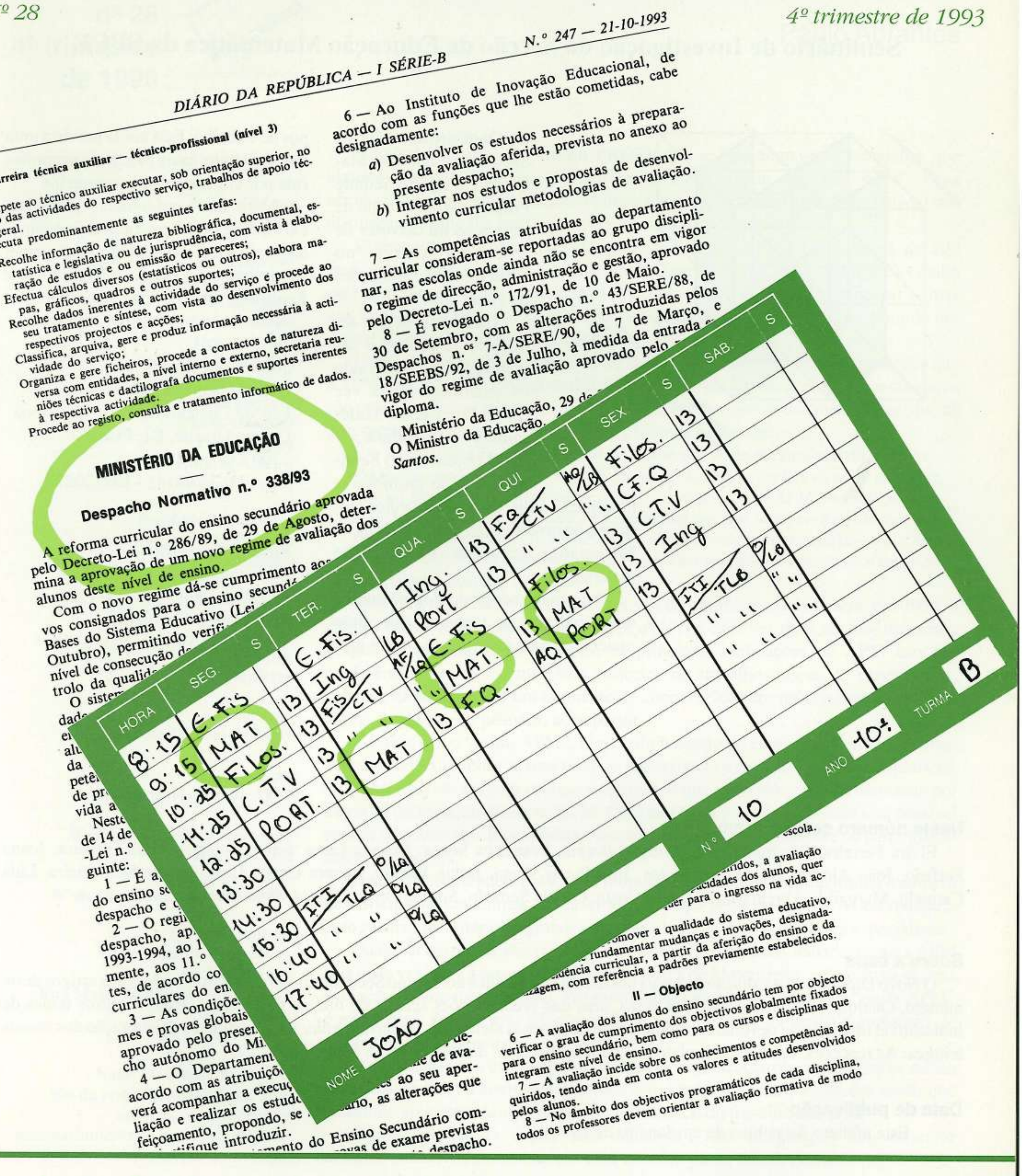
Educação e Matemática

Nº 28

4º trimestre de 1993

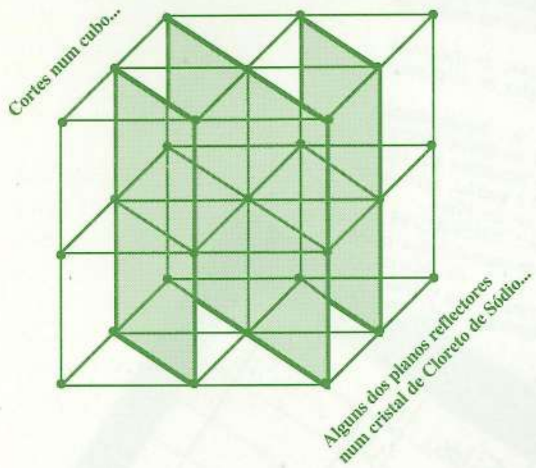


Preço: 400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

MATEMÁTICA-REALIDADE

Seminário de Investigação da Secção de Educação Matemática da SPCE



O terceiro seminário da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação irá decorrer de **2 a 4 de Março**, no **Vimeiro**, nas instalações do Hotel Golf-Mar.

Tratar-se-á de um seminário temático, à semelhança do que têm sido os anteriores, desta vez centrado no tema **Matemática — Realidade**.

O objectivo do Seminário é o de promover a divulgação e discussão de aspectos teóricos e de investigação acerca da relação Matemática-Realidade, na educação matemática.

O formato adoptado compreenderá duas conferências plenárias que serão matéria de reflexão e discussão em grupos de trabalho. Está ainda prevista uma terceira conferência plenária a ser proferida por um convidado estrangeiro.

Além das conferências plenárias, existirão sessões temáticas cujo conteúdo será objecto de debate num painel subordinado ao tema *"Matemática e Realidade: Que relação na escola?"*.

Para mais informações, contactar:

João Filipe Matos
Departamento de Educação
Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa
Campo Grande, C1, Piso 2
1700 Lisboa
Tel. (01) 757 3141 - Ext. 2027
ou

Susana Carreira
Departamento de Matemática
F.C.T. da Univ. Nova de Lisboa
2825 Monte de Caparica
Tel. (01) 295 4464 - Ext. 2308

Neste número colaboraram

Elvira Ferreira, Eduardo Costa, Evelyne Barbin, Francisca Sousa, Iolanda Lima, Isabel Rocha, Isolina Oliveira, Joana Porfírio, João Almiro, João Filipe Matos, José Paulo Viana, Judith Pereira, Leonor Cunha Leal, Lucília Ramalheira, Luís Carmelo, Margarida Abreu, Maria Teresa Costa, Olinda Semedo, Susana Diego, Teresa Olga Albuquerque.

Sobre a capa

O Novo Diploma de Avaliação e a carga horária da Matemática no Ensino Secundário são discutidos em dois dos artigos deste número. Qualquer dos temas será, por certo, uma das preocupações actuais de muitos professores. Estes e outros temas de indiscutível importância deverão continuar a merecer a nossa atenção e, desejavelmente, a impulsionar a colaboração dos nossos leitores. As reacções, opiniões, os relatos ou simplesmente os *desabafos* serão bem vindos.

Data de publicação

Este número foi publicado em Janeiro de 1994.

nº 28
4º trimestre
de 1993

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Leonor Barão
Helena Lopes
Henrique Guimarães
José Manuel Matos
Maria João Lagarto
Paulo Abrantes
Paulo Alvega
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores
de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3000 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 74284/94

Correspondência
Associação de Professores
de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa
Tel / Fax: 7782141

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

O estilo APM

Paulo Abrantes

Numa das sessões do último PROFMAT, a Ana Benavente comentou que algumas propostas que estava a apresentar lhe pareciam do "estilo APM". Uma afirmação curiosa, vinda de uma socióloga, uma pessoa exterior à Associação. Uma afirmação que me fez pensar: existe mesmo um "estilo APM"?

Estávamos em Ponta Delgada, onde o PROFMAT 93 reuniu mais de 500 professores de Matemática. Um facto notável se pensarmos que as viagens e a estadia custaram, à maioria dos participantes, mais de metade do seu salário mensal — mas que já não seria impossível de prever depois de, em 1992, a APM ter reunido um milhar de professores de Matemática em Viseu.

Uma associação de professores com mais de 3000 membros e com a dinâmica que a APM adquiriu, é um fenómeno difícil de explicar para quem acha que os professores são comodistas, que as reformas só podem ser feitas *apesar* dos professores, que os programas e os manuais têm que ser *à prova de* professor!

Em Janeiro de 1987, no editorial do número 1 desta mesma revista, escrevi:

Em muito pouco tempo (...), a APM constituiu-se, legalizou-se e lançou novos projectos. Ela vai agora certamente crescer. Mas, acima de tudo, a APM pretende ser uma associação assente na iniciativa e no dinamismo dos seus membros e na ideia de uma grande descentralização. (...) A APM quer ser isso e não uma associação em que uma direcção central mais ou menos activa dá conta dos seus próprios projectos a um grupo grande mas passivo de associados.

Sete anos mais tarde, há alguns motivos de optimismo: Leiria será, em 1994, a décima cidade a organizar o PROFMAT nº 10; há cada vez mais núcleos regionais, grupos de trabalho e publicações; as principais realizações da APM não são conferências ou cursos mas sim projectos de trabalho, trocas de experiências, debates; existe na APM um ambiente de cooperação entre professores de todos os níveis de ensino, do primário ao superior.

É este afinal o "estilo APM". Um estilo baseado no empenhamento dos professores, na reflexão sobre as suas práticas pedagógicas e na renovação dessas práticas.

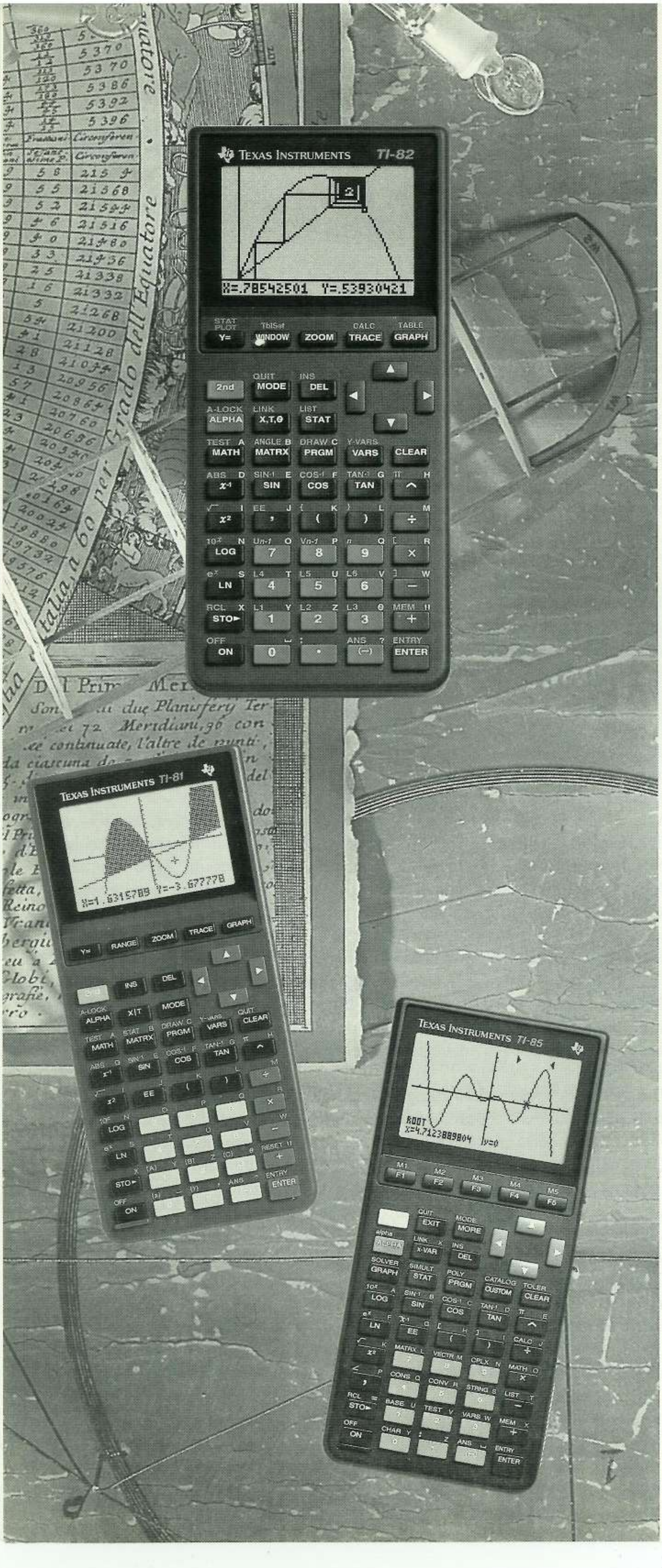
Tenho ouvido a alguns colegas a opinião de que este estilo estaria condenado por causa do crescimento da Associação. Com tanta gente — dizem — não será possível manter o mesmo tipo de actividade, baseada em grupos de trabalho e na participação activa dos sócios.

Duas soluções tendem então a ser propostas. Uma consistiria em limitar o número de participantes nas realizações da APM, a começar pelos Encontros. A outra passaria pelo recurso prioritário às grandes sessões plenárias e aos convites a especialistas.

Qualquer destas tendências me parece errada. Por um lado, não receio que a APM seja cada vez mais a associação *dos* professores de Matemática, pelo contrário, essa evolução parece-me desejável. Por outro lado, penso que adulterar o "estilo APM" é muito mais do que trair hábitos ou tradições, significa na verdade prescindir de princípios fundamentais.

O que precisamos é de encontrar formas de organização que encorajem os sócios (todos os sócios!) a envolverem-se nas actividades associativas, de um modo que consolide ao mesmo tempo o estilo característico do trabalho da APM.

O que, sem dúvida, requer mais iniciativa e mais imaginação. Mas enfrentar desafios colectivos como este não fará também parte, afinal, do estilo APM?



UMA VEZ MAIS... OS PRIMEIROS COM O MELHOR

A NOVA GERAÇÃO DE CALCULADORAS GRÁFICAS DA TEXAS INSTRUMENTS

A TI atende e responde às necessidades da comunidade matemática. Resultados? A **TI-81**, que definiu um novo padrão das capacidades gráficas, no passado ano de 1991.

Mais recentemente, novas sugestões conduziram-nos à **TI-85**, com potência suficiente para acompanhar os estudantes de matemáticas, ciências e engenharia na universidade e depois nas suas carreiras profissionais.

E agora, a **TI-82** - a escolha lógica dos professores que dão destaque à análise estatística e à matemática discreta. A **nova TI-82** enriquece o domínio das investigações matemáticas para os alunos do secundário e inclui novos recursos para modelação de dados, tabelas de valores de funções e gráficos recursivos de sucessões.

Características	TI-81	TI-82	TI-85
Gráficos de Funções	Ate 4	Ate 10	Ate 99
Gráficos Paramétricos	Ate 3	Ate 6	Ate 99
Gráficos Polares		Ate 6	Ate 99
Gráficos de Sucessões		Ate 2	
Gráficos de Soluções de Equações Diferenciais			Ate a 9a ordem
Percorre Todos os Gráficos Representados	X	X	X
Raízes/Min/Max		X	X
Recursos de Zoom	7	13	15
Tabela de Valores de Funções		X	
Número de Matrizes	Ate 3	Ate 5	Ilimitado*
Dimensão Máxima da Matriz	6x6	30x30	50x50
Número de Listas		Ate 6	Ilimitado*
Dimensão Máxima da Lista		99	Ilimitada*
Modelos de Regressão	5	8	8
Diagramas "Box-and-Whisker"			X
Vectores		X	
Solucionador de Equações			X
Números Complexos			X
Capacidade de Comunicação		X	X
Capacidade da Memória	4,6K Bytes	32K Bytes	32K Bytes
Garantia de 2 Anos	X	X	X
ViewScreen	X	X	X

*Os números alterar-se-ão com o uso da calculadora, até à saturação da memória disponível.

Texas Instruments: Uma vez mais os primeiros com o melhor; pois atender às necessidades dos professores é uma das coisas que melhor sabemos fazer.

TEXAS INSTRUMENTS

Levei o meu *Xf* aos Açores!

Susana Diego

Pediram-me impressões sobre o Profmat93, para a *Educação e Matemática*. Procurei que ficasse bem claro que iria tratar-se da **minha** visão impressionista do Encontro, vista "de dentro" e pintada muito em cima do acontecimento.

Se tivesse pouco espaço, uma tela pequenina, diria apenas: **Não tenho palavras para descrever as emoções desta semana nos Açores. Fiquei com vontade de emigrar para lá, de ir trabalhar para a escola das Laranjeiras, de pôr a Organização no Quadro de Excelência**. E pronto, já estava.

A encomenda foi um pouco maior. Terei que explicar-me mais.

Tenho que confessar que o Profmat deste ano começou a andar na minha cabeça desde a sessão de encerramento do de 1992... É que ir aos Açores...

Domingo, 24 de Outubro. O meu filho Gonçalo e eu, conseguimos, sentando-nos em cima — primeiro à vez e finalmente em simultâneo — fechar a minha mala.

Partida de Barcelos. Ao volante, o Zé Fernandes (para a APM o agora eleito Presidente da mesa da Assembleia, para mim o *chefe*, ou *Xf*, pois é o coordenador do meu CAL de dois elementos).

Na Portela já estavam muitos profmatistas. Do Núcleo de Braga fomos cerca de uma dezena. Nada de significativo a registar, a não ser que o *Xf* teve que viajar sob o pseudónimo de Ana Fernandes. Não ficou completamente apurado o porquê, mas deve ter sido pela mesma razão que o Albano Silva embarcou como Alda Silva.

Logo nessa noite, no bar do Hotel Canadiano, onde se alojaram também VIPs (Abrantes, P.; Guimarães, H.; Nunes, F.; Silva, A.; Veloso, E., etc., etc.), falou-se bastante em signos do zodíaco e em cabos coaxiais com 100 fios. O *Xf* é um ferrinho a responder aos *Desafios* do Público. Eu diverti-me a observá-los pois considero que não tenho condições para uma empresa dessas durante um Profmat. São demasiadas solicitações intelectuais e sociais e, neste caso particular, demasiados fios.

Fiquei maravilhada com a escola das Laranjeiras e pareceu-me que se tirou partido deste local privilegiado, sem provocar atropelos nem poluição visual. Também me agradou a música (um bocado menos as chamadas dos proprietários de veículos). Mas acima de tudo isto, havia o calor humano (sem o cheiro a enxofre das *fiurnas*), a eficiência, a vontade de receber bem. E os inesperados, mas prestáveis escoteiros.

Fiz render o tempo e assisti a **uma** sessão de um curso sobre Geometria (as orientadoras justificaram-me a falta), a **duas** de um outro sobre o estudo de Funções e a **outras duas** (clandestinamente) do Seminário de Investigação.

Gostei particularmente do papel perfeitamente secundário atribuído ao computador no curso sobre Funções. Valorizados e interessantes, isso sim, foram as questões e os problemas colocados, ou seja, a Matemática.

No Seminário de Investigação, confirmei a tese de que não se deve servir feijoada ao almoço porque os participantes, mesmo os mais insuspeitos, ficam com um pouquinho de sono. Globalmente achei interessantes os debates.

Na 4ª feira começou o Profmat, com os seus 500 e tal participantes e mais uns quantos acompanhantes. Um tema para cada um dos dias: Desenvolvimento Curricular, Conexões da Matemática e Avaliação.

Foi arrasante para mim, entre GTs, Painéis e papéis.

Terminou com a Assembleia Geral da APM. Momento importante e direito não usufruído por muitos dos sócios. A fotografia (página seguinte) retrata o momento em que o Albano (para o nosso núcleo, *O Padrinho*), com o seu entusiasmo apaixonado, falou do Centro de Formação da APM. Eu também estou na fotografia, quase no canto superior direito, acima de uns pés e de umas pernas que o artista cortou, eu própria sem cerebelo e ligeiramente abaixo do meu *Xf*, como mandam as hierarquias.

Tive uma intervenção, para falar do jovem núcleo do distrito de Braga. Estava um bocado nervosa. O *Xf* tinha-me ameaçado caso eu me pusesse com comentários negativos, como é meu costume.

A reunião terminou com a questão da sede e do dinheiro para a comprar. Foram apresentadas diversas sugestões, defendidas e atacadas quaisquer delas. É claro que não se compra uma sede como quem compra uma tasca, mas é de facto uma urgência.

Na 5ª de manhã não aguentei o sofrimento de me saber num local paradisíaco, sem sequer o poder chamar ao pensamento, evadindo-me mentalmente durante as sessões. Evadi-me de facto. Choveu bastante.

De tarde houve mais. O passeio *legalmente* previsto para todos. Doze camionetas. Fiquei esmagada com o poder das furnas e enjoada com o cheiro. Se o inferno cheirar assim, tenho que pensar seriamente no assunto.

O jantar oferecido nas Capelas, com a presença do Presidente Mota Amaral, de quem levei um aperto de mão, esteve bastante bom. No final dançaram, dançou-se, cantaram, cantou-se.

Sexta. Um lamentável tiro à Conferência Plenária. Depois da Sessão Temática do Paulo Abrantes, interessante, claríssima, mas em *alto speed*, derrapei no piso húmido, para a aula de hidroginástica. Fiz mais hidro do que ginástica, passei pela cantina quase só para secar o cabelo no secador de mãos e sentei-me para descansar, admirar e aplaudir o nosso Zé Paulo Viana, que desta vez nos fez espreitar para o lado matemático de alguns truques, sem perder aos nossos olhos o seu lado de Mágico.

Resisti aos apelos de ***je t'aime***, perdi os queijos e o licor do lançamento do número temático da Revista, mas os representantes do nosso núcleo e eu, tivemos uma mini-reunião com o Eduardo Veloso sobre a nossa intervenção na organização dos Encontros de História da Matemática que vão realizar-se em Braga em 96.

Jantar na Antero de Quental. **Tudo** bonito: o ambiente, as mesas, a comida e o recital de canto e piano. A Organização conseguiu que a escola voltasse essa noite a ser o palácio da Fonte Bela, chegando ao pormenor de tirar os quadros negros das paredes. Também apreciei o cuidado com que deixaram uns quadrinhos com o *Plano de evacuação*, talvez para o caso de nos caír mal a comida. Mas estava tudo óptimo!

Mais tarde, no bar do Ponta Delgada, o *Xf* continuava a atravessar o rio embrulhado no desafio dos fios. Deixei-o porque, embora a minha intuição matemática me tivesse dito que eram só necessárias 2 viagens para resolver o problema, não quis deprimi-lo, quando às 2:30 da manhã ele se debatia para as reduzir de 7 para 5.

Sábado às 8:10 estavámos na paragem da camioneta para chegar (à tangente, diga-se) ao nosso Grupo de Trabalho. A camioneta não veio. Chegámos atrasados, ofegantes, molhados e despenteados perante a metade dos inscritos que teimou em ser pontual (... de salientar a pontualidade com que em geral as sessões funcionaram). Tratava-se do uso do Equation Editor, um utilitário do Winword 2.0 para processar símbolos e com isso produzir documentos com boa qualidade gráfica, importantes para a compreensão e motivação dos alunos.

Sábado o dia esteve triste.

Sessão de encerramento. Como sempre, o prazer de ouvir o Eduardo Veloso.

O Profmat para o ano é em Leiria. Lamentei-me. Não gosto de pinhais, apesar de admirar muito o Núcleo de lá. Mas o Nunes tem razão: se o local não for tão cativante, talvez haja mais Encontro. Que este ano também **houve**, note-se!

Os agradecimentos e as despedidas. Nunca suficientes os primeiros e mal aceites as últimas.

Domingo o tempo estava glorioso, feito de propósito para não querermos vir embora. Tomei banho nas águas férreas.

Foi com o cabelo a cheirar a ferrugem e com os dois braços ocupados por sacos e sacas (de um dos quais o cheirinho a ananás tentava compensar a presença forte dos queijos, e de outro emergiam três hortênsias e dois antúrios que teimei em trazer para pôr na campa da minha mãe), que apanhei uma chuvada ao descer as escadas do avião na capital. Era meia-noite e meia. Só tinha transporte para o Porto às 7:20. *It's good to be back home.*

Na manhã de 1 de Novembro reencontrei-me na estação de Gaia com a minha pequena família. Tinha corrido tudo bem cá e lá.

Pediram-me impressões e fiz um relato.

A síntese está a negro no 2º parágrafo.

Nas entrelinhas gostaria que se lesse o entusiasmo, o profissionalismo e a qualidade que reconheço nas actividades da APM, as quais, apesar do tom que me caracteriza, respeito e procuro seguir.

N.B.: O *Xf* leu e censurou o texto. Coisas de *Xf*.

Achou que quem ler isto pode pensar que me baldei. Ele, eu, e mais uns poucos, sabemos que não. Paciência...

Susana Diego
Projecto Minerva
CAL de Barcelos

Uma experiência de resolução de problemas no 7º ano de escolaridade

Joana Porfírio, Olinda Semedo e Teresa Olga Albuquerque

Ao longo do ano procurámos valorizar um processo de ensino-aprendizagem centrado na exploração de situações problemáticas e na resolução de problemas em que a calculadora foi encarada como um importante instrumento facilitador deste processo.

Organização e desenvolvimento da experiência

Durante o ano lectivo de 1991/92 desenvolvemos uma experiência de trabalho com duas turmas de 7º ano de escolaridade, uma da Escola Secundária do Barreiro e outra da Escola Secundária do Alto do Seixalinho, também no Barreiro.

A definição da proposta pedagógica partiu da aceitação de alguns princípios gerais. Destacamos os seguintes:

• A resolução de problemas é importante na formação matemática dos alunos.

• O ensino-aprendizagem da Matemática deve decorrer num ambiente de trabalho que estimule o aluno a envolver-se activamente na construção do seu conhecimento.

• A calculadora pode ser um instrumento importante na construção de conceitos e na resolução de problemas.

• O trabalho em pequenos grupos, na medida em que permite o desenvolvimento de capacidades como argumentar e criticar, expôr as suas ideias e ouvir as dos seus colegas, comparar estratégias e soluções, é uma experiência que deve ser proporcionada aos alunos.

• Na exploração de situações que favoreçam uma participação activa dos alunos é importante dar tempo para que estes possam desenvolver as actividades que lhes são propostas e reflectir sobre elas.

Em relação ao trabalho em torno da resolução de problemas, procurámos:

• apresentar problemas que considerávamos desafiadores;

• questionar os alunos, enquanto resolviam os problemas em grupo, no sentido de os ajudar a explicitar e organizar o modo como pensavam;

• analisar e comparar estratégias de resolução e possíveis extensões do problema.

A exploração das várias potencialidades da calculadora foi sendo feita à medida que o trabalho realizado ao longo das aulas o justificava.

Ao longo do ano, a distribuição semanal das horas lectivas foi de 2 + 1 + 1. De uma forma geral, procurámos combinar dois tipos de aulas: (a) aulas em que os alunos trabalhavam em grupos de 4 ou 5 na resolução das fichas de trabalho que lhes eram propostas e que geralmente ocupavam as aulas de duas horas; (b) aulas em que a partir das actividades exploradas em grupo, se formalizavam conceitos e regras, organizavam sínteses e apresentavam exercícios de prática. Em todas as aulas cada aluno dispunha de uma calculadora não científica.

Numa primeira fase de trabalho com os alunos, que decorreu de Setembro a Dezembro, procurámos sobretudo que os alunos desenvolvessem hábitos de trabalho em grupo e se integrassem numa perspectiva de ensino-aprendizagem em que o professor é sobretudo um organizador de actividades e em que os alunos participam activamente na construção do seu saber. Numa segunda fase, que decorreu a partir de Janeiro procurou-se desenvolver, de uma forma mais sistemática, a capacidade de resolução de problemas.

O tipo de actividades introduzidas

Todas as actividades apresentadas aos alunos envolveram, de uma forma geral, a resolução de problemas. No entanto, podem ser agrupadas em dois tipos:

(a) actividades cuja exploração permitia a introdução ou aprofundamento de conteúdos do programa e (b) actividades cuja ligação com os conteúdos do programa não era tão directa. Como exemplo das actividadesde de tipo (a) apresentamos a ficha "Às voltas com o futebol ..." e como exemplo das actividades de tipo (b) apresentamos a ficha "Descontos e impostos".

Às voltas com o futebol...

1. Observa a tabela que representa a classificação dos clubes da I divisão de futebol.

Nº	Clube	Pontos	Golos marcados	Golos sofridos
1	Porto	24	20	1
2	Benfica	24	26	10
3	Guimarães	21	25	17
4	Sporting	21	23	10
5	Boavista	20	17	12
6	Chaves	16	17	17
7	Estoril	16	14	15
8	Beira-Mar	16	13	14
9	Marítimo	15	14	15
10	Gil Vicente	15	10	12
11	Farense	14	16	18
12	Penafiel	13	11	18
13	Famalicão	13	14	24
14	Salgueiros	13	11	17
15	Braga	12	15	21
16	P. Ferreira	12	13	19
17	U. Madeira	11	10	23
18	Torreense	10	16	22

a) Apresenta uma hipótese dos resultados obtidos pelo Farense em cada um dos 15 jogos que já realizou.

b) Adiciona a coluna dos golos marcados e a coluna dos golos sofridos. Como explicas a relação que encontraste nas duas somas?

c) Chama-se "goal average" à diferença entre os golos marcados e os golos sofridos por cada equipa. Por exemplo, o "goal average" do Porto é 19 e o do Gil Vicente é -2. Calcula o "goal average" de todas as restantes equipas.

d) Coloca as equipas por ordem decrescente segundo o "goal average" de cada uma.

2. Imagina que estás a organizar um torneio de futebol entre quatro turmas do 7º ano de tal modo que cada turma jogue uma vez com cada uma das restantes.

a) Quantos jogos terias que organizar?

b) Agora tens que escrever um artigo sobre o torneio, para o jornal da escola. Não te esqueças de indicar o número de jogos que se realizaram e de incluir um quadro semelhante ao anterior, que resuma os resultados obtidos por cada equipa.

O desenrolar destas actividades

A observação dos alunos e a análise das resoluções das fichas apresentadas por cada grupo, forneceram-nos um conjunto de dados que nos permitiram ir traçando o percurso dos alunos ao longo da experiência.

A título de exemplo vamos descrever a forma como decorreram as aulas em que os alunos resolveram as duas fichas apresentadas.

(a) "Às voltas com o futebol ..."

A primeira reacção da maioria dos alunos a esta ficha foi de grande entusiasmo. A primeira questão não ofereceu dificuldades de maior e pareceu desempenhar um papel importante para os alunos compreenderem a forma como o quadro apresentado na ficha tinha sido construído. Um aspecto que nos pareceu interessante foi o facto de vários grupos não se contentarem em apresentar uma solução mas terem também em conta ela ser ou não plausível. Por exemplo, a solução que vários grupos encontraram com bastante facilidade, de ter empatado todos os jogos e perdido um, foi imediatamente rejeitada por ser pouco provável que tal se pudesse verificar.

Na segunda questão, a justificação da relação encontrada não foi imediata para os alunos. A dificuldade da maioria dos alunos esteve sobretudo no facto de pensarem que a igualdade entre o número total de golos marcados e sofridos poderia ser casual. Só quando lhes foi perguntado se seria possível que estes valores não fossem iguais, os alunos, ao começarem a averiguar se tal poderia acontecer, foram começando a desconfiar de que a relação talvez se verificasse mesmo e do porquê da igualdade. Os caminhos seguidos pelos grupos foram diferentes. Uns tiveram necessidade de começar a acrescentar resultados de mais jogos, outros começaram a construir um quadro idêntico ao apresentado mas com poucas equipas. Assim, a maioria dos grupos conseguiu perceber a situação a partir do momento em que actuou sobre ela.

Nas duas questões seguintes, surgiram pela primeira vez números negativos e a ordenação em **Z**. Os alunos mostraram um grande desembaraço na sua resolução não tendo constituído nenhum obstáculo o facto de nunca terem trabalhado com números negativos.

No problema sobre o torneio de futebol havia três aspectos em causa: (1) perceber o número de jogos que se realizavam, (2) elaborar correctamente um quadro em que constassem as pontuações, os golos marcados e sofridos por cada equipa; (3) organizar um ensaio que pudesse ser uma notícia, a publicar no jornal da escola, sobre o torneio de futebol e em que justificassem as conclusões a que tinham chegado em (1) e (2).

Ao discutirem o número de jogos que se realizaram, a primeira reacção de muitos dos alunos foi ainda de indicarem um número que aparentemente não tinha sido objecto de grande reflexão. Mas ao discutirem os diferentes valores sugeridos no grupo, começaram a organizar melhor o que pensaram e a perceber se tinham ou não cometido algum erro. Assim, na maioria dos grupos, para perceberem o número de jogos realizados, os alunos, depois de atribuírem letras às turmas que participaram no torneio, elaboram um processo de contagem do tipo:

"A - B; A - C; A - D
B - C; B - D
C - D"

Alguns grupos generalizaram rapidamente este problema para situações em que o número de equipas era superior.

Para elaborarem o quadro com as pontuações e com os golos marcados e sofridos, alguns alunos decidiram quais os resultados obtidos em cada jogo e a partir daqui construiram o quadro. Outros seguiram um processo mais rápido. Assim, sem pensarem nos resultados de cada jogo, decidiram de uma forma coerente o número de vitórias, empates e derrotas de cada equipa e calcularam a respectiva pontuação. Depois, ao construírem o quadro, tiveram em conta as conclusões a que tinham chegado anteriormente (a soma da coluna dos golos marcados e dos golos sofridos é igual e há uma certa lógica na ordenação das equipas consoante o valor do seu *goal average*).

A elaboração do artigo para o jornal da Escola suscitou muitas dúvidas nos alunos. No entanto, como este aspecto estava integrado num trabalho que se prolongou por algum tempo não o iremos desenvolver aqui.

(b) "Descontos e impostos"

Incentivados a darem um palpite sobre a solução do problema, a escolha da melhor hipótese diferiu de grupo para grupo. Para uns, é preferível calcular primeiro o imposto porque, como diziam:

"Se calcularmos primeiro o imposto o desconto é maior porque é calculado sobre uma quantia maior e então pagamos menos."

Outros, pelo contrário, defenderam que:

"É melhor calcular primeiro o desconto porque assim paga-se menos imposto."

É com grande entusiasmo que os alunos vão verificar se a sua ideia inicial está correcta. Não se dão por satisfeitos com os resultados da primeira experiência que realizam. Como comenta um aluno:

"Pode ser que só com 1000$00 é que dê igual."

Com o trabalho bastante facilitado pela utilização da calculadora, foi visível a preocupação em realizar bastantes experiências antes de apresentar a conclusão a que chegavam. Só então, a evidência das experiências feitas foi tomada como lei.

Foi também interessante verificar que um grupo analisou o problema com outras percentagens de impostos e de descontos. Um outro grupo, por iniciativa própria, verificou que para o comerciante já não era indiferente a ordem por que se calculava o imposto e o desconto.

Na discussão final numa turma foi levantada a questão da demonstração. Numa primeira fase foi analisada a pergunta, que tinha sido colocada por um grupo: "E se as percentagens de imposto e de desconto, fossem outras?". Perante este desafio, os alunos, entusiasmados, fizeram várias experiências que iam relatando oralmente. Foi então colocada a questão: "Mas como poderemos ter a certeza de que vai ser sempre indiferente?" Os alunos perceberam a ideia e concordaram que apenas poderiam dizer que parecia que a resposta que tinham dado era correcta. A partir desta discussão e dialogando com os alunos chegou-se à demonstração.

Algumas opiniões dos alunos

Com o objectivo de recolher as opiniões dos alunos acerca da experiência vivida, elaborámos um inquérito que focou um conjunto de aspectos relativos à avaliação do trabalho realizado.

Dos 47 alunos das duas turmas, 31 realçaram a relação da resolução de problemas com a compreensão da restante matéria. Para estes alunos esta é uma

Descontos e impostos

Numa loja de artigos de vestuário, tem-se 20% de desconto, mas é necessário pagar um imposto de venda de 17%.

a) O que é preferível calcular primeiro, o desconto ou o imposto? Porquê?

b) Imagina agora que o preço do artigo que compraste é de 1000$00.

- Quanto pagarás se o vendedor fizer primeiro o desconto?
- E se o vendedor aplicar primeiro o imposto?

c) Comenta os resultados que obtiveste e compara-os com a tua resposta inicial.

d) Tenta com outros valores à tua escolha. Que conclusões tiras?

maneira diferente e melhor de lidar com a Matemática pois percebem com mais facilidade alguns conteúdos e aprendem a pensar nas questões que lhes são apresentadas. Incluídas neste grupo foram obtidas por exemplo as seguintes respostas:

"A resolução de problemas ajuda-nos a compreender a matéria com grande facilidade. Os problemas que resolvíamos nas aulas de duas horas preparavam-nos para perceber melhor o trabalho que fazíamos nas aulas individuais. Também nos ajudou a resolver problemas que podem aparecer na vida corrente."

"Esta experiência na resolução de problemas ajudou a perceber as questões da matéria com grande facilidade. Foi uma maneira diferente de aprender a lidar com a Matemática."

"Temos que pensar bem no problema e arranjar maneiras para o resolver e isso faz com que a gente desenvolva o raciocínio e aprenda a pensar."

"Não é importante só saber fazer cálculos. Podemos usar a calculadora e temos tempo para pensar. Por isso a resolução de problemas ajuda a saber pensar e isso é importante."

"Com a resolução de problemas desenvolvemos o raciocínio e os nossos conhecimentos. Ficamos preparados para saber pensar nas coisas novas que nos aparecem."

Para 16 alunos a resolução de problemas é sobretudo motivadora. Como alguns referem:

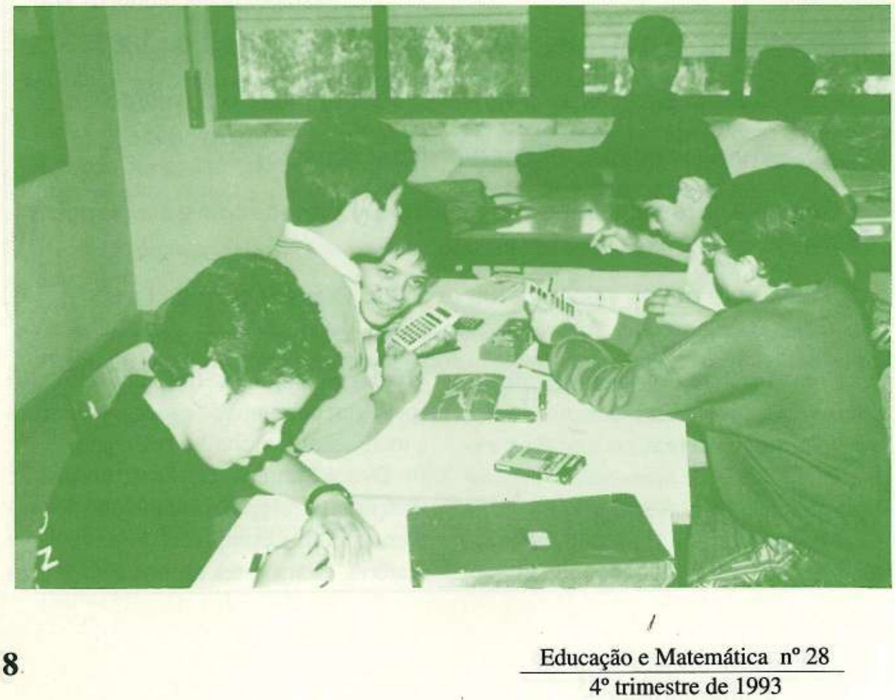
"Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar. Temos que pensar bem no problema e podemos experimentar várias maneiras para resolver o problema. Isso faz com que a gente se entusiasme pelo trabalho que vai fazendo."

"Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar porque não temos só que fazer contas e podemos pensar em problemas do nosso dia a dia."

"Apesar de para mim ter sido um bocado difícil fiquei entusiasmada porque tive que pensar em problemas que eram divertidos. Por isso fiquei mais interessada na matéria e gostava de trabalhar nas aulas."

Estes alunos realçaram bem o interesse que esta actividade lhes despertou. A ideia de que a resolução de problemas é interessante e de que proporciona um grande envolvimento com o trabalho, está bem patente nas suas afirmações.

Nas respostas incluídas em qualquer das categorias é visível uma ideia, que a experiência em torno da resolução de problemas parece ter realçado: saber Matemática não é só saber fazer cálculos. Expressões como "não era só preciso saber fazer contas" ou "era muito diferente porque não bastava saber só fazer cálculos", foram incluídas nas respostas dos alunos com bastante frequência. As respostas obtidas e a observação dos alunos, permitiram verificar que esta ideia correspondeu uma profunda mudança ao nível do que os alunos pensavam acerca do que era saber Matemática e que a resolução de problemas foi um aspecto determinante nessa mudança.



Conclusões

A experiência realizada nas duas turmas forneceu dados que permitem analisar os percursos dos alunos.

Os alunos evoluíram significativamente em relação à capacidade de resolver problemas. Passaram a conseguir resolver os problemas numa atitude de crescente autonomia.

Houve uma clara evolução em relação à persistência na resolução de um problema. Os alunos desenvolveram confiança nas suas capacidades não desistindo de trabalhar perante uma primeira tentativa frustrada. Em relação a este aspecto notou-se mesmo um corte radical com a atitude por eles inicialmente evidenciada. Os alunos encaravam os problemas como um desafio que eram capazes de ultrapassar.

Também foi possível observar a forma como a calculadora facilitou a persistência na resolução de problemas. Aliviados do peso dos cálculos, os alunos "agarravam-se" à calculadora, não desistindo perante as tentativas frustradas.

Pode-se pois concluir que, em relação a muitos dos aspectos relacionados com a resolução de problemas, os alunos evoluiram significativamente. Mas é importante realçar que esta evolução foi lenta e implicou muito trabalho e envolvimento. Vários autores consideram que para que uma dada tarefa constitua um problema para um dado indivíduo, este deve empenhar-se activamente

(continua na página 14)

A resolução de problemas como elemento integrador das áreas do 1º ciclo

Elvira Ferreira e Isabel Azevedo Rocha

Uma boa capacidade de resolução de problemas não pode deixar de ter efeitos positivos na capacidade de usar e aplicar a matemática e no desenvolvimento do raciocínio, dando mais poder matemático aos alunos, tornando-os mais confiantes nas suas próprias capacidades.

Os problemas podem desempenhar diferentes funções, podendo constituir um meio de construção e aplicação de conceitos e um meio de consolidação e desenvolvimento do conhecimento matemático de cada aluno, contribuindo, assim, para criar hábitos de pensamento matemático.

A resolução de um problema, constituindo um espaço de interacção e discussão entre os alunos e o professor, permite que os alunos, ao comunicarem entre si as suas ideias, se familiarizem com a linguagem matemática, consolidando o seu pensamento matemático.

A perspectiva da resolução de problemas como um contexto facilitador para atingir outros objectivos curriculares, para explorar novos conceitos matemáticos ou não, é uma perspectiva que deve ser desenvolvida e explorada, nomeadamente no 1º ciclo, em que o ensino de todas as áreas disciplinares é tarefa do mesmo professor.

Com base nestes pressupostos como pode o professor do 1º ciclo desenvolver, na sua aula, actividades que atinjam esses objectivos?

Desde sempre o Manual Escolar tem sido o recurso privilegiado de professores e alunos para o ensino/aprendizagem da Matemática. Será que as actividades propostas pelos Manuais têm em conta as linhas orientadoras dos novos programas, nos quais a resolução de problemas aparece como uma actividade a desenvolver, como eixo orientador e integrador das diversas áreas do currículo e como actividade fundamental do ensino da Matemática?

Ao analisarmos alguns Manuais do 1º ciclo elaborados de acordo com os novos programas, constatamos que os mesmos contêm uma perspectiva única da resolução de problemas, que obedece à fórmula: identificar a operação a realizar e executar o cálculo. São exercícios repetitivos (problemas de palavras), que servem para executar uma dada técnica.

Será que com o treino se constroem conceitos e conhecimento matemático? Segundo Vygotsky (1991), a formação de conceitos é um processo criativo e não um processo mecânico e passivo. Afirma também que um conceito é um acto real e complexo de pensamento que não pode ser adquirido por meio de treino, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver atingido o nível necessário.

De facto, numa perspectiva construtivista do saber outros aspectos como as capacidades e conhecimentos de que dispõe o aluno, seus valores e interesses, tornam-se relevantes se se pretende um currículo organizado em torno da resolução de problemas.

No percurso histórico sobre resolução de problemas apresentado por Stanic e Kilpatrick (1989), confirma-se que, até Polya, nunca se pensou muito a sério nos métodos que podem ser ensinados para se aprender a resolver problemas, ou seja, como se pode ajudar alguém a tornar-se mais competente na resolução de problemas.

Para Stanic e Kilpatrick (1989), Polya e Dewey são marcos fundamentais na resolução de problemas e qualquer um deu grande ênfase ao papel fundamental do professor no ensino à volta da resolução de problemas. É ainda salientada a necessidade de se ter em atenção o contexto do problema, de modo a que seja signifivativo em termos de experiência não escolar do aluno. O que também se enquadra na perspectiva piagetiana de que o professor na formulação dos problemas deve recorrer aos aspectos da vida dos alunos fora da escola (Schewebel e Raph, 1976; Piaget, 1978). Também Boero (1992), concluiu que o contexto pode ter efeitos no comportamento cognitivo dos alunos, tendo notado grandes diferenças entre os alunos quando resolviam problemas contextualizados, ou seja, referidos a áreas de interesse identificadas pelos alunos e que tinham a ver com as suas experiências extra escola. Atribui também grande importância ao papel do professor na resolução de problemas contextualizados:

• na selecção dos problemas (dentro dum contexto);

• na comparação da estratégias utilizadas pelos alunos, relativamente às finalidades que se pretendem atingir;

• na construção de uma consciência forte e precisa, na aula, do que significa resolver um problema, associada ao realismo das situações problemáticas.

Nos últimos dois anos lectivos temos desenvolvido algum trabalho com alunos do 1ºciclo, assente nestes pressupostos e, como tal, não recorrendo aos Manuais Escolares existentes no mercado.

Das várias actividades desenvolvidas destacamos uma, realizada no 4ºano de escolaridade, com a qual se pretendiam atingir vários objectivos. Anualmente, realiza-se na Marinha Grande a Feira das Actividades Económicas (FAE) e aproveitou-se esse acontecimento para:

- desenvolver a expressão escrita (elaboração de questionários);

- estudar o meio (aprofundar conhecimentos sobre as actividades económicas da região, sobre as profissões,...);

- recolher dados e proceder ao seu tratamento estatístico;

- reflectir sobre os dados obtidos, relacionando-os com a situação social e económica do concelho (por exemplo, verificou-se que a profissão de vidreiro é uma profissão em crise na Marinha Grande).

Os alunos fizeram uma visita à Feira e recolheram os dados previamente seleccionados. Com base nalguns desses dados foi resolvida uma ficha (fig. 1) em que os alunos tiveram de construir e interpretar gráficos de barras, fazer estimativas, justificando a estratégia utilizada, recorrer aos algoritmos e técnicas de cálculo mental e utilizaram a calculadora. Ao lado apresenta-se a resolução feita por uma aluna (fig. 2).

Quanto a nós, a resolução de situações problemáticas, nomeadamente no 1º ciclo, pode e deve ser um elemento integrador das diversas áreas do currículo, ajudando as crianças a melhor compreenderem e interpretarem o mundo em que vivem.

Estatística da F.A.E. 92

Com base nos questionários verificaram-se as seguintes entradas:

3ª feira —— 4930	6ª feira —— 5400
4ª feira —— 4700	sábado —— 9760
5ª feira —— 5050	domingo —— 11300

1 - Com estes dados constrói um gráfico de barras.
2 - Estima o número de pessoas que visitaram a Feira.
3 - Como realizaste essa estimativa?
4 - Notas alguma diferença, nas visitas, ao longo da semana? Qual? Porquê?
5 - O preço de cada bilhete de entrada na Feira era de 250$00. Foram vendidos dezanove mil bilhetes. Calcula quanto terão recebido os organizadores.
6 - Toda a gente que entrou pagou?
7 - Quantas pessoas terão entrado sem pagar? Porquê?

Fig. 1. Ficha de trabalho sobre a Feira das Actividades Económicas

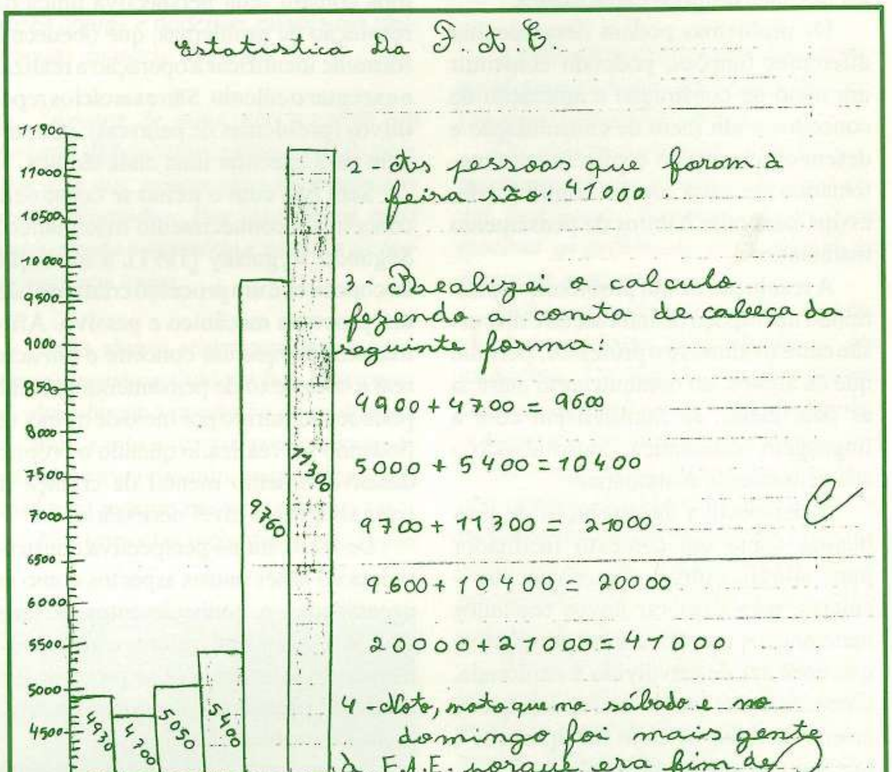


Fig. 2. A resolução apresentada pela aluna Joana Eduarda

Referências bibliográficas

Boero, P. (1992). The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills in the school environment. In J. Ponte, J. F. Matos e D. Fernandes (1992), *Mathematical Problem Solving and Information Technologies: Research in Contexts of Practice.* Berlim: Springer.

Piaget, Jean (1978). *Para onde vai a educação?* Lisboa: Livros Horizonte.

Schewebel, M. & Raph, J. (1976). *Piaget à l'école.* Paris: Denoel/Gouthier.

Stanic, M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles e E. Silver (Eds.): *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* Hillsdale, NJ: Lawrencw Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1991). *Pensamento e Linguagem.* Tradução do original de Jeferson Luís Camargo, 3ª edição. São Paulo: Martins Fontes.

Elvira Ferreira, Esc. Prim. Moita
Isabel Rocha, E.S.E. Leiria

Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens?(II)*

Evelyne Barbin

"Se soubesse para que serve o teorema de Pitágoras, como o inventaram, eu poderia aprendê-lo, mas assim desconfio"[1]
Virginie, aluna do 10º ano (Naudin, 1990)

No ensino francês da Matemática, um lugar importante é dado à demonstração: muitos professores consideram que a demonstração constitui a entrada no mundo da matemática. No entanto, muitos alunos consideram que a demonstração marca o início do seu insucesso na disciplina.

Concepções epistemológicas subjacentes ao ensino da demonstração

Todo o ensino da Matemática assenta sobre concepções epistemológicas, isto é, sobre concepções do saber matemático, muitas vezes implícitas. Destas, quais são as que dizem respeito ao ensino da demonstração? Para estudar esta questão reportar-nos-emos a alguns exemplos de ensino, desde o ensino tradicional ao ensino por situações problema.

É inutil dar aqui grandes explicações sobre o que se entende por ensino tradicional, visto que é o ensino que a maior parte dos professores de hoje conheceu quando eram estudantes. No ensino tradicional não há propriamente aprendizagem da demonstração. Para mostrar aos alunos o que é uma demonstração, o professor escreve demonstrações no quadro. Mostra como apresentar à esquerda as hipóteses e à direita as conclusões. A demonstração consiste em ir de umas a outras, através de um raciocínio dedutivo, citando os teoremas utilizados ou especificando-os por um código — "segundo a proposição V sobre as paralelas..." —, e mostrando bem a que objectos são aplicados os teoremas — "os segmentos AB e CD são paralelos por hipótese, e se a recta EF os intersecta então..." Em seguida os alunos são convidados a demonstrar. Aqui as coisas complicam-se: como encontrar a demonstração? O professor dá uma solução, mas como é que ele a achou?

O processo está escondido. Escondido, ao ponto de muitos alunos não compreenderem qual o sentido que pode ter este texto, de eles não imaginarem, um só instante, que para demonstrar é necessário pensar, experimentar, rasurar e enganar-se. "Pensar é ir de erro em erro. (...) O que faz com que a Matemática seja uma prova temível, é que ela não suaviza o erro" escreve Alain, como se ele também nunca tivesse suspeitado que fazer Matemática é pensar[2]. Assim muitos alunos retiram-se deste jogo do qual não compreendem o sentido mesmo quando lhes damos as regras. Eles escreverão à esquerda as hipóteses e à direita as conclusões o que lhes assegurará dois pontos no trabalho. Alguns mais obstinados escreverão um texto que parecerá uma demonstração... e que deixará o professor estupefacto.

No ensino tradicional a demonstração é claramente concebida como um produto. A racionalidade que pressupõe a produção de uma demonstração está já supostamente presente na cabeça dos alunos, visto que não se vê como ele a poderá adquirir por mimetismo olhando o professor a escrever as demonstrações (concepção idealista). Pode, esta demonstração, assegurar a veracidade das conclusões? Ela convence, sem dúvida, os alunos que compreendem que se trata de estabelecer verdades. A maior parte não será esclarecida nem interessada, visto que o seu insucesso lhes fez crer que de qualquer forma "a Matemática não é

* Segunda parte do artigo com o mesmo título cuja publicação foi iniciada no número 27 da revista. Ver outras notas no fim do artigo.

para eles".

Este quadro poderá parecer muito negro, mas, apesar de tudo, ainda há alunos que conseguem escrever demonstrações com o ensino tradicional. Muitos professores constactam a ineficácia deste ensino e perguntam-se, como os colegas da APMEP: "como aprendemos as demonstrações? Geralmente fazemos demonstrações perante os alunos, e pedimos-lhes seguidamente que as façam de forma semelhante. Cada um sabe as dificuldades encontradas"[3].

Desde há alguns anos, têm sido desenvolvidas investigações, em particular nos IREM, para suprir as deficiências do ensino tradicional e questionar sobre o que deveria ser a aprendizagem da demonstração. O progresso é claro no seu objectivo: trata-se de ensinar os alunos a demonstrar.

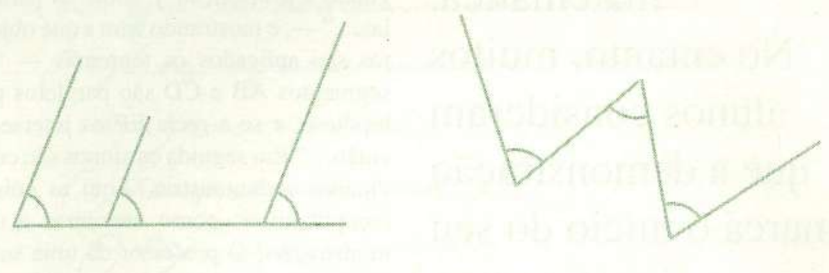
Os trabalhos de Dominique Gaud e de Jean-Paul Guichard inscrevem-se nesta perspectiva: eles escrevem que "se aprende a demonstrar" e que "o aluno aprende fazendo e não olhando como se faz". Estes colegas consideram que é necessário separar, na aprendizagem, dois momentos, o da investigação e o da redacção de uma demonstração, para responder ao que eles imaginam ser a dupla dificuldade da demonstração, a lógica e a redacção[4]. Eles atribuem grande importância aos métodos de demonstração privilegiando certas formas de raciocínio dedutivo. A explicitação dos métodos na aula, leva-os a fazer da demonstração um objecto de ensino. Como notam A. L. Mesquita e J.C. Rauscher, a metodologia visa sobretudo "os alunos que tinham já compreendido de que é que se trata numa demonstração"[5]. Dir-se-ia que ela constitui uma ajuda para os alunos que já compreenderam o sentido de uma demonstração e que têm um modo de conhecer os objectos geométricos capaz de um processo dedutivo. Apesar desta abordagem se concentrar no processo de demonstração ela não se apoia numa concepção construtivista, nem responde à questão do sentido da demonstração.

Opondo-se a estes seus colegas Nicolas Balacheff, investigador do IMAG de Grenoble, escreve: "é frequente, por exemplo, em situação escolar, considerar a redacção da solução de um problema fora da resolução, e isto não nos parece pertinente. Com efeito (...) redigir a solução de um problema conduz à sua análise e portanto a um eventual pôr em causa; a formulação está associada à administração da prova"[6]. Esta concepção, que toma em conta o sentido que os alunos podem ter da demonstração, é fundamental no método das narrações de investigação proposto pelo IREM de Montpellier.

A questão do sentido da demonstração é central nas investigações de Nicolas Balacheff[7]. Este investigador elaborou uma sequência didáctica para que os alunos do 8º ano "que ainda não estudaram a noção de demonstração, possam formular uma conjectura e considerar o problema de fornecer a prova"[8]. Esta sequência respeita ao teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo.

A sequência didáctica é composta de três actividades que resumiremos aqui. Na primeira actividade, cada aluno traça um triângulo, mede os ângulos e calcula a soma. O professor sistematiza os dados num histograma e pede comentários à turma. Na segunda actividade, o professor dá aos alunos o mesmo triângulo, cada aluno formula uma aposta, mede os ângulos, calcula a soma e comenta a diferença entre esta e a aposta. O professor elabora um histograma e pede comentários. Na terceira actividade, o professor entrega aos alunos uma cópia com os mesmos três ângulos — dois grandes, um pequeno, um baixo e um ponteagudo — cada aluno faz uma aposta, mede os ângulos, calcula a soma e finalmente o professor recolhe os dados e pede comentários. O professor deve manter-se afastado, a fim de que o problema seja devolvido à turma e que se instaure um debate sócio-cognitivo.

Esta sequência é elaborada com a hipótese de que "a desqualificação da medição como meio de conhecer esta soma, legitimará a exigência de provas intelectuais da conjectura pretendida". Ela ancorava-se pois, numa concepção realista, onde a demonstração vem substituir uma incerteza das medições. Não provém, a nosso ver, de uma concepção construtivista, na medida em que a situação proposta aos alunos não toma lugar numa problemática suficientemente rica para conduzir à construção da noção de ângulo. Ora o ângulo que é sempre o mesmo, seja qual for o comprimento dos seus lados, é uma noção difícil que os alunos do 8º ano dominam dificilmente. Deverão então despoletar-se "perturbações epistemológicas" no desenvolvimento da sequência. É efectivamente o caso da primeira turma, onde a sequência de aprendizagem é experimentada. Com efeito os alunos desenharam os triângulos demasiado pequenos e o professor sentiu-se na obrigação de intervir. "Se não vêm bem prolonguem os lados", "é sempre o mesmo ângulo, não é este comprimento aqui que tu vais medir Karelle, é a abertura do ângulo". Para evitar estas perturbações, o segundo professor que experimenta a sequência informa inicialmente os alunos de que é preciso traçar um triângulo "suficientemente grande porque ides medir os ângulos do triângulo, e é necessário que ele não seja demasiado pequeno". Neste momento a questão epistemológica do ângulo está curto-circuitada.



uma escada

uma serra

fig. 1

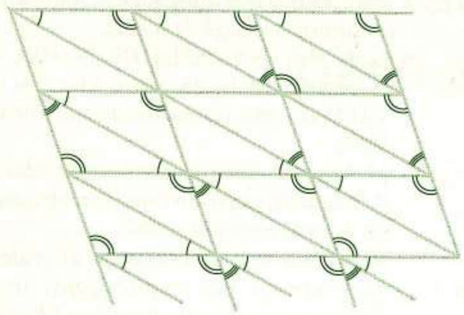


fig. 2

Nenhuma das duas turmas se empenhou num "processo de validação". Na primeira turma os alunos concordaram em dizer que a soma dos ângulos de um triangulo faz mais ou menos 180°. O que é exacto: por mais triângulos desenhados com cuidado e utilizado um bom transferidor não se pode dizer mais. A demonstração da soma dos ângulos de um triângulo envolve um outro tipo de saber, ela não é uma questão de soma das medidas numéricas mas de comparação geométrica de grandezas: a justaposição de três ângulos igual à justaposição de dois ângulos rectos[9]. Na segunda turma, os alunos estão habituados às regras do debate sócio-cognitivo e põem-se logo de acordo em dizer que a soma dos ângulos de um triângulo é de 180°. Assim, a ideia de demonstração destinada a convencer cada um da certeza do resultado falha, visto que cada um está convencido à priori... e tenta fazer batota nas medições.

Será que esta sequência didáctica se centra no processo de produção da demonstração? Para responder afirmativamente seria necessário saber de que forma medir a soma dos ângulos de vários triângulos permite induzir um raciocínio. A passagem à demonstração, como refere Nicolas Balacheff noutro local, "provém de uma construção simultaneamente de conhecimentos e da racionalidade"[10]. Será que o debate sócio-cognitivo pode permitir esta construção? Num artigo recente, Nicolas Balacheff indica certas limitações para este debate, em particular com jovens alunos, mas, ele pensa que a solução "está no estudo e na melhor compreensão do fenómeno do contracto didáctico, da condição da sua negociação, muitas vezes implícita, e da natureza do seu resultado, a devolução da responsabilidade da aprendizagem aos alunos"[11]. Será então melhorando o *sócio* do *sócio-cognitivo* que se poderá obter um melhor ensino da demonstração? A sequência descrita acima remete-nos antes para o aprofundamento do *cognitivo*. Para que haja debate cognitivo é necessário o confronto de conhecimentos. Ora neste exemplo os alunos são sobretudo levados a defender a qualidade das suas medições, mas muito pouco as suas concepções sobre o que é um ângulo, ou o que é que se passa quando se fecha um ângulo.

Porquê demonstrar? O interesse em possuir uma demonstração sobre a soma dos ângulos de um triângulo reside sobretudo, na sequência proposta, em poder pôr toda a turma de acordo sobre um resultado. Mas não é por esta última razão que os homens construíram conceitos e saberes matemáticos. O primeiro objectivo do matemático é o de resolver os problemas, como lembra Serge Lang.

Abordemos um outro exemplo de ensino através do ensino por situações-problema. Devemos rapidamente definir este termo. Trata-se de um ensino que parte de campos de problemas para construir campos de saberes. Uma situação-problema deve ser ao mesmo tempo uma situação de construção ou de reinvestimento de saberes, e um problema que provoca uma actividade intelectual do aluno.

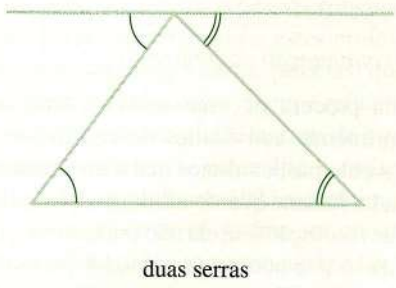
Numa investigação didáctica já antiga, Dina van Hiele propôs um "ensino da geometria apoiado sobre pavimentações" que tinha como objectivos a construção de conceitos da geometria elementar e a construção de uma racionalidade geométrica[12]. Resumiremos brevemente esta sequência didáctica, realizada em 17 sessões e destinada a alunos holandeses de 12 anos. Depois de ter integrado as noções de figuras congruentes — a mesma forma e mesma medida — e de pavimentação, os alunos são convidados a desenhar pavimentações com figuras congruentes a um quadrado, a um losango, a um polígono regular ou irregular, a um triângulo, a um paralelogramo, etc. A pouco e pouco os alunos vão construir e definir conceitos que permitem resolver problemas que surgem: paralelismo de rectas, círculo, ângulos, etc.

Depois de várias sessões, quando os alunos já trabalharam todos os tipos de pavimentações, coloca-se a questão de saber se é possível "prever" as pavimentações realizáveis, isto é, saber com que polígono é possível pavimentar. Estas questões conduzem os alunos a primeiros raciocínios sobre ângulos, e em seguida a introduzir nos seus raciocínios "estruturas geométricas visuais" a que eles chamam de serras e de escadas (fig. 1).

Estas configurações são "estruturas estruturadas", que intervêm nas pavimentações englobando as propriedades de paralelismo e de igualdade de ângulos e que vão tornar-se em "estruturas estruturantes"[13], ou seja, as que permitem gerar e organizar conhecimentos (fig. 2).

A organização dos conhecimentos consiste em construir uma *árvore genealógica* segundo a expressão utilizada por Dina van Hiele. A escada e a serra são os "antepassados" a partir dos quais são deduzidas as proposições.

O valor da soma dos ângulos de um triângulo é uma questão que intervém a propósito do problema dos nós de uma pavimentação triangular (fig. 3). A pertinência deste saber é de assegurar o "bom pegamento" da pavimentação. A questão da sua demonstração coloca-se quando se trata de achar os "antepassados" na "grande árvore da geometria". Sobre esta questão dois alunos propõem logo como demonstração: o primeiro duas serras e o segundo uma escada e



duas serras

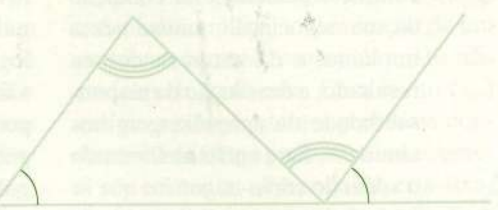
fig. 3

uma serra (fig. 4).

Este ensino apoiado sobre pavimentações provem de uma concepção construtivista, na medida em que se trata de construir ao mesmo tempo conceitos e demonstrações, a partir de um campo de problemas, organizando-se à volta de uma problemática. O sentido da actividade de demonstrar não é convencer mas compreender porquê e como. A demonstração apresenta interesse em si própria num empreendimento de racionalização e de compreensão de uma problemática. O professor explica aos seus alunos que a geometria consiste em fazer uma grande árvore genealógica (são necessários três anos para isso!). Ele explicita e colocando em primeiro plano o processo do saber geométrico.

Uma concepção construtivista do saber implica que demonstrar "se aprende por etapas marcadas, cada uma, não somente por uma troca do universo dos sentidos mas também uma modificação da afinidade do sentido, dos modos de acesso ao conjunto dos referentes"[14]. A leitura da experiência de Dina van Hiele é interessante, pois ela evidencia as etapas do ensino da demonstração. É sobre estas etapas que se deve focar a nossa reflexão de professores.

A perspectiva construtivista necessita de uma reflexão epistemológica aprofundada. Como salienta muito justamente Jean Claude Duperret, ela pressupõe também da parte do professor um encaminhamento, passado o ensino tradicional, que responda igualmente a estratégias de sobrevivência em face desta difícil profissão, até ao ensino construtivista, para o que se torna necessário dominar novas situações.



uma escada e uma serra

fig. 4

Notas

1. in Naudin (1990), *A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir*, D.E.A. Sciences de l'éducation. dir. B. B. Charlot, Paris VIII. No que diz respeito à relação com o saber matemático dos alunos, ver B. Charlot et al, Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM* n° 10.
2. Alain, *Propos sur l'éducation*, p. 76.
3. Relatório do grupo Geometria primeiro ciclo, Journées Nationales de l'APMEP, Grenoble, 1979, citado por N. Balacheff em *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*.
4. D. Gaud e J. P. Gichard, Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, n°4, 1984.
5. A. L. Mesquita e J. C. Rauscher, Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988. .
6. N. Balacheff, op. cit..
7. Ler, por exemplo, N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987.
8. N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de Collège*, vol. 2, p. 361.
9. Sobre a noção de amplitude de um ângulo e sobre a medida das grandezas, ler N. Rouche, *Le sens de la mesure*.
10. Em N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987 .
11. Em N. Balacheff, The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching*.
12. D. Van Hiele-Geldof, DE didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O., tese de doutoramento, Utrecht, 1957.
13. Retomo aqui as expressões utilizadas por P. Bourdieu num outro campo problemático, ver *Le sens pratique*, p. 88.
14. N. Rouche, Prouver? amener à l'évidence ou contrôler des implications, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*.

Referências bibliográficas

Alain (1969). *Propos sur l'éducation*, P.U.F., Paris.

Balacheff (1982). Preuve et démonstration en methématiques au collège, *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 3, n°3.

Balacheff (1987). Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics,* n° 18 .

N. Balacheff (1988). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching,* Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Bourdieu (1980). *Le sens pratique*, Les éditions du Minuit, Paris, 1980.

Charlot et Bautier. Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM*, n° 10.

Gaud et Guichard (1984). Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, n° 4.

Mesquita e Rauscher (1988). Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1.

Naudin (1990). A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir, D. E. A. Sciences de l'éducation, dir. B. Charlot, Paris VIII.

Rouche (1992). *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelas.

Van Hiele (1957), De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van V.H.M.O., tese, Universidade de Utrecht, tradução G.E.M., Louvain la Neuve.

Evelyne Barbin
I.R.E.M. Paris-Nord

(continuação da página 8)

na procura de uma solução. Ora, nas primeiras actividades de resolução de problemas, os alunos mal liam o enunciado, faziam, quanto muito, uma tentativa de resolução e se ela não era bem sucedida (o que acontecia na maior parte dos casos), solicitavam de imediato ajuda. Os alunos esperavam que lhes explicássemos detalhadamente o que deveriam fazer. A passagem para um envolvimento activo, em que persistentemente se realizam e analisam com entusiasmo vários caminhos de resolução de um problema, foi lenta e envolveu um grande dispêndio de tempo.

Finalmente, pareceu-nos particularmente significativo, o facto da maioria dos alunos ter considerado que com as actividades desenvolvidas em torno da resolução de problemas, *aprenderam a pensar.*

Joana Porfírio, ESE de Setúbal
Olinda Semedo, E. S. Alto do Seixalinho
Teresa O. Albuquerque, E. S. do Barreiro

Experimentadores propõem 5+5+5 horas para a Matemática do Secundário

Iolanda Vasconcelos Lima
Lucília Ramalheira

À disciplina de Matemática no Ensino Secundário tem de ser atribuída uma carga horária de, pelo menos, cinco horas semanais em cada um dos três anos. São desta opinião professores de Matemática, experimentadores e acompanhantes, delegados das escolas da experiência, autores de programas e investigadores.

"Sem a Matemática não há desenvolvimento."

"A procura de matemáticos por parte da Indústria é um índice de desenvolvimento de um país."

"Para um país poder avançar, não só do ponto de vista científico, mas também tecnológico, industrial e financeiro, tem de desenvolver uma boa base matemática nos estudos universitários e no ensino secundário."

"A matematização da sociedade é uma característica do mundo moderno e exige um esforço suplementar na implantação da disciplina."

Estas afirmações do presidente dos Estudos Espaciais Franceses e da União Internacional de Matemática, numa entrevista ao "Público" em 1992, não se reflectem nos novos planos curriculares portugueses, o que pode ser muito grave para o futuro dos nossos jovens. Para que Portugal esteja inserido, de facto na C.E. não basta assinar os respectivos acordos; numa área melindrosa como é a Educação, uma falha de hoje pode ter consequências irremediáveis amanhã. É inaceitável a diminuição do número de horas lectivas numa disciplina básica como a Matemática que, com esta reforma, passou de 5 + 5 + 4 horas a 4 + 4 + 4 nos três anos do Ensino Secundário, quando, nos países da Europa, os cursos secundários chegam a ter 4 + 6 + 9 horas de Matemática, como se pode ver pelos extractos dos programas franceses contemporâneos dos nossos novos programas (ver o quadro da página seguinte).

Noutros países a Matemática é acompanhada de uma disciplina de reforço, no 3º ano do ensino secundário, do tipo "Prolongamento de Matemática" como acontece em Espanha.

O novo programa de Matemática para o ensino secundário, oficialmente aprovado em Portugal, tem uma diminuição considerável de conteúdos, técnicas e rotinas em relação ao anterior, embora tenha incluído temas novos e indispensáveis como Estatística e Geometria no Espaço. Para nos aproximarmos dos padrões europeus não é admissível que se reduza mais ainda o conjunto de conhecimentos, nem que se prescinda das metodologias preconizadas, sob pena de grave prejuízo dos alunos e do País.

No "abaixo assinado" enviado pelos Delegados dos professores experimentadores dos novos programas ao Ministro da Educação, ao Sec. de Estado do Ensino Básico e Secundário, e ao Dir. Geral do Departamento do Ensino Secundário, os referidos professores, tanto do Básico como do Secundário, afirmam:

• Qualquer das unidades que compõem o programa é importante para a Educação matemática do aluno pelo que é grave a sua não leccionação;

• Torna-se necessário reconhecer o valor formativo da Matemática no espectro educacional, especialmente nas componentes científica e tecnológicas;

• Não foram leccionadas rubricas do 11º e 12º anos, mesmo recorrendo a 5 horas semanais nesses anos e uma 6ª hora em algumas escolas...

Com estes e outros considerandos, sugeridos por três anos de experimentação dos novos programas, estes professores e algumas outras pessoas que acompanharam a experiência e reflectiram sobre ela, incluindo autores de programas, em reunião de análise e avaliação global, em Julho de 1993, concluiram que os objectivos só podem ser cabalmente alcançados se forem atribuídas 5 + 5 + 5 horas semanais à disciplina de Matemática no Ensino Secundário.

Classes de première S et première E
Programme de mathématiques

Exposé des motifs

1. Les programmes qui suivent conservent, pour l'essentiel, les objectifs et la substance des programmes mis en vigueur en 1982. Cependant, le bilan de trois années de fonctionnement a montré la nécessité de les infléchir dans la même perspective que pour la classe de Seconde. On a eu de double souci de tenir davantage

d) On a voulu alléger la charge globale des capacités à acquerir afin de permettre une meilleure poursuite des objectifs essentiels des différentes parties du programme: on a procédé á quelques allégements ponctuels et on a limité de façon plus stricte le niveau d'approfondissement à donner aux concepts, ainsi que le degré de technicité pour l'étude de certains problémes

Objectifs, programme et commentaire

1. L'horaire de la classe est de six heures hebdomadaires. Il est essentiel d'assurer un bon équilibre entre les différentes parties du programme. En particulier, la géometrie ne doit pas être bloquée en fin d'année.

2. Le texte qui suit est présenté en deux colonnes: à gauche, le programme fixe les connaissances et les capacités exigibles des élèves; à droite, un commentaire précise le sens ou les limites à donner à certaines questions du programme. Les objectifs sont placés en bandeau.

d) En combinatoire, probabilités, statistiques, l'équilibre des contenus a été conçu de manière à mieux prendre en compte l'importance des phénomènes aléatoires dans toutes les sciences: c'est pourquoi les probabilités occupent une place importante dans le programme de terminale D; dans cette même perspective, le langage élémentaire des événements a été introduit en terminales C et E.

Dans les trois classes, l'objectif essentiel est d'initier les élèves à la démarché mathématique propre au calcul des probabilités à travers l'étude de quelques expériences aléatoires simples, toute considération théorique sur les espaces probabilisés et sur les variables aléatoires (qui ne figurent qu'en terminale D) étant hors programme.

En statistique descriptive, les acquis de premiére concernant les séries à une variable doivent étre entretenus. En revanche, malgré leur utilité incontestable, les séries à deux variables ont été retirées du programme dans un souci d'allégement.

Présentation du texte des programmes C, D, E

1. L'horaire des classes terminales C et E est de neuf heures hebdomadaires (8+1); celui de terminale D est de six heures. Il est essentil d'assurer un bon équilibre entre les différentes parties du programme. Le texte qui suit définit les objectifs et précise les connaissances et les capacités exigibles des élèves, mais chaque professeur garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement.

B.O. nº31 - 11 septembre 1986

A proposta 5 + 5 + 5

A conclusão a que chegaram os professores experimentadores, em Julho de 93, não constitui surpresa e era inevitável.

De facto, a redução da carga horária da Matemática nos novos currículos tem sido vivamente contestada por todos os professores da disciplina e muito especialmente pelos das Escolas da experiência. Em todas as reuniões, acções de formação ou encontros de coordenação, os professores envolvidos na experimentação manifestaram a sua preocupação quanto à insuficiência do número de horas.

Sendo reconhecido, a nível europeu e mundial, o importante e insubstituível papel formativo desta disciplina no desenvolvimento do raciocínio e de diversas outras capacidades, esse reconhecimento traduz-se naturalmente num lugar de destaque nos currículos de áreas científicas e tecnológicas e mesmo numa presença significativa nas áreas ditas literárias ou humanísticas. Por exemplo, o "Liceo Classico" em Itália, conserva, nos três últimos anos (até aos 18 anos), 3 + 2 + 2 horas semanais de Matemática a par do Grego e do Latim.

Saliente-se que a legislação portuguesa que reduz, por um lado, o número de horas de Matemática, por outro lado confere a esta disciplina um enorme relevo no acesso ao Ensino Superior. Com efeito, das provas de aferição a realizar por todos os cursos e vias existentes, 56% são de Matemática contra 44% de todas as outras disciplinas (Ver anexo à portaria 1017/92 de 29 de Outubro e portaria 243/93 de 21 de Fevereiro).

Uma análise atenta dos nossos novos planos curriculares e dos vários agrupamentos propostos mostra outros aspectos do injustificado apagamento da disciplina de Matemática. Por exemplo, um aluno que queira investir numa boa preparação em Física e Química tem 4 + 4 + 10 (!) horas na componente específica e pode ter ainda 6 + 6 + 6 de Técnicas Laboratoriais! É um luxo exagerado contra as 4 + 4 + 4 horas estritas de que a Matemática dispõe. E a mesma generosidade existe para quem queira preparar-se a fundo em Biologia e Geologia.

Repare-se ainda na Componente Técnica: todas as opções têm desde 6 + 6 + 6 até 3 + 3 + 3 horas semanais excepto Introdução à Informática/Computadores só com 3 + 3... E era aqui que deviam investir!

Comparemos agora o peso do Português com o da Matemática: no agrupamentos das Humanidades, onde é disciplina básica, tem 5 + 5 + 5 horas. Ora a Matemática é considerada em toda a Europa a disciplina básica das áreas científicas e tecnológicas onde deveria, por coerência, ter também 5 + 5 + 5 horas.

Voltando aos novos programas de Matemática, reconhece-se que eles foram elaborados procurando uma aproximação aos padrões europeus; mas, ao longo destes três anos de experiência, já se fizeram vários cortes resultantes da carga horária insuficiente. A continuação de supressões de partes do programa é inaceitável, como já se disse, não só por ferir a coerência interna do próprio programa, como por comprometer a equivalência do Ensino Secundário português ao resto da Europa.

Esta insuficiência de carga horária para preparar os alunos em Matemática, em confronto com a responsabilidade de os apresentar quase a todos a provas de aferição e específicas desta disciplina tem gerado injustiças graves, na medida em que várias escolas se cingem ao número de horas estipulado, enquanto outras, reconhecendo que os alunos são lesados pelo não cumprimento adequado dos prgramas, têm solicitado e conseguido autorização para cargas de 5 e mais horas semanais.

Para terminar citamos o "Estudo de Caso" realizado em 1992 sobre a experiência no 11º ano, a pedido do Instituto de Inovação Educacional do M.E., onde se lê nas Conclusões e Recomendações:

"*Deve ser assumido que a disciplina de Matemática é suficientemente importante para que todos os alunos tenham oportunidade de prosseguir o seu estudo com sucesso no ensino secundário. Isto implica a existência de tempo necessário para o desenvolvimento de actividades de natureza diversa. Assim, consideramos que a carga horária semanal em matemática neste nível de ensino nunca deverá ser inferior a 5 horas, devendo ser superior no caso dos alunos com cursos exigindo uma forte componente matemática.*"

Como fica claro, há convergência de todas as opiniões: de professores de matemática em geral, de experimentadores e acompanhantes, de delegados das escolas da experiência, de autores de programas e de investigadores, no sentido de que à disciplina de Matemática no Ensino Secundário, tem de ser atribuída uma carga horária de, pelo menos, cinco horas semanais em cada um dos três anos.

É premente que os responsáveis nacionais pelo Ensino/Educação repensem esta carga horária nos novos currículos, antes que o prejuízo da actual situação se faça sentir irremediavelmente no País, empobrecendo-o e dificultando a inserção dos jovens portugueses na Comunidade Europeia.

Iolanda Vasconcelos Lima
Esc. Sec. Rainha D. Amélia
Lucília Ramalheira
Esc. Sec. de Carcavelos

XVIII Conferência Anual do International Group for the Psychology of Mathematics Education

História e Objectivos do PME

O Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática constituiu-se em 1976, na Alemanha, por ocasião do Terceiro Congresso Internacional sobre Educação Matemática (ICME3). Os principais objectivos deste grupo são:

- Promover contactos internacionais e a troca de informação científica na área da Psicologia da Educação Matemática.
- Promover e estimular a investigação interdisciplinar naquela área com a cooperação de psicologistas, matemáticos e professores de Matemática.
- Procurar uma melhor e mais profunda compreensão dos aspectos psicológicos do ensino e da aprendizagem da Matemática e das suas implicações.

O PME promove anualmente uma conferência internacional, na qual são desenvolvidas actividades diversas pelas cerca de 300 a 350 pessoas que habitualmente participam. O encontro já percorreu os quatro cantos do Mundo e no ano passado realizou-se em Tsukuba, no Japão. Durou 4 dias e meio e o programa científico incluíu 4 sessões plenárias, um painel entitulado: "Como ligar os aspectos cognitivos e afectivos na Educação Matemática", 88 comunicações tipo relato de investigação, 25 comunicações tipo curta apresentação oral, 19 posters, e ainda reuniões de grupos de trabalho e de grupos de discussão.

Os Portugueses no PME

Foi em 1985 que os portugueses começaram a participar no PME, tendo havido dois representantes nacionais no Encontro que nesse ano se realizou na Holanda. Desde aí, um número variável entre 2 e 15 participantes tem marcado a nossa presença, com a apresentação regular de 2 ou 3 comunicações. Em 1993, estiveram 11 portugueses no Japão, os quais realizaram um relato de investigação, 5 curtas apresentações orais e 2 posters.

O PME em Portugal

Portugal irá, em 1994, receber os congressistas do PME. O encontro será na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, entre os dias 29 de Julho e 3 de Agosto. A lingua oficial é o inglês. O preço por participante deverá rondar os 68000$00 e inclui a inscrição no encontro, as respectivas actas, os almoços entre 30 de Julho e 3 de Agosto, dois jantares, o programa social e a quota de sócio do PME para 1994. Informações mais detalhadas deverão ser pedidas a João Filipe Matos, responsável pela organização.

1994
PME18

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

29 Julho — 3 Agosto 1994

Informações:
João Filipe Matos, PME18
Depart. de Educação
Fac. de Ciências de Lisboa
Campo Grande — C1 — 2º
1700 Lisboa
Tel: 7573141 — ext. 2029
Fax: 7573624

O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

O problema proposto para este trimestre foi "O prémio da vitória":

No final da batalha de Hastings, o rei Guilherme da Normandia, satisfeito com a vitória sobre os saxões, quis premiar os cavaleiros e capitães que mais se tinham distinguido no combate.

- Quantos são eles? - perguntou ao comandante do exército.

- No total são 19.

- Aqui tens 1000 ducados de ouro para lhes dares. Vê lá como se há-de distribuí-los.

O comandante retirou-se. Passado algum tempo voltou com uma proposta em que cada cavaleiro receberia mais 30 ducados que cada capitão.

- Apesar de os cavaleiros terem de receber mais que os capitães, parece-me injusta uma tão grande diferença - disse o rei. - Arranja outra maneira de distribuir os mil ducados.

Uma hora depois, o comandante tinha nova proposta:

- Os cavaleiros já não recebem tanto e cada capitão recebe mais 8 ducados que na proposta anterior - explicou. - E distribuem-se também todas as moedas!

- Estou de acordo - disse o rei.

Qual foi o prémio de cada cavaleiro e de cada capitão?

Nem 24 horas se tinham passado desde que a revista tinha sido distribuída aos participantes do ProfMat dos Açores quando recebemos a resposta da Luisa Andrade, de Angra do Heroísmo. A mais rápida de sempre! Um belo começo.

Entretanto chegaram-nos as resoluções de Helena Rocha (Lisboa), Cristina Veiga (Torres Vedras), A. Silva Abrantes (Seia), Orlando Freitas (Funchal) e Paulo Lopes (Covilhã). Talvez porque o intervalo entre a saída do número anterior da revista e a publicação deste é mais curto que o normal, não apareceram as respostas de alguns entusiastas habituais.

Embora Silva Abrantes tenha acrescentado uma segunda resolução com recurso à folha de cálculo Excel, todos seguiram a via algébrica para resolver o problema. Apresentamos a estratégia seguida por este nosso colega:

Se o número de cavaleiros for Cv, cada um recebendo X ducados, e o número de capitães for Cp, cada um a receber X-30, obtemos as equações correspondentes à primeira distribuição

$$Cv + Cp = 19$$

$$Cv.X + Cp(X-30) = 1000$$

Eliminando Cv e resolvendo em ordem a Cp temos

$$C_p = \frac{19X-1000}{30}$$

Como Cp é menor que 19, X tem de ser menor que 83.

Como Cp é um número natural, 19X-1000 tem de ser:

- positivo e portanto X>52,
- múltiplo de 30 e portanto X tem de terminar em 0.

Calculando Cp para X igual a 60, a 70 e a 80, só no segundo caso Cp é inteiro. Logo X=70 e Cp=11.

Então, pela primeira distribuição, os 11 capitães receberiam 40 ducados cada um (num total de 440), e os 8 cavaleiros teriam direito a 70 cada um (num total de 560 ducados).

Portanto, na distribuição final cada capitão recebeu 48 ducados e cada cavaleiro 59.

"Um mínimo no triângulo"

No número anterior da revista propunha-se que se generalizasse o problema do 2º trimestre a um triângulo qualquer.

A resposta, como Alberto Canelas e Armando Mota mostram, é surpreendente. Tal como no triângulo rectângulo, a distância mínima continua a ser quando o ponto P é o pé da altura relativa ao lado AB.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

Problema proposto

QUATRO CASTELOS, UMA ESTRADA

Na grande planície da Sildávia há quatro belos e antigos castelos que atraem a atenção de todos os visitantes.

O Ministério de Turismo resolveu construir uma estrada panorâmica. Contrataram a melhor empresa de engenharia civil do país e pediram que a estrada fosse uma circunferência que passasse a igual distância dos quatro castelos.

Olhando para o mapa, os engenheiros verificaram que os castelos ocupavam os vértices de um quadrilátero irregular.

O problema é sempre possível?

Quantas soluções há no caso geral?

O concurso de problemas do Profmat

José Paulo Viana

Como tem sido hábito, os participantes no ProfMat 93 foram desafiados para um concurso. O problema deste ano foi-nos enviado para o jornal "Público" por José Manuel Oliveira, um estudante universitário de Braga e era o seguinte:

Um cabo coaxial com 100 fios atravessa um rio. Infelizmente os fios têm todos a mesma cor e não estão identificados.

Temos um barco e um dispositivo eléctrico para ver se passa corrente entre dois fios. Podemos por isso ligar alguns fios de um lado e, com o aparelho, ir o outro lado descobrir que fios são esses.

Qual é o mínimo de travessias a fazer para identificar todos os fios?

Durante o ProfMat apercebemo-nos que afinal este ano o concurso constava de dois problemas. O primeiro era interpretar o enunciado e o segundo resolvê-lo! Surgiram muitas dúvidas quanto ao funcionamento do aparelho. Na realidade, o que ele faz é o seguinte: ligamos a ponta de um fio a um terminal do aparelho e a ponta de outro fio ao segundo terminal. Se, do outro lado, as pontas destes dois fios estiverem ligadas entre si, o dispositivo eléctrico reage. Caso contrário, não reage.

Foram entregues 21 respostas, 11 individuais e 10 colectivas:

- A. Silva Abrantes
- Alberto Teixeira
- Carlos José Reis
- Dinis Pestana
- Fernando Duarte
- Helena Rocha
- J. Alexandre Duarte
- João Sampaio Maia
- Mª João Lagarto
- Ondina Luz Duarte
- Sócia nº 1741
- Aníbal Ribeiro, Isabel Rocha
- Celina Pereira, Ermelinda Ribeiro
- Celina Vieira, Rui Vieira
- Fernanda Leite, José Fernandes
- José Alberto Sá, Manuela Pires
- Manuela Gama, Rosário Madruga
- Mário Ceia, Fernando Pires, Luis Pinheiro
- Paulo Pacheco, Fernando Castro
- Teresa Pereira, João Janeiro, António Bernardes
- 9 professores da Esc. Sec. Calazans Duarte.

Houve quem, em vez de um rio, imaginasse que tudo se passava entre as ilhas de S. Miguel e Santa Maria e resolvesse o problema em 7 viagens a acabar na segunda ilha mas "não podemos deixar de fazer a oitava porque já comprámos o bilhete de avião de regresso ao continente e este parte de S. Miguel".

O número de viagens variou entre 1 e 99. Infelizmente não considerámos válida a resolução com uma só viagem, apresentada pelo grupo de professores da E. S. Calazans Duarte:

Metade do grupo fica numa das margens e a outra metade atravessa o rio. Feito o percurso, puxa-se um fio. Do outro lado, os atentos colegas gritam "É este!". Temos a 1ª identificação à qual, por combinação prévia, atribuímos o nº 100 dos dois lados.

Repetimos o processo mais 98 vezes e ficamos confiantes no resultado: o último fio não é preciso puxar.

Também não aceitámos como certa nenhuma das três respostas de um grupo, a mais simples das quais era:

Embora não tenhamos a certeza, conjecturamos que a solução também pode ser obtida através dos zeros da seguinte função

$\psi(x) = [\varphi(x)]^2 - 3x^2 \qquad \varphi(x) = 1 + x^2$

Os 100 fios podem ser identificados com duas travessias. Há vários processos de o conseguir. O mais simples deve ser o que a seguir se indica e tem a vantagem de se aplicar qualquer que seja o número de fios (desde que mais do que dois).

1º Na margem de cá ligam-se os fios dois a dois, excepto os dois últimos que ficam soltos (se o nº de fios fosse ímpar, ficava um fio solto).

(continua na página 24)

Prémios

1º **Aníbal Ribeiro, Isabel Rocha**
Calculadora gráfica TI-85
2º **João Sampaio Maia**
Calculadora gráfica TI-82
3º **Carlos José Reis**
Calculadora gráfica TI-81
4º **Mário Ceia, Fernando Pires, Luis Pinheiro**
Calc. cient. GALAXY 67
5º **Helena Rocha**
Calc. cient. GALAXY 40

Todos os concorrentes recebem ainda o livro "Aplicando a Matemática..." de Luis Madureira, oferta das Ed. VRAL (Queluz).

As calculadoras são uma oferta da Texas Instruments.

Pede-se aos concorrentes premiados que entrem em contacto com a sede da APM para levantamento dos prémios.

O júri
Eduardo Veloso e J. Paulo Viana

Velocidade recomendada nas auto-estradas: 20 Km/h (?)

João Filipe Matos e Susana Carreira

Como reagiria se à entrada da auto-estrada lhe surgisse um aviso dizendo: "velocidade recomendada em caso de trânsito congestionado: 20 km/h"? À luz de dados do Código da Estrada, é explorado, neste artigo, o problema da definição de velocidade limite e de velocidade recomendada, procurando salientar-se a eventual contradição entre o interesse individual e o interesse colectivo dos automobilistas.

Agora que o código da estrada está a ser revisto, tem sido discutido o problema das velocidades admissíveis nas auto-estradas. Claro que esta discussão tem ênfase nesta altura porque o número de quilómetros de auto-estrada em Portugal aumentou e, além disso, é hoje muito maior o número de automobilistas a usá-las. Mas é o problema da definição da velocidade recomendada na auto-estrada que se reveste de aspectos mais interessantes. Desde a sua formulação, até ao momento em que é oportuno fazer recomendações, esta situação levanta questões que merecem uma análise mais atenta do que aquela que surge geralmente nos meios de comunicação.

Como se sabe, duas das características importantes de uma auto-estrada são: (1) não ter cruzamentos de nível e (2) não se poder estacionar ou mesmo parar na via de rodagem. Uma auto-estrada é, por definição, um meio para circular. É por isso que é tão relevante a definição da velocidade a adoptar no tráfego em auto-estrada. Naturalmente, quem usa uma auto-estrada deseja chegar depressa e em segurança ao seu destino; pretende mesmo uma maior rapidez e uma maior segurança do que numa simples estrada nacional. E é neste ponto que começa a emergir o interesse do problema, pois se é verdade que <u>cada</u> automobilista quer chegar depressa, também é válido que <u>todos</u> os automobilistas o querem (Um mero jogo de terminologia lógica?...).

Parecem ser relativamente imediatos alguns dos critérios a utilizar na definição da velocidade na auto-estrada: (a) Economia, (b) Segurança e (c) Rapidez na deslocação.

A Economia

Os critérios de ordem económica estiveram muito presentes nas medidas de limitação da velocidade no início dos anos 70, no momento da "grande crise petrolífera". Mas, progressivamente, deixaram de constituir uma preocupação fundamental, por duas ordens de razões: primeiro, porque a tecnologia automóvel evoluiu e hoje não é tão linear como isso que um automóvel gaste mais combustível a 100 km/h do que a 60 ou a 70 km/h; depois, porque se concluiu que a limitação de consumo de petróleo pode mesmo constituir um factor perturbador do complexo sistema económico que rege o mundo da energia. Resta acrescentar que os argumentos de ordem ecológica (que nunca foram muito esgrimidos) estão igualmente ultrapassados pelas características dos motores e dos sistemas de limitação de emanações de gases.

A Segurança

Fica, pois, como grande critério na definição da velocidade, a questão da segurança. Actualmente o Código da Estrada impõe que os autombilistas mantenham uma distância de segurança em relação ao veículo que os precede, de modo que consigam imobilizar o seu automóvel sem perigo de colisão.

Parece necessário considerar que a distância de segurança (Ds) inclua as duas componentes seguintes: (i) a distância de reacção (Dr), que será a distância percorrida entre o instante em que o condutor decide travar e o instante em que acciona efectivamente o pedal do travão; (ii) a distância de travagem (Dt), isto é, a distância percorrida pelo veículo durante a travagem, desde a velocidade V (com que se desloca) até à velocidade 0 (imobilização). Será portanto:

$$Ds = Dr + Dt$$

Curiosamente, o código da estrada apenas considera a distância de travagem (Dt) e sobre a sua medida é muito explícito. A distância de travagem é calculada pela fórmula:

$$Dt = \frac{V^2}{100}$$

sendo V a velocidade do veículo em km/h e Dt a distância de travagem em metros.

Assim, por exemplo, para um automóvel que se desloque a uma velocidade de 60 km/h, a distância de travagem será Dt=36 m. Não existe no código da estrada qualquer alusão às razões que justificam esta fórmula. No entanto, ela é utilizada nos manuais que ensinam o Código (por exemplo, Reis, 1981) para calcular a distância de segurança e concluir que a velocidade máxima de condução durante a noite, quando se circula em médios (cujo alcance máximo é de 30 metros), deveria ser de 40 km/h. Estes manuais incluem, em geral, algumas considerações acerca da distância de reacção. O manual citado considera que a distância de reacção, em metros, deve ser calculada pela expressão:

$$Dr = \frac{8V}{30}$$

em que V é a velocidade do veículo.

A Distância de Reacção

A fórmula $Dr = \frac{8V}{30}$ pode ser analisada no sentido de perceber o que levou os autores dos manuais à sua adopção. Comecemos por notar que nesta fórmula está implícito um determinado tempo de reacção, que pode ser determinado, se nos recordarmos que, em situação de movimento rectilíneo uniforme, se tem: *distância = velocidade* x *tempo*.

Na fórmula para o cálculo da distância de reacção, Dr é a distância em metros e V é a velocidade em km/h. Ora, convertendo a velocidade V para m/s, obtém-se o resultado 5V/18 m/s. Assim, designando por tr o tempo de reacção, teremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} Dr = \dfrac{8V}{30} \\ Dr = \dfrac{5V}{18} \times tr \end{cases}$$

Determinando o valor de tr, obtém-se tr=0,96 segundos. Sejamos condescendentes neste ponto e admitamos que um condutor "normal" tenha um tempo máximo de reacção de cerca de 1 segundo.

A Distância de Travagem

Como já foi afirmado, não há nenhuma razão que suporte a fórmula indicada para o cálculo da distância de travagem. A sua simplicidade, contudo, sugere uma certa comodidade de cálculo. Tentando analisar esta fórmula, poderemos começar por arriscar alguns pressupostos. Suponhamos, por exemplo, que o veículo tem um movimento rectilíneo uniformemente retardado (isto é, que a aceleração é constante) durante a travagem. Nestas condições, sabe-se que a velocidade, v, e o espaço percorrido, s, têm leis bem determinadas:

$$v(t) = v_0 - at$$

e

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

Na situação de travagem, admitimos que o veículo tem inicialmente uma velocidade v_0=5V/18 m/s e que pára ao fim de um certo tempo, isto é, que no final da travagem a velocidade será 0 m/s.

Da primeira equação sai:

$$0 = \frac{5V}{18} - at \Leftrightarrow t = \frac{5V}{18a}$$

Substituindo na equação dos espaços, chega-se ao resultado seguinte para a distância de travagem (em metros):

$$Dt = \frac{25V^2}{648a}$$

Portanto, aparentemente, o facto de a distância de travagem ser directamente proporcional ao quadrado da velocidade parece estar de acordo com a fórmula do Código da Estrada. Resta saber se a constante de proporcionalidade é aceitável. Comparando este resultado com a fórmula $Dt = \frac{V^2}{100}$, diremos que a aceleração aplicada na travagem é da ordem dos 3,9 m/s^2. O que poderá isto significar em termos de velocímetro? Podemos investigar qual seria a redução que teria a velocidade em cada segundo de travagem. Na verdade, a aceleração dá-nos exactamente o valor da taxa de variação da velocidade. Quer dizer, em cada segundo, a velocidade sofre uma redução de 3,9 m/s. Já que os velocímetros dos automóveis indicam a velocidade em km/h, diremos que, em cada segundo de travagem, a velocidade tem um decréscimo de 14 km/h. Mas se este indicador não for suficientemente elucidativo podemos ainda construir uma tabela que mostre as distâncias de segurança, calculadas segundo o Código, para diferentes valores da velocidade. O que dizer da razoabilidade dos resultados?

VEL. (km/h)	DIST. SEG. (metros)
0	0,00
10	3,67
20	9,33
30	17,00
40	26,67
50	38,33
60	52,00
70	67,67
80	85,33
90	105,00
100	126,67
110	150,33
120	176,00
130	203,67
140	233,33
150	265,00

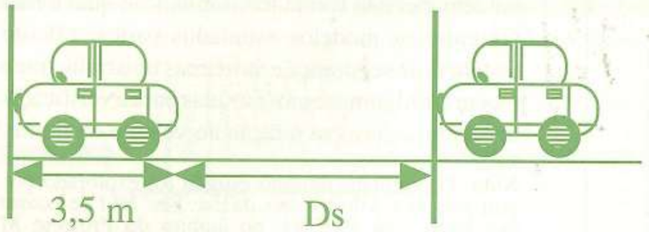
O Fluxo de Trânsito

Passemos agora a uma questão essencial que é a fluidez do trânsito na auto-estrada. Se se admitir que a velocidade dos automóveis na auto-estrada é constante e igual a V km/h, que cada veículo tem um comprimento médio de 3,5 metros, e que todos os automóveis respeitam uma certa distância de segurança Ds, a contagem do número de automóveis que passa num dado ponto da auto-estrada por unidade de tempo (por exemplo, por hora) pode ser feita, tendo por base o esquema da figura.

Supomos que o 1° veículo contado andou uma distância de V km (1000xV metros) ao fim de 1 hora, pelo que o número de automóveis que passaram pelo mesmo ponto durante essa hora será:

$$F = \frac{1000 \times V}{Ds + 3,5} = \frac{1000 \times V}{Dr + Dt + 3,5}$$

De acordo com as fórmulas do Códi-



go da Estrada para o cálculo de Ds, a expressão obtida para o fluxo é a seguinte:

$$F = \frac{1000 \times V}{\frac{8V}{30} + \frac{V^2}{100} + 3,5} = \frac{3 \times 10^5 \times V}{3V^2 + 80V + 1050}$$

E, querendo o valor máximo do fluxo, calculamos a derivada, e encontramos:

$$F' = 0 \Leftrightarrow V = \pm 18,7$$

O sinal da derivada permite-nos concluir que o fluxo F toma o valor máximo para V=18,7. Isto significa que, segundo o Código, o fluxo de trânsito será máximo quando a velocidade de circulação for cerca de 20 km/h, o que é inclusivamente proibido na auto-estrada, onde a velocidade mínima é de 40 km/h. Note-se ainda que a distância de segurança correspondente ao fluxo máximo de trânsito é de 8,5 m.

É claro que esta conclusão é surpreendente, tanto mais que levaria a recomendações como a da colocação de avisos, em certos locais estratégicos, dizendo qualquer coisa como:

EM CASO DE TRÁFEGO
CONGESTIONADO

VELOCIDADE
RECOMENDADA
20 km/h

Talvez fosse uma forma de todos chegarem mais cedo ao seu destino!

Extensões e Folha de Cálculo

Existem ainda outras explorações possíveis em torno deste problema. Por exemplo, poder-se-á aprofundar a discussão acerca da fiabilidade da fórmula usada para o cálculo da distância de travagem (e o mesmo, naturalmente, para a fórmula da distância de reacção). Decerto, há vários factores que podem influenciar a distância percorrida durante a travagem. Basta pensar-se no estado dos travões, na aderência dos pneus, no piso mais ou menos escorregadio... Talvez seja de admitir que a fórmula apresentada no Código da Estrada seja excessivamente cautelosa, no sentido de prevenir o acidente, e como tal, que a distância de segurança esteja a ser determinada com uma "grande folga"... Nesse caso, interessará investigar o que aconteceria se a distância de travagem fosse menor. Para o efeito, poderemos introduzir um parâmetro k na fórmula da distância de segurança, tal que 0<k<1, e considerar:

$$Ds = Dr + kDt,$$

isto é:

$$Ds = \frac{8V}{30} + k\frac{V^2}{100}$$

Nesse caso, o fluxo de tráfego será dado por:

$$F = \frac{1000V}{\frac{8V}{30} + k\frac{V^2}{100} + 3,5}$$

Derivando a função F em ordem a V e determinando os zeros, chegamos à conclusão que o fluxo será máximo para uma velocidade $V = \sqrt{\frac{350}{k}}$

Nesta altura haverá vantagens em utilizar uma folha de cálculo para analisar os efeitos do parâmetro k no fluxo de trânsito e para encontrar os respectivos valores da velocidade e da distância de segurança. A construção de gráficos será um processo elucidativo do efeito deste parâmetro k.

Apresentam-se na página seguinte os gráficos do fluxo em função da velocidade para as situações que correspondem aos valores k=0, k=1 e k=0,2.

O primeiro gráfico (pág. seguinte) representa o caso em que se despreza a distância de travagem. É como se a paragem do veículo fosse instantânea ao carregar--se no travão. É naturalmente uma hipótese futurista, mas que revela um incrível potencial na melhoria dos problemas de congestionamento de tráfego! Será interessante notar que, mesmo nesta situação ideal, o fluxo de trânsito estaria condicionado a um limite máximo.

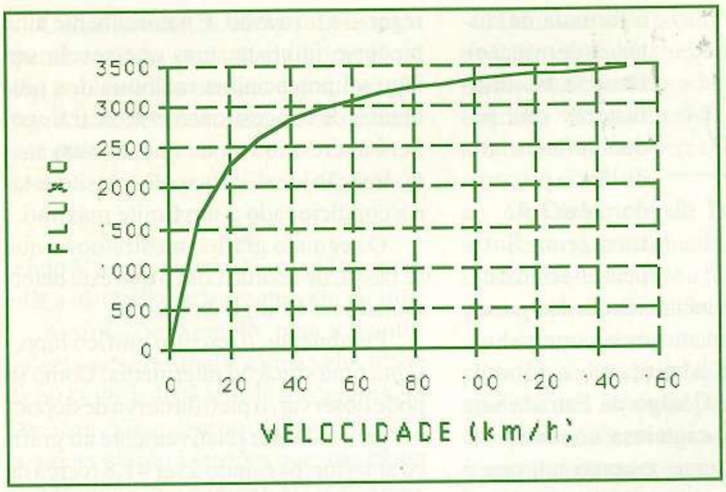
O segundo gráfico mostra-nos o que se passa, de acordo com o que está determinado no Código da Estrada.

Finalmente, o terceiro gráfico representa uma situação intermédia. Como se pode observar, o pico da curva deslocou-se para a direita relativamente ao gráfico anterior, passando a ser 41,8 (cerca de 40 km/h) a velocidade recomendada. Naturalmente que a distância de segurança também se alterou relativamente ao que é previsto no Código da Estrada. A construção de uma pequena tabela com as velocidades recomendadas (para que o fluxo seja máximo) e correspondentes distâncias de segurança, para diversos valores de k, poderá ajudar a avaliar o efeito deste parâmetro.

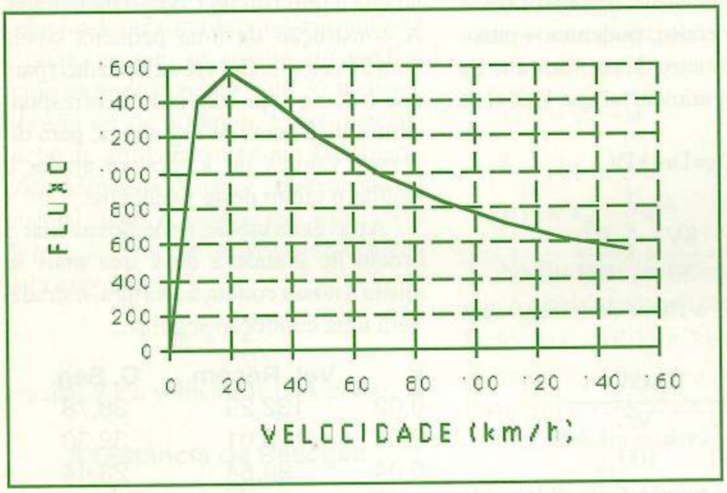
Através da tabela, podemos avaliar a ordem de grandeza de k que mais se ajusta à nossa condução na auto-estrada. Será uma condução segura?...

k	Vel. Recom.	D. Seg.
0,02	132,29	38,78
0,03	108,01	32,30
0,04	93,54	28,44
0,05	83,67	25,81
0,06	76,38	23,87
0,08	66,14	21,14
0,1	59,16	19,28
0,2	41,83	14,66
0,3	34,16	12,61
0,4	29,58	11,39
0,5	26,46	10,56
0,6	24,15	9,94
0,7	22,36	9,46
0,8	20,92	9,08
0,9	19,72	8,76
1	18,71	8,49

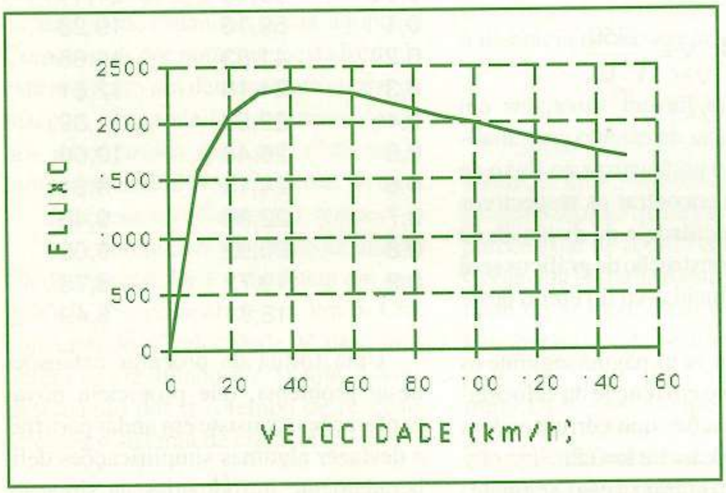
Uma forma de procurar extensões deste problema, que propiciem novas explorações, consiste em andar para trás e desfazer algumas simplificações deliberadamente introduzidas na situação. Por exemplo, o que dizer se as distâncias entre os automóveis não forem iguais e variarem entre certos valores? E se as



Gráf. 1. - A variação do fluxo com a velocidade, para k=0



Gráf. 2. - A variação do fluxo com a velocidade, para k=1



Gráf. 3. - A variação do fluxo com a velocidade, para k=0,2

velocidades não forem todas iguais? E qual a coerência entre os modelos estudados para o cálculo da distância de segurança e as marcas no asfalto que aparecem em algumas auto-estradas para a verificação da distância segura em relação ao veículo da frente?

Nota: O problema da auto-estrada foi explorado por um grupo de alunos do 10º ano, da Esc. Sec. Nº 1 de Loures, no ano lectivo de 1992/93, no âmbito do Projecto MEM (Modelação no Ensino da Matemática). A versão aqui apresentada teve como fonte de inspiração o artigo "Maximising Traffic Flow Through Tunnels", do livro *Applying Mathematics*, de Burghes, Huntley e McDonald.

Referências

Burghes, D., Huntley, I. e McDonald, J. (1982). *Applying Mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.

Reis, J. (1981). *Resumo Ilustrado do Código da Estrada com Toda a Matéria para os Testes e Ensina a Conduzir*. Edição do Autor.

João Filipe Matos
Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa
Susana Carreira
F.C.T. da Univ. Nova de Lisboa

O concurso de problemas do Profmat

(continuação da página 19)

2º Faz-se a primeira travessia.

3º Na outra margem, com a ajuda do aparelho, identificam-se todos os pares de fios ligados entre si. Numeram-se estes fios dois a dois: 1-2, 3-4, 5-6, ..., 97-98. Aos dois fios soltos atribuem-se os números 99 e 100. Com isto fica-se a saber, por exemplo, que na primeira margem os fios 1 e 2 estão ligados entre si, embora não se saiba a que par eles correspondem exactamente.

4º Ainda sem mudar de margem, liga-se o fio 99 com o 1, o 2 com o 3, o 4 com o 5, ..., o 96 com o 97, e deixa-se o 98 solto. O 100 também continua solto.

5º Faz-se a segunda travessia.

6º De novo na margem inicial desfazem-se todas as ligações, tendo no entanto o cuidado de manter os fios agrupados dois a dois. Pega-se num dos dois fios que estavam soltos e, com o aparelho, procura-se um fio que, do outro lado, possa estar ligado a ele. Se não houver nenhum fio que feche o circuito é porque se começou com o fio 100. Se se descobrir um é porque se começou com o 99.

7º O fio que fecha o circuito com o 99 é o número 1. Conclui-se também que aquele que, do lado de cá, estava emparelhado com o 1 é o 2. Procura-se depois o novo par do 2, que é o número 3. O fio que estava ligado ao 3 é o 4, que fica solto. Com o 4 procura-se o 5, e assim sucessivamente até que, com o 96, se identifica o 97. O fio que sobra é o 98.

José Paulo Viana
E. S. Vergílio Ferreira (Carnide)

Para este número seleccionámos

Aprender com os alunos

Margaret A. Farrell

Este artigo foi publicado no Mathematics Teacher de Novembro de 1992 e aborda uma das seis normas dos Professional Teaching Standards, que o NCTM publicou em 1991: "Conhecer os alunos como aprendizes de Matemática". Neste momento, a APM está a traduzir os Professional Standards, documento onde é assumido que "a formação de professores é um processo evolutivo". Como é que os professores podem continuar o seu desenvolvimento profissional fora dos momentos formais de formação? Uma possibilidade importante é a análise e a reflexão relativas às informações que podem obter nas suas aulas, como por exemplo, as respostas dos alunos no processo de aprendizagem matemática.

As percepções dos alunos e a validade do *feedback*

"O que é que aprenderam os meus alunos? A minha caderneta está cheia de dados sobre isto!" Provavelmente assim é, pois os testes e questionários são o modo tradicional de avaliar as aprendizagens dos alunos, e não devem ser desprezados. No entanto, um teste só dá uma amostra das aprendizagens e normalmente não tem como objectivo fornecer dados explicativos das falhas da aprendizagem. O *feedback* obtido nos momentos de pergunta-e-resposta pode dar pistas sobre as causas das ideias erradas, mas alguns alunos são capazes de evitar revelar os motivos que estão na base das suas concepções erróneas. Por exemplo, respostas correctas podem disfarçar confusões sobre o processo que conduziu à resposta. Além disso, mesmo quando os professores questionam os processos, os alunos criativos podem ser mais reservados acerca da abordagem que fizeram para obter as suas respostas. Eles podem pensar que aquilo que inventaram não merecerá a aprovação do professor.

Nenhuma destas caracterizações das respostas dos alunos surpreenderá professores experientes do ensino secundário. Eles sabem que têm um único obstáculo a vencer nas suas tentativas para obter *feedback*s válidos acerca da aprendizagem dos alunos. Alguns alunos esforçam-se para alcançar resultados aceitáveis em vez de procurarem aprender o assunto. Para agravar o problema, se as experiências anteriores dos alunos em aulas de matemática os ensinou que a memorização de definições ou demonstrações do livro é olhada favoravelmente, eles tornar-se-ão peritos, recitando definições, escrevendo fórmulas, e debitando resultados que passaram pela execução de algoritmos típicos. Muito provavelmente, eles não serão capazes de repetir o seu sucesso duas semanas depois do teste. Contudo, esta perspectiva bastante comum da aprendizagem da matemática não é somente um obstáculo invisível quando os professores se esforçam para saber o que foi aprendido, mas também é uma dificuldade quando eles tentam descobrir as ideias matemáticas que foram retidas e que poderão ser transformadas em novas aprendizagens.

Análise de erros padrão

"Em alguns casos não preciso de obter o feedback *da aprendizagem dos alunos. Por exemplo, eu consigo descrever erros específicos que alguns dos meus alunos de álgebra cometerão na factorização de um polinómio. Ano após ano, alguns deles dizem que os factores de a^2+b^2 são $(a+b)(a+b)$".* Isto traduz a vossa experiência? Estou certa que sim e com certeza que darão outros exemplos de erros que ocorrem com muita regularidade. Essa mesma regularidade deveria despertar o nosso interesse. Em vez de caracterizar estes erros padrão como exemplos de não aprendizagem, poderíamos analisar os processos a fim de descobrir que tipo de aprendizagem fizeram os alunos que os levou a usar estes algoritmos defeituosos. (Eles aprendem muita coisa que nós não temos intenção de lhes ensinar!) Lembrem-se que todos nós tentamos reduzir detalhes a uma espécie de regra ou padrão que seja facilmente memorizada e armazenada. Os alunos não são diferentes. Eles constroem algoritmos que podem ser ou não válidos. Dado que os exemplos usados

nas aulas introdutórias são normalmente simples, mesmo os algoritmos errados dos alunos podem levar a respostas correctas.

Coloquemo-nos na pele de investigadores e reconsideremos o algoritmo incorrecto da soma dos dois quadrados, procurando ver o que os alunos aprenderam em vez do que não aprenderam. Talvez a regra a que chegaram se aplique também ao problema da diferença de dois quadrados; mas nesse exemplo a regra produz respostas correctas. Aqui está um algoritmo defeituoso plausível:

> Para factorizar a soma ou diferença de dois quadrados, calcular a raiz quadrada dos quadrados e escrevê-los na forma do produto de dois binómios.
>
> (1) $a^2-b^2 = (a\ b)(a\ b)$
>
> (2) $a^2+b^2 = (a\ b)(a\ b)$
>
> No primeiro exemplo, colocar sinais diferentes entre a e b.
>
> No segundo exemplo, colocar o mesmo sinal, +, entre a e b.

"Porque é que eles não verificam o seu trabalho?" — poderão queixar-se os professores. Suponha que eles respondiam que já o verificaram. Que regra poderiam estar a usar se ela confirma a resposta correcta no exemplo da diferença de quadrados e os leva a pensar que também factorizaram correctamente a soma de quadrados? Uma resposta típica de um aluno é: *"Eu elevei ao quadrado o primeiro termo, elevei ao quadrado o segundo termo, e multipliquei os sinais entre os termos"*. Foi identificado um segundo falso algoritmo associado a esta situação. Reparem no problema que aqui se coloca. Normalmente, tentamos que os alunos encontrem os seus erros, encorajando-os a corrigir o seu próprio trabalho. Na factorização, o processo inverso, a multiplicação, serve como processo de verificação. Contudo, neste exemplo, os alunos fecharam o ciclo, criando uma regra de verificação que valida o seu falso algoritmo original.

Como poderíamos ajudar estes alunos a tomar consciência da existência e origem destes dois erros? Nós poderíamos perguntar-lhes porque é que (a-b) e (a-b) não são os factores de a^2+b^2, uma vez que, de acordo com o algoritmo de verificação dos alunos, o produto de (a-b) e (a-b) também é a^2+b^2. Poderíamos pedir aos alunos para completarem e analisarem a multiplicação de binómios, tais como (8+2)(8-2), (7+3)(7-3), (2+4)(2+4) e (5+6)(5+6), usando primeiro o seu algoritmo de verificação e depois simplificando dentro de parêntesis antes de multiplicar. Ambas as sugestões podem ajudar os alunos a reexaminar a sua regra de verificação e levá-los a concluir que existe um problema com o seu falso algoritmo. Quando os alunos estão envolvidos no processo de diagnóstico, têm uma oportunidade para reflectir sobre os seus próprios procedimentos. Assim, esta técnica, que permite aos alunos confrontar contradições na sua aprendizagem e requer que eles analisem essas contradições, tem o potencial de os ajudar a aprender o que nós queremos que eles aprendam.

A análise dos erros padrão dos alunos tem um potencial enorme, quer seja com erros que se repetem ano após ano em vários grupos de alunos ou que aparecem num aluno particular perante um determinado tipo de problema. Estudar erros padrão, falsos algoritmos, ou concepções erróneas para descobrir o que os alunos aprenderam em vez de desprezá-los como evidências de falhas de aprendizagem pode ajudar os professores a entender a visão matemática dos alunos e a forma como a aplicam na sua aprendizagem. "Os professores devem, simultaneamente, ser capazes de perceber a matemática através das ideias dos alunos e de perceber as ideias dos alunos através da matemática em que estão envolvidos" (NCTM, 1991, p. 145). Uma excelente fonte acerca de erros padrão comuns nos alunos e da sua análise é o trabalho de Davis (1984). Davis tem um jeito especial para ajudar o leitor a visualizar a sala de aula e a "pensar em conjunto" com o aluno enquanto ele resolve um problema.

Algumas estratégias de *feedback* prometedoras

Para estudar os erros padrão ou as concepções erróneas básicas dos alunos, os professores podem precisar de estratégias de recolha de *feedback* que conduzam a informações esclarecedoras. Os professores poderão criar oportunidades para que os alunos troquem opiniões sobre um conjunto de problemas, escrevam como explicariam um novo conceito a um irmão mais novo ou a um amigo ausente, ou, usando a calculadora ou o computador, testem os seus algoritmos inventados num conjunto de exemplos. Os trabalhos de casa poderiam incluir regularmente indicações para reescrever uma fórmula, definição, ou procedimento por palavras próprias ou fazer um esquema de um algoritmo através de um desenho ou fluxograma ou através de um exemplo concreto. Quando os alunos reproduzem uma demonstração, procedimento ou definição, utilizando exactamente as mesmas palavras que o manual, eles deveriam esperar que lhes fosse pedido para o escrever ou explicar de outra maneira. As explicações escritas que um aluno daria a um colega ausente acerca de um conceito ou procedimento constituem uma fonte de dados especialmente válida. Como Miller (1991) fez notar, o acto de escrever também ajuda os alunos a clarificar as suas ideias e, desse modo, a aprender matemática.

Embora a escrita possa ser completada fora da aula, usar o tempo de aula para iniciar essas tarefas escritas permite aos alunos saber que os professores valorizam os resultados. De novo, a questão está em perceber o que os alunos aprenderam e não ficar deslumbrado pelo fluxo de símbolos matemáticos ou o rigor de uma cópia perfeita de um manual. O professor cujos alunos têm bons resultados precisa de estar particularmente atento às suas capacidades de esconder falhas de aprendizagem. Como a maioria dos bons alunos, estes alunos têm normalmente uma excelente capacidade de memorizar, mas o seu desenvolvimento intelectual pode ainda estar num fase de transição (Farrell e Farmer, 1988, pp. 66-68). A sua capacidade para falar de matemática relativamente complexa não significa necessariamente que eles tenham compreendido os conceitos matemáticos representados pelos símbolos. De facto, a sua capacidade para aplicar uma fórmula em exemplos tipo pode induzir o professor em erro, levando-o a supor que entenderam os conceitos necessários para compreenderem a fórmula.

Assim, descobrir o que os alunos aprenderam requer perguntas claras e incisivas, uma atitude receptiva, e métodos de *feedback* que valorizem a compreensão e aplicação em vez da memorização. Isto implica também comunicar aos alunos a importância de obter informação válida sobre a sua aprendizagem.

A aprendizagem face à natureza da matemática

Parece que estamos num círculo vicioso — tanto as respostas correctas como incorrectas podem disfarçar a verdadeira aprendizagem dos alunos! Respostas incorrectas podem representar bons raciocínios, mesmo que baseados em conceitos errados. Respostas correctas, especialmente repetições das palavras do manual ou do professor, podem mascarar falhas de compreensão da matemática subjacente. Porque é que os alunos substituem as suas próprias estratégias pelas ensinadas pelo professor ou recorrem à memorização de regras, fórmulas e definições? Talvez parte da resposta esteja na natureza da matemática. A abstracção da matemática não é compartilhada por nenhuma outra disciplina. Embora os seus modelos possam ser usados para ajudar a explicar o mundo real, nenhuma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre os exemplos da vida real e os modelos matemáticos respectivos. A matemática é também fortemente hierarquizada. Se um aluno tem uma concepção errónea acerca de uma parte desta cadeia lógica, então os bloqueios subsequentes da aprendizagem parecem aumentar de complexidade. Assim, na medida em que a matemática difere de outras disciplinas, também a sua aprendizagem tem uma natureza diferente. Um exemplo óbvio vem-nos à ideia. Embora a matemática tenha uma linguagem especial, não é propriamente uma língua estrangeira. Em matemática, é preciso mais do que traduzir uma expressão para a linguagem corrente. Por vezes, os alunos não percebem esta diferença e contentam-se quando são capazes de debitar fórmulas e definições em resposta às questões do professor. Inversamente, os alunos que inventam falsos algoritmos podem ter dificuldades com o carácter abstracto da matemática. Quando as conexões estabelecidas pelo professor são remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos, aqueles que tentam aprender, inventam as suas próprias conexões.

A aprendizagem face ao desenvolvimento cognitivo dos alunos

É importante reconhecer que as conexões podem ter significado para o professor e contudo serem remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos. Assim, embora a origem das concepções erróneas dos alunos possa ter, em parte, como causa a natureza única da matemática, estas podem ser, por outro lado, causadas pelo nível do desenvolvimento intelectual dos alunos. O que pode parecer concreto para o professor pode ser visto como abstracto para os alunos. Há mais de cinquenta anos, Brownell (1935) descobriu que os alunos do primeiro ciclo tinham mais dificuldade em operar com números sem unidades (p. ex., 5+7) do que com números concretos (p. ex., 5 maçãs + 7 maçãs). Quando faltavam as unidades, a soma indicada não era vista de uma forma simples mas antes como uma abstracção para ser memorizada. Quando estavam presentes as unidades, os alunos pareciam visualizar a situação concreta e eram capazes de responder correctamente.

Alguns alunos enfrentam um problema análogo quando confrontados com questões acerca de funções divorciadas de uma situação real. Quando estes mesmos alunos investigam uma relação no mundo real (p. ex., entre o tempo e a distância ao solo de sinais atirados de um balão), eles são capazes de estabelecer conexões com significado entre a matemática e a situação real. Os alunos que, aparentemente do nada, inventam ideias erradas podem simplesmente estar a reagir à lacuna existente entre os conceitos matemáticos e o seu significado. A forma como os alunos aprendem depende, pois, tanto da natureza da matemática como do desenvolvimento intelectual dos alunos.

No entanto, responder ao acaso tem um papel na criação de ideias erróneas ou falsos algoritmos pelos alunos. Estes alunos estão motivados para aprender e tentam dar sentido à matemática. Eles também enviam uma mensagem: *"Não vejo qual é a relevância destes procedimentos. Não percebi as conexões que estabeleceu. Dê-me exemplos concretos que tenham sentido para mim".*

Neste artigo, considerámos somente uma estreita fatia do complexo bolo que é a aprendizagem matemática dos alunos. É contudo, uma fatia que os professores podem estudar e analisar. Também pode ser usada para encorajar a aprendizagem dos alunos. Quando os alunos reflectem na sua própria aprendizagem e discutem as razões que levaram a uma conclusão aparentemente razoável mas inválida, eles aprofundam a sua compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Da mesma maneira, os professores, ao estudarem os dados das suas aulas, aprendem mais sobre as aprendizagens dos alunos e mais sobre o ensino. "A importância do conhecimento dos professores sobre o modo como os alunos aprendem matemática não pode ser minimizada" (NCTM, 1991, p. 146).

Referências

Brownell, William A. "Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic". In *The Teaching of Arithmetic*, Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by William Reeve, 1-31. New York: N.C.T.M. and Teachers College Press, Columbia University, 1935.

Davis, Robert B. *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Norwood, N. J.: Ablex Publishing Co., 1984.

Farrell, Margaret A., and Walter A. Farmer. *Secondary Mathematics Instruction: An Integrated Approach*. Providence, R.I.: Janson Publications, 1988.

Miller, L. Diane. "Writing to learn Mathematics." *Mathematics Teacher* 84 (October 1991): 516-21.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1991.

Tradução de João Almiro e
Margarida Abreu, E. S. de Tondela
Revisão de A. P. Canavarro e S. Carreira

Um olhar sobre o Novo Sistema de Avaliação dos Alunos do Ensino Secundário (1)

Leonor Cunha Leal

O novo sistema de avaliação dos alunos do ensino secundário foi publicado no Diário da República, I Série, de 21 de Outubro de 1993, através do Despacho Normativo nº 338/93. De uma primeira leitura, logo ressalta que este ciclo de ensino é visto de forma diferente da do ensino obrigatório. Enquanto nos primeiros nove anos de escolaridade se pode encontrar uma certa preocupação em dar oportunidade a todos os alunos para aprender, o ensino secundário é considerado como apenas para alguns. Este pressuposto, embora não necessariamente pacífico, vai ser considerado como aceite na análise que se segue. Algumas questões que o novo sistema de avaliação faz emergir serão em seguida apresentadas e discutidas.

Mais vale tarde do que nunca? Antes de nos debruçarmos sobre alguns dos aspectos inovadores do novo sistema de avaliação para os alunos do ensino secundário e das suas possíveis implicações, não podemos deixar de nos insurgir contra a altura em que surge esta legislação. Apesar de muito se ter chamado a atenção para o aparecimento tardio e desacompanhado de um conjunto de medidas indispensáveis à implementação do novo sistema de avaliação dos alunos do ensino básico (Conselho Nacional de Educação, 1992; Leal, 1992), este novo despacho surge mesmo depois do início do ano lectivo. Já não nos referimos ao facto de a fase de experimentação da reforma não ter sido acompanhada, como deveria, de um sistema de avaliação também ele reformado, mas sim de os alunos terem iniciado este ciclo de ensino segundo um determinado número de regras que são agora alteradas. Será este procedimento correcto e justo?

Reforma do ensino secundário: antes de o ser já não o era? O novo sistema de avaliação dos alunos do ensino secundário pode vir a constituir a machadada final na reforma do ensino secundário! Assistimos à reintrodução de exames de âmbito nacional em todas as disciplinas do 12º ano do plano de estudos (à excepção de casos muito particulares) para conclusão do ensino secundário. Preocupações de credibilidade parecem-nos presentes nesta medida, isto é, a resposta a exigências colocadas pela sociedade actual. Contudo, não será exagerado o peso de 40% atribuído a uma prova que durará duas ou três horas, quando se está a deixar apenas 60% ao trabalho desenvolvido durante dois ou mesmo três anos? Como se tal não chegasse, surgem igualmente as provas escritas globais de escola no final de cada ano intermédio de ciclo. Se exigências de ordem social poderiam ser anteriormente apontadas, tal já não se justifica neste caso. Do mesmo modo não nos parece defensável apontarem-se razões de ordem pedagógica. Pergunta-se: porquê a existência destas provas? Aumentar a selectividade? Homogeneizar? Reforçar a avaliação como uma medida, quando, ao longo de todo este século, têm sido por demais apontadas as inconsistências, desvios, impossibilidades e desvantagens de tal opção (Caverni e Noizet, 1985; Perrenoud, 1984, 1989)?

Os professores terão agora que se confrontar entre respeitar o espírito da reforma ou preparar os seus alunos, ano após ano, para as provas escritas globais por escola ou para os exames a nível nacional. Seja qual for a sua opção, a verdade é que o aluno sairá sempre a perder.

Ao deixar para segundo plano os grandes objectivos da reforma, ignorar-se-á, por exemplo, a procura de "imprimir uma nova orientação ao processo educativo, fazendo-o convergir para a formação integral dos alunos, sendo assinalado um papel nuclear ao desenvolvimento de atitudes e à consciencialização de valores" (DGEBS, p.8), esquecer-se-ão as especificidades da região ou do meio local, defendidas na lei de bases do sistema educativo, assim como deixarão de ter sentido objectivos como "estimular o desenvolvimento de atitudes de iniciativa e criatividade conducentes a uma crítica à mudança" (DGEBS, p.9), e "o domínio de capacidades, hábitos e técnicas de trabalho em equipa" (DGEBS, p. 10). Inviabilizar-se-á o ponto 20 do próprio despacho normativo do sistema de avaliação, que afirma que "a avaliação sumativa consiste na formação de um juízo globalizante sobre o grau de desenvolvimento dos conhecimentos e competências, capacidades e atitudes, no final de um período de ensino aprendizagem".

Privilegiando a reforma educativa, os professores correrão o risco de não prepararem devidamente os seus alunos para a prestação de provas escritas, necessariamente restritivas. Embora representando coisas que se desejam bem diferentes, dificilmente se poderá evitar a comparação entre a classificação de frequência e a obtida na prova global de escola. Quantos professores terão a força de pôr em causa, à opinião de terceiros, a sua qualidade profissional? Fica então a pergunta: será desejável criar este tipo de dilemas aos professores? A quem serve? O que de facto se deseja fazer do ensino secundário? Restringir a sua existência a uma solução simplista do problema de acesso ao ensino superior?

Estejamos conscientes que a situação é grave. "A avaliação tem um impacto directo quer naquilo que se ensina, quer no modo que se ensina" (Romberg e Zarinnia, 1987). Mais uma vez fica à responsabilidade do professor minimizar as consequências de medidas de que não é responsável. Uma só saída é por nós neste momento possível apresentar: procurarem-se, através de um trabalho em equipa e do recurso à capacidade criativa dos professores, formas de avaliação que, embora escritas, vão de encontro àquilo que hoje são as novas tendências do ensino da Matemática.

Homogeneidade, selectividade, medida: as palavras de ordem? Do que anteriormente foi dito poder-se-á desde já perceber que esta parece de facto ser a posição dos responsáveis por este despacho. Enquanto o ensino secundário não fizer parte do ensino obrigatório, reconhecemos que este ciclo tem características diferentes do ensino básico. No entanto, será que isso justifica ter tal carga de selectividade? O ensino secundário tem importância por si mesmo ou serve apenas para preparar para qualquer outra coisa?

Tal carga levanta mesmo problemas em termos de consistência interna do despacho. No ponto 24 pode ler-se que "a avaliação (sumativa) interna é da responsabilidade conjunta dos professores que integram o conselho de turma". Mas o que lhes resta fazer perante um sistema normativo tão rígido? Poder-se-á argumentar que tal só se aplica no final de cada ano lectivo. Mas se a avaliação começa por ter carácter contínuo, não será efectivamente a avaliação do final do ano aquela que importará a professores e a alunos?

Para onde foi a ênfase na avaliação formativa? A avaliação formativa é uma das modalidades de avaliação consideradas no novo sistema de avaliação dos alunos do ensino secundário. No entanto, o seu peso parece-nos claramente desvalorizado no conjunto de todo o despacho. Por exemplo, tendo por comparação o sistema de avaliação dos alunos do ensino básico, a expressão (que, embora óbvia, tanto incomodou alguns) que traduzia de forma clara que "a escola, através dos seus orgãos próprios, é responsável pelo percurso escolar dos alunos", é esquecida. Mesmo no ponto 59, relativo aos apoios e complementos educativos, se afirma de forma tímida que "a escola deve, na medida das suas possibilidades, desenvolver medidas de apoio e de complemento educativo".

Uma viragem tímida do regime de disciplina ao regime de classe? Uma outra alteração diz respeito à passagem do regime de disciplina do ensino secundário a um regime misto de disciplina/classe. A partir de agora, nos anos intermédios de ciclo, mesmo que os alunos não tenham aprovação no máximo a duas disciplinas (desde que a sua classificação não seja inferior a oito valores e esta situação não aconteça em dois anos de escolaridade consecutivos na mesma disciplina) podem matricular-se em todas as disciplinas do plano de estudos do ano seguinte. Esta medida, embora em comparação com um dos projectos de sistema de avaliação enviado para discussão nas escolas seja mais restritiva, parece-nos positiva. Ela encontra-se coerente com o pressuposto de que a aprendizagem não se faz de forma linear, nem tão pouco os alunos atingem no mesmo momento o mesmo nível de maturidade. Para além disso, o facto de uma dada disciplina ser, por exemplo, bianual toma agora um sentido mais real.

Conclusão. É nosso entender que o despacho normativo nº. 338/93 traz consigo determinações que podem pôr seriamente em risco a reforma do ensino secundário que apenas começou agora a dar os primeiros passos a nível nacional. Até que ponto a influência do que acontece noutros países da Europa se sobrepôs ao espírito da Reforma Educativa que se pretendeu introduzir em Portugal é a questão que aqui deixamos aos responsáveis do novo sistema de avaliação dos alunos do ensino secundário.

(1) Este artigo é baseado na sessão temática realizada pela autora no PROFMAT 93, que teve lugar em Outubro último, nos Açores.

Referências

Conselho Nacional de Educação. (1992). Parecer nº 2/92 do Conselho Nacional de Educação. In *Diário da República*, II Série, nº 257, 92/11/06.

Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário. (1991). *Ensino Secundário. Programas de Matemática e Métodos Quantitativos.* Ministério da Educação.

Leal, L. (1992). Afinal Sempre Vale a Pena...! In *Educação e Matemática*, 22, 22-24.

Noizet, G. e Caverni, J. P. (1985). *Psicologia da Avaliação Escolar.* Coimbra: Coimbra Editora.

Perrenoud, P. (1984). *La Fabrication de l'Excellence Scolaire: du Curriculum aux Pratique d'Évaluation.* Genéve: Droz.

Perrenoud, P. (1989). Le Point de Vue d'un Sociologue. L'Évaluation entre Hier et Demain. In *Coordination*, 35, 3-5.

Romberg, T. e Zarinnia, A. (1987). Consequences of the New View to Assessment of Students' Knowledge of Mathematics. In T. Romberg e D. Stewart (Eds.) *The Monitoring of School Mathematics: Background Papers.* Madison: University of Wisconsin-Madison.

Leonor Cunha Leal
ESE de Setúbal

Materiais para a aula de Matemática

O material Cuisenaire, criado por George Cuisenaire e divulgado a partir de 1953, é um material estruturado (que se baseia num sistema de relação entre cores e comprimentos) com aplicação em múltiplas situações da sala de aula.

Importantes conceitos matemáticos como: maior, menor, igual, dobro, metade, ordem crescente, ordem decrescente, composição e decomposição, e mesmo as quatro operações, podem ser explorados com este material.

Devido ao seu formato em barra, cuja secção é um quadrado de $1cm^2$ de área, podem ainda trabalhar-se as noções de área, perímetro e volume.

A ficha da página seguinte propõe a utilização deste material.

Eduardo Costa, Maria Teresa Costa e Rosário Ribeiro*

* Esta ficha foi elaborada a partir do texto "Material Cuisenaire" enviado por Eduardo Costa e Mª Teresa Costa para a Sede da APM, onde se encontra à disposição dos sócios.

Materiais para a aula de Matemática

As barras do Cuisenaire

O material Cuisenaire é composto por barras, cujo comprimento varia de 1 a 10 cm, e cubos com um centímetro de aresta. A cada comprimento está associada uma cor e um valor (fig.1).

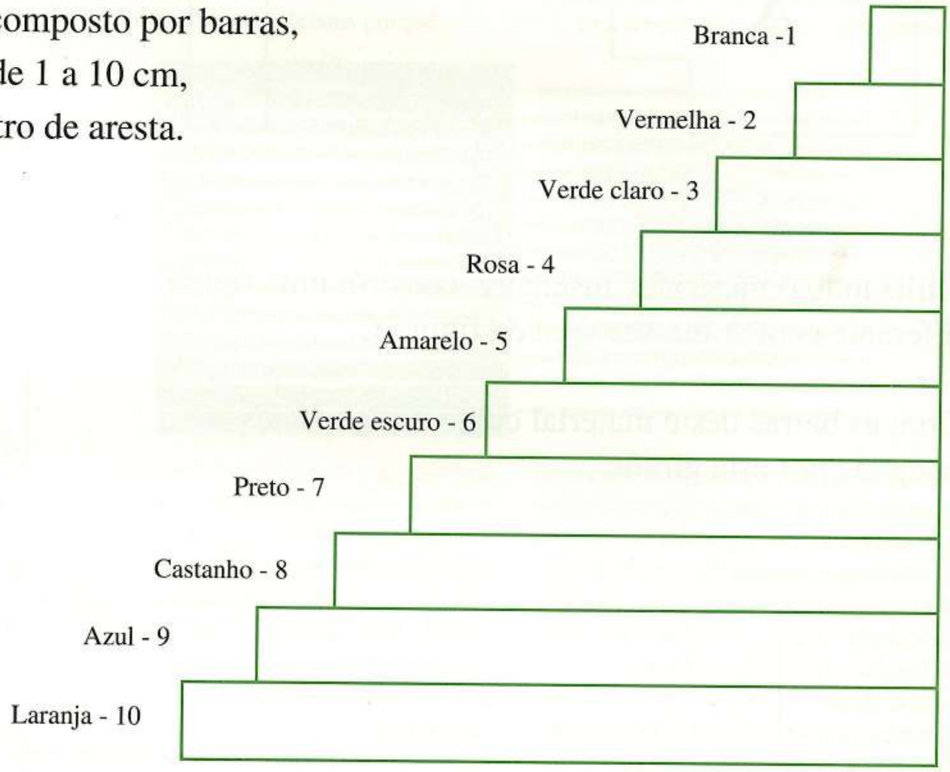


fig. 1

Se, com este material, quisermos representar o 5, podemos utilizar duas barras vermelhas e uma branca (fig.2), mas também podemos representá-lo utilizando apenas uma barra vermelha e uma barra verde-claro (fig.3).

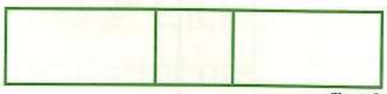


fig. 2

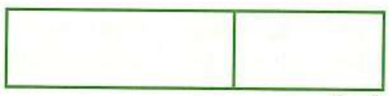


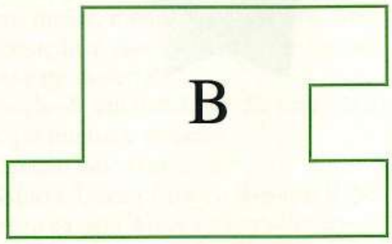
fig. 3

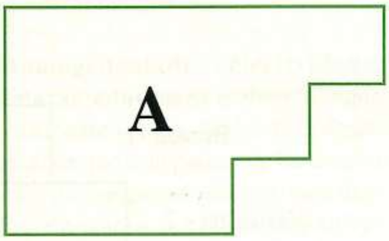
Numa folha de papel quadriculado representa o 7 de duas maneiras diferentes.

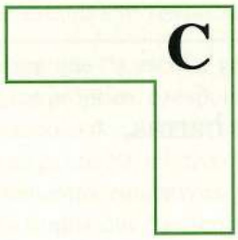
De quantas maneiras diferentes se pode representar o 9? Representa-as na tua folha.

Utilizando 3 barras de cor diferente cobre a superfície da figura A.
Desenha a figura na tua folha de papel quadriculado e mostra como fizeste.
Podes pintar o espaço ocupado por cada uma das barras com as respectivas cores.

Com as mesmas 3 barras faz a cobertura da figura B.
Desenha a figura B na tua folha de papel quadriculado.
Que relação existe entre as áreas das figuras A e B?
Calcula o perímetro de cada uma delas.

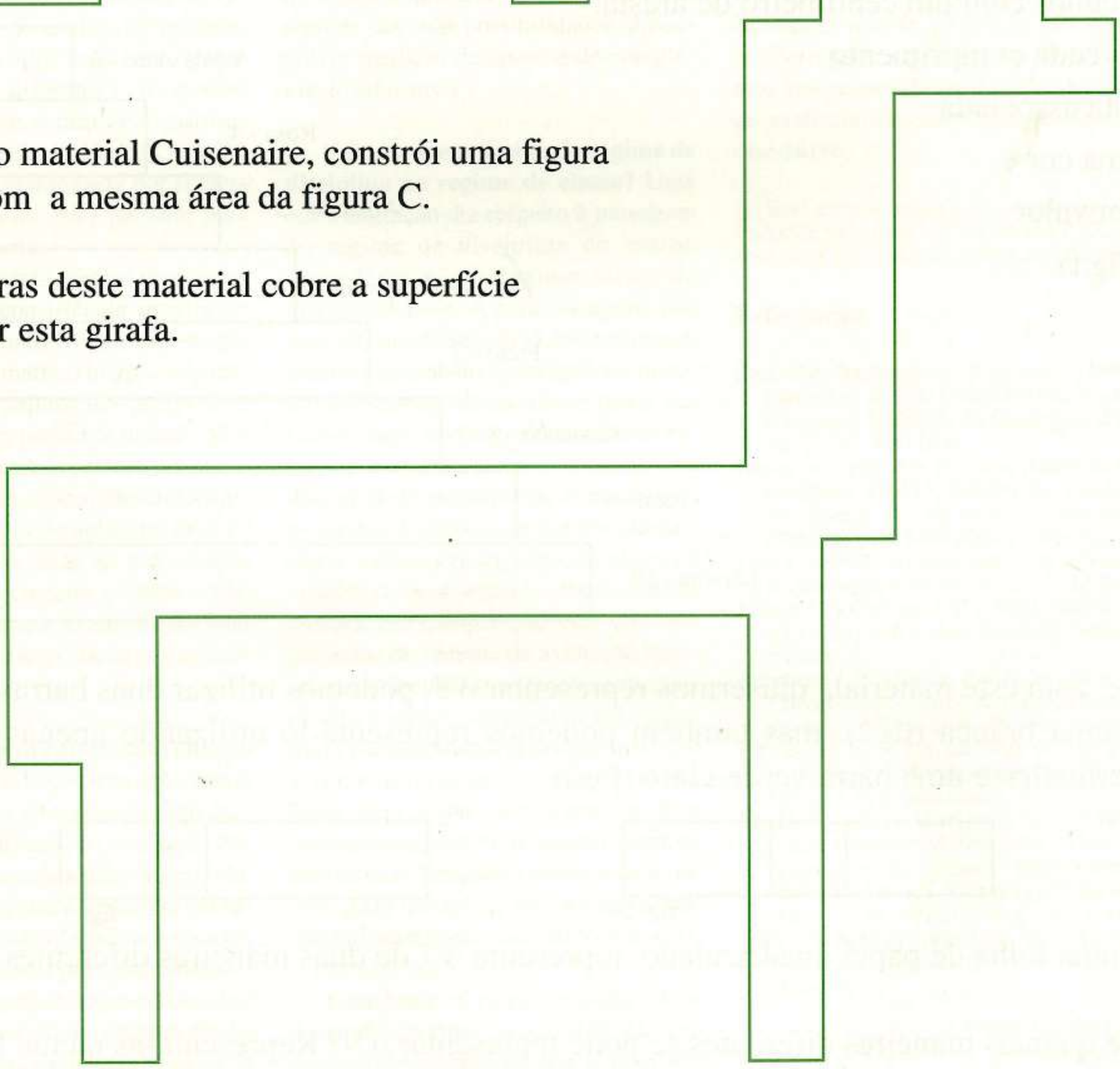






Utilizando o material Cuisenaire, constrói uma figura
diferente com a mesma área da figura C.

Com as barras deste material cobre a superfície
ocupada por esta girafa.

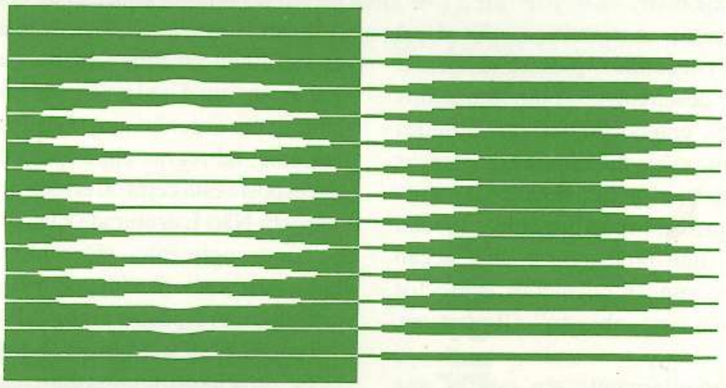


Em torno da Matemática e de Vasarely

Isolina Oliveira e Judith Silva Pereira

Foi tendo como cenário as pinturas de Vasarely que avançámos e recuámos num espaço manchado por uma dialéctica que opera por recuos e acrescentos de detalhes, de acordo com o duplo sentido de distância e de proximidade.

Só no fim percebemos porquê.



Pensar a avaliação tendo como cenário a pintura de Vasarely é a proposta deste artigo, onde se discute a utilização de instrumentos para a avaliação em Matemática no 2º Ciclo, particularmente, no domínio da resolução de problemas.

Os novos programas consideram "conteúdos de aprendizagem tanto os conhecimentos a adquirir como as atitudes e as aptidões a desenvolver o que implica necessária mudança de métodos" (Programa do 2º ciclo, p. 147). Assim, atribuindo ao ensino da matemática uma dupla função: "desenvolvimento das capacidades e atitudes" e "aquisição de conhecimentos e de técnicas para a sua mobilização", aponta-se para a necessidade de diversificar as formas de avaliação.

Na avaliação em matemática, ao falar-se de objectivos cognitivos está implícito que esses são relativos ao conteúdo e aos processos, isto é, a tudo o que diz respeito a aptidões, capacidades, estratégias e atitudes.

A definição dos objectivos de conteúdo parece clara. Se se considerar o programa do 2º ciclo os domínios são: números e cálculo, geometria, proporcionalidade e estatística.

No que diz respeito aos objectivos de processo há várias opções. No momento actual da investigação, parece consensual que se avaliem por um lado, conceitos e aptidões e, por outro, investigação e estratégias de resolução de problemas.

Pensamos que, numa perspectiva formativa da avaliação, um teste de desempenho deve incidir sobre a avaliação do desenvolvimento das estruturas do conhecimento, processos cognitivos e procedimentos associados que revelam como um dado domínio é adquirido. Neste sentido, é possível planear ajudas precisas contribuindo para o desenvolvimento de processos de pensamento mais elaborados.

Nesta abordagem a avaliação assume dois papéis fundamentais: em primeiro lugar, uma <u>função diagnóstico</u> para professores permitindo conhecer o que cada aluno aprendeu, informações gerais sobre os pontos fortes e fracos de um dado aluno, se o ensino atingiu ou não as metas e em consequência tomar decisões sobre o que deve ser e como deve ser ensinado, a "performance" da sua(s) classe(s) em comparação com outros professores e escolas e ainda estabelecer hierarquias de desenvolvimento conceptual que têm implicações no ensino.

Em segundo lugar, para o aluno, funciona como diagnóstico do seu progresso, informando-o sobre o que ainda não domina e simultaneamente terá um efeito motivador sobre a aprendizagem.

Deste modo, pais, professores e alunos podem verificar regularmente o progresso individual destes e identificar áreas que necessitam de uma maior atenção.

Uma avaliação com funções de diagnóstico deve tomar a forma de uma monitorização contínua de todos os pontos fortes e fracos dos alunos numa dada área curricular, juntamente com a apreciação dos seus comportamentos e atitudes visto que estes estão intrinsecamente relacionados com os processos de aprendizagem.

Aprender matemática não é só aprender conceitos e procedimentos. É essencial desenvolver comportamentos e atitudes, entendendo-se por atitudes "as organizações duradouras de crenças e cognição em geral, dotada de carga afectiva pró ou contra um objecto social definido, que predispõe a uma acção coerente, com as cognições e afectos relativos a este objecto" (Rodrigues, 1988).

É particularmente em tarefas que envolvem investigação e resolução de problemas que é possível desenvolver e avaliar a "confiança em fazer matemática", a perseverança, a flexibilidade nas apresentações de ideias matemáticas e a cooperação no trabalho de grupo, isto é, avaliar atitudes.

Deve ter-se presente que, particularmente na resolução de problemas, nem sempre é claro que se avalie exactamente as mesmas aptidões em cada aluno. Para o mesmo problema alunos com diferentes idades e experiências de aprendizagens podem ser confrontados com desafios diversos. Um problema pode ser considerado de rotina para um dado aluno e para outro pode representar um desafio, requerendo criatividade para a sua resolução.

Naturalmente que a capacidade de resolução de problemas se vai desenvolvendo ao longo de um certo período de tempo. Consequentemente a sua avaliação deve assumir não só a forma de dados resultantes da análise de um trabalho escrito, mas também a forma de observação realizada enquanto o(s) aluno(s) trabalha(m).

Foi à luz das considerações anteriormente explicitadas que se elaborou um conjunto de itens contemplando os vários domínios do programa do 2º ciclo e os processos já mencionados. Consideraram-se diferentes tipos de itens: Itens de Resposta Estruturada, quando é exigido ao aluno a selecção de uma resposta numa lista específica de alternativas ou ainda quando tem de escrever uma frase, uma palavra, um número, elaborar um desenho, um traçado ou um diagrama; há regras claras para decidir se a resposta está certa ou errada. Itens de Resposta Não Estruturada quando poucos constrangimentos são colocados ao aluno; são caracterizados por uma grande variação nas respostas produzidas.

Procedeu-se também à "análise da tarefa" no sentido de contribuir para uma clarificação dos processos das representações que o aluno tem sobre um dado conceito e ainda tendo em vista a utilização de diferentes técnicas de avaliação.

Na proposta apresentada, os vários itens podem ser utilizados com diferentes funções. Assim, o agrupamento de alguns deles poderá constituir um instrumento a ser utilizado pelo professor como forma de validação externa enquanto avaliativo do desempenho de um dado aluno, atribuindo-lhe uma classificação que está em relação com a dos outros e desde que seja estabelecido um critério de sucesso.

Uma outra posição pode ser adoptada — o professor pode estar interessado em detectar os pontos fracos e fortes dos alunos da sua classe relativamente à aquisição de conceitos e de procedimentos e à capacidade de comunicar, de planificar, de verificar, de tomar decisões, com o fim de estabelecer estratégias de remediação sistemáticas.

Em Vasarely, a montagem interior da imagem processa-se à medida que nos afastamos e a profundidade é sentida quando nos aproximamos da beleza das "coisas".

Em Matemática, quanto mais afastarmos o aluno de uma atitude negativa em relação a ela, mais conseguiremos que veja e sinta a sua beleza, o seu poder e profundidade.

Referências

Anderson, John R. (1990). *Cognitive Psychology and its Implications.* New York: W. F. Freeman and Company.

Associação de Professores de Matemática (Ed.) (1985). *Agenda para Acção - Recomendações para o Ensino da Matemática nos Anos 80.* Lisboa.

Associação de Professores de Matemática (Ed.) (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa.

Ernst, Paul (1989). *Mathematics Teaching: The State of the Art.* UK: The Falmer Press.

Marshall, S. P. (1989). Assessing Problem Solving: A Short-Term Remedy and a Long-Term Solution. In Charles, R. F. & Silver E. A. (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* (pp. 159-177). Laurence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics, Inc.(Ed.) (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino - Aprendizagem, Ensino Básico 2º ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação.

Rodrigues, Aroldo, Ph. D. (Ed.) (1988). *Psicologia Social.* Petrópolis.

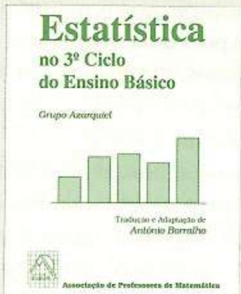
Isolina Oliveira
Instituto de Inovação Educacional
Judith Silva Pereira
Instituto de Inovação Educacional

Publicações APM

Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas
Colecção de Adendas 9-12 às Normas do NCTM
Preço 1200$00 (sócios 850$00)

Quinto ano
Colecção de Adendas K-6 às Normas do NCTM
Preço 700$00 (sócios 500$00)

Quadrante Vol. 2 Nº2
Revista Teórica e de Investigação
Preço 800$00 (sócios 1000$00)



Estatística no 3º ciclo do Ensino Básico
Grupo Azarquiel
Preço 1300$00 (sócios 1000$00)

No caso de desejar que lhe seja enviada qualquer publicação da APM pelo correio deverá enviar a respectiva quantia acrescida da percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e despesas de embalagem).
As percentagens de cobrança são as seguintes:
até 2500$00 - 20%
de 2501$00 a 5000$00 - 15%
mais de 5000$00 - 10%

Pontos de vista, reacções, ideias...

As "reacções, pontos de vista e ideias" reaparecem, após um breve interregno que resulta da publicação do número temático, cujas características e exigências são naturalmente especiais. Isso não significa, porém, que tenham deixado de chegar à Redacção novas contribuições para esta secção. Desta vez, dois leitores falam-nos, embora em contextos diferentes, de demonstrações pouco óbvias.

"Novas sobre o Teorema de Fermat"

Poderá Fermat descansar em paz? Uma demonstração do Teorema de Fermat foi apresentada no dia 23 de Junho de 1993, em Cambridge, no Instituto Isaac Newton, pelo matemático britânico Andrew Wiles, de 40 anos, actualmente professor na Universidade de Princeton, a finalizar uma comunicação subordinada ao título "Fórmulas Modulares, Curvas Elípticas e Representações de Galois", demonstração essa que suscitou espanto e excitação no mundo inteiro.

Pierre de Fermat, matemático francês do século XVII, tornou-se o mais brilhante matemático da sua geração ao desenvolver trabalhos na área da Teoria dos Números, na Geometria Analítica e na Teoria das Probabilidades, sem nunca os ter publicado e que só após a sua morte foram coligidos pelo seu filho. Este, em 1670, cinco anos após a morte de Fermat, publica um exemplar da "Aritmética" de Diofanto, acompanhado de comentários de seu pai. Na sequência do Teorema de Pitágoras, Fermat escrevia em 1673:

"Por outro lado, é impossível exprimir um cubo como soma de dois cubos, uma quarta potência como soma de duas quartas potências, ou em geral, uma potência maior do que dois como a soma de duas potências idênticas. Descobri esta demonstração verdadeiramente maravilhosa mas esta margem é demasiado estreita para a conter", ou seja, para $n>2$ não existem números inteiros X, Y e Z tal que $X^n + Y^n = Z^n$.

Este teorema, de enunciado simples mas do qual não se encontrava uma demonstração geral e nem se conseguia provar que era falso, despertou o interesse dos grandes matemáticos ao longo de 350 anos, forçando-os a desenvolver estudos que conduziram a novos ramos da Matemática (de que são exemplo a Teoria dos Números Algébricos e a Teoria dos Ideais). Ao longo dos tempos, muitos matemáticos apresentaram demonstrações contendo erros, como é o caso recente de Yoichi Miyaoka em 1988. A importância do teorema foi tal que em 1908 a Academia Real das Ciências, em Gotingen, institui o Prémio Wolfskehl no valor de 100000 marcos a atribuir a quem apresentasse uma demonstração correcta.

Consta que o professor Wiles trabalhou durante os últimos sete anos na resolução do problema e atendendo a que Wiles é reconhecidamente uma pessoa cautelosa e metódica, matemáticos presentes em Cambridge como Mazur de Harvard e Kenneth Ribert, da Universidade da Califórnia, mostram-se bastante confiantes na demonstração de Wiles.

A demonstração, que será objecto de aprofundado estudo, caso seja considerada correcta, projectará definitivamente Wiles para a glória.

Francisca Sousa

"Não é imediato, isso não é..."

O problema que vou propôr apareceu quando eu e alguns colegas corrigíamos um teste de um aluno que justificava a não monotonia numa dada sucessão assim: "como a subsucessão dos termos de ordem ímpar é decrescente, então a sucessão é não monótona". Parece uma justificação correctíssima, mas esta afirmação carece duma demontração que não é imediata. Aqui fica o exercício:

Seja (U_n) uma sucessão de números reais, tal que a subsucessão dos termos de ordem par é crescente e a subsucessão dos termos de ordem ímpar é decrescente. (U_n) é monótona?

Este problema é muito interessante, mesmo para uma abordagem numa aula com alunos, na medida em que mostra que, por vezes, aquilo que parece o mais óbvio, de facto não é.

É quando buscamos a demonstração que surgem as dificuldades, e constatamos que a nossa intuição, e por que não dizê-lo, os nossos vícios de raciocínio também nos podem enganar. Felizmente, não é este o caso, e qualquer sucessão nas condições do problema é não monótona.

Deixo, no entanto, o desafio. Acrescento apenas que a demostração não tem nada de especial, mas que também não é imediata, isso não é.

Luís Carmelo

Nota da Redacção: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

Quota 1994

Janeiro é o mês em que devemos proceder ao pagamento das quotas.

No ano de 1994 o valor da quota é de **4000$00** (3000$00, para o sócio estudante e 4500$00 para os sócios estrangeiros).

Para as Escolas ou outras Instituições ligadas à Educação, durante o ano de 1994, existem três modalidades:

a) mediante o pagamento de **2.400$00** a Instituição assinará a revista Educação & Matemática, recebendo 1 exemplar de cada um dos quatro números anuais.

b) mediante o pagamento de **4.000$00** a Instituição receberá 1 exemplar de cada um dos quatro números anuais da revista Educação & Matemática, o Boletim APM*Informação* e poderá adquirir qualquer publicação da APM a preço de sócio.

c) mediante o pagamento de **8.000$00** a Instituição receberá 2 exemplares de cada um dos quatro números anuais da revista Educação & Matemática, o boletim APM*Informação* e as Actas do Profmat (Encontro Nacional de Professores de Matemática), realizado nesse ano. A Instituição poderá, ainda, adquirir qualquer publicação da APM a preço de sócio.

Pode efectuar o pagamento da sua quota ou assinatura enviando um cheque, ou vale postal, à ordem da Associação de Professores de Matemática para a seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Os sócios que residem no estrangeiro deverão enviar o valor da quota em vale postal, ou em cheque passado sobre um banco português.

Ficha de inscrição/actualização na Associação de Professores de Matemática

Sócio nº ____________

Nome ______________________________

______________________________ Tel: ____________

Morada ______________________________

Código Postal ______________ Ano em que começou a leccionar: ____________

Data de nascimento ______ / ______ / ______ Nível de ensino: ____________

Escola ______________________________

Localidade ______________ Distrito ____________

Categoria Profissional ______________________________

Publicações - Envio pelo Correio

No caso de desejar que lhe sejam enviadas publicações pelo correio deverá enviar fotocópia da ficha de pedido de publicações, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** para:

Associação de Professores de Matemática - Rua Major Neutel de Abreu nº 11, 1500 Lisboa

Ao valor total das publicações deverá ser acrescida a percentagem correspondente para cobrir as despesas relativas à expedição (porte do correio e embalagem). As percentagens de cobrança são as seguintes:

até 2500$00 - 20%; de 2501$00 a 5000$00 - 15%; mais de 5000$00 - 10%

Se residir no estrangeiro e desejar encomendar publicações deverá previamente informar-se pelo fax 351-1-7782141 da quantia a enviar para os portes de correio.

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo

Sócio da APM ☐ Nº ______ Assinatura

Não Sócio ☐ ______________________

Subtotal ______

Portes de Correio (ver acima) ______

Valor Total ______

Nome ______________________________

Morada ______________________________

______________________ C.P. ______________________

Data do pedido ______________________

Para uso da APM — Pedido recebido em ______________

Assinatura — Enviado em ______________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

índice