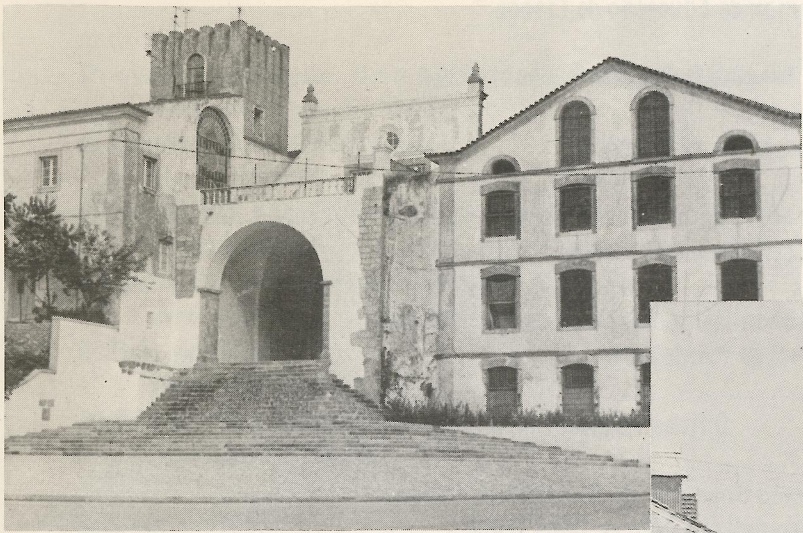
Educação e Matemática

Nº 1 Janeiro de 1987



PORTALEGRE

BRAGANÇA

PROFMAT 87
Bragança

APM: ESPERANÇA E DESAFIO
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
A GEOMETRIA DOS CRISTAIS
PROPORCIONALIDADE

Revista da Associação de Professores de Matemática

Associação de Professores de Matemática

Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática

Director
Leonor Moreira

Redacção
Conceição Mesquita, Henrique M. Guimarães, José Manuel Duarte e Paulo Abrantes.

Conselho Editorial
Carlos Próspero, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, João Filipe Matos, João Ponte, Leonor Filipe e Maria João Costa.

Correspondência: Henrique M. Guimarães ou Paulo Abrantes
Faculdade de Ciências - Departamento de Educação
Av. 24 de Julho, 134-4º, 1300 Lisboa

Indice

Ficha Técnica

Educação e Matemática Nº1
Data: Janeiro de 1987
Composição: APM
Montagem e Impressão: Costa e Valério
Tiragem: 1000 exemplares

Colaboraram neste número: Albano Silva, Conceição Mesquita, Cristina Loureiro, Francis Michel, Helena Margarida Couto, Henrique M. Guimarães, José António Duarte, José Manuel Duarte, Leonor Moreira, Luís Lopo, Maria João Costa, Paulo Abrantes e os grupos de trabalho da APM sobre currículos e sobre clubes de Matemática.

Colabora com **Educação e Matemática**

Lance-se uma pedra à superfície de um lago. A toalha de água, até esse instante lisa e serena, enruga-se em círculos concêntricos cada vez mais amplos. Do choque com diferentes obstáculos, resultam outras linhas de movimento que interferem com as primeiras e, em poucos segundos, tudo o que era liso e quieto se encrespa e se agita. Porém, não nos enganemos, a curto prazo tudo volta ao estado inicial.

São passados quatro meses sobre a criação da APM. Entretanto, muitas ideias tomaram corpo, muitos projectos se concretizaram.

Educação Matemática está já nas vossas mãos. Este primeiro número resultou do esforço de uns quantos que arregaçaram as mangas e puseram mãos à obra, mas afirmando-se como órgão de expressão de todos os professores de Matemática interessados em elevar o nível pedagógico da sua actividade, **Educação Matemática** far-se-á eco das suas questões, das suas dúvidas, tornar-se-á local de debate de opiniões, veículo de experiências.

Como o nome indica, a Revista publica trabalhos no âmbito da Educação em geral, da Matemática (aspectos científicos) e, sobretudo, na área do ensino/aprendizagem da Matemática. Nela caberão, portanto, artigos de opinião sobre desenvolvimento curricular ou sobre a formação de professores, a par de ideias práticas para abordar conceitos matemáticos ou estudos de investigação sobre a utilização educativa das tecnologias de ponta.

Colabora com artigos, opiniões, ideias. Se tiveres informações que interessem a outros colegas, notícias locais, críticas a fazer ou sugestões a dar, escreve-nos.

Não deixes que a água se aquiete!

- A extensão de um artigo não deverá, em princípio, exceder seis páginas formato A_4.
- Os originais devem ser dactilografados a dois espaços.
- Figuras ou desenhos devem ser executados, à parte, de preferência a tinta da China.

Se não puderes cumprir estas exigências, mas o teu trabalho valer a pena, manda-o de qualquer modo. Toda a colaboração deverá ser enviada para:

Henrique M. Guimarães ou Paulo Abrantes
Departamento de Educação da
Faculdade de Ciências de Lisboa
Av. 24 de Julho, 134, 4º
1300 LISBOA

OPINIÕES ▫ CRITICAS ▫ NOTICIAS ▫ OPINIÕES

Este é um espaço reservado à comunicação com - e entre - todos os que lêem **Educação Matemática**. Um espaço de opinião e de crítica, de intercâmbio, de informação; um lugar, porque não, de "conversa", de "correspondência", onde, escrevendo, se fale de "coisas que acontecem" no nosso trabalho com a Matemática e com a Educação.

Desta vez chegaram notícias de Setúbal; da Parede escreveu J. M. Duarte, professor de Matemática e, de França, da Associação de Professores de Matemática do Ensino Público, chegou uma simpática carta, endereçada a Leonor Filipe, Presidente da APM, onde se saúda a criação da APM. Ouçam então, ou melhor, leiam:

Montpellier, le 30.10.96

Chère Madame

(...)

Félicitations pour la naissance de notre "petite soeur" portugaise! Nous lui enverrons notre Bulletin et quelques brochures à l'occasion du passage à Lisbonne de l'exposition de La Villette. Si nous pouvons vous aider autrement, écrivez-moi. Et si vous éditez um Bulletin, nous serions heureux de le recevoir, même si on a du mal à le lire!

Avec mes amitiés,

Anne Michel-Pajus

(continua na p. 9)

Editorial

Associação de Professores de Matemática: Esperança e Desafio

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Portalegre, 19 de Setembro de 1986. No decorrer do PROFMAT-86, Encontro que reuniu, ao longo de quatro dias, mais de 200 professores de Matemática de todos os graus de ensino e dos mais diversos pontos do país, uma Assembleia Geral aprovou, por unanimidade e aclamação, a proposta de se constituir a Associação de Professores de Matemática (APM). Além disso, aprovou ainda os estatutos da nova associação e elegeu os seus primeiros dirigentes.

A criação da APM constitui, sem dúvida, um facto novo no panorama do Ensino da Matemática em Portugal. Surgindo como um movimento organizado de renovação no qual se empenharam algumas dezenas de professores de diferentes graus de ensino, a APM é encarada de modos muito diversos: com esperança por muitos, com expectativa por outros, talvez com receio por terceiros. Mas antes de discutir os desafios que se lhe colocam, importa analisar os seus antecedentes, a sua razão de existir.

O Ensino da Matemática em crise

Em Portugal, nos últimos tempos, o Ensino da Matemática tem vivido numa situação de crise permanente. Em todos os graus de ensino, do primário ao superior, o insucesso na disciplina de Matemática atinge índices preocupantes. Não se trata de insucesso apenas no sentido estrito da percentagem de reprovações. Um número crescente de alunos não gosta de Matemática, não entende para que serve estudar Matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância. Mesmo muitos daqueles que conseguem notas positivas, procuram sobretudo dominar técnicas úteis para resolverem exercícios tipo. Os professores mostram-se igualmente descontentes, queixam-se dos programas que são grandes, pouco flexíveis, demasiado abstractos. Não sabem como interessar os seus alunos. E além disso sentem-se isolados, com poucas oportunidades para discutirem com os colegas ou para conhecerem as experiências mais interessantes que, apesar de tudo, se vão realizando.

Esta situação de crise tem naturalmente antecedentes. A última grande reforma que ocorreu na Matemática escolar teve o seu início, em Portugal, em meados dos anos sessenta. Foi a introdução da chamada "Matemática Moderna" que se propunha actualizar o ensino da Matemática, em particular contrariando o ênfase tradicionalmente dado aos processos de mecanização do cálculo. Não se pretende aqui analisar a origem ou a evolução de um processo tão complexo como esse. O que é certo, porém, é que de uma reforma experimental iniciada em turmas-piloto, nos dois últimos anos do antigo ensino liceal (onde o objectivo central era o de preparar os alunos para os estudos superiores), se passou no início dos anos setenta para uma generalização dos novos programas a todos os níveis de escolaridade. Caiu-se rapidamente num ensino muito desligado da realidade concreta dos alunos, no qual se atribuia um grande relevo às estruturas matemáticas e às suas propriedades. Esse estilo de ensinar Matemática e esses programas foram-se revelando progressivamente mais inadequados quer às necessidades individuais dos alunos quer às necessidades sociais, sobretudo depois da explosão escolar e alargamento da escolaridade obrigatória do começo dos anos setenta, e das grandes transformações sociais e escolares posteriores a 1974.

Este fenómeno da inadequação do ensino da Matemática (das suas finalidades, conteúdos, métodos, etc) a uma nova situação social e escolar ocorreu, aliás, um pouco por todo o mundo e tem sido analisado e discutido por numerosos autores (por exemplo Niss, 1981; Brown, 1981).

Mas, afinal, é esse estilo e são esses programas que têm continuado, no essencial, a ser dominantes até hoje no nosso país, apesar de algumas tentativas mais ou menos pontuais de mudança. Muitos dos responsáveis do Ministério da Educação, agarrados a concepções e práticas do passado, parecem ter dificuldade em aperceber-se do desajustamento cada vez maior entre "este" ensino da Matemática e as necessidades quer sociais quer individuais, e aliás movem-se num terreno onde a burocracia e o excessivo centralismo tendem a resistir à mudança. Mas, como quase sempre sucede perante uma crise que se prolonga, o descontentamento entre os professores e alunos tem ajudado a gerar um desejo de mudança e, sobretudo, uma consciência cada vez maior de que é necessário mudar.

Um movimento de renovação?

De facto, traduzindo esse desejo de renovação, um grande número de iniciativas, praticamente inexistentes até ao início da década actual, tem surgido nos últimos anos. Entre elas, podem destacar-se as seguintes:

1. Começam a ter lugar periodicamente, num número crescente de escolas, realizações destinadas a desenvolver o interesse pela Matemática, em especial pelos aspectos ligados às aplicações desta disciplina e à resolução de problemas. As "semanas da Matemática", conferências dirigidas aos alunos, concursos de problemas, exposições de trabalhos interdisciplinares, são hoje frequentes em muitas escolas preparatórias e secundárias.

2. Constituem-se, em diversas escolas, clubes de Matemática, no âmbito dos quais se organizam actividades não curriculares, por vezes ligadas ao uso dos computadores mas também contemplando a resolução de problemas e jogos educacionais, ou o estudo e divulgação de aspectos históricos ou interdisciplinares da Matemática.

3. Começam a realizar-se anualmente as Olimpíadas da Matemática, concurso de problemas que a Sociedade Portuguesa de Matemática vem promovendo para estudantes do Ensino Secundário. As Olimpíadas adquirem um âmbito nacional a partir de 1983, mobilizando milhares de estudantes e centenas de escolas de todo o país.

4. Os computadores começam a aparecer nas escolas perante uma reacção muito favorável dos alunos e constituindo para alguns professores um factor que pode contribuir para uma renovação significativa no ensino da Matemática. A partir de 1985, inicia-se um projecto de âmbito nacional (o projecto Minerva), envolvendo diversas Universidades e escolas de vários níveis, destinado a estudar a introdução dos meios informáticos no ensino não superior.

5. Os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática parecem conquistar finalmente um lugar próprio nas Universidades. Existem hoje licenciaturas em Ensino da Matemática em quase todas as Universidades do país. Professores portugueses frequentam cursos de pós-graduação no estrangeiro, especificamente na área da Educação Matemática. Em 1985, começa no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa o primeiro curso de mestrado nesta área.

6. Sucedem-se os Encontros de professores de Matemática, tanto regionais como nacionais, e surgem publicações inteiramente dedicadas ao ensino e aprendizagem da Matemática. Retoma-se o contacto com o estrangeiro, nomeadamente com a participação sistemática de professores portugueses em congressos e organismos internacionais.

São precisas novas orientações

Este movimento não se traduziu, pelo menos por enquanto, em alterações curriculares. Nem os programas nem as orientações oficiais quanto ao ensino da Matemática sofreram quaisquer mudanças significativas. As realizações atrás descritas têm sido impulsionadas essencialmente por uma grande vontade de mudança da parte de muitos professores e alunos e parecem corresponder a uma inflexão no sentido de se considerar que:

(a) é necessário que os alunos assumam um papel mais activo e interveniente na construção do seu próprio conhecimento;

(b) os objectivos educacionais relevantes não são apenas de natureza cognitiva mas também afectiva e social;

(c) as actividades de aprendizagem devem ser entendidas de uma forma mais diversificada e aberta, não se restringindo ao que é possível fazer-se dentro da sala de aula tradicional;

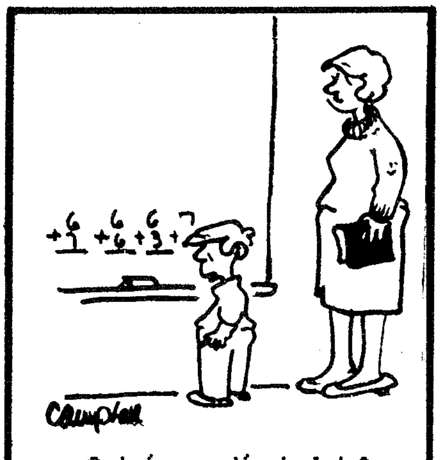
(d) é importante que se recorra às novas tecnologias, e em particular aos computadores, como fonte de renovação das práticas pedagógicas;

(e) deve atribuir-se uma maior importância à resolução de problemas, às aplicações, e às relações interdisciplinares.

Estes pontos correspondem, em grande parte, a aspectos essenciais que diversos autores e organizações internacionais vêm destacando como novas prioridades e orientações a considerar no Ensino da Matemática (por exemplo, Christiansen, 1975; NCTM, 1980). Mas, acima de tudo, reflectir sobre estas "novas tendências" poderá ser um excelente meio para começarmos a ver a nossa actividade "com outros olhos". Parece ter sido essa a intenção de João Ponte, na conferência final do PROFMAT-86, ao defender o uso da expressão "Educação Matemática" nos seguintes termos:

(...) a tradicional expressão "Ensino da Matemática" não é provavelmente a mais apropriada para caracterizar o que constitui o essencial da nossa actividade. Em primeiro lugar, porque implica desde logo a ideia de que há um movimento de sentido único, do professor -- aquele que sabe e ensina -- para o aluno -- aquele que é ensinado. Em segundo lugar, porque contém implícita a noção de que a Matemática tem uma existência objectiva, independente dos seres humanos, e é por isso mesmo estática e imutável.

Parece-me que estas concepções, profundamente entranhadas no nosso sistema de ensino, precisam de ser definitivamente postas em causa. Temos de considerar outras realidades educativas, para além dos movimentos de transmissão que inevitavelmente terão sempre de se processar do professor para o aluno. De facto, existem igualmente movimentos do aluno para o professor, tal como existem interacções recíprocas entre os alunos e influências múltiplas da sociedade sobre os próprios estudantes, muitas das quais operam exteriormente à própria escola. Mas, além disso, temos de considerar o fenómeno do desenvolvimento das ideias matemáticas como um processo dinâmico, vivido pelos alunos, muitas vezes por caminhos próprios, muito diferentes uns dos outros.



Onde é que está o teclado?

APM: esperança...

Um dos aspectos decisivos num processo de renovação do ensino é o que se refere ao papel dos professores. Tradicionalmente, os professores são encarados como uma espécie de "correia de transmissão" (de uns quantos conteúdos científicos organizados por alguém na forma de "programas de ensino") sendo sistematicamente colocados à margem da definição das orientações curriculares.

Nos últimos dois ou três anos, porém, parece ter-se começado a desenvolver uma nova dinâmica entre um grande número de professores de Matemática de vários graus de ensino e de diversos pontos do país. Foi essa dinâmica que tornou possível a criação de uma Associação de Professores de Matemática em Portugal.

Para isso, terá concorrido (além das condições objectivas atrás apontadas) a conjugação de interesses entre vários grupos, de um modo ou de outro ligados ao Ensino da Matemática, e que se podem identificar com o trabalho no âmbito da formação de professores em algumas Universidades, na profissionalização em exercício (principalmente ao nível do Ensino Preparatório), e mais recentemente em diversas Escolas Superiores de Educação.

Por volta de Janeiro de 1985, começou a ser discutida a possibilidade de criação de uma associação de carácter profissional que mobilizasse aqueles para quem os problemas da Educação Matemática estão no centro dos seus interesses, e que pudesse constituir um salto qualitativo no movimento de renovação que se tornava imprescindível apoiar e consolidar. Em Setembro desse ano, com a realização em Lisboa do PROFMAT-85, que reuniu mais de 300 professores, este processo tornou-se praticamente irreversível dado o grande apoio que a ideia suscitou.

Durante o ano lectivo 1985/86, a preparação do PROFMAT-86 compreendeu, em lugar de destaque, o funcionamento de vários grupos de trabalho sobre temas que mobilizaram algumas dezenas de professores: clubes de Matemática, renovação de currículos e programas, utilização educativa de computadores, etc. Em Janeiro de 1986, um numeroso grupo de professores reuniu na Escola Preparatória Marquesa de Alorna e, além de discutir as questões essenciais para a organização do PROFMAT, decidiu que nesse Encontro deveria ser proposta a criação da APM, para a qual foram apontados os seguintes objectivos:

(a) promover a participação activa dos professores de Matemática de todos os graus de ensino na discussão e implementação de novas orientações curriculares;

(b) estimular e apoiar o seu crescente interesse e participação em projectos de investigação pedagógica;

(c) contribuir para quebrar o isolamento a que estão geralmente sujeitos, procurando criar melhores condições para o trabalho colectivo e a troca de experiências.

A criação da APM, em Portalegre, foi um passo de um processo que já estava em marcha.

Até agora, em Portugal, a única associação ligada à Matemática era a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) de que muitos professores, especialmente dos ensinos secundário e superior, têm sido sócios. A SPM tem promovido algumas realizações importantes para o ensino, de que se destacam encontros de professores e as já referidas Olimpíadas. No entanto, a experiência nacional e internacional vem mostrando que uma sociedade científica deste tipo, dirigida por matemáticos, está vocacionada para intervir nos problemas da investigação e ensino superior (que aliás são questões de grande importância para o nosso país), mas não se sente envolvida nos grandes problemas do ensino e aprendizagem. O que, de resto, é natural. O interesse e a sensibilidade dos matemáticos pelos problemas educacionais, à parte uma ou outra excepção, são tradicionalmente muito reduzidos. Este facto não invalida que a colaboração entre os matemáticos e aqueles que, desde a escola primária, ensinam Matemática seja desejável e, mais do que isso, necessária. Mas, a menos que se subalternizem os problemas educacionais ou se assuma uma atitude, totalmente injustificada, de paternalismo relativamente aos professores, a criação da APM é certamente um acontecimento a saudar.

Em todos os países desenvolvidos do mundo, coexistem sociedades científicas e associações de professores. Havendo pontos comuns, elas realizam por vezes iniciativas conjuntas. Mas, globalmente, são organizações com objectivos, actividades e centros de interesse diferenciados. O futuro mostrará que o mesmo tende a ocorrer em Portugal. A SPM e a APM correspondem a dois "minimundos" distintos, a duas perspectivas. Elas farão, certamente, coisas muito diferentes (o PROFMAT e esta Revista talvez sejam dois bons exemplos disso). Coisas igualmente importantes, em qualquer dos casos.

... e desafio

Em muito pouco tempo (para aquilo a que estamos habituados...), a APM constituiu-se, legalizou-se e lançou novos projectos. Ela vai agora certamente crescer. Mas, acima de tudo, a APM pretende ser uma associação assente na iniciativa e no dinamismo dos seus membros e na ideia de uma grande descentralização. Existem já alguns grupos a trabalhar, em vários pontos do país, no desenvolvimento de diversos projectos. É importante que eles tenham oportunidade de trocar ideias e experiências com outros colegas, seja em Encontros seja através de publicações. A APM quer ser isso e não uma associação em que uma direcção central mais ou menos activa dá conta dos seus próprios projectos a um grupo grande mas passivo de associados. Existe naturalmente uma direcção nacional que, neste momento, integra professores dos mais variados pontos do país, desde Bragança a Faro. Essa direcção deverá procurar criar as condições mais propícias à realização dos objectivos da Associação. Em particular, deverá apoiar todas as iniciativas, de natureza local ou não, que grupos de professores promovam no sentido da renovação do ensino da Matemática. Mas, sem essas iniciativas, a APM será provavelmente um fracasso.

Doze dias depois de ter sido formalmente criada em Portalegre a Associação de Professores de Matemática, o núcleo de Viana do Castelo da APM promoveu nesta cidade (em colaboração com a Delegação do Porto da SPM) um Encontro que reuniu cerca de 150 professores de Matemática do Norte do país. Este facto constitui um exemplo extraordinário de iniciativa e de confiança porque, como é evidente, o Encontro começou a ser preparado com uma grande antecedência e, nessa altura, ninguém podia ter a certeza absoluta de que a APM iria mesmo ser uma realidade.

A APM é uma aposta difícil mas que vale a pena fazer. Se ela for ganha, então temos boas razões para acreditar que os professores de Matemática poderão desempenhar um papel decisivo na renovação da Educação Matemática no nosso país. Que bem precisa é.

Referências

Brown, M. (1981). Goals as a reflection of the needs of the learner. Em Robert Morris (Ed.), Studies in Mathematics Education (vol. 2). Paris: UNESCO.

Christiansen, B. (1975). European Mathematics Education, the past and present. Copenhagen: Royal Danish School of Educational Studies.

NCTM (1980). An agenda for action - recommendations for school Mathematics of the 80s. EUA: NCTM.

Niss, M. (1981). Goals as a reflection of the needs of society. Em Robert Morris (Ed.), Studies in Mathematics Education (vol. 2). Paris: UNESCO.

Ponte, J. (1986). Investigação, dinamização pedagógica e formação de professores: três tarefas para a renovação da Educação Matemática. Profmat 2.

Proporcionalidade: Uma Actividade de Aprendizagem

Maria da Conceição Mesquita, Escola Secundária do Alto da Damaia

Um dos factores a que progressivamente vem sendo atribuída maior importância, no que se refere à aprendizagem da Matemática, é o papel que cada aluno desempenha na construção do seu próprio conhecimento.

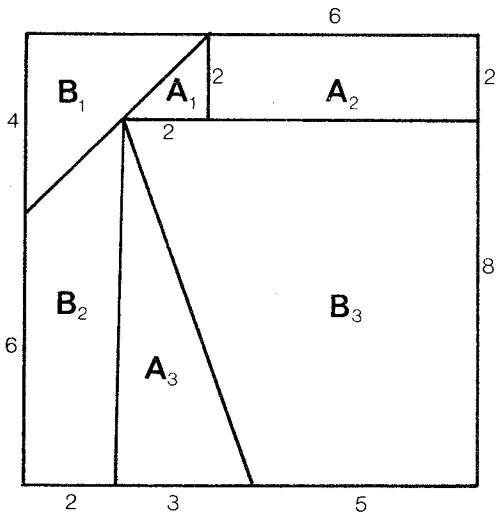
Nem sempre é fácil conseguir envolver os alunos na realização de uma tarefa agradável, para qual se sintam com grandes possibilidades de sucesso e que, ao mesmo tempo, constitua uma actividade significativa de aprendizagem.

A ampliação de um puzzle, peça a peça, em que apenas se diz que um segmento de 4 cm é transformado num de 6 cm, pode no entanto ser um bom exemplo desse tipo de actividades. No meu caso, essa tarefa foi proposta a alunos do 7º ano de escolaridade, na 1ª aula sobre Proporcionalidade Directa. O trabalho foi organizado com base em três etapas distintas que os alunos deveriam percorrer:

I - Realização da tarefa;
II - Validação da estratégia seguida;
III- Conceptualização.

I

No começo da aula foi distribuída aos alunos (divididos em grupos de 4 elementos) uma ficha com um puzzle, com determinadas medidas.



A tarefa de cada grupo consistia em construir um puzzle com a mesma forma mas em que um segmento de 4 cm fosse transformado num segmento de 6 cm.

Propunha-se aos alunos que seguissem as seguintes instruções:

1) Dividir-se em duas equipas de dois elementos cada;

2) Uma das equipas deveria construir as peças ampliadas A_1, A_2 e A_3; a outra as as peças B_1, B_2 e B_3.

Concluída a fase 2), o grupo deveria reunir-se novamente e juntar as 6 peças. Caso surgissem dificuldades, o grupo discutiria os processos utilizados por cada equipa e adoptaria aquele que lhe parecesse mais correcto (Inflexão nº3, 1983).

II

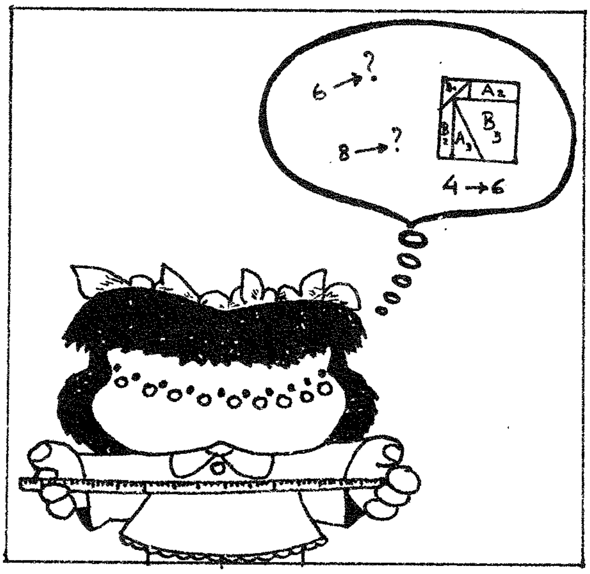
Foi importante dar tempo a que todos os alunos chegassem a esta etapa. Na maioria dos grupos, os alunos verificaram que as peças ampliadas não encaixavam umas nas outras de modo a formar um novo quadrado.

Depois das inevitáveis acusações mútuas entre alunos das duas equipas, depois de conferidas todas as contas, os alunos começaram a pôr em dúvida que a sua estratégia fosse a melhor, uma vez que ela não tinha conduzido a um bom resultado. Sentiram então necessidade de procurar uma nova forma de resolver o seu problema, o que alguns grupos acabaram por fazer com sucesso.

Por fim, fez-se um balanço global do trabalho realizado pelos diversos grupos, dando-se especial ênfase à verificação das razões que levaram determinadas estratégias a falhar. É importante sublinhar, que o erro mais frequente consistiu em adicionar uma constante a todos os comprimentos dados, em vez de procurar uma constante multiplicativa que assegurasse a proporcionalidade entre os comprimentos correspondentes. Aliás, a situação proposta aos alunos foi construída considerando já que este erro "de tipo aditivo" provavelmente ocorreria e que cometê-lo e ultrapassá-lo constituiria um passo importante na aprendizagem da noção de constante de proporcionalidade directa.

Algumas situações familiares podem ajudar os alunos a compreender as razões do fracasso daquele tipo de estratégia aditiva:

- Aumentos fixos (e não percentuais) alteram a razão entre os ordenados dos diversos trabalhadores de uma empresa;
- Adicionando uma constante ao comprimento de cada um dos lados de um rectângulo, "aumenta-se" a figura mas altera-se a forma do rectângulo.



III

A conceptualização foi ajudada pela resolução de uma ficha-síntese do trabalho realizado (coluna ao lado). Essa ficha começou por ser preenchida em casa, o que permitiu recuperar grande parte do tempo perdido(?) na aula.

Depois desta etapa, extensões desta abordagem poderão (ainda) ser a ligação do tema aos gráficos cartesianos ou à noção de semelhança de figuras geométricas.

Algumas ideias

A avaliação de actividades deste tipo constitui, a meu ver, uma tarefa difícil. Isto porque, provavel-

Ficha de trabalho

O problema consiste, afinal, em determinar os transformados de 2, 3, 5, 6 e 8 por meio de uma aplicação que transforma 4 em 6 (e que mantém a forma das figuras). Isto é:

2 ---> ?	4 ---> 6	6 ---> ?
3 ---> ?	5 ---> ?	8 ---> ?

Já deves ter compreendido qual é o processo correcto para determinar aqueles transformados: multiplicar cada um dos originais por 3/2 (ou 1.5 ou 6/4). De facto:

original	operador	transformado
2		....
3		....
4	x1.5	....
5		....
6		....
8		....

ou, de outra forma, sendo a aplicação definida por **x ---> y = 3/2 x**.

x	y
2	....
3	....
4	6
5	....
6	....
8	....

Poder-se-á dar outro aspecto aspecto ao problema. Para manter a mesma forma (das figuras iniciais), os comprimentos dos segmentos no puzzle ampliado têm que ser directamente proporcionais aos do puzzle inicial. Isto quer dizer que quanto maior for o valor de x, tanto maior será o valor correspondente de y, e este aumento é de tal forma que o quociente entre cada valor de y e o correspondente valor de x é sempre o mesmo (constante):

$$\frac{\_\_}{2} = \frac{\_\_}{3} = \frac{6}{4} = \frac{\_\_}{5} = \frac{\_\_}{6} = \frac{\_\_}{8} = 1.5$$

A esta razão constante, 1.5 ou 3/2, dá-se o nome de constante de proporcionalidade.

mente, elas desenvolverão capacidades que apenas poderão revelar-se num futuro não muito imediato. Há contudo determinados aspectos deste trabalho que eu gostaria de realçar:

1. A possibilidade dada aos alunos de validarem as suas próprias estratégias. Ao contrário do que geralmente acontece, aqui não foi o professor que teve o "privilégio" de dizer o que estava certo ou errado; ele poderia até nem ter estado presente na discussão feita nos grupos.

2. O facto de os erros cometidos pelos alunos serem o ponto de partida para nova discussão e novas descobertas. Isto leva os alunos a concluir que errar não é necessariamente mau, mas que pode constituir um facto importante no seu processo de aprendizagem; tal poderá incentivá-los a querer pensar sozinhos, sem medo de não chegar logo à resposta considerada certa.

3. Trata-se de um bom exemplo de uma situação em que conceitos matemáticos surgem a partir de um problema concreto. Esta é uma perspectiva bastante real da utilidade da Matemática e, no entanto, é o contrário o que quase sempre ocorre nas nossas aulas; os problemas práticos surgem apenas no fim, como exemplo de aplicação de conceitos e teorias que o professor deu previamente aos seus alunos.

4. Finalmente, a alteração que poderá surgir no papel que o professor e os alunos desempenham no processo de ensino-aprendizagem. Os alunos que geralmente "aprendem" com a explicação do professor, têm aqui oportunidade de sentir que poderão aprender também sozinhos e uns com os outros em grupo. Por outro lado, também o próprio professor experimentará uma alteração na sua relação com os alunos. Numa aula como esta é impossível cumprir um plano rígido: só na presença dos alunos e perante as suas descobertas, se poderá saber qual o melhor caminho a seguir. Isto exige de nós um esforço completamente diferente do que estamos habituados a fazer, implicando sobretudo que aceitemos correr alguns riscos. Mas correr riscos não fará parte do desafio interessante que pode ser a actividade de um professor?

OPINIÕES ◦ CRITICAS ◦ NOTICIAS ◦ OPINIÕES

A APM em Setúbal

J. A. Duarte, da Direcção da APM, na comunicação que nos enviou, relata uma reunião de professores de Setúbal tendo em vista a constituição de um núcleo da APM nessa cidade. Diz-nos ele:

(...) Foram levantados alguns problemas que se prendem com as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem (...); foi feita uma síntese do trabalho realizado por alguns Clubes de Matemática na E.P. Luisa Todi e na E.P. do Pinhal Novo (...); debateram-se também questões relacionadas com os programas de Matemática (...) e com a inserção das novas tecnologias no âmbito do processo da aprendizagem da Matemática e necessidades de formação neste domínio.

(...) Foram tomadas algumas decisões no sentido de viabilizar o trabalho do Núcleo de Setúbal da APM (...) tendo sido constituídos dois grupos de trabalho: Programas/Didáctica de Matemática e clubes da Matemática.

José António Duarte

****

O Português e a Matemática

Em despacho de 17 de Setembro do ano que agora finda (Desp. 32/EBS/86), a Srª Secretária de Estado do Ensino Básico e Secundário estipula, entre outras coisas, que no Ensino Preparatório e no Curso Geral Unificado do Secundário, o "chumbo" a Português passe a acarretar a perda de ano, embora admita a possibilidade de o Conselho Pedagógico, por proposta do Conselho de Turma, abrir excepções...

Venho propor que a nossa Revista dinamize entre os professores de Matemática a discussão desta controversa medida e das suas implicações. Tanto mais que a sua fundamentação, feita no referido despacho em seis linhas do D.R. é, além de curta, vaga: "dignificar, preservar e desenvolver a língua e a cultura portuguesas", "a experiência colhida da avaliação no Preparatório e Secundário"?!

Que esclarecimentos pedir, que medidas complementares exigir à Srª Secretária? Aceitar ou propor a revogação?

E, para que "haja males que venham por bem", alargar a discussão: que importância tem a linguagem dos alunos na sua aprendizagem da Matemática? como encaramos a riqueza ou a penúria de vocabulário e sintaxe, as diferenças entre os alunos? como as enfrentamos, agindo como professores de Português em sentido lato?

Tantas perguntas e muitas mais por fazer! E não me digam que isto não é assunto que diga respeito aos professores de Matemática!...

J. Manuel Duarte

A Resolução de Problemas

Leonor Moreira, Escola Preparatória Prof. A. Pereira Coutinho

O problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

(Polya, 1945)

Um pequeno inquérito conduzido, no ano lectivo anterior, numa escola dos arredores de Lisboa, permite-nos afirmar que a maior parte (91.3%) dos alunos dessa escola não indicavam a Matemática como primeira preferência no conjunto das disciplinas curriculares. E esta afirmação é, assim mesmo, um eufemismo. De facto, apenas 12.8% dos alunos indicavam a Matemática como segunda ou terceira preferência. Se é certo que não podemos generalizar estes resultados, podemos, no entanto, afirmar que o insucesso em Matemática (e estamos a identificar insucesso, apenas, com reprovação) atinge níveis preocupantes.

Neste panorama, o que parece anormal é a grande adesão dos alunos e o êxito obtido por estes em iniciativas ou actividades como Clube de Matemática, Semana da Matemática, Problema da Quinzena, Jornal de Matemática. Mais estranho se torna constatar que não são os alunos com melhor aproveitamento ou aqueles que incluem a Matemática no topo das suas preferências os que, em maior número, aderem àquelas actividades e/ou obtêm nelas melhores resultados.

Porquê esta diferença de atitudes? Porquê esta diferença de comportamentos? Não será legítimo suspeitar que a Matemática que se faz nas aulas é diferente da Matemática a que têm acesso nas outras actividades? Se pensarmos, nomeadamente, no entusiasmo suscitado pelo Problema da Quinzena (que, por isso mesmo, se torna semanal) não será lógico concluir que a diferença está no problema, isto é, que na maioria das nossas escolas a abordagem da Matemática se não faz por problemas? E, no entanto,

L'éducation mathématique n'est rien d'autre que le dévelloppement de l'activité mathématique et il n'y a pas d'activité sans problème.

(Krigowska, 1970)

O aspecto formal e acabado com que a Matemática, geralmente, é apresentada aos nossos alunos constitui, ao mesmo tempo, uma mentira e um erro pedagógico. Uma mentira, porque representa uma quase inversão da sequência que tem lugar no tempo e na história. Um erro pedagógico porque inibe, nos nossos alunos, a actividade matemática, a capacidade de inventar (reinventar) a Matemática.

De facto, o conhecimento matemático não se constrói pelo simples acumular de verdades eternas e imutáveis; o conhecimento matemático desenvolve-se, antes, pela "*melhoria incessante de conjecturas, graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações*" (Lakatos, 1984). Apresentamos, aos nossos alunos, uma estrutura acabada, rígida, indiscutível. Usamos livros de texto que só apresentam as ideias que tiveram sucesso. Nas trevas ficaram a conjectura inicial, os contra-exemplos, a crítica da prova, as refutações. No tinteiro ficou toda a história da descoberta matemática.

A descoberta matemática pode comparar-se à actividade de um jogador que, tendo ensaiado várias estratégias sem êxito, tem, de repente, uma ideia. Experimenta-a e, se a estratégia que descobriu se revela eficaz, continuará a usá-la até que o adversário, ao ganhar uma partida, a põe em causa. O primeiro jogador vê-se então obrigado a rever a estratégia que, até aí, se revelara ganhadora. Procurará, em princípio, tentar melhorá-la, podendo vir a abandoná-la por outra que lhe pareça superior. E assim sucessivamente até à descoberta da estratégia infalível (Bouvier, 1981).

Que dizer de uma escola que não ensina os alunos a "jogar"?

O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e discernimento dos cozinheiros, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém.

(Polya, 1945)

Kantowski (1977) afirma que *"um indivíduo está perante um problema quando encontra uma questão a que não pode dar resposta ou uma situação que não é capaz de resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis"*. Esta definição é consistente com a de muitos outros investigadores, nomeadamente Lester (1980) que, no entanto, acentua a dimensão subjectiva do problema. Segundo este último, para que uma situação constitua um problema para determinado indivíduo, é necessário que: (1) este conheça a situação; (2) esteja interessado em resolvê-la; (3) não disponha de um procedimento que lhe permita chegar, directamente, à solução; (4) faça tentativas deliberadas para a encontrar. Assim, nesta perspectiva, aquilo que constitui problema matemático para um indivíduo pode não o ser para outro, ou porque este não está interessado em resolvê-lo ou porque, do seu reportório, consta um algoritmo que lhe permite encontrar directamente a solução. Neste último caso, o indivíduo estaria perante um exercício.

Infelizmente, o exercício tem sido a actividade principal dos nossos alunos. Um episódio ouvido, há tempos, a um colega, ainda que anedótico, é exemplarmente ilustrativo dos comportamentos desenvolvidos com esta prática. Tratava-se de "resolver" a questão seguinte:

"A Rita comprou seis quilos de laranjas ao preço de cento e cinquenta escudos o quilo. Que idade tem a Rita?"

Face a esta questão, um tal Paulo empenhou-se, laboriosamente, em encontrar a solução e terá ajuizado da sua razoabilidade mais ou menos como segue:

6x150=900	não pode ser, porque ninguém atinge esta idade;
150+6 =156	é, ainda, um número muito grande;
150-6=144	idem;
150:6=25	ah, achei, a Rita tem 25 anos!

Habituado a exercícios estandardizados em que os dados fornecidos são os necessários e suficientes, em que há sempre solução, preferencialmente numérica e única, solução a que se chega através da aplicação da regra adequada à situação já esquematizada no enunciado, este Paulo não se detém, sequer, a analisar a pertinência do que se pede relativamente aos dados fornecidos. Há que operar com os dados até encontrar uma resposta "satisfatória" dentro de critérios muito pessoais e que não se prendem com a situação específica. Quem não os ouviu já perguntar: é de multiplicar? é de dividir? Parece terem adquirido as técnicas ligadas às diferentes operações sem que, simultaneamente, tenham adquirido o "sentido" das mesmas. Uma coisa é saber calcular, outra, bem diferente, é saber que operação seleccionar numa situação particular, quando calcular, que fazer com os resultados.

De facto, a resolução de problemas é uma das actividades mais complexas da mente humana. Os conhecimentos disponíveis não dão, directamente, acesso a procedimentos apropriados. Há que acomodá-los à nova situação, isto é, há que combiná-los de forma nova e original, há que torná-los operatórios.

Imaginemos um aluno que não dispõe, ainda, da técnica ligada à divisão e que é confrontado com a questão seguinte:

"É necessário acondicionar 300 quilos de maçãs, em caixas, contendo cada uma, 25 quilos. Quantas caixas vão ser necessárias?"

Para responder correctamente, o aluno tem de tornar operatórios os conhecimentos que já possui. Ou evoca a multiplicação e, por ensaios sucessivos, descobre o número que satisfaz a condição:

$$\square \times 25 = 300$$

ou contará de 25 em 25 até perfazer 300. Em qualquer dos casos, o aluno construiu, a partir dos seus limitados conhecimentos, um procedimento original.

Vemos assim que, enquanto a resolução do problema envolve criatividade, a resolução de exercícios requer, apenas, a utilização rotineira de factos ou procedimentos previamente aprendidos.

Por outro lado, os problemas que emergem de uma situação real não estão esquematizados. Há que isolar o problema, há que seleccionar os dados relevantes, há que identificar as relações pertinentes, há que optar entre diferentes estratégias de abordagem, há que analisar os resultados da acção desenvolvida.

Uma prática assente no exercício inibe a capacidade de matematização da realidade. Pelo contrário, ensinar Matemática, no contexto de situações problemáticas é, um pouco, ensinar a viver. O professor não pode desperdiçar esta oportunidade.

Referências

Bouvier, A. (1981). La mistification mathématique. Paris: Hermann.

Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 8, nº3, 163-180.

Krigowska, A. (1970). Sviluppo dell'attivitá matematica degli alievi e ruolo dei problemi in questo svilupo. UMI, fasc. 2 (supl.), série 4, ano 3.

Lakatos, I. (1984). Preuves et réfutations. Paris: Hermann.

Lester, F. (1980). Problem solving: is it a problem?. In M. M. Lindquist (Ed.), Selected issues in mathematics education. Reston: NCTM.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

EMAS ◘ IDEIAS ◘ PROBLEMAS ◘ SUGESTÕES ◘ PROBL

Iniciamos, com este primeiro número da Revista da APM, a construção de um banco de problemas, perspectivados, uns, para os alunos do Ensino Básico, outros, para os alunos do Ensino Secundário. Para cada problema apresentaremos algumas sugestões, ainda que sucintas, para a sua utilização na aula. Uma vez mais, pedimos a vossa colaboração enviando problemas, criticando as sugestões que apresentarmos, sugerindo outro tratamento que a prática tiver aconselhado.

Cristina Loureiro e Leonor Moreira

Mandarim também tem exame

No ano 855 da nossa era, vivia, na China, o imperador Yang Souen. Tendo vagado um lugar importante e havendo dois mandarins interessados no cargo, o imperador decidiu que ocuparia o lugar o mandarim que resolvesse o seguinte problema.

O chefe de uma quadrilha de ladrões dizia para os seus homens:

- Se cada um de nós ficar com quatro das peças de tecido que roubámos, sobram duas peças. Mas se cada um de nós quiser ficar com cinco, faltam quatro peças.

Quantos eram os ladrões?

Nível de Escolaridade - Básico

Notas Metodológicas - Os alunos do Ensino Básico só podem chegar à solução por tentativas.

- Sugere-se o trabalho em grupo, seguido de discussão alargada ao grupo/turma.
- Se as crianças não esboçarem qualquer estratégia de abordagem, certifique-se de que compreenderam o enunciado do problema. Em caso afirmativo, sugira que experimentem com um número qualquer de ladrões e que calculem o número de peças de tecido que satisfaz cada uma das condições do problema.
- Sugira que organizem os resultados das diferentes tentativas.
- Aos grupos que derem o trabalho por acabado, sugira, primeiro, que testem a "solução" e, depois, proponha-lhes o problema de desenvolvimento.
- Na discussão alargada, proponha a seguinte apresentação:

Nº de ladrões	1	2	3	4	5	**6**	7
Nº de peças no primeiro caso	6	10	14	18	22	**26**	30
Nº de peças no segundo caso	1	6	11	16	21	**26**	31

- Ponha à discussão a existência de outras soluções. Para os alunos deste nível de escolaridade, a convicção de que a solução é única pode surgir da análise do quadro de valores obtidos. Veja-se que:
  - o número de peças de tecido aumenta com o nú-

mero de ladrões, em qualquer dos casos;

- entre 1 e 5 ladrões, a diferença entre o número de peças, num e noutro caso, decresce até acabar por se anular no ponto crítico 6 (solução);
- a partir de 6 ladrões, a diferença entre o número de peças começa a aumentar e pode-se prever que será cada vez maior.

Desenvolvimento - Inventar um problema com estrutura idêntica pode ser uma tarefa interessante. Sugira aos alunos que, partindo de um dado número de ladrões, construam um problema semelhante.

Arrumações difíceis

Dispomos de uma colecção de objectos. Se os colocarmos em filas de 4 sobram 2; se os colocarmos em filas de 5 sobram 3. Por quantos objectos é formada a colecção?

Nível de Escolaridade - Secundário

Notas Metodológicas - Algumas soluções deste problema poderão ser obtidas por tentativas, utilizando uma certa quantidade de objectos ou através de representação no papel. No entanto, um problema com mais de uma solução tem a vantagem de criar a necessidade de organizar e relacionar os dados de forma a que se consigam obter todas as soluções possíveis. Assim, a resolução lógica e organizada, com a consequente utilização de um ou mais algoritmos, apresenta-se como altamente vantajosa em relação à resolução por tentativas que, quando muito, poderá fornecer algumas soluções.

A utilização de três incógnitas, das relações entre elas e a organização de dados em tabela são outros aspectos positivos do interesse formativo deste problema.

Proposta de Resolução

Nº de objectos: n
Nº de filas de 4: x
Nº de filas de 5: y

$4x + 2 = n$

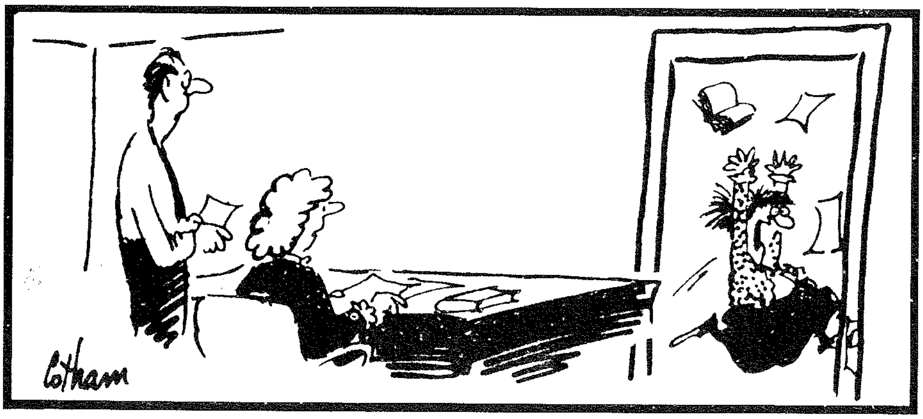
$5y + 3 = n$

$$x = \frac{5y+1}{4}$$

Para obter os pares de soluções inteiras da equação deve atender-se a que $5y+1$ seja múltiplo de 4.

y	5y+1	x
1	6	
2	11	
3	**16**	**4 --> n=18**
4	21	
5	26	
6	31	
7	**36**	**9 --> n=38**

Qualquer solução do problema poderá ser obtida a partir da expressão $\mathbf{n = 18 + 20k}$, $k \in N$. A razão de ser do factor 20 tem que ver com o facto deste ser m.m.c. (4,5).



É a segunda vez, esta semana, que a Drª Florípedes sai da aula mais cedo para ir para casa doente.

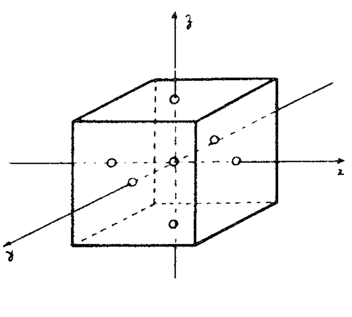
A GEOMETRIA DOS CRISTAIS

Francis Michel, Ecole Decroly - Bruxelas (*)

Introdução

O estudo dos cristais na escola secundária permite introduzir de um modo elegante e natural um grande número de noções matemáticas, físicas e químicas. Neste artigo, vamo-nos limitar à parte matemática dada a grande dificuldade que subsiste, nas escolas, em abordar temas de modo pluridisciplinar. Contudo, é indispensável mostrar cristais naturais ou artificiais aos alunos antes de empreender um tal estudo pois poderemos então fazer referência a observações feitas na aula, o que será uma motivação importante que os manterá atentos e lhes estimulará a imaginação.

Utilizaremos um modelo muito simples para reencontrar as formas cristalinas: em primeiro lugar, uma rede de pontos (centros dos átomos) dispostos com regularidade no espaço. Procuraremos, em seguida, os planos que passam pelo maior número (a mais forte densidade) destes pontos, os planos recticulares. Na realidade, os planos de clivagem passam entre os átomos, mas são paralelos aos planos recticulares. As intersecções dos planos recticulares definem as arestas, os vértices e as faces dos poliedros cristalinos. Pondo os átomos nos pontos de coordenadas inteiras de um sistema ortonormado obtemos uma rede cúbica simples; podemos então observar grupos de oito átomos colocados nos vértices dos cubos. Cada átomo tem seis vizinhos mais próximos pelo que se diz que o índice de coordenação ou coordenância é seis.



Nesta disposição simples, os seis planos recticulares têm como equações:

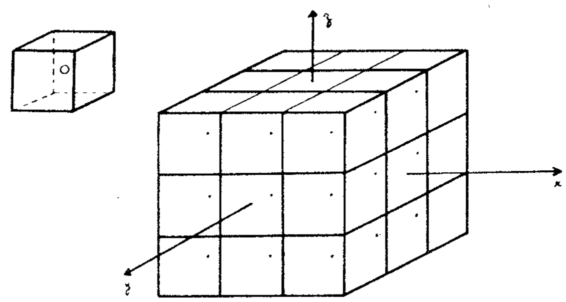
$$x=\pm 1,\ y=\pm 1,\ z=\pm 1$$

Os oito vértices são: (1,1,1); (1,1,-1); (1,-1,1); (1,-1,-1); (-1,1,1); (-1,1,-1); (-1,-1,1); (-1,-1,-1) para os quais utilizaremos a notação seguinte: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

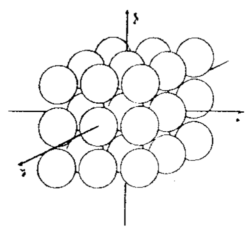
Vemos que o átomo (0,0,0) está cercado pelos seis vizinhos mais próximos:

$$(0,0,\pm 1);(0,\pm 1,0);(\pm 1,0,0)$$

Utilizaremos frequentemente uma outra representação para facilitar a visualização a três dimensões, para o que colocaremos cada átomo no centro de um cubo, mantendo o mesmo sistema de coordenadas:



Por vezes, ainda, desenharemos esferas:



É também importante construir modelos a três dimensões que precisarão melhor as noções introduzidas. Para este efeito, poder-se-á utilizar papel forte (tipo cartolina).

Outra hipótese é a construção de modelos empilhando bolas de plasticina que colam ligeiramente umas às outras.

Podemos obter outras redes por afinidades ou imbricando vários sistemas cúbicos uns nos outros. Parece natural começar pelo estudo do sistema cúbico simples e pelos poliedros deste sistema.

O sistema cúbico simples

a) As isometrias do cubo

Os elementos de simetria duma rede cúbica simples são as isometrias do cubo:

seis eixos de ordem 2: $6\,L^2$
quatro eixos de ordem 3: $4\,L^3$
três eixos de ordem 4: $3\,L^4$
nove planos de simetria: 9 P
um centro de simetria: C

Falaremos de holoedria quando se tratar de um poliedro com todas as simetrias de uma rede, caso contrário falaremos de hemiedria.

b) A holoedria

Relembremos algumas propriedades do cubo:

Planos: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$ (se a aresta for 2)
Vértices: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
Faces: quadrados
Angulos diedros: 90° ou $\pi/2$ radianos (plano)
Angulos sólidos: 1/8 de esfera ou $4\pi/8=\pi/2$ radianos (volume)

Os cubos "pavimentam" o espaço.

Seis faces idênticas (quatro posições para cada face).

Oito vértices idênticos (três posições para cada vértice).

Doze arestas idênticas (duas posições para cada aresta).

(24 posições no total)

15 pares de faces - 3 pares de faces opostas e 12 pares de faces adjacentes (arestas)

28 pares de vértices - 4 pares de vértices opostas (grandes diagonais); 12 pares de vértices opostos segundo as faces (pequenas diagonais); 12 pares de vértices adjacentes (arestas).

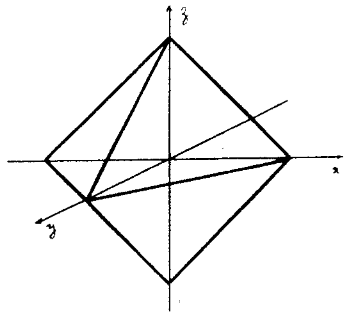
66 pares de arestas - 18 pares de arestas paralelas (12+6); 24 pares de arestas concorrentes; 24 pares de arestas enviesadas.

O octaedro obtem-se cortando a rede pelos planos

$$\pm x \pm y \pm z = 1$$

Os vértices são: $(\pm 1, 0, 0)$
$(0, \pm 1, 0)$
$(0, 0, \pm 1)$

As faces são triângulos equiláteros.



Os ângulos diedros

$$\cos\varphi = (1,1,1).(1,1,-1)/\sqrt{3}\sqrt{3} = 1/3$$

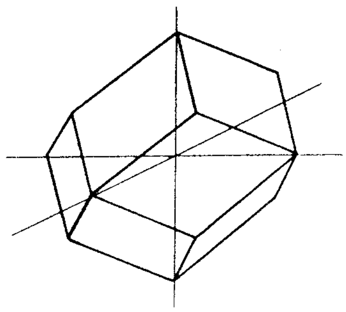
$$\varphi \approx 70{,}52° \text{ donde } \delta \approx 109.47° \approx 1.91 \text{ rad}$$

O ângulo sólido $\sigma \approx 4 \times 1.91 - 2\pi \approx 1.357$

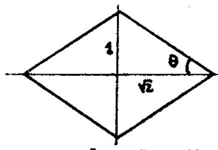
Os elementos de simetria são os mesmos que os do cubo com a correspondência "vértices <--> faces".

O rombo-dodecaedro é delimitado pelos planos:

$$\pm x \pm y = 1$$
$$\pm y \pm z = 1$$
$$\pm z \pm x = 1$$



As faces são losangos cujas diagonais medem 1 e $\sqrt{2}$.



$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donde $\theta \approx 35.26°$

Os ângulos diedros

$$\cos\varphi = (1,1,0).(1,0,1)/\sqrt{2}\sqrt{2} = 1/2$$

$$\varphi = 60° \qquad \delta = 120° = 2\pi/3$$

o que se verifica facilmente com dodecaedros de cartão.

Existem dois tipos de vértices:

1) com três arestas;
   ângulo sólido = $3.(2\pi/3) - \pi = \pi$
2) com quatro arestas;
   ângulo sólido $= 4.(2\pi/3) - 2\pi = 2\pi/3$

Para pavimentar o espaço eles dispõem-se de forma a ter quatro vértices do primeiro tipo ou seis vértices do segundo para formar ângulos sólidos completos.

Se os vértices com quatro arestas estão em $(\pm2,0,0)$, $(0,\pm2,0)$, $(0,0,\pm2)$, como os vértices de um octaedro, os outros estão em $(\pm1,\pm1,\pm1)$ como os vértices de um cubo.

Pode fazer-se a seguinte tabela de correspondência:

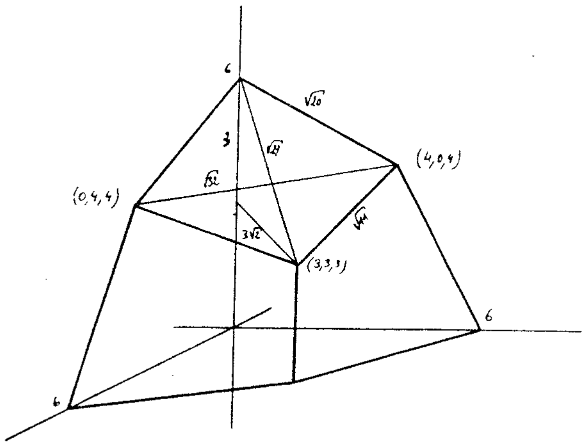
Rombo-dodecaedro	Cubo	Octaedro
12 grandes diagonais		12 arestas
12 diagonais menores	12 arestas	
8 vértices c/ 4 arestas	8 vértices	8 faces
6 vértices c/ 3 arestas	6 faces	6 vértices

Reencontram-se evidentemente todas as simetrias do sistema cúbico.

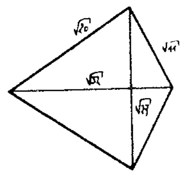
Os planos

$$\pm 2x \pm y \pm z = 12$$
$$\pm x \pm 2y \pm z = 12$$
$$\pm x \pm y \pm 2z = 12$$

determinam um poliedro com vinte e quatro faces:



As faces são quadriláteros (tipo papagaio de papel):

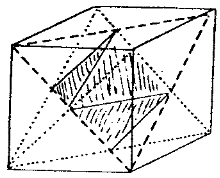


O cálculo dos ângulos fica como exercício de Trigonometria.

Estes dois últimos poliedros são frequentes na cristalização natural da granada.

c) A hemiedria

O tetraedro pode ser obtido em duas posições diferentes:



Estes dois tetraedros são inscritos num cubo e intersectam-se segundo um octaedro. As suas faces são:

$$\begin{array}{lcl} x + y + z = 1 & & x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 1 & & -x - y - z = 1 \\ x - y - z = 1 & \text{e} & x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 & & -x + y + z = 1 \end{array}$$

que são as faces do octaedro.

As faces são triângulos equiláteros.

Os vértices são os do cubo (dois subconjuntos).

Os ângulos diedros:

$$\cos\varphi = (1,1,1).(-1,-1,1)/\sqrt{3}\sqrt{3} = -1/3$$

$$\varphi \approx 109.47^\circ \qquad \delta \approx 70.52^\circ \approx 1.23$$

O ângulo δ corresponde ao ângulo entre as diagonais do cubo.

O ângulo sólido: $\sigma \approx 3\times1.23 - \pi \approx 0.5513$

Verificamos que $4\,\sigma_{tetraedro} + 3\,\sigma_{octaedro} = 2\pi$

O tetraedro tem

$$\left.\begin{array}{ll} \text{quatro vértices} & (3 \text{ posições}) \\ \text{quatro faces} & (3 \text{ posições}) \\ \text{seis arestas} & (2 \text{ posições}) \end{array}\right\} \begin{array}{c} 12 \\ \text{deslocamentos} \end{array}$$

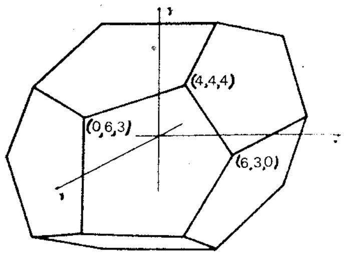
seis planos de simetria

não tem centro de simetria

Donde, teremos os elementos de simetria $3L^2 4L^3 6P$.

É homogéneo nos seus pares de faces e nos seus pares de vértices. Tem dois tipos de pares de arestas: concorrentes ou enviesadas.

O dodecaedro pentagonal é delimitado por planos recticulares de declive dois. Não se deve confundir com o dodecaedro regular:



Tem também duas maneiras de ser obtido, mas os seus elementos de simetria não são os mesmos que os do tetraedro. Os planos das faces são:

$\pm x \pm 2y = 12$	$\pm 2x \pm y = 12$
$\pm y \pm 2z = 12$	$\pm 2x \pm z = 12$
$\pm z \pm 2x = 12$	$\pm 2z \pm x = 12$

Os ângulos diedros são de dois tipos, ou

$\cos \varphi = (2,1,0).(2,-1,0)/\sqrt{5}\sqrt{5} = 3/5$

$\varphi \approx 58.13°$ $\quad \delta \approx 126.86°$

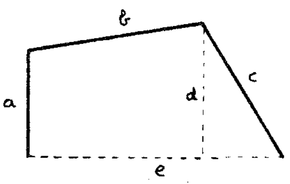
ou, então,

$\cos \varphi = (1,2,0).(0,1,2)/\sqrt{5}\sqrt{5} = 2/5$

$\varphi \approx 66.42°$ $\quad \delta \approx 113.58°$

Os elementos de simetria são $3L^2 4L^3 3PC$

Para o cálculo os comprimentos das arestas, o desenho com cubos poderá ser útil. Obter-se-á:

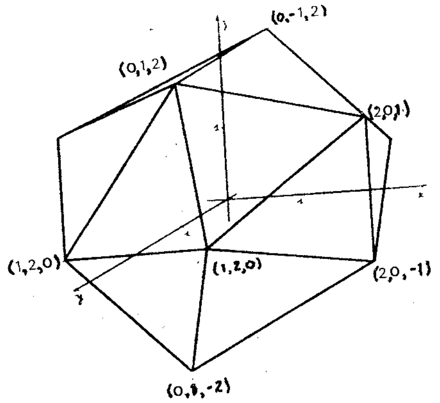


$a = 3 \ (2a=6)$
$b = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$
$c = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$
$d = 4 \ (2d=8)$
$e = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

O icosaedro (figura seguinte) também não é regular. Tem dois tipos de faces:

1) Triângulos equiláteros (lado=$\sqrt{6}$)

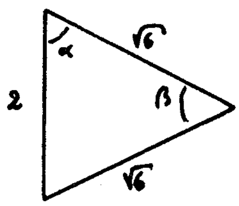
2) Triângulos isósceles (lados=2 e $\sqrt{6}$)



É determinado pelos planos

$\pm x \pm y \pm z = 3$ $\quad$ e $\quad$ $\pm 2x \pm y = 4$
$\pm 2y \pm z = 4$
$\pm 2z \pm x = 4$

As faces



$\cos \alpha = 1/\sqrt{6}$
$\alpha \approx 65.9°$
$\beta \approx 48.2°$

Os ângulos diedros

$\cos \varphi_1 = (2,1,0).(2,-1,0)/\sqrt{5}\sqrt{5} = 3/5$

$\varphi_1 \approx 53°$ $\quad \delta_1 \approx 127°$

$\cos \varphi_2 = (2,1,0).(1,1,1)/\sqrt{5}\sqrt{3} = \sqrt{3}/\sqrt{5}$

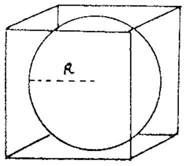
$\varphi_2 \approx 39.25°$ $\quad \delta_2 \approx 140.75°$

Estes poliedros encontram-se nos cristais da pirite.

Os diferentes sistemas cúbicos

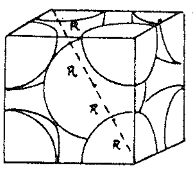
Encontramos três redes tendo todas a simetria cúbica: a cúbica simples, a cúbica centrada e a cúbica de faces centradas. Diferenciam-se principalmente pela sua "densidade" ou parte do espaço ocupado pelas esferas atómicas.

A cúbica simples:



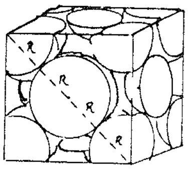
$$\delta = ((4/3)\pi R^3)/8R^3 = \pi/6 \approx 52\%$$

A cúbica centrada:



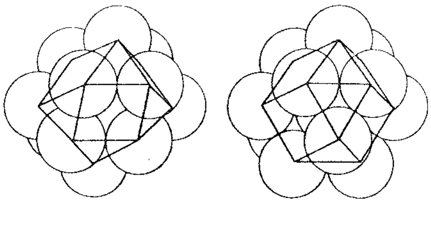
$$\delta = (2(4/3)\pi R^3)/(4R/\sqrt{3})^3 = (8\pi/3)/(64/3\sqrt{3}) = \sqrt{3}\,\pi/8 \approx 68\%$$

A cúbica de faces centradas:



$$\delta = (4(4/3)\pi R^3)/(4R/\sqrt{2})^3 = (16\pi/3)/(64/2\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,\pi/6 \approx 74\%$$

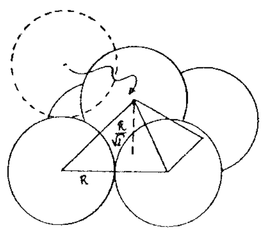
A rede cúbica centrada tem índice de coordenação oito. A rede cúbica de faces centradas tem índice de coordenação doze; vamos prová-lo construindo-o de uma outra maneira: é, com efeito, a estrutura mais densa. Podemos colocar esferas num plano formando hexágonos e observar que se pode colocar as esferas adjacentes nos planos paralelos de duas maneiras diferentes (hexagonal ou cúbica):



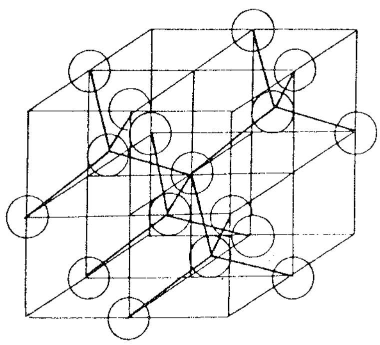
Neste caso, torna-se indispensável recorrer a modelos tridimensionais para melhor visualizar a posição das esferas. Calcula-se facilmente o volume ocupado por esta estrutura relacionando-o com o da estrutura cúbica simples, constatando-se que equivale a um "esmagamento" correspondente à altura do octaedro (figura seguinte).

Donde, $\delta = (\pi/6).\sqrt{2} \approx 74\%$

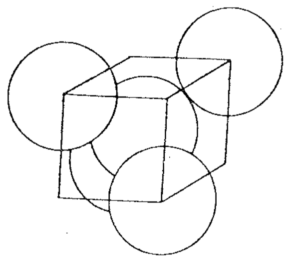
Falta agora mostrar que a segunda estrutura é, de facto, uma rede cúbica de faces centradas:



Podemos também construir um sistema cúbico (hemiedria) com coordenância quatro onde os átomos ocupam cubos colocados como na figura:



Se os átomos se tocam:



Reencontramos um semi-sistema cúbico que tem portanto uma densidade de 68%/2 ≈ 34%. O carbono cristalizado desta maneira pode dar o diamante. É necessário recorrer a um modelo para visualizar os octaedros. Existe uma outra rede de coordenância quatro no sistema hexagonal que corresponde à cristalização do gelo e do quartzo.

(*) Francis Michel é um dos sócios fundadores da APM. Este artigo é uma tradução e adaptação (autorizadas pelo autor) de um trabalho publicado no nº 3 (1985) de "Mathématique et Pédagogie", Revista da Sociedade Belga de Professores de Matemática.

O CLUBE DE MATEMATICA: Reflexão e Acção

Albano Silva, Escola Preparatória da Brandoa

1. Uma reflexão

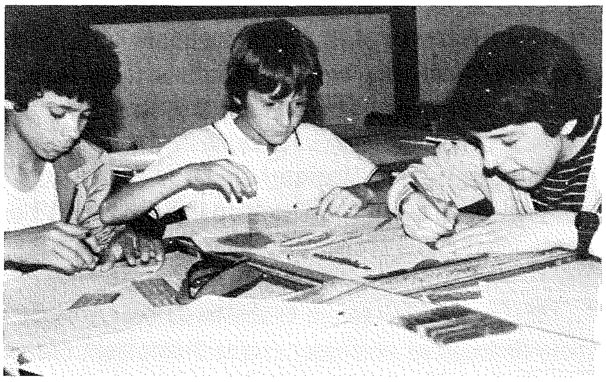
O insucesso escolar dos nossos alunos preocupa todos os que estão envolvidos directa ou indirectamente na sua formação e em particular a nós, professores. A reflexão que fazemos leva-nos a causas bem profundas que se ligam ao tecido económico, social e cultural que envolve os nossos alunos, mas também às perspectivas pouco animadoras e motivantes que a Escola portuguesa lhes abre, fruto de contradições e rupturas do próprio sistema educativo.

A consciência de que é possível intervir no espaço/escola, tornando-o um local pedagógica e culturalmente mais vivo e impulsionador de sucesso, levou alguns de nós a pensar na dinamização cultural da Escola como componente essencial da sua própria transformação.

Foi com esta perspectiva que se iniciaram as primeiras experiências de criação de actividades e espaços de ocupação de tempos livres dos alunos. Umas vezes com horas de redução, a maior parte das vezes por carolice, alguns professores há muito se lançaram na constituição de Clubes, ligados ou não às disciplinas curriculares, por acreditarem no seu valor educativo enquanto pólo de desenvolvimento de capacidades como autonomia, sociabilidade, criatividade, sentido crítico,...

Foi significativa a implementação de clubes ligados à disciplina de Matemática, onde o objectivo primordial, muitas vezes implícito, foi o de encontrar formas originais de criar o gosto pela Matemática, por se sentir a barreira traumatizante que ela representa para uma grande parte dos alunos. Contudo, outros foram criados como forma de abrir um espaço de investigação, um espaço de actividades de extensão e enriquecimento para os alunos com gosto e interesse já criado pela disciplina.

Os professores encontraram aí a satisfação de ver "desabrochar" os seus alunos, bem como de experimentar e reflectir estratégias de ensino--aprendizagem que viriam a transpor para as suas aulas.



Assim, o aparecimento dos clubes teve a ver não só com a dinamização pedagógica e cultural da escola mas foi também um ponto de partida para alteração de metodologias. No caso especial dos clubes ligados à nossa disciplina, esta segunda componente foi e continua a ser importante.

Os clubes de Matemática foram-se impondo em algumas escolas, assumindo diversas formas: desde simples extensões de aulas até espaços de resolução de problemas ou de actividades puramente lúdicas, ou ainda como espaços de investigação. Noutra fase, já mais recente, a entrada do computador no clube constituiu um marco importante na sua actividade, e a necessidade de especialização do trabalho desenvolvido começou a ser sentida.

Hoje, coexistem clubes de Matemática com ou sem computador, núcleos de Informática, ou um simples grupo de professores e alunos que dinamizam a escola através de actividades como o "problema da semana" ou o jornal da disciplina. Qualquer que seja a opção ou o estádio de desenvolvimento do clube, ele tem sempre uma grande aceitação dos alunos, ansiosos por sentirem a escola como espaço de resposta aos seus interesses, ao seu sentir.

2. Uma linha de acção

Alguns professores de diferentes escolas, empenhados no desenvolvimento dos clubes e com o objectivo de trocar e reflectir em conjunto as experiências efectuadas, formaram um grupo de trabalho que esteve envolvido na preparação do 1º

Encontro de Professores de Matemática (Profmat-85, em Lisboa), tendo elaborado uma publicação -- "À Aventura..." -- que continha propostas para o trabalho nos clubes. Com a criação da Associação de Professores de Matemática, que aconteceu no 2º Encontro (Profmat-86, em Portalegre), esse grupo passou a constituir um dos pólos de trabalho da APM, tendo vindo a definir os seguintes objectivos:

(1) promover a implementação de actividades extra-curriculares;
(2) promover o intercâmbio de experiências;
(3) promover os clubes como centros de experimentação de metodologias;
(4) promover a reflexão sobre o enquadramento teórico dos clubes na Educação Matemática.

Assim, impõe-se um trabalho de coordenação e apoio de todos os professores que dinamizam clubes ou actividades extra-curriculares ligadas à disciplina de Matemática, ou que pensam arrancar com esse trabalho nas suas escolas. Para tal, estamos a constituir um ficheiro de professores (a partir dos que evidenciaram interesse pelos clubes no último Profmat), de documentação e de bibliografia, e paralelamente a criar um centro documental e bibliográfico para apoiar as iniciativas dos sócios da APM interessados.

Porque pensamos ser importante acompanhar e interligar os projectos em curso, vamos manter com todos esses sócios uma estreita ligação através da Revista da APM ou outra correspondência, e preparar espaços de debate que poderão passar por acções de formação e/ou encontros de professores de Matemática que a nossa Associação vier a realizar. Em data a anunciar brevemente, pensamos organizar um encontro de professores que dinamizam clubes, de forma a trocar e reflectir experiências, abrir novas pistas de trabalho e discutir aspectos organizativos.

Até lá, bom trabalho!

Este artigo e o seguinte - O Jogo das Cores - inserem-se no trabalho do Grupo dos Clubes de Matemática da APM.

Os contactos com este grupo podem ser feitos através de:

- Albano Silva, E.P. da Brandoa
- Maria João Costa, E.P. da Trafaria

Currículos/Programas

Uma preocupação de todos os professores de Matemática.

Um grupo de trabalho da APM.

Por enquanto estamos em fase de reflexão. Já pensámos um pouco no que têm sido os currículos/programas de Matemática desde que se começou a falar, em Portugal, em Matemática Moderna. Já começámos a desbravar o que se diz e escreve sobre o assunto noutros países.

Mas somos poucos e só todos, do Básico ao Superior, poderemos reflectir, propor, experimentar e propor de novo para que, de facto, não mudem só currículos/programas, mas sim o ensino da Matemática a todos os níveis.

E urgente que todos os Núcleos da APM se debrucem sobre este tema.

Contacta connosco. No próximo número, voltaremos a dar notícias.

Grupo de Trabalho

Logotipo, precisa-se!

A APM precisa de um logotipo.

Até agora a Direcção da APM já recebeu alguns modelos, no entanto considerou interessante alargar este pedido a todos os sócios realizando um concurso.

Sabemos que o ponto forte dos professores de Matemática não é o design, mas entre amigos, colegas e alunos, muitos logotipos hão-de aparecer. E que vença o melhor!

As propostas deverão ser enviadas para a Redacção da Revista, até ao fim de Fevereiro, tendo obrigatoriamente de respeitar os seguintes aspectos:

- Conter os símbolos APM e Associação de Professores de Matemática.
- Ser executado, a uma só cor, numa folha formato A_4, tendo em consideração as reduções necessárias à sua utilização em sobrescritos, papel timbrado, etc.

Para o melhor haverá um prémio!

O Jogo das Cores

Maria João Costa, Escola Preparatória da Trafaria

1. Apresentação

O Jogo das Cores é um puzzle de 16 fichas quadradas contendo cada uma quatro semi-círculos de cores diferentes. O jogo pode ser obtido ampliando-se a Figura 1, devendo depois ser pintados os semi-círculos de acordo com o seguinte código:

R - vermelho	C - azul
N - preto	V - verde
B - branco	A - amarelo

O objectivo do jogo é arrumar as 16 fichas de modo a formar um quadrado de 4x4 tal que

- os semi-círculos de cada duas fichas adjacentes devem ser da mesma cor, ou seja, devem formar um círculo de cor única;
- em redor de um círculo (ou de um semi-círculo, no caso dos bordos) não pode haver nenhum círculo (ou semi-círculo) com a mesma cor.

O jogo pode ser praticado por qualquer número de jogadores, podendo estes organizarem-se em equipas.

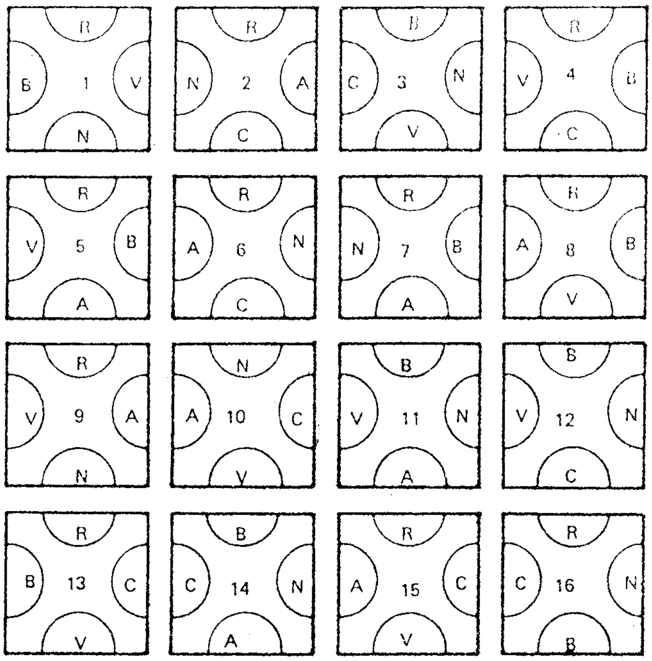


Figura 1 (in Chia, 1984)

Apesar da sua aparente facilidade, este jogo torna-se extremamente complicado já que o número total de combinações distintas dos 16 quadrados é igual ao produto das permutações de 16 por 4^{16} (cada ficha admite quatro rotações). Ou seja, temos $16! \times 4 \approx 9 \times 10^{22}$ combinações possíveis, enquanto que existem apenas 24 soluções, e dessas só 6 são independentes.

2. Aproveitamento

A ideia básica do jogo das cores pode ser aproveitada em actividades de aula envolvendo diferentes conteúdos programáticos. Pode centrar-se na exploração de conceitos, na consolidação de conhecimentos ou em actividades de remediação. Pode ser trabalhada com alunos de diferentes níveis etários, envolvendo um variado número de conteúdos programáticos.

A título de exemplo, temos os seguintes:

- sistemas de numeração (Fig. 2)
- expressões numéricas (Fig. 3)
- fracções equivalentes (Fig. 4)
- cálculo em Z (fig. 5)

Outros conteúdos possíveis: equações, representação de números em diferentes bases, unidades do sistema MKS, e até mesmo apenas a tabuada para os alunos mais pequenos.

Tal como todas as actividades que fazem apelo ao factor lúdico, estas propostas são melhor aceites pelos alunos mais novos. No entanto, o jogo das cores pode ser um bom tema de trabalho para alunos mais velhos, nomeadamente alunos de Informática. A procura de um modelo que permita construir um programa para determinação das soluções do jogo pode constituir um bom problema e um interessante tema de discussão.

Referências

Chia, Antonio P. (1984). Juego con fichas de colores. Thales nº0.

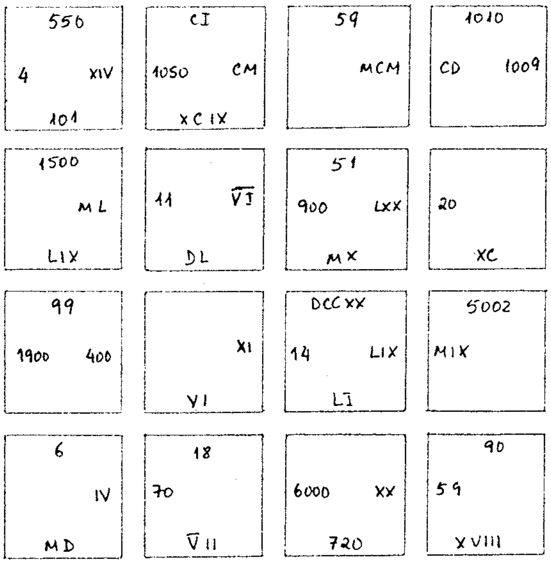


Figura 2

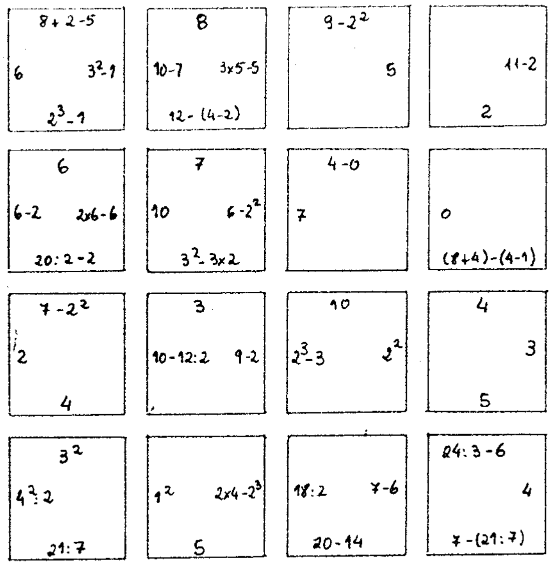


Figura 3

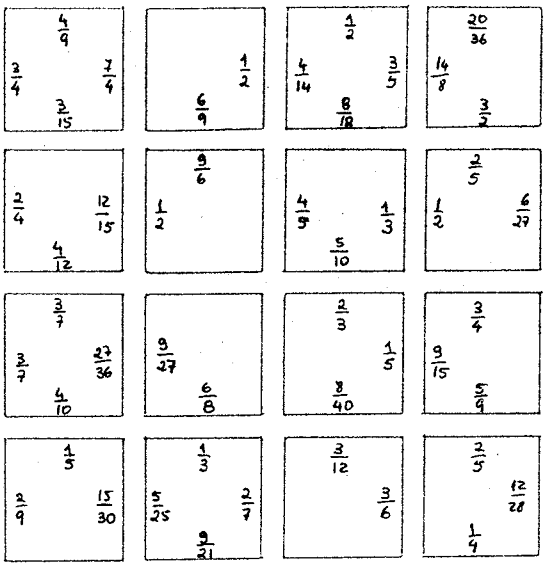


Figura 4

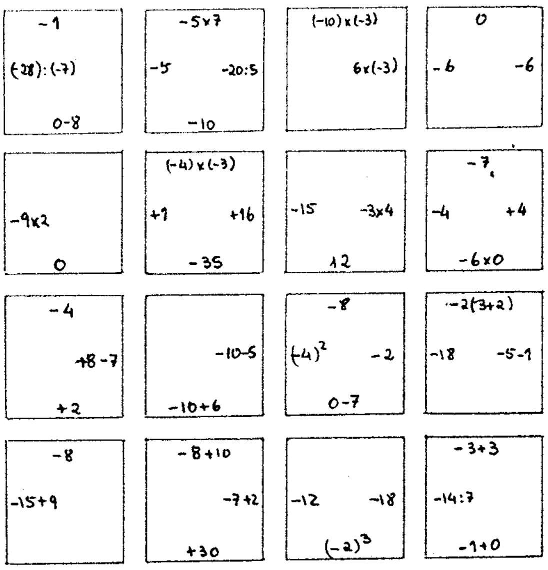
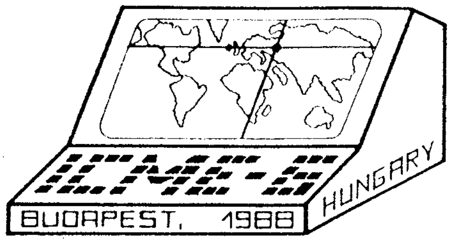


Figura 5

ICME 6 - Budapeste, 1988

O 6º ICME, International Congress on Mathematical Education, decorrerá de 27 de Julho a 3 de Agosto de 1988 em Budapeste (Hungria). Trata-se do mais importante congresso internacional na área da Educação Matemática. Realiza-se de quatro em quatro anos, tendo contado o ICME-5 (Adelaide, Australia, 1984) com a participação de quase 2000 pessoas. Língua principal: inglês.

☐ Contactar: Direcção da APM; ou directamente: ICME6 János Bolyai Mathematical Society, H1061 Budapest, Anker koz 1-3, Hungary.

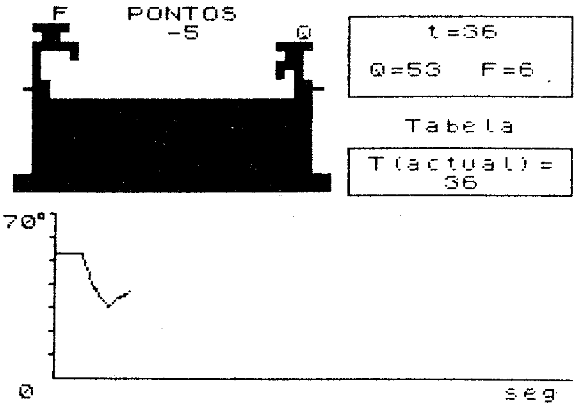


PROBAN: Uma Simulação ou ... Como Tomar Banho Também Acarreta Problemas

José António Duarte, Escola Superior de Educação de Setúbal

Este programa, concebido para a área de Matemática/Física, simula uma situação real (as operações inerentes a encher e vazar uma banheira com o auxílio de duas torneiras -- quente e fria) e simultaneamente tem as características de um jogo (implica a procura de uma estratégia ganhadora).

O gráfico que acompanha todo o decorrer do programa auxilia o utilizador na estimação do resultado pretendido (tomar banho a uma temperatura escolhida) e apela à capacidade de interpretação do conceito dinâmico de função.



Pode ser um instrumento de trabalho num clube de Matemática/Informática, no ciclo preparatório ou no ensino secundário, permitindo a procura da melhor estratégia de resolução do problema, desenvolvendo as capacidades de estimação ou ilustrando a interdependência entre variáveis.

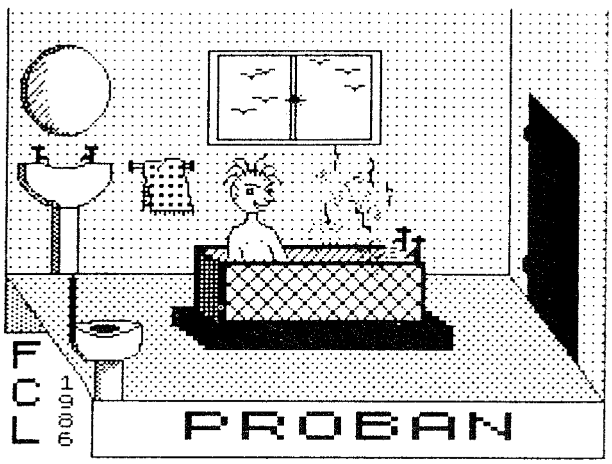
Pode constituir um modelo sugestivo para exploração numa aula de Física de problemas de transferência de energia entre corpos (massas de água quente e fria) ou para "visualizar" o conceito de limite de uma função, descontinuidades e assímptotas, numa aula de Matemática do ensino complementar.

Um programa não deve ter um leque muito fechado de utilizações, porque cedo se torna cansativa a sua exploração pelos jovens. O PROBAN admite prolongamentos, como por exemplo, o trabalho com torneiras de diferentes caudais, o cálculo de volumes de sólidos através da sua imersão na banheira, etc. Para isso, bastariam algumas modificações na estrutura base do programa, que é de fácil acesso porque está organizado em sub-rotinas cada uma das quais com funções bem definidas. Este é um projecto de trabalho possível para os professores mais interessados na programação, a ser desenvolvido em conjunto com os seus alunos.

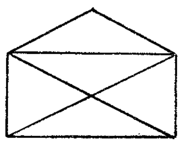
Mas, para além das palavras, convém observar o PROBAN que pode ser gravado em cassete ou disquete no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa (Av. 24 de Julho), no Núcleo de Matemática/Informática da Escola Superior de Educação de Setúbal, ou na Secção de Computadores da Escola Secundária de S. Julião em Setúbal.

O Carlos Grosso, a Dulce Aldir, o José António Duarte e a Suzana Carreira, que foram os seus autores, gostavam de ouvir a vossa opinião.

Não tenham medo de "meter água"!

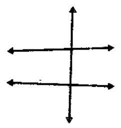
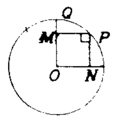
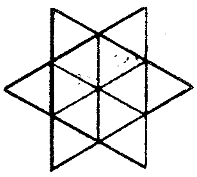


Janeiro

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	sábado
			1	2	3
				Férias do Natal	
5 1838 n. Camille Jordan: trabalhou em Algebra, Teoria de Grupos; "Teorema da curva de Jordan", "Forma canónica de Jordan".	**6** Janeiro é o mês nº 1. Use seis 1s para escrever uma expressão para cada dia do mês. Ex: $1\times1\times1\times1\times1\times1=1$	**7** 1871 n. Emile Borel: contribuiu para a Análise e as Probabilidades.	**8** 1888 n. Richard Courant: trabalhou em Física, Teoria dos valores próprios mínimo e máximo.	**9** 1889 n. Percy Daniell: trabalhou em Teoria da integração, "Integral de Daniell".	**10** 1875 n. Issai Schur: provou que qualquer matriz é unitariamente similar a uma matriz triangular.
12 Escreva 1000 como soma de dois ou mais números consecutivos.	**13** 1876 n. Erhard Schmidt: trabalhou em equações integrais e na teoria de espaços de Hilbert.	**14** Ao escrever os números de 1 a 288, quantos dígitos se utilizam no total?	**15** **16** Um agrafador, um caderno e uma tesoura custam 1000$. A tesoura custa mais que dois agrafadores. Três agrafadores custam mais que quatro cadernos e três cadernos custam mais que a tesoura. Quanto custa cada objecto?		**17** Qual é o número seguinte na sequência: 61, 52, 63, 94, 46, ...
19 Que percentagem dos números de quatro algarismos é que não têm algarismos repetidos?	**20** Há dois dias eu tinha 14 anos, mas no ano que vem terei 17. Em que dia faço anos?	**21** O que vem a seguir a: $1\times2\times3\times4+1=5^2$ $2\times3\times4\times5+1=11^2$ ....?	**22** 1874 n. Leonard Dickson: conhecido pelo seu texto sobre história da teoria dos números.	**23** 1862 n. David Hilbert: trabalhou nos fundamentos da geometria; em 1900 apresentou 23 problemas que estimularam a investigação matemática.	**24** Um dos maiores números primos conhecidos é $2^{3217}-1$ Quantos algarismos são precisos para escrever este número?
26 A luz, viajando à velocidade de 300000 km/s, leva cerca de 6 horas para ir da Terra a Plutão. Quanto distam os dois planetas?	**27** 1832 n. Charles Dodgson (Lewis Carroll): lógico, geómetra; escreveu "Alice no País das Maravilhas".	**28** 1540 n. Ludolph van Ceulen: calculou π (número de Ludolph) com 35 algarismos, usando o método de Arquimedes.	**29** **30** Desenhar a figura sem levantar a caneta, e sem desenhar duas vezes o mesmo segmento.  Pode-se "atravessar" o mesmo segmento mais de uma vez.		**31** Há meia hora, tinha passado, desde o meio-dia, o dobro do tempo que vai de agora até à meia-noite. Que horas são?

O DIA A DIA COM A MATEMATICA O DIA A DIA COM A MAT

Fevereiro

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	sábado
2 Fevereiro é o mês nº "2". Use seis 2s para escrever uma expressão para cada dia do mês. Ex: (2:2x2): :(2:2x2)=1	**3** Qual é o algarismo das unidades de 7^{1002} ?	**4** Um muro de 6 m projecta uma sombra de 1,5m. A que distância máxima da parede pode estar uma rapariga com 1,8m de altura de modo a ficar à sombra?	**5** 1557, Robert Recorde criou o sinal de =.	**6** $37\times(3+7)=3^3+7^3$ $48\times(4+8)=4^3+8^3$ 111x.......=....... 147x.......=....... 148x.......=.......	**7** A soma 9+9=18 dá o "resultado trocado" de 9x9=81. Descubra duas novas "trocas" que comecem por 24+.... e 47+....
9 1775 n. Wolfgang F. Bolyai: tentou provar o postulado das paralelas de Euclides. 	**10** Se o teu coração bate pela milionésima vez em Fevereiro ao meio-dia de hoje, qual é a sua média de batimentos por minuto ?	**11** 1897, uma lei do estado americano de Indiana para determinar o valor de π foi derrotada pelo Senado.	**12** 1809 n. Charles Darwin: naturalista famoso.	**13** 1805 n. Peter Gustave Lejeune Dirichlet: pioneiro na teoria dos números complexos e da convergência de séries trigonométricas; um "segundo Gauss".	**14** Qual foi o século que teve mais anos designados por números quadrados?
16 1514 n. Georg Joachim Rheticus: desenvolveu a primeira tabela com as seis funções trigonométricas.	**17** 1890 n. Ronald Fisher: estatístico, desenvolveu o "teste t de Fisher" de significância.	**18** 1930, foi descoberto o planeta Plutão. 1564, n. Galileu Galilei: fundador da Física clássica.	**19** 1473 n. Nicolau Copérnico: fundador da moderna Astronomia.	**20** O centro da circunferência é O; $\overline{OQ}$ mede 2.5; no quadrado [MPNO], $\overline{OM}$=2 $\overline{MN}$=? 	**21** O número da minha casa tem 8 factores, 4 dos quais são números primos diferentes, de um só algarismo. Qual é o número da minha casa?
23 1826, Lobachevsky anunciou pela primeira vez os princípios da geometria não euclideana.	**24** Quantos triângulos se podem encontrar nesta estrela? 	**25**	**26** Calcule o volume da figura que une os vértices (2,-4,0), (2,3,0), (-4,3,0) e (2,3,4).	**27** 1881 n. Luitzen Brouwer: conhecido pelos seus trabalhos de Topologia (teorema do ponto fixo de Brouwer).	**28** *Férias do Carnaval*

o DIA A DIA COM A MATEMATICA o DIA A DIA COM A MAT

Março

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	sábado

2 **3** **4**

Férias do Carnaval

5
1512 n. Gerhardus Mercator: reputado construtor de mapas e globos.
1977, J. Henzler beijou 3225 raparigas em 8 h. Qual foi a média por segundo?

6
Março é o mês nº "3". Use seis 3s para escrever uma expressão para cada dia do mês. Ex:
$(3\times3)\times(3:3)/$
$/(3\times3)=1$

7
Em 1981, 17 mil pessoas em Inglaterra formaram uma cadeia de caridade de 1335m que rendeu 390 contos. Em média quanto dinheiro rendeu cada pessoa?

9
Desenhe um quadrado unindo quatro datas quaisquer de um calendário. Se me der a soma das quatro datas, como poderei descobrir o menor número que foi usado?

10
Disponha os números de 1 a 9 em cruz, de modo a que as duas hastes da cruz somem o mesmo.

```
  1
  2
67386
  4
  5
```

11
Corrija a equação abaixo, em algarismos romanos, movendo apenas um pauzinho:

I − III = II

12
Divida o rectângulo em três triângulos semelhantes.

13
Numa enorme família, há 6 filhas e cada uma delas tem um irmão. Quantas crianças há na família?

14
1879 n. Albert Einstein: estimulou o interesse pela geometria de Riemann devido à sua teoria da relatividade.

16
$2^2-1=3$

$2^3-1=7$

$2^n-1=\text{primo}$

Descubra três outros valores para n.

17
Quanta terra existe num buraco de 4m de fundo e com um diâmetro de 2m ?

18
1690 n. Christian Goldbach: conjecturou que todos os números pares excepto 2 se podem representar como soma de dois primos. Que acha?

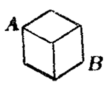
19 **20**
Colocar os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 nos espaços em branco. Maximize o produto no lado esquerdo e minimize-o no direito.

```
 □ □ □        □ □ □
x  □ □       x  □ □
```

21
Completar a lei geométrica

e a lei numérica
$1+3+5+...+...=...$

23 **24**
Um caracol percorre a aresta deste cubo num minuto. Quanto tempo leva o caracol a ir de A a B pelo caminho mais curto?

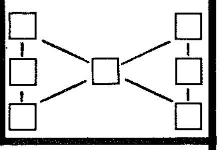


25
1798 n. Cristof Gudermann: trabalhou com geometria esférica, viu o valor da utilização de séries infinitas no cálculo.

26
O seu médico deu-lhe 3 comprimidos e mandou-o tomar um de meia em meia hora. Quanto tempo vão durar os comprimidos?

27
1857 n. Karl Pearson: fundou o campo da Estatística.

28
Use cada número de 1 a 7 uma só vez, de modo a que cada fila some 12.



30
1890 n. Stefan Banach: um dos criadores da Análise Funcional, desenvolveu a teoria dos espaços topológicos.

31
1596 n. René du Perron Descartes: estabeleceu os fundamentos para a Geometria Analítica.

Este "calendário" foi adaptado e desenvolvido por J. M. Duarte, com base numa realização idêntica, publicada pelo National Council of Teachers of Mathematics.

DIA A DIA COM A MATEMATICA

Pense nisto:

Aos alunos de uma turma do oitavo ano, de uma escola de Lisboa, foi pedido que respondessem à pergunta que acompanhava a figura que a seguir também se apresenta:

O Filipe acabou de sair de uma aula de Matemática. O que terá a sua professora escrito no caderno que ele está a mostrar à Mafalda?

Eis como se distribuíram as respostas:

- 15 alunos referiram-se ao que estaria escrito no caderno, como se tratasse de uma repreensão ou de uma chamada de atenção. Empregaram expressões como:"é mal comportado", "desobediente", "está desatento","não fez os trabalhos", "não sabe nada de Matemática", "é desinteressado" ...;
- 4 alunos disseram que tratava de um "bilhete para os pais";
- 4 alunos imaginaram referências positivas: "é bom aluno", "vai passar de ano", "é bom a Matemática"...;
- 3 alunos disseram que eram trabalhos para casa;
- 1 aluno referiu alternativamente todas as possibilidades anteriores e um outro disse que não sabia.

O que levará os alunos a imaginar maioritariamente a situação atrás referida em primeiro lugar (maioria provavelmente acrescida se perguntássemos o que estaria nos "bilhetes para os pais")? Mera coincidência ou casualidade? Influência do "boneco" (*) ? Ou corresponderá essa resposta maioritária, a um estar mais ou menos habitual dos alunos, a um ambiente de aula mais ou menos generalizado? Traduzirá, o modo como os alunos responderam, uma prática comum dos professores? Esta expectativa corresponderá àquilo que os alunos mais esperam do professor, pelo menos quando ele usa o caderno do aluno, uma "punição" mais que um "elogio" ou um "incentivo"? Que consequências terá este sentimento nos alunos, no ambiente das aulas, na relação dos alunos com o professor e, porque não, no modo como esses alunos experimentam a Matemática?

Pense nisto

Henrique M. Guimarães

(*) A figura foi mostrada a várias pessoas que não referiram nenhum "ar triste", "acabrunhado" ou "angustiado" nos personagens em questão.

PROFMAT
Revista Teórica e de Investigação de Educação Matemática

PROFMAT é uma Revista que se destina a permitir uma ampla troca de perspectivas relativamente à formulação de problemas para investigação, metodologias de recolha e análise de dados, fundamentação teórica, avaliação e síntese de resultados e a divulgar projectos de desenvolvimento curricular, dinamização pedagógica, e formação de professores.

PROFMAT é uma Revista Teórica e de Investigação da APM. Os dois números já publicados baseiam-se nas comunicações e conferências apresentadas nos Encontros PROFMAT (respectivamente Lisboa, 1985 e Portalegre, 1986).

O Editor da Revista PROFMAT é João Ponte e o Conselho Editorial integra ainda Domingos Fernandes e José Manuel Matos.

Encontros sobre Ensino da Matemática em 1987

III Jornadas Andaluzas sobre Didactica de las Matematicas

A Sociedade Andaluza de Professores de Matemática "Thales" promove em Abril, na cidade de Huelva, as suas III Jornadas sobre Didáctica da Matemática que constarão de sessões plenárias, comunicações de trabalhos originais e grupos de trabalho. A organização prevê que cerca de 400 professores de diferentes níveis de ensino participem nestas Jornadas.
☐ Contactar: Maria João Costa (E.P. da Trafaria) ou directamente: Sixto Romero, Escola Universitaria Politécnica de La Rabida, Palos de la Frontera, Huelva, España.

PME - XI
Montréal 1987

O P.M.E. (International Group for the Psychology of Mathematics Education) vai celebrar o seu 11º Encontro em Montreal, de 19 a 25 de Julho. Haverá sessões plenárias, apresentação de relatórios de investigações, grupos de discussão, grupos de trabalho e posters. Língua: inglês.
☐ Contactar: Anne Bergeron, PME-XI Conference Secretary, Fac. Sciences Education, Université de Montréal, Succ."A" C.P. 6128, Montréal (Québec), CANADA H3C-3J7 (Tel. (514)343-6061).

39º Encontro da CIEAEM em Sherbrooke

O 39º Encontro da CIEAEM (Comission Internationale pour l'Etude et Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) terá lugar, em 1987, em Sherbrooke (Canadá) de 27 de Julho a 1 de Agosto. O tema geral será "le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique" e o Encontro procurará elaborar recomendações sobre esse tema. Línguas: francês e inglês.
☐ Contactar: Paulo Abrantes (Fac. de Ciências de Lisboa) ou directamente os organizadores locais do Encontro: Cécile Goupille ou Loic Thérien, Faculté d'Education, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Québec), Canada J1K-2R1.

GIRP em Lisboa

O Group International de Recherche en Pedagogie de la Mathématique realizará em Lisboa, de 27 a 31 de Julho, o seu 16º Encontro. Este Encontro deverá constar essencialmente de ateliers, conferências e debates orientados por animadores convidados.
☐ Contactar: Teresa Modesto (Escola da Torre, Lisboa, Tel. 611407).

ICTMA 3
GhK KASSEL 8.-11.9.1987

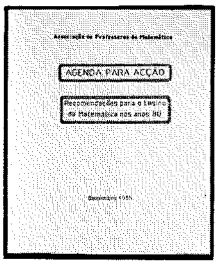
A 3ª International Conference on the Teaching of mathematical Modelling and Applications (ICTMA) será realizada em Kassel, na R. F. Alemanha, de 8 a 11 de Setembro de 1987. A conferência incluirá cinco sessões plenárias, sessões paralelas, workshops e demonstrações. Línguas: inglês e alemão.
☐ Contactar: Prof. Dr. W. Blum, Gesamthochschule Kassel Universitat, Fachbereich Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, D-3500 Kassel, F.R. Germany (Tel. (0561)804-4623 ou 4631).

PROFMAT-87 em Bragança

Este ano, a APM organizará o PROFMAT na cidade de Bragança, em princípio na segunda quinzena de Setembro. A coordenadora da organização local será a nossa colega Ana Leitão. Oportunamente, serão fornecidas informações pormenorizadas sobre tudo o que diz respeito ao PROFMAT-87.

PUBLICAÇÕES A.P.M.

Agenda para Acção - Recomendações para o Ensino da Matemática nos Anos 80

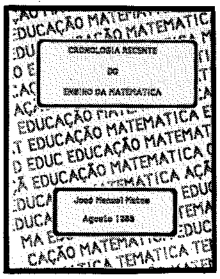


Documento de grande actualidade, apresenta e desenvolve as oito grandes recomendações que o N.C.T.M. (The National Council of Teachers of Mathematics, USA) formula para o ensino da Matemática nesta década. Trata-se de um conjunto de propostas que todos os professores de Matemática deveriam discutir. Essencial no âmbito da formação.
□ Dezembro 1985, 58 páginas (2ª edição). <u>Preço</u>: 150$00

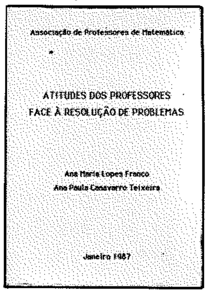
O Problema da Semana

Organizado por Mª João Costa, inclui 80 problemas seleccionados e as respectivas soluções. Fornece muitas ideias para actividades concretas de resolução de problemas na escola, principalmente ao nível do Ensino Preparatório e dos primeiros anos do Ensino Secundário.
□ Maio 1986, 86 páginas (2ª edição). <u>Preço</u>: 200$00

Cronologia Recente do Ensino da Matemática



Da autoria de José Manuel Matos, contém uma pormenorizada descrição cronológica dos acontecimentos mais relevantes no Ensino da Matemática nos últimos 40 anos. Um capítulo é inteiramente dedicado à evolução em Portugal. Inclui numerosas indicações bibliográficas.
□ Agosto 1986, 83 páginas. <u>Preço</u>: 200$00



Atitudes dos Professores Face à Resolução de Problemas

Este trabalho que a APM acaba de editar é um estudo, realizado por Ana Franco e Ana Paula Teixeira, sobre as formas como os professores de Matemática tendem a encarar as situações problemáticas e o papel educacional da resolução de problemas. Situa-se, assim, numa das áreas decisivas da investigação pedagógica, a das concepções dos professores.
□ Dezembro 1986, 48 páginas. <u>Preço</u>: 150$00

Actas do Encontro sobre Microcomputadores no Ensino da Matemática
□ Outubro 1984, 60 páginas (2ª edição). <u>Preço</u>: 150$00

Enviar os pedidos de publicações para Paulo Abrantes - Faculdade de Ciências
Av. 24 de Julho, 134-4º, 1300 Lisboa
acompanhados do pagamento em cheque ou vale postal (preço das publicações pedidas <u>acrescido de 10% para despesas de correio</u>) em nome de **Associação de Professores de Matemática**.

Gostaria que me enviassem <u>Agenda para Acção</u> □ ex. <u>Problema da Semana</u> □ ex.

<u>Cronologia...</u> □ ex. <u>Atitudes dos Prof...</u> □ ex. <u>Actas Microcomp...</u> □ ex.

para cujo pagamento envio cheque/vale postal no valor de ....

Nome: ....

Morada: ....

Data: .... Assinatura:..

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMATICA

Aos professores de Matemática:

No passado dia 19 de Setembro, no decorrer do PROFMAT-86, Encontro que reuniu em Portalegre mais de duas centenas de professores de Matemática de todos os graus de ensino e de vários pontos do país, foi decidido criar-se a Associação de Professores de Matemática.

Esta decisão, tomada por unanimidade e aclamação, constituiu um passo importante num processo que, de facto, estava já em marcha. Em especial, a partir do PROFMAT-85, realizado em Lisboa em Setembro do ano passado, este movimento tornara-se praticamente irreversível dado o grande apoio que a ideia suscitou.

O Ensino da Matemática tem vivido no nosso país em situação de crise permanente. O insucesso na nossa disciplina atinge níveis preocupantes. Uma grande percentagem de alunos não gosta de Matemática, não compreende para que serve estudar Matemática. Nós, professores, estamos igualmente descontentes, não sabemos como interessar os nossos alunos, temos que cumprir programas demasiado grandes, rígidos e abstractos. Além disso, sentimo-nos isolados uns dos outros, não partilhamos as nossas dificuldades, nem as nossas ideias, nem as nossas experiências.

O Ensino da Matemática, nas nossas escolas, parece de facto desfasado das necessidades quer individuais quer sociais do nosso tempo. Entretanto, nem os currículos e programas, nem a maneira de ensinar e aprender Matemática, sofreram alterações significativas na última década. Os alunos continuam a ter um papel essencialmente passivo na sua própria aprendizagem. Mas, apesar desta situação, nos últimos tempos novas iniciativas nas escolas, envolvendo alunos e professores, surgem e crescem todos os anos, mostrando uma evidente vontade de renovação. São disso exemplo os clubes e jornais de Matemática, os projectos interdisciplinares, as "semanas da Matemática", os concursos de problemas, o recurso aos computadores como fonte de renovação das práticas pedagógicas. Além disso, a investigação educacional e a formação de professores ganham novas perspectivas nalgumas Universidades e Escolas Superiores de Educação. Organizam-se Encontros e surgem publicações inteiramente dedicados aos problemas da Educação Matemática.

É neste contexto que surge a nossa Associação. Nenhum processo de renovação do ensino terá êxito se não contar com um forte envolvimento dos professores. A A.P.M. pretende ser um movimento que baseie a sua actividade na iniciativa e na criatividade dos professores dos mais diversos pontos do país e de todos os graus de ensino. Para ajudar a crescer e consolidar essa vontade de renovação. Para colaborar na dinamização pedagógica das nossas escolas.

Existem já núcleos locais e grupos a trabalhar em temas diversos como os clubes de Matemática, a renovação de currículos e programas, ou a utilização educativa dos computadores. A A.P.M. existe e será o que todos quisermos. Trata-se de uma aposta difícil mas que vale a pena fazer. Se ela for ganha, então temos boas razões para acreditar que os professores de Matemática poderão desempenhar um papel decisivo na renovação da Educação Matemática em Portugal.

A Direcção da A.P.M.
Outubro de 1986