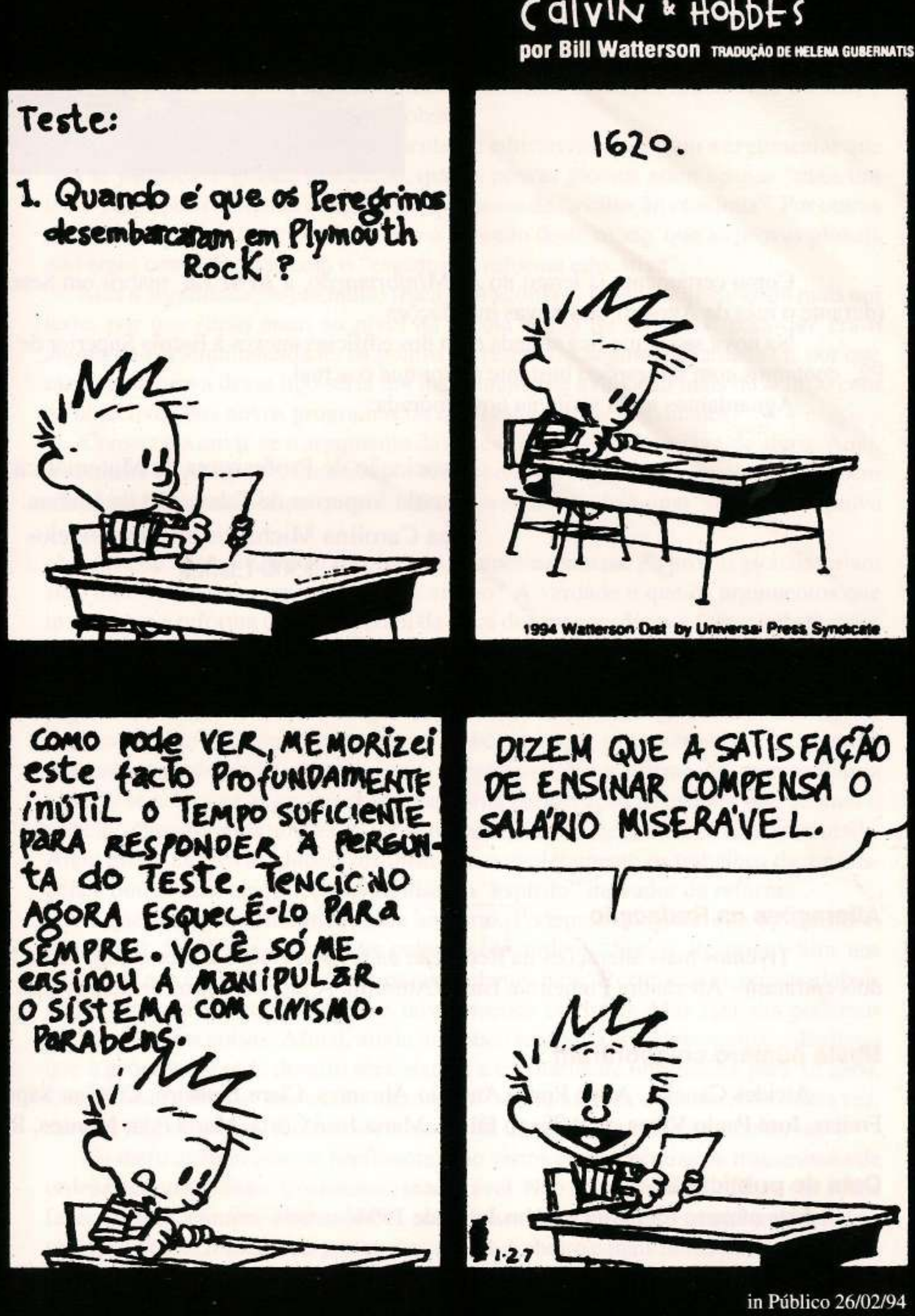
Educação e Matemática

Nº 30

2º trimestre de 1994

Calvin e os testes...



in Público 26/02/94

Preço: 400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Uma nova Sede

Como certamente já leram no APM*Informação,* a APM vai reabrir em Setembro, depois das férias bem merecidas (durante o mês de Agosto), nas novas instalações.

Na nova sede, que fica situada num dos edifícios anexos à Escola Superior de Educação de Lisboa, denominado bloco P2, contamos com um espaço bastante maior que o actual.

Aguardamos a sua visita na nova morada:

Associação de Professores de Matemática
Escola Superior de Educação de Lisboa
Rua Carolina Michaelis de Vasconcelos
1500 Lisboa

Alterações na Redacção

Tivémos mais alterações na Redacção da revista. Dois colegas sairam - José Manuel Matos e Paulo Alvega - e outros dois entraram - Alexandra Pinheiro e Isabel Amorim. A uns e a outros deixamos aqui o nosso agradecimento.

Neste número colaboraram

Alcides Canelas, Alice Pinto, António Abrantes, Clara Pinheiro, Cristina Saporiti, Graciosa Veloso, José Orlando de Freitas, José Paulo Viana, José Tiago Filipe, Maria José Costa, Maria Pilar Mansos, Rita Bastos e Sérgio Macias Marques.

Data de publicação

Este número foi publicado em Julho de 1994.

nº 30
2º trimestre
de 1994

Reforma, mentiras e professores

Ana Vieira
Paulo Abrantes

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Alexandra Pinheiro
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Eduardo Veloso
Isabel Amorim
Leonor Barão
Helena Lopes
Henrique Guimarães
Maria João Lagarto
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3000 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 79882/94

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Não à Reforma! Este era um dos *slogans* dos estudantes, escrito a letras pretas num fundo bem amarelo, em autocolantes que circulavam por todo o lado durante o processo de luta contra as provas globais.

No início da contestação, as autoridades educativas chegaram a argumentar que não se justificava grande discussão, que as provas globais eram apenas "mais um teste", algo perfeitamente integrado no processo de "avaliação contínua". Por outras palavras, argumentavam, embora não o dizendo deste modo, que as provas globais não eram contraditórias com o "espírito da reforma educativa".

Mas a argumentação era muito fraca e não convencia ninguém. Se eram mais um teste, por que razão eram ao nível da escola e não da turma? E para que era o anonimato, a simultaneidade, os pontos de reserva, a segunda chamada? E por que razão uma prova desse tipo seria um instrumento de avaliação mais de acordo com os objectivos dos novos programas do que tantas outras actividades?

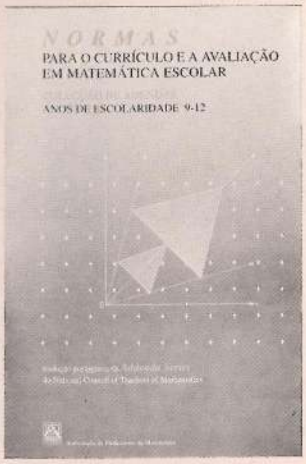
Começou a ouvir-se o argumento da necessidade de uniformizar, de aferir. Aqui, o "espírito da reforma" estremeceu... Mas a verdade é que as provas globais também não satisfaziam aqueles que queriam afinal um exame *a sério*, uma "verdadeira" prova de aferição.

Ouve-se falar que, para o ano, haverá exames nacionais. As provas globais teriam sido uma encenação, uma espécie de ensaio? A verdade é que os argumentos que invocavam a reforma desapareceram da boca dos responsáveis e foram substituídos pelas habituais acusações aos professores (como nas chicotadas psicológicas do futebol em que o treinador é despedido porque não se podem mandar embora os jogadores e muito menos os dirigentes que têm sempre razão). A ministra chegou a declarar no Parlamento que as provas globais teriam, pelo menos, a vantagem de obrigar os professores a cumprir os programas! Uma afirmação extraordinária quando se sabe que as provas trouxeram uma perturbação às escolas que afectou o trabalho não só com as turmas do 10º ano mas com as de todos os anos de escolaridade. Além disso, as provas globais *atropelaram* completamente os trabalhos da área escola e outras actividades desenvolvidas no "espírito" inovador da reforma.

O que se seguirá, ninguém sabe ao certo. Podemos imaginar que o Ministério distribuirá desdobráveis com as palavras de ordem "Não à Reforma! Sim aos exames!" e os estudantes mudarão os autocolantes para "Reforma sim, provas globais não!" (um cenário surrealista mas talvez menos confuso). Mas também podemos imaginar outras coisas. Afinal, ainda há pouco tempo, o primeiro-ministro declarou que o próximo grande desafio será alargar a escolaridade obrigatória para 12 anos. Quando este e outros "imperativos europeus" se impuserem, então teremos outra vez, durante algum tempo, discursos em nome de uma grande reforma educativa.

No meio de tudo isto, os professores são vistos como correias de transmissão de ordens e contra-ordens. Um estatuto inaceitável. Não nos podemos limitar a dar aulas, fazer exames, cumprir instruções. A alternativa não é fazer isso mas dizendo mal de tudo, nem reduzir as nossas pretensões a mais dinheiro e mais horas por semana para "cumprir o programa". Temos o direito e o dever de discutir os objectivos e os efeitos do nosso trabalho perante os alunos e a sociedade, à luz da nossa experiência única e do nosso papel na educação. Os alunos reagiram às provas globais dos seus pontos de vista. O Ministério fez o mesmo. E nós, o que fizémos?

Publicações APM



Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas
Colecção de Adendas 9-12 às Normas do NCTM
Preço 1200$00 (sócios 850$00)

Quinto ano
Colecção de Adendas K-6 às Normas do NCTM
Preço 700$00 (sócios 500$00)

Quadrante Vol. 2 Nº2
Revista Teórica e de Investigação
Preço 800$00 (sócios 1000$00)

Se, durante este Verão, a praia não lhe chegar, a APM vai dar-lhe, ao longo de todo o ano, um cheirinho a mar.

Tal como é hábito, por cada ano que passa a APM faz sair mais uma **Agenda,** especialmente dedicada aos professores de Matemática.

Relativamente à Agenda deste ano, ainda não lhe podemos dizer o preço, nem lhe podemos mostrar a capa, mas sabemos que cheira a mar e que, mesmo depois de atravessar o oceano Atlântico, lhe vai chegar às mãos muito fresca e cheia de propostas interessantes que vão dar que pensar.

Este ano, a Agenda foi feita pelo Núcleo dos Açores que, depois do ProfMat, não se deixou ficar parado e se abalançou a mais este desafio.

Se estiver interessado em encomendar a sua Agenda, telefone para a Sede a partir do dia **25 de Julho**.

No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem).
As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%
de 2501$00 a 5000$00 - 15%
mais de 5000$00 - 10%

Métodos Quantitativos para os alunos do ensino artístico: proposta de adaptação do programa

Maria do Pilar Mansos
Alice Pinto
Rita Bastos
Clara Pinheiro
Cristina Saporiti

A Escola Secundária António Arroio, em Lisboa, é especializada em ensino artístico. Num ambiente tradicionalmente marcado por atitudes muito negativas em relação à Matemática, um grupo de professoras desta disciplina decidiu reorientar o programa oficial de Métodos Quantitativos que, seguramente, não foi feito a pensar nestes alunos...

Este projecto de desenvolvimento curricular foi pensado e implementado por um grupo de professoras efectivas da Escola António Arroio, numa tentativa de inovação pedagógica e, no âmbito da formação contínua de professores, apoiado e orientado pelo Centro de Formação da A.P.M..

A Escola Secundária António Arroio sempre foi uma escola vocacionada para o ensino das Artes Visuais. Antes desta reforma funcionava com o estatuto de Escola Secundária, mas os cursos que oferecia eram todos da área E, sendo a maioria cursos técnico-profissionais. Com a implementação da reforma, ganhou o estatuto de Escola Especializada em Ensino Artístico, o que lhe confere uma certa autonomia no que diz respeito à definição dos cursos a oferecer, dos seus currículos e dos programas das disciplinas específicas desta escola. Assim, neste primeiro ano de lançamento da reforma, os cursos tecnológicos da Escola António Arroio funcionaram em carácter experimental, com currículos próprios propostos pelos professores dos vários sectores artístico-tecnológicos, estando a elaboração dos respectivos programas a cargo dos mesmos.

A situação do Ensino da Matemática na Escola António Arroio

Todas nós, professoras envolvidas no projecto, nos sentíamos muito descontentes com a situação da Matemática nesta escola. Em primeiro lugar porque, tradicionalmente, esta era uma disciplina votada ao desprezo dos artistas — professores e alunos — e depois, porque o insucesso era enorme. Muitos alunos nunca chegavam a completar os seus cursos por causa da Matemática (a par com a Física e a Geometria Descritiva), ou, se acabavam, era porque os professores se compadeciam da situação e acabavam por os passar na disciplina, mesmo sem o merecerem, ao fim de vários anos de repetência.

A perspectiva de mudança que esta reforma criou, e a possibilidade de os alunos poderem optar entre a disciplina de Matemática e a de Métodos Quantitativos, trouxe-nos algumas esperanças de que esta situação se viesse a modificar. Mas, ao tomarmos conhecimento do programa desta última, ficámos muito preocupadas: ele era completamente desajustado dos interesses, aptidões e necessidades dos nossos alunos.

Era de prever que os alunos que escolhessem a disciplina de Métodos Quantitativos fossem exactamente aqueles que não gostavam de Matemática, que tinham grandes dificuldades nesta disciplina, ou até, que nunca tivessem conseguido aproveitamento nela. Com um programa que tem grande incidência em temas como a Lógica ou o Cálculo, propostos de uma forma completamente abstracta e sem utilidade ou qualquer significado para estes alunos, e que não faz qualquer menção à Geometria, as perspectivas eram realmente de que a situação se agravasse, em vez de melhorar.

De facto, basta fazer uma leitura da introdução do programa de Métodos Quantitativos para nos apercebermos que esta disciplina foi criada só para os alunos de estudos humanísticos. Na nossa opinião ela foi introduzida nos currículos dos cursos artísticos, para colmatar uma falha, já que não existia outra em alternativa.

Perante esta situação, e aproveitando a autonomia que a escola tinha conquistado e o carácter experimental do ano de lançamento dos novos cursos, resolvemos intervir, propondo a alteração e adaptação do programa à realidade da nossa escola. Foi assim que resolvemos desenvolver um projecto com vários níveis de intervenção: junto dos alunos, com os professores, na escola e até fora desta.

Principais preocupações e formas de intervenção

Para podermos combater a situação em que se encontrava o ensino da Matemática na escola, tinhamos que tentar perceber as suas causas. O primeiro passo a dar seria investigar junto de alunos e professores de outras disciplinas a causa do desprezo pela disciplina e do insucesso.

Fizemos algumas entrevistas, falámos com muita gente e apercebemo-nos que as concepções de Matemática predominantes eram completamente deturpadas: a Matemática que eles conheciam não tinha utilidade nenhuma, era só um conjunto de técnicas abstractas que serviam "apenas para torturar alunos" (expressão empregue por um professor de cerâmica). Com efeito, nem professores nem alunos reconheciam a necessidade de utilização de conceitos e raciocínios matemáticos nos seus trabalhos práticos, apesar de os utilizarem frequentemente...

Era, portanto, indispensável e urgente fazer com que essa concepção de Matemática se fosse alterando, mostrando a uns e outros que a Matemática é utilizada constantemente nos seus trabalhos e que, aprofundando os seus conhecimentos naquele domínio, estariam a enriquecer também a sua cultura artística. De facto, um designer que não tem conhecimentos de Geometria fica muito limitado na sua criação; um escultor que concebe estruturas sem ter trabalhado sólidos geométricos e figuras planas, tem muito menos possibilidades do que outro que os conheça...

A primeira preocupação que tivemos foi introduzir temas de Geometria no programa, por tudo o que foi dito atrás e porque os alunos desta área têm mais facilidade e apetência por raciocínios visuais do que analíticos. A experiência tem-nos confirmado este facto, que era de esperar uma vez que são alunos vocacionados para as Artes Visuais.

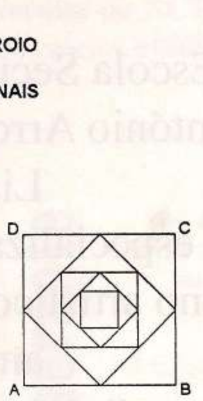
Por outro lado, para mudar as concepções dos alunos relativamente à Matemática era necessário mudar as metodologias, transformar as aulas em espaços de actividade matemática. Para os alunos da António Arroio, as aulas oficinais, onde lidam com materiais, investigam e projectam, são as mais atractivas e consequentemente aquelas em que mais investem e mais aprendem. Por isso tentámos fazer o mesmo nas aulas de Métodos Quantitativos, elaborando em conjunto propostas de trabalho que, na nossa opinião, conduzem a si-

ESCOLA SECUNDÁRIA ANTÓNIO ARROIO

O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS
FICHA DE TRABALHO 1

INVESTIGANDO SOBRE SOMAS

1. Na figura ao lado podes observar o quadrado [ABCD]. Se unires os pontos médios dos lados deste quadrado, obténs um novo quadrado e, continuando este processo, vais obtendo novos quadrados.
Supondo que a medida da área do quadrado [ABCD] é 1,



1.1. Qual é a área do 2º quadrado? E do 3º ? e do 9º?

1.2. Qual é a área do n-ésimo quadrado?

2.1. Utiliza a tua calculadora para calcular as seguintes somas:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=$$

2.2. Se fosse possível calcular uma soma com um número infinito de parcelas da sequência da alínea anterior, qual seria o resultado?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\approx$$

2.3. Faz uma interpretação geométrica das somas das alíneas anteriores para verificares os resultados a que chegaste.

3. Utiliza o mesmo processo da questão **2** para completar as seguintes igualdades e verificar os resultados:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots\approx$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\approx$$

Fig. 1 - Primeira ficha de trabalho utilizada na unidade sobre os Números.

tuações de aprendizagem que podem constituir desafios estimulantes às capacidades dos alunos. Privilegiámos a resolução de problemas e as actividades investigativas.

A utilização de novas tecnologias foi também uma das nossas preocupações: as calculadoras científicas passaram a ser um instrumento de investigação e experimentação, indispensável nas aulas; fizemos algumas aulas com computador, utilizando o programa *Geometer's Sketchpad*, não tantas como gostaríamos por falta de equipamento e por nos sentirmos ainda pouco seguras nesse domínio; preparámos algumas actividades para calculadoras gráficas, mas não tivemos oportunidade de as pôr em prática por causa das provas globais que fizeram com que as aulas acabassem bastante mais cedo do que estava inicialmente previsto.

As conexões da Matemática, e da Matemática com as disciplinas de artes e tecnologias dos vários cursos, são um aspecto que achamos muito importante no desenvolvimento do programa para a disciplina. Por um lado, as conexões da álgebra ou da análise com a geometria contribuem para uma melhor construção dos conceitos e desenvolvem o raciocínio analítico por o apoiarem no raciocínio visual. Por outro lado, as aplicações da Matemática às várias disciplinas que constituem os currículos destes alunos são um aspecto essencial a ter em consideração para que eles se possam aperceber da utilidade e do interesse em aprender Matemática.

Finalmente, porque mudámos a forma de ensinar Matemática, tínhamos também que mudar a forma de avaliar a aprendizagem. Se privilegiámos os processos de raciocínio ao trabalharmos a resolução de problemas e as actividades de imvestigação, em vez dos exercícios de treino, não podíamos utilizar os testes tradicionais para avaliarmos os alunos. A avaliação teria que reflectir o mais fielmente possível a aprendizagem e, se possível, corrigi-la e promover novas aprendizagens. Foi assim que começámos a experimentar outros instrumentos de avaliação: as memórias descritivas e os testes em duas fases.

Nas memórias descritivas cada aluno relatava, explicitando os processos utilizados, as actividades desenvolvidas na aula, individualmente ou em grupo.

A primeira fase dos testes era realizada na aula, com consulta, e os alunos deveriam, tal como nas memórias descritivas, explicar os passos efectuados na resolução dos problemas. A professora corrigia os testes, sugerindo pistas para que os alunos pudessem, numa segunda fase, resolver os problemas que não tivessem resolvido na primeira fase, fazer generalizações, refazer raciocínios, melhorar as conclusões, ou explicar melhor o que tinham feito. Com as orientações dadas pela professora, o aluno tinha um prazo para reformular o teste, entregando-o de novo para correcção. Só depois desta 2ª fase é que a professora atribuía uma classificação ao teste.

Com estes testes pretendia-se respeitar o ritmo dos alunos, dar-lhes o tempo necessário para pensarem e escreverem sem se sentirem limitados pelo tempo de que dispunham; aliviar a tensão a que normalmente ficam sujeitos pelo facto de terem só uma oportunidade "para mostrar o que valem", enfim, desdramatizar a avaliação e retirar-lhe, o mais possível, toda a carga negativa que normalmente acarreta. Além disso, a segunda fase serviria para confirmar, ou não, as informações recolhidas pelo professor na primeira fase e aperfeiçoar as aprendizagens.

Os alunos envolvidos na experiência e as suas reacções

Num inquérito que fizemos aos alunos das nossas cinco turmas não só confirmámos as nossas suspeitas, como a situação se revelou ainda mais grave do que pensávamos. Os gráficos seguintes (Fig. 2) revelam bem os antecedentes destes alunos relativamente à Matemática.

Realmente, apercebemo-nos, ao longo do ano, que os conceitos mais elementares estavam mal compreendidos, que os alunos não tinham hábitos nem métodos de trabalho e tinham muita dificuldade em interpretar e resolver as situações que lhes propúnhamos, por mais

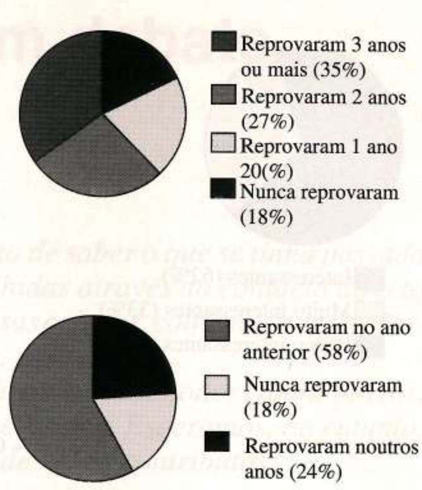


Fig. 2 — Reprovações em Matemática em anos anteriores.

simples que fossem. Foi por isso que não fomos tão longe quanto gostaríamos, tivemos que começar do princípio porque os conceitos geométricos eram praticamente desconhecidos da maior parte destes alunos, e os outros estavam muito mal compreendidos. Também o progresso no desenvolvimento de capacidades de interpretação, investigação, organização, enfim, resolução de problemas, é lento e o tempo era pouco — três aulas semanais durante um único ano lectivo não chegaram para fazer tudo o que tínhamos planeado.

Foi pouco o que fizemos, mas foi alguma coisa. Na nossa opinião conseguimos promover alguns hábitos e métodos de trabalho, desenvolver algumas capacidades de resolução de problemas e trabalhar alguns conceitos importantes.

No inquérito realizado no fim do ano lectivo, os alunos manifestaram-se favoravelmente relativamente às aulas e aos instrumentos de avaliação (vejam-se os gráficos das Fig. 3 e 4).

Os alunos que responderam que estes instrumentos de avaliação eram melhores que os testes tradicionais apresentaram como principais razões: "ter uma segunda oportunidade", "corrigir os próprios erros", "dar tempo para reflectir com mais calma" e "ajudar a compreender melhor".

Reproduzimos ainda algumas das opiniões que eles escreveram acerca das

Fig. 3 — Opinião dos alunos sobre as aulas de Métodos Quantitativos.

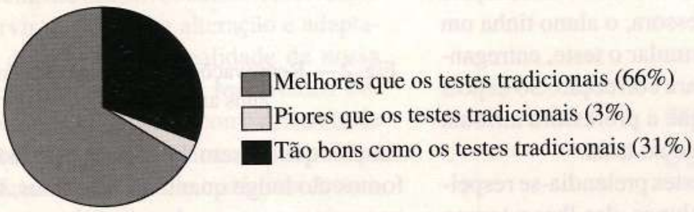


Fig. 4 — Opinião dos alunos sobre os instrumentos de avaliação.

aulas e que nos pareceram significativas:

"...se as aulas fossem sempre assim, até que era porreiro."

"Foi uma disciplina que desenvolve as capacidades de análise do aluno em muitas matérias."

"A disciplina obriga-nos a resolver algumas situações com método..."

"Com a disciplina descobrimos coisas muito interessantes, enfim brincámos com os números."

"Foram aulas suaves e com pouco cheirinho a matemática. Com matemática tive muitas negativas e em métodos surpreendi-me."

"É uma disciplina que amadurece bastante a capacidade de pensamento dos alunos. Ajuda bastante na resolução de diversos problemas com os quais nos podemos deparar no dia-a-dia. É um pouco diferente de Matemática na medida em que se tem que arranjar argumentos e se tem de pesquisar bastante mais para se finalizar uma questão."

"Podia ter apelado mais à inteligência!" (opinião duma das melhores alunas)

"Esta disciplina foi (...) a aprendizagem de coisas que nos vão ser úteis no futuro. (...) fez-nos pensar e saber aplicar os conhecimentos e não apenas sabê-los."

"Devia ter aparecido mais cedo. É uma disciplina muito bem pensada porque nos ajuda a entender melhor aquilo que deixámos para trás."

"Esta disciplina foi para mim uma maneira de estudar Matemática de maneira mais fácil, mais sugestiva, mais interessante."

"Foi uma disciplina 100 vezes melhor que a tradicional matemática."

Não queremos ser demasiado optimistas, mas as reacções dos alunos foram bastante positivas. Um dos nossos principais objectivos era desenvolver nos alunos o prazer de fazer Matemática, e parece-nos que estamos a consegui-lo. Um dos sinais que nos deixou animadas foi o facto de, em cinco turmas, apenas uma aluna ter desistido da disciplina a meio do último período. De facto, com os antecedentes destes alunos e com o que é habitual nesta escola, seria de esperar uma percentagem de abandono bastante elevada.

Que futuro?

Todas nós sentimos que valeu a pena, mas que ainda temos muito que aprender e investigar para atingirmos os nossos objectivos.

O projecto vai continuar: estamos neste momento a elaborar uma proposta de programa que iremos experimentar no próximo ano e onde está prevista a realização de trabalhos de projecto com os alunos, que façam a ligação entre a Matemática e as disciplinas de Arte e Tecnologias. Por outro lado, está em fase de instalação um Laboratório de Matemática, já aprovado pelo Conselho Pedagógico. É nosso propósito ir equipando esse laboratório com materiais manipulativos, eventualmente construídos pelos alunos, computadores, calculadoras gráficas, livros, etc.. Os trabalhos de projecto a desenvolver incluem a construção de materiais para o laboratório.

Enfim, esperamos, sinceramente, ter contribuído e continuar a contribuir para que a Matemática deixe de ser a disciplina que serve "apenas para torturar os alunos".

Maria do Pilar Mansos
Alice Pinto
Rita Bastos
Clara Pinheiro
Cristina Saporiti
Escola Secundária António Arroio

Métodos Quantitativos em debate

Ana Vieira e Paulo Abrantes

Visitámos duas escolas, ambas na periferia de Lisboa, com o propósito de saber o que se tinha passado em 1993/94 com os Métodos Quantitativos. As informações foram recolhidas através do contacto directo com as professoras que leccionaram esta nova disciplina. Falámos com essas colegas, colhemos impressões, pedimos pequenos depoimentos escritos. É disso que aqui damos conta.

A nossa ideia é contribuir para o início de uma discussão mais profunda sobre os Métodos Quantitativos. Este trabalho não é um balanço exaustivo nem um artigo de fundo sobre o tema. Esperamos, no entanto, que possa fornecer material para reflexão e encorajar o aparecimento de novos contributos.

Uma das escolas que visitámos tem 7 turmas de Métodos Quantitativos (MQ), distribuidas por 3 professoras. Uma turma é de Administração, outra de Artes e as 5 restantes de Humanidades.

Quando foi feita a distribuição de serviço lectivo, os MQ foram encarados pela generalidade do grupo de Matemática como uma disciplina de pouco "peso", pouco importante, conotada como terrível de dar pois destinava-se a alunos "péssimos". Assim, foi deixada para segundo plano e distribuida às pessoas mais novas do grupo, professoras com poucos anos de experiência.

O programa não foi discutido no grupo, sendo isso considerado apenas uma preocupação das três professoras envolvidas. Estas, ao discutirem a planificação anual, decidiram alterar a ordem do programa. Começaram com os Números, depois Lógica, Estatística e Probabilidades, e finalmente Funções. Embora esta ordem não fosse consensual, foi a que seguiram sob o argumento de que "os alunos teriam mais facilidade em começar com um assunto conhecido, como é a escrita em notação científica, operações com números, radicais, etc., e ao mesmo tempo aproveitava-se o facto de ainda estarem lembrados destes conteúdos uma vez que eles faziam parte do programa do 9º ano".

A ordem dos conteúdos foi igual para todas as turmas, não tendo sido considerada qualquer distinção entre alunos de diferentes áreas.

Na altura da entrevista (fim do mês de Maio), estas colegas previam que iria ficar por dar parte do capítulo das Funções. Para justificar o não tratamento de todos os conteúdos, referiram um programa exageradamente grande e um número reduzido de aulas por semana (apenas 3 horas), mas também referiram como tendo grande importância a desmotivação generalizada dos alunos (chegando até a traduzir-se em falta de assiduidade), a falta de conhecimentos de base ("muitos destes alunos são alunos com um passado de insucesso permanente a Matemática - alunos até de *nível 1*") e finalmente a instabilidade e interrupção de aulas devido à realização das provas globais.

Sobre os métodos de trabalho, uma das professoras diz:

"Para os dois primeiros capítulos a metodologia utilizada e as actividades propostas não foram no essencial diferentes do que se propunha com os programas antigos, ou seja, quando se ensinava matemática do 10º ano a alunos de outras áreas. O capítulo da Estatística e o das Probabilidades deu origem a actividades diferentes, que obrigaram o aluno a intervir mais, exigindo-lhe um esforço de outro tipo na execução das mesmas, o que nem sempre foi bem aceite por alguns alunos".

O facto de os alunos não utilizarem calculadoras científicas limitou as actividades a propor bem como o interesse das mesmas. Mas a reacção negativa face à Matemática e o conhecimento de que nalgumas disciplinas os alunos gastavam muito dinheiro em material escolar, levou a que as colegas não exigissem a compra de calculadoras científicas.

Como reagiram os alunos aos MQ?

A esta questão as colegas responderam prontamente: "De uma maneira geral mal!". O insucesso foi grande, entre 40 e 80% (dados referentes apenas ao 1º e 2º períodos). Em praticamente todas as turmas houve alunos que foram desistindo durante o ano. Numa das turmas, chegaram a "desaparecer" 9 alunos (alguns mudaram de curso e outros abandonaram a escola). Preocupadas com o insucesso e com o desinteresse, as colegas tentaram perceber, junto dos alunos, o que se passava, e concluiram que a principal preocupação da maioria dos alunos quando escolheram uma área era a de fugir à Matemática e à Física, e só depois pensavam no curso ou profissão que queriam seguir. Uma das colegas é directora de turma e refere: "Também os pais acham que esta disciplina não tem muito interesse. Andaram todo o ano preocupados com as negativas dos filhos, mas apenas noutras disciplinas. Quanto aos MQ alguns pais diziam que os filhos tinham desculpa porque nunca tinham sido bons a Matemática. Havia mesmo pais que pensavam que MQ era uma disciplina em que não era necessário ter nota para passar".

Os conteúdos que os alunos mais pareceram detestar foram a Lógica e a Estatística.

Perante este panorama é notório o desânimo das colegas: "Turmas deste género exigem uma maior e melhor motivação e eu confesso que não consegui obtê-la por parte dos alunos. Para o ano já não quero MQ".

Tentando fazer um balanço crítico: "A ordem dos conteúdos foi mal escolhida. O pressuposto de que estávamos a começar por conteúdos de que os alunos já tinham algumas bases, é errado, uma vez que eles não têm bases nenhumas. O tempo destinado à Lógica foi exagerado. É disparatado dar domínios de expressões analíticas desligados das funções".

Na segunda escola, havia 5 turmas de MQ, uma de Artes, duas de Humanidades e as duas restantes de Administração. Quatro dessas turmas foram leccionadas pelas professoras estagiárias da licenciatura em Ensino da Matemática e a quinta turma por uma professora efectiva da escola. Claramente, na distribuição de serviço lectivo no 10º ano entre os elementos do 1º grupo, a preferência tinha recaído na disciplina de Matemática.

O 1º grupo não discutiu colectivamente o programa de MQ. Essa tarefa ficou a cargo das professoras que tinham a responsabilidade de leccionar as turmas respectivas. Por razões óbvias, houve um forte trabalho colectivo ao longo do ano entre as quatro colegas do núcleo de estágio mas também alguns momentos de troca de ideias com a quinta professora que tinha .

A expectativa era de encontrar alunos com uma atitude negativa face à Matemática. Por isso, a primeira semana de aulas foi especialmente cuidada. A opção foi preparar para essas aulas um conjunto de actividades de carácter lúdico que, ao mesmo tempo, estivessem relacionadas com cada um dos capítulos do programa, fornecendo assim aos alunos uma espécie de *antevisão* do que seria a disciplina.

Começaram pela Estatística, atendendo a que era um tema novo para os alunos, diferente da Matemática que eles conheciam de anos anteriores. Seguiram-se as Probabilidades, pela mesma razão e pelas suas relações com o tema anterior. As restantes unidades tratadas foram os Números e as Funções. Uma opção fundamental foi deixar para o fim o capítulo de Lógica, sabendo que eventualmente poderia mesmo não chegar a ser abordado. A razão invocada para isto foi a maneira como ele aparece no programa, considerada menos interessante e significativa para estes alunos.

O plano traçado para o ano lectivo foi consideravelmente perturbado, a partir do início de Maio, pelas provas globais. A consequência foi que não só a Lógica não foi abordada como uma parte do capítulo das Funções ficou igualmente por tratar. Mas houve um outro factor que contribuiu para o não cumprimento de todos os conteúdos. A maioria das propostas de trabalho feitas aos alunos na sala de aula tinham características de actividades de investigação e descoberta, apelando à intuição e à exploração, e este tipo de propostas implica desde logo mais tempo em comparação com estratégias baseadas na exposição pelo professor e na resolução de exercícios.

Por indicação expressa das professoras, os alunos compraram calculadoras científicas e usaram-nas nas aulas em actividades relacionadas com todos os temas do programa.

Os alunos, inicialmente desconfiados face à nova disciplina, foram gradualmente modificando a sua atitude de um modo que as professoras consideram muito positivo. Quando se iniciou o estudo dos Números surgiram contudo algumas *recaídas*. Um aluno chegou a comentar: "*Métodos* era a minha disciplina favorita, mas agora já não gosto porque isto é Matemática...".

De qualquer modo, o ambiente em relação a esta disciplina era geralmente favorável. Os resultados foram bastante satisfatórios. Não houve desistências e, em média, reprovou um aluno por turma.

As professoras dirigiram os seus esforços em primeiro lugar para a motivação dos alunos, preocupando-se tanto com as actividades que iriam propor aos alunos como com a atitude que assumiriam perante eles e a disposição com que entrariam na sala de aula: "Hoje temos a certeza de que esta disciplina tem que ser encarada numa outra perspectiva. A disciplina de Métodos Quantitativos representa talvez a última oportunidade que estes alunos têm para compreenderem a importância e aplicabilidade da Matemática".

Uma ideia que estas colegas sugerem para o futuro é a tentativa de articular os capítulos de Funções e de Números, com a intenção de dar mais significado a este último aos olhos dos alunos. Outro ponto que julgam merecer maior atenção é a cuidadosa definição, em cada capítulo, das prioridades de uns aspectos em relação a outros.

Quando perguntámos se gostariam de voltar a leccionar esta disciplina, responderam sem hesitar: "Sim, será de novo um desafio".

A experiência dos MQ nestas duas escolas mostra alguns pontos comuns: a nova disciplina foi encarada pelo 1º grupo como "secundária"; a discussão do programa foi deixada apenas para os colegas que o iriam leccionar, a planificação foi idêntica para todas as turmas independentemente da área respectiva. Outro aspecto comum foi a desconfiança inicial dos alunos face a uma disciplina nova que "cheirava" a Matemática...

Houve também diferenças consideráveis. Uma foi na ordem dos temas: numa escola começou-se por um assunto conhecido e a Lógica ocupou bastante tempo; na outra, a opção foi começar por um tema novo e a Lógica foi preterida. Outra diferença diz respeito ao uso das calculadoras científicas.

Mas o mais importante é que, numa das escolas, a experiência não deixou grandes recordações nem aos alunos nem aos professores envolvidos enquanto na outra o balanço terá sido bastante positivo. Parece haver sobretudo diferenças na importância atribuída à disciplina e nos objectivos que lhes estão associados.

Não tínhamos, nem temos, o propósito de estabelecer comparações ou de tirar conclusões simplistas. O ensino e a aprendizagem constituem um processo complexo que depende de uma grande variedade de factores. Cada turma é uma combinação única de pessoas. Mas é possível, e desejável, falar sobre as diferentes experiências, reflectir sobre elas, tomá-las como base de uma discussão colectiva sobre o nosso papel enquanto professores de Matemática.

Ana Vieira
Esc. Sec. de Linda-a-Velha
Paulo Abrantes
Fac. Ciências de Lisboa

A minha primeira experiência de utilização da História da Matemática na sala de aula

Maria José Costa

Sem recorrer à História da Matemática não podemos contribuir para atingir algumas das finalidades do programa. No entanto, o modo de levar a História da Matemática para a sala de aula nem sempre é fácil... Aqui são relatadas algumas experiências no ensino secundário.

Com a experimentação dos novos planos curriculares, ocorrida durante os anos lectivos 1991/92/93 vi-me confrontada com a necessidade de recorrer à História da Matemática. De facto, um dos objectivos gerais da disciplina de Matemática, é:

> "Conhecer aspectos da História da Matemática: conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social." (Programa, pág. 27).

Penso que sem recorrer à História da Matemática não poderemos contribuir para atingir algumas finalidades do referido programa, como por exemplo:

> "Aprofundar os elementos de uma cultura científica, técnica e humanística que constituem suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa." (pág. 26).

Contudo, a maioria dos professores em serviço nos dias de hoje não recebeu formação nessa área, nem do ponto de vista informativo nem do ponto de vista didáctico. É de esperar, portanto, grandes hesitações: que fazer? Contar meia dúzia de peripécias ou anedotas sobre o tema em estudo ou sobre o matemático mais ligado a ele? Localizar o assunto tratado no tempo e na história seja de Portugal, mundial ou científica? Situar a ocorrência de um modo rigoroso ou só aproximado do jeito de "antes de" ou "depois de" tomando como referência algo que faz parte do dia a dia ou dos conteúdos de outras disciplinas? E como proceder? Dar ou pedir ao aluno que recolha informação histórica de relevo? E quais as fontes disponíveis?

Se hoje não tenho ideias claras sobre o modo de como levar a História para a sala de aula, quando iniciei a citada experimentação ainda mais turvas elas estavam. Mas a obrigação manda!... É essa experiência que passo a relatar.

Durante a experimentação do programa de 10º ano, pedimos aos alunos duas tarefas no âmbito da História da Matemática: a primeira, consistiu na História da Estatística, tarefa que todos mais ou menos foram desempenhando, uns melhor outros menos bem, mas todos cumpriam razoavelmente; muitos a focar os mesmos aspectos e a descurar outros, fruto natural das fontes utilizadas e que foram, sobretudo, enciclopédias de divulgação em geral e não específicas nem do tema nem da disciplina.

A segunda, foi a leitura guiada de um texto: entregue o texto, foi pedido, por sugestão das acompanhantes da experimentação dos novos programas, que respondessem a umas quantas perguntas. O texto dizia respeito à vida de Descartes e tinha sido distribuido com os textos de apoio que recebíamos. Redigimos umas perguntas que focassem a atenção sobre a época da vida de Descartes, os países em que tinha vivido, as profissões que tinham exercido; finalmente, pedíamos que situassem no contexto artístico mundial e no contexto político português. A pergunta foi assim formulada:

"Refira

a) matemáticos

b) filósofos

c) artistas

d) figuras da História de Portugal contemporâneos de Descartes."

Entre as repostas dadas a esta pergunta, surgiram nomes como D. Afonso Henriques, D. João I, D. Carlos e Sebastião da Gama, Kant, Edgar Morin e Eliade; Lagrange, Gauss, Lobatchevski, Bolyai e Galois. Sentiu-se, por isso, necessidade de esclarecer o conceito de "contemporâneo". Exploramos, então, o sentido que cada um de nós dava a tal palavra (havia quem tomasse contemporâneo no sentido de convivência); discutimos ainda se seria possível usar a teoria dos conjuntos para definir tal conceito. No fim da discussão, apresentamos a síntese das respostas dadas que caíam dentro da definição de contemporaneidade aceite por todos e acrescentámos alguns nomes que não tinham sido referidos pelos alunos. Não deixámos, contudo, de fazer referência à obra daqueles que não foram apanhados pelo critério definido.

Mas a verdadeira falha desta questão não esteve na diferença de conceito, mas sim na incapacidade de ler perguntas formuladas daquele modo!

Este trabalho, apesar de não ter sido programado nesse sentido, permitiu alguns esclarecimentos do ponto de vista de língua materna e da orientação dos questionários escritos e dos cuidados a ter na sua leitura.

Aos mesmos alunos, agora no 11º ano, foi-lhes pedido um trabalho sobre a História da Trigonometria, e a reacção foi catastrófica: uns copiaram integralmente as informações que certas enciclopédias dão sobre tal palavra, outros, o resumo histórico que figura no "Compêndio de Trigonometria" de J. Calado, outrora livro único; alguns limitaram-se a entregar as fotocópias de enciclopédias acrescentando em jeito de justificação, que não valia a pena perder tempo a fazer cópia. Poucos, muito poucos se dedicaram, de facto, a uma síntese ilustrativa da história de tal tema!

No 12º ano utilizei uma estratégia diferente. De um livro de História da Matemática [1] recolhi a investigação levada a cabo por Otto Neugbauer para decifrar uma tábua babilónica e transformei-a em folha de trabalho, isto é: cada passo da investigação foi transformado em informação ou em instrução para descobrir o conteúdo da pedra. O trabalho foi fraccionado em sucessivas tarefas para permitir esclarecimentos do ponto de vista das tentativas, opções ou justificações do investigador.

E todos munidos da sua calculadora trabalham afanosamente, ao mesmo tempo que ouviam falar da História da Matemática e reviam conceitos trigonométricos já leccionados.

O meu testemunho de utilização da

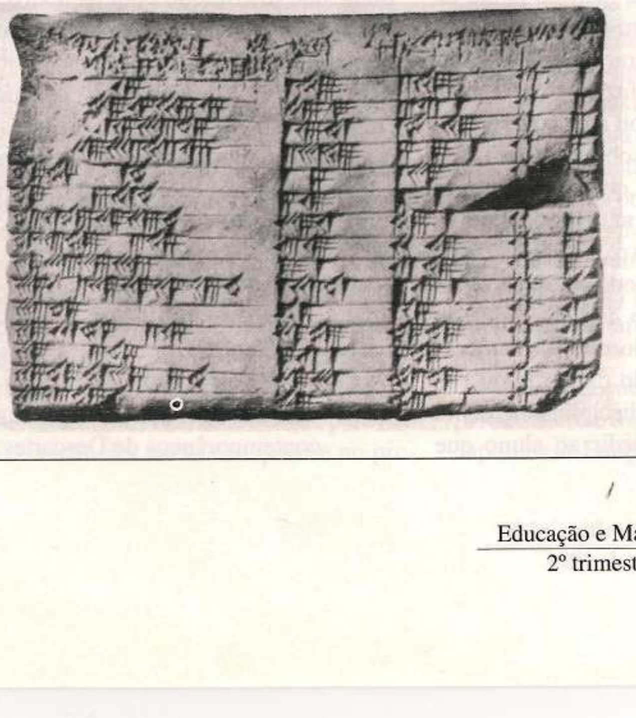
ESCOLA SECUNDÁRIA DE AUGUSTO GOMES • MATOSINHOS

12º ANO • FOLHA DE TRABALHO • 1992/93

SHERLOCK HOLMES NA BABILÓNIA

Assim se intitula um dos subcapítulos sobre a Matemática na Babilónia e que figura num dos livros sobre História da Matemática. Esse capítulo, depois de breve introdução sobre a Aritmética na Babilónia, apresenta uma recente investigação com vista à interpretação de uma tabela, de origem desconhecida, que terá sido escrita 1600 anos a.C.. Vamos acompanhar essa investigação.

Essa tabela, conhecida como Plimpton 322 (reproduzida abaixo), apresenta marcas da erosão dos tempos e também vestígios de cola dos tempos actuais, o que sugere que uma parte original poderá ter-se perdido.



A primeira coluna é a que está mais danificada. Prestemos por agora atenção às duas seguintes que, descodificadas para a notação actual, apresentam:

COLUNA B	COLUNA C	COLUNA C+B	COLUNA C-B
119	169		
3367	11521		
4601	6649		
12709	18541		
65	97		
319	481		
2291	3541		
799	1249		
541	769		
4961	8161		
45	75		
1679	2929		
25921	289		
1771	3229		
56	53		

História da Matemática na sala de aula termina aqui. Não sei avaliar devidamente esta experiência, e longe de mim pensar que é exemplo a seguir. Mas gostaria de acrescentar que quer o segundo trabalho de 10º ano quer o de 12º me deixaram a agradável sensação de tempo bem utilizado e que a reação dos alunos a esses mesmos trabalhos foi nitidamente positiva.

Por outro lado, a História da Matemática afigura-se-me como uma fonte inesgotável de sugestões para vencer barreiras. Conceitos à volta dos quais o homem dedicou o melhor dos seus anos, ideias perseguidas ao longo do tempo, retomadas pelos mesmos e por outros, com ligeiras modificações ou apenas adaptações da formulação do problema à linguagem ou ao conhecimento da época, podem ser entendidos mais facilmente quando apresentadas de uma maneira em vez de outra; as tentativas rejeitadas para a solução da questão poderão dar pistas que permitam identificar as dificuldades que os alunos possam encontrar no estudo de tal tema. Poderá vir a ser o elo de ligação que faltava para integrar a disciplina de Matemática num ambiente interdisciplinar.

Ao contrário do que se passa com a introdução do computador na sala de aula ou da calculadora, recorrer à História da Matemática parece exigir um grande conhecimento dessa mesma História; será, por certo, a modificação metodológica que mais trabalho dará ao professor, sobretudo aos colegas com a minha idade profissional, uma vez que só recentemente é assunto estudado nas universidades e mesmo assim não o é em todas. Mas a sobrecarga que tal preparação parece constituir é substancialmente reduzida se pensarmos que não será necessário estudar tudo de uma só vez! Contudo, poderá vir a ser a mais gratificante quer junto dos alunos quer ao nível da integração dos professores recentemente chegados ao ensino secundário e já com informação sobre o tema.

Aqui fica o desafio, aos colegas do ensino secundário, aos especialistas em Didáctica da Matemática e aos investigadores em História da Matemática, no sentido de investir, cada um no seu âmbito, na História da Matemática.

(1) *The History of Mathematics: a reader*, John Fauvel e Jeremy Gray. The Open University, 1987. O GTHEM disponibiliza uma cópia das páginas respectivas a quem estiver interessado.

Maria José Costa
Escola Sec. de Augusto Gomes
Matosinhos

1ª tarefa

Depois de todas as vicissitudes que estes escritos passaram, estas listas contêm inexactidões (algumas das quais poderão ser provenientes de falhas do interpretador ou do autor).

Procure regularidades entre estes números e detecte as falhas existentes.

Corrija estas falhas, recorrendo às regularidades encontradas.

SUGESTÃO:

- Prencha as colunas C+B e C-B.
- Exprima as colunas B e C nas colunas calculadas.

2ª tarefa

Conjecture a finalidade de tal tabela.

3ª tarefa

Comprove que

$B = a^2 - b^2$ e $C = a^2 + b^2$

com

$C + B = 2a^2$ e $C - B = 2b^2$

4ª tarefa

Acrescente a coluna D com 2ab.

5ª tarefa

Relacione as colunas B, C, e D.

Interprete geometricamente essas relações.

6ª tarefa

Decifrados os sinais registados na placa, as três primeiras colunas aparecem assim:

A	*B*	*C*	
[1;59,0,]15	1,59	2,49	1
[1;56,56,]58,14,50,6,15	56,7	<u>3,12,1</u>	2
[1;55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1;]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1;]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1;]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1;]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1;]41,33,45,14,3,45	13,19	20,49	8
[1;]38,33,36,36	<u>9,1</u>	12,49	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1;33,45	45	1,15	11
1;29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1;]27,0,3,45	<u>7,12,1</u>	4,49	13
1;25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1;]23,13,46,40	56	<u>53</u>	15

1) Identifique o código utilizado.

2) Conjecture

- a finalidade de tal tabela.
- o nível dos conhecimentos matemáticos na Babilónia.

Uma experiência com calculadoras gráficas

António Abrantes

Que sentido tem que os nossos alunos continuem a cavar pletoricamente matemática a lápis e papel, recordando a nossa luta, a dos menos novos, com as tábuas de logaritmos e de algoritmos lançados para a Torre dos Tombos Matemáticos?

Numa fria manhã entre 4 e 7 de Novembro de 1992 entrei na Escola Alves Martins para um ProfMat importante, não tão turístico como o dos Açores, sem Atlântico pelo meio, após uma breve estrada de 35 minutos entre Seia a Viseu. Vi uma feira grande de grandes coisas e estava com o seu estaminé montado um cavalheiro falando em espanholiano a lançar num écran umas figurinhas muito interessantes a partir de um retroprojector telecomandado por uma coisa que parecia ser uma calculadora. Ele apresentava coisas que me pareciam ser funções trigonométricas, para segundos depois já ser um logaritmo a espreguiçar-se, uma expressão numérica logo de seguida. Isto parecia ser uma coisa divertida.

No piso de cima estavam umas colegas (mandava aqui um piropo, mas não fica bem) com um trabalho sobre calculadoras gráficas e funções no Secundário.

Desci e fui comprar um brinquedo, uma calculadora gráfica TI- 85. Vim para casa e brinquei. Parecia um garotito com um arco novo (no meu tempo os brinquedos eram esses). Começa aqui a minha experiência com calculadoras gráficas.

Ainda em Viseu, comprei a bíblia NORMAS para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar e onde vi, li coisas que me diziam muito respeito e comecei a alimentar a ideia de introduzir a calculadora gráfica nas minhas aulas. Como era impensável que todos os alunos tivessem um brinquedo daqueles, pedi e consegui que a escola adquirisse um viewscreen equipado com a máquina mais barata, uma TI-81 e ainda mais uma máquina simples também TI-81. (Juro que não recebo quaisquer luvas da Texas Instruments).

Sentia a frigidez dos números, a falta de senso de certos resultados obtidos, o oco da sua e nossa matemática, o amorfismo dos conhecimentos que a maior parte dos nossos alunos transportam que nos poderia levar a que o Sol estivesse mais perto de Seia que a Marinha Grande. Alguns campeões a resolver equações do 2º grau pela fórmula resolvente não são capazes de transportar essa informação para um gráfico de função quadrática, pode saber-se que para ver se uma função é par ou ímpar se faz a substituição de x por -x mas se lhe apresentar um gráfico perfeitamente simétrico em relação ao eixo dos yy não lhe diz nada a expressão "função par". Por várias vezes, temos a sensação de que estamos a treinar papagaios analíticos que, perante estimulações do tipo resolve a equação, salivam e regorgitam umas coisas esquisitas que não se entendem mas que é a reacção que tem pontos nos testes.

A Matemática povoada de gráficos sempre me pareceu mais compreensível e durável que a Matemática simbólica. Para quê fixar páginas de texto para recitar as características de uma função? Dá mais rendimento fixar gráficos. Desde que os consiga ler, terei sempre à

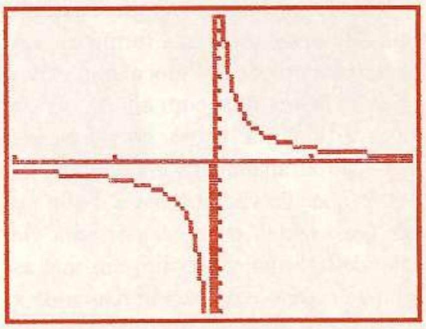


Gráfico da função y=1/x desenhado por uma calculadora, modelo TI-81 disposição a propriedade que me interessa. Talvez tenhamos que pensar em operações de marketing para a Matemática.

Que sentido tem que os nossos alunos continuem a cavar pletoricamente matemática a lápis e papel, recordando a nossa luta, a dos menos novos, com as tábuas de logaritmos e de algoritmos lançados para a Torre dos Tombos Matemáticos. Há grandes tractores matemáticos que os alunos mais velhos deverão conhecer mesmo que o programa os não contemple. Dá a impressão que os doentes antigos não podem usufruir de medicamentos recentemente saídos dos laboratórios apenas destinados a doentes novos, mesmo que a doença seja a mesma. Parece que não é mesmo só impressão...

Reconheço que os meus alunos ainda têm que prestar provas em que o analítico é rei, mas ..

Decisão

No ano lectivo de 1993/94, são me entregues na Escola Secundária de Seia duas turmas, uma do 11° ano e outra do 12° ano, esta em curso nocturno. A turma do 11° ano é constituída por alunos com quem já tinha trabalhado no 10° ano e fora considerada bastante fraca nas diferentes disciplinas de qualquer uma das componentes geral, específica e vocacional, não só comparada com outras turmas da mesma área de estudos, como em classificações absolutas. As notas positivas que existiam no final do 10° ano eram classificações que se distribuíam de 10 a 13, com predomínio da metade inferior e o número de alunos que reprovaram, pelo menos, a uma disciplina, era bastante significativo.

Passei a questionar-me sobre a estratégia a adoptar com esta turma e duas opções claramente se colocavam. Privilegiar a via analítica com aqueles E's e A's invertidos que, apesar do seu grande rigor, são atrapalhantes e criadores de poeiras que não vão deixar ver o que é o bom e essencial, ou optar por uma via mais visual, tipo videoclip, em que as figuras do seno e da característica de x ocupassem a mesma zona do cérebro de uma Madona ou dos Aerosmith ou de um sempre Leonard Cohen. A opção pendeu por uma via claramente visual em que o analítico iria desempenhar um papel de apoio ao gráfico. Os cálculos far-se-ão para melhor fazer gráficos e para destes melhores conclusões tirar ou para interagirem com gráficos.

Estavam reunidas as condições para um trabalho diferente. Havia material (não o desejável), a decisão estava tomada e, após algum treino numa sala sozinho, registava-se alguma perícia em manejar o equipamento (não é fácil montar e desmontar o aparelho e voltar a colocá-lo certinho na caixa). Dos alunos tratar-se-ia na sala de aula.

Plano geral

O plano da experiência junto destes alunos passará pela seguinte sequência:

- Leitura de gráficos.
- Construção e memorização (que horror!) de gráficos de funções elementares.
- As modificações produzidas num gráfico pela introdução de um parâmetro na expressão designatória da função.
- Operações sobre funções.
- Uso de gráficos para dizer coisas acerca de equações e de inequações.

Não haveria a intenção que os alunos aprendessem a trabalhar com a calculadora gráfica. Queria-se usar a calculadora num processo de ensino tradicional, para aproveitar as enormes potencialidades que eu via naquele objecto. Poder apresentar gráficos de uma forma tão rápida, tão versátil, fazer cálculos, voltar aos gráficos, era sem dúvida algo que teríamos de aproveitar. O tipo de ensino praticado foi inicialmente baseado no centralismo democrático (não é esse em que estão a pensar os políticos) em que o professor guia o curso das coisas, mas em que faz muitas perguntas a todos os alunos até obter uma resposta que mereça o consenso e que seja a matematicamente correcta. O professor era o principal introdutor.

Actividades

I) Começámos por constatar que para se fazer um gráfico de uma função, precisávamos de saber fazer, ou mandar fazer a uma calculadora, cálculos que se registam numa clássica tabela de valores x e y e saber representar esses valores num diagrama XY. Fizemos esse trabalho para funções muito simples como $y=2x-3$, $y=2^x$ só para interiorizar o processo. A seguir surge a informação, não sei se correcta, que a calculadora que nos iria acompanhar durante largas aulas faz exactamente aquilo só que muito mais depressa.

II) Vimos em seguida, recorrendo ao viewscreen, funções definidas graficamente lançadas por expressões analíticas que, na altura, não eram de modo algum importantes, mas que apresentavam características de observação interessante como por exemplo $y=\log\left(x^2-2x\right)$ e $y=\left(x^3-3x+2\right)^{1/3}$ que, com o recurso a TRACE, permitia ver os valores de x e de y da tabela que a máquina produzia. Estes gráficos foram usados para introduzir o vocabulário próprio das funções - objectos e domínio (os valores de x que têm y), imagens e contradomínio (os valores de y saídos), os zeros (os xx que dão 0 para y) o sinal da função (quais os xx que dão valores de y positivos, quais os que dão negativos), intervalos de variação (ver o cursor a subir e a descer como na montanha russa, o x a aumentar de valor e o y ora subia ora descia) e identificação gráfica dos intervalos em que a função é crescente e decrescente, máximos e mínimos de uma determinada porção de gráfico.

Algumas questões sobre a definição de função (haverá algum x com mais de um y?, uma circunferência pode ser o grafico de uma função?) sobre o conceito de injectividade (há algum y que seja imagem de mais que um x? Quais os y que são imagem de um só x?), acerca da sobrejectividade (todos os yy do eixo vertical são utilizados, são imagem de algum x? Quais os que não são imagem de qualquer x?).

III) A proposta seguinte foi a elaboração de gráficos de funções elementares como $y=x$; $y=-x$; $y=2x+6$; $y=-2x-3$; $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$; $y=1/x$; e estes saíram da máquina aproximadamente com os alunos tinham previsto.

Para saltar para as funções trigonométricas recordámos, no quadro, a matéria vista no ano anterior em que, utilizando material de desenho, régua graduada e transferidor, se desenharam ângulos e se leram valores, claro que aproximados, das diferentes funções trigonométricas para esses ângulos e se fizeram estimativas quer para ângulos quer para valores de função. Não foi para nós difícil recordar essas coisas e não foi doloroso aceitar os gráficos do seno, do coseno, da tangente e da cotangente, aliás também construídos no 10º ano. Usámos então a calculadora com o viewscreen para rever estas coisas tendo tido oportunidade para vincar a diferença entre o trabalho em graus e radianos, como se pode ver trabalhando em ZOOM STANDARD em MODE RADIAN ou DEGREE. Surgiram aqui interpelações interessantes como os equívocos que todos os anos encontramos de ouvir dizer que *sen*2 não existe ou de termos bocas abertas quando se diz que o *sen*4 é um número negativo, porque 4 no círculo trigonométrico fica no 3º quadrante. O objectivo desta actividade foi a de familiarizar os alunos com os gráficos de funções elementares, estabelecer diferenças e analogias entre eles e instalar uma certa confiança nas possibilidades de cada um.

IV) Nesta fase, apreciámos o efeito que um parâmetro introduzido na expressão designatória produzia no gráfico da função. Vimos o efeito de um 3 sobre a função $y = x^2$. Passaram pelo écran os gráficos de $y = x^2 + 3$; $y = x^2 - 3$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$; $y = \pm 3x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$, após algum diálogo sobre o que iria acontecer em cada uma das situações, e podemos dizer que nesta altura já se previa com grande correcção e com bastantes alunos a fazê-lo bem.

Repetiu-se o mesmo esquema com a função seno e com o número 2 e apreciou-se o efeito de aplicação de módulo de uma função.

Surgiram translações horizontais, verticais, contracções, dilatações e outros apertos e desapertos.

V) Foi ainda utilizado o viewscreen para apreciar as funções soma, produto e quociente, sendo aqui usado para verificar a validade de resultados obtidos pelos alunos perante a actividade de representar a soma, diferença, quociente e produto de funções definidas pelos seus gráficos.

Foram vistos ainda os gráficos da função característica e da mantissa e em comparação o gráfico de uma função com a sua inversa.

Nesta fase apareceram já gráficos bastante complicados que se construiam por aplicação de sucessivas transformações.

Relações

Durante várias semanas de aula, o viewscreen fez-nos companhia na sala de aula, não só para ajudar a dar a matéria como para esclarecer e dar significado gráfico a coisas que íamos obtendo analiticamente. Resolvemos muitas equações e inequações quer por processo analítico quer por processo gráfico ou os dois em simultâneo, como inequações do 1º, do 2º e 3º graus, modulares e outras envolvendo a função homográfica. Fizeram-se e disseram-se coisas acerca de equações e de inequações que o processo analítico não nos permitia observar, como, por exemplo, apreciar o número de soluções de equações, envolvendo polinómios e funções trigonométricas. Este trabalho não foi considerado importante pelos resultados obtidos na resolução, mas sim pelo envolvimento que provocou nas coisas que não dão números certos, em situações problemáticas que os alunos outrora abandonavam facilmente, desaparecendo aquela reacção frequente de que não sou capaz de fazer, mesmo antes da abordagem.

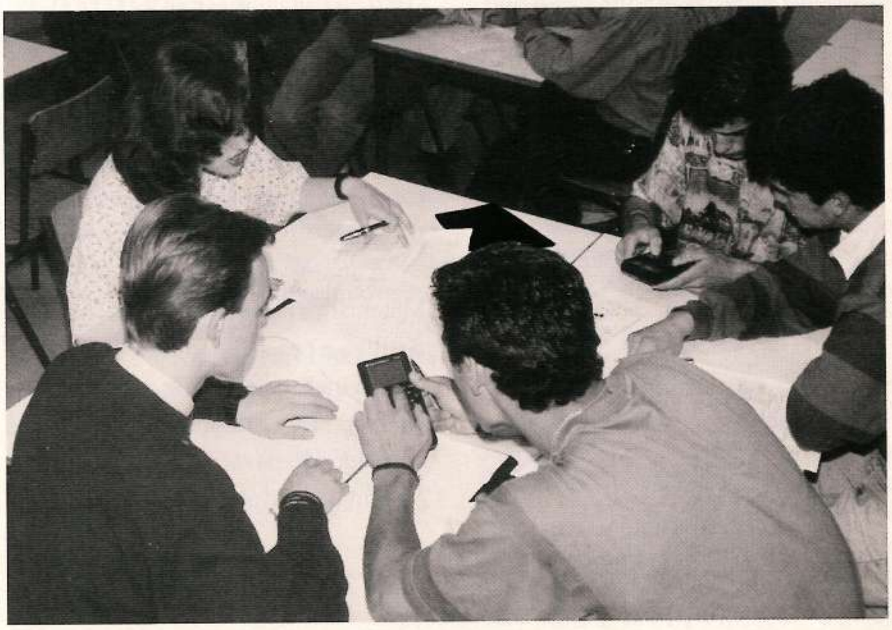
Foi possível fazer ainda modelação gráfica para alguns fenómenos físicos do mundo real.

De referir ainda o facto de os alunos na primeira aula de cada semana, durante este período, apresentarem um relatório sobre as actividades da semana em que deveriam referir os aspectos mais significativos que tinham sido vistos. Pretendia-se que os alunos escrevessem matemática e sobre assuntos matemáticos.

Resultados desta abordagem

Podemos dizer que o ambiente que se viveu durante este tempo de trabalho

- favoreceu a criatividade perante situações menos vulgares — os alunos não se assustavam perante situações problema e abordavam-nas com alguma imaginação;
- apresentou uma maior gama de processos e de recursos para enfrentar situações problemáticas — resolução grá-



fica, analítica e mista de algumas questões;

- reforçou o espírito crítico — a comparação entre processos e a criação de hábitos de previsão e estimação instalou o questionar da plausibilidade de certos resultados;
- trouxe maior clarificação de conceitos matemáticos — noções como período, simetrias, assímptotas, continuidade, contradomínio, injectividade, sobrejectividade, limite e outros saem mais claras e até a linguagem simbólica começa a dizer alguma coisa de palpável;
- melhorou a visão global dos diferentes assuntos favorecendo o estabelecimento de relações entre eles;
- favoreceu a retenção de ideias matemáticas — mais facilmente se retem uma imagem que um texto;
- contribuiu para filtrar os processos analíticos — há operações analíticas sugeridas pelos gráficos que de outro modo não seriam accionadas.

Opinião de alguns alunos da turma do 11º B1 sobre a utilização da calculadora:

Penso que as calculadoras gráficas são muito úteis porque através delas consegui dissipar dúvidas. Passei a compreender como se fazem gráficos de funções que não era capaz de fazer anteriormente. Passei a saber resolver algumas equações que antes não era capaz de resolver analíticamente. (Rui Abrantes)

Eu penso que as aulas de Matemática em que utilizámos a calculadora gráfica me foram muito úteis para perceber e entender melhor aquilo que se podia passar com determinados gráficos, no que diz respeito por exemplo aos zeros, ao tipo de linha que faz o gráfico, aos limites, se é crescente ou decrescente, se é majorada se é minorada, etc.. Penso também que tendo aprendido a dar uma explicação gráfica para determinada questão, também facilmente posso dar uma explicação analítica da mesma questão. (Luis Branquinho)

As aulas de matemática assistidas com a calculadora gráfica ajudaram-me na resolução gráfica de inequações ao passo que se resolvermos analiticamente as inequações nem sempre sabemos à primeira vista as soluções, levando uma pessoa a nem sempre entender o que está a fazer. (Nelson Ribeiro)

Eu penso que as calculadoras gráficas nos ajudaram muito na compreensão da matéria relativa aos tipos de funções e gráficos correspondentes. Com base neles tornou-se mais fácil entender e retirar o que de mais significativo e importante tinha a função, para além de nos ter ajudado a resolver outros tipos de situações que à primeira vista seriam difíceis. Torna a Matemática em algo de acessível para todos e não apenas para alguns na medida em que fomentou a curiosidade em saber como uma função seria representada graficamente. (Filipe Machado)

Para mim as aulas de Matemática com calculadoras gráficas são uma grande ajuda pois pelos gráficos podemos resolver facilmente o que custaria a resolver analiticamente, por isso os gráficos são de uma grande ajuda. (Pedro Pereira)

Conclusão

Estou convencido de que o tempo do processo de aprendizagem não é directamente proporcional ao número de páginas do livro com a matéria a leccionar. O tempo que gastámos (mais que pelo processo tradicional) no tratamento de generalidades de funções e funções trigonométricas não foi de modo algum tempo perdido. Ganhámos noutras zonas do programa algum tempo que nos permitiu velocidade de cruzeiro com os mesmos alunos com que iniciámos o ano e a aquisição de novos conceitos fez-se sob uma base razoável ao nível da compreensão.

A atitude dos alunos relativamente à Matemática pode considerar-se bastante positiva e penso que o facto de praticamente qualquer assunto ou noção ter uma representação gráfica que a suporte tem sido decisiva para que os alunos gostem de... brincar com Matemática.

António Abrantes
Escola Secundária de Seia

Matemáticos Portugueses

Daniel A. da Silva
(1814-1878)

Nasceu em Lisboa. Aos 15 anos assentou praça na Armada, e frequentou a disciplina de Náutica nas duas Academias existentes; terminou os respectivos cursos em 1832 e 1835, tendo sido, entretanto, em 1833, promovido a Guarda-Marinha. Revelou-se com notável aptidão para as matemáticas pelo que resolveu frequentar a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra; aí se formou em 1839. Voltou para Lisboa e passados alguns anos aceitou a nomeação para Lente de Matemática na Escola Naval (sucedânea de uma das Academias que frequentara), onde a par de notável acção pedagógica desenvolveu grande actividade de investigação, de cujos frutos destacamos as memórias:

- ***Sobre a Rotação das Forças em torno dos Pontos de Aplicação*, que a Academia de Ciências (Lisboa) publicou em 1851; trata da importante teoria que constituiu a Estática, ramo da Mecânica;**
- ***Propriedades Gerais e Resolução de Congruências Binómias*, publicada em 1853, onde são estudadas com profundeza e originalidade diversas questões elevadas da Teoria dos Números.**

Pena foi que ficassem jazessem ignoradas, por longos anos, nas Bibliotecas de quase todas as Academias do mundo, por estarem escritas em Português...!.

Compilação de Sérgio Macias Marques

Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia...

Paulo Abrantes

Em vários países, tópicos de Matemática Discreta, como problemas combinatórios, grafos e matrizes, começaram a ser considerados nos programas escolares, tanto ao nível do ensino básico como do secundário. Em Portugal, nem por isso... Mas talvez seja útil que comecemos a discutir uma questão de indiscutível actualidade.

No nº 29 da revista *Educação e Matemática* dois artigos focam a importância nos nossos dias e o potencial interesse educativo de tópicos de Matemática Discreta, nomeadamente ligados à Teoria dos Grafos, que nunca fizeram parte dos programas de Matemática do ensino não superior nem foram considerados no âmbito da nova reforma.

Candelaria Espinel Febles, no artigo "Matrizes por detrás das redes", mostra como as redes e as matrizes permitem abordar problemas actuais da realidade numa perspectiva de modelação matemática. Cecília Perdigão, em "Um breve olhar sobre os grafos", argumenta que vários tópicos da Teoria dos Grafos poderiam com vantagem ser considerados nos programas de Matemática do ensino secundário, atendendo às suas inúmeras aplicações, à simplicidade dos conceitos envolvidos e ao seu potencial para desenvolver aspectos da resolução de problemas como a visualização de situações e a esquematização de raciocínios.

O NCTM, nas *Normas* (1989/1991), propõe a inclusão de tópicos de Matemática Discreta nos currículos. A Norma 12 para os níveis de escolaridade do 9º ao 12º anos refere que devem ser proporcionadas a todos os alunos actividades como a representação de situações problemáticas através de grafos, matrizes, sucessões e relações de recorrência, a construção e análise de algoritmos ou a resolução de problemas envolvendo contagens e probabilidades finitas. Para as *Normas*, a Matemática Discreta diz respeito às propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas numeráveis, e o seu estudo é indispensável no mundo do processamento da informação e na resolução de problemas que envolvam métodos computacionais. O NCTM argumenta que "os computadores são essencialmente máquinas finitas e discretas" que vêm exercendo uma influência crescente nos modos de criar e usar a Matemática.

Na Holanda, a última reforma dos programas para o ciclo inicial do secundário (alunos dos 12 aos 16 anos) assumiu uma perspectiva muito crítica face aos "velhos programas" — que promoviam um ensino formal baseado na teoria dos conjuntos — e adoptou uma abordagem que valoriza o papel da Matemática na interpretação e resolução de problemas da realidade. G. van den Heuvel e H. Krabbendam (1991) explicam como essa abordagem conduziu à opção de "incluir elementos de Matemática Discreta como uma parte substancial do programa para alunos de 12-16 anos". A importância crescente na sociedade de problemas matemáticos envolvendo "redes" (relacionados por exemplo com questões de trânsito ou de comércio, implicando problemas de optimização e de tomada de decisões), assim como o valor do *raciocínio combinatório* presente em muitas situações em que é preciso fazer contagens de um modo organizado, levou-os a considerar que: (i) os grafos podem constituir um ponto de partida para visualizar e criar modelos de situações; (ii) a compreensão (não a execução) de algoritmos é um aspecto relevante que se segue à criação de um modelo; e (iii) o raciocínio ligado aos problemas combinatórios é um apoio essencial à compreensão desses algoritmos.

No nosso país, não há tradição de ensino destes tópicos que não foram sequer considerados nos novos programas. É certo que, no caso do 3º ciclo do ensino básico, nota-se alguma sensibilidade para a ideia de valorizar o estudo de relações e sequências envolvendo os números naturais, uma ideia que poderia dar corpo a uma nova área nos programas, continuando-se com problemas combinatórios e com outros tópicos de Matemática Discreta. No entanto, isso não sucede. O cálculo combinatório surge apenas no final do secundário (passou mesmo do 11º para o 12º ano) e é apresentado nessa altura de um modo formal, ligado aos arranjos e combinações. Outros tópicos, como os grafos e as matrizes, nem sequer são considerados.

A experiência do Projecto MAT789

O currículo experimental que o Projecto MAT789 desenvolveu entre 1988 e 1992 incluiu vários tópicos de Matemática Discreta. Uma das inovações foi a introdução de uma unidade de "Problemas de Contagem" no 7º ano. Os alunos exploraram diversas situações da realidade que envolviam processos de contagem, como por exemplo:

• um estudo sobre o código Morse (usando apenas pontos e traços, quantas letras podem ser representadas com dois, três, quatro... sinais?);

• um estudo sobre o sistema de apostas múltiplas do Totobola (a quantas apostas simples correspondem duas triplas, ou três duplas, ou... ?).

Estes problemas foram abordados de uma forma experimental, utilizando-se materiais e dando-se prioridade à construção de processos organizados de contagem. A continuação consistiu no estudo de situações como a organização de calendários para torneios desportivos (por exemplo, quantos jogos haverá numa prova com um certo número de equipas do tipo campeonato a uma volta?) e na resolução de outros problemas combinatórios (por exemplo, quantos apertos de mão haverá entre quatro pessoas se todas se cumprimentarem umas às outras?). Note-se que não houve qualquer preocupação de introduzir aspectos formais ligados ao cálculo combinatório. Em termos conceptuais, procurou-se apenas destacar o papel de um princípio fundamental neste domínio: a regra do produto. Um trabalho particularmente significativo que os alunos fizeram nesta altura foi um estudo sobre as possibilidades e limitações dos sistemas de matrículas de automóveis usados em vários países.

Há alguma evidência de efeitos positivos do contacto dos alunos com este tipo de problemas. As vantagens dizem respeito à experiência com situações que envolvem um raciocínio combinatório e não à aprendizagem de regras para resolver certos tipos de problemas. Um dos nossos alunos, no fim do 7º ano, declarou que havia apreciado especialmente "o Totobola e a Geometria por causa das *mentalidades* que era preciso usar", lembrando-se provavelmente das contagens de vértices e arestas em vários sólidos e estabelecendo uma curiosa relação entre dois tópicos aparentemente tão diferentes. Uma aluna de uma destas turmas, dois anos mais tarde, argumentou com um colega que o produto de dois trinómios iria dar lugar a 9 termos (e não a 6 como o colega dizia) porque "é exactamente como duas triplas do Totobola que são 9 apostas e não 6".

Para o 9º ano, o Projecto MAT789 preparou uma unidade sobre Grafos e Matrizes que foi trabalhada apenas numa das turmas experimentais mas forneceu indicações interessantes.

Grafos e matrizes no 9º ano

O ponto de partida foi a ficha de trabalho "Passeio pelas ilhas" (Fig. 1) inspirada na brochura "Graafwerk" que a experiência holandesa atrás referida produzira em 1989. Seguindo a opção dos holandeses, começou-se por uma situação de natureza geográfica que, em princípio, é mais concreta e sugestiva relativamente ao uso dos grafos. A última questão da ficha procurava, no entanto, iniciar uma reflexão sobre a diferença entre um mapa e um grafo como modelos de uma situação.

A proposta de trabalho seguinte consistiu basicamente na ficha de trabalho intitulada "Torneio de Voleibol" que se

Passeio pelas ilhas

Imagina que o avião te leva até à ilha Terceira e, aí, consultas uma tabela com as ligações de barco (ida e volta) disponíveis naquela época entre as ilhas do grupo central dos Açores.

Terceira - Faial
Terceira - Graciosa
Faial - Pico
Faial - S. Jorge
S. Jorge - Graciosa

1. Planeia um passeio pelas ilhas, à tua escolha. Começa e acaba na Terceira porque é aí que o avião aterra e descola.

2. Imagina agora que querias visitar todas as ilhas mas indo a cada uma delas apenas uma vez. Será possível? Se sim, como ? Se não, que novas ligações deveriam ser acrescentadas para que tal fosse possível?

3. Qual será o menor número de ligações de barco para que um passeio como aquele que é sugerido em 2 seja possível?

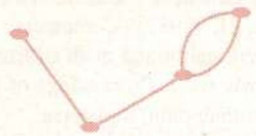
4. Poderias responder às questões anteriores sem o mapa? Comenta esta questão.

Fig. 1 - Ficha de trabalho nº1 da unidade "Grafos e Matrizes" (Projecto MAT789, 1991-92).

reproduz neste número da Revista, na secção *Materiais para a aula de Matemática*. A ideia era retomar a abordagem de problemas combinatórios iniciada em anos anteriores mas relacionando-a agora com o uso dos grafos como forma de representar uma situação. Por outro lado, esta ficha constituia um complemento da anterior no sentido em que, abandonando as situações geográficas, poderia contribuir para se caminhar em direcção a uma noção mais abstracta de grafo.

O terceiro grupo de actividades introduzia, de um modo informal, a noção de grafo e procurava relacioná-la com as situações exploradas anteriormente:

"Um grafo é um esquema constituído por vários pontos e ligações entre alguns deles.



Num grafo, não importa a precisão dos locais onde são colocados os pontos, apenas interessa o número de pontos e as ligações entre eles.

Também se usam os nomes de vértices (para os pontos) e arestas (para as ligações).

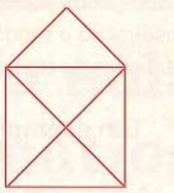
1. Indica o que são os pontos e o que são as ligações no caso
a) do passeio pelas ilhas;
b) do torneio de voleibol.
(...)"

Este grupo de actividades incluía depois questões sobre grafos idênticos (embora aparentemente muito diferentes), explorações em torno de problemas conhecidos (ver Fig. 2) e ainda referências a problemas clássicos como o das pontes de Konigsberg que o matemático alemão Euler terá estudado usando processos de raciocínio relevantes na Teoria dos Grafos.

Seguiu-se o Jogo dos *Sprouts*, uma actividade que proporciona a procura de estratégias ganhadoras num jogo que decorre num "ambiente de grafos" (ver a secção *Vamos Jogar* deste número da Revista).

A transição para as matrizes e a sua relação com os grafos foram estabelecidas

Desenha esta "casa" sem levantares o lápis do papel e sem passares mais do que uma vez por cada linha. Pode-se começar e terminar num ponto qualquer? Comenta.



Se a casa não tivesse "telhado", o problema anterior seria ainda possível?
Haverá alguma relação entre este problema e o número de arestas que sai de cada ponto?
Arranja mais alguns exemplos à tua escolha e comenta a questão.

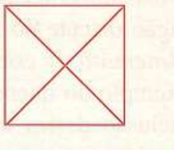


Fig. 2 - Exemplos de actividades de exploração propostas a alunos do 9º ano no âmbito da unidade "Grafos e Matrizes" (Projecto MAT789, 1991-92).

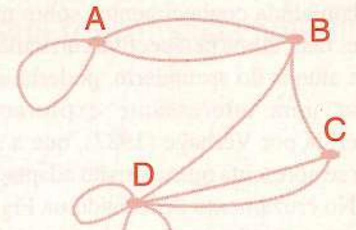
a partir de uma ficha de trabalho em que se explorava uma situação que podia ser representada por ambos os processos.

A ficha foi adaptada de uma ideia de Glidden (1990). Partia-se de uma situação em que quatro miradouros e os caminhos entre eles eram representados por pontos e linhas respectivamente. Depois, propunha-se uma representação através de uma tabela de duas entradas, na qual se indicava o número de "caminhos directos" entre cada par de pontos, e (de um modo mais simplificado) através de uma matriz (Fig. 3).

Questões sobre o significado, na situação real, da soma dos elementos de uma linha, de uma coluna e de toda a matriz ajudaram a dar sentido a esta nova forma de representação e a relacioná-la com a anterior.

Um prolongamento possível consiste em considerar que alguns caminhos só podem ser percorridos num sentido e em refazer a actividade neste pressuposto, o que corresponde a trabalhar com a ideia de "grafos direccionados".

Finalmente, o uso de matrizes numa situação da realidade, em que a soma de matrizes e o produto de um número por uma matriz adquirem um significado concreto, foi introduzido aos alunos através de uma ficha de trabalho intitulada "Matrizes num fim-de-semana...", que se reproduz na secção *Materiais para a aula de Matemática*. Esta ficha foi concebida pela equipa do Projecto MAT789 e constituiu a última actividade da unidade "Grafos e Matrizes".



$$\begin{array}{c} \text{para} \\ \text{de} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Fig. 3

A experiência revelou-se muito encorajadora quanto às "potencialidades curriculares" no 9º ano — ou até mais cedo como propõem Hart, Maltas e Rich (1990) — de um tema que é muito pouco exigente do ponto de vista dos pré-requisitos necessários e que, ao mesmo tempo, é susceptível de proporcionar aos alunos actividades interessantes de investigação e modelação no contexto de situações da realidade.

Um exemplo significativo

A colocação de um sistema de semáforos num cruzamento (que Cecília Perdigão discute no nº 29 de *Educação e Matemática*) constitui um excelente exemplo do interesse que poderia ter a inclusão destes tópicos nos currículos escolares. A situação, de resto, inspirou o concurso "Matemática & Realidade" que o Projecto MAT789 promoveu há dois anos (Abrantes, 1992). O problema dirigiu-se a alunos do 9º ano que não tinham ainda conhecimentos sobre matrizes mas, numa perspectiva curricular e com alunos do secundário, poderia originar uma interessante exploração sugerida por Verhage (1987), que a seguir se apresenta numa versão adaptada:

No cruzamento desenhado na Fig. 4 existem semáforos de todas e para todas as direcções A, B e C.

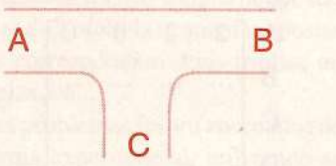


Fig. 4

A matriz L indica o número médio de carros que durante uma determinada hora do dia circulam nas várias direcções:

$$L = \begin{array}{cc} & \text{para} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{de} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 515 & 811 \\ 613 & 0 & 182 \\ 390 & 574 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por exemplo, circulam 515 carros de A para B, 182 carros de B para C, 574 carros de C para B, etc.

As matrizes M_1, M_2 e M_3 indicam o tempo (em minutos) durante o qual cada um dos semáforos está aberto de cada vez (àquela hora):

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por exemplo: durante 1 minuto estão verdes os semáforos A —> B, A —> C e B —> A; em seguida, estão verdes durante meio minuto B —> A, B —> C e C —> B; etc.

1. Constrói a matriz $M = M_1 + M_2 + M_3$. Que significa M na situação real?

2. Constrói a matriz 30M. Que significa 30M na situação?

3. Enquanto um sinal está verde passam 20 carros por minuto. Constrói a matriz que indica o número total de carros que podem passar em cada direcção durante uma hora.

4. Compara a matriz construída em 3 com a matriz inicial L. Achas que deveriam ser modificados os tempos de abertura dos vários semáforos? Que mudanças proporias em M_1, M_2 e M_3?

5. Faz uma apreciação crítica desta forma de *matematizar* a organização do trânsito naquele cruzamento.

Para responder a estas questões, é preciso saber como se somam duas matrizes e como se multiplica um número por uma matriz. Mas isso é fácil e pode ser explicado com um exemplo simples (veja-se a ficha de trabalho "Matrizes num fim-se-semana" na secção *Materiais para a aula de Matemática*).

O uso de um computador para simular a situação, estudando-se os efeitos de diversas modificações no sistema, poderá enriquecer muito a actividade e ajudar a centrar a atenção no uso e crítica do modelo matemático presente.

Referências:

Abrantes, P. (1992). Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática 23*, 25-29.

Febles, C. E. (1994). Matrizes por detrás das redes. *Educação e Matemática 29*, 3-5/10.

Glidden, P. (1990). From graphs to matrices. *Mathematics Teacher*, Feb. 90, 127-130.

Hart, E. W., Maltas, J. & Rich, B. (1990). Teaching discrete mathematics in grades 7-12. *Mathematics Teacher*, May 90,362-367.

Heuvel, G. van den & Krabbendam, H, (1991). Introducing discrete graphs to 12 year olds. Em Mogens Niss et al. (eds), *Teaching of mathematical modelling and applications*, 158-169. Chichester: Ellis Horwood.

NCTM (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. APM.

Perdigão, C. (1994). Um breve olhar sobre os grafos. *Educação e Matemática 29*, 19-20.

Verhage, H. (1987). Computers, a bridge between reality and math education? Em P. Bowie (ed.), *Proceedings of CIEAEM 38*, Southampton, Inglaterra.

Paulo Abrantes
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

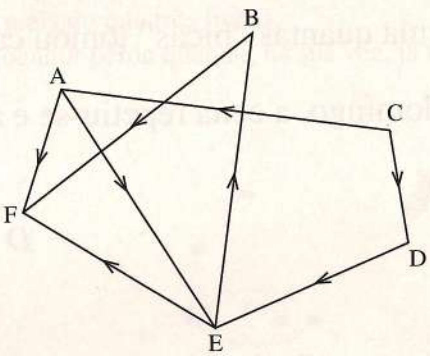
As duas fichas de trabalho que se reproduzem a seguir integraram a unidade sobre Grafos e Matrizes que o Projecto MAT789 desenvolveu numa turma experimental do 9º ano em 1992. Os seus objectivos e a sequência em que foram usadas estão explicados no artigo acima. Mas, mesmo noutro contexto, elas podem proporcionar interessantes actividades de exploração a alunos do 3º ciclo do Ensino Básico.

O mesmo se aplica ao jogo dos *Sprouts*, incluído na secção *Vamos Jogar*, o qual poderá ainda suscitar a discussão de estratégias ganhadoras e de problemas como o de tentar descobrir se existe um número máximo de jogadas e, em caso afirmativo, qual é esse número (a este respeito ver ainda a secção *O problema do trimestre*).

Materiais para a aula de Matemática

Torneio de voleibol

Uma escola secundária organizou um torneio de voleibol, do tipo campeonato a uma volta, entre as 6 turmas do 9º ano (turmas A, B, C, D, E e F).
O esquema ao lado descreve a situação num dado momento do torneio. Uma linha entre dois pontos indica que as equipas respectivas já se defrontaram e a seta foi colocada no sentido do vencedor para o vencido.



1. Quantos jogos já se disputaram?

2. Quantos jogos deve fazer cada equipa?

3. No jogo entre as turmas B e E quem ganhou?

4. Que adversários terá ainda a turma F?

5. Faz uma tabela classificativa, atribuindo a cada equipa dois pontos por vitória e zero pontos por derrota.

6. No jogo entre as turmas B e D que ainda se disputará, em qual das equipas apostarias? Porquê?

7. Compara a tabela com o esquema acima. Qual deles dá mais informação? Comenta.

8. No total, quantos jogos tem este torneio?

9. E quantos jogos teria o torneio se fosse disputado por 8 equipas? E por 12?

10. Formula um problema idêntico ao que é proposto em 8 mas imaginando que os pontos A, B,..., F representam agora:
   - os vértices de um hexágono;
   - seis amigos que se encontram numa festa;
   - seis elementos de um conjunto à tua escolha, numa situação igualmente à tua escolha.

As duas fichas de trabalho reproduzem materiais produzidos pelo Projecto MAT789 para o 9º ano (1992)

Matrizes num fim-de-semana...

Três amigos — o Alberto, o Bruno e o Carlos — foram passar fora um fim-de-semana. Quando iam tomar café, pagavam de uma maneira desordenada porque uns bebiam mais "bicas" do que outros e, além disso, nem sempre todos tinham dinheiro trocado. No entanto, um deles foi apontando as despesas num papel e elaborou no fim de sábado a seguinte matriz:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Alberto} \\ \text{Bruno} \\ \text{Carlos} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto significa, por exemplo, que Alberto pagou três "bicas" que ele próprio tomou, pagou uma ao Bruno e pagou duas ao Carlos.

1. Calcula quantas "bicas" tomou cada um e quem ficou a ganhar e a perder dinheiro.

2. No domingo, a cena repetiu-se e a matriz correspondente foi:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Um deles resolveu então somar as duas matrizes. Aqui tens um exemplo de como se somam matrizes, num caso em que ambas são matrizes 2x2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

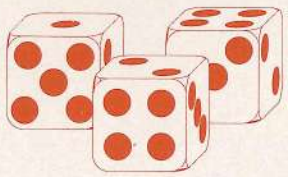
Calcula a soma das matrizes S e D, da nossa história (que são matrizes de 3x3). Designa por M a nova matriz obtida, isto é, M = S + D. Que significa M, na prática?

3. Sabendo que cada "bica" custava 50$00, um deles resolveu multiplicar a matriz M por 50. Eis um exemplo de como se multiplica um número por uma matriz:

$$4 \times \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 24 & 36 \end{bmatrix}$$

Voltando à nossa história, constrói a matriz 50.M. Que significa 50.M na prática?

4. Faz um balanço das contas dos três amigos no fim-de-semana. Quem ficou a dever dinheiro a quem? E que quantias?



Vamos jogar

Jogo dos *Sprouts*

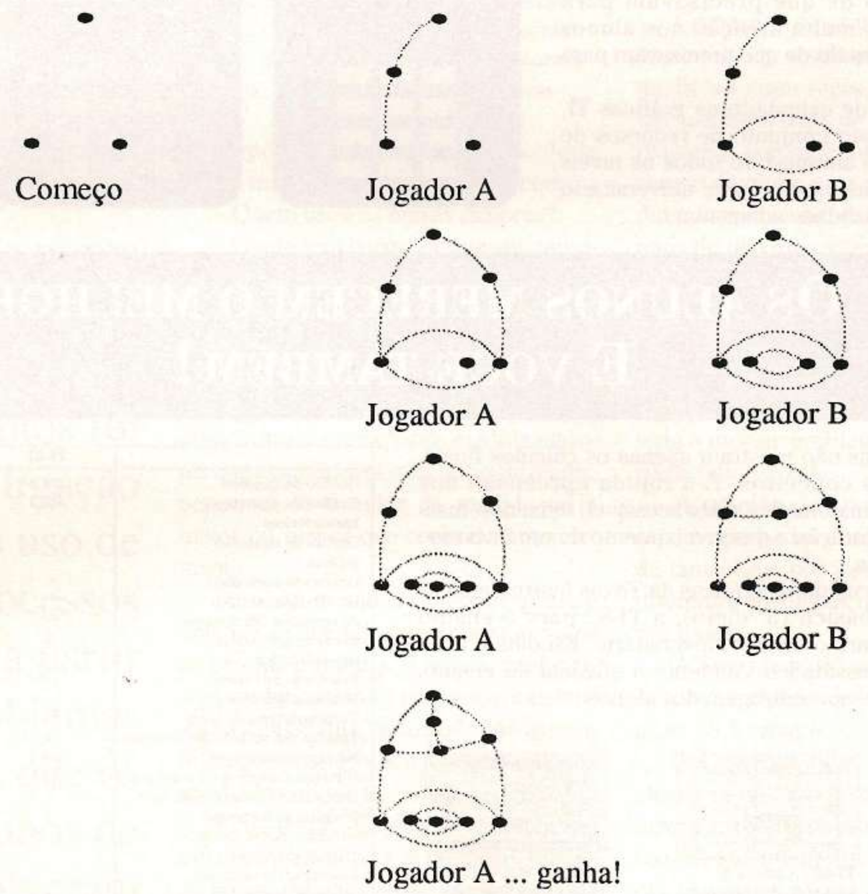
Este é um jogo para duas pessoas. Começa-se por marcar um certo número de pontos numa folha de papel (recomenda-se aos principiantes que comecem por jogar com três pontos) e decidir quem é o primeiro a jogar.

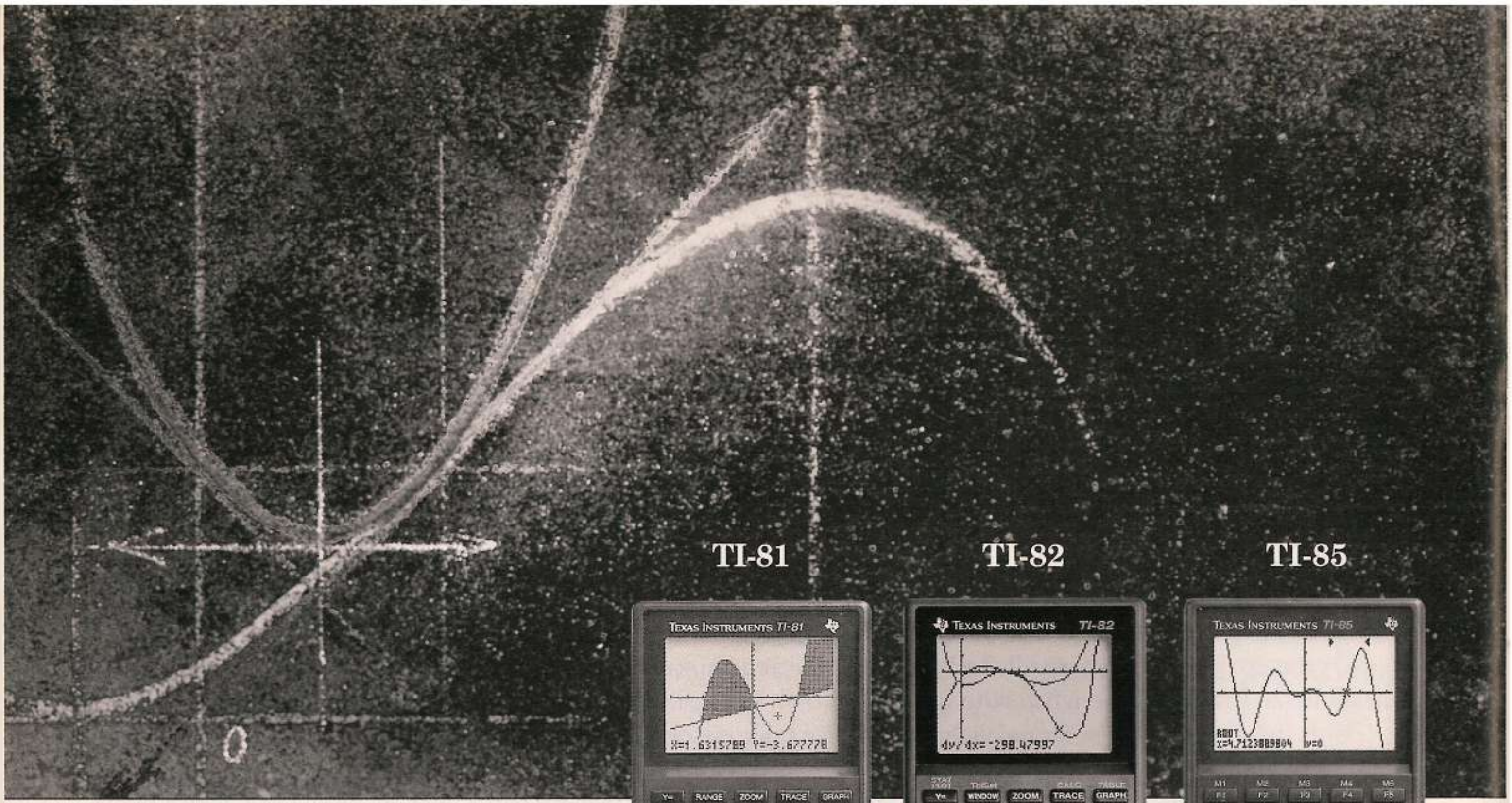
O primeiro jogador traça uma linha de um ponto para outro ou para o próprio ponto, e coloca um novo ponto algures nessa linha. Em seguida, o adversário faz o mesmo e vão jogando alternadamente.

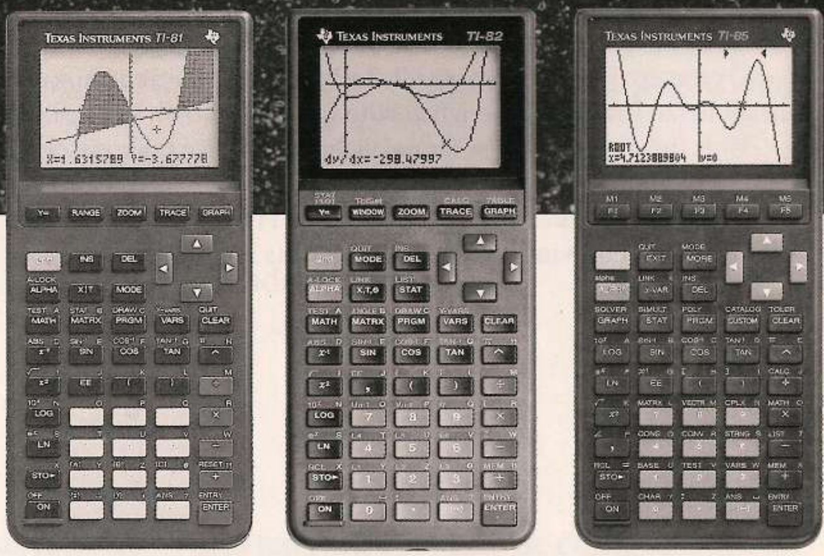
Uma linha pode ter uma forma qualquer mas não pode cruzar-se a si própria nem a outra linha que já exista nem pode passar por qualquer outro ponto. De um ponto não podem sair mais do que três linhas.

Ganha aquele que fizer a última jogada. Por outras palavras: um jogador perde quando, na sua vez, já não puder fazer qualquer movimento de acordo com as regras.

Exemplo:





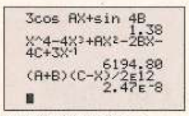


Calculadoras Gráficas TI

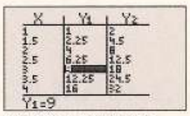
Prestamos muita atenção aos professores quando nos disseram aquilo de que precisavam para ensinar. E prestamos muita atenção aos alunos quando nos disseram aquilo de que precisavam para aprender.
O resultado? A gama de calculadoras gráficas TI, que representa um vasto conjunto de recursos de ensino e aprendizagem abrangendo todos os níveis de ensino - ensino básico, secundário, universitário - com o tipo de funcionalidade adequada.

OS ALUNOS MERECEM O MELHOR. E VOCE TAMBÉM!

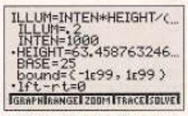
As calculadoras gráficas não mostram apenas os cálculos finais, também explicam os conceitos. É a rápida apreensão dos conceitos que torna a matemática mais acessível, deixando mais tempo livre para a exploração e desenvolvimento de um interesse genuíno sobre a matéria.
Observe a gama de calculadoras gráficas da Texas Instruments. A TI-81 para o ensino básico (3º ciclo), a TI-82 para o ensino secundário e a TI-85 para o ensino universitário. Escolha a mais adequada às suas necessidades. Aumente a eficácia do ensino, facilitando o método de aprendizagem dos alunos.



TI-81 : Visualiza a totalidade das expressões da forma como foram introduzidas e mostra os cálculos finais.



TI-82 : A tabela de avaliação das funções mostra os resultados numéricos em formato de tabela.



TI-85 : O SOLVER da TI-85 é uma poderosa ferramenta para trabalhar com equações e resolver em ordem às diferentes variáveis.

	TI-81	TI-82	TI-85
- Gráfico da funções	até 4	até 10	até 99
- Gráfico de equações paramétricas	até 3	até 6	até 99
- Gráfico de equações polares		até 6	até99
- Gráfico de sucessões		até 2	
- Gráfico das soluções de equações diferenciais			até à 9th ordem
- Percorre os gráficos representados	X	X	X
- Resolução de raízes/ Mínimos/Máximos		X	X
- Características do zoom	7	13	15
- Tabelas dos valores das funções		X	
- Número de matrizes	até 3	até 5	ilimitada*
- Dimensão máxima da matriz	6x6	30x30*	50x50*
- Comprimento máximo da lista		99	ilimitado*
- Modelos de regressão	5	8	8
- Gráficos «box & whisker»		X	
- Divisão do écran		X	
- Resolução de equações			X
- Números complexos			X
- Espaço em memória 32Kb	4.6Kb	32Kb	32Kb
- 2 anos de garantia	X	X	X

(*) Os números alterar se ão com o uso da calculadora, até à saturação da memória disponível (32 kb)

Beldata Lisboa Rua Sarmento de Beires 3-A, 1900 Lisboa
Tel: 01805435/01805268 Fax: 01848512
Oporto Rua Aval de Cima 139-155,
Apartado 2089, 4202 Oporto
Tel: 521735/5500439 Fax: 5503819

TEXAS INSTRUMENTS

Tetri Estrada Exterior da Circunvalacao
798 Apartado 48, 4436 Rio Tinto
Tel: 02 98 99 532 Fax: 029800527
Dismel Rua do Terreirinho, 4 - 3 Dto. 1100 Lisboa
Tel: 018861527 Fax: 018880189

Medida e Estatística no 1º ciclo

Alcides Canelas

O trabalho que se descreve neste artigo foi realizado com uma turma do 2º ano de escolaridade numa Escola Primária de Lisboa. A medição de comprimentos foi abordada em ligação com o uso de processos estatísticos, a partir de problemas práticos em que os alunos de envolveram activamente.

Numa turma do 2º ano de escolaridade, abordei o tema **comprimentos** a partir da medição do comprimento das mesas dos alunos. As mesas tinham as mesmas dimensões à excepção de uma que tinha o dobro do tamanho. Utilizando diferentes barras, os alunos obtiveram os seguintes valores:

Pedro - 7,5 barras	Sara - 9 barras
Cátia - 8 barras	Valter - 7,5 barras
Alexandre - 8 barras	Amélia - 8 barras
Cláudia - 8,5 barras	Carina - 7,5 barras
Carla - 6 barras	Carlos - 15 barras
Joaquim - 14 barras	Helder - 7 barras
Luisa - 8 barras	Márcio - 8 barras
Luís - 8 barras	Augusto - 6 barras
Tiago - 7 barras	Tânia - 8 barras

Depois, fizemos a exploração desta tabela respondendo a perguntas como:

- Quem usou as barras maiores?
- Quem tem barras do mesmo tamanho que as do Pedro?
- Porque é que ao Carlos e ao Joaquim deu um número maior que aos outros meninos?

Numa segunda fase distribuí pelos alunos outras unidades de medida maiores que as anteriores mas, antes de medir, perguntei se o valor da medida seria maior ou menor que o obtido anteriormente.

Para alguns não era evidente que se a unidade de medida aumentasse o valor da medida diminuia. Por isso, medimos alguns objectos mais pequenos, existentes na sala de aula, utilizando barras com diferentes tamanhos e comparando os resultados obtidos.

Finalmente, cada aluno foi solicitado a estimar o resultado da medição, sabendo antecipadamente que ele teria de ser menor porque a unidade de medida era maior.

Escrevemos os valores estimados no quadro. Verificámos se os valores obtidos eram muito diferentes uns dos outros e só depois fizemos a medição do comprimento da mesa.

Num terceiro momento optámos por medir o comprimento e a largura da sala de aula usando medidas antropomórficas.

Discutimos quais as unidades de medida mais apropriadas de entre as sugeridas pelos alunos: palmo, passo, pé e braçada.

Como o chão estava sujo excluimos da medição o palmo e a braçada.

Começámos por utilizar o passo (ou passada). Os resultados das diferentes medições eram registados. Alguns alunos mediram mais do que uma vez. Verificámos que os resultados além de variarem de aluno para aluno também podiam variar se o mesmo aluno medisse mais do que uma vez a sala de aula.

Centrámos a discussão sobre os resultados (diferentes) obtidos pelo mesmo aluno em diferentes medições.

Como a unidade de medida "passo" não era muito fiável discutimos se o "pé" teria o mesmo problema da passada: variar a nosso gosto.

A opinião dominante era de que o sapato não podia diminuir ou aumentar de tamanho e por isso os resultados de diferentes medições deveriam ser sempre iguais.

A Sara mediu 3 vezes e na verdade os resultados obtidos foram sempre os mesmos: 38,5 sapatos.

Foi então a altura de perguntar aos alunos se no caso de ser outro menino a fazer a medição o resultado seria o mesmo. Houve quem dissesse que sim porque os sapatos não aumentavam e houve quem dissesse que não porque nem todos tinham sapatos com o mesmo tamanho.

Como o consenso foi fácil perguntei qual dos alunos iria obter um número menor na medição da sala de aula. Uns disseram que os rapazes tinham um pé maior e por isso daria sempre um número menor e outros disseram que o número de unidades de medida variava com a altura dos meninos e não com o sexo. Para testar as duas hipóteses, optámos por fazer o tratamento estatístico dos dados o que permitiu igualmente abordar alguns assuntos relativos à estastística no 1º Ciclo.

Tratamento dos dados

Os dados obtidos na medição com passos eram tão variados, que dificultavam qualquer tratamento estatístico dos mesmos e por isso, trabalhámos apenas o resultado das medições feitas com o **pé** nos dias 9 e 16 de Março e 11 de Abril.

Com os valores obtidos, construímos a grelha que se reproduz ao lado.

	9 Mar.	16 Mar.	11 Abr.	Dif. (maior-menor)
Alexandre	**32 (34)**	36	34	4 (2)
Augusto	39	38	**37**	2
Carina	39	39	**38**	1
Carlos	37	**36**	38	2
Cátia	37	38	**36**	2
Cláudia	35	**33**	35	2
Helder	39	42 (40)	**38**	4 (2)
Joaquim	37	**33 (39)**	38	5 (2)
Luísa	38	**32 (37)**	39	7 (2)
Márcio	34	**32**	33	2
Amélia	38	40	**32 (40)**	8 (2)
Pedro	37	38	**36**	2
Sara	38	38	**37**	1
Tânia	**35**	37	36	2
Tiago	35	34	**33**	2
Valter	34	**33**	35	2

Começámos a *estudar* esta nova grelha. Tentámos ver se havia algum aluno que tivesse obtido o mesmo resultado nas três medições. Verificámos que não e, que apenas três alunos tinham obtido dois resultados iguais nas três medições.

Perguntei o que tinha acontecido. Algumas respostas foram muito significativas. A Cátia disse que alguns tinham mudado de sapatos e uns sapatos eram maiores que outros. O Pedro sugeriu que em vez de dizer **32 pés**, era mais correcto dizer **32 sapatos**, tendo o Márcio acrescentado que no caso dele a medida era **34 botas**.

Esta discussão prolongou-se por algum tempo tendo havido quem defendesse que antes de medir, cada aluno se devia descalçar. Outros sugeriram que à frente do valor da medida colocássemos o nome do calçado que cada um tinha. Ex. 34 botas.

Para facilitar sugeri que continuássemos a chamar **pé** à unidade de medida (porque à muito tempo que tinha esse nome) o que foi aceite pela maioria.

Perguntei então se a diferença de valores obtidos se deveria só ao calçado. O Helder disse que não porque o Joaquim numa das medições não tinha encostado o pé da frente ao de trás "para ganhar". O sorriso do Joaquim confirmou o que o Helder tinha dito e na verdade em 16 de Março o Joaquim tinha obtido um resultado muito diferente do obtido nos outros dias.

Resolvemos então marcar na grelha o valor **mais pequeno (carregado)** e o maior (sublinhado) para depois calcular a diferença entre ambos. Perante os resultados, a Sara, sugeriu que os meninos a quem dava uma diferença superior a 4 tinham feito "batota".

Alguns deles negaram, outros calaram-se e outros disseram que talvez a Sara (era ela que fazia os registos) se tivesse enganado a escrever os números. A Carina disse ainda que alguns meninos tinham umas botas com uns bicos compridos e por isso "dava menos pés".

Nesta altura, sugeri que fizessemos dois grupos: um para onde iriam os meninos que tinham valores de medida mais baixos (32 e 33) e outro para onde iriam os meninos com os valores de medida mais altos (40 e 42).

Mas, havia "qualquer coisa que não estava bem". Num dos lados estavam os miúdos mais baixos da turma, mas no outro grupo entre os mais altos, havia "dois alunos que não ficavam bem". O Joaquim e a Luísa, eram dos mais baixos da turma e tinham ficado no grupo dos mais altos.

Decidimos, então, que os meninos que tinham obtido valores com diferenças superiores a 4, deveriam repetir a medição para "acertarmos a grelha".

Feito o arranjo, observámos que a diferença entre os valores máximos e mínimos tinha baixado para 1 ou 2 pés.

Voltámos a fazer o grupo dos meninos que tinham como valor da medição 33 e 34 e dos meninos que tinham 39 e 40. (Com as novas medições, deixou de haver o valor 32 e o 42).

Verificámos que no grupo dos mais pequenos estavam 2 alunas (Sara e Carina) que eram maiores que alguns rapazes que estavam no grupo dos maiores.

A Sara achou que as duas se "deviam ter enganado nas medições" e por isso pediram para voltar a medir. O resultado voltou a ser 39 pés para ambas e continuavam portanto no grupo dos mais baixos o que lhes causava dúvida, mas não sabiam explicar o que se passava.

Disse-lhes então que normalmente os rapazes, têm os pés maiores que as raparigas da mesma altura e sugeri-lhes que falassem disso em casa aos pais porque já estava na hora do almoço.

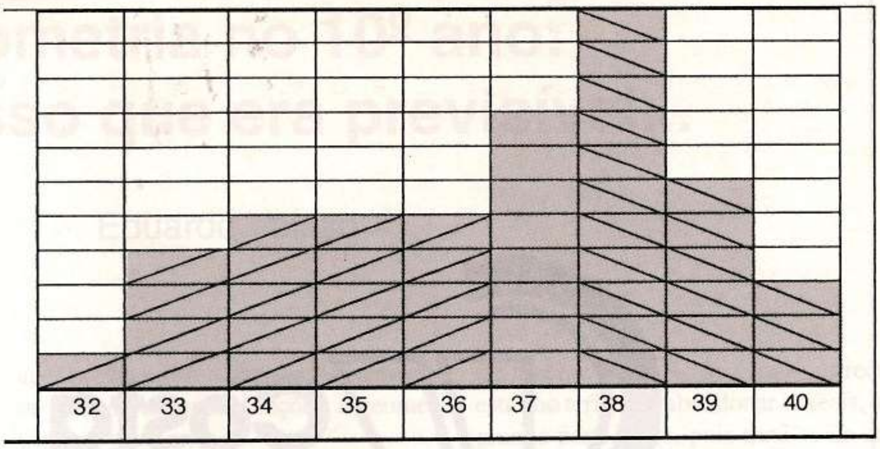
O dia seguinte

Comecei a aula por ler um texto que tinha escrito (as páginas anteriores) para saber se concordavam com o conteúdo do mesmo.

Ficaram muito contentes, principalmente porque no texto apareciam os nomes de alguns deles e algumas das frases que tinham dito.

Recomeçámos o trabalho a falar dos tamanhos dos pés dos homens e das mulheres. A Cátia disse que o pai era do mesmo tamanho que a mãe, mas tinha "sapatos maiores que os dela". A Sara afirmou que a mãe era mais alta que o pai mas "tinha os pés mais pequenos" e o Joaquim acrescentou que a mãe era "muito maior que o pai mas tinha os pés do mesmo tamanho". Vários outros disseram que os pais tinham os pés maiores que os das mães, mas também eram mais altos.

Depois distribui a cada um uma folha como a que se reproduz ao lado, para construir o diagrama de barras.



1-A MODA é ___ pés (o valor que aparece mais vezes).
2-O ___ é o que aparece menos vezes no gráfico.
3-O valor MEDIANO (divide ao meio o número de dados) é o ___ .

A construção do gráfico e a resposta às duas primeiras questões, foi fácil para quase todos. A terceira questão (mediana) é que era totalmente nova para eles.

Pedi então a dois alunos que fossem ao quadro. Um deles cortava o valor mais pequeno (um dos 32) e o outro um dos maiores (um dos 40) e assim sucessivamente até sobrar uma coluna. Depois foi fácil para quase todos dizer que a "**barra do 37 era a mediana**". Como achei que o conceito era ainda difícil de perceber para eles, não voltei a falar em medianas.

Passámos então a ler o diagrama de barras. Com este trabalho o que eu pretendia era que eles dissessem que se tivessemos escolhido um valor (em pés) para a medida do comprimento da sala escolheriam o 38 (moda) ou o 37 (mediana) já que o cálculo da média (36,6) não poderia ser calculado por eles.

Mas, as primeiras respostas que apareceram não foram as que eu esperava. O Márcio disse que "não sabemos qual o valor da medida do comprimento da sala porque não temos nem pé nem sapatos iguais". A Amélia disse que "deveríamos dizer 40 porque às vezes vinham cá meninos mais pequenos e a eles devia dar 40". O Alexandre disse que devíamos dizer que "era 32 porque quando eu medi deu 32".

A Sara disse que "devíamos dizer 37 porque a barra do 37 não estava cortada". (Quando pretendi descobrir qual era a MEDIANA cortámos os valores maiores e os menores e ficou a barra 37 por cortar: mediana). (Ver gráfico anterior)

Só um tempo depois é que "perceberam" o que eu queria com aquele diagrama de barras e aceitaram que deveríamos dizer que "a melhor medida para o comprimento da sala de aula era 37 ou 38 pés".

Na fase final voltámos a tentar relacionar o diagrama com a altura dos alunos. Deveriam dizer aonde é que estavam representados os alunos mais altos (32 e 33 pés) e os mais baixos (39 e 40 pés). Pelo diagrama parecia que havia poucos alunos altos e bastantes baixos pois a moda e a mediana estavam muito próximas dos 39 e 40 pés que deveria representar os alunos mais baixos da sala de aula. Alguns, não gostaram de se "sentir" baixos pois por aquele diagrama só eram 4 os alunos altos: Márcio, Cláudia, Tiago e Valter.

Sugeri que todos os alunos se colocassem em pé a começar pelos que tinham medido o comprimento da sala com menor número de pés (32, 33, 34 ...) até aos ...39 e 40 pés.

Verificámos então que não tinham ficado ordenados por alturas e que as grandes prejudicadas eram as raparigas pois ficavam atrás de rapazes mais pequenos imediatamente se recordaram da conversa que tinhamos tido no início e disseram: "Aquele diagrama não serve para as alturas porque as raparigas têm o pé mais pequeno que os rapazes da mesma altura".

Com este trabalho pretendi que os alunos construissem e discutissem os processos de medição, incluindo questões sobre problemas práticos que esses processos provocam. Pretendi ainda levar as crianças a perceber a utilidade prática da Matemática.

Ao mesmo tempo, procurei valorizar a estatística fazendo a conexão medição/estatística.

Alcides Azevedo Canelas
Escola Primária nº 28 Lisboa

Geometria no 10º ano: o fracasso que era previsível...

Eduardo Veloso

Digo desde já que isto é apenas uma opinião. O que vou escrever não é resultado de nenhum estudo ponderado, de uma amostragem feita com todos os cuidados. Nada disso. A minha "estatística" foi obtida do seguinte modo: nos últimos tempos, sempre que encontro uma professora que deu este ano o 10º ano, faço-lhe invariavelmente as mesmas perguntas: Então como correu o novo 10º ano? E a geometria?As respostas que tenho obtido e as ideias que já tinha sobre o programa do 10º ano conjugam-se para me deixar uma impressão muito negativa sobre o início da generalização no secundário. Mas outras opiniões e "estatísticas" existem muito provavelmente. Se for assim, seria bom que se exprimissem também...

Um programa comprido e mau

Uma primeira constatação é que ninguém deu o programa todo, está claro. Foi dito e redito aos autores dos programas, por todos os experimentadores, acompanhantes, enfim, por todos os professores de bom senso que leram o programa — mesmo na forma final, depois do corte do capítulo das sucessões — que este era muito extenso, que era impossível de "dar" num ano lectivo. Por razões que não se conseguem sequer imaginar, tudo ficou na mesma. E assim, o resultado foi que ninguém deve ter dado o capítulo dos vectores, e que em muitos casos o capítulo das funções ou o da geometria ficaram por dar ou a meio. Houve pelo menos uma escola em que o grupo decidiu não dar nenhuma geometria no 10º ano... Numa escola onde se estava a experimentar o programa, no ano passado, depois das férias da Páscoa ainda não tinham iniciado as funções... apenas tinham sido dados a estatística e os reais, faltavam as funções, a geometria e os vectores!

Está claro que a tragicomédia das provas globais "ajudou" alguma coisa, neste fim de ano. Contrariamente aos disparates que diz a senhora ministra — que ao menos as provas globais serviram para obrigar os professores a cumprir os programas... — a agitação foi tanta que as aulas, na prática, acabaram muito antes do seu término legal.

Por outro lado, o facto de apenas haver quatro horas por semana de Matemática também reduz as possibilidades de cumprir o programa. É evidente que o tempo dedicado à Matemática por semana é muito reduzido, e deveria ser aumentado para 5 ou mesmo 6 horas. Mas não nos deixemos iludir: não é pela carga horária aumentar que as incongruências e aspectos muito negativos dos programas desaparecem. E não devemos deixar que se utilize o alibi da carga horária reduzida para esconder as necessidades de revisão profunda dos programas do secundário.

Nem tudo é mau, está claro...

Será tudo mau nos programas do secundário? Certamente que não. Pontos positivos do programa do 10º são a introdução da estatística e a flexibilidade que dá ao professor para uma introdução intuitiva e gráfica do estudo das funções. Pode ainda dizer-se que a geometria no espaço poderia ser outra área de inovação do programa, mas não tem sido por razões que veremos adiante. No entanto, grande parte do programa precisa ser remodelada de alto a baixo, pois está cheia de opções absurdas e sem sentido. Por exemplo, dada a necessidade de cortar alguma coisa, a ideia mais correcta este ano teria sido abandonar os reais, ou grande parte deles, pois trata-se de um capítulo totalmente desinteressante e pouco cuidado, mais parecendo um pretexto para ensinar operações com radicais e praticar a resolução de inequações do que um esforço consequente para ampliar a cultura matemática dos alunos. A solução de cortar os reais foi adoptada por alguns professores e grupos disciplinares mais corajosos, mas em muitos casos a rotina pesou a favor de reduzir o peso da geometria e manter a preponderância habitual e anacrónica do cálculo algébrico.

A geometria

Na realidade, o que me tem preocupado mais nas respostas que tenho ouvido é o que tem acontecido com a geometria. Devemos recordar-nos que, muito acertadamente, e de acordo com as melhores tendências renovadoras do ensino, a geometria parecia destinada a voltar a ocupar o lugar proeminente que nunca deveria ter perdido na matemática escolar. Mas de que serve conferir esse lugar em teoria à geometria quando depois se ouve dizer aos professores que "não deram nenhuma geometria no 10º ano" ou que "saltaram sobre a geometria sintética e só deram a analítica". A tentação é dizer: aí está, a causa de todo o fracasso é a falta de preparação dos professores. É isso, fogem da geometria como o diabo da cruz... É conhecido, e ninguém o nega, que os professores têm que fazer um grande esforço de formação em geometria, dado o abandono a que esta foi votada nos últimos anos. E alguns até o estão a fazer, enchendo cursos e sessões práticas e outras actividades referentes ao tema. Mas não haverá nunca preparação suficiente que permita fazer com honestidade e sucesso o tipo de abordagem da geometria imposto pelo actual programa do 10º ano.

Para que alunos?

O modo como está feito o programa de geometria do 10º ano parece obedecer ao slogan "matemática para nenhum aluno", e não ao objectivo moderno de um currículo de "matemática para todos os alunos"! Com efeito, os alunos com experiências mais negativas de matemática no seu percurso escolar anterior e/ou aqueles que têm menor interesse pela matemática, sobretudo nos seus aspectos formais, nunca conseguirão resistir ao choque súbito dos termos *primitivos* e *derivados*, dos *axiomas* e dos *teoremas* e das *demonstrações* por redução ao absurdo. Já se sabe há muitos anos que isto é assim. Os autores dos programas quiseram "resolver" este problema "aligeirando" a axiomática — reduzindo os axiomas para cinco em lugar das dezenas necessárias. Simplesmente, neste campo não há "aligeiramento" possível, não se trata de uma questão de quantidade, mas de estratégia de abordagem.

Segundo o programa, depois desta "axiomática ligeira", e de uma "breve referência" às geometrias não-euclidianas, passa a imperar a noção de distância, a partir da qual se definem circunferência e superfície esférica, mediatriz e plano mediador, etc.. Mas aqui serão os alunos com maior predisposição para a matemática que começarão a ficar justificadamente nervosos: no quadro do que foi visto atrás, qual é o estatuto da noção de distância, que parece ter caído do céu aos trambolhões... mas da qual tudo agora parece depender?! É um termo primitivo ou derivado? Se é derivado, como se chega lá com os cinco axiomas? Perguntas difíceis ou impossíveis mesmo de responder a alunos destas idades e maturidade. Assim, esta tentativa de utilizar a geometria para apresentar a matemática como ciência hipotético-dedutiva não serve para nenhum aluno, e é um quebra-cabeças para todos os professores.

Onde colocar a formalização?

O processo de formalização da linguagem matemática, ao longo do ensino básico e secundário, deve ser lento e progressivo, e apoiado em inúmeras experiências em que imperam os aspectos intuitivos. No caso da geometria, e no ciclo secundário, deveria também adoptar-se esta mesma abordagem. Os ensaios de formalização, mais frequentes com o decorrer dos anos, deveriam ser locais e nunca globais. Desde há dezenas de anos que Freudhental advogava isto mesmo. Bons exemplos do que é possível fazer neste aspecto são apresentados na adenda às *Normas para o Currículo*, do NCTM, traduzida pela APM, chamada *Geometria sob Múltiplas Perspectivas*. No que diz respeito à abordagem axiomática global de Euclides, é preciso reflectir quando e de que forma deve ser feita. Neste momento, parece-me que o ideal seria enquadrá-la sobretudo de um ponto de vista histórico, a propósito das geometrias não-euclidianas. E se se pretendesse mostrar, através de actividades no final do secundário, como se poderia modernamente encarar uma axiomática global da geometria euclidiana, não seria certamente o modelo de Euclides que deveria ser adoptado, mas um outro baseado precisamente na distância como noção primitiva.

Enfim, o programa de Matemática do secundário deve ser profundamente remodelado, e uma discussão alargada deve ser iniciada nesse sentido. Para que depois possam ser apresentadas propostas concretas ao Ministério. Mas digo desde já que as perspectivas não são animadoras... Neste momento parece haver um vazio "matemático" a nível do Ministério da Educação. Numa reunião recente, em que as universidades foram convocados para estudar o que se podia cortar nos programas de Matemática, não estava presente nenhum responsável do Ministério ligado à disciplina... O que seria de nós se a educação não fosse a prioridade das prioridades...

Eduardo Veloso
Fac. de Ciências da U. de Lisboa

Matemáticos Portugueses

A. de Mira Fernandes
(1884-1958)

Nasceu em S. Domingos (Mértola); fez o curso do liceu em Beja e o complementar em Coimbra.

Em 1904, matriculou-se em Matemáticas na Universidade de Coimbra, e obteve os graus de bacharel, licenciado e doutor (em 1911), todos concedidos com classificação máxima. Na dissertação de doutoramento abordou a *Theoria de Galois, elementos da theoria dos grupos de substituições de ordem finita*, primeira obra em língua portuguesa sobre tal temática.

Foi nomeado, por convite, prof. catedrático do Instituto Superior Técnico, em Lisboa e desde 1918 foi também professor no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras onde leccionou ininterruptamente Cálculo e/ou Mecânica, até se jubilar em 54.

Como ele próprio esclareceu "nunca me seduziu escrever um tratado ou sequer um livro de curso"; todavia, algumas das suas lições encontram-se compendiadas em sucintos mas prestimosos "livros", como por exemplo, *Elementos da teoria das formas quadráticas* (1924); *Fundamentos de geometria diferencial dos espaços lineares* (1927) e *Geometria das distâncias* (1945/46). Deixou também dezenas de trabalhos originais publicados na *Portugaliae Mathematica*, e inúmeras comunicações que apresentou à Academia dos Lincei.

Compilação de Sérgio Macias Marques

Provas Globais: Que oportunidade? Que finalidades?

Graciosa Veloso

Mais um ano lectivo chegou ao fim... um primeiro ano de generalização ao 10º ano da Reforma Curricular.

É tempo de fazer balanços, de apreciar o que correu bem, para continuar, de identificar o que falhou, para mudar, enfim, de (re)encontrar sentido para a intervenção profissional e, quando for caso disso, cantar com a memória do Adriano *"... venho dizer-vos que não há degredo quando se traz a alma cheia de poemas"...; "... há sempre alguém que resiste, há sempre alguém que diz não..."*

As provas globais do 10º ano constituiram matéria de discussão e de perturbação no funcionamento das escolas, em que a intervenção do Ministério da Educação se revelou inflexível e inoportuna.

Embora o principal objectivo deste artigo seja questionar a oportunidade e legitimidade da realização destas provas neste ano lectivo, gostaria de resumidamente colocar algumas interrogações sobre as concepções relativas ao papel do ensino secundário no sistema de ensino e sobre as finalidades destas provas. O ensino secundário tem objectivos e públicos muito diferentes do ensino obrigatório? Se não, o sistema de avaliação não deveria ter diferenças tão marcantes. Se sim, por quanto tempo, uma vez que parece claro que a curto prazo a escolaridade obrigatória será alargada? Porquê dar tanta ênfase à avaliação sumativa, com provas no final do 10º e do 11º ano se se prevê um exame a nível nacional no final do 12º ano?

Passemos agora à análise da forma como se desenvolveu o processo de realização das provas globais. A primeira informação sobre estas provas — Despacho Normativo nº 338/93 que define o regime de avaliação dos alunos do ensino secundário — chegou às escolas em meados do primeiro período, já depois de o ano lectivo ter começado e como novidade uma vez que a fase de experimentação da reforma não contemplou a vertente de avaliação dos alunos. Foi uma medida incorrecta, porque tardia, uma vez que introduziu alteração de regras num processo já iniciado. Já havia planificações e calendarizações de actividades a longo prazo, que vieram a ser significativamente alteradas. Alunos e professores iniciavam um processo com alguns aspectos inovadores a nível de metodologias e áreas de trabalho: preparavam-se com investimento propostas de trabalho sobre novos temas, começavam a organizar-se trabalhos da área escola que vieram a revelar-se cada vez mais difíceis de realizar. É desmobilizador introduzir perturbações desta natureza. Houve discussão sobre o despacho, houve tomadas de posição, não tantas como seria necessário, o ano escolar prosseguiu... Iam-se esboçando sinais de apreensão sobre a natureza e implicações das provas globais, traduzidas em expressões do tipo "...a área escola deixa de ser viável, pois no final do ano as provas por disciplina, com programas tão extensos, vão exigir tempo que se pensava investir nessa área...".

Vai-se instalando um ambiente de dúvida quanto à desvalorização de aspectos mais inovadores da reforma como a importância do trabalho em grupo, de actividades de projecto, em que muitos professores investiam. A ideia de centrar a actividade na preparação para o exame final que, como a experiência indica, não tem articulação com as novas práticas de trabalho e de avaliação formativa que se procuravam realizar, parece poder ler-se nas entrelinhas do despacho.

O Despacho 20/SEED/94 que regulamenta a prova escrita global das disciplinas das componentes de formação geral, de formação específica e de formação técnica dos cursos do ensino secundário, não só consolida estes receios como introduz novidades relativamente ao Despacho nº 338/93, nomeadamente os anonimatos, a simultaneidade de realização das provas e duração das mesmas. Dois considerandos deste normativo, um sobre a importância da programação e da planificação das actividades lectivas para o sucesso dos alunos e o outro sobre a necessidade de existirem boas condições de funcionamento das escolas, confrontados com o que se passou na realidade revoltam-me, porque me fazem pensar em formas hipócritas de encarar a actvidade das escolas. O trabalho e funcionamento das escolas foi negativamente afectado: a conclusão das actividades com os alunos do 10º ano foi antecipada, tendo terminado as aulas em média duas semanas antes do previsto, o que entre outras implicações acarretou um atraso na leccionação dos programas. Os alunos, com toda a legitimidade, manifestaram o seu incómodo e discordância — o clima de realização das provas foi de instabilidade e tensão.

Os professores sentiram a sua actividade perturbada, não só pela reformulação que tiveram de fazer relativamente ao 10º ano como pela acrobacia de conciliar as actividades inerentes às provas com as dos outros anos que leccionavam.

Os C. Directivos e C. Pedagógicos tentaram articular a organização das provas com o "normal funcionamento" das escolas.

Houve tomadas de posição públicas por parte de professores, pais e alunos, concordando todos eles quanto às desvantagens da realização neste ano lectivo das provas, pelas consequências nefastas em termos de aprendizagem e de normal funcionamento das escolas. O Ministério não quis ouvir...

O balanço é francamente negativo: Que melhorias na qualidade de ensino e de aprendizagem foram introduzidas? Quem não sentiu que o funcionamento das escolas foi perturbado por este processo? Que vantagens se reconhecem por se ter realizado este ano as provas?

Parece-me legítimo propor a revogação do despacho nº 20/SEED/94, não só pelas razões já apontadas como também pela previsão de que, no próximo ano, tudo funcionará pior por ser impossível conciliar as actividades da escola com as provas do 10º e do 11º anos.

Para concluir, quero sonhar com um próximo ano em que a participação reflectida dos professores na transformação da Escola seja articulada com medidas adequadas da Administração Central, em prol de um futuro construído com investimento na Educação.

Graciosa Veloso
Escola Secundária Nº1 de Loures

Avaliação dos alunos do Ensino Secundário

José Tiago Filipe

As alterações (ao que está a acontecer recusamos chamar-lhe reforma) que o Sistema Educativo Português sofreu no ano lectivo de 1993/94 foram baseadas, sistematicamente, em textos legais publicados tardiamente e portadores de omissões, contradições e incoerências que motivaram um final de ano demasiado conturbado. No topo de toda esta conturbação e instabilidade esteve, sem dúvida, a avaliação dos alunos do Ensino Secundário a dois níveis: a avaliação dos alunos dos currículos em extinção e o novo regime de avaliação. Estes são os temas que, em termos gerais, vamos tratar na presente reflexão.

1. Avaliação dos alunos do Ensino Secundário dos currículos em extinção.

a) O Despacho nº 1-I/SEED/93 que regulamenta a conclusão das disciplinas de 10º ano em atraso apenas chegou às escolas em fins de Janeiro de 1994. Este normativo para além de divulgar "as regras do jogo a meio do campeonato", deu origem a graves injustiças por preconizar um tratamento desigual para os alunos nesta situação. Ao tornar inviável, em muitos casos, a frequência das disciplinas em falta para a conclusão dos cursos complementares, determinou que para estes alunos apenas fosse dada uma oportunidade de matrícula nas disciplinas em questão, informação que não foi prestada em tempo oportuno.

Esta iniquidade torna-se mais gritante se estabelecermos comparação com o estipulado no Desp. Norm. nº 338/93 de 21 de Outubro que aprova o Novo Regime de Avaliação dos Alunos do Ensino Secundário. No ponto 29-c) este texto legal afirma que os Conselhos de Turma, na reunião realizada no final do 3º Período, têm competência para "recomendar, de acordo com as possibilidades da escola, a frequência às aulas das disciplinas do ano anterior em que o aluno não tenha progredido, apesar de ter transitado para o ano seguinte"; no ponto 66 é referido que "... podem ser adoptados, por despacho do Ministro da Educação, mecanismos de recuperação excepcional em disciplinas ministradas em mais do que um ano de escolaridade em que o aluno não tenha progredido".

b) Datado de 3 de Junho surgiu o Desp. nº 45/SEED/94 que, em síntese, considera aprovados nos Cursos Complementares Diurnos os alunos que obtenham aprovação na disciplina de Português e em mais **cinco disciplinas bienais**, devendo a formação vocacional ser considerada, para este efeito, como uma disciplina bienal, ficando, no entanto, a obtenção do diploma do 12º ano condicionada à aprovação na disciplina considerada precedente da disciplina base do curso do 12º ano em que o aluno se matriculou.

Numa primeira análise muitos consideraram este diploma como uma "ordem de despejo". Se em casos pontuais isso se verifica, uma reflexão mais profunda permite-nos concluir que ele constitui mais uma fonte de discriminação. Senão vejamos:

1º) Um aluno das áreas C e D pode ter optado por História nos 10º e 11º anos ou por Direito no 10º ano e Sociologia no 11º ano. No primeiro caso benificia do despacho, no segundo caso não.

2º) Porque em muitos casos só existem seis disciplinas bienais nos curricula, se os alunos tiverem todas as disciplinas anuais feitas não beneficiam em nada do despacho, pois têm que fazer o total das disciplinas.

3º) Os alunos que tenham obtido classificações mais elevadas em disciplinas anuais poderão ver a sua média final prejudicada pela aplicação deste despacho, porque esta é calculada entre as seis classificações mais elevadas obtidas em disciplinas bienais.

4º) Relativamente às disciplinas em atraso do 11º ano no próximo ano lectivo, é generalizado o procedimento já anteriormente referido em 1.a).

A divulgação deste documento foi realizada junto dos alunos nos últimos dias de aulas, pelo que cada um lá foi orientar a sua vida de forma a preparar-se para os exames que teria que efectuar para conclusão do 11º ano.

Simultaneamente, as escolas foram denunciando as injustiças anteriormente referidas junto das estruturas do Ministério da Educação, tendo estas reforçado oralmente a tese de que **duas disciplinas anuais nunca poderiam equivaler a uma bienal para aplicação deste despacho.** Foi neste contexto que se realizaram as reuniões de avaliação do 3º Período destes alunos.

Como se de ficção se tratasse, eis que surge um "boato" anunciando que as Direcções Regionais de Educação teriam recebido novas orientações do Departamento do Ensino Secundário que só transmitiriam às escolas se solicitadas. Para nosso espanto e deslumbramento é então que, em resposta ao pedido formulado, somos informados no dia 27 de Junho, através de um esclarecimento que:

- "Para efeitos de aplicação do ponto 1. do Despacho 45/SEED/94, podem ser consideradas equivalentes a uma disciplina bienal, duas disciplinas anuais".
- "No caso de um aluno ter obtido aprovação em mais do que as seis disciplinas referidas no ponto anterior, para cálculo da classificação final de curso, deverão ser **consideradas apenas as seis disciplinas com melhor classificação**, quaisquer que elas sejam.

No momento em que estas linhas estão a ser escritas muitos alunos estão a preparar-se para exames a que não têm necessidade de se sujeitar, de acordo com este esclarecimento. Não pondo em questão os princípios mais elementares de justiça que ele repõe, anulando os efeitos do Desp. 45 já denunciados em b), algumas questões se nos colocam :

- Porque razão não foram logo previstas estas situações na elaboração do despacho?
- Qual o motivo que leva as entidades competentes a não generalizarem os esclarecimentos a todas as escolas sem estas os solicitarem, evitando assim procedimentos diferentes motivados por informações antagónicas?
- Um esclarecimento terá poder para alterar um Despacho?
- Este esclarecimento será definitivo, ou virá ainda outra informação a contradizê-lo?

2. Novo Regime de Avaliação dos Alunos do Ensino Secundário.

O novo regime de avaliação dos alunos do Ensino Secundário foi instituído pelo Desp. Norm. nº 338/93 de 21 de Outubro, com o ano lectivo já a decorrer. Alguns dos pontos deste diploma careciam de posterior clarificação ou regulamentação o que, se aconteceu, foi feito de uma forma descoordenada durante o ano lectivo, quase sempre para além de um limite temporal razoável, não sem lançar em todos os intervenientes no processo muitas dúvidas e inquietações, como a seguir se exemplifica:

a) Prova global.

1. O regulamento desta prova (Desp. nº 20/SEED/94) foi apenas enviado às escolas em fins de Março, muito próximo das férias da Páscoa, remetendo para o 3º período a sua análise e discussão.

2. Em entrevista televisiva, a Srª Ministra da Educação afirmou que a prova global no próximo ano lectivo será elaborada a nível nacional, o que contradiz o Desp. Norm. nº 338 que no ponto 26 afirma serem estas realizadas a nível de escola e elaboradas pelo Departamento Curricular, segundo critérios aprovados em Conselho Pedagógico.

3. Em comunicado datado de 4/5/94,o Ministério da Educação afirma que:

- compete a cada escola decidir sobre o "alargamento do prazo de realização das provas", enquanto o ponto 24. do Desp. nº 20 refere que "as provas globais devem ocorrer a partir de 30 de Maio, não podendo terminar depois do dia 18 de Junho nas escolas com o 12º ano de escolaridade";
- "Em caso algum poderão os alunos ser obrigados a realizar mais do que uma prova por dia", o que não é referido em qualquer parte do regulamento;
- Com a introdução das provas globais espera-se vir "a constituir um novo impulso de qualidade, exigência e rigor ...". De facto, o primeiro parágrafo do ponto 40 do Desp. 20 é a antítese deste princípio por permitir que a prova global possa vir a não ser considerada para a atribuição da classificação final a alunos que não a realizem nem justifiquem a respectiva falta. Este ponto gerou, em termos relativos, desigualdades e injustiças entre os alunos atrás referidos e aqueles que, tendo feito a prova, viram a sua classificação interna baixar em consequência dela.

b) Regime de assiduidade dos alunos do Ensino Secundário.

A única referência do Desp. Norm. 338/93 relativamente à assiduidade destes alunos é feita no seu ponto 49 e diz apenas respeito ao limite de faltas injustificadas fixado na alínea b) do nº 1 do artº 21º do Dec.-Lei nº 301/93 de 31 de Agosto, que regulamenta o regime de assiduidade dos alunos do Ensino Básico.

Embora este Dec.-Lei no nº 2 do artº 33º generalize o estabelecido neste diploma ao Ensino Secundário no que toca a transferências, deveres de frequência, registo e justificação de faltas, não nos parece aconselhável que nesta matéria sejam tomados idênticos procedimentos para níveis de ensino com exigências e objectivos tão distintos.

c) Apresentação à realização de exames finais do 12º ano.

A alínea b) do ponto 33 do Desp. Norm. 338/93, ao preconizar a apresentação a exame final do 12ºano, na 1ª fase, dos alunos que tenham obtido numa disciplina a média igual ou superior a 10 valores, referente aos anos em que foi leccionada, pode privilegiar classificações regressivas, e logo negar toda a filosofia subjacente à avaliação contínua, como a seguir se exemplifica:

Disciplinas	10º	11º	12º	Admitido a exame 1ª fase
A	10	8	10	Não
B	8	10	10	Não
C	10	10	9	Sim

d) Condições de admissão a exame dos candidatos autopropostos.

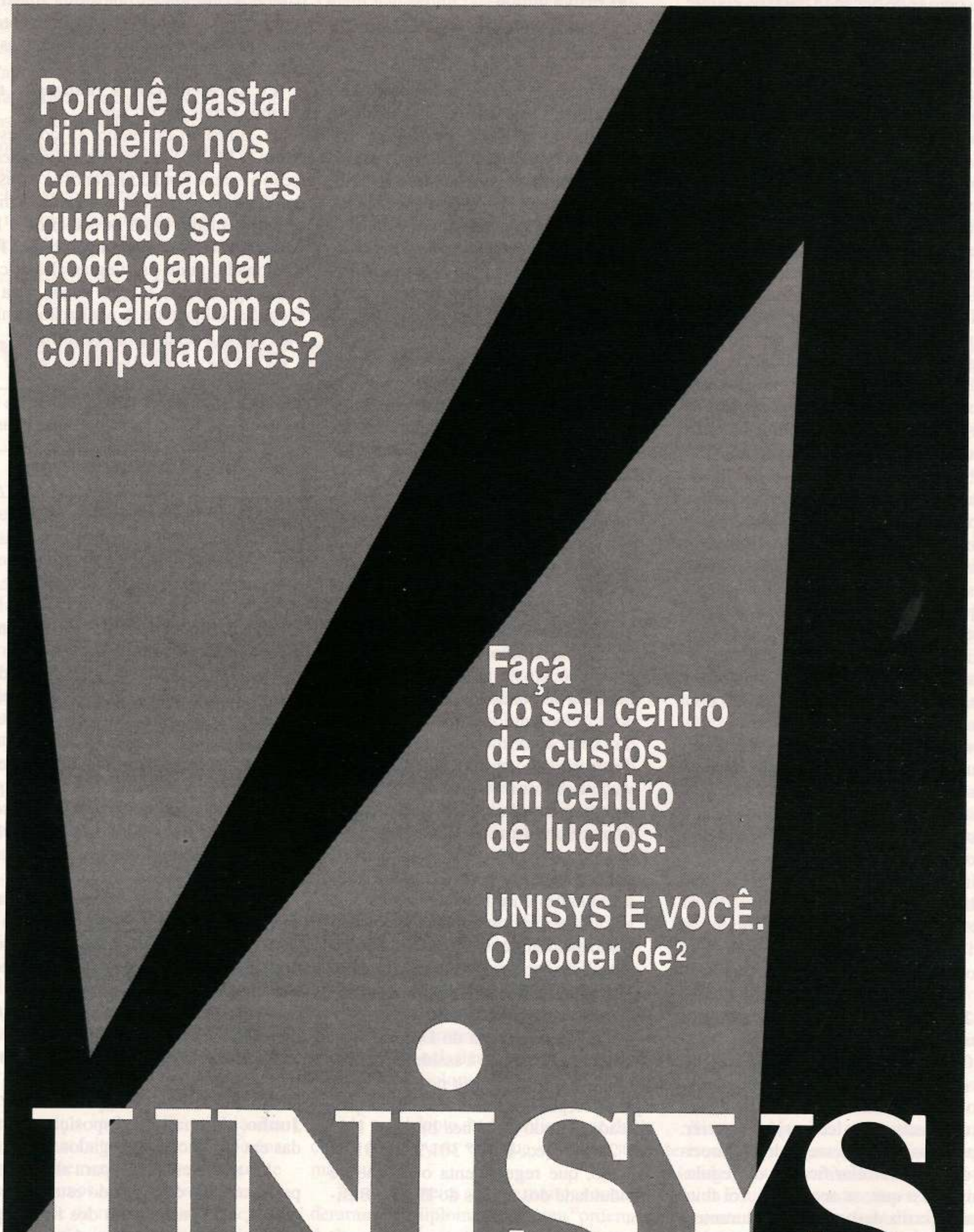
Ainda não são do conhecimento das escolas as condições de admissão a exame dos candidatos autopropostos cuja situação não se integre na alínea c) do ponto 44 do Desp. Norm. 338/93, dizendo este apenas respeito aos alunos que pretendam "obter aprovação em disciplina do mesmo curso ou de curso diferente do frequentado em que não tenham estado matriculados".

e) Normas para o funcionamento dos conselhos de turma no final do 3º período e para apresentação de pedidos de revisão e reclamação das decisões aí tomadas.

Não tendo o Ministério da Educação publicado legislação sobre esta matéria adequada à nova realidade repristinou (colocou de novo em vigor), através do Desp. nº 46/SEED/94 **apenas em 3 de Junho**, algumas das disposições contidas em Despachos revogados.

No nosso entender, para além de ser perfeitamente desajustado este procedimento, ele constitui um dos factos que fundamentam o que afirmámos na primeira linha deste texto.

José Tiago Courelas Filipe
Esc. Sec. Severim de Faria, Évora



Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

Para este trimestre foi proposto "Um problema com senos":

"Vamos escolher um ponto sobre o gráfico do seno, traçar a tangente nesse ponto, e observar em quantos pontos a tangente toca o gráfico.

Será possível determinar, dado um ponto qualquer do gráfico, em quantos pontos a recta tangente nesse ponto toca o gráfico do seno?"

Este problema era sem dúvida mais difícil que o habitual, o que deve ter inibido os habituais entusiastas desta secção. Só nos chegaram três respostas: Ana Luisa Correia (Lisboa), Judite Barros (Lisboa) e Orlando Freitas (Funchal). É a primeira que aqui reproduzimos, com ligeiras alterações de pormenor.

Seja **a** a abcissa do ponto onde se traça a tangente ao gráfico de sen x.

Se $\mathbf{a} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro, há uma infinidade de intersecções.

Se $\mathbf{a} = k\pi$, com k inteiro, há apenas uma intersecção.

Se **a** pertence a $]0, \frac{\pi}{2}[$, a equação da tangente é

$y = x\cos a + \operatorname{sen} a - a\cos a$

Designemos a tangente por **t**.

– **t** não intersecta o gráfico em pontos de abcissa maior que **a**.

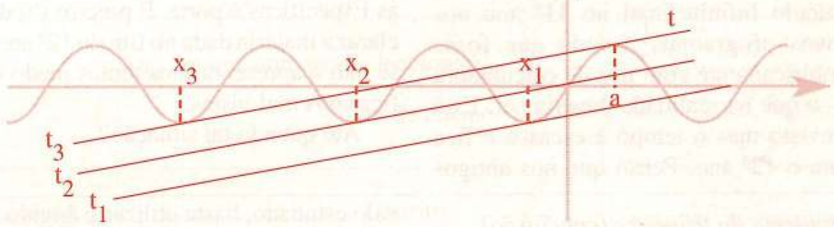
– Dos pontos de abcissa menor que **a** em que a tangente ao gráfico é paralela a **t**, o que tem maior abcissa é **–a**.

Consideremos a seguinte sucessão de abcissas e respectivas tangentes:

$x_1 = -a \qquad t_1$
$x_2 = -a - 2\pi \qquad t_2$
$x_3 = -a - 4\pi \qquad t_3$
$\ldots$
$x_n = -a - 2(n-1)\pi \qquad t_n$

Se t_n estiver acima ou coincidente com t, não haverá intersecções em pontos de abcissa superior x_n.

Seja então **m** o menor **n** tal que t_n está acima ou coincide com **t**.



As abcissas dos pontos de intersecção estão em $[x_m, a]$ e distribuídas assim:

- 1 em $\{a\}$
- 0 em $[x_1, a[$
- 2 em $[x_2, x_1[$
- 2 em $[x_3, x_2[$

…

- 2 em $[x_{m-1}, x_{m-2}[$
- 2 (se t_m coincidente com t) ou 1 (se t_m acima de t) em $[x_m, x_{m-1}[$.

Mas t_m coincide com t quando o ponto $(x_m, \operatorname{sen} x_m)$ pertence a t, e t_m está acima de t sse o seno de x_m é maior que a ordenada do ponto de t que tem abcissa x_m. Assim **m** será o menor inteiro que verifica:

$\operatorname{sen} x_m \geq x_m \cdot \cos a + \operatorname{sen} a - a \cdot \cos a$

o que é equivalente a

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}(\operatorname{tg} a - a) \qquad (1)$$

(continua na pág. 36)

Problema proposto

O JOGO DOS *SPROUTS*

A secção **Vamos jogar** deste número de **Educação e Matemática** propõe o jogo dos *Sprouts*.
Depois de terem lido essa secção e experimentado o jogo, propomos as seguintes questões sobre ele:

- Se o número de pontos inicial for **n**, qual é o número máximo de jogadas possível?
- E o número mínimo?
- Se o número inicial de pontos for 2, qual dos jogadores, o primeiro ou o segundo, tem uma estratégia vencedora, isto é, pode ganhar sempre, qualquer que seja a forma como o adversário jogue?

Pontos de vista, reacções, ideias...

Da Madeira, chegaram-nos dois comentários do colega José Orlando de Freitas, da Escola Secundária Francisco Franco: um deles é um comentário sobre a importância da introdução ao Cálculo Infinitesimal no Ensino Secundário, o outro é uma resposta ao desafio lançado por Luis Carmelo num dos últimos números da revista.

$\lim\limits_{x \to 12^o ano} \left(\textit{novos programas}\right) = \textit{erros dos programas antigos}$

Na minha escola, já vamos no quarto ano consecutivo dos novos programas e, infelizmente, nunca se deu a introdução aos limites e derivadas no 11º ano como previsto nos programas oficiais.

Já é do nosso conhecimento que se certas estruturas matemáticas não forem desenvolvidas na devida altura, será muito mais difícil aprendê-las mais tarde. Como exemplo flagrante, temos o que se passa com os alunos que não aprendendo as operações aritméticas elementares no 1º ciclo, muito dificilmente as aprenderão mais tarde e muito menos em adultos. Penso que se passa algo semelhante com a não introdução ao Cálculo Infinitesimal no 11º ano nos novos programas, mesmo que fosse empiricamente com uso de calculadora — o que na realidade deveria ser. Está previsto mas o tempo é escasso e fica para o 12º ano. Penso que nos antigos também acontecia o mesmo mas um pouco mais disfarçado, em que se davam as derivadas muito precariamente e sempre à velocidade de ponta da "fórmula um" e sem medo das amolgadelas que fazemos nos cérebros dos alunos.

E agora, com as Provas Globais, ainda serão maiores os atrasos do 10º ano, e por aí adiante nos próximos anos, o que nos levará a que num futuro próximo as aulas de Matemática, principalmente as do 12º ano, sejam pura e simplesmente o ditar de resultados; o que já vai acontecendo. Pois o que defendemos, em maioria, é que o programa tem de ser dado, porque no fim do 12º ano os alunos têm as Específicas à porta. É preciso (?) declarar a matéria dada no fim do 12º ano e se não o apresentarmos temos medo de ficarmos mal vistos.

Até quando tal situação?

Resposta ao "Não é imediato, isso não é...*" de Luis Carmelo (Educação e Matemática nº28)

(*) A frase refere-se à demonstração de que: *Seja (U_n) uma sucessão de números reais, tal que a subsucessão dos termos de ordem par é crescente e a subsucessão dos termos de ordem ímpar é decrescente. (U_n) é monótona?*

Quando se trata de trabalhar com o infinito não é para brincadeiras, pois a nossa intuição, muitas vezes, nos engana. Mas penso que a demonstração, usando a redução por absurdo, não é assim tão difícil, como indicada.

Demonstração:

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, tal que $u_{2(n+1)} > u_{2n}$ e $u_{2n+1} < u_{2n-1}$, $\forall n \in N$

(1) Suponhamos que (u_n) é crescente. Teríamos:

$$u_{2(n+1)} > u_{2n+1} > u_{2n} > u_{2n-1}, \quad \forall n \in N$$

e viria $u_{2n+1} > u_{2n-1}$, $\forall n \in N$, o que é absurdo

(2) Suponhamos que (u_n) é decrescente. Teríamos:

$$u_{2(n+1)} < u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1}, \quad \forall n \in N,$$

e viria $u_{2(n+1)} < u_{2n}$, $\forall n \in N$, o que é absurdo

Nota da Redacção: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

Problema do trimestre (conclusão)

Se **a** pertence a $]-\frac{\pi}{2},0[$ e constituirmos a sucessão $x_n = -a + 2(n-1)\pi$, por um raciocínio análogo ao anterior obtemos:

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}(a - \operatorname{tg} a) \qquad (2)$$

Juntando (1) e (2) temos:

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}|\operatorname{tg} a - a|$$

Dadas as simetrias do gráfico da função seno, quando **a** não pertence ao intervalo estudado, basta utilizar o ângulo $\mathbf{a}_o$ deste intervalo cujo seno é igual ao de **a**.

Para determinar o número de intersecções de **t** com o gráfico calculamos

$$y = 1 + \frac{1}{\pi}|\operatorname{tg} a_o - a_o|$$

e seja C(y) a característica de y.

– Se y é inteiro, o número de intersecções é **2y-1**.

– Se y não é inteiro, o número de intersecções é **2C(y)**.

José Paulo Viana

Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

Quota de 1994

No ano de 1994 o valor da quota é de **4000$00** (3000$00, para o sócio estudante e 4500$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ____________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Visa ☐ VISA   MasterCard ☐ MasterCard   Eurocard ☐ EUROCARD

Validade __________ o valor de __________ correspondente a __________

__________ Data __/__/__

Assinatura ____________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº __________

Nome ____________________

____________________ Tel: __________

Morada ____________________

Código Postal __________ Ano em que começou a leccionar: __________

Data de nascimento ______/______/______ Nível de ensino: __________

Escola ____________________

Localidade __________ Distrito __________

Categoria Profissional ____________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido preenchendo a ficha de pedido de publicações ou fotocópia (ver *Educação e Matemática* nº 28), juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes: até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%. Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7782141 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice