no MIT e com quem Struik, logo depois da chegada aos E.U.A., colaborou numa nova teoria dos quanta. Segundo Struik, Wiener alternava entre momentos de grande exaltação, quando tinha ideias brilhantes, e momentos de depressão profunda. Quando o seu trabalho ia bem corria pelos corredores do MIT contando a todas as pessoas que o ouvissem as suas novas descobertas. Wiener desenvolveu trabalhos na área da cibernética, construindo, em colaboração com outros matemáticos, um dos primeiros computadores. Struik admirava-o não só pela sua brilhante inteligência mas, sobretudo, pela sua profunda preocupação pelas consequências sociais das inovações tecnológicas; os possíveis efeitos maléficos do seu trabalho deixavam-no muitas vezes angustiado. Quando foi convidado para trabalhar no Departamento de Guerra, escreveu um famoso artigo dizendo que nunca faria nada que ajudasse a matar pessoas.

Em Göttingen conheceu também Emmy Noether, pioneira da álgebra dos ideais. Segundo Struik, ela foi a matemática mais ilustre da história da matemática, mas tinha dois *handicaps*, ser mulher e judia. Hilbert protegeu-a durante bastante tempo, mas com a chegada de Hitler ao poder ela teve de partir para o exílio. Struik na sua conferência afirmou: "Estou envergonhado ao dizer que o MIT não lhe ofereceu um lugar". Ela acabou por ir leccionar para o Bryn Mawr College, perto de Filadélfia, onde morreu pouco tempo depois. Struik naturalizou-se americano em 1934 e durante os dez anos seguintes apoiou numerosas causas políticas, como os legalistas espanhóis contra Franco. Struik não fazia segredo das suas ideias marxistas, o que o levou a ser perseguido pelos macartistas. Tendo sido suspenso do MIT durante cinco anos, regressou em 1955 e permaneceu até 1960, quando foi obrigado a reformar-se.

O marxismo forneceu a Struik uma ferramenta para entender a forma como diferentes factores moldam o meio científico e condicionam certos estilos de pensamento. No entanto rejeitou sempre uma visão reducionista do conhecimento matemático. Numa conferência em 1956 afirmou:

> "... a liberdade da matemática não é ilusória — é real, e um dos mais fascinantes aspectos da nossa ciência. Mas a sua liberdade é a liberdade de que o filósofo fala [tendo em mente Hegel]: a liberdade baseada na compreensão das leis. As leis do jogo matemático são estritas: a consistência lógica é uma das mais importantes. Os matemáticos, ao seguir estas leis, nunca se afastam muito do mundo à sua volta. Afinal, o homem e a sua mente são também parte do Universo."

A sua visão histórico-social da matemática está bem patente no seu estudo sobre a forma como as condições sociais, económicas, religiosas e culturais moldaram os matemáticos alemães durante o período da Revolução Científica. Para Struik uma figura chave deste período é Simon Stevin (ver artigo na secção "Para este número seleccionámos" deste número da revista).

No ensaio *Why Study the History of Matematics?* (Porquê Estudar História da Matemática?), tenta responder a duas questões que são levantadas por muitos, o "porquê" e o "para quê" do estudo da história da matemática, e debate a sua visão de historiador da matemática. Nesse ensaio escreve:

> "... Até agora olhámos para a matemática como uma ciência auto-limitada [...] É útil lançar a nossa visão para um horizonte mais amplo, onde a matemática é apenas uma das muitas formas da ciência, ou ainda mais amplamente, apenas um tipo de manifestação cultural ou da actividade humana em geral [...] Uma perspectiva mais ampla abre-se se olharmos para o papel da matemática na história geral das ideias filosóficas, teológicas, religiosas, artísticas [...] Existe ainda outro processo de estudar a história da matemática e da ciência em geral [...] o lado social, a relação entre o conhecimento e a sociedade. A sociologia do conhecimento recebeu uma atenção considerável neste século, tal como a sociologia da matemática, especialmente nos últimos anos [...] A razão não é difícil de encontrar: os matemáticos envolveram-se profundamente em assuntos importantes para a indústria e para a governação, para o bem e para o mal, a sua função social (e muitas vezes frequentemente anti-social) é obvia [...] O historiador social procura relações, conexões e até causalidades. [...] num campo cheio de obstáculos e armadilhas, é tão fácil descobrir factores sociais onde não existe nenhum como — e este é o caso mais comum — desprezar ou ignorar elementos activos da sociedade que estimulam tanto directamente como indirectamente campos particulares da matemática, mesmo que sejam da física, astronomia, arte, religião, guerra, tecnologia, engenharia..."

Struik, a partir da década de 50, depois de ter abandonado a investigação matemática, dedicou-se inteiramente à história da matemática, enriquecendo-a com as suas narrativas e reflexões. Ainda recentemente Struik escreveu *My European extravaganza of October, 1994* (A minha extravagância europeia de Outubro de 1994), relatando a semana que passou na Holanda para participar num seminário. Esta sua narrativa revela-nos um homem simples, espirituoso e cheio de vida. Em cada dia da semana tinha uma "boa alma" para o acompanhar. Num dos dias coube ao seu amigo Henk Bos, historiador da ciência, convidá-lo para fazer parte de um júri de doutoramento na Universidade de Utrecht. "Vestimos trajos académicos, toga, boné e befje (lenço de pescoço) e desfilamos solenemente, uns atrás dos outros (como um grupo de pinguins) para a majestosa sala dos doutoramentos, onde retratos de eruditos respeitáveis, todos já falecidos, olhavam lá de cima para nós. O *promovendus*, acompanhado por dois *paranymphs* (supostamente para o ajudar se ele desmaiasse), era um engenheiro chamado Maffiolo, que tinha feito uma investigação sobre os canais italianos do século dezoito. Representámos todos muito bem perante uma plateia de colegas, familiares e outros". Noutro dia as suas acompanhantes foram as matemáticas Marjolein Kool e Rijkje Dekker. Sobre Marjolein, Struik escreve:

> "...algum tempo atrás, desenterrou, para a sua dissertação, duas das minhas publicações, quase com sessenta anos, as quais eu pensava estarem profundamente enterradas no pó das bibliotecas. Dá-me uma satisfação estranha descobrir que esses primeiros trabalhos ainda têm alguma utilidade."

Struik influenciou gerações de historiadores tanto da matemática como da ciência. Esperemos que continue a inspirar a todos durante muito tempo.

1. Este texto foi parcialmente adaptado dos artigos "Dirk Struik Celebrates his 100th", de Allyn Jackson, publicado nas *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 42, nº 1, de Janeiro de 1995 e "Dirk Jan Struik and His Contributions to the History of Mathematics", de David E. Rowe, publicado na revista *Historia Mathematica* 21 (1994), p. 245-273.

Maria João Lagarto
Esc. Sec. Monte da Caparica

Para este número seleccionámos

Simon Stevin e as fracções decimais*

Dirk Jan Struik

Enquanto nos parece natural que conceitos como o de função ou de limite tenham levado centenas de anos a consolidar-se, pode surpreender que o mesmo se tenha passado com a notação "óbvia" utilizada para os números decimais. Mas é isso que o artigo de Dirk Struik de 1959, escrito para a revista Mathematics Teacher *do NCTM, nos mostra de modo exemplar, ao descrever a lenta evolução que começa nos últimos séculos da Idade Média, com a introdução da numeração indo-árabe, e vem até à notação moderna usada nas tabelas de logaritmos de Briggs do século XVII. A escolha do autor do texto que seleccionámos para este número também se justifica pelo facto de Dirk Struik ter festejado em 1994, ainda com vida, o seu centenário (ver artigo de Maria João Lagarto na página 31)*

1

Simon Stevin, engenheiro e matemático de origem flamenga, é conhecido na história da matemática como o inventor das fracções decimais. Isto é substancialmente verdade, mesmo tendo em conta o facto de que as fracções decimais eram usadas antes de Stevin.

Foi basicamente através do pequeno livro de Stevin, na realidade não mais do que um panfleto, intitulado *De Thiende* (O Décimo), publicado em Leiden em 1585, que as fracções decimais se tornaram parte integrante dos currículos de aritmética.

Este panfleto foi reeditado, em holandês, francês, inglês e latim, várias vezes durante a vida de Stevin e logo após a sua morte. O seu texto ficou agora disponível numa reprodução facsmile, conjuntamente com uma tradução inglesa actual de Richard Norton, como parte do 2º volume da última edição dos trabalhos principais de Stevin, preparada sob os auspícios da Secção de Física da Real Academia de Ciências holandesa[1]. Esta edição contém uma introdução dedicada à história das fracções decimais que nos dá oportunidade de avaliar as descobertas de Stevin nesta área.

Simon Stevin era natural de Bruges; é praticamente certo que 1548 foi o ano do seu nascimento. Iniciou a sua vida como contabilista, mas deixou a Flandres durante o período de instabilidade e perseguição que antecedeu a guerra com Espanha.

Em 1581 encontramo-lo em Leiden, e desde essa época até à sua morte viveu na Holanda. Aqui, como milhares de outros emigrantes do sul dos Países Baixos, teve de encontrar uma nova forma de vida. Com o seu talento especial como engenheiro, contabilista e matemático, a sua boa aceitação na nova república estava assegurada. Durante muitos anos foi conselheiro do Príncipe Maurice de Orange, um dos mais afamados comandantes militares da sua época, que serviu não só como engenheiro militar, mas também como tutor em diferentes campos da matemática. Muitos dos últimos trabalhos de Stevin têm a marca desta sua actividade que abrangia amplos aspectos da geometria prática e aplicada, da trigonometria, da perspectiva e da contabilidade. Depois da sua morte, em Haia, em 1620, o seu admirador Albert Gerard, também um imigrante matemático e engenheiro, editou em francês uma colectânea dos seus trabalhos de matemática[2]. Esta edição foi publicada como um enorme volume em 1634, e tem sido a principal fonte do nosso conhecimento sobre Stevin como matemático, até 1958[3]. A nova edição de *The Principal Works* está planeada em cinco volumes, tendo já sido publicados o Volume I, sobre Mecânica, e o Volume II sobre Matemática. Quando os cinco volumes estiverem publicados, oferecerão uma visão excelente sobre o estatuto das ciências exactas na Europa no período imediatamente anterior a Fermat e Descartes iniciarem a nova época do cálculo e da geometria das coordenadas.

Uma fracção decimal tem no seu denominador uma potência de dez inteira e positiva, e pode ser escrita

* Artigo reproduzido com autorização da revista *Mathematics Teacher* 52 (Outubro, 1959): 474-78, copyright (1959) do *National Council of Teachers of Mathematics.* Este artigo está incluído no livro *Five fingers to infinity*, de Frank Swetz, ed. The Open Court (1994).

de muitas formas, por exemplo: 71/100, 0.71, 0,71 ou .71, nas notações actuais. Não é fácil dizer quando foram usadas sistematicamente as fracções decimais, mas os pioneiros parecem ter sido os chineses[4]. Com eles encontramos a notação do valor posicional decimal já no século XIV a. C. e o uso de fracções decimais nas medições no século III d. C.. Liu Hui, que viveu neste período, exprimiu o comprimento de 1,355 pés como sendo 1 chhih, 3 tshun, 5 fen, 5 li.

O mesmo Liu Hui também efectuou extracções de raízes em decimais; neste processo, que encontramos na Idade Média entre autores árabes, judeus e de origem latina, escreve-se, por exemplo, .

$$\sqrt{17} = \sqrt{170\ 000}/100 = 412/100$$

Quando se chega à dinastia Sung, encontra-se o cálculo com fracções decimais já desenvolvido; Yang Hui, em 1261, multiplica 24,68 por 36,56 e encontra 902,3008. Vinda da China e da Índia, a notação decimal chegou aos autores árabes; o nosso exemplo de $\sqrt{17}$ encontra-se nos escritos de Al-Nasawi (Persa, cerca de 1030), que traduziu de novo 412/100 em fracções sexagesimais como 4°7'12", significando 4+7/60+12/3600.

A familiaridade de Yang Hui com as fracções decimais foi partilhada, século e meio mais tarde, pelo astrónomo persa Jamshid Al-Kashi[5], que multiplicou 25,07 por 14,3 obtendo 358,501. É difícil dizer se a primeira noção de fracção decimal na Europa apareceu através do contacto com o Oriente ou se surgiu espontaneamente, mas subsistem poucas dúvidas de que onde quer que fossem usados cálculos em larga escala, no sistema decimal, as fracções decimais estavam, mais tarde ou mais cedo, destinadas a aparecer através da própria lógica dos cálculos. Sendo assim, é bastante estranho que estando o sistema decimal em uso desde a Idade da Pedra, em tantas zonas do mundo, o uso regular deste sistema para as fracções só tenha aparecido mais tarde.

Os leitores podem perguntar: Se as fracções decimais apareceram fora da China numa data tão tardia, como se desembaraçavam as pessoas antes da sua introdução?

A resposta é que usavam fracções como 3/7, 7/13, etc. com qualquer tipo de denominador, ou as fracções sexagesimais baseadas no número 60. Um exemplo duma utilização bastante complicada do primeiro tipo é a aproximação de π dada por Arquimedes, como um valor entre 3 10/71 e 3 1/7; exemplos da utilização de fracções sexagesimais podem ser encontrados em tábuas de barro cuneiformes do Iraque (Mesopotâmia) do 4° milénio a.C.. Ptolomeu, no seu livro de astronomia conhecido como o *Almagest* (cerca de 150 d. C.), também usou fracções sexagesimais. E também nós o fazemos quando exprimimos a medida de um ângulo como 29°51'32"; aqui os minutos e segundos estão expressos no sistema sexagesimal, enquanto os números 29, 51, 32 estão escritos no sistema decimal. Sabe-se que existiram variações destes dois métodos de cálculo com fracções, tais como o método egípcio de exprimir fracções como a soma de fracções unitárias (fracções como 1/3, 1/7, com numerador 1).

Na realidade, havia e ainda há outro modo de lidar com o problema, muito utilizado sempre que o cálculo fraccionário é considerado difícil, e que consiste em evitar todas as fracções pela escolha de uma escala de medida apropriada, por exemplo 60, de modo que 1/4 é expresso por 15, 2/5 por 24, etc. Nós fazemos o mesmo quando dizemos 475 m em vez de 0,475 km, ou 3 quartas em vez de 3/4 do galão. Veremos como todos estes conceitos tiveram um determinado papel no trabalho de Stevin.

2

Durante os séculos quinze e dezasseis, começou a usar-se na Europa o sistema árabe de notação decimal — isto é, o nosso actual sistema posicional — com cada vez maior eficiência, em consequência sobretudo da expansão de uma sociedade mercantilista. Gradualmente, a influência do sistema começou também a fazer-se sentir no cálculo com fracções.

Podemos observar claramente este processo nas tabelas trigonométricas de Regiomontanus, o astrónomo e matemático de Nuremberg, que morreu em 1476 e cujos livros e tabelas eram ainda o padrão seguido na época de Stevin. Nessa altura, e também mais tarde até ao século dezoito, os senos, bem como as tangentes e outras entidades trigonométricas, eram encaradas como linhas e não como razões, de forma que eram expressas em termos de um raio R de um círculo, de comprimento dado. Na tabela de senos de Regiomontanus encontramos R=60 000, e portanto o seno de 30° é 30 000; mais tarde ele usou R=6 000 000. Ambos estes valores mostram a influência do sistema sexagesimal (as tábuas de Ptolomeu baseiam-se em R=60). Os diferentes senos são assim expressos por inteiros. Mas Regiomontanus também tinha uma tabela de tangentes na qual a tangente de 45° é 100 000, sendo neste caso, $R=10^5$, existindo outra tabela com $R=10^7$. O sistema decimal tornou-se assim a base para os cálculos das tabelas trigonométricas. As enormes tabelas de Rhaeticus (1551), as quais contêm com 7 casas decimais os valores de todas as seis funções trigonométricas para ângulos com intervalos de 10", são baseadas em $R=10^7$.[6]

Estas tabelas não contêm fracções decimais no sentido estrito do termo. Verdadeiras fracções com potências de 10 como denominadores ocorrem em alguns dos muitos livros de aritmética surgidos durante o século dezasseis. Por exemplo, encontramos num livro de 1530 escrito pelo muito conhecido professor alemão de aritmética, Christopher Rudolff, uma tabela de juros compostos, na qual os valores de $375 \times (1+5/100)^n$ para n=1,2,...,10, são escritos numa forma que difere da nossa notação actual apenas no uso de um traço vertical em vez de um ponto como separador decimal — por exemplo, 413|4375 para n=2.[7] Há muitos casos semelhantes, mas nenhum desses autores usava as fracções decimais de uma forma consistente, e quando as usavam as notações eram muito variadas.

Stevin foi o primeiro no Ocidente a retirar às fracções decimais o seu carácter ocasional. Apelando tanto ao letrado como ao homem prático, tanto ao professor como ao mercador e ao medidor de vinho em barris, anunciou as vantagens da sua notação como "ensinando como efectuar com facilidade todos os cálculos necessários aos homens através de inteiros, sem fracção". Ao fazê-lo usava uma notação que lembra bastante a sexagesimal; onde nós escrevemos 47,58, ele escrevia 47⓪ 5① 8② ,.onde a unidade ⓪ é denominada "começo", a décima ① é chamada "primeiro", a centésima ② é chamada "segundo", etc. Quando nós escrevemos 27,847+37,675+875,782=941,304, Stevin escrevia:

```
   ⓪①②③
  27847
  37675
 875782
 ------
 941304
```

De forma semelhante trata da subtracção, da multiplicação e da divisão — todas efectuadas "sem fracção". Termina o seu panfleto defendendo a introdução do sistema decimal também nas medidas de comprimento, área, volume, etc.

Stevin tinha a ideia correcta, mas a sua notação parece-nos desajeitada e menos elegante do que a utilizada por Rudolff meio século antes. A notação com o círculo foi obtida a partir do matemático italiano Bombelli, que tinha usado uma notação semelhante, na sua Álgebra de 1572, para as potências da variável (antecipando os nossos expoentes em x^1, x^2, x^3, etc.). Pode ser que tenha usado a notação sexagesimal na forma 47°5'8", para escrever o que actualmente é 47,58, tal como alguns dos seus seguidores fizeram; ele próprio mudou ocasionalmente a sua notação, escrevendo 732② para o nosso 7,32. A sua notação pode ter tido algumas vantagens para alunos inexperientes, já que permite passos intermédios: 7⓪5①8② mais 4⓪ 7① 5② é igual a 11⑩ 12① 13②, o que se reduz a 11⓪ 13① 3②, e de novo a 12⓪ 3① 3② Stevin conseguia também trabalhar com zeros: 2③ 7⑤ significa 0,00207. Mas a notação manteve-se pouco utilizada e o trabalho de Stevin não teria tido uma influência perduradora se não fosse Napier e os seus logaritmos.

3

Os logaritmos inventados pelo fidalgo escocês, John Napier, foram pela primeira vez apresentados em latim no seu *Descriptio* de 1614. Esses primeiros logaritmos não são aqueles que nós usamos, mas sim determinados números definidos com a ajuda de senos, que na explicação de Napier se baseavam em $R=10^7$. A edição de 1614 não tinha fracções decimais. Estas apareceram numa tradução inglesa de 1616 do *Descriptio*, com um ponto como separador decimal. Esta notação foi adoptada por Napier no seu Rabdologia de 1617, em latim, o livro no qual ele mostrou como efectuar cálculos com as suas barras, as chamadas "barras de Napier". Aqui Napier cita a *Arithmetica Decimalis* de Stevin e propõe a notação de 1993,273 (com ponto ou vírgula) para 1993 273/1000, embora também use 821,2'5" para 821 25/100. Depois, no trabalho póstumo *Constructio* de 1619, a notação tornou-se consistente: "o que quer que seja escrito depois da vírgula é uma fracção". Assim 25,803 significa 25 803/1000.

As grandes tábuas de logaritmos de base 10, que aparecem actualmente, assumem inteiramente a notação decimal de fracções, com ponto ou vírgula. Com tais tabelas, nas quais as partes decimais de números como 43, 430, 4300 são as mesmas, a notação decimal de fracções é simplesmente natural. Henry Briggs, na sua tabela de 1624, e Adrian Vlacq, nas suas tabelas de 1627, utilizaram coerentemente esta notação, e a partir deles as fracções decimais, com ponto ou vírgula como separador, passaram a ser aceites em geral, nomeadamente em cálculos com logaritmos.

As contribuições de Stevin, Napier e Briggs foram reunidas em dois livros alemães do agrimensor Ezechiel De Decker, intitulado *The New Arithmetic, First Part and Second Part*[8] (A Nova Aritmética, Primeira Parte e Segunda Parte) (1626, 1627). Aqui estão juntos *The Thiende* de Stevin, a tradução de Vlacq da Rabdologia e os logaritmos de Briggs de todos os inteiros de 1 a 100 000. Esses dois livros de De Decker são uma espécie de glorificação do triunfo do sistema decimal. Eles acentuam três aspectos essenciais desta vitória: a notação indo-árabe com os dígitos modernos, as fracções decimais, e os logaritmos da base 10. Uma alteração era ainda necessária, embora estivesse já implícita em toda a estrutura do sistema, nomeadamente a reconversão das tabelas trigonométricas para a unidade R=1, algo que mesmo Stevin não fez. A introdução sistemática desta unidade R=1 teve que esperar até ao *Introductio in Analysin Infinitorum* de Leonard Euler de 1748, e a partir dessa época as entidades trigonométricas nunca mais foram consideradas como segmentos de recta mas como razões sem dimensão.

4

O triunfo das fracções decimais nos trabalhos de Stevin e Napier não quer dizer que a notação e o uso se tornassem imediatamente numa norma. Existiam seguidores leais de Stevin que preferiam a sua notação, ou uma ligeira modificação dela.

Ainda em 1739 encontramos o Abade Dudier a ensinar que as fracções decimais devem ser escritas como

$89.5^{I}2^{II}7^{III}6^{V}$ ou 895276^{IV}; ele usava, no entanto, a notação habitual do ponto para os logaritmos. Muitas destas incoerências mantiveram-se de novo até Euler que, na sua *Introductio* de 1748 uniformizou as nossas notações actuais.

O uso da notação decimal para pesos e medidas, também proposto por Stevin, teve que esperar, no Ocidente, até à Revolução Francesa, que introduziu metros, ares e litros, e que também uniformizou o sistema monetário[9]. Sabemos que isto só foi parcialmente aceite na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos, embora os Estados Unidos introduzissem um sistema monetário decimal como resultado dos esforços de Robert Morris, Thomas Jefferson, e Alexander Hamilton[10]. Relativamente às medidas angulares, a luta continua, e quando utilizamos a nossa notação habitual de graus, minutos e segundos, prestamos a nossa homenagem a um sistema que se pode orgulhar de uma idade de cinco mil anos, certamente uma das mais longas idades de toda a nossa herança científica.

Notas:

1. *The Principal Works of Simon Stevin*, Amsterdam: Swets and Zeitlinger. Vol. I, *Mechanics*, editado por E. J. Dyksterhuis, v + 617 pp. (1955); Vol. II, *Mathematics*, editado por D. J. Struik, em duas partes, v + 976 pp. (1958).

2. Albert Girard (1595-1632) é principalmente conhecido como o autor de *Invention nouvelle en algèbre* (1629, reeditado em 1884), no qual se encontra o teorema de que uma equação algébrica de grau *n* tem *n* raízes (a formulação de Girard é diferente).

3. Houve duas edições facsimile de *De Tiende* antes de 1958, uma por H. Bosmans da edição holandesa de 1585 (Haia: Anvers 1924) e uma por G. Sarton da edição francesa de 1585 (*Isis* 33 (1935)).

4. J. Needham, *Science and Civilisation in China*, vol. III. Cambridge: Cambridge University Press, 1959. A primeira secção deste trabalho standard trata de matemática.

5. *D. G. Al-Kashi Kljui Ariſmetiki, Traktat ob Okruznosti*, traduzido e editado por B. A. Rozenfel'd (Moscovo, 1956), ver em particular p. 62; Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (Leipzig, 1913); ver em particular p. 26. A forma como Al-Kashi multiplica 25,07 por 14,3 para obter 358,501pode ser vista na figura 1.

6. Estas tabelas foram ampliadas por Valentin Otho no *Opus Palatinum* de 1596, uma tabela clássica que tem muitos valores com dez casas decimais e os senos com 15.

7. *Exempel Buechlin Rechnung belangend darbey* (Augsbury, 1530). O local onda as fracções decimais são introduzidas tem sido reproduzido frequentemente, por exemplo em D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol II, p. 241.

8. *Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst* (Gouda, 1626); *Tweedle Deel van de Nieuwe Telkonst* (Gouda, 1627). A segunda parte já era conhecida, mas a primeira parte desapareceu até que foi redescoberta por M. van Haaften em 1920; ver *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 15 (1928), pp. 49-54; 31 (1942), 59-64. Esta descoberta mostrou que não foi Vlacq em 1628, mas De Decker em 1627 que primeiro publicou uma tabela de logaritmos completa.

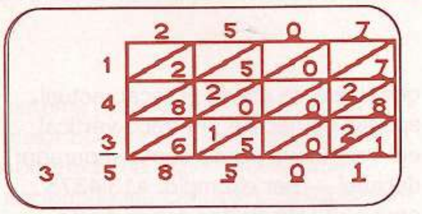


fig. 1. Multiplicação de 25,07 por 14,3 na forma utilizada pelo matemático árabe Al-Kashi. Na versão original, os inteiros estão a preto e as partes fraccionárias a vermelho. Os dígitos são árabes, os quais diferem dos nossos dígitos actuais, já que estes só se utilizam desde o Renascimento.

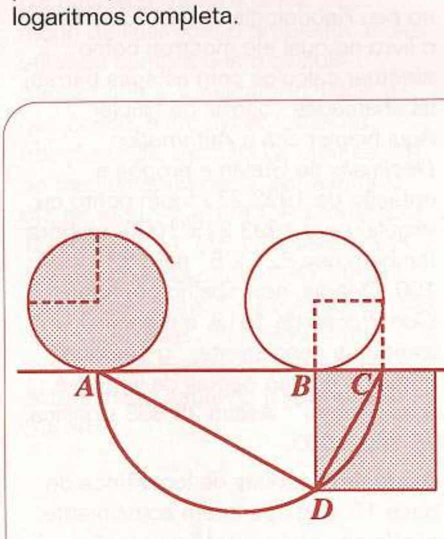
9. Os chineses, como se menciona no texto, tinham um sistema decimal desde, pelo menos, o séc. III d. C.

10. O dólar, com as suas divisões decimais foi introduzido pelo *Coinage Act* de 1792, patrocinado por Hamilton. Este decreto foi precedido por uma resolução do Congresso em 1785, resultado de um relatório de Robert Morris para o presidente do Congresso (1782), apoiado por Jefferson. Ver A. Nussbaum, *The History of the Dollar* (New York, 1957, viii + 308 pp.), capítulo II; C. D. Hellman, "Jefferson's efforts towards the decimalization of the U.S. weights and measures", *Isis*, 16 (1931), pp. 266-314.

Tradução de Isabel Cristina Dias
Escola Secundária de Santo António dos Cavaleiros

Quadratura do círculo: uma solução não ortodoxa

(complemento ao artigo da pág. 25)



AB, sendo igual a metade do perímetro da circunferência, é igual a πr. Por sua vez, ***BD***, lado do quadrado, é a altura do triângulo rectângulo [***ABD***], e portanto meia proporcional entre ***AB*** e ***BC*** = ***r***. Portanto a área do quadrado é $\pi r . r = \pi r^2$

Quota de 1995

No ano de 1995 o valor da quota é de **4500$00** (3500$00 para o sócio estudante e 5000$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode optar por desconto bancário **até 31 de Janeiro.** Após esta data deve efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número ____ ____ ____ ____

Visa ☐ MasterCard ☐ Eurocard ☐

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________

__________ Data __/__/__

Assinatura ______________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ________

Nome ______________________

______________________ Tel: __________

Morada ______________________

Código Postal __________ Ano em que começou a leccionar: __________

Data de nascimento ____/____/____ Nível de ensino: __________

Escola ______________________

Localidade __________ Distrito __________

Categoria Profissional ______________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido preenchendo a ficha respectiva ou fotocópia (ver *Educação e Matemática* nº 28), juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para:

Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa — Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7166424 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice