Educação e Matemática

Nº 32

4º trimestre de 1994

Painel no ProfMat 94 (pág. 7)

A reforma dos programas de Matemática

Preço: 600$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

História e Educação Matemática
Wed 24 -Tue 30 July 1996 • Braga • Portugal

Deuxième Université d'Été Européenne
Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique

The International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics
ICME-8 Satellite Meeting

Em breve será distribuído o primeiro anúncio deste importante encontro internacional sobre História e Educação Matemática, organizado pela APM e que terá lugar na Universidade do Minho.

Obras de J. Tiago de Oliveira
Estão em publicação, pela editora Pendor, as *Collected Works / Obras* de J. Tiago de Oliveira. Já está à venda Vol. I — *Livros de Matemática*. Também está disponível o livro sobre J. Tiago de Oliveira intitulado *O Homem e a Obra*, da editora Colibri. Preços especiais para sócios da APM. Contacte a sede da APM (tel. 7166424).

Rectificação
O texto do PENSE NISTO da revista nº 31, por lapso na composição. saiu com uma frase a menos na penúltima "estrofe". Ficará assim com a correcção: "O professor muda pouco/ O professor não se põe em causa/ Os alunos põem em causa os professores/ Os pais dos alunos põem em causa o professor/ Os professores põem em causa o professor/ O Ministro põe em causa o professor/ O professor tem medo" (em destaque a frase em falta). Pedimos desculpa pelo nosso engano.

Neste número colaboraram
Alcinda Santos, Fernando Nunes, Helena Fonseca, João Filipe Matos, José Paulo Viana, Lúcia Grilo, Luis Carmelo Silva, Orlando de Freitas e Paulo Alvega. Foi ainda inserido um texto de Ubiratan D'Ambrosio.

Sobre a capa
Fotografias de Elvira Santos.

Data de publicação
Este número foi publicado em Janeiro de 1995.

nº 32
4º trimestre
de 1994

Porque é que eu gosto da Pipi das Meias Altas?

João Filipe Matos

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Alexandra Pinheiro
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Eduardo Veloso
Helena Lopes
Henrique Guimarães
Isabel Amorim
Maria João Lagarto
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 86359/95

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos
1500 Lisboa
Tel/Fax: 7166424

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Será a força, será a visão das coisas, será o recusar os *paizinhos*? Não penso de todo que tenhamos necessariamente que saber os porquês de tudo. Sou mesmo daqueles que não se preocupam muito de não saber por exemplo porque é que o actual Primeiro Ministro vai (ou não vai) continuar à frente dos destinos do País...

Claro que há porquês e porquês. Penso que como professores é fundamental *sabermos* porquê e para quê é que os nossos alunos aprendem Matemática na escola. Isso é concerteza uma forma de mantermos um grande objectivo em mente que ajuda a orientar as nossas opções como profissionais e a enquadrar e justificar algumas das decisões de conjuntura que temos necessariamente que fazer ao gerir um programa de ensino.

É claro também que os preâmbulos (quem os lê e discute?) dos programas apresentam as Finalidades e Objectivos Gerais do ensino da Matemática. Mas apostava que as razões aí apresentadas têm em geral muito pouco que ver com as razões que (imagino) a Ministra da Educação (ou a sua equipa) tem como suas.

É óbvio também que cada um de nós é capaz de apontar razões e argumentos para que se aprenda Matemática na escola. Quer essas nossas razões e argumentos sejam os dos *Standards* do NCTM (os argumentos dos americanos) quer sejam os (mesmos) argumentos dos novos programas, a verdade é que todos somos capazes de justificar que os alunos devem aprender Matemática na escola.

Mas e as razões da Ministra? Habituámo-nos durante muito tempo a avaliar a importância atribuída às coisas pelo poder através do tipo de sanção que era aplicada a quem não cumprisse. É à luz desta experiência que devemos interpretar as recentes medidas ministeriais de não deixar transitar de ano os alunos que não forem aprovados em Matemática e em Português? Que o ensino da Matemática é importante para a Ministra não temos já dúvidas. Ainda recentemente, nas prioridades dos cursos de formação contínua a contemplar pelos programas de financiamento, lá estava a Matemática à cabeça. É óvio que a importância aparentemente atribuída pela Ministra à Matemática deveria ter uma correspondência em medidas quer de política educativa quer em termos mais pragmáticos que contribuissem de facto para melhorar o ensino dessa disciplina. Por outro lado, era importante perceber a natureza da importância que a Ministra atribui à aprendizagem da Matemática. Será que vamos descobrir daí a algum tempo que as preocupações da Ministra têm muito que ver com as preocupações de natureza economicista de diversos ministros da educação em Inglaterra desde o governo de Tatcher em que foi aprovado o currículo nacional? Iremos descobrir que os poucos departamentos do Ministério que ainda dão alguma atenção aos problemas do ensino da Matemática o fazem na lógica de apoio a uma reforma curricular a *qualquer preço*?

Qual é afinal a política do Ministério em relação ao ensino da Matemática? Não se estará a preparar uma infusão (saborosa para alguns...) depois de cozinhar os novos programas na água a ferver da realidade das condições de trabalho dos professores nas escolas? Não sei porquê, ocorreu-me aquela adivinha tradicional de Cabo Verde acerca do café e que não resisto a transcrever em crioulo: "Kuza ma kuza, kru dosi, kusidu margos?" (Qual a coisa qual é ela, crua é doce cozida é amarga?).

João Filipe Matos
Universidade de Lisboa

CASIO®

CALCULADORAS PARA O ENSINO

A Casio marca líder no mercado das calculadoras, apresenta a sua linha escolar 94/95 perfeitamente adpatada a todos os níveis do ensino em Portugal.
As características, qualidade e robustez tornam as Casio imbatíveis na relação preço/benefício.
A nova linha possui modelos revolucionários em funções e preço tornando acessivel a todos o cálculo electrónico escolar.
A Casio possui programa de preços especiais para o ensino e para os professores.

BÁSICAS

HS-8/HS-5
HL-820/700

- 8 Dígitos
- 4 Operações
- Memória
- Percentagem

CIENTÍFICAS

FX-82/250

- Fracções • Trignometria.
- Estatística • Hiperbólicas
- Percentagens • Memória

FX-95

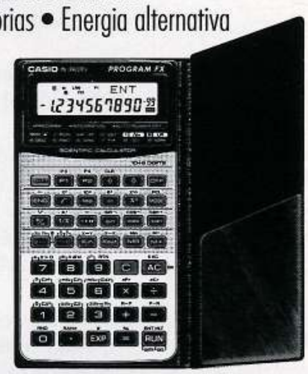
- 10+2 dígitos
- Funções idênticas à FX 82
- CÁLCULO DE EQUAÇÕES

Simultâneas até 3 incógnitas

CIENTÍFICAS AVANÇADAS ESPECIAL 10º ANO

FX-115 S

- Sistema V.P.A.M., lógica directa (Função 1º que o valor)
- Funções e sinais no visor
- 252 Funções avançadas
- Estatística a 2 variáveis
- 7 memórias • Energia alternativa



FX-3900 Pv

Ideal para o 10º Ano, a Fx-3900 Pv é programável e possui todas as funções necessárias.

- Estatística 2 variáveis
- 7 memórias • Integrais
- Fácil de programar

GRÁFICAS

FX-6300 G/7700 GE
FX-9700 GE

Revolucionárias em funções e facilidade de operação.
A FX-6300 G é o modelo económico que coloca os gráficos ao alcance de todos.
* Existe modelo para retroprojector.

REPRESENTANTE
BELTRÃO COELHO, LDA.
LISBOA • PORTO • AVEIRO • COIMBRA • SETÚBAL • BRAGA • SANTARÉM • FUNCHAL

O papel da experiência na educação (segundo John Dewey)

Fernando Nunes

No Profmat 93, na conferência plenária de Eduardo Veloso intitulada "As ideias não caiem do céu", John Dewey foi referido como alguém que influenciou o autor. Este artigo pretende dar conta de algumas ideias de Dewey sobre a educação e, em particular, sobre o papel que nela deve ter a experiência pessoal, assinalando o carácter marcadamente actual de alguns pontos de vista de um autor que os enunciou há dezenas de anos.

Estou em crer que, a par do Eduardo Veloso, haverá outras pessoas a reconhecer a influência de John Dewey nas suas ideias sobre educação. Por isso, talvez faça sentido uma breve incursão em alguns aspectos do pensamento deste filósofo americano do início do século.

A ciência, sua importância e a postura dos filósofos

Parte da obra deste autor resultou da atenção que concedeu à ciência, atenção devida ao seu reconhecimento como o campo em que a raça humana — juntamente com a tecnologia — tem obtido, nos últimos séculos, os maiores sucessos, medidos em termos de aquisição e fiabilidade de conhecimentos, resultando num domínio cada vez maior da natureza (e da sua destruição, pode-se acrescentar agora, seguros de que podemos apresentar factos justificativos). Uma tese que defendia era a de que o método científico era o único que tinha provado ser produtivo em qualquer assunto. A compreensão do meio ambiente e a possibilidade de domínio desse mesmo meio que advinham do poder que a ciência nos confere permitiu, segundo Dewey, uma vida melhor para a espécie humana. Nas suas palavras, "*o futuro da nossa civilização depende do alargamento e aprofundamento da bagagem de cada um no que diz respeito a hábitos científicos mentais*". Na sua análise, a ciência era vista como algo de dinâmico que se desenvolve a partir do levantamento de hipóteses e da experimentação, ao contrário de um corpo de conhecimentos estáticos e, principalmente, como uma actividade, um processo de descobrir coisas que tirava muita da sua força do método que emprega. Criticou a posição do filósofo enquanto alguém que observa de fora e decifra o conhecimento por observação exterior, defendendo que qualquer ser humano faz parte do mundo dos objectos, vive nele, e portanto tem de o descobrir precisamente através do seu envolvimento activo com as coisas que o rodeiam, sendo artificial a posição de alguém que se pretende desligar da realidade envolvente para melhor a analisar. Magee (1989) sintetiza a posição de Dewey sobre este assunto ao afirmar que "*o suposto conhecedor é um organismo biológico que luta pela sobrevivência — não é um espectador, mas um agente*".

De acordo com as suas ideias, que valorizavam a ciência e o método científico, Dewey atribuia à *inquirição* um papel fundamental na descoberta do conhecimento e na resolução de problemas. Da dúvida que o problema arrasta, até à chegada da solução, tem que se passar por uma inquirição bem conduzida. A inquirição é orientada pelo pensamento e pela ideia, que é um plano de acção, não existindo separação entre o pensamento e a acção.

Para Dewey "*a ciência é um conjunto sistematizado de factos e processos pelos quais o conhecimento é criado e adquirido sendo introduzido organizadamente no fluxo da experiência*". Algumas razões que apresenta para justificar que o método científico é melhor que qualquer outro podem resumir-se assim:

- as ideias são encaradas mais de acordo com a sua essência do que nos outros métodos, sendo consideradas hipóteses que têm de ser continuamente testadas a partir das suas consequências que têm de ser cuidadosamente observadas, ajudando a sua clarificação e evolução, não havendo experimentação sem uma ideia directora;
- o método inteligente manifestado no método experimental é o coração da

organização intelectual e da disciplina mental, obrigando a actividades fundamentais de reflexão, sumarização, discriminação e registo das características significativas da experiência em desenvolvimento.

Pode afirmar-se que, para Dewey, a ciência é um pilar da nossa sociedade, juntamente com a democracia considerada a expressão política dessa mesma ciência. A vida em democracia, o grande objectivo da sociedade, só pode ser conseguida se o cidadão for dirigido pela inteligência e não por palavras ou valores arbitrários. A ciência deve ajudar-nos sobre o que fazemos e como o fazemos. Para que tal seja possível é indispensável passar pela educação.

A Educação

Foi na Educação que as ideias de Dewey tiveram maior repercussão. A identificação da filosofia da educação com a filosofia da vida e do desenvolvimento, portanto com toda a filosofia, foi uma das características do seu pensamento. Não deve haver separação entre e educação e a vida. Critica os que acham que a educação deve ser uma preparação para a vida, defendendo que ela é parte constituinte da própria vida. O fim da educação é a vida progressiva em constante ampliação. Esta tese valeu-lhe as críticas de que não aponta nenhum objectivo para a educação a não ser a existência de mais educação. O processo confunde-se com o fim não sendo estabelecidas distinções ou oposições entre um e outro.

É a partir da educação que o social se perpetua: "*a reprodução e a nutrição estão para o fisiológico assim como a educação está para o social*", sendo considerada o método fundamental para o progresso e a reforma social. Sendo a educação um processo social e de vivência ligado à própria vida, afirmava Dewey em 1897, no seu Credo Pedagógico, que ela deve representar a vida presente da criança, tão real como a sua vida quotidiana em casa, no recreio ou no bairro onde vive. No mesmo documento, o estudo da ciência era considerado educativo na medida em que acar-

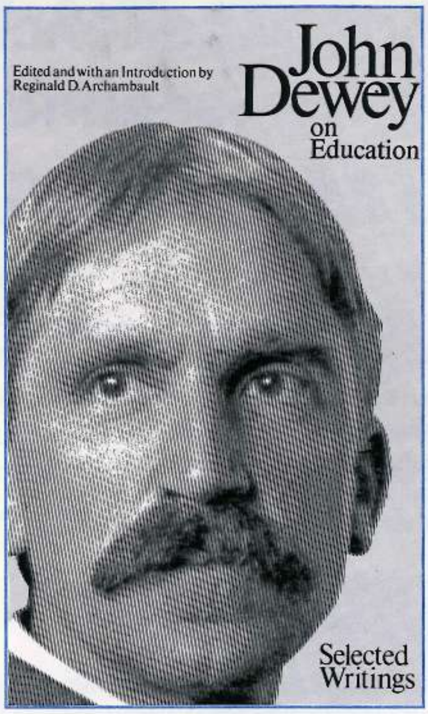


Fig. 1 — John Dewey (1859-1952)

retava o estudo das matérias e processos que fazem da vida social o que ela é na realidade.

Do anteriormente exposto, não é difícil verificar a lógica inerente à sua proposta de organização dos currículos escolares que deviam ser concebidos numa base científica, ou experimental. A educação devia ser uma permanente reconstrução da experiência de cada um, fazendo parte do todo social, como resultado da interacção do organismo com o meio ambiente. Esta interacção é feita por meio da experiência. Na realidade a sua filosofia pode ser considerada uma filosofia da experiência e a educação tem na experiência o alfa e o ómega da actividade humana. O processo e o fim da educação são uma e a mesma coisa. O "aprender a aprender" e o "aprender para toda a vida", slogans actualmente ouvidos com frequência, têm algo de Dewey na sua justificação.

A Experiência

Dewey atribui à experiência um significado lato que vai desde a realização de actividades práticas simples até ao exercício da imaginação, como por exemplo quando se lê um livro cuja acção narrativa decorre num tempo que pode ser muito diferente do actual.

A vida é considerada como um conjunto de experiências, realizadas em determinados ambientes sociais e apresentando características diversas, que fazemos e das quais sofremos efeitos, aprendendo sempre algo de novo. Então vida, experiência e aprendizagem não se podem separar. Por seu lado, a educação, como processo da reconstrução e organização da experiência, deve permitir um melhor entendimento do sentido das nossa experiências enquanto nos habilita a dirigir melhor o curso das experiências futuras.

Parece que uma das facetas mais extremada e vincada de Dewey se baseia na forma como a experiência é vista, o lugar e a abrangência que lhe é concedida. Não é difícil encontrar, nas suas obras, elementos que parecem dar crédito a esta opinião. A sua crítica ao ensino por transmissão passiva, ou o negar do valor ao que é aprendido fora do lugar real que tem na vida, assenta na base de que não está a ser tomada em consideração a experiência do aluno. No seu Credo Pedagógico, afirma que o verdadeiro centro da escola deve estar nas actividades sociais dos alunos e não nos assuntos que são estudados. Aliás, chega a negar a qualquer assunto a qualidade de ter inerente, apenas devido à sua natureza, potencialidades educativas, ao contrário de alguns psicólogos que na altura advogavam o estudo de certos assuntos considerados difíceis — o latim, a matemática ou o grego por exemplo — para se desenvolverem capacidades de resolução de problemas. Mesmo para temas por ele positivamente valorizados, Dewey aponta algumas observações, no sentido de se evitar um uso incorrecto: "*a ciência não deve ser dada como algo estático que se vai adicionar a conhecimentos anteriores...a ciência tem valor porque nos dá a capacidade de interpretar e controlar a experiência anterior*".

Alerta para o facto de os currículos não poderem ser demasiado "estreitos" por forma a impedir que a experiência individual que cada aluno tem ao chegar à escola seja tida em conta. Os seus interesses, capacidades e hábitos devem ser analisados para informarem de forma decisiva as experiências a efectuar, viabilizando as potencialidades educativas de crescimento. Numa frase, a experiência de cada aluno é que deve ser o factor determinante para a definição curricular, o que leva a concluir que o estabelecimento de objectivos específicos deve ser feito em termos das intenções dos alunos, condições locais e necessidades sociais. Não é mesmo garantido que métodos e materiais que provaram ser positivos com determinados indivíduos e em dadas situações sejam válidos noutras ocasiões.

É também interessante verificar que, já em 1897, Dewey afirmava no seu Credo Pedagógico que *"com o advento da democracia e das modernas condições industriais, é impossível perspectivar de forma definitiva o que será a civilização daqui a 20 anos"*. Daqui se pode concluir do provável falhanço do sistema educativo delineado a partir de pressupostas metas, programadas a partir de uma extrapolação cada vez mais difícil. Actualmente, esta dificuldade é enunciada com frequência. Dewey propõe que as actividades escolares devem ser parte da experiência de vida dos alunos e serem significativas para eles. Caso contrário as experiências não podem ser educativas e existe uma violação da natureza da criança, tornando duvidosos os resultados éticos.

A experiência, definida como uma interacção entre o indivíduo e o meio ambiente, é vista como um processo de continuidade. As nossas experiências, no momento presente à sua realização, levam em conta o conhecimento acumulado em experiências anteriores e devem ter a mira assestada para o futuro. São as experiências que levam em conta estes aspectos que se revelam verdadeiramente educativas e permitem o desenvolvimento e crescimento da personalidade (Fig.2).

A existência de um aspecto longitudinal (a continuidade) e um transversal (a interacção), além de servir para caracterizar a natureza da experiência, serve de base para a distinção entre as experiências educativas e as que o não são. As experiências educativas devem ter por base as experiências anteriores do indivíduo e não serem desligadas da sua realidade, devem aproveitar ao máximo as condições ambientais, potencializando-as e relacionando-se fortemente com elas e têm que ser realizadas no sentido de representarem crescimento e desenvolvimento da personalidade, tornando-se elas próprias base para futuras experiências, sistematizando e organizando o conhecimento, abrindo as possibilidades de novas experiências. Este será o único modo que a longo prazo se revelará pertinente para todos os assuntos. Estas características são comuns a todas as experiências educativas, dentro ou fora da escola, realizadas por indivíduos de todos os escalões etários.

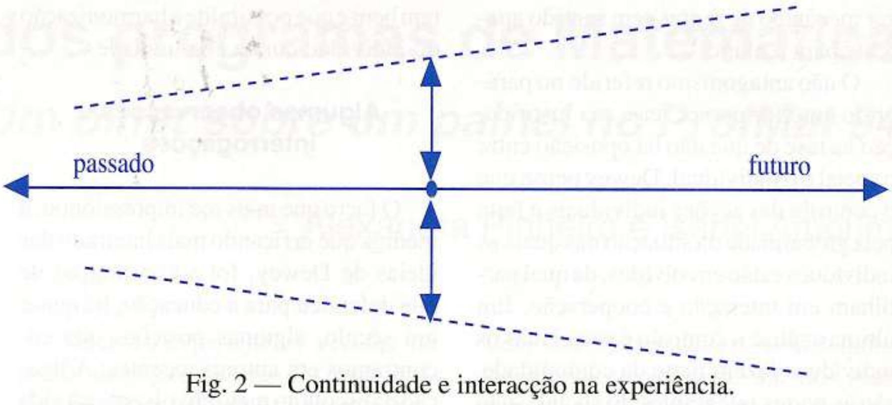


Fig. 2 — Continuidade e interacção na experiência.

O Professor, o Aluno e a Escola

Não pode haver actividade educativa sem direcção, governo ou controlo. É aqui que o professor, embora não de forma exclusiva pois o aluno deve também desenvolver as capacidades relativas a estas funções criando por exemplo hábitos de reflexão, tem um papel importante. Em termos gerais é ao professor que compete a viabilização de uma relação harmoniosa entre a individualidade de cada aluno, a sua originalidade, e o seu desenvolvimento adequado. Para isso o professor conta com um saber e uma experiência acumulada que o colocam obviamente numa posição diferente da posição do aluno. Esta experiência acumulada deve permitir que seja um ajudante do aluno na discriminação de sugestões e na efectivação de comportamentos adequados para lidar com cada um dos indivíduos, julgando se as actividades executadas levam a um desenvolvimento e crescimento no aluno, dentro dos parâmetros já explicitados, ou se são prejudiciais. É fundamental que procure saber o que se passa na mente do aluno enquanto aprende, estimulando uma relação aberta (mesmo Dewey assinala que a tarefa de saber o que se passa no interior de alguém não é de forma alguma uma tarefa fácil). A par disso, poderá tirar dados do lado activo da experiência que influencia as condições objectivas da sua realização. No entanto, chama a atenção para o facto de que não aprendemos apenas aquilo que estudamos pois a formação de atitudes e crenças, por exemplo sobre a facilidade, interesse ou carácter estético de um dado assunto, acompanham o seu estudo, tornando multifacetado o campo de atenção e de análise do professor.

Dewey pensa não existir nenhum antagonismo inevitável entre os métodos, regras e resultados trabalhados pela experiência anterior do professor e os desejos, capacidades e liberdade do aluno. O antagonismo surgirá quando o professor se portar como um chefe, revelando hábitos estreitos de autoridade, e não como um líder. O aluno é, segundo Dewey, suficientemente perspicaz para distinguir a autoridade justificada, viabilizada pelo saber e pela harmonização com a sociedade, da autoridade gratuita. O professor deve procurar que o aluno sinta que participa em algo que vale a pena, compreendendo o interesse e o significado, evitando o fazer mecânico de regras sem sentido aparente para o aluno.

O não antagonismo referido no parágrafo anterior parece ter a sua justificação na tese de que não há oposição entre o social e o individual. Dewey pensa que o controlo das acções individuais é feita pela globalidade da situação nas quais os indivíduos estão envolvidos, da qual partilham em interação e cooperação. Em última análise o controlo é social mas os indivíduos fazem parte da comunidade, são as partes integrantes do social e não se podem colocar numa posição exterior.

O professor, que representa o social com a sua experiência acumulada, não deve exercer a autoridade como expressão de um poder pessoal mas como a expressão de uma autoridade comunitária, tendo em vista o interesse do grupo em que está inserido. A planificação do professor deve ser suficientemente flexível, para permitir a liberdade de actuação a cada aluno, mas firme, o bastante, para direccionar o contínuo desenvolvimento da experiência. Este é um equilíbrio que, reconheçamos, não é nada fácil de conseguir.

Uma escola deve ser uma comunidade integrada por todos os que nela exercem as suas actividades, em permanente ligação com a vida, e onde as experiências dos alunos se desenvolvem, reconstruindo e rearranjando as experiências anteriores. Será através do estudo e de actividades em conjunto que desenvolverão as suas capacidades, muito especialmente a de desenvolver hábitos de pensamento que podem ser utilizados nas várias situações da vida. Existem algumas características que a escola deve ter, devido à sua especificidade:

• na escola deve haver um ambiente simplificado, em comparação com a sociedade no seu todo, pois trata-se de indivíduos com um nível etário particular e em determinados estádios de desenvolvimento;

• na escola deve existir uma espécie de ambiente purificado, eliminando os aspectos negativos existentes na sociedade que Dewey associa aos aspectos não democráticos;

• na escola deve existir um ambiente de integração social onde todos se sintam bem e que possibilite a harmonização do indivíduo com a comunidade.

Algumas observações e interrogações

O facto que mais me impressionou, à medida que ia ficando mais inteirado das ideias de Dewey, foi a constatação de que defendeu para a educação, há quase um século, algumas posições que encontramos em autores recentes. A ligação da escola ao meio envolvente e à vida dos alunos, a utilização do pensamento reflexivo, a adopção de uma metodologia baseada na resolução de problemas abertos, ou o carácter significativo que as actividades escolares devem ter para quem as realiza são alguns exemplos, entre vários que poderiam ser citados. No caso da educação matemática, um exemplo flagrante é o da resolução de problemas. A partir do início dos anos 80, um movimento crescente tem vindo a defender que o ensino da matemática se deve basear na resolução de problemas desafiadores — oposto a rotineiros — para os alunos. Pode-se facilmente identificar, na forma como Dewey vê a experiência educativa, a mesma tese. Foi uma das primeiras personalidades ligada à educação que definiu fases a seguir na resolução de problemas.

Outra faceta que Dewey apresenta de forma marcada é a sua aversão às dicotomias exclusivas, que revela na forma como as tenta ultrapassar. Esta posição levanta algumas dificuldades em compreender a coerência do seu raciocínio. Por exemplo, a não oposição do social e do individual, justificado pelo facto da sociedade ser formada pelas várias individualidades, terá em conta a diversidade das individualidades? Se as partes constituintes são diferentes, será que o todo é homogéneo para todos? Não parecem ser questões de resposta simples.

Alturas há em que Dewey é perfeitamente claro. Quando aponta para objectivo da educação a continuação da educação, destrói a diferença meios/fins. Pode não se concordar com esta posição, no entanto ela é claramente assumida. Aliás os meios são muito valorizados por Dewey, quer em educação quer na ciência. Basta atentar nas seguintes citações:

• *"Crescimento em juízo e compreensão é, essencialmente, crescimento na capacidade de formar objectivos e de seleccionar e arranjar meios para a sua realização"* (Experience and Education).

• *"Tanto no tempo como na importância, a segunda parte* [o conjunto sistematizado de processos] *vem primeiro: a ciência enquanto método precede a ciência enquanto assunto"* (Science as Subject-matter and as Method).

Pode dizer-se que à máxima de ética duvidosa dos fins justificarem os meios, Dewey opõe que os fins são os meios.

Não há dúvida que as ideias de Dewey podem ainda ser um ponto de partida para analisarmos o que se passa nos nossos dias. Que dizer, por exemplo, quando contrapomos a existência de programas nacionais e normativos à individualidade própria e à experiência única que ele reconhece em cada aluno? E quando comparamos o grau de liberdade que os actuais programas concedem aos professores com a indispensável flexibilidade que, segundo Dewey, cada professor deve poder ter para conseguir respeitar a experiência dos alunos?

A sua visão de que nos modificamos constantemente a partir das experiências que vivemos, sujeitos a uma mudança permanente, é algo com que me sinto identificado. A arte de viver passa pelo reconhecimento disso. Fica-me a sensação de que as ideias de Dewey sobre educação estavam avançadas para o seu tempo e, quiçá, até mesmo em relação ao que se passa no nosso.

Referências

Dewey, John (1963). *Experience and Education*. New York: Collier Books.

Dewey, John (1964). *On Education - Selected Writings*. Reginald D. Archambault (Ed.). Chicago: Chicago University Press.

Dewey, John (1965). *Vida e Educação* (trad. de *The Child and The Curriculum* e *Interest and Effort in Education*). São Paulo: Edições Melhoramentos.

Magee, Brian (1989). *Os Grandes Filósofos*. Lisboa: Editorial Presença Lda.

Fernando Nunes
Escola C+S Marquesa de Alorna

A reforma dos programas de Matemática

Um olhar sobre um painel no ProfMat 94

Alexandra Pinheiro e Isabel Amorim

Após dois anos de generalização da reforma educativa (três, no caso do 1º ciclo) é tempo de reflectir e discutir algumas questões fundamentais, em particular no que diz respeito à reforma dos programas de Matemática. E foi isso mesmo que sucedeu durante a última edição do ProfMat, em Leiria.

Algumas experiências vividas no âmbito da implementação dos novos programas deram origem a diversas comunicações e sessões práticas durante este encontro. Os temas abordados estiveram, em geral, relacionados com novas metodologias de trabalho na sala de aula, com os conteúdos de aprendizagem (onde a Geometria teve um lugar de destaque) ou com a avaliação. Além destas actividades, houve também grupos temáticos (funcionando em dois períodos de duas horas cada) entre os quais cinco onde se discutiram questões ligadas à generalização e implementação dos novos programas, respectivamente, nos 1º, 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico, no Ensino Secundário e, ainda, na disciplina de Métodos Quantitativos.

No penúltimo dia de trabalhos teve lugar um painel moderado por João Filipe Matos (JFM), em que os elementos da mesa eram precisamente aqueles que tinham estado envolvidos na coordenação dos grupos temáticos acima referidos, a saber: Lurdes Serrazina (LS) — 1º Ciclo, Albano Silva (AS) — 2º Ciclo, Guilhermina Lobato (GL) — 3º Ciclo, Adelina Precatado (AP) — Ensino Secundário e Cristina Loureiro (CL) — Métodos Quantitativos.

Neste artigo, tentaremos apresentar aos leitores uma visão do que aconteceu neste debate, salientando as ideias que nos pareceram fundamentais assim como algumas das contribuições que vieram dos grupos temáticos e que foram trazidas pela voz dos seus coordenadores e participantes da mesa do painel.

Uma primeira grande questão é o balanço global que se faz da reforma dos programas de Matemática; tema necessariamente abrangente e que conduz a outras questões. Desta forma, após terem dado a sua opinião e contribuído com a sua interpretação pessoal daquilo que aconteceu em cada um dos seus grupos temáticos, os elementos da mesa iniciaram uma discussão sobre temas mais específicos. Foi bastante debatida uma preocupação comum a todos, que se refere ao comprimento e cumprimento dos actuais programas, tendo surgido opiniões divergentes e sugestões de propostas alternativas, algumas das quais bastante polémicas. Além disso discutiram-se questões relacionadas com a Área-Escola, a formação de professores e a (in)existência de condições adequadas à implementação da reforma. Finalmente, cada um dos membros da mesa ofereceu-nos a sua visão pessoal de quais são as perspectivas para o futuro.

Que balanço?

Parece ser consensual que a reforma, no seu início, suscitou grandes expectativas nos professores e bastante entusiasmo. No entanto, nota-se hoje em muitos professores algum desencanto e até alguma tristeza.

Em relação ao 1º Ciclo, há dificuldade em afirmar se existe ou não reforma neste momento. No grupo temático sobre este ciclo de ensino, segundo LS, os participantes foram de opinião que aquilo que existe, são algumas ilhas que, espera-se, venham a alargar-se. Há uma grande vontade e existem já tentativas de fazer algo diferente; contudo os professores do 1º ciclo debatem-se também com grandes dificuldades. Por exemplo, foi apontado que os professores do 1º ciclo, de uma forma geral, possuem poucos conhecimentos de Matemática, o que constitui um obstáculo à inovação. Além disso, os professores encontram-se normalmente muito sozinhos, embora haja esforços no sentido de contrariar esta tendência e trabalhos bastante interessantes desenvolvidos por equipas de professores, inclusive oriundos de escolas diferentes.

Apesar das muitas críticas que podem ser feitas a estes novos programas, na opinião de AP (e dos participantes no grupo temático relativo ao Ensino Secundário), há também aspectos positivos que vale a pena referir. Assim, deve salientar-se o facto de se começar a encarar a actividade do aluno de uma forma diferente, existindo um maior incentivo à experimentação e à descoberta, mais *fazer* Matemática em vez de apenas receber e absorver conteúdos. Neste sentido, a resolução de problemas, a utilização de novas tecnologias de informação, a ligação da Matemática com a realidade são vistos como valiosos contributos para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Uma outra questão que foi realçada como importante e diferente nestes programas é o novo peso que é dado a alguns conteúdos como, por exemplo, a Estatística, as Probabilidades e a Geometria, embora em relação a esta última haja críticas à forma como foi introduzida. AP destacou ainda a preocupação em diversificar os conteúdos de aprendizagem, estendendo-os a três vertentes: atitudes, capacidades e conhecimentos. Mas, infelizmente, nem tudo vai bem e as dificuldades abundam. Com efeito, os professores do Ensino Secundário estão muito preocupados com o que está a acontecer, nomeadamente, com a extensão dos programas, com os diversos entendimentos que existem do que é cumprir o programa e com a visão do que é o professor, fundamentalmente com a visão do Ministério que encara o professor

> "como mero funcionário, que tem que cumprir normas, esquecendo toda a complexidade do processo educativo e, portanto, o professor enquanto um profissional activo e actuante."

A formação de professores e os recursos educativos disponíveis também estiveram presentes nas discussões realizadas neste grupo temático. Uma das ideias que surgiu foi a criação de Laboratórios de Matemática e, apesar de não existir unanimidade em relação àquilo que esses laboratórios deverão ou poderão vir a ser, é consensual que ensinar e aprender Matemática não é possível sem recursos. Emerge daqui que há necessidade de se efectuar um debate mais aprofundado sobre estas questões.

No caso particular da disciplina de Métodos Quantitativos, foi dada uma nota positiva; não em relação ao programa da disciplina (classificado como francamente mau, em especial, no que diz respeito aos conteúdos), mas por os professores terem o privilégio de possuir uma grande autonomia, pois não sentem as pressões de cumprimento dos programas por causa do ano seguinte. E, como consequência, existem já experiências de trabalho gratificantes (ver artigo "Métodos Quantitativos para os alunos do Ensino Artístico: proposta de adaptação do programa" na ***Educação e Matemática*** nº30). Como disse CL,

> "há professores que agarraram a última oportunidade para trabalhar com alunos uma Matemática humanizada e humanista."

Os aspectos considerados mais positivos são as novas metodologias, a utilização de computadores e calculadoras, a possibilidade de incentivar o gosto pela Matemática e pelo raciocínio com métodos e instrumentos matemáticos. Os conteúdos que constam do programa desta disciplina foram considerados completamente desadequados aos alunos a quem se destinam, possuindo até algumas características inadmissíveis, como por exemplo o facto de os alunos de artes terem sido completamente esquecidos — o programa de Métodos Quantitativos não possui qualquer referência à Geometria.

A situação vivida na disciplina de Métodos Quantitativos ilustra uma diferença fundamental (apontada por JFM) com a qual todos os professores se deparam no seu dia a dia — os programas, isto é, os documentos publicados pelo Ministério da Educação são uma coisa e a sua implementação é outra, possui um âmbito totalmente distinto.

As preocupações e dificuldades nos 2º e 3º Ciclos não são muito diferentes das acima mencionadas. AS (2º Ciclo) apontou algumas contradições existentes relativamente à Área-Escola, afirmando que

> "a reforma tinha uma das suas bandeiras mais bonitas na Área-Escola e, ontem, no grupo temático, houve colegas que estavam animados com a experiência mas houve outros colegas que diziam exactamente assim: para mim a Área-Escola está morta. Não há hipótese."

No grupo temático do 3º Ciclo, as dinamizadoras optaram por auscultar as opiniões dos presentes através de um questionário. As consequências mais significativas da reforma dos programas de Matemática neste ciclo de estudos foram indicadas como sendo uma atitude (por parte dos alunos) mais positiva em relação à Matemática e o desenvolvimento da capacidade de raciocinar (em Matemática). Os problemas mais citados foram (além da extensão dos programas), os que estão relacionados com a avaliação e com a Área-Escola. Quando os professores foram solicitados a indicar uma palavra chave que, na sua opinião, caracterizasse a experiência vivida com a implementação dos programas, as palavras que surgiram foram: insegurança, desencanto, mudança, reformulação e aliciante.

O que é cumprir o programa?

Como consequência da extensão dos programas, surgem diferentes versões do que é cumprir o programa. E há a do Ministério da Educação, para quem cumprir o programa é, claramente, cumprir os conteúdos (será possível?), ou seja, "um terço" dos objectivos propostos.

Afinal, o que é cumprir o programa?

Devido à sua extrema complexidade e na tentativa de esclarecer o mais objectivamente possível esta questão (e porque os professores estão muito preocupados), este foi um dos assuntos que dominaram o painel.

Uma conclusão é imediata, não se consegue cumprir o programa nas suas três vertentes (atitudes, capacidades e conhecimentos), sendo esta dificuldade mais acentuada nos ciclos terminais.

Neste ponto, houve opiniões divergentes, para AS o não cumprimento dos programas prende-se com a impossibili-

dade de se atingir os objectivos globalmente propostos. No entanto, na sua perspectiva, se esquecermos atitudes e capacidades, é fácil cumprir os conteúdos matemáticos. AP apresentou uma visão distinta. Na sua opinião, nem isso é viável, não é possível cumprir o programa, mesmo que se pense apenas em conteúdos. E os alunos? Será que, do seu ponto de vista, os conteúdos estão a ser cumpridos quando o professor os sumaria?

"[...] porque quando é que nós consideramos que cumprimos os conhecimentos? Quando os escrevo no sumário? Se for isso, pronto, até podemos sumariar à-vontade. [...] Eu penso que hoje os professores não pensam que se cumpriu o programa só porque se sumariou."

Por outro lado, GL sugeriu que seria impossível cumprir os programas, mesmo que estes tivessem a extensão adequada, pois na sua opinião, nestes primeiros três anos, o professor "ainda está a fazer o programa".

No 1º ciclo esta problemática é vivida de modo diferente. Segundo LS é difícil cumprir o programa neste ciclo face às metodologias que parecem estar subjacentes, com as chamadas "actividades recorrentes dos suportes de aprendizagem".

Na disciplina de Métodos Quantitativos esta questão não se coloca porque não tem continuação e o professor não está sujeito às pressões referidas anteriormente. Portanto, tem hipótese de fazer programas alternativos dando, naturalmente, só um capítulo ou dois, mas o importante, segundo CL, é que as pessoas envolvidas gostem.

Esta situação dos Métodos Quantitativos conduz à pergunta: será que na disciplina de Matemática não conseguimos realizar um trabalho deste tipo? Entre as várias razões apontadas, destacamos a pressão que se exerce sobre o professor, resultante do papel decisivo que a Matemática assume (disciplina selectiva para o acesso ao Ensino Superior) na vida dos alunos e, mais uma vez, a extensão dos programas. Estes factores explicam interpretações do programa que privilegiam os conteúdos em detrimento das finalidades e objectivos e impedem o professor de inovar.

Para que tal não aconteça, quais são as alternativas aos actuais programas?

No estudo realizado por Henrique Guimarães e Fernando Nunes (ver artigo "Como vamos com os Novos Programas? O que dizem os professores?" na ***Educação e Matemática*** nº31), muitos dos professores inquiridos propõem que se retire a Geometria e, no 2º Ciclo, a Estatística. Se um dos aspectos mais significativos dos programas é, justamente, a integração da Estatística e um novo relevo dado à Geometria, qual será o motivo que induziu esses professores a assumirem esta posição?

AS, respondendo à questão acima, colocada por JFM, justifica:

"[...] no 2º Ciclo, onde os professores sentem mais insegurança é na Geometria, porque nunca a deram, pois aparecia no final dos programas e nunca era trabalhada. A Estatística, porque é um novo tema, obriga de alguma forma a um trabalho activo com os alunos. O tema só por si parece que impõe logo um conjunto de metodologias que dão insegurança aos professores."

A interrogação "Que alternativas aos actuais programas?" levanta polémica e isso reflectiu-se no painel, quanto aos programas do Secundário. CL sugeriu:

"Proponho que se retire todo o tipo de programa do 12º ano e se trabalhe os três últimos anos do Secundário como deve de ser, ou seja, os programas dos 10º e 11º anos. Isto se calhar é aceitável, não choca com grandes alterações. [...] No 10º e no 11º, se o professor não estiver pressionado, se calhar, até consegue fazer algumas coisas diferentes. Em vez de matarmos já estas experiências, que poderão ser o princípio de novos programas daqui a algum tempo, deixemos espaço para elas se desenvolverem. A única forma possível, neste momento, de isto acontecer é cortar uma coisa da parte de cima, porque começar a mexer cá em baixo é completamente impossível. [Esta] não é de forma alguma a minha opinião sobre os programas, é a única coisa que eu penso que é possível fazer neste momento para não matar completamente toda a reforma e não matar completamente toda a possibilidade de, daqui a algum tempo, as coisas serem diferentes."

GL afirmou de imediato:

"Discordo completamente da sugestão da Cristina, mas percebo. A questão não é tirar um ano ou tirar este capítulo ou aquele. Eu penso que temos de investir muito em tentarmos ser capazes de gerir o programa e pensarmos que isso faz parte da nossa profissão de professor."

Na continuação deste debate e reforçando a ideia de CL, AP declarou:

"Eu subscrevo o que disse a Cristina. Aquilo que eu vejo como possível que o Ministério possa vir a fazer neste momento é: ou cortar no 12º ano, ou tirar uns bocadinhos aqui e outros acolá, um ponto das funções, mais um ponto [de outro sítio qualquer]. De facto, [esta segunda hipótese] não faz qualquer sentido. [...] É preciso cortes grandes porque a experiência tem demonstrado isso e portanto, no imediato, para resolver um problema que está em cima da mesa, hoje é fundamental cortar-se o programa do 12º ano. Pronto, é isso que eu defendo. Outra coisa é uma reflexão séria sobre o que se passou nestes anos da experiência e já de generalização e pensar-se que alterações é que deverão ser introduzidas nos programas."

Do que se acabou de expor fica a sensação de que a estratégia que foi seguida na elaboração dos novos programas, apenas reflectiu superficialmente um conjunto de ideias sobre o que poderia ser o ensino da Matemática para todos os alunos das nossas escolas, tanto no que diz respeito a objectivos, como a métodos. É indispensável que, num futuro próximo, se realizem mais debates com professores e outras entidades, sobre as alterações que podem e devem ser efectuadas.

Que condições? Que recursos?

Já foi acima referido a convicção geral de que hoje não é possível ensinar e aprender Matemática sem os recursos adequados. Fica-nos então a interrogação: que condições seria necessário implementar com vista à viabilização da reforma? Segundo JFM,

"a reforma dos programas de Matemática e a implementação dos novos programas não pode ser descontextualizada da reforma mais geral e de outras coisas mais gerais, é uma questão social e política, não é uma questão estritamente curricular".

Na opinião de AP, as decisões quanto às condições necessárias para se trabalhar (recursos materiais, acções de formação de professores, etc.) não devem ser tomadas à priori; pelo contrário, "as condições vão-se criando", não têm que existir todas desde o início. Construir algo diferente demora um certo tempo e é preciso ter alguma ideia do que é que se quer construir, do que é que se quer mudar. As escolas e os grupos de Matemática deveriam fazer uma reflexão e discutir os projectos a desenvolver. Os professores deveriam ser incentivados a apresentar propostas (ao próprio Ministério, que na opinião de AP deveria assumir a responsabilidade de disponibilizar uma verba para recursos) e, com base nisso, as escolas iriam sendo equipadas conforme "aquilo que os professores estivessem dispostos a fazer". Nesta intervenção de AP, a ideia dos Laboratórios de Matemática foi novamente referida. Em relação à formação de professores também não se pode pensar em oferecer acções sobre um determinado tópico para todos os professores, devem ser estes a sentir essa necessidade. Não pode haver um modelo de formação como o que tem existido e que, na opinião de AP, nada tem a ver com a reforma, é conjuntural. É fundamental haver uma resposta às necessidades concretas dos professores. No grupo temático do 1º Ciclo, esta questão também tinha sido discutida e a opinião praticamente unânime foi a de que não é com cursos no âmbito do FOCO que se resolve o problema da Matemática, salientando-se também a necessidade da existência de projectos de trabalho concebidos e desenvolvidos por equipas de professores. AS referiu ainda a importância da divulgação de trabalhos e projectos junto de outras escolas, por forma a que os professores possam aprender uns com os outros.

E daqui a 30 anos?

A questão final colocada a todos os elementos da mesa do painel foi formulada em termos de perspectivas para o futuro. Numa análise rápida e simples, o moderador afirmou que a última grande reforma tinha ocorrido há 30 anos atrás e que, portanto, poderíamos pensar na hipótese de a próxima reforma ser também daqui a 30 anos. E perguntou o que é que os participantes antecipariam em relação a essa reforma.

Segundo GL a próxima reforma não será com certeza daqui a 30 anos e talvez possamos encarar a actual reforma como uma preparadora da seguinte; na medida em que nos deu oportunidade de fazer certas coisas, aprender e crescer com as experiências vividas.

CL chamou a atenção para o facto de, daqui a 30 anos, serem professores aqueles que agora são alunos. E, se algo não for feito entretanto no sentido de melhorar a actual reforma, corre-se o risco de nunca mais se conseguir recuperar em certos aspectos fundamentais. Citou, por exemplo, o caso da Geometria. Há professores recém formados que "entram completamente em pânico" quando têm que trabalhar com os seus alunos em tópicos de Geometria, porque são pessoas que, na sua formação, não tiveram qualquer aprendizagem de Geometria.

"Eles não têm culpa absolutamente nenhuma disto; a culpa é nossa, ou dos professores que tiveram, ou da reforma, ou de outra coisa qualquer. [Portanto, se nada for feito agora], daqui a 30 anos estaremos exactamente na mesma."

Respondendo à questão colocada pelo moderador, AP sugeriu que

"talvez valha a pena não esperar os 30 anos [...], só se não esperarmos por essa reforma, é que talvez tenhamos algumas condições de chegarmos daqui a 30 anos a uma situação em que os professores sejam encarados como profissionais mais actuantes, mais responsáveis, no centro do processo educativo e capazes de procurar sempre a inovação."

Na sua intervenção final, JFM recordou que:

"a APM nasceu com a reforma, cronologicamente, isto é, a APM nasce em 84, 85 e 86, ao mesmo tempo que a Lei de Bases é aprovada e se inicia alguma discussão em termos de reforma. [Poderíamos interrogarmo-nos sobre] o que teria acontecido se a APM tivesse nascido em 75 ou 76 [...] e a reforma fosse de facto dez anos depois da sua fundação, [...] quais poderiam ter sido as influências deste facto na reforma dos programas de Matemática — é bom não esquecer que muitos dos traços que aparecem nos novos programas são [resultado de trabalho feito] no âmbito da APM ..."

[...]

"nós temos influência sobre a próxima reforma, que eu vejo de uma forma dinâmica e não estática. [O que vai acontecer não é] de repente, em dois mil e não sei quantos, haver uma dada reforma. Nós temos influência nisso, não são só os orgãos dirigentes da APM ou algum grupo; nós influenciamos as pessoas que tomam decisões e é importante manter essa ideia viva."

Alexandra Pinheiro
Esc. Sec. Marquês de Pombal
Isabel Amorim
Esc. Sec. D. Pedro V

"Um quadrado e dez das suas raízes..."

Paulo Alvega

"Um quadrado e dez das suas raízes é igual a trinta e nove dirhems. [Qual é a sua raíz?]."
Al-Khwarizmi, séc. IX.
Sobre a resolução geométrica de equações polinomiais pelos árabes.

Há algum tempo, um amigo dizia-me, com indisfarçável orgulho, que alguns anos após ter frequentado o liceu ainda se lembrava da fórmula resolvente e da sua aplicação na resolução de equações do 2º grau, como se assim mostrasse ter sido então um aluno de sucesso. Este episódio ilustra como a dita fórmula e as equações são indissociáveis e como a componente algébrica na resolução de equações é praticamente esmagadora, escondendo muitas vezes outros aspectos. Ora vejamos, nunca se perguntou, de onde se originou tal fórmula? Ou como se resolveriam as equações antes da sua utilização?

Tomemos como exemplo os árabes e a forma como no séc.IX o famoso matemático e astrónomo de Bagdad, Muhamad Ibn Músã Al-Khwarizmi, no seu livro *Al-kitab al-muthasar fihisab al-jabr wa-l-muqabala*, explicava as estratégias possíveis para a resolução de equações do 2ºgrau através de processos geométricos.

Note-se por curiosidade a origem árabe, geralmente aceite, das palavras álgebra (al-jabr) e algoritmo (latinização do nome Al-Khwarizmi, na tradução latina do título do livro *Algoritmmi de Numero Indorum*). O próprio título, literalmente *Ciência da restauração e redução*, alude às mudanças de membro e às eliminações de termos iguais em membros opostos. A álgebra de Al-Khwarizmi é retórica (utiliza-se neste artigo a notação actual, embora no original até mesmo os algarismos apareçam escritos por palavras) e trata apenas de soluções e coeficientes positivos. Nos seis capítulos deste livro são analisadas regras para a resolução dos vários tipos de equações, a

فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه(٢) أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة .

"Quanto aos quadrados e às raízes, que igualam o número, é como quando tu dizes: um quadrado e dez das suas raízes igualam trinta e nove dirhems. O seu significado é que todo o quadrado, se tu lhe juntas o equivalente a dez das suas raízes, [é tal que] atinge trinta e nove.
O seu processo [de resolução] consiste em dividir as raízes por dois, e é cinco no problema. Multiplica-lo por si mesmo e será vinte e cinco. Junta-lo a trinta e nove. Isso dará sessenta e quatro. Tomas então a raíz quadrada que é oito e tiras-lhe a metade [do número] de raízes e é cinco. Restam três e é a raíz do quadrado que procuras e o quadrado é nove."
Al-Khwarizmi, *Resumo do cálculo pela Jabr e pela Muqabala*.

saber, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 = bx + c$ a partir de três quantidades: quadrados, raízes e números (representadas respectivamente por x^2, x e números)

Por exemplo, o capítulo IV inclui três formas diferentes (ver uma delas na caixa da página anterior) para explicar a resolução do caso: quadrados e raízes igual a números, i.e., $ax^2 + bx = c$.

Assim, a estratégia apresentada para a resolução da equação *um quadrado e dez das suas raízes é igual a trinta e nove* ($x^2 + 10x = 39$), era a seguinte:

1. Traçar um quadrado [ABCD] de área x^2. (ver fig.1A)
2. Traçar dois rectângulos de área $5x$. (ver fig.1B)
   (nota: $5x + 5x = 10x$)
3. Obtém-se um segundo quadrado de área 25, sendo a área da parte sombreada $x^2 + 10x$, portanto 39 unidades.(ver fig.1C)
4. Assim o quadrado [AMNP] tem área total de 64 unidades, sendo o lado igual a 8 unidades. Concluimos que uma raíz, x, mais 5 unidades dão o lado deste quadrado, igual a 8. Então a raíz (positiva) é 3. Para obter a outra raíz (-13) basta fazer $c = 3x$ ou $-b = 3 + x$, mas os árabes não a reconheciam.

(Proposta: resolver as equações $x^2 + 4x = 12$ e $x^2 + 12x = 64$ por este método).

Para o caso quadrados e números igual a raízes ($ax^2 + c = bx$), Al-Khwarizmi apresenta um outro esquema geométrico de resolução. Tomemos como exemplo a equação *um quadrado e vinte e um é igual a dez das suas raízes* ($x^2 + 21 = 10x$). O processo é o seguinte:

1. Traçar o quadrado [*ABCD*] de área x^2. (ver fig. 2A)
2. Traçar o rectângulo [*BCEF*] de área 21. (ver fig. 2B)
3. O rectângulo [*ADFE*] terá área $x^2 + 21$ ou seja $10x$, então $\overline{AF} = \overline{DE} = 10$. (ver fig. 2C)
4. Bissectar [*AF*] em *G* (portanto $\overline{GF} = 5$)

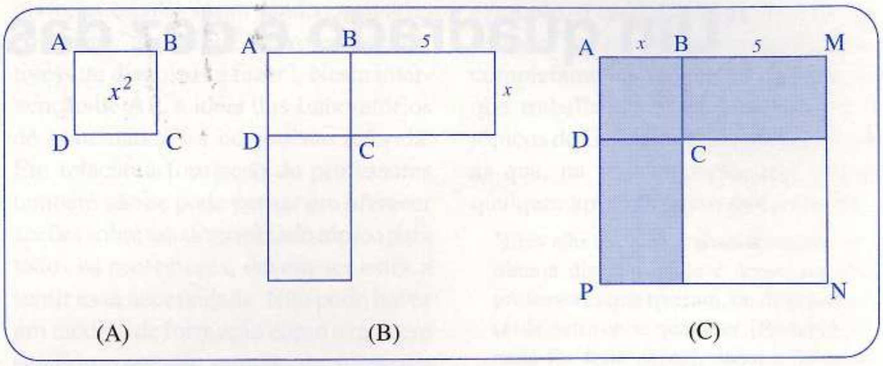


fig. 1

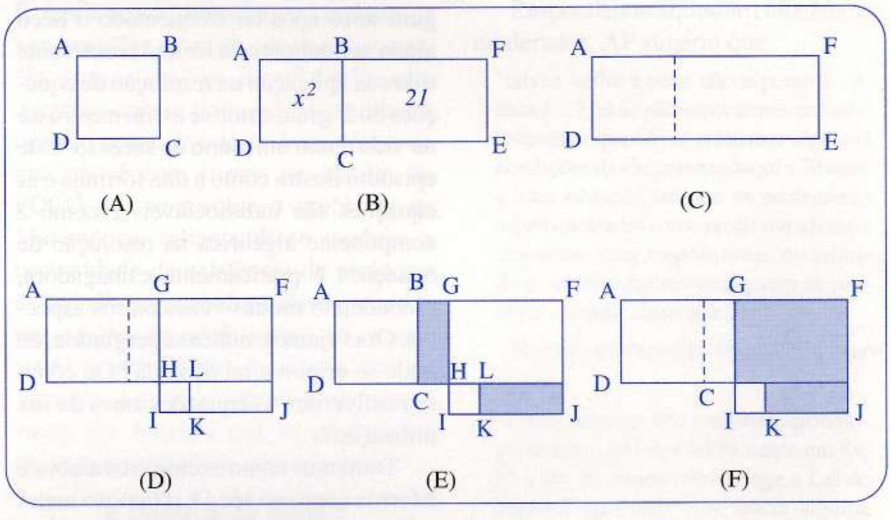


fig. 2

e prolongar [*GH*] até obtermos um quadrado [*FGIJ*]. (ver fig. 2D)

5. Traçar [*LK*] de modo que [*HLIK*] seja quadrado. Por construção, as áreas de [*BGHC*] e [*LEJK*] são iguais. (ver fig. 2E)
6. A área sombreada é 21 e a área de [*GFJI*] é 25 (5×5), de onde resulta que [*HLKI*] tem área 4. (ver fig. 2F)
7. Sendo $\overline{HI} = 2 = \overline{CH}$ e $\overline{DH} = 5$, então $\overline{DC}$ (uma raíz) é igual a 3 (uma das soluções).

(*Proposta*: com a mesma estratégia, resolver $x^2 + 5 = 6x$ e $x^2 + 15 = 8x$)

Quanto às equações cúbicas, Omar Khayam (1050-1122) propõe na sua Álgebra soluções geométricas (aliás, acreditava na não existência de soluções aritméticas) utilizando a intersecção de cónicas, método já utilizado pelos gregos Menecmo e Arquimedes, e pelo árabe Al-Hazem, mas que Khayam generaliza.

Para o caso $x^3 + bx = c$, por exemplo, Khayam utiliza uma parábola e uma circunferência, como indicado na fig. 3.

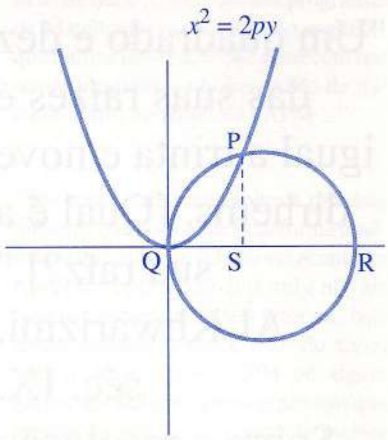


fig.3

A circunferência e a parábola ficarão definidas se relacionarmos $\overline{QR}$ e $2p$, respectivamente, com os coeficientes da cúbica b e c, sendo $P(x,y)$ o ponto de intersecção (distinto da origem) das duas curvas e solução da equação.

Utilizaremos notações modernas para encontrarmos essas relações.

Como P está na parábola, $x^2 = 2py$ ou $\frac{2p}{x} = \frac{x}{y}$. Como P está na circunferência, y é meio proporcional entre x e $\overline{QR} - x$, ou $\frac{x}{y} = \frac{y}{\overline{QR} - x}$.

Então

$$\frac{4p^2}{x^2} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{\left(\overline{QR} - x\right)^2} = \frac{x}{\overline{QR} - x}, \text{ pois}$$

$y^2 = x\left(\overline{QR} - x\right)$ (equação da circunferência). Portanto $x^3 = 4p^2\overline{QR} - 4p^2x$ ou $x^3 + 4p^2x = 4p^2\overline{QR}$. Daí $4p^2 = b$ ou $2p = \sqrt{b}$ e $4p^2\overline{QR} = c$ ou $\overline{QR} = \frac{c}{b}$, relações que pretendíamos encontrar.

Na próxima vez que falar da fórmula resolvente, a aplicar ou tratar da resolução de equações, pense um pouco nos processos geométricos propostos pelos árabes e se se justificar lembre que a fórmula é muito prática mas não é tudo...

Já agora, note que não se respondeu à questão quanto ao aparecimento da fórmula resolvente. Um desafio: procure descobrir a sua origem e o seu enquadramento histórico-matemático.

Nota: O texto em árabe foi tirado do livro Histoire d'Algorithmes, de Jean-Luc Chabert e outros autores, da editora Belin.

Bibliografia

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press

Boyer, C.(1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons Inc.

Struik, D.J. (1987). *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva - Publicações Lda.

Paulo Alvega
Esc. Sec. Padre Alberto Neto
Queluz

ICME 8
SEVILLA 1996

8º Congresso Internacional de Educação Matemática

14 a 21 de Julho de 1996

Transcrevemos partes do texto incluído no primeiro anúncio deste importante Congresso:

O Comité Nacional Espanhol do 8° Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME-8) em nome da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) e da Federação Espanhola de Sociedades de Professores de Matemática, tem o prazer de anunciar que o referido Congresso terá lugar em Sevilha, Espanha, de 14 a 21 de Julho de 1996. Os anteriores ICME'S tiveram lugar em Lyon (França), Exeter (Reino Unido), Karlsruhe (Alemanha), Berkeley (USA), Adelaida (Austrália), Budapeste (Hungria) e Quebec (Canadá) sob os auspícios da ICMI, uma Comissão da União Matemática Internacional (IML).

O ICME-8 pretende continuar esta série de Congressos com o objectivo de ampliar o desenvolvimento da educação matemática para melhorar a aprendizagem e o ensino da Matemática. Convidamo-lo a participar no ICME-8, em cujo programa se incluirá uma ampla variedade de actividades científicas e um vasto programa cultural e social para os congressistas e acompanhantes, e onde terá a oportunidade de trocar opiniões e discutir novas ideias sobre os itens da educação matemática, num contexto internacional.

Programa

O ICME-8 conterá um rico programa científico que cobrirá as mais importantes áreas da educação matemática e fará frente aos cruciais problemas que possam ser de interesse para os 3500-4000 participantes que esperamos participem neste Congresso.

As principais actividades incluirão Conferências plenárias e ordinárias, Grupos de Trabalho, Grupos Temáticos, Mesas Redondas, Apresentações Nacionais, Comunicações breves e Projectos. Haverá também exposições de livros, software e diversos materiais para o ensino. Os Grupos de Estudo do ICMI e os organizadores dos distintos Seminários do ICMI contribuirão no programa apresentando relatórios sobre as suas actividades. Também se realizarão encontros especiais (Assembleia do ICMI, Associações, Revistas, etc.). Cada participante receberá um exemplar das Actas do Congresso.

As línguas oficiais do Congresso serão a Espanhola e a Inglesa. Não obstante, a maioria das sessões realizar-se-ão em inglês. Distintas informações, serviços e traduções estarão disponíveis em outras linguas.

No boletim APM Informação nº 22 sairam algumas informações sobre este Congresso. A direcção da APM tem estado em contacto com a Sociedade Andaluza de Educação Matemática THALES no sentido de conseguir condições especiais de inscrição. Quando esta revista for distrubuída, muito provavelmente já existem novas informações. Contacte a sede da APM ((01) 7166424)

A minha visão do ProfMat94 ...

Helena Fonseca

Era a primeira vez que ia a um ProfMat. O entusiasmo era grande e a expectativa ainda maior. Já me tinham contado maravilhas acerca destes encontros, mas não há nada melhor do que ver com os nossos próprios olhos. Assim, quando recebi, no final de Março, a ficha de inscrição, apressei-me a preenchê-la. Não havia dúvidas que era este ano que ia começar (começar, porque agora vou continuar) a ir ao ProfMat. A única dúvida que me surgiu foi decidir se iria participar de forma mais activa (com uma sessão prática, comunicação, etc.) ou se simplesmente iria "assistir". Decidi-me pela primeira hipótese. Era um desafio e nesta decisão pesou o facto de estar em estágio e de ter desenvolvido um trabalho conjunto, com as minhas colegas de estágio, que provavelmente seria útil a outros colegas.

Na segunda e terça-feira participei num curso sobre Funções — uma abordagem gráfica. Primeiro, trabalhámos com o programa de computador Graphic Calculus, programa este com grandes potencialidades no estudo de funções, principalmente do ponto de vista dos gráficos. Depois, no segundo dia, aprendi algo espectacular: como esboçar o gráfico das mais variadas funções (polinomiais de grau superior ao 2°, irracionais, do tipo l/f(x), etc.) num abrir e fechar de olhos. Dado ser totalmente verdade que os gráficos desempenham um papel fundamental no estudo das funções, posso dizer que valeu a pena. Não sabem o que perderam!

Pelo que vi neste curso, ouvi de outros colegas e li nos resumos, penso que os cursos constituiram uma óptima oportunidade de formação em Geometria, Funções, História, Estatística e Probabilidades, entre outros. A exploração e discussão de actividades que poderão ser desenvolvidas com os alunos na sala de aula, a manipulação de diversos materiais e a apresentação de diderentes formas de trabalhar num determinado tema, que tiveram lugar na maioria destes cursos, é extremamente útil e abre novos horizontes ao professor.

Quarta-feira, finalmente começou o ProfMat. O número de professores de Matemática cresceu "exponencialmente" na cidade de Leiria e a variedade de sessões com temas de interesse era tanta que a dificuldade estava na escolha e, claro, na compatibilidade de horários.

A manhã de quinta-feira já estava preenchida com a nossa (minha e das minhas colegas de estágio) sessão prática sobre o Cabri-Géomètre no ensino da Geometria. Dado não ter conseguido lugar nas sessões práticas a que desejava e podia ir, tive de fazer opções. Assisti à apresentação de um projecto - "Métodos Quantitativos para alunos do ensino artístico: proposta de adaptação do programa". Este projecto pareceu-me interessantíssimo e só é pena que não se possa fazer uma adaptação do programa de Métodos Quantitativos numa escola secundária "normal", tal como foi possível numa Escola Especializada em Ensino Artístico, pois, e principalmente para alunos de Artes, era fundamental que se incluíssem alguns temas de Geometria, o que não acontece (falo como ex- professora de M.Q. de uma turma de Artes).

Também não pude deixar de ir à conferência do José Paulo Viana sobre Matemática, jogos e teoria dos jogos. Esta sessão aliou a importância da Matemática aos vários tipos de jogos e foi apresentada num clima de boa disposição e mistério (até aprendemos a "salvar almas").

Importante foi o debate acerca do impacto da revista "Educação e Matemática" no trabalho dos professores. Para mim a revista é bastante útil e realmente é necessário que haja uma maior participacão dos professores na sua elaboração (com críticas, comentários, relatos de experiências, ...) pois, e respondendo a uma questão levantada pelo Eduardo Veloso (Rev. ***Educação e Matemática*** n°24), a revista não pertence à redacção e a mais meia dúzia de colaboradores habituais.

Ao longo do dia a correria era constante. Se não estava numa sessão, havia mil e uma coisas para fazer. Eram as fotocópias para tirar, as visitas à banca da APM e aos "stands" das editoras e das calculadoras para conhecer as últimas novidades, a passagem pela organizada sala da organização para pedir algum esclarecimento, a conversa com colegas que se encontram aqui e além ... Enfim, o dia estava de tal maneira preenchido que descanso foi palavra que não existiu naquela semana.

As sessões plenárias, no teatro, foram muito bem sucedidas. Na de quarta-feira procurou-se discutir o que é ser um bom professor de Matemática. Ouviram-se opiniões de vários intervenientes: "Um bom professor de Matemática é o limite de que nos aproximamos, fazendo uma reflexão e um investimento pessoal" (Carvalho e Silva); "O professor de Matemática tem de mobilizar uma grande variedade de saberes" (Paulo Abrantes).

A sessão de sábado teve como temas centrais a pesquisa em Educação Matemática como elo entre a teoria e a prática e a formação do professor. Uma das ideias que ficou, foi a de que o professor não pode apenas receber o conteúdo e propostas oferecidas pelo teórico, mas

Devido ao grande número de participantes, foi necessário montar uma tenda gigante num dos pátios da Escola. Todas as tardes, no fim de um dia bem preenchido de trabalho, realizava-se aí um convívio entre as 17.00 e as 18.30.

sim estar integrado em todo o processo. O professor deve construir o conhecimento.

Na tenda, ao fim da tarde, havia oportunidade para conviver, trocar ideias, jogar Quarto! ou Abalone, comer castanhas .... À noite, havia o programa cultural. Estava de facto tudo muito bem organizado. É difícil imaginar como foi possível preparar um encontro com esta qualidade para tantos professores, tantos que quase provocaram a queda do "Império Romano", depois do célebre jantar do ProfMat.

Não posso deixar de fazer referência à excelente exposição "Explorar, jogar, descobrir — a Matemática ao alcance de todos" que foi dedicada à população de Leiria. É de facto uma exposição bem concebida e com muitas ideias úteis para desenvolvermos com os nossos alunos.

O ProfMat foi um espaço de constante reflexão, debate, troca de experiências e convívio. As minhas expectativas foram completamente ultrapassadas. Trouxe comigo novas ideias, mais entusiasmo e motivação, para enfrentar as dificuldades que se vivem nas escolas, tanto a nível do isolamento entre professores, como da falta de condições materiais e da obrigação profissional de "cumprir o programa".

Para mim foi bastante importante orientar, neste Encontro, uma sessão prática. Todo o trabalho e nervosismo envolvidos na sua preparação, foram recompensados pelo interesse e entusiasmo demonstrados pelos colegas que nela participaram. Foi muito bom podermos transmitir o trabalho que desenvolvemos e sentir que ele poderá ajudar outros professores.

Estas são algumas das minhas impressões acerca do ProfMat deste ano. Outras ficarão por escrever, mas por mais que tente explicar, descrever, partilhar aquilo que aconteceu neste Encontro, é sempre difícil transmitir, a quem não esteve presente, o excepcional ambiente de trabalho e convívio aí vivido. Fica a saudade de uma semana bem passada em Leiria e a promessa de lá voltar para visitar o castelo que deu vida ao logotipo do ProfMat 94.

Até para o ano, em Évora!

Helena Fonseca
Escola Sec. Eça de Queirós

Vamos repensar o ProfMat?

Da colega Lúcia Grilo, da Esc. Sec. D. João II, de Setúbal, recebemos a seguinte carta:

De cada vez que regresso de um ProfMat há sempre alguém que me põe a questão: "Valeu a pena?"

Sim, claro, vale sempre a pena, há sempre coisas interessantes, há sempre as pessoas qe só vimos nesta altura, há sempre alguém daquela terra que não víamos há muitos anos e a quem damos um abraço de saudade, há sempre a parte cultural... Bom, mas o ProfMat não é só isto, ou melhor, este não é o objectivo do ProfMat. E quanto ao resto? Bom, é quanto ao resto que me parece que deveríamos repensar o ProfMat.

É que não gostei de algumas coisas.

Não gostei dos colegas que vão aos Grupos Temáticos sem estarem inscritos e quando já não há vagas, tornando-os num amontoado de gente onde é difícil haver discussão proveitosa; não gostei dos colegas que vão à 1ª sessão dos Grupos Temáticos e não aparecem na 2ª (se não gostaram deviam lá estar para o dizer); não gostei mesmo nada dos colegas que conversaram sem parar durante a Sessão Plenária de sábado, impedindo quem estava perto de a seguir com a atenção que merecia. Mas se contra isto a A.P.M. nada pode fazer além de alertar a consciência de cada um de nós, há outros aspectos que poderiam ser melhorados.

Havia muitas sobreposições de Conferências, Comunicações Orais, Painéis, Grupos Temáticos que facilitou o chegar tarde aqui, sair cedo dali, baldar acolá...

Seria possível reorganizar e juntar as sessões sobre temas semelhantes?

Seria possível e melhor se se definissem 2 ou 3 grandes temas para o ProfMat e todos os trabalhos se subordinassem a esses temas? Seria possível remeter as Sessões Práticas para os Núcleos reservando o ProfMat para questões mais teóricas e mais gerais?

Podem-me responder, e eu aceito, que é complicado arranjar um modelo que seja mais satisfatório que o actual, mas penso e insisto que é urgente repensar o ProfMat sob pena de perdermos para a Associação e para o Encontro muitos professores para quem a deslocação é um sacrifício económico e familiar considerável e, a longo prazo, desaparecer aquele espírito que faz com que o nosso Encontro seja único, o espírito ProfMat...

O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

No último número de Educação e Matemática propusemos o problema "Bodas de Ouro":

Os meus pais vivem numa casa rodeada de um pequeno pomar. Para comemorar as bodas de ouro deram uma festa onde juntaram os 9 filhos e os 31 netos.

Resolveram também distribuir pelos netos as 470 romãs que tinham colhido no pomar. Cada rapariga recebeu mais 7 romãs que cada rapaz (e ninguém soube explicar esta preferência pelas raparigas...).

Ao chegar a casa reparei que os meus miúdos (rapazes e raparigas) tinham trazido um total de 74 romãs.

Quantas filhas tenho eu?

Chegaram-nos quatro respostas, enviadas por João Carlos Correia (Castelo Branco), Judite Barros (Lisboa), Orlando Freitas (Funchal) e Paulo Amílcar Carvalho (Coimbra), que por caminhos ligeiramente diferentes obtiveram os mesmos resultados.

O problema tem de ser resolvido em duas fases. Na primeira vamos descobrir quantos netos há de cada sexo e quantas romãs recebeu cada um deles. Na segunda vamos determinar quantos filhos e filhas tenho "eu".

1ª Fase

Se designarmos por M o número de netos rapazes e por R o número de romãs que cada um recebeu, temos a equação

$M.R + (31-M)(R+7) = 470$ ou

$31R - 7M = 253$

que resolvida em ordem a M dá

$$M = \frac{31R - 253}{7}$$

Só nos servem soluções inteiras e com $R>0$. A primeira é para $R=5$. As seguintes obtêm automaticamente somando sucessivamente 7 a R. As primeiras soluções inteiras são então

R	M
5	–14
12	17
19	48

Como o número de rapazes está entre 0 e 31 serve apenas a solução $R=12$ e $M=17$.

Há portanto 17 rapazes e 14 raparigas.

Cada neto recebeu 12 romãs e cada neta 19.

2ª Fase

Se eu tiver **m** filhos e **f** filhas obtém-se a equação

$12m + 19f = 74$

que resolvida em ordem a **m** vem

$$m = \frac{74 - 19f}{12}$$

Como **m** e **f** têm de ser números naturais, facilmente se descobre que a única solução é $f=2$ e $m=3$.

Portanto tenho duas filhas e três filhos.

Errata

Como provavelmente os leitores repararam, o primeiro desenho da resposta publicada no número anterior não estava completo. Por motivos desconhecidos, numa das fases da impressão da revista desapareceram as linhas correspondentes a três jogadas: A-4-1, B-6-2 e C-7-5.

José Paulo Viana

Problema proposto

QUATRO NÚMEROS ESPECIAIS

Temos quatro números reais A, B, C e D, todos maiores que 1.

Há dois cuja soma é D.

Há dois cuja diferença é D.

Há dois cujo produto é D.

Há dois cujo quociente é D.

Quais são os números? Quantas soluções existem?

O Problema do ProfMat 94

Eduardo Veloso e José Paulo Viana

Como habitualmente realizou-se um concurso entre os participantes do ProfMat de Leiria, tendo sido proposto o seguinte problema:

No planeta Og há dois tipos de raça: os Louros e os Morenos.

Além disso, os indivíduos nascidos no hemisfério Norte, os Nortistas, diferem dos nascidos no hemisfério Sul, os Sulistas, pelo seguinte aspecto curioso:

– os Nortistas Louros dizem sempre a verdade e os Nortistas Morenos mentem sempre, enquanto que os Sulistas Louros mentem sempre e os Sulistas Morenos falam sempre verdade.

Eu e a minha mulher fomos visitar este estranho planeta. Estávamos a ouvir um programa de rádio onde estrevistavam Big Borg, o famoso cantor de rock local, quando este declarou:

– Sou um Nortista casado.

Virei-me para a minha mulher e perguntei-lhe:

– Achas que bastava eu dizer-te de que raça ele é para saberes se ele é casado ou não?

A minha mulher é muito boa em lógica. Pensou um pouco e disse-me:

– Não te sei responder.

– Tens razão! Mas olha, quero acrescentar que se eu te dissesse de que raça ele era já tu conseguias descobrir se Big Borg é casado ou não.

– Ah, bom! – exclamou a minha mulher. – Então já sei tudo!

Big Borg é casado ou não?

O número de participantes bateu todos os recordes. Houve 46 respostas.

Individuais:

- Amélia Trigo Pereira
- Ana Baltazar
- Ana Rita Nascimento
- Anabela Baixinho
- Carmo Pereira
- Célia Matos
- Célia Santos
- Celina Pereira
- Cristina Gonçalves
- Cristina Vilhena
- Fátima Pedro
- Fausto da Silva
- Fernanda Mendes
- Fernanda Oliveira
- Florinda Costa
- Helena Rocha
- Helena Salustiano
- Isabel Dias
- Ivete Azevedo
- João Basílio
- Josá Manuel Duarte
- Leonor Vieira
- Luis Maurício
- Luis Pinheiro
- Manuel Domingues
- Mª José Santos
- Mª do Céu Faria
- Marta Santos
- Natalina Reis
- P. A.
- Paulo Dias
- Paulo Saraiva
- Pedro Palhares
- R. Costa
- Rosário Lopes
- Teresa Mariano
- Teresa Sucena
- Anónimo

Colectivas:

- Alzira Santos, Cristina Barata e Graça Castanheira
- Anabela Lemos e Cilene Lindinho
- Família Albergaria
- Francisca Sousa e Eduarda Santos
- Ilda Rafael e Inês Ricardo
- Manuela Gema, Manuela Azevedo e Rosário Carvalho
- Pedro Girão e Sérgio Valente
- Rita Bastos, Clara Pinheiro, Alice Pinto, Cristina Saporiti e Pilar Manso

A grande maioria das respostas estava certa e o tipo de problema não permitia grandes diferenças na maneira de o resolver, o que dificultou muito a tarefa do júri. Como descobrir as melhores respostas? Ao fim de três reuniões, decidiu-se atribuir o primeiro prémio à resposta do Pedro Palhares que, ao longo

PRÉMIOS

1º Pedro Manuel Baptista Palhares (Viana do Castelo)
View Screen TI 82 + Calculadora Gráfica TI 82 + Programa Graph Link.

2º Cristina Maria da Cruz Gonçalves
View Screen TI 82 + Programa Graph Link.

3º Mª Francisca Sousa e Mª Eduarda Santos (E. S. Tavira)
Calculadora gráfica TI 82.

4º Manuela Gema, Manuela Azevedo, Rosário Carvalho (E. B. Delfim Santos)
Calculadora Galaxy 67.

Os premiados deverão entrar em contacto com a sede da APM, para tratar do recebimento dos prémios.

da resolução, foi sempre fazendo considerações muito curiosas e que no fim apresenta alguns possíveis prolongamentos.

Começa assim o Pedro Palhares:

"O relator desta ocorrência e a sua mulher foram visitar Og. Chamam-lhe planeta estranho. Não são Ogs. Parece poder concluir-se que são pessoas normais no que respeita à verdade e à mentira, quer dizer, mentem quando a tal são obrigados pelas circunstâncias e falam verdade o resto do tempo, e esta parece ser uma altura normal, em que nada os obriga a mentir.

Parece também que são pessoas excepcionais no que respeita à lógica, o que é explicitamente referido num caso e se pode implicitamente concluir do outro. Note-se também que os Ogs são excepcionalmente bons em lógica, já que não é muito fácil dizer ou sempre a verdade ou sempre a mentira."

A Resolução

A resposta mais sintética e com tudo o que é essencial foi dada pela Cristina Gonçalves:

Se Big Borg for Moreno não pode ser ser sulista.

Logo é nortista moreno, logo mente.

Portanto, como é nortista não pode ser casado.

Se Big Borg for Louro:

• e nortista, então fala verdade, logo é casado.

• e sulista, então mente, mas como não é nortista então tanto pode ser casado como não.

Se a raça não permite identificar o facto de ser ou não casado, então Big Borg é moreno nortista e não casado.

Comentários

A Francisca Sousa e a Eduarda Santos, "tendo algumas dúvidas quanto à originalidade da resolução", candidataram-se ao prémio da elegância. E foi sem dúvida a resposta mais elegante, como se pode confirmar pela reprodução.

Candidato também ao prémio da elegância foi o Luis Pinheiro, que chega a indicar as medidas da sua resposta: 86-60-86.

Manuela Gema, Manuela Azevedo e Rosário Carvalho começavam assim:

"Como para bom ProfMático meia palavra basta, aqui vai a resposta esquemática". Seguia-se um simples quadro de possibilidades com a resposta a vermelho e um desdobrável para "Abrir em caso de dúvida"!

A Célia Santos, ao chegar à conclusão que Big Borg é solteiro, interroga-se se ele não será também rico e bonito. Já a Helena Rocha se indigna por ele ser mentiroso. Também Alzira Santos, Cristina Barata e Graça Castanheira concluem que ele é solteiro "mas não é bom rapaz porque é mentiroso". A Fernanda Oliveira diz que "mesmo que ele seja giro, o facto de ser mentiroso pode constituir um entrave complicado. Estará a Susana Diego de acordo? Por mim deixei de me interessar por essa questão..."

A família Albergaria levanta questões adicionais: se um habitante de Og pintar o cabelo passa de mentiroso a verdadeiro ou vice-versa? A Isabel Dias constroi mesmo uma resposta baseada nesta possibilidade. Já a Anabela Baixinho estava, à partida, em vantagem pois "por incrível que pareça, também fui visitar o planeta Og".

Prolongamentos

A partir do problema inicial, Pedro Palhares propõe algumas variantes dado "o estranho planeta de Og se prestar magnificamente a um estudo da Lógica usando a resolução de problemas".

• 1º Problema

Onde está "Sou um nortista casado" ponha-se "O que vou dizer é falso: se sou nortista então não sou casado".

• 2º Problema

Onde está "Sou um nortista casado" ponha-se "O que vou dizer é falso: sou sulista ou não sou casado".

• 3º Problema

Mesma redacção até ao fim do segundo parágrafo. A partir daí será:

Eu e a minha mulher fomos visitar este planeta. A minha mulher é muito boa em lógica embora eu não o seja. Um dia destes disse-lhe:

– Ouvi na rádio o Big Cask dizer que ou era sulista ou era de uma das raças (mas infelizmente já não me lembro de qual).

Imediatamente ela disse:

– Ah, isso não é obstáculo. É fácil determinar a frase completa.

Será que se pode determinar a raça de Big Cask?

Finalmente, com muito humor, Pedro Palhares escreve ao fundo da página a seguinte nota:

"Descobri um problema extraordinário envolvendo todas as operações lógicas mas o espaço desta folha não me permite escrevê-lo."

Eduardo Veloso

José Paulo Viana

se Big
Borg fala
verdade, só
pode ser um
Nortista louro
(dos Nortistas
que dizem sem
pre a verdade) é,
nesse caso, é ca-
sado.
Se Big Borg fala
mentira, há
duas hipóteses a
considerar: ou é Nor-
tista moreno (mente quan
do diz que é casado) logo
é solteiro, ou é Sulista lou-
ro (mente quando diz que
é Nor tista) e pode ser casa
do ou solteiro. Quan do
a mu lher diz que não
sabe se bastaria o ma
rido dizer-lhe qual
a raça de Big Borg para
ela po der concluir se
ele era solteiro ou ca-
sado, fá-lo porque
se a informação
fosse "louro", real
mente daí não po
deria concluir nada,
como acabámos de
ver. Quando o ma-
rido lhe garante que
bastará ele informá-
la quanto à raça pa-
ra ela deixar de ter
dúvidas, a mulher tem,
então, a certeza de que
Big Borg só poderá ser
moreno, caso em que tem
uma única hipótese a con
siderar. Assim sendo, ti
ra a única conclusão pos
sível: Big Borg é Nortista
moreno e portanto é solteiro.

A elegante resolução de Francisca Sousa e Eduarda Santos

A geometria no ProfMat 94

Primeiro lugar para a geometria

O tema Geometria ocupa a primeira posição entre aqueles que foram tratados durante o encontro. Assim, existiram 20 sessões sobre geometria num total de 108 sessões. Segue-se a história, com 13 sessões. E depois os outros temas — reforma, computadores, calculadoras, etc. Têm sido apontadas duas razões para o surto de interesse pela geometria: a importância dada à geometria nos novos programas e as dificuldades que os professores têm na abordagem da geometria, o que os levaria a tentar obter mais informação e formação nas sessões do ProfMat (e o conhecimento desta procura levaria a uma maior oferta por parte dos dinamizadores de sessões no ProfMat). A isso será talvez de acrescentar uma razão porventura com maior significado que as anteriores: o facto de muitos professores começarem a ganhar gosto pela geometria e pelos variados e interessantes problemas e situações para exploração que se podem propor no ensino deste tema. Porque tem maior significado esta última razão? Porque os programas vêm e vão, a preparação pode ser maior ou menor, mas apenas um professor que goste de geometria, que aceite com prazer os desafios intelectuais que os problemas de geometria tantas vezes colocam, poderá comunicar aos seus alunos essa mesma atitude positiva face à geometria.

Tipos de sessões e subtemas da geometria

As sessões dedicadas à geometria foram de vários tipos: quatro comunicações orais (CO), uma comunicação em cartaz (CC), catorze sessões práticas (SP) e uma apresentação de projecto (AP). O pendor prático das sessões de geometria é natural, dado o carácter experimental e de utilização de materiais manipuláveis que caracterizam muitas actividades em geometria, como é justamente salientado nos programas do ensino básico. Das 14 sessões práticas, 9 diziam respeito ao ensino secundário. Isto pode ser resultado, em parte, do reconhecimento feito pelos dinamizadores destas sessões da situação lamentável em que está o ensino de geometria no secundário, devido a dois factores muito negativos que se estão a conjugar neste nível de escolaridade: a extensão incomportável dos programas e o anacronismo e infelicidade que caracterizam as opções feitas no programa de geometria.

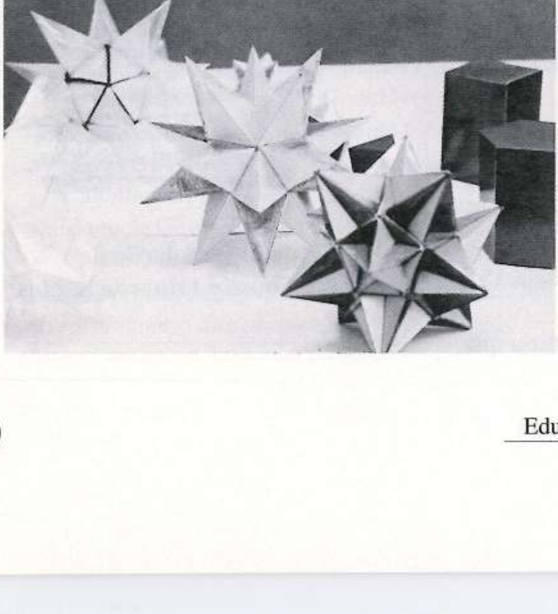
Quanto aos subtemas tratados nas sessões de geometria, temos: utilização de materiais (CO6, SP9, SP29, SP31), utilização de computadores (CO7, SP10, SP12, SP41 — todas estas sessões relativas ao programa Cabri-Géomètre), concepções e ideias erradas nos alunos (CO10 e CO14), pavimentações (CC1, SP25), visualização e poliedros (SP11, SP15, SP18, SP33, SP38), geometria analítica no espaço (SP8) e história da geometria (SP37). E ainda um conjunto de vários temas abordados na apresentação de projecto AP9.

Abordagens variadas

Assim, a geometria teve uma presença forte no ProfMat 94. O mesmo, de resto, ocorreu nos dois dias de cursos que precederam o ProfMat. Dos 24 cursos oferecidos, seis diziam respeito à geometria.

Evidentemente que as abordagens feitas ao ensino da geometria, nos vários cursos e sessões do ProfMat, foram variadas e complementares. Globalmente, formam um conjunto de propostas de actividades e reflexão sobre a geometria de uma grande riqueza. A equipa da redacção de ***Educação e Matemática***, responsável por este número da revista, na impossibilidade de apresentar aos nossos leitores uma visão detalhada das várias abordagens, resolveu tomar como foco de incidência o curso e a sessão prática dinamizados pelas colegas Cristina Loureiro e Rita Bastos. Assim, nas páginas seguintes, podem os leitores encontrar um conjunto de propostas e reflexões que nos parecem bem representativas das tendências actuais relativas ao ensino da geometria.

Nota: existem na sede da APM e podem ser fotocopiados materiais relativos a grande número dos cursos e das sessões do ProfMat dedicadas à geometria.



A geometria na FIM

Como já é habitual, muitas participações na Feira de Ideias e Materiais referiam-se à geometria. Assim os participantes do ProfMat puderam ver uma grande exposição "Materiais manipuláveis — da construção à experimentação", organizada pelos professores do Projecto de Geometria da região de Leiria. Também estava presente uma colecção de poliedros, incluindo várias famílias: estrelados, prismas e antiprismas e duais, deltaedros e arquimedianos. Noutro local da FIM estava exposto um mecanismo capaz de traçar vários tipos de conchoides, construído por um grupo de professoras da Escola António Arroio.

Renovação do ensino da geometria

Contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro

Alexandra Pinheiro e Eduardo Veloso

De há dois anos para cá, a geometria retomou um lugar privilegiado no ensino da Matemática. Por isso, torna-se legítimo perguntar: Que perspectivas novas, tanto nos conteúdos como nos métodos, têm sido propostas? Que tipos de actividades se têm tornado ou são avançadas como mais prometedoras para alcançar os objectivos dos novos programas? Que conexões têm sido feitas ao longo do ensino da geometria?

Não é possível responder concreta e definitivamente a estas questões, em parte devido ao facto apontado por Cristina Loureiro e Rita Bastos de que a geometria durante muitos anos foi deixada para segundo plano, dando origem a carências graves quer nas aprendizagens matemáticas dos alunos quer na preparação dos professores, provocando em muitos destes uma certa insegurança. No entanto, em muitas sessões dedicadas à geometria durante o ProfMat 94, tipos de actividades e propostas inovadoras quanto aos conteúdos foram apresentadas e experimentadas pelos participantes. As colegas Rita Bastos (R.B.), da Esc. Secundária de António Arroio e Cristina Loureiro (C.L.), da Esc. Superior de Educação de Lisboa, que orientaram um curso de dois dias e uma sessão prática de três horas sobre temas de geometria, utilizaram nessas sessões actidades inovadoras e moderaram discussões com base num texto distribuído aos participantes. Parece-nos que as propostas destas colegas são bem interessantes e representativas de uma reflexão que deve ser feita entre nós sobre os novos rumos que deve tomar o ensino da geometria. Por isso, procuraremos neste artigo recolher e comentar algumas dessas ideias e propostas[1].

Geometria do 5º ao 12º ano de escolaridade

Recomendações das Normas para o Currículo do NCTM

Tópicos a dar maior atenção

- Desenvolver uma compreensão dos objectos geométricos e das suas relações.(5º-8º)
- Utilizar a geometria na resolução de problemas.(5º-8º)
- Integração através de todos os temas, em todos os anos de escolaridade.(9º-12º)
- Desenvolvimento de curtas sequências de teoremas.(9º-12º)
- Abordagens por coordenadas e por transformações.(9º-12º)
- Explorações em computador de figuras bi e tridimensionais.(9º-12º)
- Argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos.(9º-12º)
- Geometria no espaço.(9º-12º)
- Aplicações ao mundo real e modelação.(9º-12º)

Tópicos a dar menor atenção

- Memorizar o vocabulário da geometria.(5º-8º)
- Memorizar factos e relações.(5º-8º)
- Geometria euclidiana como sistema axiomático completo. (9º-12º)
- Demonstrações dos teoremas de incidência e de "situado entre".(9º-12º)
- Geometria de um ponto de vista sintético. (9º-12º)
- Demonstrações "a duas colunas".(9º-12º)
- Polígonos inscritos e circunscritos.(9º-12º)
- Teoremas sobre a circunferência envolvendo razões de segmentos.(9º-12º)
- Geometria analítica como um tema isolado.(9º-12º)

Extraído das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar,* do NCTM, tradução editada pela APM e pelo IIE.

Alternativas para o ensino da geometria

No início do texto utilizado pelas colegas nas sessões do ProfMat, é significativamente referida uma listagem de tópicos de geometria a que deve ser dada mais atenção num ensino renovado de Matemática, de acordo com as *Normas para o Currículo* do NCTM (ver caixa, onde também acrescentámos os tópicos a que o NCTM recomenda deve ser dada menor atenção do que tem sido habitual). Na realidade, as recomendações do documento do NCTM constituem hoje uma referência fundamental para a construção de um currículo apropriado para a geometria do ensino básico e secundário. Vistos a esta luz, como podemos apreciar os novos programas? No texto a que nos estamos referindo, as autoras respondem:

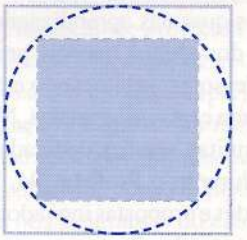
> "É verdade que o novo programa do terceiro ciclo integra, nas suas indicações metodológicas, algumas destas preocupações. Contudo, a listagem de temas que apresenta, por ser demasiado compartimentada e exaustiva, dificulta uma abordagem centrada na resolução de problemas e nas conexões, induzindo um tratamento mais virado para o conhecimento de vocabulário, factos e relações. No que respeita ao secundário,

estas indicações aparecem muito esbatidas e a sua operacionalização torna-se incompatível com as propostas de abordagem hipotético-dedutiva da Geometria no espaço, com o tratamento compartimentado da geometria analítica e com o grande ênfase no cálculo algébrico e vectorial."

Mas as colegas não se limitam a apresentar esta crítica aos programas. Apresentam alternativas para um modelo de ensino/aprendizagem da geometria, que designam por modelo construtivo, e que apresentamos nesta página. Estas ideias são ilustradas com comentários sobre a resolução do problema da determinação da razão entre os lados de dois quadrados formando uma certa figura e de outros "problemas exemplares"

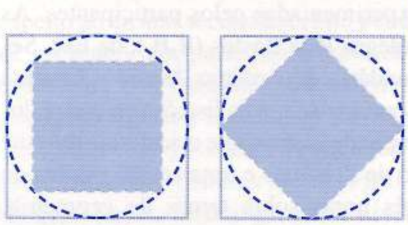
Problema nº 1

Qual é a razão entre os dois quadrados da figura?



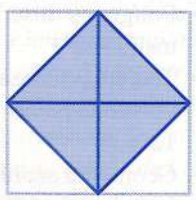
Para resolver este problema privilegiando os raciocínios geométricos é necessário procurar uma relação entre os dois quadrados que pode passar por uma transformação geométrica. No entanto, não é preciso ter definido rotação, isometria, transformação geométrica... ou ter estudado as suas propriedades. Pelo contrário, o poder das transformações geométricas e a necessidade de as estudar vão aparecendo à medida que elas ajudam a resolver os problemas.

Um aluno que esteja familiarizado com os objectos geométricos, que tenha trabalhado o conceito de área com base na composição/decomposição de figuras, imediatamente se apercebe da razão entre as áreas dos dois quadrados. Naturalmente que estamos a enfatizar a relação medida/comparação deixando para segundo plano a relação medida/cálculo. Tradicionalmente, o trabalho sobre áreas tem sido focalizado na utilização de fórmulas, criando a perspectiva limitada de que medir uma área é fazer um cálçulo, perdendo-se até as noções de medida e de unidade de medida. Para relacionar a razão entre as áreas com a razão entre os lados é necessário ter trabalhado os conceitos de semelhança e proporcionalidade nos aspectos em que estes raciocínios se revelam eficazes. O conceito de semelhança introduz dois raciocínios proporcionais importantes.



Um, é o raciocínio de proporcionalidade entre medidas lineares, que está intimamente ligado à resolução de triângulos, e que praticamente tem sido o único a ser tratado. O outro, é o de proporcionalidade entre medidas de dimensões diferentes (comprimentos, áreas e volumes) e que permite estabelecer outras relações. Estas têm sido ignoradas, apesar do seu poder e eficácia na resolução de problemas.

Se, por outro lado, resolvessemos este problema utilizando o teorema de Pitágoras, estaríamos a reduzi-lo a um simples exercício de cálculo, que não é necessariamente de mais fácil compreensão que o processo que propusemos. Além disso, este cálculo não iria trazer nada de novo, enquanto o outro abre hipóteses de generalizações a outros polígonos e até a outras dimensões.

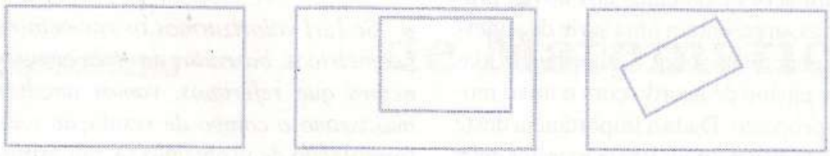


Ideias fundamentais para um modelo construtivo de ensino/aprendizagem da geometria

1. Há raciocínios importantes em geometria, que surgem independentemente dos temas e que se revelam fundamentais na resolução de problemas e na construção dos conceitos.
2. Para raciocinar geometricamente não é preciso ter adquirido previamente um grande vocabulário, dominar muitos conceitos ou conhecer muitas propriedades; pelo contrário, a construção dos conceitos e a descoberta das propriedades pode ser feita a partir da resolução de problemas e de actividades investigativas.
3. Quando aplicamos uma fórmula ou reproduzimos uma demonstração, o raciocínio geométrico operacionalizado é mínimo, e muitas vezes nem sequer existe. É quando encontramos um processo para resolver um problema ou temos que argumentar para defender uma ideia ou uma conclusão, que sentimos o poder dos raciocínios geométricos.
4. Uma abordagem da geometria centrada na resolução de problemas constitui uma fonte aliciante e muito rica de ideias matemáticas, que permite estabelecer conexões com quase todos os outros temas matemáticos.
5. A realidade palpável tem um papel importante na compreensão de muitos problemas de geometria. A grande possibilidade de concretização física e de aplicação a problemas reais fazem com que a aprendizagem da geometria possa ser de facto significativa para os alunos.
6. A geometria é rica em problemas que podem ser trabalhados com complexidade crescente. O mesmo problema pode aparecer ao longo dos tempos com vários níveis de aprofundamento e pode ser ampliado a partir do levantamento de novas questões.
7. Os materiais manipuláveis constituem uma fonte rica de ideias e são indispensáveis em todos os níveis do ensino da geometria. A própria construção de materiais pode ser o ponto de partida para a utilização de raciocínios geométricos e para a formulação de novos problemas.

Problema nº 2

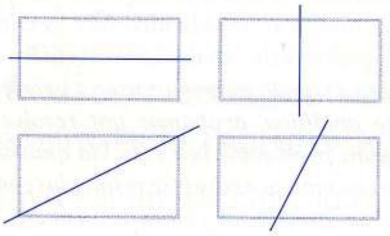
Quais são as rectas que dividem um rectângulo ao meio? E quais são as rectas que dividem ao meio os dois rectângulos de cada uma das figuras ao lado?



Formula um problema análogo para o espaço.

O que é dividir ao meio um rectângulo? É dividi-lo em duas figuras congruentes, ou em duas figuras equivalentes? Duas figuras congruentes são equivalentes, mas o recíproco não é verdadeiro... Aparentemente temos dois problemas para resolver.

É fácil encontrar algumas rectas que dividem o rectângulo em duas figuras congruentes.



E também não é difícil concluir quais são todas as rectas que têm essa propriedade. O difícil é explicar porque é que são essas e só essas.

Nesta pesquisa, a preocupação era encontrar todos os pares de figuras congruentes porque sabíamos que elas eram equivalentes.

Mas haverá outras rectas que dividam o rectângulo em duas figuras equivalentes não congruentes?

(Nota: Este problema é apresentado neste número da revista na secção "Materiais para a sala de aula". Se assim entender, poderá tentar a solução dele antes de prosseguir a leitura deste texto.)

É a interpretação gráfica que nos garante a existência de uma solução única, a recta que divide o rectângulo em duas figuras equivalentes é a mesma que o divide em duas figuras congruentes. Neste caso, "dividir ao meio" tanto pode ser entendido como dividir em figuras equivalentes como dividir em figuras congruentes, a solução é a mesma.

Esta discussão pode ser interessante para sensibilizar os alunos para questões de rigor de linguagem, mas este tratamento exaustivo só faz sentido em níveis bastante avançados. Nestes níveis tem até a vantagem de estabelecer conexões com o estudo de funções.

A compreensão do problema no plano é essencial para a passagem para o espaço. Mesmo com modelos manipuláveis, torna-se muito complicado descobrir quais são os planos que dividem o paralelepípedo ao meio, se não se tiver compreendido porque é que as rectas que passam no centro do rectângulo são as únicas que o dividem ao meio.

Por outro lado, a familiaridade na passagem do plano para o espaço, eficaz na resolução deste problema e de muitos outros, não é uma questão pacífica e precisa de ser muito trabalhada.

Se no plano, é uma recta que divide ao meio, no espaço é um plano. No plano, todas as rectas que dividem o rectângulo ao meio passam no centro do rectângulo, que é o centro da simetria central que os deixam invariantes (rectângulo e recta). No plano, uma simetria central é o mesmo que uma rotação de 180°.

No espaço, os planos que contêm um eixo de rotação que os deixa invariantes (paralelepípedo e plano) dividem um paralelepípedo ao meio, mas não são os únicos. No espaço, uma simetria central não é uma rotação. O centro do paralelepípedo é o centro de uma simetria central que deixa invariante o paralelepípedo e qualquer plano que passe no centro. Então, todos os planos que passam no centro o dividem ao meio.

A questão da divisão em dois sólidos equivalentes é análoga à do plano, só que agora com volumes iguais. A utilização de paralelepípedos em acrílico transparente com líquido colorido é uma maneira sugestiva de visualisar a variação do volume.

O modelo construtivo e o ensino actual da geometria

Continuando a descrever o que poderia ser um modelo construtivo para o ensino da geometria, R.B. e C. L. identificam três componentes básicas para o raciocínio geométrico:

"• composição/decomposição
• transformação num espaço e entre espaços geométricos
• proporcionalidade geométrica"

E acrescentam:

"Estas três componentes podem ser o fio condutor de toda a aprendizagem da geometria e devem ser objecto de um tratamento continuado, a diversos níveis, e ligadas a situações diversificadas. Talvez não sejam aquelas que nós nos habituámos a privilegiar."

O problema 3 retrata uma das componentes, a proporcionalidade geométrica relacionando diferentes dimensões.

Na parte final do texto, as autoras fazem uma análise crítica da situação actual do ensino da geometria, incluindo as limitações existentes nos novos programas, apresentam uma série de sugestões concretas sobre a abordagem daquele ensino de acordo com o novo modelo proposto. Dada a importância deste texto, transcrevemos largos extratos dele.

Sobre a hierarquização da geometria e a obcessão pelo cálculo

No ensino da Geometria, a ideia que dominou, e ainda hoje prevalece, é a de que ela é um corpo hierarquizado de conhecimentos sobre figuras em que os aspectos métricos têm um papel relevante. Basta recordar que começávamos por estudar os triângulos, e só depois pensávamos nos quadriláteros e nos outros polígonos.

A obcessão pelo cálculo obscurecia a verdadeira geometria, impedia-nos muitas vezes de optar por raciocínios visuais, mais simples e mais compreensíveis para os alunos, e por isso limitava extraordinariamente o campo de resolução de problemas.

Valorizar os raciocínios geométricos

Se [...] valorizarmos os raciocínios geométricos, baseados nas três componentes que referimos, vamos ampliar muitíssimo o campo de resolução e de formulação de problemas. A sua exploração não só vai contribuir para construir e aprofundar conceitos geométricos e outros, como também para desenvolver capacidades diversas.

O centro do processo de aprendizagem são os raciocínios sobre as figuras e não as figuras em si. Estas passam a ser o suporte dos raciocínios: o que interessa não é o rectângulo, mas os raciocínios que se fazem com base nesse rectângulo, porque o que vai fazer compreender e resolver um problema análogo são os raciocínios e não a figura.

Articulação entre o 3º ciclo e o secundário; geometria sintética e analítica

A falta de articulação entre os programas do terceiro ciclo e do secundário também vai agravar estas dificuldades. Da abordagem exclusivamente sintética, passa-se para a abordagem exclusivamente analítica. [Ora,] alguns dos problemas que resolvemos habitualmente por via analítica podem ser resolvidos por outros processos igualmente válidos e, às vezes, mais acessíveis.

Da mesma forma que não se podem pôr de lado as resoluções de problemas por via sintética só porque os alunos já estão em anos mais avançados, também uma iniciação da abordagem analítica da geometria poderia aparecer durante o 3° ciclo.

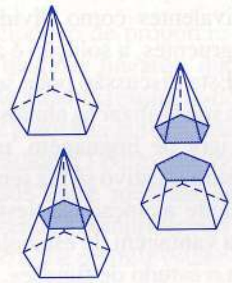
A diferença de abordagens nos dois ciclos, sintética no 3° ciclo e analítica no secundário, é uma barreira ao desenvolvimento de atitudes críticas, de capacidades criativas e integradoras de raciocínios. São os raciocínios que devem ser adequados aos problemas, em vez de adequar os problemas aos temas programáticos, como se tem vindo a fazer. Quando queremos usar a geometria analítica, acabamos por resolver alguns problemas por essa via quando seriam mais acessíveis se resolvidos com outro tipo de raciocínios. Isto conduz a um comportamento condicionado dos alunos, que está longe de constituir uma aprendizagem da geometria que contribua para a sua formação integral.

1. O texto integral distribuído na Sessão Prática 9 pode ser obtido na sede da APM.

Alexandra Pinheiro
Esc. Sec. Marquês de Pombal
Eduardo Veloso

Problema nº 3

De uma pirâmide pentagonal pretende-se obter um tronco com a mesma base e metade do volume da pirâmide. Qual deverá ser a altura do tronco? E se pretendermos um tronco com um terço do volume da pirâmide?



Há uma fórmula para calcular o volume de um tronco de piramide... mas quem é que se lembra dela? E mesmo que fizéssemos um esforço para nos lembrarmos, iríamos perder-nos certamente no meio de tantos cálculos!

Como qualquer tronco é sempre obtido por um plano paralelo à base, a pirâmide mais pequena, que se destaca, é sempre semelhante à pirâmide inicial. Assim, a razão entre as alturas pode ser obtida directamente da razão entre os volumes.

A partir deste raciocínio, a dedução de uma fórmula para o volume do tronco de pirâmide, ou de cone, pode ser uma actividade matemática interessante.

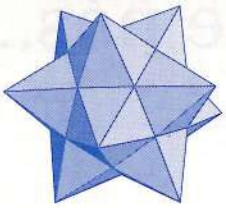
Aplicar a fórmula como uma simples receita é que não passa de um ritual sem sentido! Isto não significa que algumas vezes não tenhamos outra alternativa senão recorrer a uma fórmula sem termos hipóteses de compreender de onde é que ela veio, e isso até pode ser muito útil, não podemos é reduzir e limitar a actividade matemática dos nossos alunos à repetição desses rituais.

Contrariamente ao que nos habituámos, a Geometria é um dos campos da Matemática onde a resolução de problemas sem o recurso a fórmulas e receitas normalizadas é muito acessível, produtiva e eficaz.

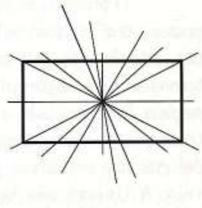
Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta na página seguinte foi adaptada a partir do texto para discussão distribuído na sessão prática SP9, no ProfMat 94, orientada por Cristina Loureiro e Rita Bastos. Para compreender em que contexto aparece, ler o artigo "Renovação do ensino de geometria: contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro." Esta actividade é apropriada para o Ensino Secundário.

Materiais para a aula de Matemática



Dividir um rectângulo ao meio...



Recorda-te que na actividade anterior descobriste que todas as rectas que passam pelo centro de um rectângulo o dividem em duas figuras congruentes.

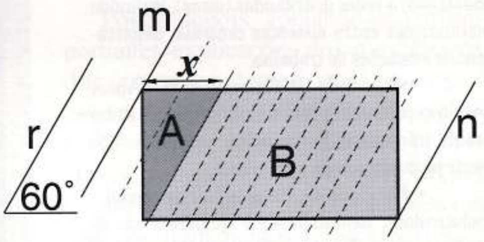
Lembra-te que:

Duas figuras são **congruentes** (ou geometricamente iguais) quando se podem sobrepor por meio de rotações, translações ou simetrias axiais.

Centro de um rectângulo é o ponto de encontro das diagonais.

Nesta actividade pretendemos saber quais são as rectas que dividem o rectângulo em duas partes com a mesma área (ou seja, em duas figuras **equivalentes**). Está claro que duas figuras congruentes têm a mesma área. Portanto, as rectas que passam pelo centro do rectângulo dividem o rectângulo em figuras equivalentes. Mas haverá outras rectas com a mesma propriedade? Para investigar esta questão, seguem-se algumas sugestões.

Imagina um rectângulo qualquer e uma recta **r** com uma certa inclinação. Imagina agora a recta a deslocar-se paralelamente a si mesma. Em cada posição, entre as duas posições extremas **m** e **n** indicadas na figura, a recta divide o rectângulo em duas partes de áreas **A** e **B**.



1. Para simplificar as contas, supõe que a recta tem uma inclinação (ângulo com a horizontal) de 60° e que o rectângulo tem lados de comprimentos 1 e 2. Define a área **A** como função da distância x indicada na figura. (não te esqueças de indicar o domínio da função; se for uma função definida por ramos, indica os domínios de cada ramo).

2. Traça o gráfico da função x —> A(x).

3. Escreve a expressão analítica da função x —> **B** (x) e traça o seu gráfico.

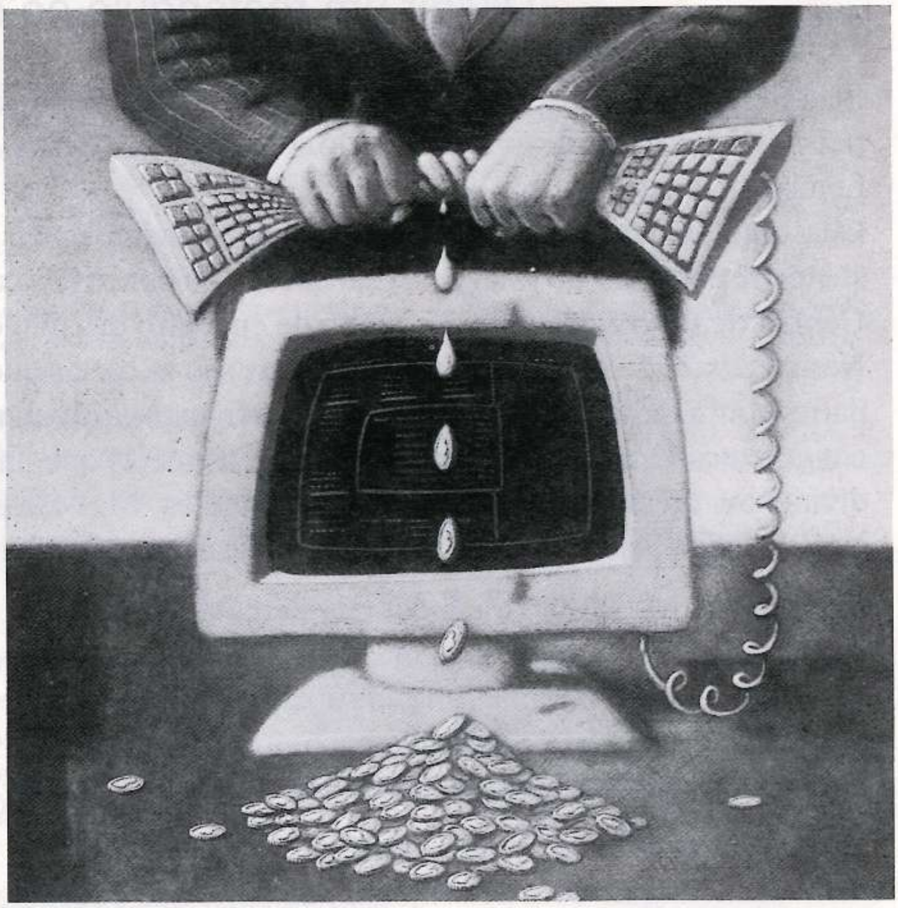
4. Verifica que os gráficos das duas funções têm um ponto de intersecção. Qual é a relação entre **A** e **B** para esse valor de x? Qual a posição da recta para esse valor de x?

5. Parece-te que as tuas conclusões seriam diferentes se o rectângulo fosse outro e também outra a inclinação da recta? Escreve um pequeno relatório sobre esta investigação, indicando as conclusões a que chegaste.

Actividade adaptada de um trabalho não publicado de Cristina Loureiro e Rita Bastos

Bozell

Oferecemos unicamente o que os clientes esperam de nós... TUDO!



O processo de aquisição de computadores pessoais tem evoluído ao longo dos tempos e não se fica, actualmente, pela mera escolha do "caixote"; tornou-se uma importante decisão estratégica de negócio. Por outro lado, a experiência tem demonstrado que, às vezes, *Comprar barato sai caro:* tecnologias não evolutivas, investimentos não rentáveis. A Unisys não tem no seu vocabulário *"estagnar", "perder"*, mas sim *"evoluir", "ganhar"*.

A UNISYS pretende consolidar parcerias de consultoria com os seus clientes, colaborando na definição, criação e implementação da estratégia mais adequada, no intuito de estes melhor servirem os seus próprios clientes e deste modo capitalizarem vantagens competitivas nos mercados em que se situam.

O que temos para oferecer?

• **Serviços de integração, instalação, certificação e gestão de redes complexas**, que necessitam de garantias de funcionamento continuado, sem interrupções. Desde simples redes locais *(Lans)* a redes distribuídas *(wans)*, incluindo comunicações entre sistemas centrais, departamentais e estações de trabalho.

• **Serviços de Consultoria** - Apoio consultivo para a definição da estratégia dos sistemas de informação necessários, em função dos objectivos do negócio de cada cliente.

• **Serviços de Educação/Formação** - Produtividade, Rentabilidade e Qualidade são os objectivos da equipa de profissionais Unisys responsável pelos Serviços de Educação e Formação.

• **Serviços de Manutenção** - Alto Nível de suporte, maior gama de serviços do mercado, profissionais experientes, hotline, são algumas das ferramentas que disponibilizamos nas parcerias com os nossos clientes.

• **Tecnologia "State-of-the-art" e qualidade de equipamentos** - Colocamos ao dispôr dos nossos clientes computadores pessoais da linha PW2 com arquitectura ISA ou EISA, processadores Intel 486 ***actualizáveis para PENTIUM overdrive***, controladores de memória de massa e discos SCSI, tecnologia de **LOCAL BUS** com ligações para vídeo e Ethernet, memória cache do tipo **"write-through"** e **"write-back"** e **aceleradores gráficos para windows**. Tudo isto com **garantia de 3 anos**, sinónimo de protecção do investimento.

• **Compromisso com os Standards da Indústria** - Alianças estratégicas com os principais "pivots" da Indústria das Tecnologias de Informação, como são os casos da Intel, Microsoft e Novell e as certificações a que os nossos sistemas estão sujeitos, são a garantia que os computadores pessoais da Unisys são compatíveis com todos os produtos leaders do mercado, hardware e software, permitindo a actualização gradual dos mesmos à medida que novas tecnologias vão surgindo:

Reiteramos:

O que temos para oferecer?

TUDO!

Cus•tom•er•ize - **1.** Tornar uma empresa mais eficaz na resposta às necessidades dos seus utilizadores e mais apta para atrair novos clientes. **2.** a "customerization" das estratégias de informação de uma empresa, i.e. estender as capacidades do sistema de informação a delegações, pontos de venda e outros pontos de contacto com clientes. **3.** O que a Unisys faz para o número crescente de empresas e entidades governamentais em todo o mundo. sin: SERVIÇO A CLIENTES, VANTAGEM COMPETITIVA, SOLUÇÕES, EFICIÊNCIA, MELHORES RESULTADOS.

Pretende pôr-nos à prova? Não queira apenas adquirir-nos equipamento... deixe-nos ser seu PARCEIRO.

Entre em contacto connosco através do *telefone 7570307 de Lisboa, 693041 do Porto ou do fax 7594026*, ou com a nossa rede de Concessionários Autorizados.

UNISYS

Fazemos acontecer.

Para este número seleccionámos

Uma rápida visão histórica

Ubiratan D'Ambrosio

Os participantes no ProfMat 94 puderam conhecer o Prof. Ubiratan D'Ambrosio como investigador no campo da Educação Matemática. No texto que se segue, escrito recentemente como apêndice ao livro Métodos de Topologia — reedição de um curso de Topologia e Análise Funcional leccionado a partir de 1960 em diversas universidades brasileiras — os leitores de Educação e Matemática poderão apreciar outra das múltiplas facetas da actividade do Prof. Ubiratan D'Ambrosio, a História da Matemática. Em poucas páginas, fica traçada uma panorâmica geral da evolução da História da Matemática desde o princípio do séc. XVII, num estilo que os nossos leitores certamente apreciarão.

A ciência passou, a partir do século XVII, por uma grande transformação, graças sobretudo aos trabalhos de René Descartes (1596-1650) e de Isaac Newton (1642-1727), naturalmente apoiados em outros cientistas da maior importância.

Descartes, na sua obra máxima, o *Discours de la méthode* (1637), dá como exemplo um modo de estudar o espaço. Já teorizado por Euclides, no século III a. C., o espaço físico era estudado na Geometria através de um elaborado sistema teórico, baseado numa lógica que, a partir de um número de proposições (noções primitivas, axiomas ou postulados, teoremas e corolários) permitia a descrição e estudo das principais figuras reconhecidas no mundo, tanto aquelas resultando das sensações mais imediatas, tais como as figuras elementares, que aparecem nas demarcações de terrenos, e daí o nome geo-metria, e nas formas artísticas, quanto aquelas que são produto de uma apurada imaginação, ao descrever movimentos de corpos celestes e arranjos e disposições de diferentes formas geométricas, tais como intersecções e sombras. Ao trazer a então nascente álgebra, principalmente a teoria das equações e seu novo simbolismo, como um dos importantes instrumentos de seu método para estudar o plano, particularmente as curvas planas, Descartes fundou um novo método para a descrição e a análise das figuras no plano e no espaço. Trajetórias, observadas na mecânica e particularmente na mecânica dos corpos celestes, poderiam ser identificadas com equações algébricas. E as importantes questões relativas a interseções e variações dessas trajetórias encontraram, na manipulação de equações algébricas, o método adequado para seu estudo.

René Descartes (1596-1650)

Pouco depois, apoiando-se em importantes explicações dos movimentos dos corpos celestes realizadas por astrônomos como Christian Huygens (1629-1695), Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Tycho Brahe (1546-1601), Isaac Newton lança os fundamentos de um novo modo de explicar e entender os fenômenos naturais ao publicar sua obra maior, *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687). Essencialmente, Newton exprime a relação causa-efeito por leis ou princípios e traduz essas leis e as manifestações de causa-efeito em expressões matemáticas. Esse método, de natureza local, pois se aplica a espaço-tempo muito limitados, está conforme com o pensamento reducionista de Descartes, e passa a nortear a procura de explicações e de entendimentos para os fenômenos em geral. Essa procura de explicações e entendimentos, própria a nossa espécie, encontra assim um poderoso modelo a seguir. Acabou-se o mistério, inicia-se o que viria a ser chamado a era de razão e o protótipo do pensar racional é a obra de Newton.

Imediatamente procura-se estender esse modelo a outras áreas do conhecimento. O modelo passa a ser o paradigma de um novo pensar, que vem a ser reconhecido como ciência moderna.

Mas uma vez traduzidos os fenômenos em expressões matemáticas, como lidar com essas expressões?

No final da Idade Média, muitas áreas de conhecimento, de tradições e sobretudo motivações distintas, começam a ser relacionadas como integrando um mesmo corpus de conhecimento. Alia-se a isso o grande desenvolvimento das aplicações ao comércio e às artes, às navegações e às invenções. Note-se que essa síntese de conhecimentos de natureza variada, de estilos e objetivos distintos e representando várias tradições confluem na Europa medieval cristã e são reconhecidas como integrando um mesmo corpus de conhecimento, que vem a ser chamado Matemática. A palavra parece ter sido usada pela primeira vez no século XIII. Naquela época ainda estavam sendo preparadas as bases para o aparecimento da ciência que viria a ser identificada como Matemática. Somente no século XIX vamos ver a Matemática como uma ciência autônoma, período em que surgem novas percepções de interesse na Geometria, conforme o que havia nos *Elementos* de Euclides. Ao mesmo tempo praticava-se uma outra Geometria, desenvolvida com vista aos estudos astronômicos e às navegações, a Trigonometria, e uma outra Geometria, incorporando tradição hebraica e muito utilizada em construções e artes. Conhecia-se a Aritmética que aparecia nos Elementos de Euclides e uma outra Aritmética que tinha a ver com operações mercantis, uma Álgebra associada a problemas práticos de heranças e comerciais e uma outra Álgebra, nascente, baseada numa manipulação de símbolos, inspirada na resolução de equações, algumas incursões em Análise Combinatória em vistas ao estudo das Probabilidades, e uma preocupação com Movimento e com Ótica, que caracteriza as preocupações dos cientistas ingleses no final da Idade Média e que nos séculos seguintes vai ter grande desenvolvimento.

No século XVII, uma vez definido o cenário do planeta e do próprio espaço cósmico que resultou das grandes navegações, há notáveis avanços da nova ciência que se definia. Destacam-se os trabalhos de Galileo na Mecânica, a introdução da Geometria Analítica por Descartes, as primeiras investigações sobre teoria das probabilidades de Pierre de Fermat (1601- 1665) e Blaise Pascal (1623-1662), o método da indução matemática, desenvolvido pelo próprio Pascal, e a invenção do Cálculo Infinitesimal, independentemente por Isaac Newton (1642-1727) e por G.W. Leibniz (1646-1716).

Isaac Newton (1642-1727)

Esse era o estado da arte no século XVII.

Newton foi capaz de utilizar o instrumental aritmético indú-arábico, reforçado pelas importantes contribuições de Simon Stevin (1548-1620) (números decimais) e de John Napier (1550-1617) (logaritmos) e de dar um passo além de Thomas Bradwardine (?1290-1349) e outros ao considerar movimentos num "instante". Ora se velocidade é a razão espaço/tempo, ao se considerar instantes, isto é, tempos muito curtos, teremos em consequência espaços muito pequenos, e velocidades nesses "instantes". Assim é possível reduzir, à la Descartes, a análise de um movimento, com uma longa trajetória, ao comportamento desse movimento em trechos pequenos da trajetória. Nesses "instantes" a trajetória, normalmente uma curva, pode ser pensada como um trecho linear que aproxima a trajetória real. Claro, ao se fazer essa aproximação está-se cometendo um erro. Normalmente quanto menor for o "instante", e consequentemente o trecho "linearizado", menor o erro cometido nessa aproximação. Ouanto menor for o "instante" — "quanto menor" significa que esse intervalo de tempo se aproxima de zero, sendo quase zero, o que se diz tendendo a zero — melhor será a aproximação. Essa é a idéia fundamental: substituir em intervalos de tempo muito pequenos o trecho de trajetória — normalmente uma curva — por um trecho linear. Naturalmente comete-se um erro. Mas esse erro será tanto menor quanto menor esse "instante". Como o instante tende a zero, o erro tenderá a zero e teremos efetivamente a trajetória real. Essas idéias, naturalmente imprecisas, sobre o que se chamam infinitésimos, isto é, quantidades que tendem a zero, representaram uma ruptura filosófica com o pensamento escolástico, que rejeitava o infinito. E naturalmente provocou muita reação e oposição. Somente no século XIX, sobretudo com os trabalhos de Augustin Cauchy (1789-1857) essas idéias tomam uma forma satisfatoriamente rigorosa. Isso não impede que as idéias de Isaac Newton, sobretudo seu Cálculo Diferencial, o instrumental matemático novo criado para poder tratar as expressões matemáticas que exprimiam as leis associadas a fenômenos para os quais se identificam a relação causa-efeito, fossem adotadas pelos cientistas da Europa continental.

Independentemente de Newton, G.W. Leibniz também desenvolveu um Cálculo Diferencial, equivalente ao newtoniano, porém com outra motivação, outras técnicas e sobretudo outra notação, muito mais conveniente. A combinação das idéias de Newton e de Leibniz foi adotada e proliferou na Europa sob a denominação de Análise Infinitesimal, o que hoje se chama Cálculo Diferencial e Integral. A estruturação rigorosa dessas técnicas, cujo principal proponente foi Cauchy, é o que se chama Análise Matemática.

Uma das características do Cálculo é ser uma teoria local. A derivada é normalmente definida relacionando espaço e tempo e motivada pelas considerações sobre movimento que tanto preocupavam os cientistas da idade média, principalmente na Inglaterra. A razão "espaço percorrido" num "intervalo de tempo", que é a leitura da expressão tão familiar s/t levada ao limite, isto é, examinando o que se passa num instante (t > 0) e portanto correspondente a uma trajetória muito pequena (s > 0), conduz à definição de derivada de uma função. Não vamos repetir as definições já conhecidas de todos os que estudaram os elementos do Cálculo Diferencial. [...]. Vamos simplesmente observar que essa definição exige, ao se dizer "espaço percorrido" um entendimento do que é espaço e de sua estrutura. Ao se fazer esse "espaço percorrido" tender a zero é necessário uma boa compreensão de como medir esse espaço, o que significa tender a zero e, enfim, penetrar na própria estrutura do espaço com o qual estamos lidando. O mesmo ao se dizer "intervalo de tempo" e ao se lidar com o tempo. Newton tratou isso muito simplesmente considerando o conhecimento do tempo um atributo divino e simplesmente trabalhando com tempo como se fossem números reais, com suas operações +. O que hoje chamamos "grupo aditivo". Para espaço recorre ao espaço sensível, euclideano, e adota para ele a métrica da distancia euclideana. Naturalmente lida com dimensões superiores, sem porém se preocupar com a natureza dessa dimensão, sobretudo quando se introduz a generalização da noção de diferencial para aproximações mais finas, isto é, as séries, trabalho em que se destaca Colin Maclaurin (1698-1746).

Efetivamente, o século XVIII representa o aprimoramento das idéias de Newton, Leibniz e Maclaurin, sobretudo através de uma intensa exploracão da representação muito geral de uma função mediante as séries infinitas, onde se descatacam trabalhos da família Bernoulli, Daniel (1700-1782), James (1654-1705) e John (1667-1705) e de Leonhard Euler (1707-1783). Também se nota uma grande busca de aplicações dos métodos newtonianos da Mecânica Celeste e a fenômenos que obedecem a princípios extremais, dando grande impulso ao Cálculo das Variações, sobretudo em Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e a uma revisão dos fundamentos da Geometria euclidiana, com os trabalhos de Gaspar Monge (1746-1818) e de

G. W. Leibniz (1646-1716)

Jean Vlctor Poncelet (1788-1867). Note-se que se esboçam novas considerações sobre espaço e uma aquisição de familiaridade com o infinito. Sempre com muita criatividade e com a busca de novo, mas com pouca preocupação com o rigor dos métodos usados e dos novos métodos desenvolvidos.

O século XIX se caracteriza pela busca do rigor e de novas visões do mundo. Não se pode esquecer que esse é o século em que as duas grandes revoluções dos século anterior se consolidam, justamente afetando as duas maiores forças políticas da época, Inglaterra e França. Desde os trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1977-1855) e de Augustin Louis Cauchy (1700-1857) às inovações de Niels Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832) se nota o surgimento de uma nova percepção do que é Matemática através de uma reflexão profunda justamente sobre os elementos básicos do método iniciados por Newton e Leibniz: espaço e tempo. As teorizações de Nikolai Lobatchevsly (1793-1856) e de Janos Bolyai (1802-1860) vem ampliar as possibilidades da Geometria Euclideana e as generalizações de Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897), Willian Rowan Hamilton (1807-1865) e de Hermann G. Grassmann (1809-1877) vem abrir à Geometria Analítica novas possibilidades na representação de espaços muito gerais. As novas percepções do finito, do discreto, introduzidas por George Boole (1815-1864) e Charles Babbage (1792-1817) vem abrir um campo relativamente esquecido desde os trabalhos de B. Pascal e B. W. Leibniz, que se refere às possibilidades de computação e manipulação de dados númericos.

Chega-se no final do século XIX ao apogeu da Analise Matemática, linear e deterministica, introduzida por Newton e por Leibniz, com um monumental trabalho de síntese do mundo observável ou imaginado a partir desse observável. A busca de novas concepções de espaços é dominante e os trabalhos de Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Weierstrass (1815-1897), Felix Klein (1849-1925), Henri Poincaré (1854-1912), e David Hilbert (1862-1943) são representativos desse apogeu. O que se passa de essencial nesse momento?

A Análise Matemática e seu poderoso instrumento Cálculo Diferencial e Integral são levados a um enorme aprimoramento na explicação do um espaço observável e generalizado no esquema dessas observaçõs. O trabalho num espaço dual, já frequente nas generalizações da Geometria e ainda mais frequente nas aplicações da Análise Matemática a problemas fisicos de natureza vanacional sugeriam a busca de uma nova conceituação de espaço. Efetivamente as conceituações não eram novas, mas sem dúvida representam a transição necessária para as novas conceituações que só começam a surgir nos meados do atual século XX. Novas conceituações de espaço e de tempo, condizentes com o que hoje é possível observar e medir, impensadas até o início do século, abrem hoje as possibilidades de uma nova matemática, de um retorno ao momento de grande criatividade, característico do século XVII. Podemos afirmar que estamos vivendo um novo renascimento.

Como será a "nova matemática" desse novo renascimento temos muito pouca idéia. Porém o bom senso nos indica que ela deverá estar mais próxima do crepúsculo da "velha matemática", aquela que se iniciou com Descartes Newton e Leibiniz, isto é, aquela praticada no início deste século e ainda hoje ativa, do que da aurora da "velha matemática", aquela que dominava os séculos XVll, XVIII e XIX.

Ubiratan D'Ambrosio
Universidade de Campinas, Brasil

Congressos sobre educação matemática
agenda 1995

27-29
Abril

IV ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO secção de Educação Matemática da SPCE

A secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (SPCE) organiza, pela quarta vez, o seu Encontro anual de Investigação. O Encontro terá lugar no Luso, no Centro de Férias do INATEL, de 27 a 29 de Abril, e o tema será "Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação? Que Formadores?". Pretende-se promover a discussão e a reflexão sobre:

• a relação entre as componentes científica, pedagógica e de prática na formação inicial dos professores de Matemática;

• as concepções dos professores, futuros professores e formadores em relação à Matemática e ao seu ensino;

• os modelos e estratégias da formação contínua, na perspectiva do desenvolvimento profissional.

O Encontro terá sessões plenárias (Peter Gates, Salvador Llinares e Konrad Krainer), comunicações e sessões de discussão e síntese.

A inscrição inclui alojamento com pensão completa, cafés e documentação: 25000$00 (quarto duplo) ou 35000$00 (quarto individual) até 31 de Janeiro — que é também a data limite para o envio de resumos de comunicações.

A organização é assegurada por um grupo de colegas da Escola Superior de Educação de Lisboa (Cecília Monteiro, Mário Maia, Lurdes Serrazina e Cristina Loureiro). Os contactos devem ser feitos para Cecília Monteiro ou Lurdes Serrazina, na ESE: Tel: 7141920/ 7141631; FAX: 7166147.

16-20
Julho

ICTMA-7 BELFAST, Irlanda do Norte

A sétima *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA-7) decorrerá entre 16 e 20 de Julho, na Universidade do Ulster, Jordanstown, situada a cerca de 10 Km de Belfast, a capital da Irlanda do Norte.

Estas Conferências, que se realizam de dois em dois anos desde 1983, são dedicadas à "apresentação e troca de informações, experiências, opiniões e ideias sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação" de actividades de modelação e aplicações da Matemática. Incluem sessões plenárias, comunicações orais e em cartaz, *workshops* e exposições.

O custo total, incluindo alojamento e as principais refeições, está estimado em £ 300.

Informações podem ser pedidas para ICTMA-7, Dep. of Mathematics, Univ. of Ulster at Jordanstown, Northern Ireland, BT37 0QB; FAX: 44-232-362854.

22-27
Julho

PME 19 RECIFE, Brasil

A 19ª conferência do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) decorrerá no Recife, de 22 a 27 de Julho. As sessões terão lugar no Mar Hotel daquela cidade brasileira.

Como habitualmente, o PME terá sessões plenárias — várias conferências e um painel sobre o tema "Interacção na sala de aula segundo múltiplas perspectivas vygotskianas" — *research reports*, breves comunicações orais, posters e ainda grupos de trabalho e grupos de discussão.

Os custos estão estimados em $US 320, cobrindo a quota do PME, as actas, almoços e cafés, excursão, etc.

O Encontro é organizado pelo Programa de pós-graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco (UFP). O comité do programa é presidido por David Carraher da UFP.

Os contactos e pedidos de informações devem ser dirigidos ao presidente da Comissão Organizadora: Luciano Meira, Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, 8º andar, Mestrado em Psicologia Cognitiva, Av. Académico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária, 50.670-901 Recife PE Brasil; FAX: 55-81-2711843.

23-29 Julho

CIEAEM 47
BERLIM, Alemanha

O 47º Encontro da *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) terá lugar em Berlim, de 23 a 29 de Julho. As sessões decorrerão na Universidade Técnica de Berlim.

O tema é "Mathematics (Education) and Common Sense". Como subtemas estão previstos: (1) Matemática e senso comum; (2) O aspecto do ensino e aprendizagem; (3) O impacto das mudanças sociais; (4) O impacto do desenvolvimento tecnológico; (5) O aspecto cognitivo e epistemológico; e (6) o aspecto da inovação. O Encontro inclui sessões plenárias (Philip Davis, Alan Bishop, Juliana Szendrei e Rijkje Dekker), comunicações, grupos de trabalho, sessões práticas e a feira de ideias. As línguas oficiais são o inglês e o francês.

O custo da inscrição é de 150 DM (200, depois de 15 de Janeiro) e as restantes despesas a pagar à chegada — hotel, principais refeições, documentação, excursão, etc. — serão de 550 DM.

O comité internacional do programa integra Cristine Keitel (D), Rijkje Dekker (NL), Lucia Grugnetti (I), Paulo Abrantes (P) e Sixto Romero (E). Os contactos devem ser feitos para a presidente da Comissão Organizadora: Prof. C. Keitel, Freie Universität Berlin, FB 12, WE 02, Habelschwerdter Allee 45, D-14195 Berlin (Alemanha); FAX:4930-8385972.

CIEAEM

13-16 Setembro

V Simpósio de História e Ensino das Ciências
VIGO, Espanha

De 13 a 16 de Setembro de 1995, terá lugar em Vigo o V Simpósio de História e Ensino das Ciências, promovido pelo Seminário de Estudos Galegos, a Sociedade Espanhola de História das Ciências e das Técnicas e a Universidade de Vigo. As comunicações poderão ser apresentadas em qualquer idioma oficial da Península Ibérica ou em Inglês.

Para mais informações, contactar: Ana Gago Martinez, Facultade de Ciencias, Dep. de Química Analítica e Alimentaria, Apdo 874 — 36200 Vigo (Pontevedra), España; FAX: 812382.

V. SIMPOSIO DE HISTORIA E ENSINO DAS CIENCIAS
vigo, do 13 ó 16 de setembro de 1995

14-16 Setembro

VII JAEM
MADRID, Espanha

Nos dias 14, 15 e 16 de Setembro de 1995. terão lugar as VII *Jornadas sobre Aprendizage y Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM), em Madrid, nas instalações da Universidade Complutense.

Estas Jornadas, que se realizam de dois em dois anos, correspondem a um encontro nacional dos professores de Matemática em Espanha. Desta vez, a organização estará a cargo da *Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas* (SMPM).

As Jornadas incluem um grande número e uma grande diversidade de sessões de trabalho. Abrangem todos os níveis de ensino e constituem um momento privilegiado de troca de experiências e de difusão de propostas e materiais didácticos inovadores.

Para mais informações, contactar Mª de Jesus Luelmo, VII JAEM, SMPM, Apdo 14610, 28080 Madrid, España.

Em **ÉVORA**:

6-7 Novembro

VI SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática): organizado como habitualmente pela APM nos dois dias que antecedem o PROFMAT, isto é, em 6 e 7 de Novembro;

e o

8-11 Novembro

ProfMat 95 — 10 anos depois do primeiro ProfMat, a APM levará a cabo, desta vez na cidade de Évora, de 8 a 11 de Novembro, o 11º Encontro Nacional de Professores de Matemática.

A partir de Janeiro de 1995, esteja atento às primeiras informações sobre o ProfMat.

Pontos de vista, reacções, ideias...

Sendo Professor de Matemática posso considerar-me Matemático?

Um professor de Biologia considera-se biólogo, o de História um historiador, o de Educação Física um desportista... e nós professores de Matemática? Tentarei responder a tal pergunta.

Durante uma aula de 11º Ano, foi necessário calcular a área de um triângulo rectângulo. Muitos alunos não o souberam fazer, o que é triste e assustador, apesar de ser fácil. Não fiquei admirado porque, há uns tempos atrás, um professor de uma Universidade afirmou num jornal que alguns dos seus alunos universitários não conheciam o Teorema de Pitágoras...

Coloquei a pergunta: Conhecendo só os comprimentos dos lados de um triângulo é possível saber a sua área? Se o triângulo for rectângulo é fácil. Mas, caso não o seja, dividimo-lo em dois que sejam triângulos rectângulos por uma das suas alturas e o problema fica resolvido. Foi então que me lembrei de uma fórmula que já tinha visto algures, a Relação de Herão (Alexandria, séc.I):

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

em que a,b,c são os comprimentos dos lados do triângulo e s=1/2 (a+b+c) (semiperímetro).

Porquê o interesse desta fórmula? De facto é de fácil memorização... Para a usar temos de demonstrá-la, se queremos ter o espírito de um matemático.

Ao ver uma demonstração na qual não conseguia perceber um passo e só indicavam bibliografia onde o encontrar demonstrado,— essa passagem de facto é um teorema bastante interessante que poderá ser demonstrado, andando em sentido contrário, depois de provar a relação de Herão — decidi então prová-la, pois está ao alcance de um professor do Secundário. E como era sábado à noite desisti e meti-me entre os lençóis. No domingo, sempre que dava uma braçada no belo mar da ilha da Madeira, só pensava como é que iria provar. Foi a seguir a um bom almoço, com uma bela salada de frutas à sobremesa, que depois de ligar o rádio da minha prisão (quarto), peguei num lápis e papel (e uma calculadora programável para verificar algumas conjecturas e assim evitar grandes cálculos desnecessários) como fazem os matemáticos, e me pus a brincar com a álgebra.

Comecei usando o Teorema de Pitágoras e cheguei a um resultado. Agora bastava dar umas mexidelas para aparecer na forma de Herão. Algo que me fascina na Matemática é que grandes resultados podem ser provados usando métodos elementares e muito simples[1].

Muitas vezes quando se ataca um problema, este já foi resolvido por muitos outros e por processos e resultados por nós desconhecidos. Até que é bom não ter conhecimento de alguns desses processos ou resultados, pois à partida ainda não estamos "viciados" e acontece que podemos enveredar por outro caminho ainda não descoberto ou então simplificar em vez de complicar com grandes cálculos. Este é um aspecto que faz muita falta aos nossos alunos em vez de estarem sempre a perguntar: "*S'tor*, isso vem para o teste?" Hoje em dia já não respondo verbalmente a estas perguntas, simplesmente faço uma careta e prossigo a aula.

Ao chegar ao fim de uma demonstração, mesmo que ela já tinha sido demonstrada por outros, podemo-nos sentir matemáticos? Penso que sim... Pois é o sentir-se matemático que nos faz gostar desta bela "arte", ou diria mesmo "poesia" ou "música", que é a Matemática. Há quem afirme que todos nós somos matemáticos. Também sou dessa opinião, nem que seja só um bocadinho de matemático. Mas ao fazer (pequenas) demonstrações, como a anterior, sem copiar dos livros, ou quando ao pegar num problema, tipo problema do mês, o conseguimos resolver com a pouca Matemática que temos interiorizada, aí sim, é que podemos sentir-nos na pele de um matemático, pelo menos na de um matemático amador; o mesmo se deverá passar com os nossos alunos durante as nossas aulas.

Orlando de Freitas
Esc. Sec. Francisco Franco, Funchal

[1] Por falta de espaço, optámos por não incluir a demonstração contida no texto enviado pelo autor.(N.R.)

Nem tudo vai mal na reforma!

Recebemos da colega Alcinda Santos o relato sobre o trabalho dos seus alunos sobre cónicas. Publicamos um dos trabalhos na pág. seguinte e um extracto do relato.

"[...] tal como fizera no ano anterior, propus a duas turmas do 12º ano, no ano lectivo 93/94, uma do Agrupamento 2 (Artes) e outra do Agrupamento 3 (Económico-Social), num total de 37 alunos, a realização de um trabalho sobre um tema ligado a cónicas. Tal como aparece indicado nas sugestões metodológicas

Nota da Redacção: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

AS CÓNICAS NA HISTÓRIA...

Cláudio Franco, nº 6, 12ºF

da respectiva unidade programática são muitos os temas propícios à sua elaboração: histórico-cultural, científico-técnico, geométrico, estético. A partir desta sugestão, os alunos lançaram-se ao trabalho, individualmente ou em grupo, fora dos tempos lectivos e de uma forma autónoma.

O produto final, apresentado cerca de um mês após o estudo do tema, excedeu as minhas expectativas. Recebi quinze trabalhos muito diversos e, na minha opinião, muito interessantes, que abordaram as diferentes perspectivas, acabando por ir mais além... Fiquei bastante sensibilizada com a adesão dos alunos à sugestão feita, com o empenhamento demonstrado, com o cuidado posto na apresentação gráfica. Os dois exemplos que acompanham este relato [apenas transcrevemos um deles na página anterior] ilustram a imaginação fértil de três alunos. Se, do ponto de vista científico, não são "recomendáveis", agradou-me, no entanto, a forma desempoeirada como um conteúdo matemático os estimulou para um trabalho nada convencional.

[...]

Se porventura eu pudesse alimentar dúvidas quanto ao interesse da realização destes trabalhos, nada melhor que ler a opinião do Daniel, um aluno do 12º ano em 92/93 que fez "um trabalho de modo a ser como que uma 'pincelada' geral sobre as cónicas... pese embora o tempo 'perdido' na elaboração deste trabalho, não me arrependo de o ter feito com tanto empenho, visto que mais do que 'trabalhar para a nota' esta foi uma forma de aprender coisas que certamente não aprenderia noutras circunstâncias".

PS. Agradeço a colaboração dos colegas Branca Silveira e Luís Reis.

Alcinda Santos
Esc. Sec. Augusto Gomes, Matosinhos

A matemática dos torneios de futebol...

Mais uma vez cá estou eu a ocupar um pouco da vossa atenção, apresentando um problema que gostaria que fosse proposto a outros colegas, vendo-o publicado na vossa (nossa) revista. Este problema, como não podia deixar de ser, surgiu de uma actividade que realizei com alunos meus.

Propus-lhes que determinassem o *número de jogos* que se têm de realizar num torneio de futebol onde estão inscritas 16 equipas, até se encontrar a equipa vencedora; este torneio decorre na forma de eliminatórias (isto é, equipa que perde um jogo é eliminada e equipa que ganha é apurada para a eliminatória seguinte); além disso, cada jogo tem que ter um vencedor (não são admitidos empates). O resultado deu 15 jogos de acordo com a tabela 1.

Contudo, neste tipo de torneios pode acontecer que em algumas eliminatórias o número de equipas seja ímpar e então terá de ficar uma equipa de fora (em gíria, diz-se que essa equipa "folga" nessa eliminatória), só entrando na eliminatória seguinte. Veja-se na tabela 2 o caso de serem 37 as equipas inscritas.

Se repararmos, vemos que nos dois exemplos apresentados, o número total de jogos a realizar é inferior em uma unidade ao número de equipas inscritas inicialmente:

16 equipas <——>15 jogos (4 eliminatórias)

37 equipas <——> 36 jogos (6 eliminatórias)

Será mera coincidência?

Então o problema é este:

Em torneios deste tipo (por eliminatórias), estando inscritas inicialmente *N equipas*, quantos jogos se têm que realizar até se encontrar a equipa vencedora? Já agora, quantas eliminatórias se têm que realizar?

Luís Carmelo Silva
Esc. Sec. de Tondela

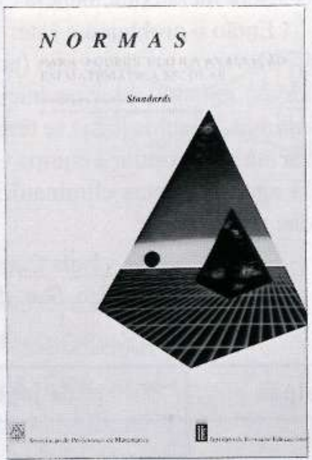
	nº de equipas	**nº de jogos**
1ª eliminatória	16	8
2ª eliminatória	8	4
3ª eliminatória	4	2
4ª eliminatória	2	1 (apura o vencedor)
		Total de jogos = 15

Tabela 1

	nº de equipas	**nº de jogos**	**"folgas"**
1ª eliminatória	37	18	1 equipa
2ª eliminatória	19	9	1 equipa
3ª eliminatória	10	5	0 equipas
4ª eliminatória	5	2	1 equipa
5ª eliminatória	3	1	1
6ª eliminatória	2	1 (apura o vencedor)	
		Total de jogos = 36	

Tabela 2

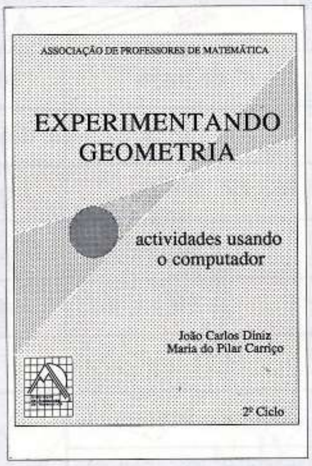
Publicações APM



Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar
tradução portuguesa dos *Standards*
do *National Council of Teachers of Mathematics*
Preço 3 000$00 (sócios 2 100$00)

Normas Profissionais para o Ensino da Matemática
tradução portuguesa dos *Professional Standards*
do *National Council of Teachers of Mathematics*
Preço 3 000$00 (sócios 2 100$00)
(Novo)

O "OURI"
Um Jogo Caboverdiano e a sua prática em Portugal
Elísio Santos Silva
Preço 700$00 (sócios 500$00)
(Novo)



Experimentando Geometria actividades usando o computador
João Carlos Diniz e M. do Pilar Carriço
Preço 430$00 (sócios 300$00)
(Novo)

No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio, deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%
de 2501$00 a 5000$00 - 15%
mais de 5000$00 - 10%

Quota de 1995

No ano de 1995 o valor da quota é de **4500$00** (3500$00 para o sócio estudante e 5000$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode optar por desconto bancário **até 31 de Janeiro.** Após esta data deve efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número ____ ____ ____ ____

Visa ☐ MasterCard ☐ Eurocard ☐

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________
__________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº __________

Nome ______________________________

______________________________ Tel: __________

Morada ______________________________

Código Postal __________ Ano em que começou a leccionar: __________

Data de nascimento ____/____/____ Nível de ensino: __________

Escola ______________________________

Localidade __________ Distrito __________

Categoria Profissional ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido preenchendo a ficha respectiva ou fotocópia (ver *Educação e Matemática* nº 28), juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para:

Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa — Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos 1500 Lisboa

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7166424 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice