Educação e Matemática

Nº 29

1º trimestre de 1994

A Reforma não acabou!

Preço: 400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

ProfMat 94

Como certamente todos saberão, vai realizar-se de 9 a 12 do próximo mês de Novembro, em Leiria, o 10º ProfMat.
Todas as informações que são precisas constam no excelente nº 3 do boletim do encontro que foi enviado a todos quantos fizeram a sua pré-inscrição. Vem lá tudo. Aqui só lembramos que **30 de Abril** é o prazo limite da inscrição sem agravamento de preço.
Certamente já enviou a sua, não?

Sobre a capa

Passaram 20 anos do 25 de Abril de 1974. Na fotografia da capa, alunos de uma escola dos arredores de Lisboa pintam um enorme painel numa parede da escola, comemorando mais um ano depois do 25 de Abril. Estava-se em 1977, não era ainda um dia feriado, ia-se para a escola comemorar. Nesse ano, muitas das paredes foram assim decoradas. As memórias estavam ainda frescas. Hoje, comemoramos de outras maneiras, nós, em particular, o facto de que sem o 25 de Abril, muito provavelmente, não existiria uma revista como a *Educação e Matemática*, não existiriam ProfMats, não existiria a APM. (foto de Henrique Guimarães)

A *Educação e Matemática* tem novo director

Talvez não saibam, ou não se lembrem, mas desde o número 16 da *Educação e Matemática* que o Eduardo Veloso é o Director da nossa revista. Cumpriram-se, portanto, os três anos do mandato para que então fora eleito. Treze números da revista a dirigir os trabalhos da redacção com a vivacidade e entusiasmo que todos lhe reconhecemos. Não vale a pena dizer, mas gostámos. Queríamos mais até, mas ele vai sair. Vai sair mas fica, isto é, deixa apenas a outra pessoa, a responsabilidade que até agora teve e continua connosco na redacção. Quem *entra* agora é o Paulo Abrantes, escolhido por todos para o cargo, na certeza de que (também) vai ser bom. Obrigado aos dois.

Rectificando

Nos dois números anteriores da *Educação e Matemática* não foi indicado que a tradução do artigo de Evelyne Barbin — *Que concepções epistemológicas da aprendizagem...* foi realizada por Gertrudes Amaro, com a revisão de José Manuel Matos. Com as nossas desculpas, aqui fica o reparo.

Neste número colaboraram

António Carvalho, António Melo, Candelaria Espinel Farbes, Cecília Pardigão, Célia Gama Lobo, Dulce Batista, Irene Segurado, Jaime Carvalho e Silva, José Dias Milheiro, José Paulo Viana, Judite Barros, Maria Lúcia Marques, Projecto GEM, Sérgio Macias Marques e Victor Santos.

Data de publicação

Este número foi publicado em Abril de 1994.

nº 29
1º trimestre
de 1994

A Reforma não acabou!

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Paulo Abrantes

Redacção
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Eduardo Veloso
Leonor Barão
Helena Lopes
Henrique Manuel Guimarães
José Manuel Matos
Maria João Lagarto
Paulo Alvega
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3000 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 77603 / 94

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa
Tel / Fax: 7782141

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Há dois anos, em Fevereiro de 1992, começava assim o editorial do nº 19 da *Educação e Matemática*: "Finalmente os programas antigos vão acabar!"

Nessa altura, muitos de nós, vivíamos uma época de expectativas e esperanças. Havia dúvidas mas também entusiasmo. Não sendo estes ainda os programas do nosso contentamento e apesar das contradições tantas vezes referidas nas páginas desta revista, mais nuns ciclos do que noutros, eles apresentavam algumas ideias pedagogicamente inovadoras, que também vinhamos há muito a defender — a resolução de problemas, as aplicações da Matemática, o trabalho de grupo, a utilização do computador e da calculadora estavam agora previstas. Da mesma forma era reconhecido que os conteúdos de aprendizagem passavam também pelo desenvolvimento de capacidades e atitudes. Hoje, no segundo ano da generalização, as dúvidas cresceram e o entusiasmo dos professores desvaneceu.

É comum ouvir dizer-se que "a Reforma acabou", que "quem a fez já nada tem a ver com ela", que "a escola não serve para nada" e paralelamente a opinião pública tende, aqui e ali, a responsabilizar os professores por esta situação.

Mais nuns casos do que noutros, os novos programas vão revelando a sua inconsistência. A extensão pressiona os professores no sentido de abandonarem as novas metodologias propostas em detrimento do seu "cumprimento", entendido, é claro, como cumprimento dos conteúdos temáticos.

A situação é grave. As orientações que vão sendo enviadas aos professores, associadas ao processo de avaliação, no caso do ensino secundário, poderão vir a dar razão aos que alertaram para o facto de as novas metodologias propostas nestes programas não estarem associadas a novas ideias sobre o ensino da Matemática e poderem portanto ser abandonadas na primeira oportunidade.

A resolução de problemas, a utilização da tecnologia, a ligação da matemática com a realidade, o desenvolvimento de projectos de trabalho, entendidos como parte integrante e importante do processo de ensino da matemática, pressupõem tempo, recursos, professores motivados e com acesso a formação adequada.

Esperava-se uma formação que tivesse em conta as novas metodologias propostas, uma formação que fosse um convite à inovação, ao trabalho em grupo, à troca de experiências e ao debate, uma formação que facilitasse a discussão e a colocação em prática das novas ideias, que permitisse aos professores ultrapassar dificuldades e levar a Reforma à prática, em suma, uma formação ligada à prática pedagógica. Em vez desta formação, os professores viram-se envolvidos, como nunca, noutra com créditos e descréditos, relatórios críticos, trabalhos individuais, uma formação nem sempre desejada mas exigida.

Não se mobilizam e incentivam os professores escrevendo nos programas que as novas tecnologias são importantes, o uso de calculadoras é obrigatório e o de computadores desejável enquanto que, por outro lado, se proíbe a utilização de calculadoras gráficas nos exames, e se parte do princípio de que quadro e giz continuam hoje a ser suficientes para aprender e ensinar matemática. Não parecerá absurdo para as próximas gerações uma escola sem tecnologias?

Não se mobilizam professores dizendo que a avaliação é parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, com um papel formativo de desenvolvimento da autoconfiança do aluno e por outro lado se decide, no secundário, a realização de exames denominados de "provas globais", escritos, iguais para todos, com a duração de uma hora, com todo o peso que um exame tem e que talvez permita avaliar alguns tipos de capacidades (memorização, técnicas) mas não permite de certeza avaliar outras que os programas consideram essenciais como sejam as capacidades de resolver problemas, de comunicar, de cooperar, de trabalhar em grupo, não serve para avaliar as atitudes desenvolvidas nem os hábitos criados.

Não se mobilizam e incentivam professores dizendo-lhes que têm que comprar os programas que vão leccionar, fabricar (e pagar) os materiais que querem utilizar ou ainda, como aconteceu recentemente aos professores do secundário (através de um ofício do Departamento do Ensino Superior), que a culpa do não cumprimento com sucesso do programa de Matemática é só deles, professores, que não leram atentamente os textos prévios da reforma, que não estão a gerir correctamente os programas.

Mas a Reforma não acabou!

Não acabou porque a Matemática continua a ser uma disciplina com a qual muitos alunos se relacionam mal, onde o insucesso continua grande, uma disciplina considerada por quase todos como muito importante mas que afinal continua a servir essencialmente para seleccionar. E não tem que ser assim!

Não acabou porque são muitas as experiências e os projectos de inovação e também de investigação que por todo o país se vão desenvolvendo e apresentando.

Não acabou porque os professores de Matemática e os investigadores têm algo a dizer sobre que matemática deve ser ensinada, como deve ser ensinada, o que todos os alunos devem aprender, que metodologias e instrumentos tecnológicos devem ser utilizados e como.

E, acima de tudo, não acabou porque uma Reforma não se faz por decretos e despachos, muito menos quando uns contrariam outros, como seja por exemplo o caso mais flagrante da avaliação do secundário, cujos diplomas contrariam os princípios enunciados nos programas.

Qualquer Reforma, que assim se queira chamar, tem que contar com os professores como intervenientes activos em todo o processo de mudança, desde a discussão dos novos currículos, até à sua implementação e isso não está a acontecer.

O acompanhamento e o debate sobre o decorrer da Reforma têm sido uma preocupação constante da APM, presente na revista, nos ProfMats, nos Encontros Regionais, em acções específicas para o tratamento do tema.

A APM vai de novo desenvolver um conjunto de iniciativas no sentido de saber como sentem hoje os professores de Matemática a Reforma. O que pensam os professores que estão a leccionar a Reforma? Os programas estão a ser cumpridos? Que principais mudanças se estão a sentir? Como se encara a aplicação dos programas ao nível dos conteúdos leccionados, ao nível das atitudes e capacidades a desenvolver nos alunos? Como vai a resolução de problemas, a utilização da calculadora, a ligação da Matemática com a realidade, o trabalho de grupo? Que papel tem tido a Matemática na implementação da Área Escola?

Porque é urgente repor o debate, intervir, aqui fica mais uma vez o desafio, vamos ser mais actuantes e, porque não, mais reivindicativos!

A Direcção da APM

Sobre a proibição das calculadoras gráficas

Na sequência do seminário sobre calculadoras gráficas organizado recentemente pela APM (ver artigo nesta revista), a Direcção da APM tornou pública uma posição sobre a proibição da utilização da calculadora gráfica nos exames do ensino secundário. Esta posição teve em conta estudos efectuados sobre a utilização da calculadora gráfica e que "apontam no sentido de uma melhoria nas atitudes dos alunos em relação à Matemática [e] uma melhoria em aspectos do seu aproveitamento". *Resultou também de um consenso manifestado durante esse seminário salientando que a calculadora gráfica* "pode contribuir para que o aluno assuma um papel mais activo e uma atitude mais investigativa e exploratória, pode melhorar a relação do aluno com a Matemática, pode incentivar e facilitar abordagens novas e diferenciadas dos problemas, pode ajudar a aprofundar tópicos científicos, a estabelecer conexões entre os diversos tópicos e entre estes e a realidade". *Considerando ainda que* "não faz sentido apresentar orientações metodológicas que refiram ser preciso 'estabelecer maior ligação da matemática com a vida real, com a tecnologia, com as outras disciplinas' e depois pensar em formas de avaliação que nada têm a ver com os princípios enunciados e equipamentos previstos e usados", *a **Direcção da APM** considera:*

1. Ser preocupante que as orientações metodológicas previstas nos novos programas sejam colocadas em causa pela inconsistência dos mesmos, por exemplo devido à sua extensão, ou por medidas administrativas como sejam a proibição do uso das calculadoras gráficas nos exames. Esta proibição não faz sentido! A Matemática do ensino secundário não pode continuar a servir para "seleccionar para o ensino superior".

2. Dever ser incentivada a utilização de calculadoras gráficas integradas, no ensino secundário, numa transformação geral em que se dê ênfase às representações gráficas e à sua interpretação, se valorizem estratégias de exploração e descoberta por parte do aluno e se reconheça a necessidade de: ensinar usando a máquina, educar para o uso da máquina, criar condições para um efectivo acesso à máquina e se utilize a máquina como um instrumento flexível ao longo de todo o ano.

3. Dever ser permitida a utilização de calculadoras gráficas em todas as provas de avaliação, incluindo os exames.

Matrizes por detrás das redes

Candelaria Espinel Febles

"Os professores ensinam a Matemática do passado, os alunos viverão o futuro."
Ubiratan d'Ambrosio, VI JAEM, 1993

As redes permitem modelar alguns fenómenos da nossa complexa sociedade e as matrizes permitem armazenar a informação contida no modelo. Operar com matrizes, como estruturas discretas que são, é tarefa do computador. Codificar a informação e interpretar o seu significado diz respeito ao homem.

Nas linhas seguintes descrevo o ambiente que utilizei com os meus alunos para que conhecessem alguns problemas de matemática discreta. Isto também me deu a oportunidade de introduzir algumas noções da teoria de grafos.

Matrizes

A figura 1 mostra seis cidades espanholas, próximas de Portugal: Badajoz (B), Cáceres (C), Mérida (M), Zafra (Z), Córdova (D) e Sevilla (S).

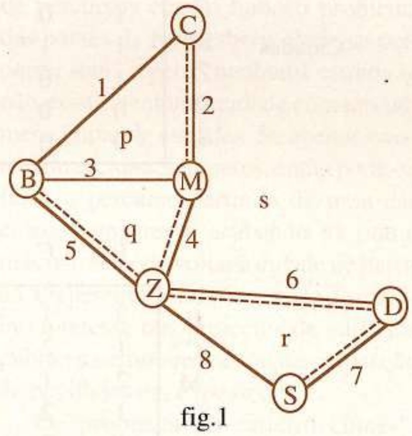


fig.1

Escolheram-se oito das estradas que as ligam, e p, q, r e s representam as quatro zonas ou regiões que estas estradas determinam. A informação que o gráfico fornece pode ser recolhida através de várias matrizes. Consideremos as matrizes como tabelas de dupla entrada onde se guarda informação codificada. Uma forma de codificar a rede através de matrizes é assinalar um 1 se uma relação é verdadeira e 0 se é falsa.

As matrizes que se seguem, além de recompilarem diversa informação presente no gráfico, submetem-se a algumas operações elementares que permitem obter mais dados sobre a rede, que por sua vez resolvem alguns problemas da nossa complexa sociedade.

M1 — As seis cidades estão ligadas por oito estradas (fig. 2)

Quando uma estrada passa por uma determinada cidade, coloca-se um 1 na matriz e 0 caso assim não seja. Ao adicionar os elementos da matriz por linhas obtém-se o respectivo número de estradas que saem de cada cidade. Ao adicionar por colunas, obtém-se sempre um 2, que nos indica que as estradas têm uma cidade em cada extremo.

		Estradas								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Cidades	B	1	0	1	0	1	0	0	0	3
	C	1	1	0	0	0	0	0	0	2
	M	0	1	1	1	0	0	0	0	3
	Z	0	0	0	1	1	1	0	1	4
	D	0	0	0	0	0	1	1	0	2
	S	0	0	0	0	0	0	1	1	2
		2	2	2	2	2	2	2	2	

fig.2

M2 — Existem quatro regiões separadas por oito estradas (fig. 3)

Codificou-se por 1 uma estrada se esta limita uma região e por 0 no outro caso. Ao adicionar por linhas obtém-se o número de estradas que limitam cada região. Ao adicionar por colunas obtemos sempre um 2, isto é, há uma região de cada lado da estrada.

Estradas

		1	2	3	4	5	6	7	8	
Regiões	p	1	1	0	0	0	0	0	0	3
	q	0	0	1	1	1	0	0	0	3
	r	0	0	0	0	0	1	1	1	3
	s	1	1	0	1	1	1	1	1	7
		2	2	2	2	2	2	2	2	

fig.3

M3 — Existem cinco cidades que estão em quatro regiões (fig. 4)

O 1 indica que uma cidade está nessa região. A adição por linhas dá o número de regiões que uma cidade limita. Ao adicionar por colunas obtém-se o número de cidades que estão na fronteira de cada região. Note-se que a fórmula de Euler se verifica:

Cidades + Regiões – Estradas = 2

conhecida na Geometria por:

Vértices + Superfícies – Arestas = 2.

Cidades

		B	C	M	Z	D	S	
Regiões	p	1	1	1	0	0	0	3
	q	1	0	1	1	0	0	2
	r	0	0	0	1	1	1	3
	s	1	1	1	1	1	1	4
		2	2	2	2	2	2	

fig. 4

Nas três matrizes anteriores recolheu-se a relação de incidência de três conjuntos: Cidades, Regiões e Estradas. Também é possível associar um conjunto consigo próprio. Assim, na seguinte matriz está patente uma relação de adjacência entre cidades.

Cidades

		B	C	M	Z	D	S
Cidades	B	0	1	1	1	0	0
	C	1	0	1	0	0	0
	M	1	1	0	1	0	0
	Z	1	0	1	0	1	1
	D	0	0	0	1	0	1
	S	0	0	0	1	1	0

fig.5

M4 — Cidades ligadas por uma estrada

Temos uma matriz Σ quadrada e simétrica (fig. 5). Ao multiplicar esta matriz por si mesma, obtem-se uma nova matriz Σ^2 (fig. 6) que nos dá o número de trajectórias distintas de tamanho dois de uma cidade para outra. Por exemplo, para ir de Badajoz a Mérida, utilizando duas estradas no trajecto, existem duas formas distintas. Contudo, de Badajoz a Córdoba utilizando duas estradas apenas existe uma única forma. Analogamente, cada elemento de Σ^3 dá o número de trajectórias distintas de tamanho três de uma cidade para outra.

	B	C	M	Z	D	S
B	3	1	2	1	1	1
C	1	2	1	2	0	0
M	2	1	3	1	1	1
Z	1	2	1	4	0	1
D	1	0	1	1	2	1
S	1	0	1	1	1	2

fig.6

M5 — Trajectórias mais curtas entre cidades (fig. 7)

Os elementos da matriz dão o número mínimo de estradas que necessitamos de utilizar para ir de uma cidade para outra. Assim temos trajectos que utilizam 1, 2 ou 3 estradas. O 3 é o diâmetro ou distância máxima entre cidades.

	B	C	M	Z	D	S
B	0	1	1	1	2	2
C	1	0	1	2	3	3
M	1	1	0	1	2	2
Z	1	2	1	0	1	1
D	2	3	2	1	0	1
S	2	3	2	1	1	0

fig.7

M6 — Matriz de distâncias (fig. 8)

A matriz simétrica com as distâncias em quilómetros é aquela que por vezes acompanha os mapas das estradas. No nosso caso, os dados foram adaptados.

	Badajoz	Cáceres	Mérida	Zafra	Córdoba	Sevilla
Badajoz	•	90	65	40	240	240
Cáceres	•	•	70	130	330	330
Mérida	•	•	•	60	260	260
Zafra	•	•	•	•	200	200
Córdoba	•	•	•	•	•	140
Sevilla	•	•	•	•	•	•

fig.8

Problemas

P1 — Localização de centros

No nosso exemplo é evidente que Zafra é uma espécie de centro, não por ser capital de província, mas pela sua localização. Qualquer fenómeno, como uma inundação desta cidade, afectaria as restantes cidades, em especial as comunicações das cidades que estão a norte de Zafra com as do sul, partindo do pressuposto que apenas dispunhamos da rede de estradas assinaladas.

A nossa percepção sobre a importância de Zafra é confirmada através da matriz M5. Ao adicionar os elementos da matriz por linhas ou colunas obtem-se:

B	C	M	Z	D	S
7	10	7	6	9	9

A Zafra corresponde um valor mínimo de 6. Por isso Zafra é o centro. Um centro é a cidade com a propriedade da distância máxima entre essa cidade e as outras ser a menor possível.

Os problemas de escolha de um lugar que obedeça a um determinado critério, são conhecidos como localização de plantas. Pensemos, por exemplo, num problema de Ecologia: colocar depósitos de água para apagar incêndios florestais, onde o objectivo é minimizar o tempo entre o foco de emergência e os locais onde se colocam os depósitos. Evidentemente que poderá ser melhor dispor de vários centros. Outros exemplos de problemas de localização de plantas que se apresentam com mais frequência na nossa complexa sociedade são: determinar onde colocar centros de emergência como hospitais, serviço de bombeiros, estação de autocarros, aeroportos, centros de resíduos sólidos, ... O critério pelo qual se escolhe o centro pode mudar de acordo com o exemplo que se escolha.

P2 — Percursos eulerianos

Se o Ministério dos Transportes decide rever os sinais de trânsito das oito estradas assinaladas, evidentemente que tem de passar por cada uma delas. Mas, como é fácil de perceber, seria desejável não ter que voltar a passar por nenhuma estrada uma segunda vez. O técnico encarregado questiona-se se isto será possível. Por tentativa e erro pode concluir-se que a única solução é partir de Badajoz para chegar a Mérida ou vice-versa.

Na matriz M1 de cidades–estradas observa-se que Badajoz e Mérida são as duas únicas cidades ligadas com um número ímpar de estradas.

B	C	M	Z	D	S
3	2	3	4	2	2

O nome deste percurso deve-se a Euler que em 1736 descobriu esta classe de percursos com o famoso problema das pontes de Königsberg. Pode-se percorrer sem "repetir" nenhuma estrada se não existir nenhuma cidade com um número ímpar de estradas. Se apenas existem duas cidades ímpares, então pode-se fazer o percurso partindo de uma das cidades ímpares e acabando na outra, mas não se pode voltar à cidade de partida. Os percursos eulerianos são de máximo interesse nos projectos de edifícios públicos como museus ou na colocação de pavilhões em exposições.

O "problema do carteiro chinês", consiste em procurar um percurso euleriano, caso este exista, tentando também que a distância a percorrer seja a mais curta possível. Em matemática discreta, este problema ficou conhecido precisamente com este nome e tem várias aplicações como: distribuição de correio, recolha de lixo, ...

P3 — Árvore mínima

Pretende-se colocar linhas telefónicas que liguem as seis cidades. Os postes serão colocados ao longo das estradas. A questão é instalar as linhas utilizando o menor número possível de metros de cabo.

O algoritmo que permite calcular uma árvore mínima é o seguinte:

Passo 1: Seleccionar, em primeiro lugar, as duas cidades mais próximas e uni-las. No nosso caso, Badajoz e Zafra.

Passo 2: Identificar a cidade mais próxima a uma já unida e ligá-la. Repetir este passo até que todos os vértices estejam unidos.

No nosso caso, unimos Mérida a Zafra e de seguida Cáceres a Mérida. Resta unir Zafra com Córdova ou Sevilla e depois a cidade que falta. No gráfico está assinalada com traços descontínuos uma possível árvore mínima.

Encontrar uma árvore que se estenda por todas as cidades e que além disso tenha um percurso mínimo tem grande utilidade em múltiplas situações práticas. Por outro lado, as estruturas de árvore aparecem em situações hierárquicas conhecidas, como a árvore genealógica; mas também são estruturas de importância vital para organizar bases de dados em computadores.

P4 — Circuito hamiltoniano

Estamos a fazer turismo pela zona e queremos visitar as seis cidades, evidentemente sem passar duas vezes pela mesma, caso seja possível.

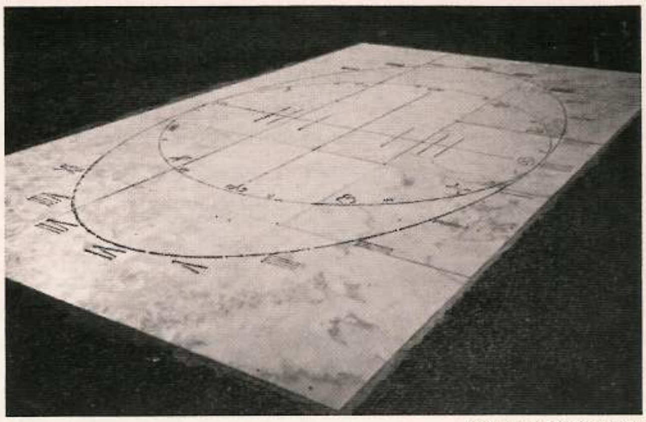
O nome do circuito deve-se a Hamilton que investigou em 1859 a existência de tais circuitos num dodecaedro cujos vértices representavam 20 cidades do mundo. Ao contrário dos percursos eulerianos não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para que exista um circuito hamiltoniano, apenas existem resultados parciais.

O famoso "problema do vendedor" consiste em encontrar um circuito hamiltoniano de percurso mínimo. Como é evidente, é um problema com múltiplas

(continua na pág. 10)

Um quadrante solar

António Melo



(foto de António Melo)

A turma do 9º ano de Arte e Design da Escola C+S de Montelavar e o Clube de Matemática construiram, no ano lectivo de 1990/91, um quadrante solar gigante no pátio da escola.

O desafio fora lançado no ano anterior, quando da execução de instrumentos náuticos para uma actividade extracurricular da escola sob o título "Um Dia na Capital do Império".

Iniciou-se nessa altura uma recolha fotográfica de relógios de sol, na área envolvente da escola, abarcando parte do concelho de Sintra e de Mafra, recolha efectuada por meio de inquérito junto dos alunos da escola, vindo a ser identificados cerca de quarenta exemplares.

Na sequência desta recolha fotográfica foram efectuadas quatro exposições: na nossa Escola, na feira das Escolas do Concelho de Sintra, em Queluz, no Centro Comercial das Amoreiras, em colaboração com o Instituto do Quadrante Solar e ainda no Palácio de Valenças, com o apoio da Câmara Municipal de Sintra.

O Sr. Victor Manuel Sampaio e Melo, do Instituto do Quadrante Solar, fez uma acção de formação na escola, para os alunos envolvidos no referido projecto.

Consultada então a obra "Os Dez Livros de Arquitectura" de Vitrúvio, arquitecto romano do 1º século, encontrou-se o registo e descrição dos quadrantes solares conhecidos na antiguidade[1].

Optou-se por um relógio de sol analemático, dado que as suas características se ajustavam aos fins em vista: ser colocado no pavimento exterior da escola e ser utilizado com facilidade pelos alunos, envolvendo-os na leitura da hora solar visto que neste caso o gnomo[2] é o próprio observador.

Sendo o quadrante constituído por uma elipse (o analema), calcularam-se os seus eixos com base nas seguintes premissas:

a) Na figura 1, o semi-eixo menor *[AC]* corresponde à sombra equinocial, ao meio dia, projectada pelo gnomo *[BC]* (um aluno com 1,5 m de altura). Sendo o ângulo *B* igual à latitude do lugar[3] (38,5°) obteremos, com alguma trigonometria, que

$$\overline{AC} = 1,2$$

b) A razão entre os eixos da elipse é igual ao seno da latitude do lugar. Sabendo que o eixo menor é 1,2 m, o eixo maior é 3,8 m.

Tomando *[OD]* (semi-eixo maior) como raio e fazendo centro em *A*, marcaram-se os focos *F* e *F'* (ver fig. 2). A elipse foi traçada directamente sobre lages de mármore, tendo por base a propriedade fundamental dos seus pontos: $\overline{PF} + \overline{PF'} = EM$ (ver fig. 2).

O círculo trigonométrico foi dividido em sectores de 3,75 graus ($24 \times 4 = 92$ divisões; $360 \div 92 = 3,75$) com o fim de obter no analema divisões horárias, meias

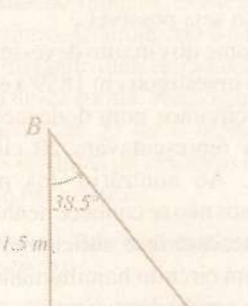


fig. 1

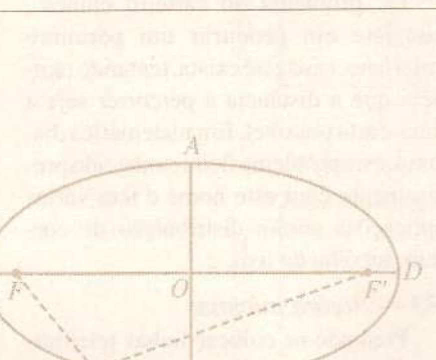


fig. 2

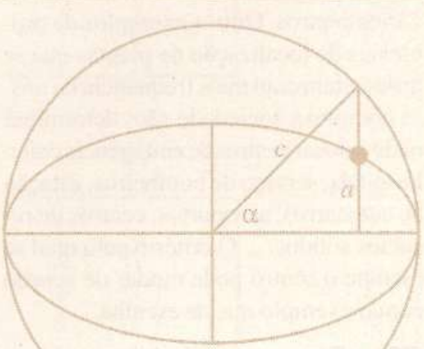
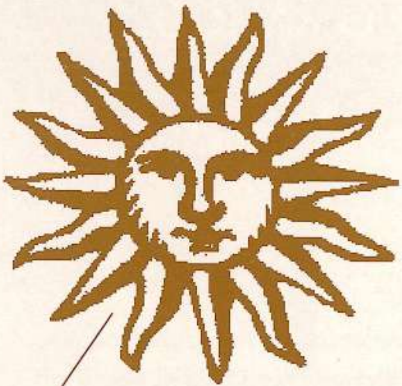


fig. 3

na Escola C+S de Montelavar



e Irene Segurado

horas e quartos de hora. Para efectuar a divisão marcou-se a sequência de valores perpendicularmente ao eixo maior, até atingir a elipse (ver fig. 3). Assim, $a = c\ sen\ \alpha$, $a_1 = 1{,}9 \times sen\ 3{,}75$, ...

Marcaram-se ainda sobre o eixo menor segmentos correspondendo cada um à posição em que se deve colocar o gnomo (neste caso o aluno) nas várias épocas do ano. Utiliza-se a fórmula $z = tg$ dec $cos\ 38{,}5°$, em que dec é a declinação do Sol nessas épocas. As distâncias z marcam-se para cima e para baixo do eixo maior da elipse, conforme o sinal.

Na elipse foi inscrita uma circunferência, dividida em doze partes iguais, onde os signos do Zodíaco foram gravados, bem como a letra inicial de cada mês indicando a posição da entrada do sol nos mesmos, calculando o ângulo ao centro que o sol descreve para cada mês.

O relógio de sol é constituído por 15 lages de mármore polido de 0,95 m x 0,95 m e 2,5 cm de espessura. A gravação das peças foi efectuada por meio de máscara em cera e corrosão com o ácido clorídrico.

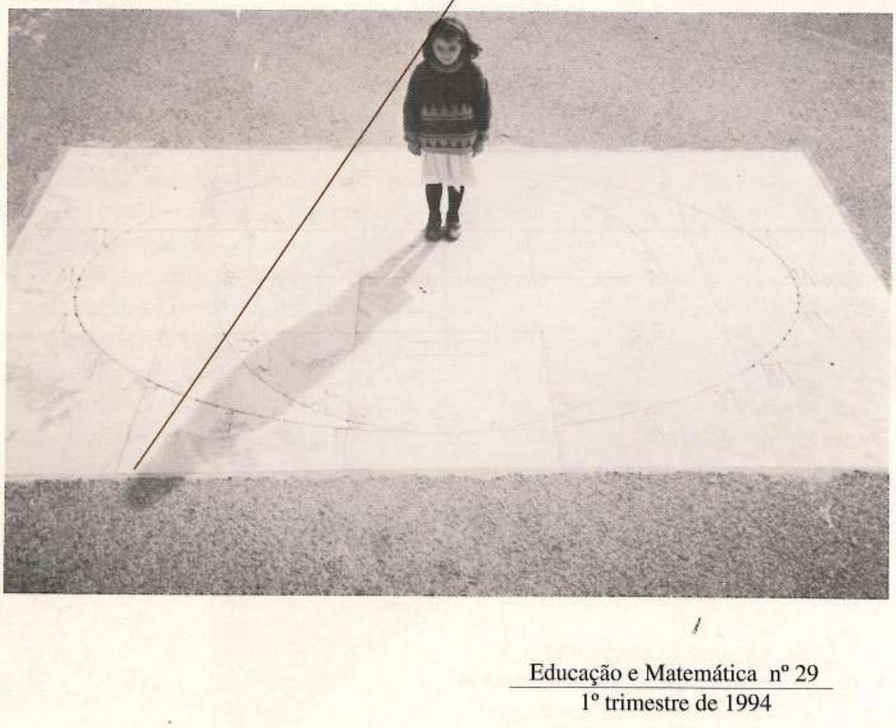
Foi implantado no pátio exterior com o eixo menor orientado segundo a direcção Norte — Sul.

A orientação exacta foi obtida por meio da sombra de um fio de prumo, colocado no local ao meio dia solar, obtido com base na tabela "Tempo Universal ao Meio Dia" corrigida para a longitude do local[4].

No ano lectivo de 91/92, com a abertura na escola de uma "Oficina de Escultura e Cantaria", iniciou-se a realização, pelos alunos, de quadrantes solares verticais (de fachada), tendo ainda o Clube de Matemática iniciado uma base de dados dos relógios recolhidos.

Finalmente, em 1993/94, editou-se uma colecção de 18 postais de quadrantes solares sob o título "Relógios de Sol da Região Saloia", que se encontra à venda ao público.

(foto de António Melo)



Notas

1 Um século após, Ptolomeu escreveu o seu livro "Analema", aplicando elementos de geometria descritiva à resolução de problemas astronómicos.

2 Instrumento que, projectando sombra num plano horizontal, define a altura do sol.

3 A latitude e longitude do lugar foram obtidas a partir de uma carta militar.

4 Os autores estão à disposição para qualquer esclarecimento sobre a construção deste tipo de relógios solares.

Referências

Almanaque Borda de Água (1991). Lisboa: Editorial Minerva.

César, M., Neves, D. e Arwello, C. (1986). *Astronomia de régua e compasso*. Campinas, Brasil: Ed. Papiro.

Dados astronómicos para os Almanaques de 1991. Lisboa: Edição do Observatório Astronómico de Lisboa.

Lande, M. de la (1774). *Abregé d'Astronomie*. Paris.

Pedoe, D. (1976). *Geometry and the liberal arts*. Londres: Penguin Books.

Symbol, sygns and signets. Nova Iorque: Dover Publications.

Vitrúvio (1988). *Les dix livres d'architecture de Vitruve*. Facsimile da edição de 1648 traduzida e comentada por Claude Perrault. Paris: Pierre Mardaga Éditeur.

Warsusfel, A. (1961). *Les nombres et leurs mystères*. Paris: Editions du Seuil.

António de Melo
Maria Irene Segurado
Esc. C+S de Montelavar

Programa de Matemática do 3º Ciclo — Uma reflexão crítica

Dulce Batista e Judite Barros

Terminado o acompanhamento feito à Reforma Curricular no 3º Ciclo pensamos que é oportuno apresentar uma reflexão/crítica ao programa de Matemática. Este trabalho tem como base o acompanhamento feito às quatro escolas dependentes da DREL onde esteve em experiência a Reforma Curricular

As críticas e/ou sugestões de alteração não devem ser tomadas como "dizer mal" do programa, antes pelo contrário. Apreciamo-lo globalmente, quer na letra quer no espírito, fundamentalmente por:

— serem considerados conteúdos de aprendizagem tanto os conhecimentos como os valores/atitudes e as capacidades/aptidões;

— ser pressuposto que o aluno é agente da sua própria aprendizagem e como tal ser proposta uma metodologia em que: os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas; e, os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização.

Em consequência parece-nos que o programa, estando mais ligado à realidade, é mais motivador para os estudantes.

Embora se concorde que os assuntos devam ser retomados com progressivos níveis de rigor e aprofundamento, parece-nos que, em alguns pontos, há excessiva fragmentação, mesmo que os professores tenham sempre presente que retomar não é rever.,Num ensino/aprendizagem equilibrado há sempre oportunidade e, mais do que isso, vantagem em recorrer a velhos conhecimentos sem necessidade de abrir um capítulo.

Consideramos imprescindível que aquando da revisão do programa:

— sejam definidos claramente os **objectivos mínimos**;

— sejam apresentadas **indicações metodológicas** precisas para todas as unidades;

— seja clarificado o **uso da calculadora elementar**, procurando explorar as suas potencialidades;

— apareça claramente a **resolução de problemas** como eixo condutor de todo o processo ensino/aprendizagem.

É opinião generalizada que o programa pode ser considerado extenso, principalmente se tivermos em vista as novas metodologias finalmente institucionalizadas. Todos nós temos vindo a aplicar algumas dessas metodologias. Elas no fundo não são completamente inovadoras. Quanto à avaliação, ela deve ser considerada parte integrante do processo ensino/aprendizagem como função reguladora e orientadora, não sendo possível fazer a previsão do número de aulas necessárias.

Além dos factos já apresentados, também é de referir a necessidade de reservar aulas para:

- actividades específicas de avaliação;
- visitas de estudo;
- participação na Área Escola;
- trabalho de projecto;
- etc...

Acreditamos que alguns professores consigam **dar** todo o programa, mas não acreditamos que consigam **trabalhar com os alunos** todos os assuntos. A não retirar alguns temas do programa cairemos no velho hábito: "O programa é grande, nem pensar em cumprir".

Algumas sugestões de exclusão de temas, que passamos a apresentar, não têm a ver com a sua falta de interesse mas com a constatação da impossibilidade de cumprir o programa. Assim, vale mais que exista um **programa mínimo exequível** baseado nos temas considerados prioritários. O programa mínimo tem de ser cumprido em todas as turmas, mesmo que para tal seja necessário um prolongamento do ano lectivo. É essencial uma **formação básica e obrigatória para todos os alunos**. Temos de ter em atenção a diversidade de interesses dos alunos. Uns abandonam os estudos e outros seguem o ensino secundário em várias opções. Não devemos esquecer que é mais importante desenvolver atitudes e capacidades de interesse geral que ganhar maior quantidade de conhecimentos.

Enumeramos, em seguida, as rubricas que nos parece serem de retirar como temas:

G.7.1 — Semelhanças de figuras.
G.8.3 — Lugares geométricos.
E.8 — Estatística.
G.8.4 — Translações.
G.9.3 — Espaço — outra visão.
G.9.1 — Os subtemas: rotações e isometrias.

Algumas destas rubricas, ou parte delas, poderão vir a ser integradas da seguinte maneira:

— Em G.8.2 fazer uma breve referência às semelhanças (G.7.1), dando especial relevo às semelhanças de triângulos.

— Juntar E.8 com E.7.

— Alguns lugares geométricos (G.8.3) podem ser introduzidos informalmente ao longo do 3º Ciclo (por exemplo: circunferência, círculo, mediatriz, etc.).

— Áreas e volumes de sólidos, propostos em G.9.3, podem ser introduzidos ao longo do 3º Ciclo.

Passamos de seguida a explicar os motivos que conduziram a esta opção, analisando as alterações propostas em cada um dos quatro grandes temas.

G.7.1 — Embora não se ponha em causa uma primeira abordagem, como é indicada no programa, pensamos que é mais prudente e rentável a via proposta.

N.7.1 — A geometria pode e deve entrar logo nesta unidade. Parece-nos impensável estudar quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, sem recurso à geometria. Quanto mais cedo forem estudados perímetros e áreas de figuras planas melhor poderão ser aproveitados ao longo do 3º Ciclo.

O número de aulas reservado a esta unidade, mesmo com as características actuais, é manifestamente insuficiente.

G.8.3 — Dada a falta de suporte lógico, o nível etário e os interesses dos alunos, o assunto não poderá ser tratado com rigor, ganhando ao ser abordado informalmente e disseminado ao longo dos três anos, sem necessidade de abrir um capítulo.

G.8.4 e G.9.1 — Os estudantes podem adquirir uma visão dinâmica do plano sem necessidade do estudo das translações e das rotações. Aliás este assunto acabaria por ser estudado de maneira muito superficial.

Não vemos inconveniente em que a noção de vector seja introduzida na Física e só mais tarde clarificada para os alunos que seguem Matemática no 10º ano.

A propósito das Funções (F.8 e F.9) estudadas no 8º e 9º anos, podem e devem ser introduzidos exemplos de transformações geométricas.

Fazemos notar que o tema "Geometria" não fica enfraquecido uma vez que, do que foi retirado, o essencial é integrado nos temas "Números e Cálculo" e "Funções".

E.8 — Não nos parece necessário abrir um capítulo no 8º ano, para a estatística. Todas as questões envolvidas podem ser introduzidas de uma só vez. Os alunos podem e devem recorrer à estatística sempre que necessário e em qualquer altura.

Com base no novo programa do 2º Ciclo, pensamos que os alunos, ao chegarem ao 7º ano, terão maior facilidade nos temas N.7.1, N.7.2, G.7.2, E.7/E.8 e F.7. Se não se verificar esta melhoria será de pensar em novo agrupamento para aliviar o 7º ano. Em qualquer caso impõe-se uma redistribuição do número de aulas reservado a cada tema. Parece-nos importante, ainda mais com esta opção, que o programa indique claramente o grau de aprofundamento a atingir em cada tema.

Ao longo de cada unidade, e para lá do programa mínimo, serão de referir objectivos a atingir consoante as turmas. É preferível dentro da mesma unidade atingir, maior aprofundamento, do que tratar temas em opção. Por exemplo: Em G.9.2 parece-nos que só há vantagem em "não esconder" a cotangente. Há vantagens práticas no uso de tabelas e na escolha do caminho que proporciona cálculos mais simples.

Esperamos que este seja mais um elemento para discussão tendo em vista a revisão e reescrita dos programas.

Dulce Batista,
E. S. Rainha D. Leonor
Judite Barros
E. S. Filipa de Lencastre

Matrizes por detrás das redes (continuação da pág. 5)

aplicações na sociedade. Infelizmente este problema é muito difícil quando o número de cidades é muito grande. Para poucas cidades, um algoritmo válido consiste em viajar à cidade não visitada mais próxima daquela que se encontra.

O grupo dos 12

A fotografia retirada do diário *El País* de 5 de Abril de 1993 mostra uma rede entre os 12 países da CE.

Trabalhar alguns dos problemas formulados anteriormente com esta rede são possivelmente problemas do futuro ao qual pertencem os nossos alunos.

[1]Nas VI JAEM (Badajoz), a professora G. Veloso convidou-me a escrever algo sobre a teoria dos grafos para esta revista. Como resposta a este simpático convite, relatei parte da minha experiência com alunos do Magistério, que julgo serem transferíveis a outros níveis de ensino.

Referências

SMP 7-13 (1977). *The School Mathematics Project. Further Matrices and Transformations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Thulasiraman, K. e Swamy, M. (1992). *Graphs: Theory and algorithms.* Nova Iorque: John Wiley.

Wilson, R. (1993). *Introducción a la teoría de grafos.* Alianza Universidad.

Candelaria Espinel Febles
Universidade de La Laguna, Espanha
Tradução de António Borralho

A origem dos números e o 25 de Abril

José Paulo Viana

25 de Abril de 1974. De repente, muita coisa muda em Portugal. Mas que relação pode isso ter com a Matemática? Por que estranho processo me veio o 25 de Abril pôr em causa uma ideia dominante sobre a origem dos números?

De vez em quando, nas minhas aulas, discuto com os alunos a origem dos números e, claro, surge sempre o exemplo clássico da contagem das ovelhas: quando os homens se organizam como pastores, precisam de saber quantos animais têm à sua guarda. Foi este o exemplo que ouvi quando andava no liceu, é este o exemplo que quase todos os meus colegas me citam quando lhes levanto esta questão.

Aliás, dando uma pequena volta pelos livros que tenho aqui em casa, encontro-o sempre que se fala na origem dos números.

Posso dar alguns exemplos.

Paul Karlson, em *A Magia dos Números*, na secção "Como os números apareceram sobre a Terra":

> (...) duas coisas que nada têm a ver uma com a outra são relacionadas sem mais nem menos: o rebanho de ovelhas e os dedos.

Sebastião e Silva no *Compêndio de Álgebra* para o 6º ano:

> Entre a atitude mental do pastor, que amontoa seixos para saber quantas ovelhas tem no rebanho, e a do matemático, que demonstra a irracionalidade do π, medeiam muitos séculos de história.

I. Adler, em *Números e Figuras*:

> Quando [os homens] se fizeram agricultores e pastores (...) tinham de medir os campos e contar os rebanhos.

E tudo corria bem assim. Até que, em 1974, se dá o 25 de Abril. É um período de alegria, confusão, esperança, mudança, expectativa. Desencadeiam-se acontecimentos e processos que vêm pôr em causa valores e "verdades" que há muito se não discutiam. As pessoas saem à rua e a agitação é permanente. Nos outros países é grande a curiosidade sobre o que aqui se passa e muitos estrangeiros vêm até cá para ver ao vivo aquilo que julgavam impossível na Europa actual: uma revolução.

Alguns desses estrangeiros decidem mesmo participar e ter um papel activo no processo. Entre eles está o alemão Jochen Bustorff que se interessa pela Reforma Agrária e vai trabalhar para a Cooperativa "A União faz a Força", na zona de S. Domingos da Serra. Enquanto lá está escreve o *Diário no Alentejo*. Em 1983, este diário é publicado em português. Em 1986, o livro vem parar às minhas mãos. Olho para a última página e leio a última frase:

> Tinham sido os anos mais belos da minha vida.

Fico com vontade de ler o livro. É o que faço. Com prazer, porque está escrito com um certo humor, não esconde os problemas existentes e tenta dar um retrato fiel de como se vivia naquela cooperativa.

De repente sofro um choque, um abalo nas minhas convicções, ao encontrar a passagem que passo a citar.

Um drama com ovelhas

"'Mas como aconteceu isso, homem?'

[O pastor] estava com mau aspecto e estoirado. Acendeu um cigarro. "Não se deve prender as ovelhas durante a noite, sobretudo quando está lua-cheia. Tornam-se muito selvagens e põem-se a marrar contra a cerca. Portanto, o que é que fiz? Fui guardá-las durante a tarde. Quando elas arranjaram um sítio para pernoitar (...) fui-me deitar com a minha mulher. De manhã, às 2h, levantei-me, peguei nos cães e fui ter com as ovelhas. Ainda lá estavam, tal como as tinha deixado. Voltei para junto da minha mulher. Às 6h fui lá outra vez. As ovelhas tinham fugido. Não encontrei nenhuma. Os meus cães foram logo para a barragem, onde encontrei algumas mas já mortas. Também vi alguns cães que vagueavam junto da barragem'.

Voltámos a ouvir o tractor. Vinha pelo caminho do poço, muito devagar. Atrás, seguia o rebanho. O D de um lado, e o A do outro, não deixavam as ovelhas extraviar-se.

O irmão de F deitou fora o cigarro e foi ao encontro deles: 'Que merda! e havia logo de ser comigo! Quanto a mim foram os cães dos vizinhos que se atiraram ao rebanho. Despedaçaram algumas e perseguiram as outras até à água. Com o medo, as ovelhas atiraram-se para lá, tendo-se afogado algumas, coitadinhas. Teve que ser assim.'

'Sim, foi isso!'. O tractor parou mesmo à nossa frente. O F estava muito abatido. Não se mexia. Os cães do pastor queriam atirar-se ao rebanho quando o viram. O dono ainda teve a calma para lhes assobiar. As ovelhas queriam fugir. Estavam muito assustadas, mas conseguimos juntá-las.

'Que lindo serviço!'. O F saiu do tractor. 'Mas vai-nos pagar. Vai-lhe sair cara a brincadeira!. 'A quem?', quis eu saber. 'Ao vizinho! Foram os cães dele. Encontrámo-los junto à barragem onde as ovelhas se afogaram. Tinham os focinhos ensanguentados; ainda agarrei um e levei-o ao vizinho e disse-lhe quais os prejuízos que os seus cães tinham feito. Se ele não pagar, vou buscar a Guarda'.

No reboque vinham três ovelhas mortas. Uma ainda mexia. 'Pelo menos doze contos. E ainda há as que estão feridas... Vinte contos, é o que ele vai ter que pagar'.

Levámos as ovelhas mortas para o estábulo. O rebanho foi-se abrigar debaixo de um sobreiro próximo porque estava de novo a chover. 'Tínhamos 83 ovelhas. Vamos contá-las para avaliar bem os prejuízos. Tragam-nas para o alpendre'.

As ovelhas estava em pânico. Deviam ter passado um mau bocado, na noite passada. Conduzimo-las para a entrada mas não queriam ir para o alpendre escuro. Algumas opunham-se, tentando voltar para trás. Houve uma grande confusão, que se contagiou às outras, tendo mesmo algumas fugido. Tivemos que amarrar os cães, que se atiravam a elas de uma forma terrível. Metêmo-las todas lá dentro, mas foi preciso usar de muita astúcia.

Três de nós foram com elas para o alpendre, enquanto dois ficaram fora, junto da porta. Os três queriam deixar sair uma só ovelha de cada vez, de forma a que os que estavam fora pudessem fazer a contagem sem confusões. Foi difícil. Depois de todas terem saído, o M tinha contado 70 e eu 73. Portanto havia que recomeçar tudo outra vez! O F praguejava.

Não conseguimos voltar a meter as ovelhas no alpendre. Não iam pela força nem pelo jeito. Berravam, olhavam-nos cheias de raiva, tentavam fugir.

Deixámo-las em paz. Desajeitadas, puseram-se a correr e, em pouco tempo, já estava outra vez formado o rebanho. Guiámo-las, sem grandes gestos nem grande algazarra, de forma a pô-las em fila e pudemos empurrá-las para um lado e contá-las como pérolas soltas de um colar. O M tinha chegado às 76 e eu às 72. O A tinha desistido.

Voltámos a tentar. Pusemo-las novamente em linha. Voltámos a contar. Os resultados ainda foram mais desastrosos: 70, 72, 73 e 76. O F levantou o braço e deixou-o cair. Queria dizer-nos que desistíssemos.

As mulheres regressavam do campo. Olhavam para as ovelhas mortas e lamentavam as feridas. 'Pobres bichos!'. Os cães do pastor ladravam. Apareceram dois homens vindos do monte. 'Que horror! Mas não podem ter sido os meus cães, F. É certo que os viste lá. É certo que tinham o focinho ensanguentado. Mas não foram eles que vos comeram as ovelhas. É que eu conheço os meus cães! Andam sempre à procura de qualquer coisa para comer. Se tivesses visto bem, F, terias com certeza reparado que nenhum deles estava com a barriga cheia. Além disso, eu próprio tenho ovelhas e nunca lhes fizeram mal'.

Ninguém disse nada. Dirigiu-se a mim. 'Não podem dizer, sem mais nem menos, que foram os meus cães que fizeram este prejuízo e que agora tenho que pagar. O F fala em 20 contos. Não junto isso nem num ano'.

O homem fez-me pena. 'Vamos lá pôr tudo em pratos limpos', disse-lhe.

'Com certeza que sim! Afinal de contas somos vizinhos. E os vizinhos têm de se compreender. Lá por eu trabalhar por conta própria e vocês pertencerem a uma cooperativa, não quer dizer que sejamos inimigos, pois não?'.

'Se não quiseres pagar, vou chamar a guarda'. Ao dizer isto, o F nem sequer olhou para o vizinho.

'Assim não nos entendemos, F! Assim não!!'. Agarrou pelos ombros o outro homem, que não tinha dito nada, e arrastou-o consigo. 'Não foram os meus cães. Eu cá conheço-os bem!'.

Desapareceram os dois.

'Já que estamos todos juntos, vamos tentar precisar outra vez o número de ovelhas'. Voltámos a pô-las em fila. As mulheres chamavam-nas com gritos carinhosos e agudos. Os rapazes davam estalidos com a língua. 72, 73, 74 foi o que conseguimos contar. Desistimos."

(in *Diário no Alentejo*)

Conclusão

Depois de ler isto fiquei aflito. Então, se agora é esta dificuldade em contar ovelhas, o que não seria há milhares de anos atrás?

E nunca mais voltei a ser o mesmo. Pelo menos quando falo da origem dos números...

Referências

Adler, I. (1969). *Números e Figuras*. Lisboa: Ed. Verbo.

Bustorff, Jochen M. (1983). *Diário no Alentejo*. Porto: Ed. Afrontamento.

Karlson, Paul (1961). *A Magia dos números*. Rio de Janeiro: Ed. Globo.

Silva, J. S. e Paulo, J. S. (1973). *Compêndio de Álgebra (1º tomo - 6º ano)*. Lisboa: Liv. Popular Francisco Franco.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

O infinito em movimento: notícia a propósito de um "Dia da Matemática"

António Carvalho, Célia Gama Lobo, José Dias Milheiro, Maria Lúcia Marques

Há ocasiões na vida em que nos vêm ter às mãos coisas interessantes, mas com as quais não sabemos muito bem o que fazer. Desta vez, no entanto, quando, por acaso, encontrámos esta fábula (ver caixa), logo nos veio a ideia de a coreografar e a dançar, aqui mesmo, no palco da nossa escola: "Um bailado sobre o π"! Parecia ser uma ideia nova, diferente, ousada talvez, mas tão tentadora!

Começou-se assim a dar forma aquela ideia meia atrevida. Havia que investigar sobre o π para que se compreendesse bem o bailado. Vai daí, foi necessário envolver mais gente no projecto, pois o grupo de estágio era pequeno e não conseguiria fazer tudo sozinho. De repente, começámos a apercebermo-nos de que este poderia ser um projecto bem mais lato, bem mais ambicioso, bem mais plural do que inicialmente previramos, o que o tornaria também muito mais valioso para todos nós.

A sua divulgação foi feita na sala de aula pelos professores de Matemática. Os alunos começaram por escolher a disciplina em que mais gostariam de trabalhar. Foi espantoso o resultado: do Português à Electrotecnia, da Filosofia aos Têxteis, das Línguas à Matemática, em todas as áreas havia trabalho a fazer. Assim: Português, História e Filosofia encarregaram-se da parte textual — recolha, análise e interpretação; as Línguas fizeram a tradução de textos; à Geografia coube apresentar a difusão geográfica do π ao longo da História; a investigação mais científica e especializada ficou a cargo da Matemática. As questões mais práticas foram tratadas pelas áreas mais tecnológicas: os Têxteis realizaram, entre outros trabalhos, bordados e quadros; a Mecânica encarregou-se de idealizar e realizar o emblema do π em latão; a turma do 11º ano de Electrotecnia e a do 5º curso do 12º ano tomaram a seu cargo, respectivamente, a iluminação e a cenografia da festa final (na qual teria lugar de destaque o bailado).

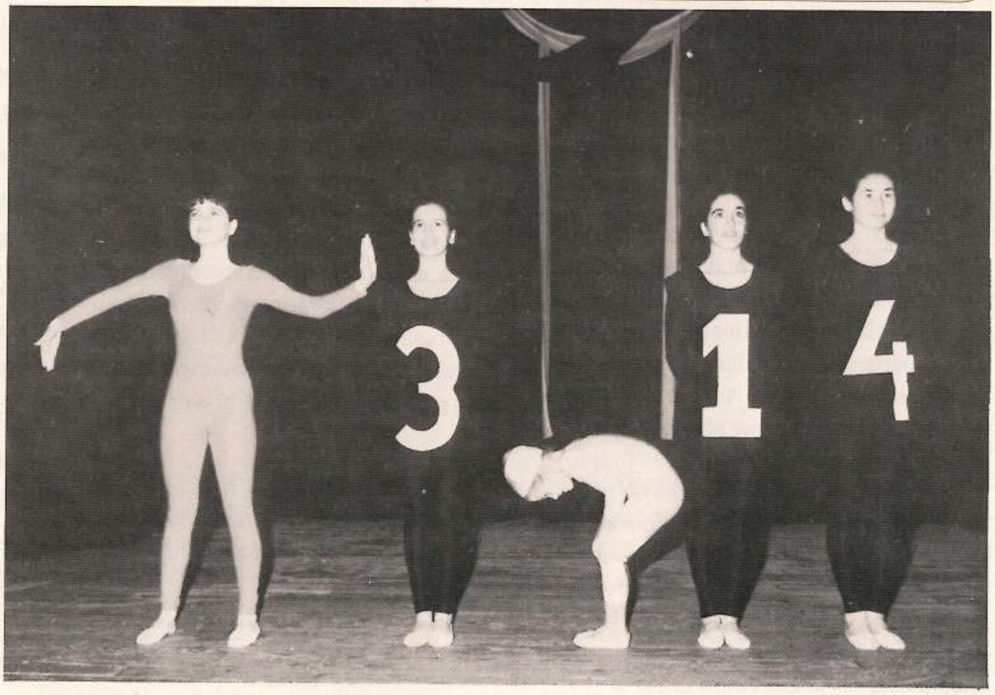
O projecto contou com a participação empenhada e desinteressada de muita gente. Ao todo foram 23 professores, 250 alunos e 3 funcionários, isto é, claro está, sem contar com as 13 alunas e 2 professores da Academia de Bailado de Guimarães. De entre a participação dos professores, é de realçar o trabalho realizado pela colega Rosário Ferreira, professora de Português, que, com a colaboração da organização, escreveu um con-

Trata-se de uma fábula ionde ntervem o número π de que, por dificuldade de espaço, apenas transcrevemos o seu início:

Quando um dia chegou ao Senhor do Infinito o desejo de criar um Universo, começou por traçar, com a sua mão infalível, um imenso círculo de que Ele era o Centro Inviolável. À medida que o traçava, nele crescia Pi, a misteriosa constante, que, à medida que crescia, acordava, e, à medida que acordava, se maravilhava da magnificência do gesto que a gerava. Mas, ao mesmo tempo, se inquietava: para que sirvo? Quem me espera? Terei jamais um termo, repouso, plenitude?

Porém a curva, inexorável, continuava. Quando atingiu Pi, por fim o valor 3, ouviu-se um estalido quase imperceptível: era a vírgula que caia no seu lugar fatal! E logo se iniciou a odisseia das decimais que uma a uma surgindo da curva esplêndida se foram alinhando em extensa cauda variegada. Foi então em Pi nascendo maior consciência de si, da sua beleza e força; e entrou nela o orgulho.

— Agora compreendo — cogitou — eu sou a primeira constante a ser gerada! Perante mim se curvarão todoas as outras e também *aqueles-que-hão-de-vir* na sua ânsia de me penetrarem os segredos! (...)



to intitulado "Viagem à volta de Pi" e que conta a história do número π, transformando números e figuras geométricas em personagens com vida e sentimentos. Este conto foi ilustrado pelo professor de Matemática José Falcão. Não podemos aqui esquecer a t-shirt que foi especialmente desenhada para a ocasião pela Alexandra Xavier, antiga aluna da escola, que se encontrava no 5º ano do curso de Design de Comunicação da Escola Superior de Belas Artes da Universidade do Porto. Perante tamanha adesão e entusiasmo, só havia uma coisa a fazer: ir em frente! E fomos!

A organização viu-se a braços com uma tarefa bastante mais larga do que inicialmente previra. Face ao entusiasmo geral, havia que não o deixar esmorecer. Ideias e vontade de trabalhar não faltavam. Começou-se, então, a fazer um programa onde coubesse tudo quanto se havia projectado. Não poderíamos esquecer nunca que tudo tivera início na ideia do bailado e que, por isso mesmo, ele teria que ficar em lugar de destaque. Assim apareceu o programa:

1 - Abertura das exposições "π o infinito em movimento";
2 - Lançamento do livro "Viagem à volta de Pi";
3 - Rally-paper da escola;
4 - Espectáculo de variedades: Bailado, Jogos, Sketchs, Sorteio do π.

O programa prometia e a expectativa criada à volta do bailado (onde dançavam também algumas alunas da escola) fazia palpitar mesmo os corações menos curiosos.

Durante várias semanas, bailarinas, pais e professores devotaram-se incansavelmente aos ensaios para o bailado "π, o infinito em movimento". Não fazendo parte das actividades lectivas da Academia, os ensaios tiveram que se realizar ao sábado, o que não foi impedimento, pois ninguém deixou de comparecer e, quanto mais se trabalhava, mais entusiasmo e vontade de melhorar se sentia. Foram dias que mantiveram a escola em alvoroço mas, aquilo por que todos ansiavam era de facto a festa final. No dia do espectáculo, o pavilhão da escola estava "cheio como um ovo" — era o sim da comunidade escolar a toda a movimentação criada em torno de uma reflexão sobre o π. Depois de uma breve introdução histórica e explicativa do tema, deu-se início ao tão esperado bailado. Constava de quatro quadros, todos interligados e que mostravam as quatro fases da evolução do π:

1 - Aparecimento de π: a razão constante entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro;
2 - π descobre que é um número;
3 - π identifica-se com os irracionais: sabe que é um número, que é irracional, mas qual o seu valor?
4 - π sabe que é 3,1415926535...

Foi um êxito! A escola vibrou com a coreografia, a música e a mensagem! Tudo tinha valido a pena.

Não, o espectáculo não acabou aqui! Seguiram-se alguns pequenos números preparados por algumas turmas e houve também alguns jogos relacionados com a Matemática A festa terminou com "o sorteio do π". Como se realizou? À entrada foi dado a cada pessoa um cartão no qual estava escrita uma frase sobre o π. As mesmas frases estavam no saco do sorteio e, no momento da extracção, era lida a frase sorteada e o espectador que tivesse em seu poder o cartão com aquela frase era o premiado. Os prémios eram os trabalhos sobre o π que os alunos tinham feito em Têxteis.

Foi uma noite inesquecível, alegre, vivida e sentida. Todo o trabalho, todo o esforço, todo o empenho, não poderiam ter melhor recompensa do que aquela adesão plena da comunidade escolar.

É bem verdade que querer é poder! Não dispunhamos de grandes espaços, não fomos privilegiados com subsídios nem reduções de horário, apenas quisemos trabalhar e pronto! De facto, na nossa escola, houve uma movimentação infinita para este "π, o infinito em movimento".

António Carvalho, Célia Lobo,
José Milheiro e Maria Lúcia Marques
Esc. Sec. Francisco de Holanda

A Redacção agradece o material recebido, em especial o livro *Viagem à volta de Pi* de Maria do Rosário Ferreira.

Matemáticos Portugueses

Álvaro Tomás
(séc. XV - séc. XVI)

Nasceu em Lisboa nos fins do séc. xv. Foi regente do Colégio Coqueret em Paris. Aí publicou, em 1509, o *Liber de Triplici Motu*; nele se revela como precursor das séries de potências, muitas das quais consegue somar, misteriosamente!
O livro começa com a teoria das proporções. Seguidamente Álvaro Tomás desenvolve a sua teoria cinemática do movimento, onde demonstra, com toda a minúcia, e fazendo intervir as referidas séries, um famoso teorema atribuído a Galileu. Avança mais ao considerar um movimento qualquer e ao enunciar com toda a precisão o teorema do valor médio, segundo o qual existe uma velocidade média tal que um móvel percorreria no mesmo tempo o mesmo espaço que outro com movimento arbitrário.
Por estes méritos lhe corresponde um lugar de honra ao lado de Nicolau Oresme (algebrista francês (1323 - 1382) na história do Cálculo Infinitésimal.
Exemplares deste livro raríssimo existem, em perfeito estado de conservação, nas Bibliotecas Nacionais de Madrid, de Munique e de Berlim; nenhum, na Biblioteca Nacional de Lisboa...

Compilação de Sérgio Macias Marques

Vamos jogar

Draga-minas

Propomos para este trimestre um jogo onde se poderá utilizar a parcela constante da calculadora, que encontrámos no livro *Dogfight and more games calculators play* de Wallace Judd.

Número de jogadores: 2

Material: Uma calculadora, 12 marcas iguais representando as minas, 1 marca representando o submarino e um tabuleiro quadriculado representando o mar (ver figura).

Regras: Um dos jogadores coloca a 12 minas nos diferentes números do mar, espalhando-os de tal forma que o submarino (do jogador adversário) tenha de dar o maior número de voltas possíveis para as apanhar todas.

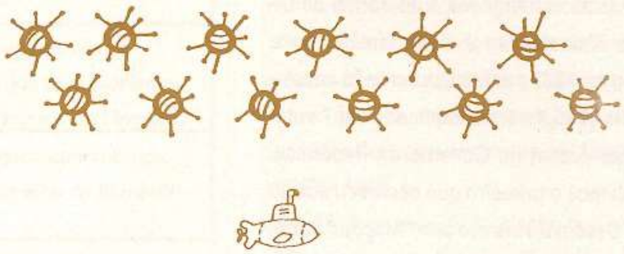
O capitão do submarino, começando do zero, soma sucessivamente uma constante que lhe permitirá fazer várias paragens ao longo de cada uma das voltas. Assim, cada vez que o capitão, utilizando a parcela constante, carregar na tecla =, o visor indicar-lhe-á o número onde terá de parar. Se houver uma mina nesse número, ela é retirada do tabuleiro.

No final de cada volta o capitão regressa ao princípio do tabuleiro e escolhe outra constante.

Quando já não houver minas no tabuleiro os jogadores trocam de papéis. O capitão que apanhar todas as minas no menor número de voltas possíveis é o vencedor.

Notas e variantes: Evidentemente que é ilegal usar como constante o número 1 e portanto colocar minas na casa correspondente ao número 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



Este jogo permite explorar o conceito de múltiplos de um número e de números primos, mas poderá tornar-se monótono ao fim de algum tempo, se os jogadores colocarem as minas nas casas correspondentes a números primos. É altura de propor outras regras, como por exemplo, permitir que o capitão, quando chega ao fim do tabuleiro, ou seja, quando atinge o maior número, possa voltar para trás subtraindo ou dividindo sucessivamente outra constante.

Maria João Lagarto,
E.S. Ferreira Borges

Matemáticos Portugueses

F. Gomes Teixeira
(1851-1933)

Nasceu em S. Cosme (Viseu); após a Escola Primária. O pai, como o destinava para a vida eclesiástica, mandou-o para um colégio religioso em Lamego, ficando hospedado em casa de um primo médico. Este preparou-o para diversas disciplinas de acesso à Universidade, entre elas Geometria, do exame da qual se saíria brilhantemente, e aconselhou o pai a mandá-lo formar antes em Matemática. Foi resolvido "tirar à sorte" e esta decidiu pela Matemática. Foi para Coimbra, e em 1874 concluiu o curso e fez o doutoramento, sendo classificado em ambos os actos com 20 valores. Depois foi toda uma carreira docente exercida magistralmente em Coimbra e no Porto para onde em 1884 se transferiu, por razões de ordem familiar.

É autor de mais de 140 trabalhos de investigação em Análise Matemática, publicados em revistas estrangeiras e no *Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas* (que fundou em 1887 e animou durante 28 anos) e que, em 1915, foram compilados em 7 volumes por ordem do Governo da República. Registemos o primeiro que escreveu aos 20 anos, *Desenvolvimento das Fracções Contínuas*, onde expôs um método que permite obter resultados mais convergentes na determinação das raízes das equações, do que os métodos utilizados pelos grandes matemáticos da época.

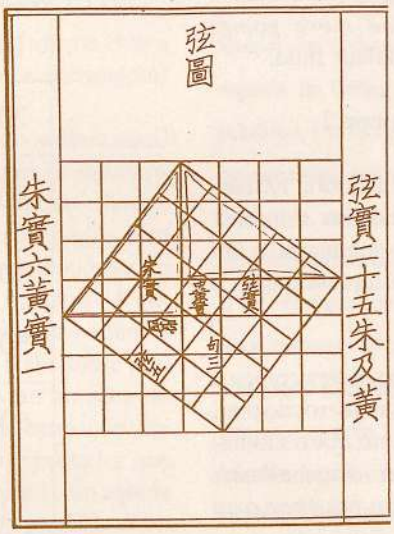
Compilação de Sérgio Macias Marques

História na aula de Matemática

Pitágoras na China

O teorema mais popular da Matemática tem uma história mais rica e complicada do que se pensa. O teorema de Pitágoras constitui, tal como algumas das outras actividades, uma excelente oportunidade de falar em diversas épocas e civilizações (por exemplo em colaboração com os professores de História) e de apresentar diferentes raciocínios para chegar a um mesmo fim (para desmistificar a obrigatoriedade de todos pensarem do mesmo modo, ou de que só há uma maneira de resolver um mesmo problema). Pode também observar-se que, por exemplo, os babilónios não demonstraram nada mas já sabiam alguma coisa; ou seja, a matemática também pode ser útil e interessante mesmo quando não se demonstra e apenas se conhecem algumas coisas (presumivelmente incompletas)

Em seguida são reproduzidos dois extractos: o primeiro é uma demonstração clássica do Teorema de Pitágoras; o segundo contém demonstrações geométricas de autores clássicos chineses do teorema de Pitágoras destinadas a alunos do Ensino Secundário chinês.



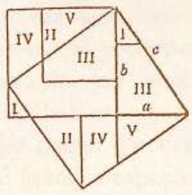


图 3

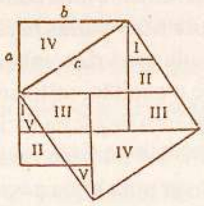


图 4

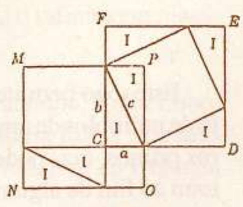


图 5

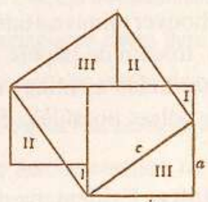


图 6

Jaime Carvalho e Silva

Breve cronologia do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras sempre foi um dos mais populares da matemática, muitas vezes utilizado e descoberto em diversas épocas e civilizações. Continua a existir controvérsia sobre quem foi o primeiro a descobrir o teorema de Pitágoras (Há mesmo um texto intitulado "Era Pitágoras chinês?").

A seguir apresenta-se uma cronologia resumida do teorema de Pitágoras em grande parte extraída da publicação: *Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le théorème de Pythagore sans jamais oser le demander* (M. F. Coste Roy e outros, editada pelo IREM Paris Nord em 1980).

1900 aC 1600 aC	Plimpton 322 (Mesopotâmia)	Tábua babilónica que contém 15 triplos pitagóricos de grande complexidade um milénio antes de Pitágoras.
1650 aC	Papiro de Ahmés (Egipto)	Contém 85 problemas. Não menciona o teorema de Pitágoras.
540 aC	Pitágoras (Grécia)	Personagem semi-lendário de que não nos chegou qualquer escrito, talvez tenha vivido no Egipto e viajado até à China.
500 aC	Sulvasutras (Índia)	Livro que contem triângulos rectângulos com números inteiros relacionados com a arquitectura religiosa.
460 aC	Parménides	Provou a esfericidade da Terra.
300 aC	Euclides (Grécia)	Os *Elementos* contêm uma demonstração do Teorema de Pitágoras e da sua recíproca — Livro I, prop. 47 e 48.
100 aC	Zhou di suan Jing (China)	O livro *Clássica do gnómon e das trajectórias circulares dos céus* contém o teorema de Pitágoras e relações derivadas.
75	Herão de Alexandria	Fórmula da área de um triângulo em função dos lados: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo p o semi-perímetro.
250	Liu Hui (China)	Demonstra o teorema de Pitágoras.
250	Diofanto (Grécia)	Escreveu livros com equações incluindo o teorema de Pitágoras, cuja leitura sugeriu a Fermat o seu último teorema, generalização do teorema de Pitágoras.
470	Zu Chongzhi (China)	Calcula o valor de $\pi \approx 355/113$ pelo método dos polígonos que supõe um conhecimento do teorema de Pitágoras; na Europa só no séc. XVI é obtido tal valor.
940	Abu l'Wafa (Arábia)	Um capítulo de um dos seus livros é sobre decomposições.
1303	Zhu Shijie (China)	Resolve sistemas de equações polinomiais com 4 incógnitas até ao 14° grau; muitos dos seus problemas fazem intervir propriedades dos triângulos rectângulos.
1642	Seki Takakazu (Japão)	Utiliza o teorema de Pitágoras em geometria métrica; descobriu os determinantes e os números de Bernoulli — antes de Bernoulli.
1940	E. S. Loomis (E.U.A.)	No livro *The Pythagorean Proposition* apresenta uma recolha de 370 demonstrações do teorema de Pitágoras.
1992	Paulus Gerdes (Moçambique)	Apresenta demonstrações do teorema de Pitágoras a partir de motivos ornamentais africanos no livro *Pitágoras Africano*.
1993	Andrew Wiles (Inglaterra)	Apresenta uma demonstração (que se espera verdadeira) do Último Teorema de Fermat.

Matemáticos Portugueses

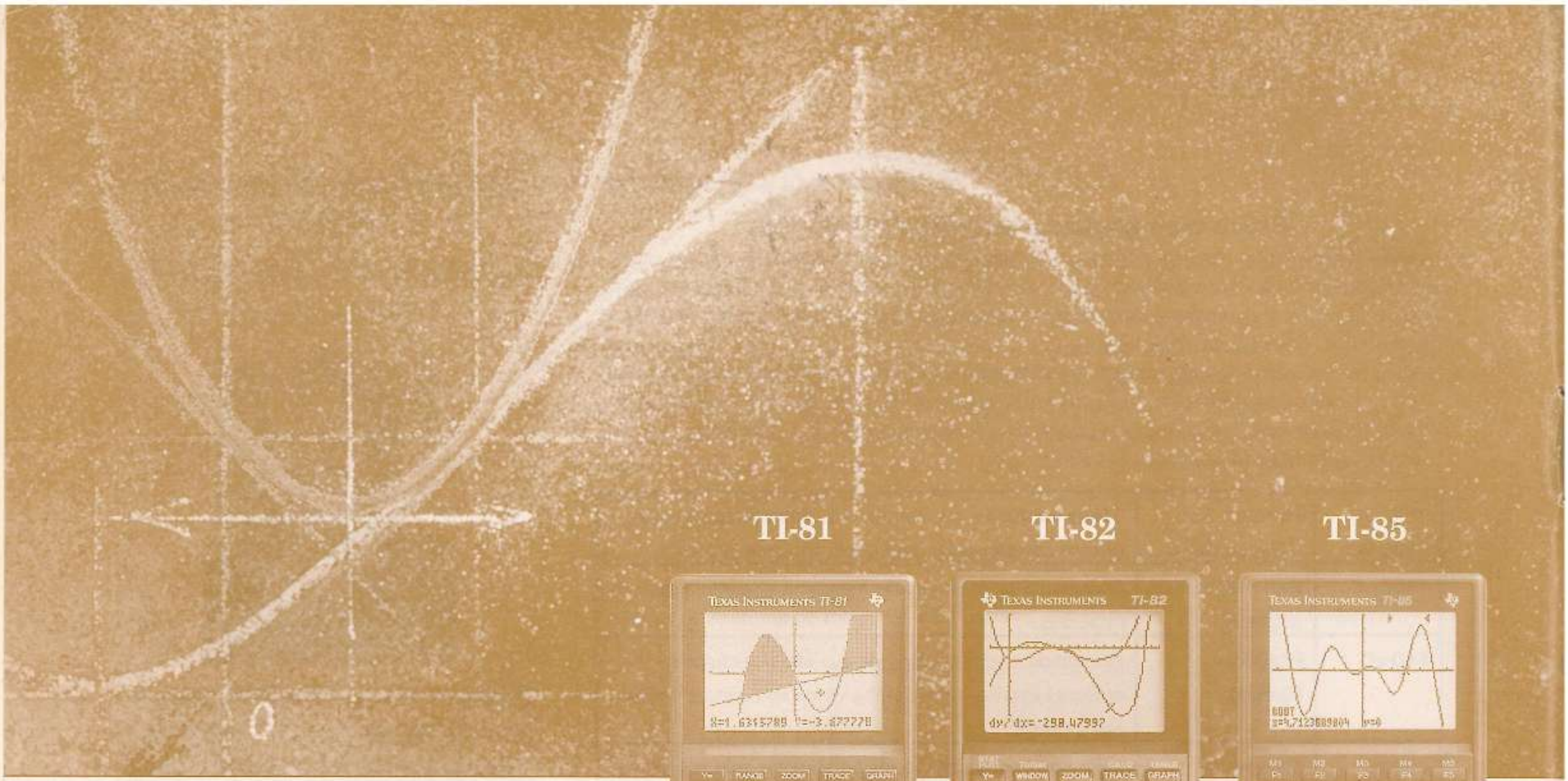
J. Santos Guerreiro
(1923 - 1987)

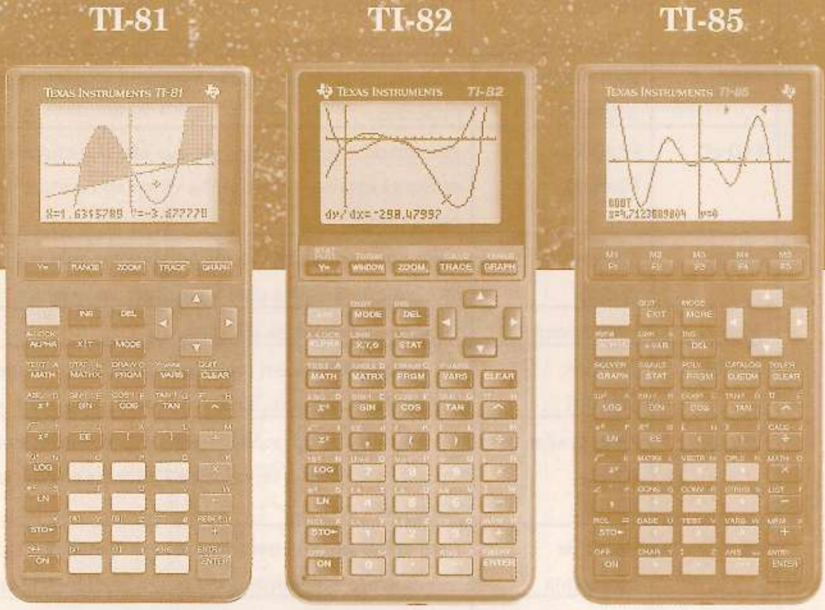
Nasceu na Madeira. Terminado o liceu no Funchal, veio para Lisboa e frequentou o curso preparatório para Engenharia Militar, na Faculdade de Ciências (FCL); por motivos particulares, interrompeu os estudos. Seis anos mais tarde, voltou à mesma faculdade, desta vez no Curso de Ciências Matemáticas, cuja licenciatura concluiu em 1954.

Depois de uma breve passagem como assistente no Instituto Superior de Agronomia, ingressou em 56/57 na FCL também como assistente, ao mesmo tempo que iniciava a carreira de investigador, sob a orientação de Sebastião e Silva. Em 1962, fez o doutoramento sobre *Teoria Directa das Distribuições Sobre uma Variedade*. Posteriormente foi professor catedrático na mesma faculdade. As suas lições, para além do rigor e clareza de exposição, impressionavam pelo entusiasmo transmitido, fazendo ressaltar o conteúdo histórico e estético da Matemática. Publicou trabalhos científicos no domínio da Matemática pura e também didácticos. Entre estes últimos destaca-se o *Curso de Matemáticas Gerais* em 4 volumes, publicado entre 1967 e 1978.

Em 1976, quando da fundação do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais em Lisboa, orientou uma das suas linhas de investigação e assumiu a presidência da Comissão Directiva, cargo que manteve até à sua morte.

Compilação de Sérgio Macias Marques



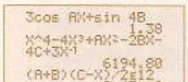


Calculadoras Gráficas TI

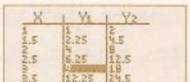
Prestamos muita atenção aos professores quando nos disseram aquilo de que precisavam para ensinar. E prestamos muita atenção aos alunos quando nos disseram aquilo de que precisavam para aprender.
O resultado? A gama de calculadoras gráficas TI, que representa um vasto conjunto de recursos de ensino e aprendizagem abrangendo todos os níveis de ensino - ensino básico, secundário, universitário - com o tipo de funcionalidade adequada.

OS ALUNOS MERECEM O MELHOR. E VOCE TAMBÉM !

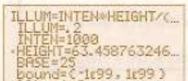
As calculadoras gráficas não mostram apenas os cálculos finais, também explicam os conceitos. É a rápida apreensão dos conceitos que torna a matemática mais acessível, deixando mais tempo livre para a exploração e desenvolvimento de um interesse genuíno sobre a matéria.
Observe a gama de calculadoras gráficas da Texas Instruments. A TI-81 para o ensino básico (3° ciclo), a TI-82 para o ensino secundário e a TI-85 para o ensino universitário. Escolha a mais adequada às suas necessidades. Aumente a eficácia do ensino, facilitando o método de aprendizagem dos alunos.



TI-81 : Visualiza a totalidade das expressões da forma como foram introduzidas e mostra os cálculos finais.



TI-82 : A tabela de avaliação das funções mostra os resultados numéricos em formato de tabela.



TI-85 : O SOLVER da TI-85 é uma poderosa ferramenta para trabalhar com equações e resolver em ordem às diferentes variáveis.

	TI-81	TI-82	TI-85
- Gráfico da funções	até 4	até 10	até 99
- Gráfico de equações paramétricas	até 3	até 6	até 99
- Gráfico de equações polares		até 6	até99
- Gráfico de sucessões		até 2	
- Gráfico das soluções de equações diferenciais			até à 9th ordem
- Percorre os gráficos representados	X	X	X
- Resolução de raízes/ Mínimos/Máximos		X	X
- Características do zoom	7	13	15
- Tabelas dos valores das funções		X	
- Número de matrizes	até 3	até 5	ilimitada*
- Dimensão máxima da matriz	6x6	30x30*	50x50*
- Comprimento máximo da lista		99	ilimitado*
- Modelos de regressão	5	8	8
- Gráficos «box & whisker»		X	
- Divisão do écran		X	
- Resolução de equações			X
- Números complexos			X
- Espaço em memória 32Kb	4.6Kb	32Kb	32Kb
- 2 anos de garantia	X	X	X

(*) Os números alterar se ão com o uso da calculadora, até à saturação da memória disponível (32 kb)

Beldata Lisboa Rua Sarmento de Beires 3-A, 1900 Lisboa
Tel: 01805435/01805268 Fax: 01848512
Oporto Rua Aval de Cima 139-155,
Apartado 2089, 4202 Oporto
Tel: 521735/5500439 Fax: 5503819

TEXAS INSTRUMENTS

Tetri Estrada Exterior da Circunvalacao
798 Apartado 48, 4436 Rio Tinto
Tel: 02 98 99 532 Fax: 029800527
Dismel Rua do Terreirinho, 4 - 3 Dto. 1100 Lisboa
Tel: 018861527 Fax: 018880189

Um breve olhar sobre os grafos

Cecília Perdigão

A Teoria dos Grafos é uma das áreas da Matemática que maior interesse desperta nos alunos, não só pela simplicidade dos conceitos e da clareza dos resultados mas, também, e principalmente, pelas suas inúmeras aplicações.

Embora a Teoria de Grafos tenha surgido para resolver problemas de índole recreativa tem hoje aplicações nas mais diversas áreas, desde a biologia, a química e a engenharia, como até mesmo na música ou na arqueologia.

Mas, afinal, o que é um grafo?

Um grafo é, essencialmente, um diagrama formado por pontos, aos quais damos o nome de *vértices*, e por linhas, às quais damos o nome de *arcos*. Cada um destes arcos une exactamente dois vértices, podendo ter uma dada orientação (nesse caso dizemos que se trata dum grafo orientado), ou mesmo ter associado um certo valor a que chamamos a *capacidade do arco*.

Este tipo de diagrama permite esquematizar diversas situações em muitas áreas científicas e tecnológicas ou mesmo simples realidades da vida quotidiana. Assim, um grafo pode utilizar-se para representar moléculas, mapas de estradas, relações internacionais ou mesmo reacções químicas; para isso, e em primeiro lugar, é necessário que sejam escolhidos, devidamente, os vértices e os arcos de tal grafo, depois, basta representá-los numa folha de papel!

Para os exemplos atrás apresentados, podíamos escolher os respectivos vértices e arcos como indicado na tabela inserida nesta página.

Naturalmente, esta não é a única forma de utilizar os grafos. É, digamos, a mais primária de os utilizar, isto porque o problema é apenas esquematizado mas não resolvido. Há porém, aplicações menos primárias e bastante mais produtivas da Teoria de Grafos. Assim, é possível resolver problemas como:

Qual o caminho mais curto entre duas cidades?

Quantas moléculas existem com a fórmula C_6H_{14}?

É possível colorir um mapa com apenas 4 cores de forma a que regiões adjacentes não tenham a mesma cor?

Ou mesmo,

Como pôr a funcionar os semáforos dum cruzamento?

À excepção do último, todos estes problemas necessitam do conhecimento de alguns resultados básicos da Teoria de Grafos. Não quero deixar, no entanto de mostrar qual a resolução possível do último problema utilizando pouco mais do que a esquematização do problema através dum grafo.

Vamos então referir um problema

GRAFOS	VÉRTICES	ARCOS
grafos das moléculas	*átomos*	*ligações entre átomos*
grafos das estradas	*localidades*	*estradas*
grafo das relações internacionais	*países*	*relações entre países*
grafo das reacções químicas	*moléculas*	*reacções entre moléculas*

deste tipo apresentado por K. R. Wilson e J. Watkins no livro *Graphs. An introductory approach* (1990). Consideremos, então, o cruzamento da fig. 1.

Suponhamos que se querem instalar neste cruzamento semáforos, de forma que nenhum carro espere mais do que um minuto no respectivo semáforo. Construamos, em primeiro lugar o grafo que esquematiza a situação; às direcções *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f*, fazemos corresponder os vértices do grafo, existindo um arco a ligar dois destes vértices sempre que as direcções correspondentes sejam compatíveis, ou seja, sempre que seja possível dois carros seguirem essas direcções simultaneamente. Obtemos, assim, o chamado grafo das compatibilidades (ver fig. 2).

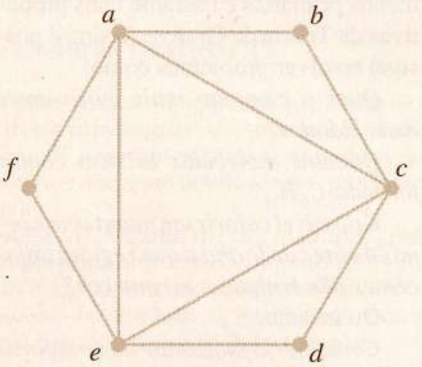


fig. 2

Representemos por um círculo, o minuto ao fim do qual já todos os semáforos passaram a verde pelo menos uma vez, e por linhas paralelas ao círculo as direcções que têm o semáforo verde nesse período de tempo. Claramente que é sempre possível a solução indicada na figura 3.

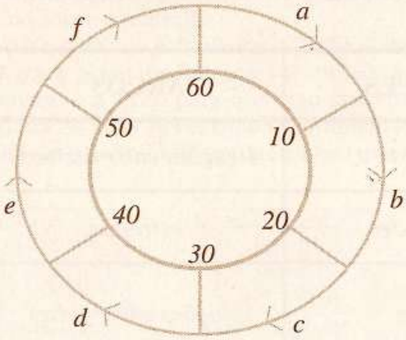


fig. 3

Mas, esta solução, não é, com certeza, a mais satisfatória pois, desta forma,

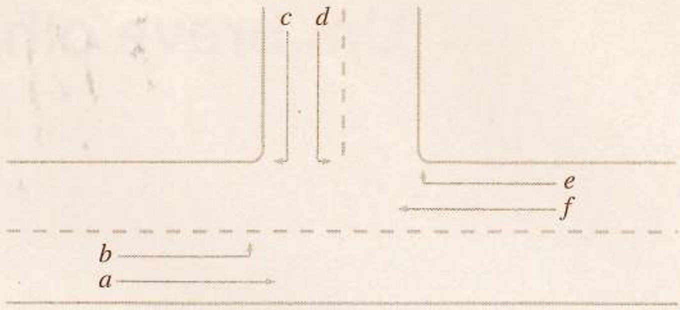


fig. 1

cada semáforo estaria vermelho exactamente 50 segundos, e verde apenas 10, facto que iria prejudicar o escoamento do trânsito no cruzamento.

Como melhorar esta situação?

Antes de mais, é preciso ter em consideração alguns conceitos básicos:

Chamamos *subgrafo* dum grafo G a um novo grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices do grafo inicial, e de tal forma que existe um arco a ligar dois vértices se, e só se, esse arco existia em G.

Dizemos que um grafo é *completo* se, e só se, qualquer que seja o par de vértices do grafo existe um arco a ligá-los.

Posto isto, é relativamente simples entender a seguinte estratégia para a resolução do problema:

1. Construir o grafo das compatibilidades.
2. Encontrar o maior subgrafo completo contido no grafo anterior.
3. Dividir o tempo disponível pelo número mínimo de subgrafos completos que cobrem o total dos vértices.
4. Colocar para cada um destes períodos de tempo os vértices correspondentes a cada um destes subgrafos.

Pode agora construir-se um esquema semelhante ao anterior (ver fig. 4),

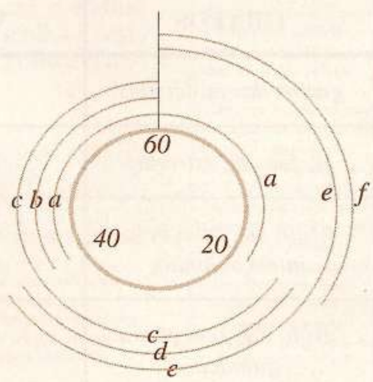


fig.4

seguindo os diversos pontos da estratégia atrás descrita.

Repare-se que, desta forma, as direcções *a*, *e*, e *c* estão com sinal verde 40s e as direcções *b*, *f*, e *d* durante 20s. Esta situação é bastante mais favorável do que a anterior, apesar de poder ser melhorada se se tiver em conta o fluxo do tráfego em cada uma das direcções.

A simplicidade de resolução destes problemas e a variedade de aplicações possíveis, que atrás referi, evidenciam algumas das vantagens que poderia ter a inclusão deste item nos programas da disciplina de Matemática do ensino secundário.

Os grafos são uma estrutura simples e natural que permite a visualização geral dum problema e a esquematização do raciocínio. Desta forma os alunos terão mais facilidade em resolver certo tipo de problemas e, o que é ainda mais importante, em perceber qual é o problema, quais os dados disponíveis e quais as estratégias possíveis para o tentar resolver. Além disso, dão a possibilidade de resolver problemas práticos, ligando muito mais a Matemática à sua experiência de vida. Finalmente, pela sua variedade de aplicações e pelas áreas abrangidas por estas, os grafos permitem uma interdisciplinaridade com todas as disciplinas do ensino secundário, estando assim perfeitamente de acordo com a filosofia da nova reforma do ensino básico e secundário.

Referências

Cabral, I. *Apontamentos de Grafos e Aplicações* (Manuscrito não publicado).

Wilson, K.R. e Watkins, J. (1990). *Graphs. An introductory approach*. Nova Iorque: John Wiley and Sons.

Cecília Perdigão
F.C.T., Universidade Nova de Lisboa

O problema do trimestre

Sobre o problema dos castelos

O problema proposto para este trimestre foi "Quatro castelos, uma estrada":

Na grande planície da Sildávia há quatro belos e antigos castelos que atraem a atenção de todos os visitantes.

O Ministério de Turismo resolveu construir uma estrada panorâmica. Contrataram a melhor empresa de engenharia civil do país e pediram que a estrada fosse uma circunferência que passasse a igual distância dos quatro castelos.

Olhando para o mapa, os engenheiros verificaram que os castelos ocupavam os vértices de um quadrilátero irregular.

O problema é sempre possível?

Quantas soluções há no caso geral?

Chegaram-nos cinco resoluções enviadas por Alberto Canelas (Queluz), A. Silva Abrantes (Seia), Cristina Veiga (Torres Vedras), Judite Barros (Lisboa) e Pedro Esteves (Seixal).

Nem todos nos indicaram o número total de soluções. Transcrevemos a resolução que nos foi enviada por **Judite Barros**:

"Como definir uma circunferência que passe a igual distância dos 4 castelos?

Determinar uma circunferência de centro O passando por três castelos é fácil. O 4º castelo só por um feliz acaso ficará sobre essa circunferência e, nesse caso, o problema fica resolvido. Há uma infinidade de soluções. Qualquer circunferência concêntrica com a anterior serve.

No caso geral, a solução é, mantendo o centro, alterar o raio da circunferência para um valor que é a média do raio anteriormente calculado com a distância do centro ao 4º castelo.

Designando por A, B, C e D os quatro castelos temos quatro soluções:

Circunf.	**4º castelo**	**Raio**
ABC	D	(OA+OD)/2
ABD	C	(OA+OC)/2
ACD	B	(OA+OB)/2
BCD	A	(OB+OA)/2

Faltam ainda soluções.

Consideram-se dois castelos e o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por estes dois castelos. Procede-se igualmente para os outros dois castelos. A intersecção destes dois lugares geométricos é o centro O da estrada. Ficam assim determinadas duas circunferências. O raio da estrada é a média dos raios destas circunferências.

Temos assim as 3 restantes soluções:

2 Castelos	**2 Castelos**	**Raio**
AB	CD	(OA+OC)/2
AC	BD	(OA+OB)/2
AD	BC	(OA+OB)/2

No caso geral há portanto **7 soluções**.

Das 3 últimas soluções indicadas desaparecem duas ou uma no caso em que o quadrilátero tem 2 pares ou 1 par de lados paralelos.

De notar que pode acontecer que um dos castelos fique no centro da circunferência. Neste caso há uma infinidade de possibilidades quando da construção do acesso à estrada".

José Paulo Viana

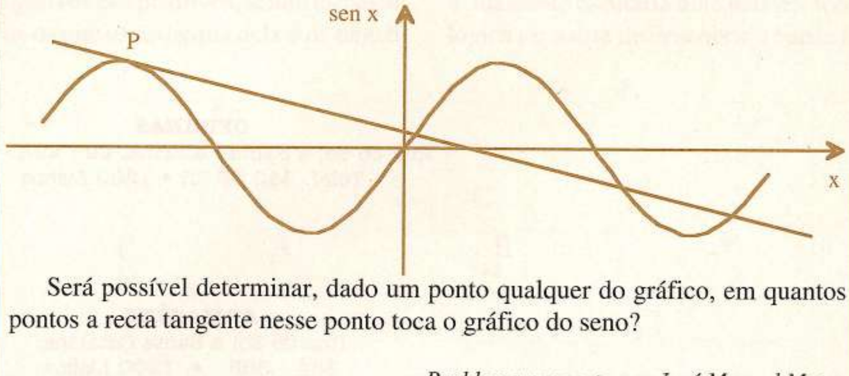
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

Problema proposto

UM PROBLEMA COM SENOS

Vamos escolher um ponto sobre o gráfico do seno, traçar a tangente nesse ponto, e observar em quantos pontos a tangente toca o gráfico.

Por exemplo, no ponto P da figura, a recta tangente em P toca o gráfico do seno em 4 pontos.



Será possível determinar, dado um ponto qualquer do gráfico, em quantos pontos a recta tangente nesse ponto toca o gráfico do seno?

Problema proposto por José Manuel Matos

Para este número seleccionámos

Porque é que menos por menos dá mais?

Algumas respostas inconsistentes a esta pergunta podem consolidar a repugnância ou indiferença de certos alunos pela matemática. O texto que se segue ilustra esta realidade. O escritor francês Stendhal critica as razões sem razão, frequentemente invocadas para justificar as chamadas regras dos sinais. Num segundo texto apresentamos um modelo coerente para a adição e a multiplicação de números inteiros, concebido por Jacckie Sip, que talvez amenizasse a inquietação de Stendhal e, quem sabe, dos nossos alunos.

Stendhal e a regra dos sinais

O meu entusiasmo pela matemática deve ter tido como base principal a minha repugnância pela hipocrisia a qual, para mim, significava a tia Séraphie, Madame Vignon e os seus párocos.

Do meu ponto de vista, a hipocrisia era impossível em matemática e na minha ingenuidade juvenil pensava que devia ser assim em todas as ciências às quais a matemática se aplicava. Que choque foi descobrir que ninguém conseguia explicar-me porque é que menos multiplicado por menos é igual a mais (- x - = +)! (Esta é uma das bases fundamentais da ciência conhecida como álgebra). Não apenas as pessoas deixavam de me explicar esta dificuldade (e ela é certamente explicável porque conduz à verdade) mas, o que era pior, explicavam-na com razões que, evidentemente, estavam longe de ser claras para elas próprias.

O senhor Chabert, quando o pressionei, tornou-se confuso, repetindo a lição, a mesma lição a que eu tinha objectado, e no fim de contas parecia dizer-me: "Mas é o costume; toda a gente aceita esta explicação. Ora, Euler e Lagrange, que presumivelmente eram tão bons como você, aceitaram-na!" (...) Lembro-me que quando falei da minha dificuldade sobre menos multiplicado por menos a um dos alunos brilhantes ele riu-se de mim. (...).

Passou muito tempo até que me convenci de que a objecção sobre - x - = + simplesmente não entrava na cabeça do senhor Chabert, que o senhor Dupuy nunca responderia salvo com um sorriso arrogante e que os alunos brilhantes a quem punha a questão gozavam sempre comigo.

Reduzi-me ao que ainda digo hoje a mim mesmo: Deve ser verdade que - x - = + porque, evidentemente, pelo uso constante desta regra nos cálculos se obtêm resultados de cuja veracidade se não pode duvidar.

A minha preocupação maior era esta: Seja RP a linha que separa os números negativos dos positivos, sendo os positivos os que estão acima dela e os negativos os que se situam abaixo (fig. 1).

Como é que tomando o quadrado B tantas vezes quantas unidades existirem no quadrado A, se consegue mudá-lo para o lado do quadrado C ? E, para usar uma comparação desastrada que a pronúncia de Grenoble do senhor Chabert tornou ainda mais desajeitada, suponhamos que as quantidades negativas são as dívidas de um homem. Como é que multiplicando uma dívida de 10 000 francos por [uma dívida de] 500 francos pode este homem ter, ou esperar ter, uma fortuna de 5 000 000 francos? São os senhores Duphuy e Chabert hipócritas como os párocos que vinham dizer missa a casa do meu avô e pode a minha amada matemática ser uma fraude? Oh, quão avidamente escutaria uma palavra sobre lógica ou a arte de descobrir a verdade!

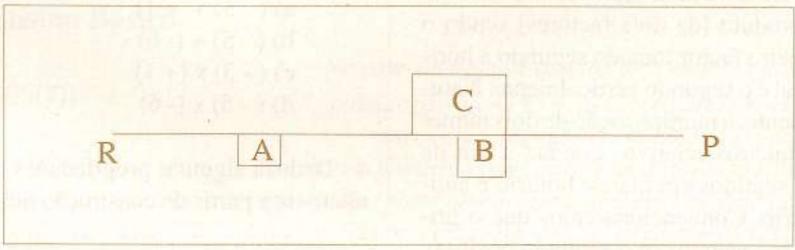
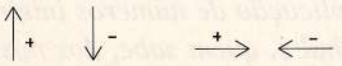


fig. 1

Um modelo para a adição e multiplicação de inteiros relativos

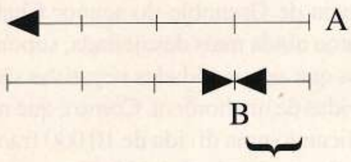
Neste modelo os números são representados por segmentos de recta orientados, traduzindo assim a ideia de movimento.

Escolheram-se duas direcções orientadas, a saber, horizontal e vertical, cada uma tendo um sentido positivo e negativo (para cima e para a direita; para baixo e para a esquerda, respectivamente). Quer dizer:



Então, a adição de dois números inteiros relativos representa-se por dois movimentos sucessivos segundo a mesma direcção, isto é, pela adjunção dos segmentos que sugerem os movimentos.

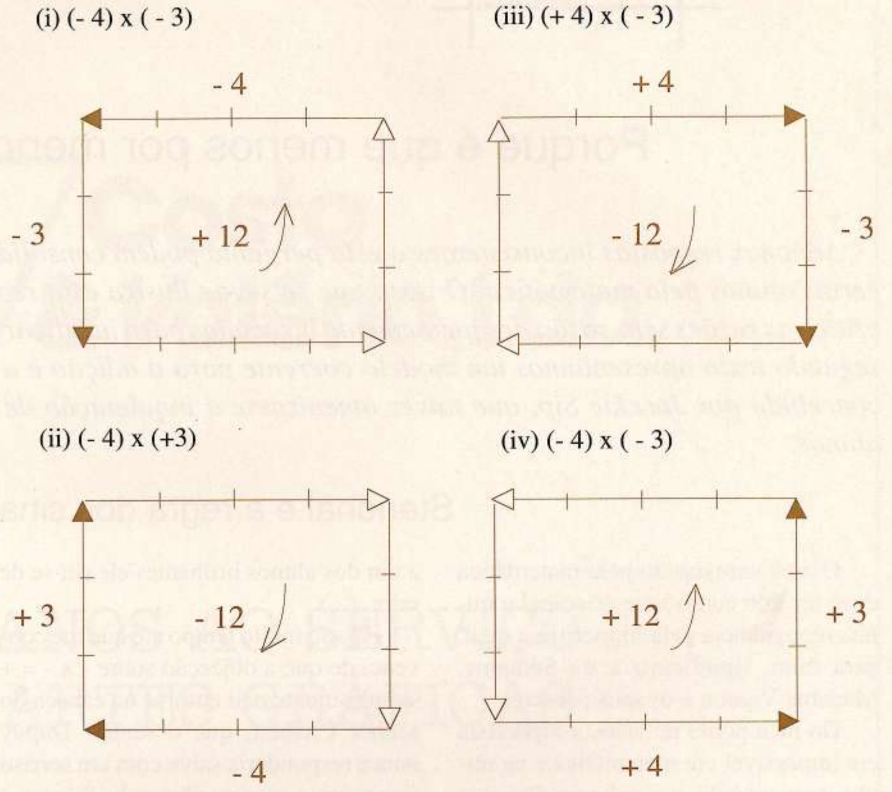
Exemplo:



$(-4) + (+3) = -1$

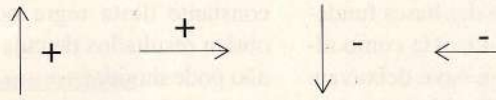
Quer dizer, a adição de (-4) com (+3) corresponde a um "movimento" de A para B. O "corpo" em movimento situa-se na posição -1 relativamente ao ponto de partida A.

A multiplicação de dois números inteiros relativos é ilustrada por um rectângulo cuja área representa o módulo do produto [de dois factores] sendo o primeiro factor tomado segundo a horizontal e o segundo verticalmente. Naturalmente, a multiplicação de dois números inteiros relativos conduz a um de dois sentidos circulares: horário e anti-horário. Convencionaremos que o primeiro é negativo e o segundo positivo. Exemplifiquemos, então, as quatro situações possíveis (ver figuras anexas).



Exercício

1 - Mostre que se obtem um modelo equivalente ao anterior com a convenção:



2 - Que vantagens tem a primeira convenção relativamente à apresentada em 1?

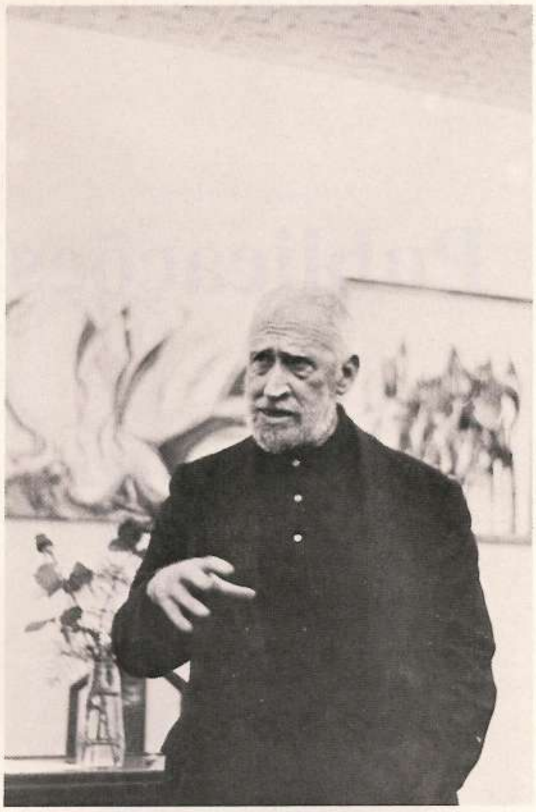
3 - Calcule, geometricamente:

a) (- 3) + + 1)
b) (- 5) + (- 6)
c) (- 3) x (+ 1)
d) (- 5) x (- 6)

4 - Deduza algumas propriedades da adição e multiplicação de números inteiros relativos a partir de construção destas operações.

Tradução e adaptação dos textos por Paulo Oliveira, a partir de J. Fauvel (Ed.). (1990). History in the mathematics classroom. *Londres: Mathematical Association.*

Agostinho da Silva morreu...


(foto de H. M. Guimarães)

Agostinho da Silva esteve fora, muito tempo. Cinco anos antes do 25 de Abril, em 1969, regressa a Portugal. Veio do Brasil, para onde tinha partido há muitos anos e onde ajudara a fundar universidades, Paraíba, Santa Catarina, Goiás, Brasília, esta, a sua última "aventura" universitária, como disse, depois do Centro de estudos Africanos e Orientais da Baía.

Nasceu em 1906. Licenciou-se no Porto, fez o seu doutoramento na Sorbonne e iniciou-se como docente de novo no Porto, na Faculdade de Letras que viria a ser encerrada por Salazar nos anos 30. Foi depois professor de liceu em Aveiro, até que foi demitido "por abandono de lugar" em 1935. Recusara-se a assinar declarando não pertencer a associação secreta nenhuma (recusava assim a lei contra a qual também Fernando Pessoa se tinha insurgido): "se eu fosse de uma associação secreta assinava que não era, mas como não era, podia dizer que não assinava. Botaram-me fora por abandono de lugar".

Passou uns tempos em Espanha, em vésperas da guerra civil, e voltou a Portugal onde estaria poucos anos, o tempo em que publicou os *Cadernos de Iniciação Cultural* e as *Biografias,* enquanto dava explicações e aulas em colégios particulares. A demissão do colégio onde leccionava — "[o director] demitiu-me porque embirrou que eu era comunista" — e outras perseguições do regime fizeram-no partir: "E assim, em 1944 [eu] não sabia se ia *ao* ou *para* o Brasil. Foi *para*. Ainda bem."

Partiu, mas voltou, um quarto de século mais tarde tendo considerado que a sua "missão no exterior" estava cumprida. Faltavam ainda cinco anos para o 25 de Abril de que agora se cumprem 20 anos. Por isso, também, se publica aqui o que Agostinho da Silva disse um dia, numa entrevista[1], a propósito desse Abril:

— (...) E o mar acabou no dia 24 de Abril de 1974, o que é uma grande atrapalhação para Portugal.

— *Ter acabado o mar?*

— Porque Portugal, no fundo, é uma ilha... No dia que a Espanha e a França resolverem que não passa português por ali, nem passa nada para Portugal, só temos o mar...

— *Mas há uma saída.*

— É o mar! Vamos ver: o português chegou ao fim do chamado Império. Há quem diga: acabou?! Mas como é que acaba? O Tejo volta para trás... a Serra da Estrela mingua... a língua desaparece?! É claro que houve pecados cometidos. Pecados no sentido em que os franceses utilizam a expresão 'faute'. O pecado de não se ter continuado a trabalhar a terra quando se partiu para o mar foi o maior deles. Agora só podemos passar a uma terceira fase de Portugal depois de termos ordenado de novo o território. Temos de pôr Portugal limpo: na terra, no mar costeiro, naquilo que dá. Esse parece-me ser o primeiro passo. O segundo será voltar para o mar.

— *Para quê, se já não temos notícias para dar?*

— Exactamente para dar notícias. Não para dar a notícia de que na Índia há manga, mas para dar a notícia de que o homem é uma coisa muito mais extraordinária do que aquilo que a gente julgava até aqui. (...)

Desde que voltou, aos poucos, foi-se ouvindo falar, nas suas palavras de professor, filósofo, poeta. Soube ser diferente até na maneira como todos somos diferentes. Ouvi-lo, fazia com que ficássemos a gostar mais de nós próprios, a gostar mais de Portugal e do mundo.

Agostinho da Silva morreu em Abril, no dia 3 passado. Em várias alturas lembrou a sua vocação de marinheiro não cumprida. Agora, saiu dos Jerónimos, ao pé do mar, e lembro a despedida do jornalista: boa viagem.

Henrique M. Guimarães

[1] Trata-se de uma entrevista dada a Joaquim Furtado, nos finais de 1984.

Materiais para a aula de Matemática

A ficha que apresentamos nas páginas seguintes faz parte dos materiais utilizados pelo Projecto GEM — Gráficas no Ensino da Matemática, um dos projectos em desenvolvimento no Centro de Formação da APM, envolvendo alguns professores do ensino secundário. Trata-se de uma adaptação de *Connecting Mathematics*, Addenda Series do NCTM e foi proposta aos alunos do 10º ano, antes de iniciarem o estudo da função quadrática. Posteriormente, depois do estudo da referida função, foi dada a oportunidades aos alunos de melhorarem as respostas à última parte da ficha. Esta mesma ficha foi apresentada aos alunos do 11º ano, como aplicação de um tema já tratado.

Projecto GEM

Materiais para a aula de Matemática

Quadrados com fósforos

Vamos trabalhar com quadrados em que os lados são constituídos por fósforos. Ao falarmos do quadrado 1x1 estamos a considerar um quadrado em que cada lado é 1 fósforo. Ao falarmos dos quadrados 2x2 ou 3x3 estamos a pensar nos quadrados com 2 e com 3 fósforos de lado, mas subdivididos em quadrados do tipo 1x1 (ver figura 1).

Vamos tentar encontrar uma função que nos permita saber o número de fósforos necessários para construir um quadrado em que o lado é um número qualquer de fósforos.

1. Quantos fósforos são precisos para o quadrado 1 x 1? E 2 x 2? E 0 x 0?
2. Regista numa tabela os resultados da tua observação.

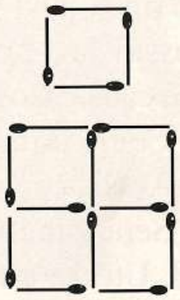


fig.1

Mas, para resolveres o problema colocado — encontrar uma função que te permita determinar o número total de fósforos para construir o quadrado K x K — é preciso recolher mais dados. Vamos experimentar.

3.Uma forma simples de contar o número de fósforos necessários para umdeterminado quadrado (K x K), é contar apenas os fosforos que se acrescentam ao quadrado anterior (K-1) x (K-1).

Observa a figura 2 e repara como se passa do quadrado 2 x 2 para o quadrado 3 x 3. Os novos fósforos foram agrupados em conjuntos assinalados com pequenos traços: I, II, III ou IIII.

Há quatro conjuntos, cada um com três fósforos. Ou seja, para construir o quadrado 3 x 3 a partir do quadrado 2 x 2 são precisos mais doze (4 vezes 3) fósforos.

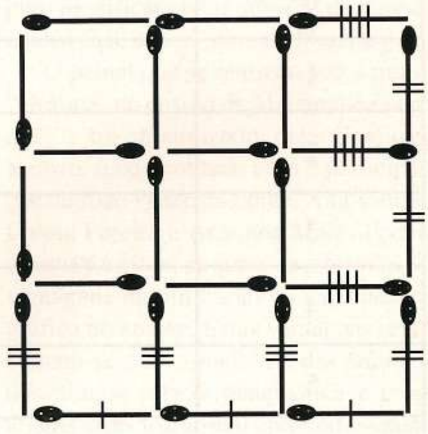


fig. 2

Experimenta agora ver o que acontece quando passas do quadrado 3 x 3 para o quadrado 4 x 4.

Quantos fósforos há agora em cada conjunto?
Quantos conjuntos formaste?
Qual é o número de novos fósforos?
Qual é o número total de fósforos do quadrado 4 x 4?

Continua a registar os dados recolhidos na tua tabela.

4. Considera agora um quadrado K x K e o quadrado (K+1) x (K+1) (fig.3). Quantos novos fósforos precisas para passar de um para outro?
(Utiliza o esquema de contagem anterior e verifica quantos conjuntos formas, qual o número de fósforos de cada conjunto e finalmente qual o número de novos fósforos).

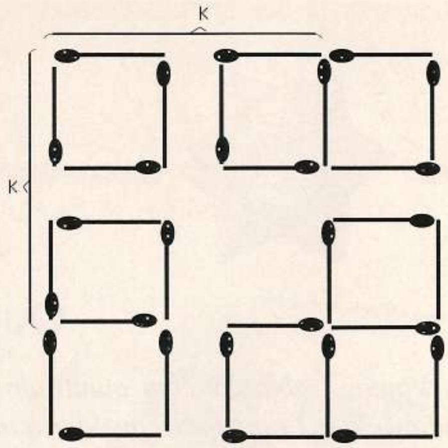


fig. 3

5. Testa a fórmula que encontraste, para os casos já conhecidos.

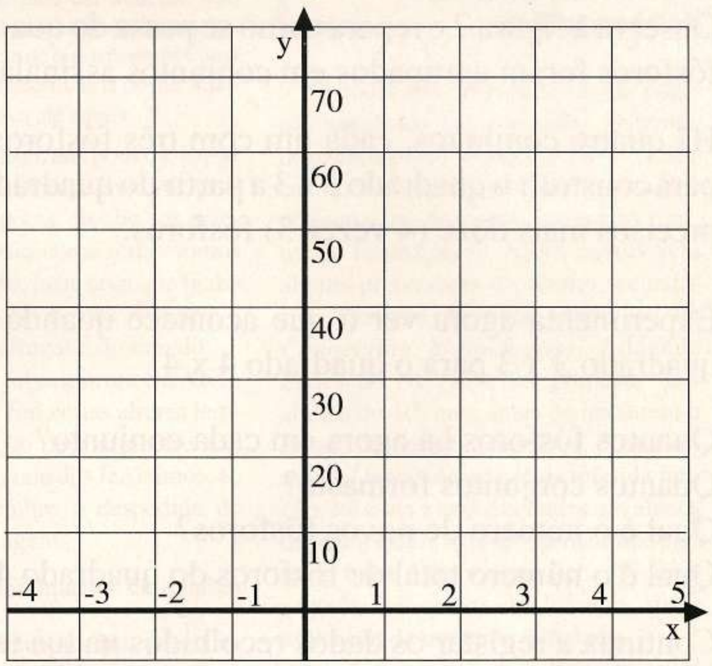
Vamos voltar ao nosso problema inicial: encontrar a função para o número total de fósforos de um quadrado qualquer.

6. Muitas vezes, em matemática, ultrapassam-se os limites da realidade. Imagina quadrados do tipo (-1)x(-1) e (-2)x(-2). Quantos fósforos prevê a tua fórmula que são necessários para passar de (-2)x(-2) para (-1)x(-1) e de (-1)x(-1) para 0x0? Qual o número total de fósforos em cada caso?
7. Como primeiro passo, representa graficamente os pares de valores registados.
8. Analisa o gráfico e compara-o com o da função $f(x) = x^2$.
9. Será esta função um bom modelo para resolver o problema proposto?
10. Utiliza a tua calculadora gráfica para encontrar a função que melhor represente esta situação. Apresenta e organiza o melhor possível os teus raciocínios. Desenha os gráficos e indica os valores (número de fósforos) que cada uma das funções te permite obter, bem como as razões que te levam a optar por uma função e não por outra.

tabela

Nº de fósforos em cada lado do quadrado	Nº total de fósforos
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

gráfico



Calculadoras gráficas: um seminário na APM

Helena Lopes

A Associação de Professores de Matemática organizou na sua sede, nos dias 11 e 12 de Março passados, um seminário sobre calculadoras gráficas. Do programa constava uma sessão plenária com o professor Bert Waits da Ohio State University, dois momentos de trocas de experiências, algumas sessões práticas, uma comunicação e um painel. Estiveram presentes cerca de 50 pessoas reunidas por um interesse comum: reflectir sobre a utilização de calculadoras gráficas na sala de aula.

Antes de se iniciarem os trabalhos conversei com várias pessoas, umas mais conhecidas destas andanças outras menos, e as palavras calculadoras, descoberta, alunos, matemática, investigação, discussão, trabalho de grupo, utilidade, desenvolvimento de capacidades e, também, cepticismo iam surgindo. O ambiente era um pouco de expectativa.

"Viva !" Foi assim que Bert Waits iniciou a sessão plenária. No seu estilo simpático e informal, fez uma sensibilização para a utilização das calculadoras gráficas referindo a urgência da mudança no ensino da matemática e concebendo a calculadora gráfica como uma ferramenta que favorece essa mudança. Sem descurar a importância do exercício analítico, proclama as grandes vantagens do uso deste tipo de tecnologia. Entre outras, referiu que:

• permite a utilização de poderosas ferramentas matemáticas em níveis mais baixos de ensino, tornando possível a resolução de situações mais reais e mais interessantes do que é usual nas aulas de Matemática;

• torna possível realizar, com rapidez e facilidade, todas as experiências que cada um considera necessárias para validar as suas próprias conjecturas.

(foto de José Martinez)

Os momentos de troca de experiências foram diversificados, tanto no que diz respeito às actividades apresentadas, como forma de organização das aulas em que se utilizaram as calculadoras. Fica registada a coragem de alguns colegas nossos que, reunindo no máximo, e com muito esforço, cinco calculadoras para uma turma de 25 alunos, persistiram e experimentaram. Esta coragem tira-nos todas aquelas razões com que às vezes procuramos justificar a nossa inércia.

Realizaram-se duas sessões práticas, uma foi dinamizada por Bert Waits e a outra por três professoras: a Paula Teixeira, a Adelina Precatado e a Maria João Lagarto. Participei nesta última e entretive-me a utilizar a calculadora na procura de modelos adequados a várias situações. Apercebi-me de algumas das facetas específicas da máquina e de como o espírito crítico é fundamental para que o seu uso seja útil e eficaz.

O segundo dia do seminário começou com uma comunicação apresentada de forma clara e muitíssimo interessante pela Helena Rocha. A Helena falou-nos do modo como a calculadora gráfica ajudou os seus alunos a estabelecer a ligação entre o estudo gráfico e o estudo analítico de funções; de como as situações de erro provocaram a curiosidade e desenvolveram o espírito crítico e de como um tipo de aula diferente conseguiu modificar certas atitudes de alguns alunos face à disciplina de Matemática.

O painel que se realizou sob o título "Gráficas no ensino da Matemática porquê?", foi dinamizado pela Graciosa Veloso, tendo contado com a participação de João Pedro da Ponte, Ana Vieira, Celina Pereira e Arminda Maia. Todos de uma forma ou de outra, se referiram às vantagens da utilização da calculadora gráfica no ensino. Estas vantagens relacionam-se com a melhoria das atitudes dos alunos para a matemática e com alguns aspectos do seu aproveitamento. Foi referido, por exemplo, que os alunos passam a reconhecer gráficos de um certo tipo e a indicar as expressões para um dado gráfico com maior facilidade, e ainda que, com a utilização da máquina, compreendem melhor a relação entre a representação gráfica e a algébrica.

Ficou claro para todos nós que a calculadora gráfica, ou qualquer outro tipo de tecnologia, só terá efeitos significativos se contribuir para uma mudança efectiva na abordagem dos diversos temas, abordagem essa que, como se disse, dê "ênfase às representações gráficas e à sua interpretação" e na qual se valorizem estratégias de exploração e de descoberta por parte do aluno".

Naturalmente, fizeram-se sentir, também, algumas preocupações: como articular a extensão do programa do ensino secundário com a necessidade do desenvolvimento de capacidades? Como enfrentar a eventual proibição do uso das calculadoras gráficas nos exames? Como contornar a questão do custo da calculadora gráfica que impede o acesso de muitos alunos a este tipo de tecnologia?

Da discussão no painel, em torno destas e outras questões, surgiu uma ideia forte: "temos todos de contribuir para criar condições para um efectivo acesso à calculadora", nomeadamente, intervindo mais activamente nas escolas no sentido de reivindicar as condições adequadas a uma nova aula de matemática que deverá ser também de tipo oficinal, e fazendo com que o ensino secundário ganhe um maior protagonismo, assumindo posições próprias sobre o que deve constituir o ensino da matemática a esse nível.

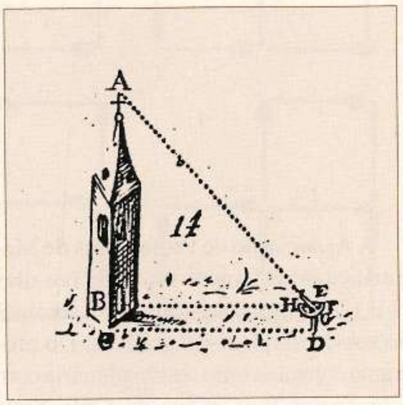
No início deste texto referi que "cepticismo" tinha sido uma das palavras que ouvira entre os participantes do seminário. Na parte final dos trabalhos a colega de quem tinha ouvido essa palavra fez questão em vir ter comigo para me dizer que estava cheia de vontade de experimentar. Vi nos seus olhos que isso era sentido. E lá foi ela ter com o António Domingos para lhe pedir que fosse também à sua escola fazer uma acção de sensibilização. Estes encontros têm destas coisas. Parabéns à organização!

Helena Lopes
Esc. Sec. Rio de Mouro

História na aula de Matemática

Altura de uma torre

Este extracto de um livro usado há mais de 200 anos na Universidade de Coimbra fornece uma oportunidade de reflectir sobre a evolução da Matemática que faz com que uma matéria universitária passe a matéria do Ensino Secundário. Permite ainda reflectir sobre a evolução dos processos de cálculo (desde as tábuas de logaritmos aos computadores) e permite estudar uma aplicação concreta da Trigonometria.



Extractos de *Elementos de Trigonometria Plana* de Bezout traduzidos para português pelo Pe. Monteiro da Rocha para uso dos alunos da Universidade de Coimbra (terceira edição, datada de 1817, e impressa pela Real Imprensa da Universidade de Coimbra):

167 Exemplo I. *Determinar a altura AC de huma torre* (Fig. 14.), *por meio de medidas tomadas sobre o terreno*:

Escolha-se no terreno adjacente, que suppomos estar no plano horizontal, hum ponto D em tal distancia, que o angulo formado pelas duas linhas, que se imaginaráõ tiradas do mesmo ponto D para a base o vertice da torre, nem seja muito agudo, nem muito chegado a recto. Medida a distancia CD, no ponto D se fixará o pé do Grafometro; e dispondo o instrumento verticalmente, e dirigindo-o para o meio da torre AC, de sorte que o diametro fixo HF esteja horizontal (n. 159), mover-se-há a alidada até que pelo oculo, ou pinnulas, se enfie o vertice da torre A; e a divisão do instrumento mostrará o angulo FEG, e conseguintemente o que lhe he verticalmente opposto AEB.

Sendo pois a altura AC perpendicular ao plano horizontal, no triangulo ABE, além do angulo recto em B, conhecemos pela medição actual o angulo AEB, e o lado BE igual a CD, e procuramos saber o outro lado AB. Assim estamos no caso do Theorema segundo (n. 164), e teremos R : *tang* AEB : : BE : AB.

Supponhamos, que se achou CD, ou BE, de 132 palmos; e AEB de 48° 54'. Será então a analogia R : *tang* 48° 54' : : 132^{p} : AB. Donde, usando dos Logarithmos, obraremos do modo seguinte:

Log. *tang* 48°, 54' - - - - 10,0593064
Log. 132^{p} - - - - - - - 2,1205739

Log. de AB - - - 2,1798803; ao

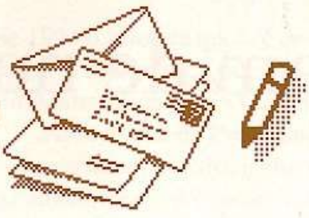
qual corresponde nas Taboas o numero 151,314. Pelo que será AB de 151 palmos e 2 pollegadas e meia proximamente, e ajuntando-lhe a quantidade BC igual á altura do instrumento DE, teremos a altura total AC.

Se com os mesmos dados quizessemos saber a distancia AE, deveriamos (n. 163) praticar a analogia *cos* 48° 54' : R : : 132^{p} : AE, como aqui se mostra:

CL: *cos* 48° 54' - - - - 0,1821867
Log. 132^{p} - - - - - - 2,1205739

Log. AE - - - - 2,3027606; E por conseguinte achariamos AE de 200^{p}, 8 proximamente.

Jaime Carvalho e Silva



Pontos de vista, reacções, ideias...

De Almada, chegou-nos uma reacção ao artigo, publicado no nº 28, "Velocidade recomendada nas auto-estradas: 20 km/h?", apresentando as razões pelas quais a fórmula recomendada pelo Código da Estrada para o cálculo da distância de travagem tem uma fundamentação teórica.

A propósito do artigo "Velocidade recomendada nas auto-estradas: 20 km/h?", publicado no *Educação e Matemática* nº 28, gostaria de esclarecer os leitores que a fórmula para o cálculo da distância de travagem, **Dt= v²/100**, não é empírica e há de facto uma razão **dinâmica/energética** que a justifica.

Com efeito, considerando o automóvel esquematizado na figura1, que se supõe descarregar metade do seu peso **P** sobre cada par de rodas, por razões de simplificação dos cálculos, verifica-se que, para o imobilizar (travagem), é necessário fazer apelo à força de atrito roda/estrada **Fa**, que é igual a **P.f**, sendo **f** o coeficiente de atrito roda/estrada e **P** o peso do veículo.

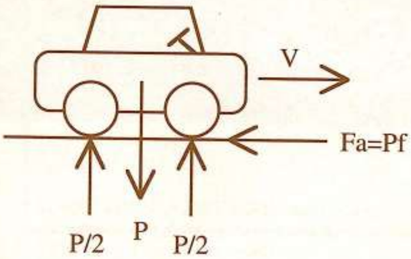


fig. 1

Analisando o mecanismo de travagem numa das rodas, pode observar-se no esquema simplificado da figura 2 que, ao carregar o pedal do travão, é desencadeada sobre os calços da roda uma força **T** (T/2 em cada lado), cuja

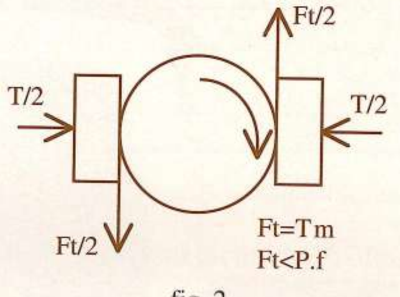


fig. 2

acção sobre a roda vai provocar um **momento retardador** devido à força de atrito resultante da acção do calço sobre a roda. Tal força de atrito do calço (**Ft**) é igual a **T.μ**, sendo μ o coeficiente de atrito roda/calço.

Para que não se dê o bloqueio total das rodas, o que transformaria uma **travagem controlada** num *escorregar* do veículo sobre a estrada, em que o condutor assistiria *passivamente* à progressiva imobilização do automóvel, deve a força de travagem **Ft** manter-se inferior à força de atrito pneu/estrada **Fa**.

Assim sendo, **Fa=P.f**, **Ft=T.μ** e **Ft<Fa** (para não bloquear as rodas), vem a expressão **Ft<P.f**. Considerando valores experimentais para o coeficiente de atrito pneu/estrada, podemos tomar aproximadamente **f=0,7** para piso bem seco e **f=0,3** para piso molhado.

Após as considerações dinâmicas acima apontadas, passemos a analisar a questão energética da travagem.

Supondo que o automóvel se desloca com a velocidade **V** (m/s) no momento em que são accionados os travões, ele irá percorrer uma distância **Dt**, **distância de travagem**, até se imobilizar com velocidade zero.

A energia cinética do veículo à velocidade **V** é de **Ec=1/2 MV²**, ou ainda **Ec=1/2 P/g V²** (a massa M=P/g), e no

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = P.f.Dt, \text{ ou ainda}$$

$$\frac{V^2}{2g} = f.Dt, \text{ e } Dt = \frac{V^2}{2gf} \text{ em metros}$$

para V em m/s.

Tomando g=9,8 m/s² para a aceleração da gravidade, virá

$$Dt = \frac{V^2}{2 \times 9,8 \times f \times 3,6^2}$$

em metros, para V em km/h, ou aproximadamente $Dt = \dfrac{V^2}{254f}$

final do percurso **Dt** será igual a zero.

Pela Lei do Trabalho-Energia teremos **Ec+Ft.Dt=0**, sendo **Ft.Dt** o trabalho ne-gativo realizado pela força de travagem **Ft**. À parte os sinais, será então:

Tomando para coeficiente de atrito pneu/estrada um valor intermédio de **f=0,4**, vem aproximadamente a fórmula recomendada no Código da Estrada, **Dt=V²/100**.

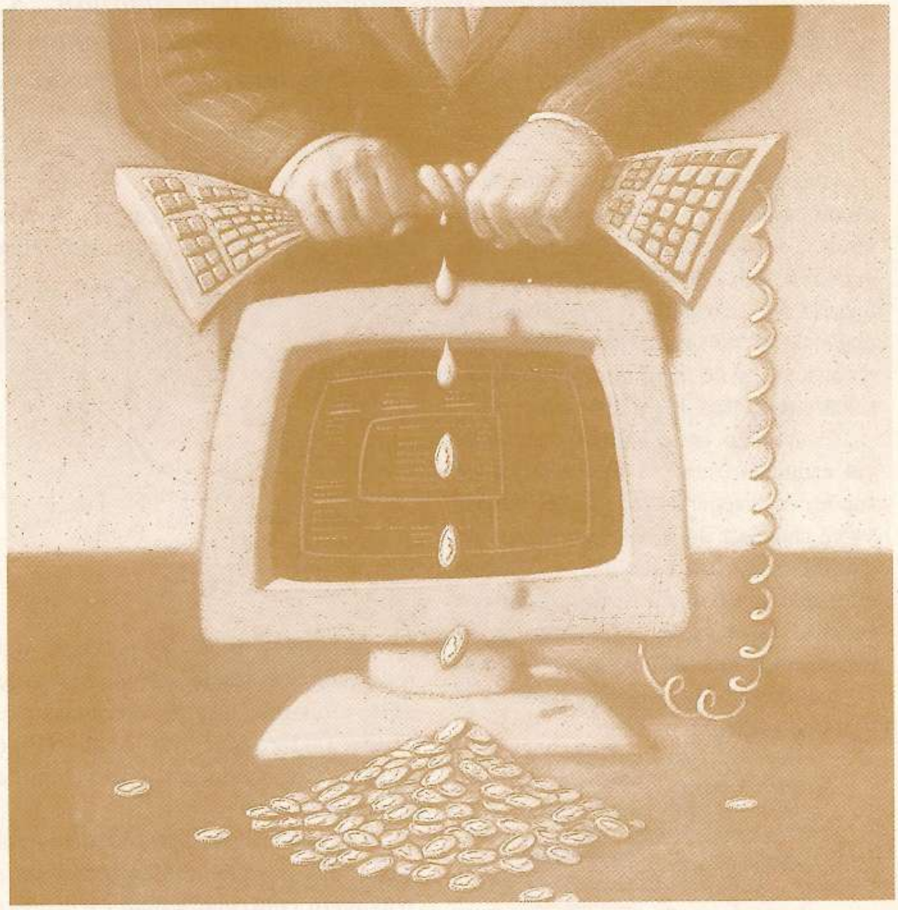
Victor Santos

Nota da Redacção: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

Bozell

Oferecemos unicamente o que os clientes esperam de nós...

TUDO!



O processo de aquisição de computadores pessoais tem evoluído ao longo dos tempos e não se fica, actualmente, pela mera escolha do "caixote"; tornou-se uma importante decisão estratégica de negócio. Por outro lado, a experiência tem demonstrado que, às vezes, *Comprar barato sai caro:* tecnologias não evolutivas, investimentos não rentáveis. A Unisys não tem no seu vocabulário *"estagnar"*, *"perder"*, mas sim *"evoluir"*, *"ganhar"*.

A UNISYS pretende consolidar parcerias de consultoria com os seus clientes, colaborando na definição, criação e implementação da estratégia mais adequada, no intuito de estes melhor servirem os seus próprios clientes e deste modo capitalizarem vantagens competitivas nos mercados em que se situam.

O que temos para oferecer?

• **Serviços de integração, instalação, certificação e gestão de redes complexas**, que necessitam de garantias de funcionamento continuado, sem interrupções. Desde simples redes locais (*Lans*) a redes distribuídas (*wans*), incluindo comunicações entre sistemas centrais, departamentais e estações de trabalho.

• **Serviços de Consultoria** - Apoio consultivo para a definição da estratégia dos sistemas de informação necessários, em função dos objectivos do negócio de cada cliente.

• **Serviços de Educação/Formação** - Produtividade, Rentabilidade e Qualidade são os objectivos da equipa de profissionais Unisys responsável pelos Serviços de Educação e Formação.

• **Serviços de Manutenção** - Alto Nível de suporte, maior gama de serviços do mercado, profissionais experientes, hotline, são algumas das ferramentas que disponibilizamos nas parcerias com os nossos clientes.

• **Tecnologia "State-of-the-art" e qualidade de equipamentos** - Colocamos ao dispôr dos nossos clientes computadores pessoais da linha PW2 com arquitectura ISA ou EISA, processadores Intel 486 ***actualizáveis para PENTIUM overdrive***, controladores de memória de massa e discos SCSI, tecnologia de **LOCAL BUS** com ligações para vídeo e Ethernet, memória cache do tipo **"write-through"** e **"write-back"** e **aceleradores gráficos para windows**. Tudo isto com **garantia de 3 anos**, sinónimo de protecção do investimento.

• **Compromisso com os Standards da Indústria** - Alianças estratégicas com os principais "pivots" da Indústria das Tecnologias de Informação, como são os casos da Intel, Microsoft e Novell e as certificações a que os nossos sistemas estão sujeitos, são a garantia que os computadores pessoais da Unisys são compatíveis com todos os produtos leaders do mercado, hardware e software, permitindo a actualização gradual dos mesmos à medida que novas tecnologias vão surgindo:

Reiteramos:
O que temos para oferecer?
TUDO!

Cus•tom•er•ize - **1.** Tornar uma empresa mais eficaz na resposta às necessidades dos seus utilizadores e mais apta para atrair novos clientes. **2.** a "customerization" das estratégias de informação de uma empresa, i.e. estender as capacidades do sistema de informação a delegações, pontos de venda e outros pontos de contacto com clientes. **3.** O que a Unisys faz para o número crescente de empresas e entidades governamentais em todo o mundo. sin: SERVIÇO A CLIENTES, VANTAGEM COMPETITIVA, SOLUÇÕES, EFICIÊNCIA, MELHORES RESULTADOS.

Pretende pôr-nos à prova? Não queira apenas adquirir-nos equipamento... deixe-nos ser seu PARCEIRO.

Entre em contacto connosco através do *telefone 7570307 de Lisboa, 693041 do Porto ou do fax 7594026*, ou com a nossa rede de Concessionários Autorizados.

UNISYS

Fazemos acontecer.

Quota de 1994

No ano de 1994 o valor da quota é de **4000$00** (3000$00, para o sócio estudante e 4500$00 para os sócios estrangeiros). Se ainda não pagou a sua quota, pode efectuar o pagamento enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português, ou ainda através do cartão Visa, Mastercard ou Eurocard, preenchendo o impresso abaixo.

Só para sócios residentes no estrangeiro

(Nome) ______________________________ autorizo que seja debitado no meu

cartão número |_|_|_|_||_|_|_|_||_|_|_|_||_|_|_|_|

Visa ☐ VISA MasterCard ☐ MasterCard Eurocard ☐ EUROCARD

Validade ____________ o valor de ____________ correspondente a ____________

____________ Data __/__/__

Assinatura ______________________________

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ____________

Nome ______________________________

______________________________ Tel: ____________

Morada ______________________________

Código Postal ____________ Ano em que começou a leccionar: ____________

Data de nascimento ______ / ______ / ______ Nível de ensino: ____________

Escola ______________________________

Localidade ____________ Distrito ____________

Categoria Profissional ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar o pedido preenchendo a ficha de pedido de publicações(ou fotocópia(ver *Educação e Matemática* nº 28), juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes: até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10% Se residir no estrangeiro, poderá utilizar os cartões Visa, MasterCard ou EuroCard para pagamento de qualquer encomenda de publicações, desde que previamente se informe pelo fax 351-1-7782141 da quantia a enviar para os portes de correio.

índice