Educação e Matemática

Nº 27

3º trimestre de 1993

História e Ensino da Matemática

Preço: 400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

II CIBEM

II CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

17 A 22/JUL/94 BLUMENAU-SC

Santa Catarina
BRASIL

As inscrições para o **II CIBEM**, II Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, que se realiza no próximo ano em Blumenau, no Brasil, de 17 a 22 de Julho, podem ser feitas até 31 de Dezembro de 1993. O preço de inscrição, até esta data, é de 100 dólares americanos. Existem fichas de inscrição na sede da APM.

Neste número colaboraram

Albano Silva, Ana Maria Belo Relva, Ana Maria Lino, Evelyne Barbin, Isabel Cristina Dias, Jaime Carvalho e Silva, João Rino, John Fauvel, José Morgado, José Paulo Viana, Luis Saraiva, Maria Fernanda Estrada, Paulo Oliveira, Sérgia Nunes.

Sobre a capa

A capa deste número temático, dedicado a História e Ensino da Matemática, contém a reprodução parcial do planisfério de Diogo Ribeiro, de 1529, existente na Biblioteca Vaticana, Roma.

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 1993.

nº 27
3º trimestre
de 1993

História em educação matemática: moda ou necessidade?

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
Leonor Barão
Helena Lopes
Henrique Guimarães
José Manuel Matos
Maria João Lagarto
Paulo Abrantes
Paulo Alvega
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
3000 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 72011/93

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa

Finalmente, passados cinco anos desde o seu aparecimento, e após 26 números publicados, *Educação e Matemática* decide-se a considerar o tema da História no ensino da Matemática. Não foi sem hesitação, mesmo assim, que a redacção tomou essa decisão. Pesavam contra ela vários argumentos: i) a dificuldade de abordagem de um tema em que, claramente, a nossa experiência ainda é diminuta; ii) em consequência, o perigo de fazer um número de carácter acentuadamente teórico, o que contrariaria o pendor de reflexão sobre práticas pedagógicas concretas que sempre temos pretendido dar à revista; iii) e, finalmente, a reduzida ou nula reflexão, mesmo teórica e sobre práticas alheias, que sobre o tema tem sido feita no seio do movimento de reforma da educação matemática em Portugal.

No entanto, tiveram maior peso factores como o interesse que despertam num número considerável de professores os temas de História da Matemática e a sua possível integração no ensino da nossa disciplina e ainda a convicção crescente, entre muitos de nós, de que não tem sequer sentido falar em renovação do ensino da Matemática sem que, obrigatoriamente, uma forte perspectiva histórica deva ser tomada em consideração, não como simples colecção de anedotas destinadas a "motivar" ou "humanizar" uma matemática supostamente desumana, mas como componente necessária de um dos objectivos primordiais da matemática escolar, a saber, que os alunos compreendam a natureza da matemática e a sua relevância, tanto histórica como actual, na vida da humanidade.

Se o interesse pela história corresponde a uma moda ou a uma necessidade é a pergunta colocada e respondida por J. Carvalho e Silva, que no seu estilo vivo questiona ainda a perspectiva histórica inserida nos novos programas e sobretudo as condições que existem, ou não (!), para tornar efectiva essa perspectiva. Aponta ainda algumas sugestões muito interessantes para utilização na sala de aula. Maria Fernanda Estrada dá-nos um panorama largo sobre a integração da história no ensino da Matemática, sugerindo utilmente alguns caminhos possíveis para os professores interessados. Outras sugestões são apresentadas por três professoras da Esc. Sec. de Sto. António dos Cavaleiros, mostrando que o interesse dos professores portugueses pelo tema pode exprimir-se através de propostas explícitas, que apenas falta concretizar. De Inglaterra temos a colaboração de John Fauvel, presidente da *British Society for the History of Mathematics* e *chairman* do grupo de estudo internacional *History and Pedagogy of Mathematics.* Fauvel trata de um tema muito pertinente e de muita actualidade no caso português — a importância da matemática local na educação dos jovens. Com efeito, tal como reconheceu o 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática — cujo relato é feito neste número por Luis Saraiva, do Seminário Nacional de História da Matemática, da SPM — muito há a fazer relativamente ao estudo da História da Matemática em Portugal, tanto a nível da investigação como a nível de publicação e reedição de textos de matemáticos portugueses. A par com esse trabalho, e no aspecto que nos interessa particularmente — a educação matemática — John Fauvel dá sugestões no sentido de valorizar os aspectos locais da matemática, e não só os habituais temas de carácter mais universal. A este respeito, a matemática dos Descobrimentos — e é apenas um exemplo entre outros — é um tema riquíssimo, que está longe de se ter esgotado com as iniciativas que foram realizadas até agora. Começamos a publicar neste número um conjunto de biografias resumidas de matemáticos portugueses, compiladas por Sérgio Macias Marques.

História da Matemática, no entanto, não é apenas a história da matemática como ciência, ou um conjunto de biografias de matemáticos célebres. A história da matemática tem estado sempre intimamente ligada à situação cultural, social e política de cada época. Muita vezes, a vida dos próprios matemáticos e a contribuição que eles dão para o progresso da ciência, nos seus países, é condicionada pelas circunstâncias históricas em que desenvolvem a sua actividade. No primeiro número que dedicamos ao tema, não podíamos deixar de ter em conta o período agitado que a investigação e o ensino da Matemática viveu nos anos quarenta em Portugal, em que, a par de um desenvolvimento ímpar da actividade matemática em todos os sectores — a "lufada de ar fresco" de que falava Hugo Ribeiro —, a repressão da ditadura salazarista se abateu sobre um conjunto ilustre de matemáticos, que foram obrigados a abandonar o ensino e, muitos deles, a emigrar. Felizmente, pudemos contar com a colaboração de José Morgado, que melhor do que ninguém poderia descrever "a resistência matemática" dos anos 40.

Incluir uma perspectiva histórica não significa isolar a história como tema, mas sim integrá-la naturalmente no ensino. Um exemplo de como isso pode ser feito é-nos dado por Evelyne Barbin no seu artigo, de que publicamos neste número a primeira parte. Com a sua larga experiência de trabalho sobre história da matemática nos *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,* Evelyne mostra-nos como é imprescindível, se se quer ir ao fundo de uma questão da actividade matemática, como é o caso da demonstração, observá-la a partir de várias perspectivas, sendo uma delas, naturalmente, a que diz respeito à história.

Procurámos incluir exemplos de actividades — na secção *Materiais para a aula de Matemática* — integrando a história no ensino, para diferentes níveis de escolaridade. Apenas uma, a de Paulo Oliveira, corresponde a uma actividade já experimentada em sala de aula. Esperamos que as sugestões apresentadas em muitos artigos deste número animem os nossos leitores a desenvolver maior número de propostas neste campo e a enviar-nos depois os relatos das suas experiências ou os seus materiais para publicação.

Correspondendo ao interesse que entre os professores está a despertar a história da matemática, demonstrado pela participação numerosa de portugueses na 1ª Universidade de Varão de Montpellier, como salienta João Rino no seu artigo, aqui deixamos um número sob a égide da história, do princípio ao fim. Com efeito, além de publicarmos um jogo *histótico*, J. Paulo Viana conseguiu dar um sabor histórico, embora não da história local, ao problema do trimestre. Nada nos impede, no entanto, de substituir o rei Guilherme por D. João I, os saxões pelos espanhóis e a batalha de Hastings por Aljubarrota...

Ana Vieira
Eduardo Veloso
José Manuel Matos

Novas publicações da APM

(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G)

(A) *Quinto Ano*, Colecção de Adendas K-6 às Normas do NCTM. Preço 700$00 (sócios 500$00)
(B) *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*, Colecção de Adendas 9-12 às Normas do NCTM..Preço 1200$00 (sócios 850$00)
(C) *Estatística no 3º Ciclo do Ensino Básico*, Grupo Azarquiel. Preço 1300$00 (sócios 1000$00)
(D) *Viver a Inovação, Viver a Escola*, J. Pedro Ponte e outros. Projecto DIC. Preço 1250$00 (sócios 1000$00)
(E) e (F) *Quadrante*, Revista Teórica e de Investigação, Vol. 2, nº1 e nº2.. Preço 1000$00 (sócios 800$00)
(G) *Dia-a-dia com a Matemática*, Agenda do Professor 1993/1994. Preço 650$00 (sócios 500$00)

Para encomendar publicações deve utilizar uma ficha (tirada de outra revista) preenchida e enviar a quantia respectiva em cheque passado à APM, ou vale postal, acrescida da respectiva percentagem de porte de correio, para: Associação de Professores de Matemática. Rua Major Neutel de Abreu, nº 11, 1500 Lisboa.

Os portes variam de acordo com a quantia de cada encomenda: até 1000$00 - 20%; de 1000$00 a 2000$00 - 15%; de 2000$00 a 5000$00 - 10% e mais de 5000$00 - 5%.

Utilização da história da matemática local na educação do jovem matemático

John Fauvel

Muitos matemáticos do passado confirmaram o valor da história da matemática na aprendizagem da matemática. Um desses matemáticos foi o famoso Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange pertenceu à distinta equipa de matemáticos a quem foi cometido o encargo, depois da Revolução Francesa, de reconstruir a educação matemática em França. Nas suas lições de matemática elementar, proferidas em Paris nos anos 90 do séc. XVIII, fez o seguinte comentário (depois de uma apresentação da construção dos logaritmos):

> Como o cálculo dos logaritmos é actualmente uma coisa do passado, excepto em casos isolados, poder-se-ia pensar que os pormenores que discutimos são desprovidos de valor. Contudo, podemos ter simplesmente a curiosidade de conhecer os caminhos, tortuosos e feitos de tentativas, que os grandes inventores percorreram, os vários passos que seguiram para atingir os seus objectivos, e o quanto devemos a estes verdadeiros benfeitores da raça humana. Além disso, tal conhecimento não diz respeito apenas a uma curiosidade vã. Pode orientar-nos em investigações semelhantes e ilumina com uma luz mais forte os assuntos de que nos estamos a ocupar.

Assim, como Lagrange salienta, o valor de ter em consideração a história da matemática reside em parte na satisfação da curiosidade (e no reconhecimento da nossa dívida em relação aos investigadores do passado) e além disso na recolha de orientações para futuras investigações em matemática. Em termos actuais, a ideia é a de que um aluno que está a aprender resolução de problemas retirará benefícios do conhecimento das técnicas de resolução de problemas utilizadas no passado.

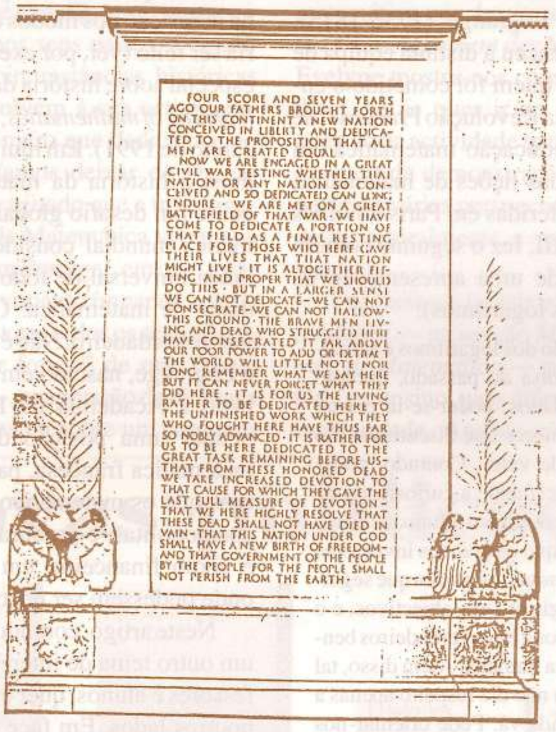
Esta ideia permanece como uma válida e importante justificação em relação à história da matemática. Nos últimos anos, foi realizado muito trabalho sobre as razões para a utilização da história, e na descrição dos modos como isso poderia ser feito (ver, por exemplo, o número especial sobre história da revista *For the learning of mathematics*, volume 11, nº 2, Junho de 1991). Em muitos destes trabalhos, a história da matemática é vista como um desafio global, sendo a matemática mundial considerada como herança universal de todo o jovem estudante de matemática. O que é inteiramente verdadeiro. Não é preciso recorrer a Lagrange, nascido em Itália, mas roubado à Academia da Berlim para vir ocupar uma posição de liderança na matemática francesa, para nos lembrarmos que os matemáticos sempre foram cosmopolitas, e procuraram inspiração, e apoio financeiro, em qualquer parte onde pudessem ser encontrados.

Neste artigo, contudo, quero levantar um outro tema de interesse para os professores e alunos, quer em Portugal quer noutros lados. Em face da herança universal da matemática devemos afirmar, se quisermos dialecticamente, o facto de que a matemática é sempre estudada e ensinada num local e tempo bem determinados, recebendo a influência dos hábitos locais e das tradições. Estas forças locais influenciam simultaneamente o estudo da matemática e a forma que ela toma.

Em que medida deve o conhecimento da herança matemática *local* — matemática portuguesa para alunos portugueses, matemática inglesa para os ingleses, brasileira para os brasileiros, e assim por diante — constituir uma parte privilegiada da educação matemática dos jovens?

> Em face da herança universal da matemática, devemos afirmar, dialecticamente, o facto de que a matemática é sempre estudada e ensinada num local e tempo bem determinados, recebendo a influência dos hábitos e das tradições locais.

utterly, with one who should deny the definitions and axioms. The principles of Jefferson are the definitions and axioms of free society." Here we have an analogy linking Euclid's propositions and the Jeffersonian proposition in the Declaration of Independence. Later Lincoln turned this into the phrase "...dedicated to the proposition that all men are created equal" in the Gettysburg address. Lincoln tried to use his words like a mathematician. A proposition to him was a statement to be debated, then verified and proved. Democracy, alive was the verification or proving of the proposition over 87 years. The proposition that "all men are created equal" was not a dead issue during the Civil War. It was still a proposition to be verified. Democracy was not a fact, but capable of proof.



55

Reprodução de uma página da brochura que acompanha o trilho matemático *Math in the Mall*

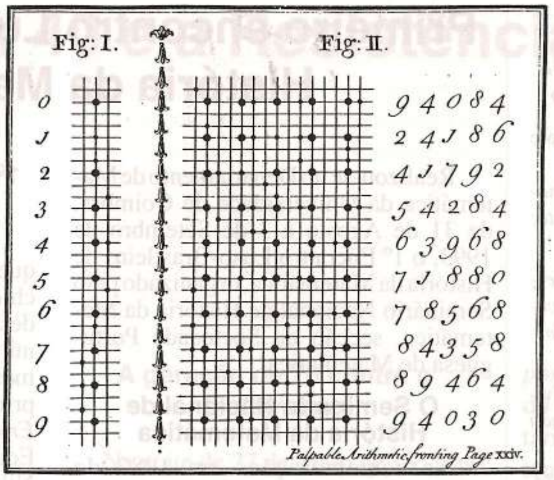
Esta questão pode ser vista de várias perspectivas. Numa perspectiva optimista, o conhecimento da sua herança cultural é fonte de inspiração e orgulho para os jovens. Por outro lado, ninguém pode ter acompanhado os acontecimentos nos Balcãs, nos últimos dois anos, sem reflectir que o orgulho nas origens e herança pode ser transformado, por políticos pouco escrupulosos, em forças tenebrosas. Na educação matemática dos jovens, há certamente um equilíbrio a manter entre o orgulho que provém da sua herança local, e a humildade e orgulho de serem herdeiros de *todos* os sucessos matemáticos da humanidade — e isto significa todos, não apenas o ponto de vista eurocêntrico a que tantos alunos europeus, no passado, foram expostos. As circunstâncias de muitas culturas modernas — a começar pela grande secular e multicultural cidade de Sarajevo antes dos acontecimentos recentes — tornam o nacionalismo racista e de vistas estreitas, mesmo em história da matemática e em educação, impossível de sustentar. O facto de que muitas comunidades, hoje em dia, se constituem a partir de uma base étnica e cultural muito mais ampla do que no passado é uma força que deve ser celebrada em história da matemática: as crianças muçulmanas que vivem na mesma rua que eu, e os seus vizinhos cujos pais vieram da Índia há uma geração, podem ser portadores de uma orgulhosa herança matemática a partilhar com os "indígenas" britânicos (cujos antepassados também imigraram para a Grã-Bretanha, mas alguns anos ou séculos ou milénios antes) na sala de aula multicultural britânica.

Mas também é verdade que a herança matemática local espelha necessidades e circunstâncias que nasceram das características particulares da região ou do país: o lugar ocupado pela matemática náutica na herança cultural portuguesa não é coincidência! Uma nova iniciativa em educação matemática que pode — e de facto, deve — fazer bom uso das circunstâncias locais é o *trilho matemático*. Os alunos são levados a percorrer um trajecto, que os pode levar junto a um edifício, uma exposição, um parque ou uma cidade, e a responder a questões que os estimulam a explorar a matemática. A extensão do conteúdo histórico, ou das referências, que é incluída no trilho dependerá da sua natureza e dos interesses do professor que o imaginou. Um bom exemplo do que pode ser feito é um trilho no centro da cidade de Washington, nos Estados Unidos, produzido por Florence Fasanelli, Frederick Rickey e Richard Thorington, sob o título *Math on the Mall*. A página que se reproduz ao lado diz respeito ao discurso de Gettysburg de Abraham Lincoln, que evidencia a influência que os *Elementos* de Euclides tiveram no estilo e ideologia da primitiva democracia americana e a educação matemática do presidente Lincoln. Os alunos, ao visitar o *Lincoln Memorial* (onde está gravado o discurso), são encorajados a reflectir sobre este aspecto.

Assim, devemos encontrar meios de celebrar e reafirmar aquela dimensão da história da matemática que poderíamos chamar *genius loci*. Reconhece-se cada vez mais que os exemplos do passado podem ajudar os alunos a desenvolver o sentido do seu lugar na história. No Verão passado celebrou-se em Nottingham, Inglaterra, o segundo centenário do nascimento de George Green (1793-1841). Os estudantes que fizeram um curso de matemáticas aplicadas avançadas podem ter encontrado a função de Green, ou o teorema de Green, mas esta celebração destinava-se a recolocar a memória do moleiro-matemático de Nottingham na mente dos cidadãos. Entre os modos escolhidos para o fazer há a referir os prémios, no nome de George Green, para os alunos de matemática da região. Os organizadores da competição acreditaram que um grande número de alunos beneficiou com o trabalho que desenvolveram para alcançar os prémios.

A região ou cidade em que vivem, ou de que são originários, não é a única dimensão da matemática local que pode inspirar ou motivar os alunos do nosso tempo. Existem matemáticos do passado em relação aos quais determinados estudantes podem sentir empatia: mulheres matemáticas tais como Sophie Germain e Sonja Kowalevskaya; matemáticos homossexuais como G. H. Hardy e Alan Turing; matemáticos negros, como o nigeriano Muhammad ibn Muhammad, do séc. XVIII. E um matemático cuja vida adquire uma dimensão especial para os alunos cegos é Nicholas Saunderson

Nicholas Saunderson, numa gravura incluída nos seus *Elementos de Álgebra*



Tábua para aritmética inventada por Saunderson

(1682-1739). Saunderson perdeu a visão na sua infância (devido a bexigas), mas mesmo assim ascendeu a professor *Lucasian* de Matemática em Cambridge em 1711. Essa cadeira tinha sido regida anteriormente por Isaac Newton, e assim Saunderson atingiu, antes dos quarenta anos, o topo da carreira de professor de Matemática na Grã-Bretanha. A sua vida e sucessos foram vistos desde cedo como representando um modelo admirável para outros. Mas, mais do que isto, ele trabalhou na criação de processos que facilitassem o trabalho matemático de deficientes visuais. Como escreveu um contemporâneo:

> Eu desejava ser capaz de satisfazer o Curioso com a descrição dos muitos instrumentos que ele tinha, para compensar a sua Deficiência da Visão. Tinha uma Tábua com Furos feitos a iguais Distâncias, meia Polegada, uns dos outros: Pregos eram fixados nos furos, e desenrolando uma Peça de Cordel em torno das suas cabeças, ele podia traçar rapidamente todas as Figuras rectilíneas utilizadas em Geometria, mais do que qualquer Homem pode fazer com uma Caneta. Tinha ainda outra Tábua com Furos alinhados para Pregos de diferentes tamanhos. Com a ajuda destes ele podia calcular e registar Somas, Produtos, ou Quocientes de números, tão exactamente como outros o fazem Escrevendo.

Os professores podem reconhecer nesta descrição a génese do geoplano usado nas aulas de hoje. Além disso, os instrumentos e livros que Sauderson deixou podem ser explorados com crianças de vários níveis de escolaridade, a partir da escola primária. O ponto de vista que a história da matemática é apenas apropriada para crianças dos níveis médios de escolaridade é facilmente desmentido por professores, com suficiente interesse e entusiamo, de grupos etários mais jovens.

Em resumo, portanto, uma mensagem forte proposta pelo movimento *History and Pedagogy of Mathematics*, constituído por professores interessados nas relações entre a história e a pedagogia da Matemática, é a da importância da matemática local, ou seja, da exploração da matemática que emergiu no passado na vossa própria localidade, ou na herança multicultural dos vossos alunos, ou feita por matemáticos com quem determinados alunos podem sentir afinidades ou ter maior empatia. Não se trata de um apelo especial, mas simplesmente do reconhecimento e celebração do facto que a matemática é, em toda a sua riqueza, uma actividade humana.

Notas bibliográficas

Para maior informação em matemática multicultural e não-eurocêntrica, veja-se David Nelson, George Gheverghese Joseph e Julian Williams, *Multicultural mathematics: teaching mathematics from a global perspective*, Oxford University Press, 1993.

Para mais pormenores sobre George Green, ver Mary Cannell, *George Green, mathematician and physicist: the background to his life and work*, Athlone Press, 1993.

Sobre Sonja Kowalevskaya, ver Ann Hibner Koblitz, *A convergence of lives: Sofia Kovalevskaia: scientist, writer, revolutionary*, Birkhaüser, 1983.

Sobre G. H. Hardy, ver Robert Kanigel, *The man who knew infinity: a life of the genius Ramunajan*, Scribners, 1991.

Sobre Alan Turing, ver Andrew Hodges, *Alan Turing: the enigma*, Burnett Books, 1983.

Sobre Muhammad ibn Muhammad, ver Claudia Zaslavsky, *Africa counts: number and pattern in African culture*, pp. 138-151.

John Fauvel
The Open University

História da Matemática

Recursos, referências, siglas, apoios, contactos, encontros, documentação

GTHEM: Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática.
Grupo de trabalho da APM (ver APM Informação nº15 para mais informações). Contacto: Sede da APM.

Apoio documental: *O GTHEM oferece um serviço de pesquisa bibliográfica e envio de documentação aos sócios da APM (veja APM Informação nº 15 ou contacte o GTHEM).*

Base de dados bibliográfica: *Em desenvolvimento pelo GTHEM, podendo ser consultada pelos sócios na sede da APM.*

Centro de Documentação: *Em constituição, por iniciativa do GTHEM, na sede da APM. Já existe, para empréstimo durante uma semana, um conjunto de livros básicos sobre História da Matemática.*

HIMED 94: History in Mathematics Education 94
Este encontro, organizado pela British Society for the History of Mathematics, realizar-se-á no King Alfred's College, em Winchester, de 28 a 31 de Março, no próximo ano. Conferências e workshops sobre a utilização educativa da História da Matemática.

HPM: History and Pedagogy of Mathematics.
Grupo de estudo internacional filiado na International Commission on Mathematics Instruction. Publica uma Newsletter com noticiário internacional sobre História da Matemática e pequenos artigos. Contactos através do GTHEM.

IREM: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
Existem IREM. em muitas universidades francesas. É no seio destes institutos que se têm realizado muitas experiências e investigações inovadoras sobre a integração da História no ensino da Matemática, tendo sido editadas numerosas publicações (lista existente no GTHEM).

Seminário Nacional de História da Matemática
Este Seminário foi fundado em 1988 pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Para mais informações, ver a notícia ao lado sobre o 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática.

Université d'Été Européenne "Histoire des Mathématiques et Epistémologie dans l'Éducation Mathématique"
A 1ª Universidade de Verão Europeia realizou-se em Julho passado, em Montpellier, e foi organizada pelos IREM. Teve a participação de mais de duas dezenas de professores portugueses. A próxima Universidade de Verão Europeia realizar-se-á em Portugal, na Universidade do Minho, no Verão de 1996, durante uma semana, e a APM participará na sua organização. Simultaneamente realizar-se-á um encontro do HPM.

Primeiro encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática

Realizou-se no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, de 31 de Agosto a 3 de Setembro de 1993, o 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, organizado pelo Seminário Nacional de História da Matemática, secção da Sociedade Portuguesa de Matemática.

O Seminário Nacional de História da Matemática

As comemorações em 1987 do bicentenário da morte do matemático português José Anastácio da Cunha, donde sobressaíram realizações em Évora, Coimbra e, principalmente, o Colóquio Internacional efectuado em Lisboa, constituiram o ponto de partida para a formação do Seminário Nacional de História da Matemática. Este foi fundado no início de 1988 por docentes e investigadores das Universidades da Beira Interior, Coimbra, Lisboa, Minho e Porto e veio a integrar elementos dos vários graus de ensino.

Desde então a sua acção tem sido desenvolvida no sentido de promover o interesse pela História da Matemática, colaborando em acções de divulgação em estabelecimentos do ensino secundário, mantendo cursos de História da Matemática no ensino superior, organizando periodicamente encontros com apresentação de comunicações (incidindo em especial sobre a História da Matemática em Portugal) e mantendo com a regularidade possível o contacto entre os seus membros.

Nos cinco encontros que já foram realizados até hoje houve sempre a preocupação de incluir um investigador estrangeiro: os Professores Ubiratan d'Ambrósio (Campinas), Christian Houzel (Paris VI), Jean Dhombres (CNRS, Paris), Grathan-Guinness (Royal Society, Londres), e Eduardo Ortiz (Imperial College, Londres).

Com orientação científica do Professor Jean Dhombres, organizou o Seminário uma Escola de Verão de História da Matemática em Évora em 1990, onde durante uma semana se sucederam *worhshops* dirigidos pelos Professores Enrico Giusti (Florença), Giorgio Israel (Roma), Ahmed Djebbar (Paris VII) e Jean Dhombres, bem como numerosas comunicações por participantes portugueses e estrangeiros, incluindo alunos de doutoramento de alguns dos orientadores dos *workshops*.

1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática

Os primeiros dois dias do Encontro, que teve 110 participantes, foram preenchidos com a realização de conferências, de acordo com uma lista já publicada no número anterior desta revista, e de duas mesas redondas, muito participadas. Na primeira, *História da Matemática no Ensino da Matemática*, moderada por Eduardo Veloso (Lisboa), que incluiu Nilze de Almeida (São Paulo), Sebastiani Ferreira (Campinas), Maria José Costa (Matosinhos) e Jaime Carvalho e Silva (Coimbra), os presentes deram conta da sua experiência de professores (e alunos) quanto à utilização da História de Matemática no Ensino de Matemática, questionando as diversas formas em que essa utilização pode ser feita. Foram referidas situações concretas no Brasil, Moçambique e em Portugal.

Na segunda, "A cooperação Luso-Brasileira em História da Matemática", moderada por Luis Saraiva (Lisboa), e que incluiu Abdulcarimo Ismael (Maputo). Ubiratan d'Ambrósio, Clóvis Pereira da Silva (Paraná) e Gertrudes Amaro (Lisboa), procurou-se delimitar as áreas de interesse para uma pesquisa conjunta, não só incluindo portugueses e brasileiros, mas também sendo abrangente a investigadores de todos os países onde o português é expressão oficial. Neste aspecto foi reiterado que este Encontro pretende igualmente ser o início de uma colaboração mais efectiva em história da matemática com os investigadores dos países africanos, que têm o português como expressão oficial. Foi igualmente reafirmada a intenção de dar continuidade a este Encontro, e que só uma conjugação dos trabalhos dos investigadores dos países referidos poderá dar expressão à sua investigação a nível internacional.

Os dois últimos dias foram preenchidas com quatro mini-cursos, cuja temática pretendeu abordar várias áreas de história e ensino da matemática, e cuja lista já foi indicada no último número desta revista (com a alteração de que o curso de Luis Saraiva não se realizou, tendo sido incluido o curso de Abdulcarimo Ismael, com o tema *Sistemas de numeração em Moçambique*).

Luis Saraiva
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

Os anos 40 e a Resistência Matemática

José Morgado

Nos anos de 1945 a 1947, a ditadura salazarista, seguindo o exemplo do nazismo alemão e do fascismo italiano, afastou do ensino universitário dezenas de matemáticos, respondendo assim à "lufada de ar fresco" que representaram, para o desenvolvimento da matemática em Portugal, as actividades de Aniceto Monteiro e outros matemáticos da sua época.

A geração de 70 contra o isolamento

Na noite de 27 de Maio de 1871, no Casino Lisbonense, Antero de Quental inaugurou um conjunto de conferências — as *Conferências Democráticas do Casino* — falando sobre as *Causas da Decadência dos Povos Peninsulares*, nos últimos três séculos. Começou assim ([15], p. 255):

> A decadência dos povos da Península nos três últimos séculos é um dos factos mais incontestáveis, mais evidentes da nossa história: pode até dizer-se que essa decadência, seguindo-se quase sem transição a um período de força gloriosa e rica originalidade, é o único grande facto evidente e incontestável que nessa história aparece aos olhos do historiador filósofo.

Dias antes, em 16 de Maio, Adolfo Coelho, Antero de Quental, Augusto Soromenho, Augusto Fuschini, Eça de Queiroz, Germano Meireles, Guilherme de Azevedo, Batalha Reis, Oliveira Martins, Manuel de Arriaga, Salomão Sáragga e Teófilo Braga, anunciaram a realização das conferências ([16], pp. 253-54). Depois de lembrarem que "não pode viver e desenvolver-se um povo, isolado das grandes preocupações intelectuais do seu tempo", proclamavam os objectivos das conferências, nomeadamente,

> - Ligar Portugal com o movimento moderno, fazendo-o assim nutrir-se de elementos vitais de que vive a humanidade civilizada.
> (...)
> - Estudar as condições da transformação política, económica e religiosa da sociedade portuguesa.

Assim, as Conferências visam essencialmente *romper o isolamento do povo português*, tão deplorável desde meados do século XVI. Mas os governos autoritários ou ditatoriais, que quase sempre têm governado Portugal, opõem-se, com mais ou menos violência, a que se rompa tal isolamento e, em 26 de Junho de 1871, o Presidente do Conselho de Ministros proibiu a conferência que Salomão Sáragga ia realizar nesse dia e todas as seguintes, a pretexto de que nelas se expunham ([18], p. 198)

> doutrinas e proposições que atacam a religião e as instituições políticas do Estado.

A Inquisição e o isolamento

Um instrumento poderosíssimo para aumentar o isolamento português no século XVI foi a Inquisição, para cuja instalação em Portugal, colaboraram estreitamente a realeza, o alto-clero e a nobreza. As classes dominantes estavam interessadas no isolamento do povo português, relativamente aos outros povos e de uns portugueses relativamente a outros portugueses, para matar à nascença qualquer movimento popular parecido com aquele que em 1383, elevou o Mestre de Avis a Regedor e Defensor do Reino.

Em 1531, D. João III pediu licença ao papa para instalar a Inquisição em Portugal; em 1536, foi concedida a licença e, em 1541, realizou-se o primeiro auto de fé.

Violando ostensivamente o mandamento "Não matarás", os autos de fé, só até 1732, penitenciaram mais de 23.000 pessoas e queimaram 1454, segundo conta Oliveira Martins ([18], 2º vol., p. 192). O número de assassinados não inclui os encarcerados mortos pelas torturas sofridas.

Que a Inquisição foi um instrumento ao serviço das classes dominantes é o que nos diz o historiador Jaime Cortesão, na obra *Alexandre de Gusmão e o Tratado de Madrid* (vol. I, p. 98):

A Inquisição e o fanatismo inquisitorial eram apenas um dos aspectos da perversão do espírito religioso e da subordinação da Igreja ao absolutismo do Estado. Sob os efeitos dissolventes do ouro, o Estado, a nobreza e o alto-clero haviam-se dado as mãos para impor a lei despótica dos seus interesses.

As destruições causadas pelos inquisidores estão evocadas na mesma obra de Cortesão ([3], vol. I, pp. 97-98):

Regiões ou vilas foram verdadeiramente devastadas. D. Luís da Cunha exclamava com angústia:"veja-se o que foram as províncias da Beira e Trás-os-Montes e, nelas, os lugares de Fundão e Covilhã, as cidades da Guarda, Bragança, etc., onde floresciam as manufacturas e o comércio, e o que agora são, depois que nelas entrou a Inquisição a prender e a destruir os seus moradores".

Agrava-se a decadência

O isolamento provocado pela Inquisição e o tipo de ensino praticado pela Companhia de Jesus provocaram um extraordinário atraso científico, cultural, moral e social. Garção Stockler no seu *Ensaio Histórico sobre a origem e progressos das Matemáticas em Portugal*, publicado em 1819, escreveu (p. 151):

É quase incrível a pressa com que as ciências retrogradaram em Portugal, desde que o senhor Rei Dom João III, com o piedoso fim de preservar a nação Portuguesa do contágio das inovações religiosas e princípios heréticos que infestavam o Norte da Europa, se determinou a adoptar no seu Reino instituições repressivas da livre comunicação das ideias.

Um Tribunal supremo (...) foi encarregado não só de pesquisar e punir aqueles erros que, sendo meras alucinações do entendimento ou consequências inevitáveis da falta de uma virtude sobrenatural, eram, contudo, nos códigos daquele século, considerados como crimes enormes, mas também de impedir a publicação e entrada no Reino de todos os livros cuja leitura lhe parecesse perigosa.

Relativamente à Companhia de Jesus, disse Stockler (p. 152):

A instrução pública da mocidade foi encarregada a uma ordem regular de recente data (...).

Por estes dois meios reunidos, ganhou a Ordem sacerdotal o mais absoluto domínio sobre os espíritos dos Portugueses e adquiriu toda a facilidade de dar-lhe, não só aquela direcção que mais convinha aos interesses da Religião, mas a que mais acomodada fosse aos seus interesses.

E mais adiante (p. 156),

(...) e os ânimos dos homens já feitos (...), aterrados pela espada sempre desembainhada e pelos fachos sempre acesos da Inquisição, sem se atreverem a examinar as produções científicas dos países situados além dos Pirinéus, olhavam todas como frutos envenenados que, debaixo de uma doçura aparente, encobriam os princípios da destruição e da morte.

Reflexos no ensino

As consequências desta orientação para o ensino foram naturalmente as mais lamentáveis.

Como A. de Oliveira Marques escreveu ([9], vol. II, p. 131),

Esta tentativa da Companhia de Jesus de dirigir a educação a todos os níveis não se processou, evidentemente, sem resistências várias. A Universidade de Coimbra contou-se entre os opositores. As demais ordens religiosas nomeadamente os Agostinhos e os Dominicanos, muito dados ao ensino e dispondo também de larga influência, reagiram com vigor, mas em vão (...) As Cortes de 1562 também protestaram contra o número e influência crescente dos Jesuítas, elevando a voz contra a entrega do Colégio das Artes à sua direcção.

Nada, porém resultou. Jesuítas, Inquisição e Coroa estavam, ao tempo, fortemente unidos contra a heresia, o fermento cultural e todo e qualquer desvio da política do Concílio de Trento. Através do País, grande número de professores sofreu perseguições de toda a ordem, muitos sendo encarcerados, condenados ou forçados a largar as suas cátedras.

José Hermano Saraiva, na sua *História Concisa de Portugal* afirmou (p.197):

os estudantes portugueses chegaram ao século XVIII a ler as sebentas que resumiram as ideias do princípio do século XVII. Por outro lado, o ensino que os Jesuítas ministravam era um ensino empenhado. Era uma táctica de luta contra a heresia e contra o espírito da Reforma. Ora a Reforma nascera da liberdade mental, do direito que cada um se arrogara de pensar por si. Era isso que a pedagogia dos colégios queria evitar. O objectivo era enraizar dogmas em que sinceramente se acreditava, não o de provocar críticas, porque o resultado das críticas é sempre o fim dos dogmas. O ensino não foi, pois, um treino para pensar, mas um alicerce para crer. E deu resultado, porque os portugueses do século XVII creram muito e pensaram pouco.

José d'Arriaga, na sua *História da Revolução Portuguesa de 1820* (vol. I, p.78), descreve a decadência nestes termos:

A matemática, a astronomia, a física, a química, a geologia, zoologia, finalmente, todas as ciências naturais foram soterradas na mais profunda ignorância pelos da seita negra, que as condenaram como inimigas da religião, e ciências perigosas. A verdadeira e sólida instrução foi posta de parte, com o pensamento reservado de se enfraquecerem as inteligências, e de aceitarem mais facilmente o jugo, tornando-se dóceis e submissas a tudo quanto lhes ensinarem.

Não se criou tradição de trabalho em Matemática

É claro que tal orientação do ensino prejudicou profundamente o estudo das ciências e, muito especialmente, o estudo da Matemática. Alexandre Herculano, no trabalho *Da Escola Politécnica e do Colégio dos Nobres* (Opúsculos, vol. VIII, p. 57), depois de descrever o "carácter predominante da instrução nacional" no século XV, concluiu:

Não era pois, entre nós, a matemática mais que uma enxertia, uma excepção ou antes uma aberração das tendências literárias do país, devida a causas estranhas ao carácter da organização social deste.

De facto, chegou-se ao século XX, *sem uma tradição de trabalho em Matemática*.

Logo em 1290, quando D. Dinis fundou, em Lisboa, a Universidade que, após várias mudanças de Lisboa para Coimbra e de Coimbra para Lisboa, acabou por se fixar em Coimbra, as Ciências Matemáticas não foram incluídas no conjunto das matérias a serem ensinadas na Universidade!

Garção Stockler concluiu, depois das investigações que fez, que *até* 1503, *ainda não tinha havido, na Universidade Portuguesa, nenhuma cadeira de Matemática*, o que ele explica pelo facto de o conhecimento desta ciência não ser considerado necessário aos candidatos ao estado eclesiástico ([20]), pp. 91-92),

> único fim que os prelados do Reino se haviam proposto, quando ofereceram a El Rei os rendimentos das igrejas, que efectivamente serviram de doação à dita Universidade.

Só em 1518, mais de duzentos anos após a fundação da Universidade, é que foi criada (por D. Manuel I) uma cadeira, *não ainda de Matemática*, mas *vizinha* da Matemática — uma cadeira de Astronomia.

O destacado matemático português, Pedro Nunes, ensinou Matemática na Universidade de Coimbra, desde 1544 até 1562, ano em que se jubilou. Depois de 1562, houve um longo período em que não se ensinou Matemática; só em 1592 é que foi nomeado novo lente de Matemática, André de Avelar, autor de um *Reportório dos Tempos*, publicado pela primeira vez em 1585.

Mas, em 20 de Março de 1620, André de Avelar foi preso pela Inquisição. Solto poucos dias depois, foi novamente preso em 17 de Outubro de 1621. Barbaramente submetido a tormentos, quando tinha quase oitenta anos, acabou por ser condenado a prisão perpétua.

Foram também perseguidos e presos pela Inquisição, os seus dois filhos, Luis e Pedro, e suas quatro filhas, Ana, Violante, Mariana e Tomázia ([2], pp. 121-36).

A Universidade ficou novamente sem um único professor de Matemática e durante largos períodos, assim aconteceu.

Quando o Marquês de Pombal quis fundar o *Colégio dos Nobres* (posteriormente criado por carta régia de 7 de Março de 1761), viu-se em sérias dificuldades, porque os conhecimentos das ciências exactas, que havia em Portugal, eram tão poucos que, como informa Pedro José da Cunha ((4), p. 36), foi necessário

> recorrer a professores estrangeiros para o ensino das Matemáticas. Foram eles João Ângelo Brunelli, professor de Bolonha, Miguel Ciera, matemático piemontês, e Miguel Franzini, geómetra veneziano.

Referindo-se a Brunelli e Ciera, Stockler ([20], p. 66), escreveu:

> por fortuna havia pouco que tinha voltado da América meridional, da demarcação dos limites das nossas possessões naquela parte do Mundo: expedição para a qual haviam sido chamados no princípio do seu reinado [de D. José] por não haver astrónomos nacionais, a quem ela se confiasse.

Em suma, não tínhamos matemáticos nem astrónomos.

A Astronomia foi estudada em Portugal, pelas suas aplicações à navegação e à Matemática foi estudada, pelas suas aplicações à Astronomia. Com a decadência da navegação, decaíu a Astronomia, com a decadência da Astronomia, decaíu a Matemática.

Já é tempo de os governos do País entenderem que a Matemática precisa de ser estudada, não só pelas inúmeras aplicações às outras ciências e às técnicas, mas também, e sobretudo, *pelos seus próprios méritos*. Ora, depois de Pedro Nunes, houve apenas um curto período, em que se estudou Matemática pelos seus próprios méritos — o período da reforma pombalina da Universidade de Coimbra.

Mas a Inquisição mais uma vez interveio, perseguindo, prendendo e condenando o melhor matemático português do século XVIII, o matemático de quem muito havia a esperar: José Anastácio da Cunha.

Razão tinha Gomes Teixeira, quando, referindo-se à Inquisição, escreveu ([21], p. 199):

> Esta instituição, com os seus fanatismos, com as suas denúncias, com os seus roubos, com as suas prisões, com as suas torturas, com os seus autos de fé, com as suas fogueiras, foi uma mistura de tragédia dolorosa e de baixa comédia que, durante cerca de duzentos anos, perturbou em Portugal todas as actividades e com elas o progresso geral do País.

Foi durante quase trezentos anos que o nosso País sofreu a Inquisição — desde 1536 até 5 de Abril de 1821 — dia em que foi formalmente suprimida pelas Cortes Constituintes, nascidas da Revolução de 1820.

No auto de fé de 11 de Outubro de 1778, foi lida a sentença que condenou Anastácio da Cunha a três anos de reclusão, seguidos de cinco anos de deportação em Évora. Posteriormente, foi-lhe perdoada parte da pena, mas nunca lhe foram restituídos os bens roubados pela Inquisição, nem lhe foi consentido voltar a ensinar na Universidade.

Revoltado contra esta condenação, Gomes Teixeira ([23], p. 124) escreveu:

> Esta condenação é mais um exemplo a ajuntar às manifestações de um estreito espírito sectarista, religioso ou político, reaccionário ou radical, que em todos os tempos e sob as formas mais variadas, têm afligido e desonrado a Humanidade.

Depois da morte de D. José e do afastamento da cena política imposto a Pombal, voltou a acentuar-se a decadência. As três invasões francesas que o nosso País sofreu no princípio do século XIX, a ocupação inglesa que se lhes seguiu, a sangrenta guerra civil entre absolutistas e liberais, governos ditatoriais como os dos Cabrais e outros governos autoritários prejudicaram de tal maneira o trabalho científico que, no começo do século XX, precisamente em 1900, Gomes Teixeira, em carta publicada na revista *L' Enseignement Mathématique* (vol. 2, pp. 218-9) dizia:

> En Portugal, il ne se passe guère d'événements qui soient de nature à intéresser les mathématiciens des autres pays.

Em 1923, em conferências nas Faculdades de Ciências de Paris e de Toulouse, Gomes Teixeira declarou que o número de trabalhos publicados em Portugal, no século XIX, é muito considerável, mas alguns não têm interesse e outros são puramente didácticos. Finalmente, na *História das Matemáticas em Portugal*, publicada já depois da sua

Matemáticos Portugueses

A. Aniceto Monteiro (1907-1980)

Nasceu em Moçâmedes (Angola). Licenciou-se em C. Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa, em 1930, e como bolseiro da Junta de Educação Nacional, doutorou-se em Paris, em 1936. Pouco depois, regressa a Portugal, e de 37 a 45 fundou a *Portugaliae Mathematica*, dedicada à publicação de originais de matemática, criou o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, fundou a *Gazeta de Matemática* e, no mesmo ano, a Sociedade Portuguesa de Matemática, da qual foi o 1º Secretário Geral, colaborou na criação do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, e fundou, também no Porto, a Junta de Investigação Matemática.

Apesar de tudo isto, a Universidade Portuguesa fechou-lhe as portas... Porém a Universidade de Filosofia do Rio de Janeiro, sob recomendação de cientistas como Einstein e Von Neumann, convida-o, em 1945, para a cátedra de Análise Superior; aí leccionou 4 anos e com uma "fabulosa energia", fundou várias publicações e centros. Porém, também por motivos políticos, não lhe foi renovado o contrato, e dirigiu-se então para a Argentina, onde leccionou em vários centros universitários, e continuou a destacar-se pelo entusiasmo transbordante em atrair jovens para a investigação e em revolucionar o ensino da Matemática.

Em 1977 vem para Portugal, e no ano seguinte foi-lhe atribuido o prémio Gulbenkian da Ciência. Em 1979, regressou à Universidade de Bahía Blanca, em cuja cidade faleceu.

Compilação de Sérgio Macias Marques

morte (Fevereiro de 1933), Gomes Teixeira afirma que a maior parte dos trabalhos matemáticos publicados em Portugal, no século XIX e começos do século XX, tem apenas interesse didáctico e

> entre os que não estão neste caso, há muitos que são erróneos ou simples imitações de trabalhos estrangeiros.

Uma lufada de ar fresco

Em 1936, António Monteiro regressou a Lisboa, vindo de Paris. Bolseiro da Junta Nacional de Educação e, depois, do Instituto para a Alta Cultura (IAC), doutorou-se no *Institut Henri Poincaré*, com a tese *Sur l'additivité des noyaux de Fredholm*, sob a direcção de Maurice Fréchet.

Com o regresso de Monteiro, uma nova época se inicia para a actividade matemática portuguesa. Segundo Hugo Ribeiro ([17], p. v),

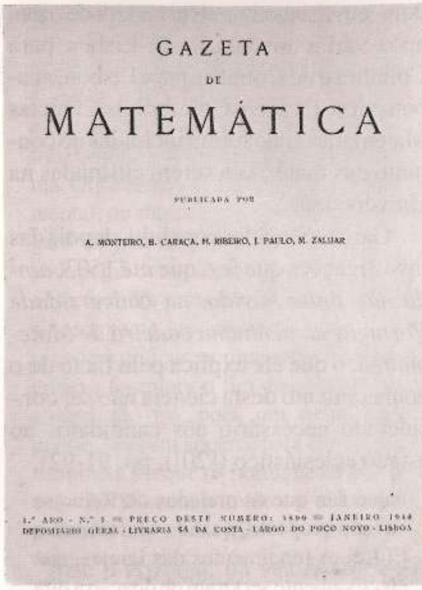
> Com uma outra excepção, a Matemática (Pura) não era cultivada em Portugal e, assim, as escolas superiores limitavam-se a preparar professores das escolas secundárias ou técnicas e cientistas que porventura a utilizariam. Foi nesta atmosfera enormemente agravada pela ditadura e pelas guerras, civil em Espanha e na Europa, que Monteiro, não participante do ensino oficial, fez entrar uma lufada de ar fresco, impulsionando decididamente a Matemática neste país.

Ainda em 1936, juntamente com outros companheiros recém-doutorados, Manuel Valadares, Marques da Silva, António da Silveira, Peres de Carvalho e outros, criou o *Núcleo de Matemática, Física e Química*, que promoveu a realização de vários cursos e conferências, no âmbito destas ciências.

Foi precisamente o *Núcleo* que, em 1937, convidou Ruy Luis Gomes a fazer, no Instituto Superior Técnico, um conjunto de conferências sobre Teoria da Relatividade, que foram publicadas na colecção do Núcleo, em 1938, sob o título *Teoria da Relatividade Restrita*.

O contacto então estabelecido com Monteiro constituiu um grande incentivo às actividades matemáticas que Ruy Luis Gomes iria desenvolver no Porto.

Em 1937, com a colaboração de Hugo Ribeiro, Silva Paulo, Zaluar Nunes e Ruy Luis Gomes, Monteiro fundou a *Portugaliae Mathematica*, revista dedicada exclusivamente à publicação de originais de Matemática e, com a colaboração de Bento Caraça, Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Zaluar Nunes, em 1940 fundou a *Gazeta de Matemática*, jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de Matemática das escolas superiores.



GAZETA

DE

MATEMÁTICA

PUBLICADA POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

1.º ANO - N.º 1 = PREÇO DESTE NÚMERO: 1$00 = JANEIRO 1940
DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

Capa do primeiro número da *Gazeta de Matemática*, fundada em 1940.

Em 1938, fundou o *Seminário Matemático de Lisboa*, que, em 1939, tomou o nome de *Seminário de Análise Geral*, com o objectivo de, segundo as suas próprias palavras,

> iniciar um grupo de jovens no estudo das matemáticas modernas.

Entre os participantes deste Seminário, destacaram-se Hugo Ribeiro e José Sebastião e Silva (que, mais tarde, considerou como o maior matemático português) ([6], p. 30).

Como resultado de uma proposta de Bento Caraça, Mira Fernandes e Beirão da Veiga, o Conselho Escolar do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras criou, em 1938, o *Centro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia*. Neste Centro, entre outros, Zaluar Nunes regeu, em 1938-39, um curso de Cálculo das Probabilidades e Estatística Matemática; em 1939-40, Rinaldo

Campião, Castanheira Nunes e outros realizaram colóquios sobre Seguros e, em 1941-42, Sá da Costa iniciou um curso de Introdução à Economia Matemática Clássica.

Em Fevereiro de 1940, Monteiro conseguiu que o IAC fundasse o *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa*. Pedro José da Cunha presidiu às duas primeiras conferências do Centro: de Hugo Ribeiro, sobre *Objectivo da Topologia Geral* e de Monteiro, sobre *A Importância da Análise Geral*. Conferências de Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Teoria da Medida, etc., foram feitas por Remy Freire, Morbey Rodrigues, Sebastião e Silva, Sá da Costa, Silva Paulo, Ramos de Castro, Virgílio Barroso, Ribeiro de Albuquerque, Mário de Alenquer, Veiga de Oliveira, Hugo Ribeiro, António Monteiro, Zaluar Nunes e outros.

No período 1940-41, onze trabalhos de investigação, provenientes do Seminário de Análise Geral, foram publicados na *Portugaliae Mathematica*.

Em 12 de Dezembro de 1940, Monteiro e seus colaboradores fundavam a *Sociedade Portuguesa de Matemática* (SPM), que, logo à partida, contava com mais de 100 sócios; em Julho de 1947, tinha 331.

Entretanto, a Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto, por iniciativa de Ruy Luis Gomes, promovia a realização de cursos livres e conferências, nomeadamente, por Almeida Costa, António Monteiro, Bento Caraça, Manuel Valadares, Marques da Silva, Manuel Miranda, Neves Real, Sarmento Beires e outros.

Sobre estes cursos e conferências, escreveu Ruy Luis Gomes ([7], pp. 13-14):

> Por um lado, no plano científico, temos a intenção de facilitar aos estudiosos as técnicas e as vias de acesso aos problemas de maior actualidade, da Matemática e das suas aplicações. Por outro, desejamos integrar os problemas da Matemática no movimento geral da Ciência. (...) Finalmente, num plano ético, desejamos criar um ambiente de trabalho, um "clima" e um estímulo como resultante da cooperação de todos numa tarefa que transcende o interesse imediato de cada um e traduz uma consciência colectiva: a de que pertencemos a uma Universidade.

Comentando estas palavras, Monteiro escreveu ([11], p. 17):

> Palavras necessárias, num meio como o nosso, em que tantas vezes o interesse imediato de cada um se sobrepõe injustificadamente à realização das tarefas culturais mais urgentes e necessárias; num meio em que a indiferença (e, por vezes, a hostilidade aberta ou mal dissimulada) perante o trabalho de investigação científica constitui um método de acção retardadora do progresso cultural do país.

Por iniciativa de Ruy Luis Gomes (exposição dirigida, em 11 de Outubro de 1941, ao Presidente do IAC, Prof. Celestino da Costa), foi criado em Fevereiro de 1942, o *Centro de Estudos Matemáticos do Porto*.

Do primeiro plano de trabalhos do Centro enviado ao IAC, contam os planos individuais de Neves Real, Manuel de Barros, Manuel Miranda, Almeida Costa e Ruy Luis Gomes, contendo cada um o programa de um curso e o enunciado de um ou mais problemas de investigação. Consta também o programa de um curso a ser ministrado por Monteiro, *Funções de Conjunto e seus Invariantes*.

O plano de trabalho do Centro, no ano seguinte, incluiu o plano de um novo trabalhador do Centro, Alfredo Pereira Gomes, que se propôs, além do mais, a redigir um curso a ser ministrado por Monteiro, *Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua*. O curso foi publicado em 1944, como nº 8 da Colecção de publicações do Centro. Foi amplamente utilizado (pelo menos, no Porto) por estudantes e licenciados, na década de 40, interessados em melhorar a sua preparação matemática.

Anexo ao Centro do Porto, criou-se o *Seminário de Física Teórica*.

Criou-se ainda, em Lisboa, uma Tipografia Matemática, para compor a *Portugaliae Mathematica*, a *Gazeta de Matemática* e outras publicações científicas, nomeadamente, a *Portugaliae Physica* e a *Gazeta de Física*, que nasceram por influência das correspondentes revistas de Matemática.

Em 4 de Outubro de 1943, foi funda-

Matemáticos Portugueses

Ruy Luís Gomes (1905-1984)

Nasceu no Porto; licenciou-se em C. Matemáticas na Universidade de Coimbra e aí fez o doutoramento em 1928; porém, foi no Porto que, no ano seguinte, iniciou a sua carreira docente como assistente de Álgebra; em 1930 regeu Física Matemática e em 33 ascendeu a catedrático desta disciplina, cargo em que permaneceu até 1947. Neste período colaborou na fundação do Observatório Astronómico da U.P., do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, da Junta de Investigação Matemática, da Sociedade Portuguesa de Matemática e na criação das revistas *Portugaliae Mathematica* e *Gazeta Matemática*, onde publicou alguns dos seus muitos trabalhos, de elevada craveira científica.

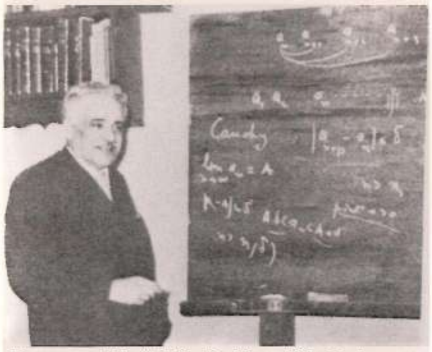
Em 1947, foi atingido pela ofensiva política do governo de então contra as Universidades e foi demitido; depois de muitas persiguições, em 1958 aceitou um convite da Universidade de Bahía Blanca (Argentina); lá publicou inúmeros e valiosos trabalhos em colaboração com o também matemático português Aniceto Monteiro; em 1962, transferiu-se para a Universidade do Recife (Brasil) e depois para Pernambuco, onde também foi intensa a sua actividade docente e investigadora.

Em 1974 pôde regressar a Portugal; foi aclamado Reitor da Universidade do Porto, onde se jubilou, recebendo então o título de Reitor Honorário.

Compilação de Sérgio Macias Marques

Matemáticos Portugueses

A. Ferreira de Macedo (1887-1959)



Nasceu em Mesão Frio. Devido a dificuldades económicas, leccionou primeiro num colégio para custear os estudos superiores na Faculdade de Ciências de Lisboa, onde, em 1920, concluiu a licenciatura em C. Matemáticas; continuou ainda a leccionar no ensino secundário até 1927; foi então nomeado assistente do Instituto Superior Técnico e por aí fez carreira chegando a Prof. Catedrático de Matemáticas Gerais e Geometria Descritiva; manteve-se aí até 1947, ano em que, por razões políticas, foi compulsivamente reformado. Para sobreviver organizou "cursos de explicações" que os alunos procuravam para ouvir com clareza as suas exposições. Fundou a Universidade Popular Portuguesa e colaborou na Universidade Livre; era um cientista para quem o saber devia ser património de todos; neste sentido, propunha-se publicar uma obra na *Biblioteca Cosmos* subordinada ao título *A Geometria ao Alcance de Toda a Gente*; apenas saíram 2 volumes da parte I (Iniciação Geométrica), do grandioso plano exposto no prefácio do primeiro destes volumes.

Colaborou também com professores do ensino liceal na escrita de manuais escolares, destacamos *Álgebra* para o 3º ciclo liceal, sempre com "notas históricas" e "perfis biográficos" dos matemáticos intervenientes.

Compilação de Sérgio Macias Marques

da a *Junta de Investigação Matemática* (JIM) por Mira Fernandes, António Monteiro e Ruy Luis Gomes, com os objectivos de promover o desenvolvimento da investigação científica, realizar trabalhos de investigação necessários à economia nacional e ao desenvolvimento de outras ciências, estabelecer relações com o movimento matemático dos países ibero-americanos e despertar o entusiasmo da juventude pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora.

Apesar da hostilidade da ditadura salazarista, a luta contra o isolamento, a luta pela investigação e divulgação matemática prosseguia alegremente em todas as frentes!

Segundo António Monteiro ([12], p. 11),

> Quando os matemáticos portugueses, sem serem solicitados, sem serem forçados, mas animados do grande desejo de servir a Nação, fundaram a Junta de Investigação Matemática, disseram ao país: para cumprir os nossos deveres, estamos presentes.

No Porto, aos sábados à tarde, como resultado da colaboração da JIM e do Centro, passaram a realizar-se *Colóquios de Análise Geral*, com participação estudantil. Desses Colóquios nasceu nova colecção de publicações, *Cadernos de Análise Geral* (os "Cadernos da JIM").

A JIM promoveu a realização de palestras lidas ao microfone de um posto emissor particular do Porto, *Rádio Clube Lusitânia*, cujo proprietário, Júlio Nogueira, colaborou, enquanto pôde, com a JIM. Essas palestras divulgavam a importância da investigação científica nos mais diversos campos e foram seus autores Ruy Luis Gomes, António Monteiro, Branquinho de Oliveira, Fernando Pinto Loureiro, José Antunes Serra, António Júdice, Armando Castro, Carlos Teixeira, Flávio Martins e Corino de Andrade. As palestras foram depois publicadas pela JIM.

Como resultado da Colaboração da SPM com a JIM, foram realizadas em Lisboa conferências por Ruy Luis Gomes, Almeida Costa, Neves Real, Pereira Gomes e o então estudante Andrade Guimarães.

Como era natural, as instituições criadas contribuiram para melhorar a participação portuguesa em Congressos de Matemática.

Investida salazarista contra a Universidade

A ditadura não assistia de braços cruzados à manifestação das actividades científicas e, especialmente, das actividades matemáticas.

Já tinha conseguido impedir que o notável físico Guido Beck continuasse a orientar o Seminário de Física Teórica, anexo ao Centro de Matemática do Porto. A ditadura forçou Guido Beck a sair do Porto, fixando-lhe residência nas Caldas da Rainha, em 1943. Passado algum tempo, Guido Beck conseguiu sair para a Argentina e foi trabalhar no Observatório de Córdoba e, posteriormente, foi para o Brasil para o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Correspondendo ao interesse manifestado pela SPM, por António Monteiro e colaboradores, para se formarem Clubes de Matemática, estudantes da Faculdade de Letras de Lisboa formaram um Clube de Matemática. Outros Clubes se

O Governo resolveu
afastar do serviço efectivo
por motivos de ordem pública
alguns oficiais e professores

Notícia de 1ª página publicada pelo Diário de Lisboa, em 15 de Junho de 1947 lhe seguiram: no Instituto Superior de Agronomia, no Instituto Superior Técnico, que começaram imediatamente a trabalhar, organizando Colóquios e Conferências de Matemática.

Quando ia surgir o Clube de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto, a ditadura suprimiu todos os clubes e a formação de novos clubes.

Os sinais de hostilidade governamental foram crescendo.

Os "bons exemplos" do nazismo alemão e do fascismo italiano aí estavam

Oficiais e professores aposentados ou demitidos

De harmonia com as deliberações tomadas em Conselho de ministros foram mandados reformar os seguintes oficiais:

Vice-Almirante, José Mendes Cabeçadas.
Cap.-Tenente, Manuel Pires de Matos.
General de reserva, José Marques Godinho.
Brigadeiro de Artilharia, Vasco de Carvalho.
Brigadeiro de Engenharia, Eduardo Corregedor Martins.
Brigadeiro de Aeronautica, António de Sousa Maia.
Coronel do Estado Maior, Celso Mendes de Magalhães.
Coronel de Infantaria, Luis Gonzaga Tadeu.
Coronel de Cavalaria, Carlos Afonso dos Santos.
Capitão de Infantaria, Francisco Marques Repas.
Tenente do extinto Quadro Auxiliar do Serviço de Saude, José Joaquim Gaiata.

Foram mandados aposentar (ou demitir, se não tivessem direito à aposentação) os seguintes professores:

Dr. Mário Silva, catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.
Dr. Celestino da Costa, dr. Pulido Valente, dr. Fernando Fonseca, dr. João Candido Oliveira, dr. Adelino Costa, catedráticos da Faculdade de Medicina de Lisboa; e dr. Cascão de Anciães, professor extraordinário da mesma Faculdade.
Dr. Carlos Torre da Assunção e dr. Flávio Pinto Resende, catedráticos da Faculdade de Ciências de Lisboa.
Bacharel Ferreira de Macedo e eng. Arnaldo Peres de Carvalho, catedráticos do Instituto Superior Técnico.
Licenciado Manuel Zaluar Nunes, catedrático interino do Instituto Superior de Agronomia.
Dr. João Remy Teixeira Freire, professor extraordinário, interino, do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.

Foram mandados rescindir imediatamente os contratos com os seguintes assistentes:

Da Faculdade de Letras de Lisboa: dr.ª Andrée Crabée Rocha.
Da Faculdade de Medicina de Lisboa: dr. Luís Dias Amado.
Da Faculdade de Ciências de Lisboa: dr. Manuel Valadares, dr. Marques da Silva, licenciado Armando Gibert.
Do Instituto Superior Técnico: eng. João Lopes Reimundo.
Do Instituto Superior de Agronomia: licenciado José Cardoso Morgado Junior.
Do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras: licenciado Orlando Morbey Maria Rodrigues.

A nota esclarece ainda que os funcionários atingidos cessarão quaisquer outras funções publicas.

Texto da nota oficiosa de 15.6.947 com a lista dos oficiais e professores demitidos.

para serem seguidos...

A Alemanha nazi tinha feito uma "limpeza exemplar" nas Universidades e em Outubro de 1939, 22 universidades alemãs estavam encerradas. A Itália fascista expulsou das Universidades professores prestigiados, entre os quais os matemáticos Guido Ascoli, Frederico Enriques, Gino Fano, Guido Fubini, Arturo Horn, Beppo Levi, Levi-Civita, Arturo Maroni, Benjamino Segre, Alessandro Terracini ([13]), p.106).

A ditadura salazarista, nos anos de 1945 a 1947, por processos diversos, afastou do ensino universitário ou impediu que nele entrassem: Bento Caraça, Azevedo Gomes, Ruy Luis Gomes, Pulido Valente, Fernando Fonseca, Ferreira de Macedo, Peres de Carvalho, Dias Amado, Celestino da Costa, Cândido de Oliveira, Adelino da Costa, Cascão de Ansiães, Mário Silva, Torre de Assunção, Flávio Resende, Zaluar Nunes, Remy Freire, Crabée Rocha, Manuel Valadares, Marques da Silva, Armando Gibert, Lopes Raimundo, Laureano Barros, José Morgado, Morbey Rodrigues, Pereira Gomes, Sá da Costa, Virgílio Barroso, Jorge Delgado, Hugo Ribeiro, António Monteiro, Soares David, António Santos Soares e outros.

Nos outros graus de ensino, houve também professores afastados do ensino e licenciados impedidos de se profissionalizarem, por simples informação da PIDE.

As actividades da SPM não foram expressamente proibidas, mas foram proibidas em todas as dependências do chamado Ministério da Educação Nacional. Quando o matemático espanhol German Ancochea esteve em Lisboa, para fazer uma conferência sobre Geometria Algébrica, o único lugar que conseguimos para a realização da conferência foi o restaurante onde o convidámos para almoçar, o English Bar.

O Seminário de Matemática que era realizado no Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa, teve de funcionar numa dependência da casa de Hugo Ribeiro, no Murtal, que passámos a chamar *Universidade do Murtal*.

No Porto, o Seminário de Matemática foi transferido para a casa de Neves

Matemáticos Portugueses

Bento de Jesus Caraça (1901-1948)

Nasceu em Vila Viçosa; licenciou-se em Economia e Finanças no Instituto de Ciências Económicas e Financeiras de Lisboa, em 1923, e neste Instituto fez a sua carreira universitária até à nomeação como prof. catedrático em 1929. Leccionou sempre até 1946 as disciplinas de Matemáticas Superiores, altura em que foi demitido do cargo por razões políticas mediante processo disciplinar, de cuja decisão recorreu. Mas viria a falecer dois anos depois, sem ser reconduzido.

Foi um grande pedagogo da matemática, sendo cofundador da *Gazeta de Matemática*, onde dirigiu a secção "Pedagogia". Impulsionou durante muitos anos consecutivos, como Presidente da Direcção, a Universidade Popular Portuguesa. Dirigiu a *Biblioteca Cosmos*, onde publicou dois volumes dos *Conceitos Fundamentais da Matemática*, a que postumamente se reuniu uma terceira parte, sendo então publicados num único volume.

Fundou o Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia, em 1938, que dirigiu desde então até à extinção que se seguiu à sua demissão da Universidade; introduziu no nosso País os métodos da Econometria. Foi eleito Presidente da SPM no biénio 1943/44, e seu Delegado aos Congressos da Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências nos anos 1942 a 1944.

Compilação de Sérgio Macias Marques

Real, na Rua do Almada, que passou a ser conhecida como *Universidade da Rua do Almada.*

António Monteiro, Hugo Ribeiro, Ruy Luis Gomes, Pereira Gomes, Zaluar Nunes, José Morgado, Remy Freire e outros após várias perseguições pela PIDE, viram-se obrigados a exilar-se, para poderem continuar a exercer a profissão. Jorge Delgado, Soares David, Sá da Costa, Morbey Rodrigues, Marques da Silva e outros viram-se obrigados a mudar de profissão.

Laureano Barros, Ferreira de Macedo e outros, impedidos de continuarem como docentes universitários, passaram a ensinar estudantes universitáros como explicadores.

No entanto, a Resistência Matemática não foi vencida!

A *Portugaliae Mathematica*, a *Gazeta de Matemática*, a Tipografia Matemática, graças à dedicação de Zaluar Nunes e, após o seu falecimento, graças a Gaspar Teixeira, resistiram ao vandalismo governamental, até depois da Revolução dos Cravos.

A *Portugaliae Mathematica*, actualmente dirigida por Pereira Gomes e uma boa equipa, melhorou consideravelmente.

A actividade matemática no país é agora muito maior que no tempo da ditadura.

Em Lisboa, a actividade matemática, depois da investida de 1945-47, continuou em torno de Sebastião e Silva e, no Porto, graças aos esforços de Sarmento Beires, Arala Chaves, Coimbra de Matos e nos útimos anos, graças aos esforços de Falcão Moreira e seus colaboradores, recuperou-se o Centro de Matemática.

Quaisquer que sejam as dificuldades a vencer, a Resistência Matemática não desanimará.

A lição de António Monteiro, Ruy Luis Gomes, Hugo Ribeiro e Sebastião e Silva não foi esquecida.

Bibliografia

1. Arriaga, José d': *História da Revolução Portuguesa de 1820*, Livraria Portuense, Porto, 1886.
2. Baião, António: *Episódios Dramáticos da Inquisição Portuguesa,* 3ª ed., Seara Nova, Lisboa, 1972.
3. Cortesão, Jaime: *Alexandre de Gusmão e o Tratado de Madrid* vol. I, Livros Horizonte, Lisboa, 1984.
4. Cunha, Pedro José da: *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal*, Exposição Portuguesa em Sevilha, 1929.
5. Godinho, Vitorino Magalhães: *Do ofício e da cidadania. Combates por uma civilização da dignidade*, Edições Távola Redonda, Lisboa, 1989.
6. Gomes, Ruy Luis: *Tentativas feitas nos anos 40 para criar no Porto uma escola de Matemática*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 6 (1983) pp. 29-48.
7. Gomes, Ruy Luis: *Sobre o objectivo dos cursos promovidos pela Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto*, Gazeta de Matemática, 9 (1942), pp. 13-14.
8. Herculano, Alexandre: *Da Escola Politécnica e do Colégio dos Nobres*, incluído no tomo VII de *Opúsculos*, pp. 27-94, 3ª ed., Livraria Bertrand, Lisboa.
9. Marques, A. H. Oliveira: *História de Portugal*, Palas Editores, Lisboa.
10. Martins, J. P. Oliveira: *História de Portugal*, 11ª ed., Parceria António Maria Pereira, Lisboa, 1927.
11. Monteiro, António: *Centro de Estudos Matemáticos do Porto*, Gazeta de Matemática, 10 (1942), p. 27.
12. Monteiro, António: *Os objectivos da Junta de Investigação Matemática*, 21 (1944), pp. 10-11.
13. Morgado, José: *O Professor Ruy Luis Gomes e o Movimento Matemático Português*, Anais da Faculdade de Ciências do Porto, 67 (1986), pp. 97-151.
14. Morgado, José: *Para a História da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 1990, Conferência feita no cinquentenário da SPM, em Lisboa (não publicado).
15. Quental, Antero de: *Causas da Decadência dos Povos Peninsulares*, texto incluído em *Prosas Sócio-Políticas*, pp. 255-296, publicadas e apresentadas por Joel Serrão, Colecção Pensamento Português, Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 1982.
16. Quental, Antero de, e outros: *Conferências Democráticas Estabelecidas na Sala do Casino*, texto incluído em *Prosas Sócio-Políticas*, pp. 253-254, publicadas e apresentadas por Joel Serrão, Colecção Pensamento Português, Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 1982.
17. Ribeiro, Hugo: *Actuação de António Aniceto Monteiro em Lisboa entre 1939 e 1942*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), pp. v-vii.
18. Sá, Victor de: *Antero de Quental*, Colecção Limiar/Ensaio, Editora Limiar, Porto, 1982.
19. Saraiva, José Hermano: *História Concisa de Portugal*, Colecção Saber, Publicações Europa-América, Mira-Sintra: Mem-Martins, 1978.
20. Stockler, Francisco de Borja Garção: *Ensaio Histórico sobre a Origem e Progresso das Matemáticas em Portugal*, Paris, 1819.
21. Teixeira, Francisco Gomes: *História das Matemáticas em Portugal*, Biblioteca de Altos Estudos, Lisboa, 1934.
22. Teixeira, Francisco Gomes: Uma carta publicada na revista *L'Enseignement Mathématique*, 2 (1900), pp. 218-19.
23. Teixeira, Francisco Gomes: *Elogio Histórico do Doutor José Anastácio da Cunha*, incluído em *Panegíricos e Conferências*, pp. 121-153, Academia das Ciências de Lisboa, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1925.

José Morgado
Universidade do Porto

Materiais para a aula de Matemática

A actividade que apresentamos diz respeito às "contas antigas na Madeira", isto é, à maneira como noutras épocas, a par da aritmética, se faziam contas na Ilha da Madeira, especialmente entre os merceeiros e os pescadores.

Das 25 pessoas que entrevistámos para um trabalho na cadeira de História da Matemática, apenas algumas tinham uma vaga ideia de como eram feitas as contas antigamente, tais como eram usadas pelos seus antepassados ou pelos mais idosos. Actualmente já não usam esse método, porque já sabem ler e escrever. São de opinião que a notação simbólica foi utilizada devido a que a maioria das pessoas não sabia ler nem escrever. As contas eram feitas "de memória" e registadas com giz nas paredes dos estabelecimentos, ou nos barris, e assimse apagavam facilmente. A utilização destes símbolos para representar quantias de dinheiro é muito antiga, existindo na época em que a moeda eram os "reis", tendo sido adaptada depois ao escudo e acrescentados outros símbolos, para além dos existentes, consoante as necessidades, ou seja, acompanhando a desvalorização da moeda.

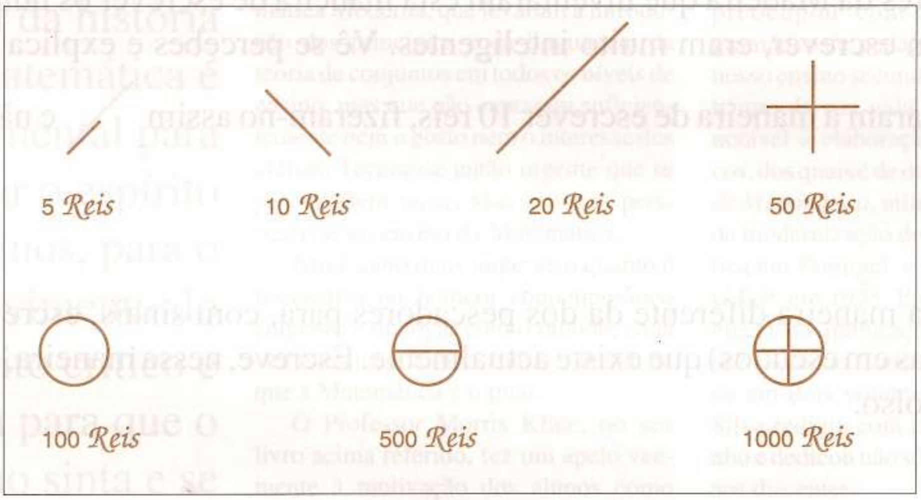
Julgamos que estas actividades podem despertar o interesse e a curiosidade de alunos do fim do 1º ciclo ou início do 2ª ciclo do ensino básico.

Ana Maria Belo Relva
Escola Preparatória do Machico

Materiais para a aula de Matemática

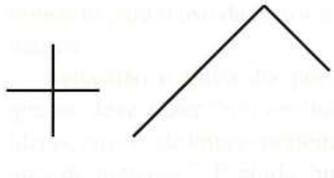
Contas antigas na Ilha da Madeira

Há muitos anos, ainda no tempo dos reis, o dinheiro em Portugal não se contava em escudos, mas sim em "reis". Em vez de haver moedas de 5 escudos, por exemplo, havia moedas de 5 reis.
Nessa altura ainda poucas pessoas iam à escola e muitas não sabiam ler nem escrever, nem tinham aprendido a fazer contas, como tu, na escola primária. Mas precisavam de contar o dinheiro, para fazer compras ou para os seus negócios. E assim acabavam por aprender a fazer contas, cada um à sua maneira, ou pelos dedos, ou por outras maneiras que iam inventando.
Os pescadores da Madeira inventaram uma maneira de escrever o dinheiro, que podes ver no quadro a seguir.



Então, quando queriam escrever que um peixe custava 15 reis, escreviam:

E se queriam escrever 80 reis, escreviam:



a) Faz de conta que és um pescador da Madeira do fim do século passado, e imagina como escreverias:

35 reis:

230 reis:

1625 reis:

b) Vê agora se descobres um número que, com os sinais que os madeirenses tinham inventado, não fosse possível escrever. Explica porque é que esse número não pode ser escrito.

c) Inventa os sinais que forem precisos para que, na maneira de escrever dos antigos pescadores da Madeira, sejamos capazes de escrever **todos os números que quisermos...**

d) Os pescadores da Madeira que inventaram esta maneira de escrever os números, embora não soubessem escrever, eram muito inteligentes. Vê se percebes e explica porque é que,

quando inventaram a maneira de escrever 10 reis, fizeram-no assim  e não assim 

e) Inventa uma maneira diferente da dos pescadores para, com sinais, escrever o dinheiro (moedas e notas em escudos) que existe actualmente. Escreve, nessa maneira, o dinheiro que tens hoje no bolso.

A História da Matemática no ensino da Matemática

Maria Fernanda Estrada

O papel da história da Matemática é fundamental para estimular o espírito dos alunos, para o desenvolvimento do espírito crítico e ainda para que o aluno sinta e se aperceba das ideias subjacentes às teorias e aos teoremas já acabados que aprende.

Considerações gerais

A recente reforma educativa concede um lugar à história da Matemática no ensino da Matemática, história que deve ser integrada nesse mesmo ensino. Os objectivos expressos nos programas apontam para a humanização do estudo da disciplina e para que o aluno adquira uma perspectiva da Matemática como ciência em construção. Contudo esta concessão não é isolada e não se restringe a Portugal, muitos outros países europeus e não europeus dão actualmente um grande relevo à história da Matemática no ensino, e há já uma vasta bibliografia de artigos e livros sobre o assunto.

O Professor Morris Kline, no seu livro *The failure of the New Math*, denuncia os fracassos da chamada Matemática Moderna, que levaram à introdução dos princípios e da linguagem da teoria de conjuntos em todos os níveis de ensino, mas que não captaram suficientemente nem o gosto nem o interesse dos alunos. Tornou-se então urgente que se procurassem novas vias e novas perspectivas no ensino da Matemática.

Isto é tanto mais imperioso quanto é necessário ao homem contemporâneo entender e dialogar com o mundo, cada vez mais tecnológico, que o rodeia e de que a Matemática é o pilar.

O Professor Morris Kline, no seu livro acima referido, fez um apelo veemente à motivação dos alunos como factor essencial de sucesso. E as referências históricas, oportunamente introduzidas, podem responder a essa componente motivadora, dada a curiosidade natural e o interesse do aluno pela história.

Poder-se-ia porém perguntar em que medida este recurso à história da Matemática é, em si, inovador.

Sabemos que já na Reforma das Universidades, promovida pelo Marquês de Pombal em 1772, se aconselhava tanto a professores como a alunos que o ensino das Ciências fosse associado ao da sua história.

Mais recentemente, os livros de Matemática para o ensino secundário escritos pelo Professor Sebastião e Silva e pelo Dr. Silva Paulo, na década de quarenta, contêm excelentes notas históricas, que muitos professores já então utilizavam, mesmo sem a recomendação expressa dos programas. Aliás outros livros de outros autores dessa época seguem a mesma tendência.

Porém, quando se fala de história da matemática no ensino da Matemática, impõe-se-nos uma referência especial ao Professor Sebastião e Silva. Tanto se preocupou com os aspectos programáticos e pedagógico-didácticos do nosso ensino secundário que dedicou um tempo da sua vida de investigador tão notável à elaboração de livros didácticos, dos quais é de destacar o *Compêndio de Matemática*, utilizado na experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal, e depois editado pelo G.E.P. em 1975. Esta obra foi acompanhada da publicação do *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* em dois volumes, que Sebas-tião e Silva redigiu com tanto cuidado e carinho e dedicou não só aos docentes, como aos discentes.

Essas obras estão cheias de recomendações que explícita ou implicitamente remetem para o uso da história da matemática.

Sebastião e Silva diz por exemplo que se deve fazer "um ensino vital de ideias, em vez de uma experiência mecânica de matérias". E ainda "um ensino que não estimule o espírito e que pelo

Matemáticos Portugueses

Pedro Nunes
(1502-1578)

Nasceu em Álcacer do Sal, de ascendência judaica. Bacharel em Medicina pela Universidade de Lisboa, aí ensinou Filosofia, Moral, Lógica e Metafísica, mas por pouco tempo (1530-31), pois viria a entregar-se exclusivamente aos "assuntos positivos" das Matemáticas e da Física e a dedicar-se muito em especial à Náutica, ciência cujo conhecimento interessava às funções do cargo chamado a exercer, Cosmógrafo do reino. Em 1544 a Universidade foi transferida para Coimbra. D. João III convida-o para nela ensinar as Matemáticas, encargo que desempenhou com elevado brilho até 1562, ano em que foi jubilado. Entretanto ia com frequência a Lisboa em serviço da Corte. Em 1547 o Rei promove-o a Cosmógrafo-Mor do reino.

São muitos e de incontestável valor os trabalhos científicos. A relação mais completa deles vem em "As obras de Pedro Nunes — sua cronologia bibliográfica" de L. Silva. Destacamos o *De Crepusculis* (1542), tida como a mais original e mais conhecida além fronteiras; aí descreveu a sua conhecida invenção, o Nónio (de Nunes).

Morreu em Lisboa, uma semana após o desastre de Alcácer Quibir (em que "desapareceu" o Rei D. Sebastião, seu antigo e dilecto discípulo que, em 1572, o chamara novamente à Corte).

Compilação de Sérgio Macias Marques

contrário o obstruã com as clássicas matérias para exame só contribui para produzir máquinas em vez de homens".

O papel da história da Matemática é fundamental para esse estímulo do espírito dos alunos, para o desenvolvimento do espírito crítico e ainda para que o aluno sinta e se aperceba das ideias subjacentes às teorias e aos teoremas já acabados que aprende. Mas Sebastião e Silva também apela explicitamente para referências históricas quando afirma "[que] o exemplo histórico do tabuleiro do xadrez deveria ser familiar a todos os alunos que passam pelo ensino secundário". Aliás, o seu interesse pela história da matemática revelou-se ainda no artigo que escreveu sobre "Álgebra" para a *Enciclopédia da Vida Corrente* e no artigo que escreveu sobre "Matemática" para a *Enciclopédia Foco.*

Ainda, como primeiro professor universitário a leccionar uma cadeira de História do Pensamento Matemático na Faculdade de Ciências de Lisboa, e a dar à História da Matemática um estatuto de disciplina de um Curso Superior, pensou na compilação de umas *Notas do Curso de História do Pensamento Matemático*, projecto que, infelizmente para nós, não passou de um breve esboço, devido à doença que tão cedo o vitimou. Terá sido mesmo uma das suas mágoas "não ter tempo" para escrever um livro sobre o assunto, como se pode ler na sua biografia, da autoria do Professor António Andrade Guimarães. Seria um livro precioso escrito por alguém que aliava ao espírito de um grande matemático, o espírito de um profundo humanista e pedagogo. Sebastião e Silva tinha de facto a consciência de como a História da Matemática podia contribuir eficazmente para a revitalização do ensino da Matemática. E hoje, como ontem, as suas ideias pedagógicas são de uma actualidade flagrante, como evidenciado pelo Professor Jaime Carvalho e Silva no último encontro da S.P.M. em Lisboa. Os *Guias* já referidos estão cheios de sugestões pedagógicas admiráveis e continuam a merecer que sejam lidos e reflectidos por todos os professores de Matemática.

Algumas formas da introdução da história da matemática no ensino da Matemática

Vamos destacar algumas das formas que permitem ao professor a introdução de referências históricas e consequentes possíveis aproveitamentos.

Biografias de matemáticos

O papel das biografias deve ser em primeiro lugar o de tornar os matemáticos de que falamos, pessoas vivas, porque se libertaram "da lei da morte", como diz o poeta. Apresentá-los com os seus sucessos e fracassos, grandeza e pequenez, duas faces afinal de todos os homens de todos os tempos. Que Newton, Leibniz, Descartes, Pedro Nunes, Sebastião e Silva e muitos outros se tornem próximos e as suas ideias sejam tão discutidas como as de Shakespeare, Proust, Camões ou Pessoa.

Através de biografias poder-se-á até introduzir o dinamismo que vem da evolução das ideias, da sua génese e sucessivas aproximações, até à forma final que muitas vezes aparece com pessoas diferentes em lugares diferentes. E sempre haverá ocasião de exaltar o trabalho como um valor que leva à realização da pessoa. Trabalho ao serviço duma ideia, sem desfalecimentos, prosseguido tantas vezes durante tantos anos, sem aparente sucesso. As biografias dão ainda a possibilidade de introduzir o contexto social e cultural dos diferentes autores e ver a matemática como ciência viva e interactiva, que tenta responder às questões duma época e põe outras.

Perante vidas de pessoas reais, que apenas viveram noutro tempo, mas que eram seres humanos como nós, o aluno pode também ver-se como potencial actor e criador de novas teorias e conceitos, em resposta aos problemas deixados em aberto pelas épocas anteriores ou outros que surgirão hoje ou amanhã. O aluno pode sentir-se convidado a participar dessa corrente criadora e abrir-se-lhe perspectivas duma contribuição para o edifício matemático que está a estudar.

Desenvolvimentos temáticos

Há partes do programa para as quais são expressamente apontadas referências históricas, como por exemplo na descoberta dos números irracionais.

Aqui há oportunidade de falar na Escola Pitagórica, no Teorema de Pitágoras, no método de redução ao absurdo em que se baseia a prova de que $\sqrt{2}$ é irracional, citada já por Aristóteles. E ainda no impacto de uma descoberta numa época e num contexto científico não preparado para a receber. Toda uma aventura que é de ontem, mas que pode ser de hoje.

Considerações em parte similares, se podem fazer a propósito da introdução histórica das geometrias não euclidianas. O tema agora é mais geral, mais rico e complexo. Tomando como ponto de partida os *Elementos* de Euclides e o postulado V (Axioma XII na tradução portuguesa), há oportunidade para falar sucessivamente do conteúdo do postulado, das objecções que desde cedo mereceu, das tentativas de demonstração, da obra fundamental de Gerolano Saccheri, como verdadeiro precursor das geometrias não euclidianas, numa época e num contexto científico em que estas eram ainda impensáveis. Outra aventura em que tantos matemáticos brilhantes se envolveram, se esforçaram por fazer uma demonstração que muitas vezes pensaram ter conseguido, mas cometendo petições de princípio, embora subtis. A descoberta das geometrias não euclidianas pode assim ser vista, não como algo caído do céu, mas como termo de um percurso tão longo no tempo, cheio de insucessos, mas também de sucessos nos teoremas que se foram descobrindo, nos enunciados equivalentes ao postulado V que se encontraram.

Será de destacar o enunciado conhecido por Axioma de Playfair, mas que já aparece nos *Comentários sobre o livro I dos Elementos de Euclides* de Proclo de Lycia.

E ainda haverá a notar o facto, tão comum na matemática, das descobertas simultâneas em diferentes lugares, por pessoas diferentes. Gauss, Bolyai e Lobatchevski, cada um com a sua feição própria, aparecem no cimo duma escalada fascinante, depois da qual se avistaram novas terras.

Origem e significado dos termos matemáticos

Outra forma de abordagem da História da Matemática no ensino surge a propósito da origem e significado de certos termos. O exemplo da palavra "geometria" é por demais conhecido. Mas fornece o ensejo de falar no Antigo Egipto, nas cheias do Nilo e das medições das terras subsequentes às inundações e na geometria que lá se fazia. Mas muitos outros termos se podem referir, como cálculo, triângulo, álgebra, algarismo, etc. De não menor importância são os nomes das três cónicas, parábola, elipse e hipérbole, oriundas do problema pitagórico das aplicações das áreas, significando respectivamente aplicação por "igualdade", por "defeito" e por "excesso". Só mais tarde foram aplicados às cónicas por Apolónio. Será ainda interessante estabelecer a relação com o significado dessas mesmas palavras como figuras de estilo, na base dos mesmos conceitos de igualdade, defeito e excesso. Todos conhecemos parábolas de Jesus Cristo, nós mesmos proferimos hipérboles no nosso dia-a-dia, sendo uma das mais frequentes o "estar morto de cansaço" e somos muitas vezes elípticos nas nossas descrições.

Estudos de textos do passado

A escolha de textos como material de trabalho na aula dá a vantagem ao professor da escolha dum enquadramento histórico, acrescido à riqueza do tratamento de documentos originais. Como exemplo vamos escolher o ensino da resolução das equações de 2º grau. O professor pode escolher como referência histórica, uma das que se indicam a seguir, tiradas de possíveis outras. Em todas, há resoluções de equações do 2º grau, embora por abordagens diferentes.

a) Matemáticas babilónicas

O professor pode escolher um problema das placas babilónicas, reproduzido por Carl Boyer. Seja, transposto para o sistema decimal, o problema da determinação de dois números cujo produto é 7,5 e cuja soma é 6,5.

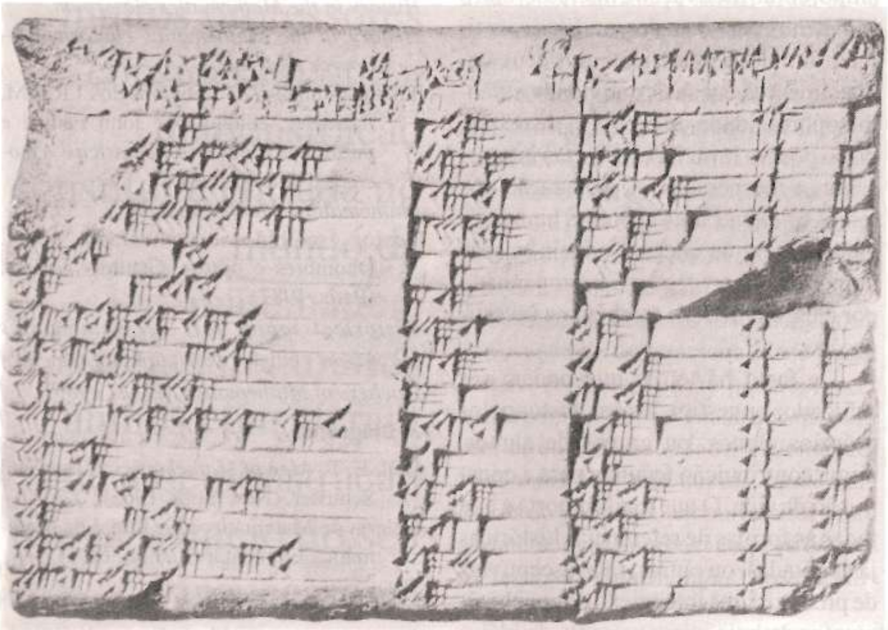
E será muito interessante pôr em confronto as técnicas do escriba babilónico com as nossas técnicas actuais de resolução do problema.

Seguindo as instruções do escriba, ao aluno babilónico era pedido sucessivamente:

Calcula metade de 6,5	3,25
quadra	10,5625
subtrai 7,5	3,0625
Extrai a raiz	1,75

Logo a 3,25 soma e subtrai 1,75. Temos as raizes 5 e 1,5.

O professor pode então convidar os



Placa ou tablete Plimpton 322, do período babilónico antigo (1900 a.C a 1600 a.C.).

alunos a descobrir a fórmula subjacente aos cálculos do escriba que, como é fácil ver,é a identidade

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \equiv \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Pode convidá-los a justificar cada fase do processo, comparar com o método actual, detectar semelhanças e diferenças, enfim desenvolver o espírito crítico.

Num salto no tempo, os alunos podem considerar-se contemporâneos dos estudantes babilónicos de há mais de 3000 anos.

b) Matemáticas gregas

A propósito das equações do 2º grau o professor pode também escolher como enquadramento as matemáticas gregas, o tempo de Euclides e escolher o Problema 11 do livro II dos *Elementos*. Há oportunidade para falar na divisão áurea, no equivalente grego da nossa fórmula resolvente. Há oportunidade para falar de Euclides, dos Elementos e da Álgebra Geométrica dos Gregos.

c) Matemáticas árabes

Uma terceira possível escolha é a referência às matemáticas árabes, escolhendo um problema do livro de Álgebra de Al-Khowarizmi, reproduzido também por Carl Boyer.

Trata-se de resolver a equação $x^2 + 10x = 39$.

O método de Al-Khowarizmi consiste na construção de um quadrado de lado qualquer x, correspondente ao termo x^2, e depois ir-lhe adicionando rectângulos até obter um quadrado de lado $x + 5$.

Assim, em cada um dos lados do

quadrado x^2 são colocados rectângulos de largura 2,5 e finalmente, em cada canto, um quadrado de lado 2,5.

A construção da figura corresponde às equivalências:

$$x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4 \times 2,5x + 4 \times 2,5^2 = 39 + 25$$
$$\Leftrightarrow (x+5)^2 = 8^2$$

Finalmente de $x + 5 = 8$, vem a solução $x = 3$.

O professor terá oportunidade para falar dos árabes, da origem da palavra álgebra, da exclusão das raízes negativas, etc. E ainda para convidar os alunos a comparar este método geométrico com o método algébrico que nós utilizamos, de completar o quadrado dum binómio.

d) Álgebra de Pedro Nunes

Se o professor quiser falar das Matemáticas em Portugal, nomeadamente de Pedro Nunes, da sua época e dos seus trabalhos, de álgebra sincopada, pode então escolher um dos problemas do 2º grau do *Libro de Algebra* de Pedro Nunes.

Pode escolher, por exemplo, o problema nº 70 do Cap. 5 da 3ª parte.

Conclusão

As referências históricas a introduzir no ensino, se podem ser extraordinariamente benéficas do ponto de vista do aluno, como motivação e interesse, não o são menos para o professor. Elas constituem um desafio aliciante aos seus conhecimentos e à sua criatividade e dão-lhe oportunidade de pesquisa de textos, que o podem levar a descobertas interessantes e inesperadas. A preparação dos temas fá-lo entrar na aventura humana e cultural em que quer introduzir os seus alunos, muitas vezes até acompanhado por eles, envolvidos também na investigação.

De facto há temas que podem ser estudados, investigados e expostos pelos próprios alunos, ou grupos de alunos, numa contribuição fecunda para a construção da aula. O que mais importa é que todas as formas de referências históricas já apontadas, ou outras, são susceptíveis de produzir uma integração dos conhecimentos de hoje numa corrente de ideias e de investigação que vem do passado e continua em direcção ao futuro.

As considerações feitas assentam num pressuposto que as referências históricas são integradas no ensino, não constituindo um tópico em si; elas devem antes ser um auxiliar desse mesmo ensino. Por outro lado, também se pressupôs que há uma certa disposição básica e natural dos alunos para a introdução dessas referências, o que pode em alguns casos não existir ou variar com a idade ou outros factores.

Por isso, como de resto em todas as actividades do professor, as opções devem ser tomadas de acordo com as circunstâncias concretas dos alunos a que se dirigem.

Algumas referências bibliográficas:

1. Histórias gerais

Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blicher, (S.Paulo, 1974)

Collette, J.P., *Histoire des Mathématiques*, pedido à Ed. VUIBERT, Paris. (Existe tradução espanhola na colecção Siglo XXI)

Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, (New York, 1972)

Struik, D., *História Concisa das Matemáticas*, ed. Gradiva

2. Colecções de textos originais e temas

History in the Mathematics classroom

History in the Mathematics classroom — Source materials

Tradução inglesa de trabalhos dos I.R.E.M. franceses, editada por John Fauvel e publicada pela *Mathematical Association* de Inglaterra.

Mathématiques ou fil des âges

Textos escolhidos e comentados por J. Dhombres e outros, Gauthier Villars, (Paris, 1987)

Historical topics for the mathematics classroom, edição do *National Council of teachers of Mathematics*, (EUA, 1989)

3. Biografias

Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, (New York, 1965)

Galeria de Matemáticos do Jornal da Matemática Elementar (Lisboa, 1991)

Maria Fernanda Estrada
Universidade do Minho

Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens?(I)*[1]

Evelyne Barbin

A certeza lógica das provas não ultrapassa a sua certeza geométrica
Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*

No ensino francês da Matemática, um lugar importante é dado à demonstração: muitos professores consideram que a demonstração constitui a entrada no mundo da matemática. No entanto, muitos alunos consideram que a demonstração marca o início do seu insucesso na disciplina.

No ensino francês a demonstração é associada à lógica dedutiva. A situação tradicional é então a seguinte: uma demonstração é antes do mais um texto que responde a certas normas, indo das hipóteses às conclusões, enunciando correctamente os teoremas utilizados e usando com conhecimento de causa conjunções gramaticais. Uma demonstração indica o bom caminho, bem diferente do percurso da investigação efectuada, visto que a colocação numa organização dedutiva apaga todos os traços dos questionamentos, das zonas de instabilidade, das tensões que são o prelúdio do desejo e da vontade de demonstrar. Também a demonstração aparece ao aluno, na maior parte das vezes, como um texto formalizado, normalizado e ritual. Trata-se de produzir um texto que não terá forçosamente um sentido para ele.

Recentemente, muitas investigações têm sido lançadas tentando remediar esta situação. Assistimos a uma certa crispação em torno da demonstração, com uma tendência para conceber a aprendizagem da demonstração de forma autónoma em relação à aprendizagem da matemática, à construção de objectos matemáticos e à construção de uma racionalidade matemática. A demonstração pode aparecer assim como uma actividade que não tem sentido em relação ao saber matemático.

Somos nós, sem dúvida, ainda herdeiros do pensamento bourbakista sobre a Matemática. Bourbaki começa os seus *Éléments de Mathématique* com esta afirmação: "depois dos gregos, quem diz Matemática diz demonstração" (Bourbaki, 1960, p. 1), esquecendo que a Matemática é, antes de tudo, um saber. Num artigo recente, Pierre Cartier volta a situar o lugar da demonstração na Matemática, escrevendo: "a Matemática, como toda a ciência, é uma montanha de factos, um saber que se acumula: o papel da prova é organizar o saber e o seu campo de expansão" (1989). Serge Lang, evocando a sua prática de matemático, volta a colocar a Lógica na actividade matemática escrevendo: "Pois bem, é isto fazer Matemática: encontrar problemas interessantes e tentar resolvê-los (…) A Lógica é a higiene da Matemática como a gramática e a sintaxe são a higiene da língua, e nada mais!" (Lang, 1982/1983).

Abordaremos aqui os problemas colocados pelo ensino da demonstração fazendo um certo número de interrogações de natureza epistemológica: Que modo de conhecimento de objectos matemáticos pressupõe a actividade de demonstrar? Que sentido tem demonstrar? Para que concepção do saber remete a necessidade de demonstrar? Para tratar destas questões reportar-nos-emos à História da Geometria, e para melhor precisar a génese e as rupturas, centrar-nos-emos sobre a demonstração do teorema que afirma que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos. Qualquer ensino da demonstração pressupõe certas concepções epistemoló-

* Devido à sua extensão, este artigo será publicado em duas partes, saindo a segunda no próximo número. Ver outras notas no fim do artigo.

gicas, implícitas ou explícitas, que nos parece necessário analisar. É deste ponto de vista que analisaremos seguidamente algumas tentativas em relação ao ensino da demonstração geométrica.

Esta análise não tem como objectivo mostrar como ensinar a demonstração, mas antes estudar um certo número de questões que nos parecem preliminares a uma concepção da aprendizagem da demonstração.

Que modo de conhecimento dos objectos matemáticos pressupõe a actividade de demonstrar?

Há três formas de conceber os objectos matemáticos e o seu modo de conhecimento: uma concepção realista, uma concepção idealista e uma concepção construtivista[2]. Em que é que se distinguem? Como intervem a demonstração e a actividade de demonstrar em cada uma destas diferentes concepções?

Segundo a concepção *realista* descobrimos os objectos matemáticos, os objectos pré-existem no real. Na concepção realista, os objectos matemáticos, abstraídos do real, existem previamente à actividade de demonstrar. A demonstração é então vista como um meio de suprir a insuficiência dos meios de observação ou de instrumentos. Assim a demonstração sobre a soma dos ângulos de um triângulo seguirá as medições com transferidor dos três ângulos de um ou de vários triângulos e ela será legitimada pela imprecisão das medidas.

Segundo a concepção *idealista* inventamos os objectos matemáticos e estes aplicam-se ao real. Na concepção idealista, onde os objectos matemáticos são "livres invenções do espírito humano", a racionalidade matemática e as regras da lógica existem antes da actividade de demonstrar. Segundo esta perspectiva torna-se necessário, antes de qualquer ensino da demonstração, conhecer as regras da lógica — regras estas que se impõem por si mesmas. Consequentemente as demonstrações deverão ser "tiradas" das definições dos objectos e destas regras.

De acordo com a terceira concepção, que qualificarei de *construtivista*, construímos os objectos matemáticos, e estes objectos estruturam o real. Segundo esta concepção, a realidade não é um dado: ela é também construção humana. Construímos uma realidade estruturando o real, isto é, retendo e ligando entre si um certo número de elementos do real. Na concepção construtivista há simultaneidade entre a construção dos objectos matemáticos, a construção de uma racionalidade matemática, e a actividade de demonstrar[3]. Podemos esquematizar esta simultaneidade do seguinte modo:

As duas primeiras concepções, se bem que contraditórias, estão muitas vezes misturadas no espírito do professor: por um lado ele vê a Matemática como uma revelação, "uma passagem do concreto ao abstracto", mas por outro ele também se extasia ao ver "especulações abstractas" aplicarem-se tão miraculosamente ao concreto.

A terceira concepção pode impor-se depois de um estudo histórico dos saberes matemáticos. Para compreender esta aproximação, consideraremos um exemplo histórico, relacionado com a génese do ângulo e dos teoremas relativos a ângulos e triângulos. Com efeito, os jónicos, no séc. VI a.C., sabiam medir a distância a que se encontra da costa um barco no mar. Como podiam eles proceder?[4] Encontramo-nos na situação do cálculo de uma distância inacessível, pois é impossível transportar sobre a água uma vara que servisse de unidade de medida.

fig. 1

Porém, se subirmos ao cimo de uma torre à beira mar, é possível, com a ajuda de um quadrante, efectuar uma tomada de vista. Um quadrante é constituído por um quarto de círculo e por uma parte móvel que permite fazer uma mirada em direcção ao barco. Em seguida podemos virar-nos para terra e, com a mesma posição da parte móvel, fixar um ponto cuja distância à torre seja de fácil determinação.

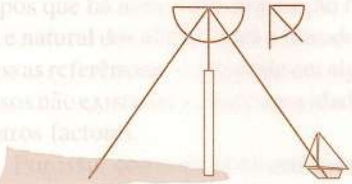


fig. 2

Deste modo justapomos à situação problemática inicial uma figura geométrica (fig. 3). Esta figura serve para representar a situação: os segmentos representam raios visuais (sem espessura) e os ângulos correspondem às diferentes tomadas de vista.

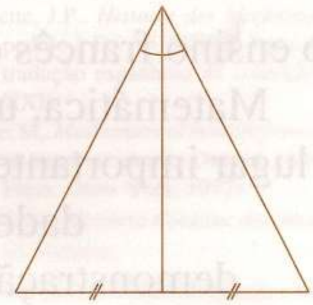


fig. 3

A partir do momento em que concluímos que a igualdade das tomadas de vista implica a igualdade de distâncias, raciocinamos sobre esta figura e enunciamos um teorema relativo à configuração ângulo-triângulo. Utilizamos um processo de pensamento, simultaneamente racional e geométrico, que estrutura o real e que nos permite apropriarmo-nos dele. Temos pois aqui, em simultâneo, a construção de objectos geométricos, a construção de uma racionalidade e a génese de um raciocínio. Objectos, racionalidade e raciocínio tomam sentido numa mesma situação.

A História da Matemática diz-nos que, na mesma época e num mesmo lugar — Grécia Antiga —, nasciam simultaneamente um pensamento racional e geométrico, a exigência de uma ciência demonstrativa e uma concepção ideal dos objectos geométricos[5]. Esta constatação deve ter implicações directas na forma de conceber o ensino da Geometria, onde aí também tudo é para construir: a concepção ideal das figuras, a racionalidade matemática, o raciocínio geométrico. Não há nada preliminar: a pertinência da figura geométrica, o apelo à dedução, a necessidade de demonstrar devem manifestar-se *ao mesmo tempo* a partir de situações problemáticas. Para ter em conta todos estes aspectos, as situações propostas aos alunos devem ser ricas e constituir problemas; não se podem reduzir a tarefas fragmentadas pedidas aos alunos. Voltaremos a este aspecto mais tarde.

Que sentido tem demonstrar?

Para abordar esta questão, compararemos três demonstrações relativas à soma dos ângulos internos de um triângulo: a dos *Elementos* de Euclides (séc. III a.C.), a utilizada por Arnauld nos *Nouveaux Éléments de Géométrie* (1667) e a dos *Éléments de Géométrie* de Clairaut (1765)[6]. Estas demonstrações integram-se em livros onde se pretende ensinar "elementos" de Geometria. As três demonstrações têm a particularidade de assentar sobre o mesmo argumento geométrico, dando simultaneamente à demonstração significados diferentes.

Os *Elementos* de Euclides assentam sobre um "sistema axiomático-dedutivo": cada livro da obra começa por definições e axiomas e continua com proposições. Cada proposição é deduzida a partir dos axiomas e das proposições precedentes. A proposição que nos interessa é a proposição XXXII do Livro I. Euclides define o ângulo rectilíneo como a inclinação entre duas rectas, o que nos remete, sem dúvida, para a génese deste conceito. Contudo esta definição não é operatória: ela permite saber de que objecto se fala, mas não será utilizada nas demonstrações. Assim, para comparar dois ângulos, Euclides não compara inclinações, mas incorpora os ângulos em estudo em triângulos (fig. 4) tais que AB igual a DE e AC igual a DZ, comparando seguidamente BC e EZ.

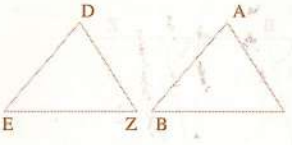


fig. 4

Este procedimento permite-lhe demonstrar na proposição XVI que o ângulo externo dum triângulo é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes[7] (fig. 5).

Para demonstrar que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos, Euclides tem de mostrar que a justaposição destes três ângulos é igual à justaposição de dois ângulos rectos. A partir da proposição XIX, Euclides utiliza o famoso axioma V das paralelas que lhe permite comparar os ângulos definidos por uma secante a duas rectas paralelas. A demonstração da proposição XXXII consiste em traçar a recta paralela ao lado AB, depois verificar a igualdade dos ângulos BAC e ACE e dos ângulos ABC e ECD, e assim obter uma conclusão (fig 6).

Esta demonstração permite reconhecer o carácter absoluto, universal e necessário da proposição. O leitor não pode senão ficar convencido de que, para qualquer triângulo, a soma dos ângulos é igual a dois ângulos rectos. Com efeito, a força de um raciocínio dedutivo que parte de premissas verdadeiras está no facto de tornar irrefutável a conclusão. Quem lê fica, pois, a saber, mas sem saber como se sabe. De resto, quer aqui quer em todos os *Elementos*, Euclides não indica como descobriu as demonstrações: porquê esta maravilhosa paralela que permite ver e constatar o resultado? O leitor também não sabe porque razão se demonstra a proposição XVI e

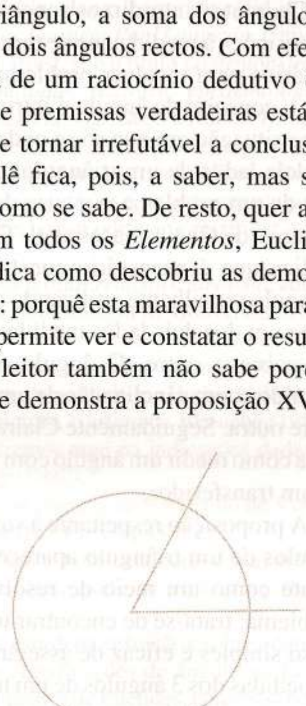


fig. 7

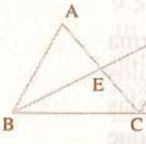


fig. 5

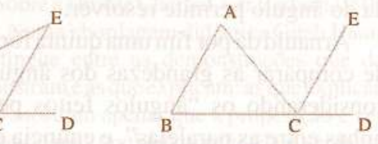


fig. 6

porque esperar ainda dezasseis proposições para ter um resultado completo sobre a soma dos ângulos de um triângulo. Com efeito, a ordem das proposições dos *Elementos* é imposta pelo processo de dedução e não pela ordem da invenção ou pela necessidade de obter resultados.

Esta insatisfação com a leitura de Euclides é expressa no séc. XVII por Arnauld e Nicole que criticam os geómetras antigos por "terem mais preocupação com a certeza do com a evidência, e com o convencimento do espírito do que com o seu esclarecimento" (Arnauld e Nicole, 1965, p. 326). O espírito não se satisfaz sómente com o saber, ele quer também saber como se sabe[8]. Arnauld, com o argumento de que os *Elementos* de Euclides são "confusos e desordenados", escreve em 1667 os *Nouveaux Éléments de Géométrie*, pretendendo assim remediar estes defeitos.

Na obra de Arnauld, a proposição sobre a soma dos ângulos de um triângulo aparece no Livro VIII, consagrado exclusivamente aos ângulos rectilíneos. Arnauld define ângulo como uma "porção de superfície determinada segundo a parte proporcional de uma circunferência cujo centro é o ponto onde estas rectas se encontram" (Arnauld, 1982, p. 142) (fig 7). Em seguida explica ao seu leitor que há quatro maneiras de medir o ângulo: o arco AC, a corda AC, o seno DE, e a base DF (fig 8). Para cada uma destas grandezas indica seguidamente os problemas que esta concepção de medi-

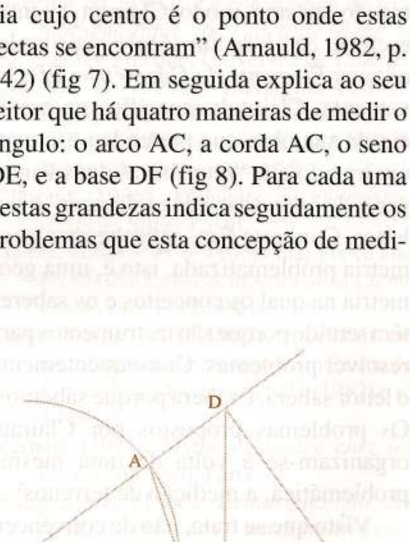


fig. 8

da do ângulo permite resolver.

Arnauld dá por fim uma quinta forma de comparar as grandezas dos ângulos considerando os "ângulos feitos pelas linhas entre as paralelas", e enuncia que toda a oblíqua entre duas paralelas determina ângulos alternos iguais (fig. 9). Esta propriedade permite-lhe demonstrar uma propriedade do ângulo, a saber, "todo o ângulo mais os dois ângulos que têm os lados sobre a base são iguais a dois rectos" (Arnauld, 1982, p. 154). Se BC e BD são lados de um ângulo e CD a sua base, pode-se concluir o resultado traçando MN paralela a CD (fig. 10).

Na obra de Arnauld, o capítulo sobre os ângulos não é um catálogo de proposições, mas antes um método de comparar ângulos e resolver problemas. O leitor poderá saber porque se sabe: será esclarecido. Neste capítulo a ordem das proposições não é regida pela ordem dedutiva, mas pelo alcance dos conhecimentos induzidos por estas proposições. Posto de outro modo, o lugar de cada proposição é determinado segundo a sua pertinência na resolução de um certo tipo de problema. Por exemplo, Arnauld explica que o arco é a única "medida verdadeira e natural" do ângulo e a base a "medida mais imperfeita". De facto, a trissecção do ângulo implica uma trissecção do arco e não uma trissecção da base.

A vontade de esclarecer o leitor anima do mesmo modo Clairaut quando escreve, cerca de um século mais tarde, os seus *Élements de Géométrie*. Efectivamente, Clairault especifica no prefácio da sua obra que pretendeu escrever um tratado que "reunisse as duas vantagens, de interessar e de esclarecer" o seu leitor. Com este fim, concebe uma geometria problematizada, isto é, uma geometria na qual os conceitos e os saberes têm sentido porque são instrumentos para resolver problemas. Consequentemente o leitor saberá, e saberá porque sabemos. Os problemas propostos por Clairaut organizam-se à volta de uma mesma problemática, a medição de terrenos[9].

Visto que se trata, não de convencer, mas de esclarecer e interessar o leitor, a forma euclidiana da demonstração não se adequa. Clairaut escreve, no prefácio,

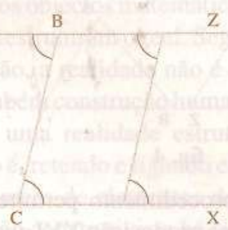


fig. 9

que "evita cuidadosamente dar qualquer proposição sob a forma de teoremas, onde se demonstra que esta ou aquela verdade se verifica, sem mostrar como se conseguiu descobri-la". Prossegue explicando que "se os primeiros autores de matemática apresentaram as suas descobertas em teoremas foi, sem dúvida, para dar um ar mais maravilhoso às suas produções, ou para evitar a dificuldade em retomar a sequência das ideias que os conduziram às suas descobertas". Clairaut, pelo contrário, quer ocupar os leitores a resolver problemas, porque assim estes "se apercebem a cada passo que o levamos a fazer, a razão que determina o inventor; e por aí eles podem adquirir mais facilmente o espírito inventivo". A ordem que preside à sua obra é a ordem das invenções.

Clairaut só introduz os conceitos e as proposições à medida que se tornam necessários para resolver problemas. Assim, o conceito de ângulo é introduzido numa situação em que só se podem medir dois lados de um triângulo: trata-se pois de um problema que visa determinar uma distância inacessível. Clairaut explica que é necessário construir um triângulo semelhante, utilizando a forma como um dos dois lados medidos "tomba" sobre o outro. O ângulo é então definido como a inclinação de uma linha sobre outra. Seguidamente Clairault explica como medir um ângulo com a ajuda de um transferidor.

A proposição respeitante à soma dos ângulos de um triângulo aparece igualmente como um meio de resolver um problema: trata-se de encontrar um processo simples e eficaz de assegurar que as medidas dos 3 ângulos de um triângulo são exactas. Dado um triângulo ABC, Clairaut explica primeiro que se "sente que a grandeza" do ângulo C deve resul-

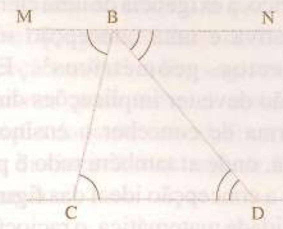


fig. 10

tar das dos ângulos A e B, pois assim que alterarmos estas, as rectas AC e BC alteram-se e o ângulo C também. Para achar como se pode concluir a grandeza do ângulo C a partir das dos ângulos A e B, Clairaut supõe que BC gira em torno do ponto B para a recta BE (fig. 11).

Ele escreve então: "é evidente que ao mesmo tempo que BC gira, o ângulo B se abre continuamente; e que, pelo contrário, o ângulo C se fecha cada vez mais; o que poderia fazer pensar que, neste caso, a diminuição do ângulo C igualaria o aumento do ângulo B e que assim a soma dos três ângulos A, B, C seria sempre a mesma seja qual for a inclinação das linhas AC e BC sobre a linhas AE".

Assim que a recta BC chega à posição limite onde se torna paralela a AC, este resultado pode ser demonstrado: Clairaut escreve que "esta indução pressuposta traz com ela a sua própria demonstração" e traça a recta ID paralela a AC (fig. 12).

Deste modo, Clairault ensina-nos como o geómetra tem a ideia de construir esta paralela ao lado AC, ideia-chave que permite demonstrar a proposição.

Assim, para Clairaut, demonstrar é também saber porquê e saber como se sabe — isto é, que o saber implica o processo pelo qual se sabe. Porque é que um conhecimento se torna objecto de pesquisa do geómetra? Como é que o geómetra chega à verdade? Como é que o geómetra inventa o seu saber? Portanto, porquê e como o geómetra sabe que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos? Para Clairault, o saber do geómetra é um meio de resolver problemas: o seu leitor aprende, pois, qual o problema que o leva a interrogar-se sobre a soma dos ângulos de um triângulo (o porquê), e que investigações o conduzem a construir a paralela a um dos lados

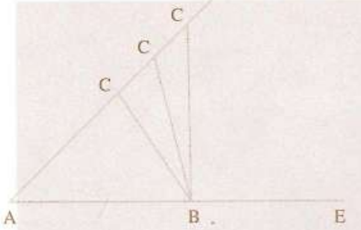


fig. 11

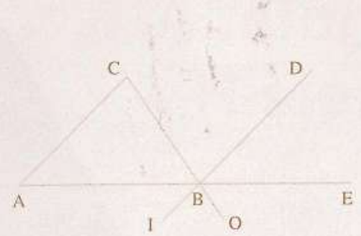


fig. 12

do triângulo (o como). O leitor pode apropriar-se do saber: ele está esclarecido e interessado.

Utilizando os termos históricos, diremos que a actividade de demonstrar pode ter três significados, que correspondem a exigências diferentes: as de *convencer* para saber, *esclarecer* para saber como se sabe e *interessar* para saber porque se sabe[10]. Estas exigências correspondem a concepções diferentes do saber e podemos, pois, alargar a questão do sentido da actividade de demonstrar à do sentido do saber.

A que concepções do saber remete a necessidade de demonstrar?

Referimos que Arnauld e Clairaut fazem um certo número de críticas aos *Elementos* de Euclides. Estas críticas correspondem a uma nova concepção do saber, que tem origem nas práticas matemáticas dos geómetras do séc. XVII. Estes geómetras vêem nos escritos de Euclides ou de Arquimedes um saber condensado, um saber que suscita o consentimento, mas um saber que não permite inventar. Eles vão sobretudo levar a peito a produção de métodos que lhes permitam resolver problemas — método cartesiano, método dos indivisíveis, método das tangentes, métodos projectivos, de forma a responder à sua sede de inventar. Assim *La Géométrie* de Descartes de 1637, não é um catálogo de proposições geométricas mas um método para resolver problemas geométricos transformando-os na resolução de equações algébricas.

Podemos ver aqui uma ruptura entre um saber concebido como um *produto* que se inscreve num discurso constituído e que tem coerência neste discurso, e um saber concebido como um *processo*, que é construído a partir de problemas e que toma sentido nas práticas[11].

De acordo com a segunda concepção, uma demonstração não é sómente um texto mas o conjunto do processo que transforma uma questão num objecto de investigação, que leva a definir ou a modificar conceitos e que conduz à resolução de um problema: "uma demonstração matemática é a análise da proposição matemática" (Wittgenstein, citado por Bouveresse, 1988, p. 61). Esta última observação tem implicações didácticas sobre as quais voltaremos na segunda parte deste artigo, interrogando-nos sobre as concepções epistemológicas subjacentes ao ensino da demonstração.

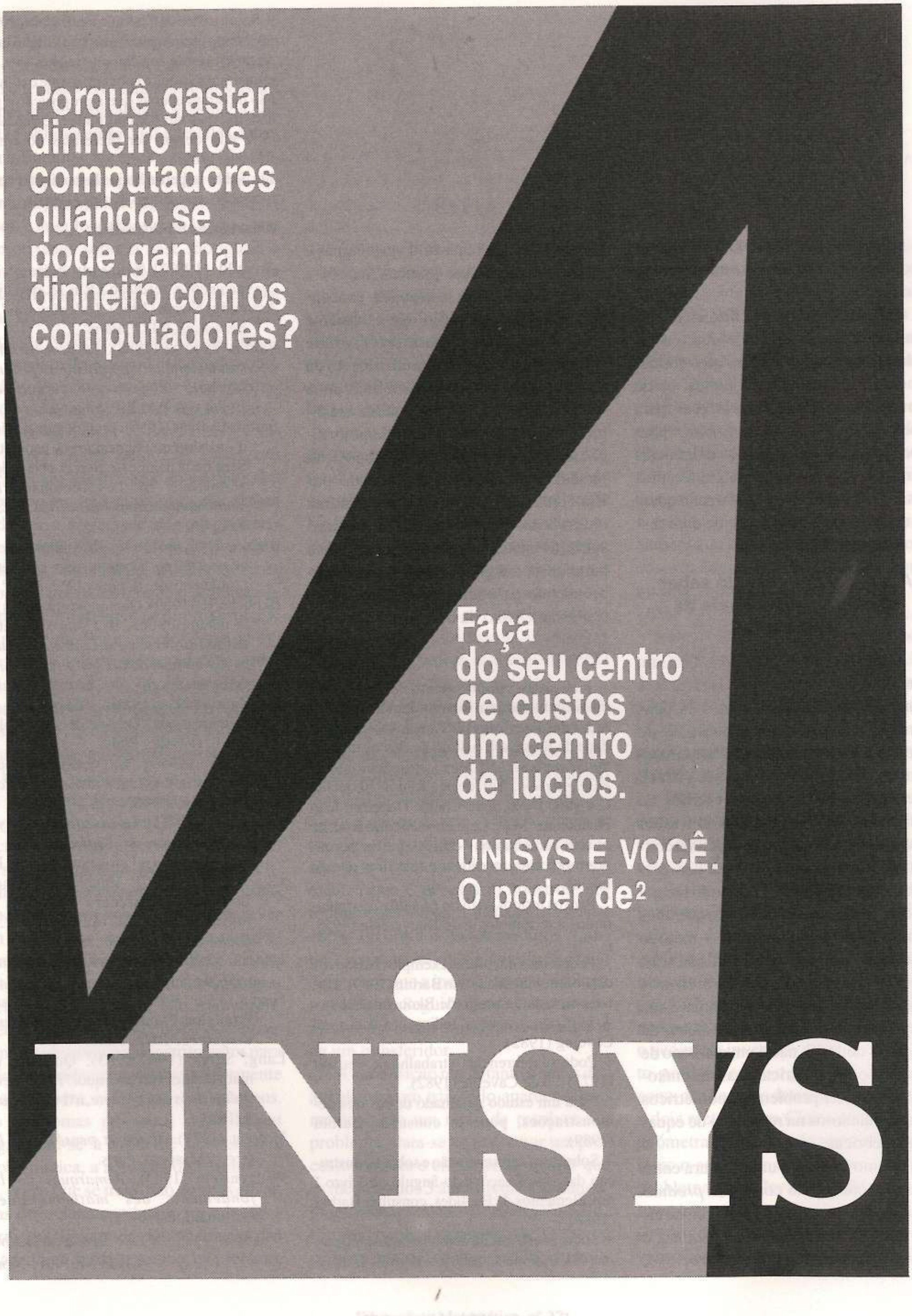
Notas

1. Este artigo retoma o texto de uma conferência publicada em Rosmorduc (Ed.) (1991) *Actes des Journées Paul Langevin*, Universidade de Brest, sob o título *La démonstration mathématique: Histoire, epistémologie et enseignement*. Agradeço a Rudolf Bkouche, Christine Docq, Jean-Claude Duperret, Jean Houdebine, Marc Legrand e Nicolas Rouche os seus comentários e críticas que me permitiram precisar, modificar e rectificar o texto inicial.
2. Para os termos *realista* e *idealista*, adoptaremos a terminologia de Bouveresse (1988, p. 23).
3. Poderemos encontrar exemplos históricos desta simultaneidade em Barbin (1989). Ler, em particular, o artigo de Bkouche (1989).
4. Utilizamos aqui as indicações dadas em Caveing (1982).
5. Pode-se referenciar o trabalho de Vernant (1971) e o de Caveing (1982).
6. Para um estudo detalhado destas três demonstrações, pode-se consultar Barbin (1989).
7. Sobre esta demonstração e sobre a construção das significações do ângulo no Livro I dos Elementos de Euclides, consultar Barbin (1988).
8. Sobre as críticas da demonstração grega no séc. XVII, pode-se referir a Barbin (1988).
9. Sobre a obra de Clairaut, ver Barbin (1991).
10. Numa abordagem didáctica Gilah Hanna distingue entre as demonstrações que demonstram e as que explicam: as que explicam não mostram apenas que a proposição é verdadeira, mas também porque ela é verdadeira, e elas devem ser preferidas no ensino (Hanna, 1989).
11. Sobre a pertinência desta distinção na formação, consultar Charlot (1990).

Referências bibliográficas

Arnauld (1982). *Nouveaux éléments de géométrie*, reedição I.R.E.M. de Dijon.
Arnauld et Nicole (1965). *La logique ou l'art de penser*, P.U.F.,Paris.
Barbin, Evelyne (1988). *La démonstration mathématique: signification épistémologiques et questions didactiques*, Bulletin A.P.M.E.P. nº 366.
Barbin, Evelyne (1989). Trois démonstrations d'un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et object de la géométrie in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon.
Barbin, Evelyne (1991). Les *Eléments de géométrie* de Clairaut: une géométrie problématisée, *Repères I.R.E.M.*, nº 4.
Bkouche, R. (1989). Quelques remarques sur la démonstration, in Comission inter-IREM Epistémologie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon.
Bourbaki, N. (1960), Eléments de mathématique, Théorie des ensembles, 2ª ed., Herman, Paris.
Cartier, P. (1989). La vérification des démonstrations mathématiques, in *Pour la science*, nº146.
Caveing, M. (1982). *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Université de Lille III.
Charlot, B. (1990). Enseigner-former: Logique des discours constitués et logique des pratiques, *I.N.R.P. Recherche-Formation*, nº 8.
Clairaut (1986). *Eléments de géométrie*, reedição Siloë, Laval.
Hanna, Gilah (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain, in *Actes de la 13ème Conférence PME*, Paris.
Lang, Serge (1982,1983). Que fait un mathématicien et pourquoi? in Revue du *Palais de la Découverte*, nº1 (1982) e nº 3 (1983).
Vernant (1971). *Mythe et pensée chez les Grecs*, Maspero, Paris.
Wittgenstein (1983). *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, Paris.

Evelyne Barbin
I.R.E.M. Paris-Nord


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

A reforma curricular e a História da Matemática

Jaime Carvalho e Silva

Uma abordagem crítica dos novos programas, e alguns exemplos concretos de utilização na sala de aula.

Ultimamente tem-se ouvido falar muito de História da Matemática entre nós. Até parece que está na moda. É verdade que está na moda e por razões meramente circunstanciais. Mas também é preciso reconhecer que cada vez há mais pessoas em Portugal (e no resto do mundo) a preocupar-se com o ensino da Matemática e que, pelas razões adiante detalhadas, a História da Matemática desempenha um papel importante na discussão do que fazer para melhorar o ensino.

Infelizmente a História da Matemática, como outros tópicos, só apareceu nos textos oficiais devido à necessidade premente de reformar o sistema de ensino por via do estado lastimoso em que se encontra. E reformou-se, do modo mais espaventoso possível (com dia D e tudo... como se se tratasse do Grande Desembarque em terras do inimigo Insucesso Escolar!). Os Documentos Preparatórios da Reforma (ainda alguém se lembra 'disso'?) ficarão para a nossa triste história do ensino e farão o deleite dos historiadores daqui a 20 ou 30 anos. Uma primeira nota: nesses documentos a Matemática é bastante maltratada e nenhuma referência havia a coisas como a 'resolução de problemas', as 'calculadoras' ou os 'computadores', as 'aplicações da matemática' ou a 'história da matemática'. Depois, quando apareceram os programas propriamente ditos, a linguagem mudou, mais para justificar a Reforma e as críticas aos Documentos Preparatórios do que para significar uma efectiva alteração da política educativa oficial.

O mínimo que se pode dizer das referências nos documentos oficiais a questões interessantes actualmente muito faladas, é que são claramente irrealistas pois pouco ou nada foi feito para que possam ser levadas à prática. No caso da História da Matemática isso é particularmente evidente. Onde está a bibliografia que suporta actividades de História da Matemática? Infelizmente, podemos resumir a situação dizendo que, disponível em Portugal actualmente, existe apenas um livro, de boa qualidade mas muito resumido, da autoria de D. J. Struik. Outros livros existem em português mas abordando apenas aspectos parcelares como um livro que contém muitas referências à História da Matemática, *Conceitos fundamentais da matemática* do português Bento de Jesus Caraça (1901-1948), um mui pequeno livro de J. Tiago de Oliveira (1928-1992) intitulado *O Essencial sobre a História da Matemática em Portugal*, um outro livro com índole histórica *Número, a linguagem da ciência* de Tobias Dantzig que está há muito esgotado. Existem ainda duas traduções brasileiras de difícil obtenção em Portugal. Demasiado pouco. Que fizeram as instituições responsáveis para alterar esta situação?

Eis o que afirmam os novos programas para o 3º ciclo (para os outros ciclos aparecem referências semelhantes pelo que me dispenso de as referir aqui) nas suas considerações gerais:

> Reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através dos tempos (Objectivos gerais-valores atitudes, p. 10)
>
> Relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade (Objectivos gerais-capacidades/aptidões, p. 11)

Eis o que afirmam os mesmos programas nas observações aos diversos capítulos do programa:

A propósito do teorema de Pitágoras é útil fazer-se uma referência à História da Matemática (a Matemática nos Egípcios, nos Gregos, a corda de 12 nós, a demonstração na História da Matemática).(Observações/sugestões metodológicas, 8º ano, p. 36)
Se oportuno, os alunos poderão fazer um pequeno trabalho em grupo sobre a resolução de equações na História da Matemática (resolução de equações particulares na antiguidade, Pedro Nunes e a resolução de equações, a escrita simbólica e o seu contributo para o avanço na resolução de equações e sua utilização, etc.).(Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 59)
Aspectos da História da Matemática relacionados com a trigonometria — como apareceu, qual o seu contributo, curiosidades interessantes (como Eratóstenes determinou o raio da Terra, por exemplo), etc., poderão ser objecto de trabalhos dos alunos ao longo ou depois do estudo desta unidade. (Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 61)
Um pequeno trabalho sobre a geometria na História da Matemática poderá contribuir para um outro tipo de reflexão [sobre axiomas, teoremas, demonstração,...] (Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 63)

Como se poderá passar tudo isto à prática? A bibliografia é escassíssima, a formação é escassíssima (o Ensino da Matemática **não** é prioridade do programa nacional de formação contínua!!!!!), só sobram os manuais escolares — e alguns deles, poucas ou nenhumas referências fazem à História da Matemática.

Significará isto que a História da Matemática nunca poderá passar para dentro da sala de aula? Ou que não tem a relevância que os novos programas lhe querem dar? Não, na realidade penso que a História da Matemática tem um papel muito relevante a desempenhar na melhoria do ensino da Matemática, correndo-se o risco grave de ser esquecida daqui a uns anos por ter sido introduzida nos textos oficiais de forma inconsequente.

Começo por distinguir dois aspectos: a história do ensino da Matemática e a história da evolução da ciência matemática. A primeira é extremamente útil aos professores, pois dá-lhes uma maior distanciação e uma maior capacidade crítica em relação à situação presente. Permite ver como é que a Matemática era ensinada noutros tempos, quais os problemas que os professores enfrentaram, porque é que outras reformas do ensino triunfaram ou fracassaram. Quanto à segunda, podemos resumir, dizendo com André Weil que perguntar **"Porquê a História da Matemática?"** é o mesmo que perguntar **"Porquê a Matemática?"**, ou seja, a História da Matemática está indissoluvelmente ligada à sua própria História. Até porque ao contrário de outras disciplinas, como a Física e a Química, a História da Matemática mostra a própria abordagem dos problemas, os conceitos e teoremas demonstrados há séculos, como o Teorema de Pitágoras continuam válidos e importantes hoje em dia. Não quer dizer que o caminho

História na aula de Matemática

Aristarco de Samos e as divisões*

Nem só a Matemática exacta é importante, e noutras épocas já havia a preocupação de encontrar resultados que, embora não totalmente exactos pudessem ser mais manejáveis na prática e pudessem mais facilmente ser compreendidos.

Aristarco de Samos foi um astrónomo grego (séc. III a.C.); calculou a distância da Terra ao Sol, e apresentou pela primeira vez a teoria heliocêntrica.
No decurso dos seus cálculos de astronomia pretendia apresentar um valor aproximado da divisão de 71 755 875 por 61 735 500. Ele afirmou que era aproximadamente igual à divisão de 43 por 37, por defeito.

Questão:
Verifica a precisão da aproximação. O erro é grande? (O que é 'grande'?)

Aristarco não indica o modo como fez os cálculos, mas provavelmente usou o algoritmo de Euclides. Eis como funciona

$$71\ 755\ 875 = 61\ 735\ 500 + 10\ 020\ 375$$
$$61\ 735\ 500 = 6\times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250$$
$$10\ 020\ 375 = 6\times 1\ 613\ 250 + 340\ 875$$

Como 340 875 é muito pequeno em relação aos números em jogo, podemos desprezá-lo e assim

$$\begin{aligned} 71\ 755\ 875 &= 61\ 735\ 500 + 10\ 020\ 375 \\ &= (6\times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250) + 10\ 020\ 375 \\ &= \left(6\times(6\times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) + 1\ 613\ 250\right) + \\ &\quad +(6\times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) \\ &\approx \left(6\times(6\times 1\ 613\ 250) + 1\ 613\ 250\right) + 6\times 1\ 613\ 250 \\ &\approx 43\times 1\ 613\ 250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 61\ 735\ 500 &= 6\times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250 \\ &= 6\times(6\times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) + 1613250 \\ &\approx \left(6\times(6\times 1613250)\right) + 1613250 \end{aligned}$$

Logo, dividir 71 755 875 por 61 735 500 é aproximadamente igual a dividir 43 por 37.
Porquê por defeito?

Questões:
1. Aristarco também afirma que 7921 a dividir por 4050 é aproximadamente igual a 88 a dividir por 45.
2. Escolhe dois números grandes e aplica-lhe o processo de Aristarco para obter dois números cuja divisão dê aproximadamente o mesmo resultado que a dos números iniciais.

* Em *Essais d'Histoire des Mathématiques*, Jean Itard, Ed. Albert Blanchard, Paris, 1984; e *Nombre, mesure et continu*, Jean Dhombres, Ed. Cedic/Nathan, Paris, 1978.

percorrido tenha sido linear, como põe em evidência Ian Stewart no seu livro *Os problemas da matemática*:

> Ideias matemáticas realmente boas são difíceis de obter. Resultam do trabalho conjunto de muitas pessoas durante longos períodos de tempo. A sua descoberta envolve caminhos errados e becos sem saída intelectuais. Não podem ser produzidas como nos apetece: a matemática verdadeiramente nova não está sujeita a uma abordagem industrial tipo 'Investigação e Desenvolvimento'. Mas compensam todo esse esforço com a sua durabilidade e versatilidade. A teoria do sistema solar de Ptolomeu tem interesse histórico para um cosmologista moderno, mas ele não a *usa* na investigação a sério. Contrariamente, ideias matemáticas com centenas de anos de idade são usadas todos os dias na matemática mais moderna, na verdade em todos os ramos da ciência. A ciclóide era uma curiosidade de fascinante para os Gregos, mas não podiam *fazer* nada com ela. Como braquistócrona, fez surgir o cálculo das variações. Christiaan Huygens usou-a para projectar um relógio preciso. Hoje os engenheiros usam-na para projectar alavancas de mudanças. Aparece na mecânica celeste e nos aceleradores de partículas. É uma carreira notável para tão humilde criação.

Ou seja, ao olhar para a História da Matemática estamos a olhar para a própria Matemática. Mas mais aspectos podem ser considerados. Seguindo D. J. Struik[1] podemos dizer que a **História da Matemática** é muito importante porque:

i. satisfaz o desejo de saber como é que os conceitos matemáticos apareceram e se desenvolveram;
ii. o estudo dos autores clássicos pode oferecer grande satisfação em si, mas também pode servir de guia no trabalho matemático;
iii. ajuda a compreender a nossa herança cultural, não só através das aplicações que a matemática teve e ainda tem à astronomia, física e outras ciências, mas também através da relação que teve e ainda tem com campos tão variados como a arte, a religião, a filosofia e os ofícios;
iv. oferece um campo de discussão comum com estudantes e professores de outras áreas;
v. fornece um pano de fundo para se compreenderem as tendências no Ensino da Matemática no passado e no presente;
vi. pode-se temperar o ensino com conversas e anedotas[2].

É por isso importante falar do lugar da História da Matemática no Ensino, esperando que não aconteça como há cerca de vinte anos em que os *Compêndios de Álgebra* de Sebastião e Silva e de Silva Paulo, sendo livros únicos e contendo abundantes referências à História da Matemática, viram suceder-lhes livros de texto enfadonhos e tecnicistas com ausência de referências à História da Matemática. E as referências nos *Compêndios de Álgebra* não eram tão poucas como isso. No prefácio encontramos:

História na aula de Matemática

O método do galeão

Esta actividade mostra aos alunos que nem sempre os cálculos se fizeram usando os algoritmos como os que hoje são usados, e assim talvez eles fiquem convencidos que os nossos algoritmos têm algo de superior. Apesar de parecer elementar, é uma boa actividade de revisão das capacidades de cálculo, pudendo, por exemplo, ser usada logo na primeira aula de um ano lectivo.

"Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adoptado a maior parte dos seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como 'método de riscar' ou 'método do galeão' (pela sua semelhança com um navio) também venha da Índia. Para ilustrar o método, suponhamos que se queira dividir 44 977 por 382. Na figura da esquerda damos o método moderno e na figura da direita o do galeão. Este último assemelha-se muito ao primeiro, apenas o dividendo aparece no meio, porque as subtracções são executadas riscando dígitos e colocando as diferenças *acima* em vez de *abaixo* dos diminuidores. Por isso o resto, 283, aparece acima e à direita, em vez de em baixo. O processo é fácil de acompanhar se observarmos que os dígitos num dado diminuidor, como 2 674, ou numa dada diferença, como 2 957, não estão todos necessariamente na mesma linha e que diminuidores são escritos abaixo do meio e diferenças acima."*

```
44977 | 382
382   | 117
 677
 382
 2957
 2674
  283
```

```
        2
       23
       398
      16753
382 | 44977 | 117
      38224
       387
        26
```

Divisão em galeão, século XVI. De um manuscrito de um monge veneziano.

* Extraído de História da Matemática, Carl Boyer, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

Matemáticos Portugueses

José Sebastião e Silva (1914-1972)

Nasceu em Mértola. Em 1937 licenciou-se em C. Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa,onde foi assistente de Álgebra e regente de Complementos de Álgebra até 1943, ano em que, como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, partiu para Roma; aí especializou-se em Análise Funcional. Doutorou-se na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Foi prof. catedrático no Instituto Superior de Agronomia, na Faculdade de Ciências de Lisboa e e membro da Academia de Ciências de Lisboa. Durante 20 anos dirigiu o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde obtiveram uma formação actualizada, e foram orientados para investigação, licenciados que viriam a ocupar posições destacadas na actividade matemática portuguesa. Foi considerado por Aniceto Monteiro "o maior matemático português".

Interveio, com todo o peso da sua competência como matemático e pedagogo, na modernização do ensino da Matemática; promoveu e orientou "experiências-piloto" decisivas naquela modernização, a nível secundário.

Os seus trabalhos de investigação foram reunidos em 3 volumes *Obra Científica de José Sebastião e Silva* (INIC-1985) e, noutros tantos volumes, está a ser compilada a *Obra Didáctica de José Sebastião e Silva* (SPM/FCG).

Compilação de Sérgio Macias Marques

(...) inserção das matérias no quadro de uma cultura geral, que tempere e humanize o abstractismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico (...) (Prefácio ao *Compêndio de Álgebra*, 1° tomo, 6° ano, 1956 - 2ª edição 1970)

Mais adiante, pode ler-se:

A leitura deste número [parágrafo sobre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis] tem especial interesse para a cultura geral do aluno. O assunto aqui tratado liga-se directamente ao da NOTA HISTÓRICA, cuja leitura é igualmente recomendável por idênticas razões (*Compêndio de Álgebra*, 1° tomo, 6° ano, 1956 - 2ª edição 1970, p. 67)

E ambos os volumes estavam salpicados com *Notas Históricas* que eram muito mais do que uma simples cronologia de acontecimentos:

Notas históricas

(*Compêndio de Álgebra*, 1956 - 2ª edição 1970)

tomo 1:

- evolução do conceito de número (4 p.) (até à calculadora electrónica - com uma foto);
- noção de função (4 p.);
- infinito, infinitésimo e limite (5 p.);
- Newton, Leibniz, cálculo diferencial e integral (7 p.).

tomo 2:

- da álgebra geométrica à álgebra numérica; da álgebra sincopada à álgebra simbólica; resolubilidade algébrica (10 p.); (com uma referência a Pedro Nunes)
- logaritmos (6 p.) (com uma tabela comparativa da capacidade de cálculo de diversas calculadoras).

Observemos a preocupação da actualização de Sebastião e Silva que incluía referências aos últimos desenvolvimentos (máquinas de calcular) e à História da Matemática em Portugal. E manifestava também preocupação em haver bibliografia adequada disponível, como podemos ler numa carta que endereçou ao Prof. António Guimarães:

Conviria salientar que, tendo entrado em funcionamento a cadeira de História do Pensamento Matemático da nova reforma, os alunos carecem de bibliografia sobre o assunto e que esta interessa a um público vasto, que inclui em particular os professores de matemática, de filosofia e de história do ensino secundário.

(Carta ao Prof. António Guimarães sobre a tradução para português do livro do célebre matemático italiano F. Enriques *Questioni riguardanti Le Matematiche Elementari*, 1968).

Muito ficou já dito, mas não me parece ainda claro o *como*. Como introduzir a História da Matemática no Ensino? Penso que aqui ainda há lugar para muita investigação e muitas experiências. Aquilo que vou dizer a seguir não passam de meras sugestões e opiniões pessoais.

Um primeiro aspecto diz respeito à própria ordenação das matérias. Por exemplo, Sebastião e Silva, no seu *Compêndio de Matemática* introduzia os números complexos da seguinte forma:

Introdução de C

Equações do 3° grau -> Fórmula de Tartaglia -> Necessidade das "quantidades silvestres" de Bombelli r(-A) com A>0 para que a fórmula de Tartaglia forneça todas as raízes reais -> "PROBLEMA. Construir um corpo C que verifique as 3 seguintes condições: (...)" (*Compêndio de Matemática*, 1° vol-2° tomo, p. 136-152, ed. GEP)

Penso que assim os alunos vêem os quês e os porquês do aparecimento da unidade imaginária. Além de que a própria história da fórmula resolvente e o do uso de r(-A) com A>0 está recheada de episódios pitorescos. Num artigo intitulado *The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass*[3] a autora, Judith Grabiner, chama a atenção para o facto de o conceito de derivada ter sido primeiro usado, depois descoberto explorado e desenvolvido e só no fim definido; e interroga-se se o ensino do conceito de derivada não estará errado por começar logo com a definição de derivada. É caso para pensar.

Outra abordagem possível consiste na utilização de pequenos pedaços da História da Matemática na sala de aula.

História na aula de Matemática

Somas de Al-Karagi

Este é um problema interessante que mistura Álgebra e Geometria e mostra como a matemática dos árabes era mais avançada do que normalmente os alunos pensam.

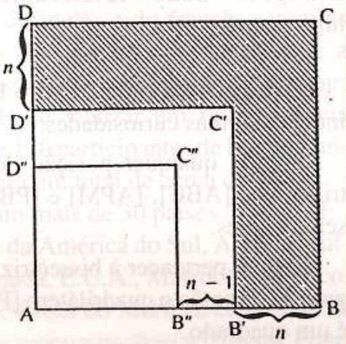
Al-Karagi (ou Al-Karkhi), que viveu nos fins do séc. X, princípios do séc. XI (morreu em 1029), é originário da cidade de Karaj, situada entre Teerão e Kaswin, e é o autor de várias obras muito importantes, como o *Livro suficiente sobre a ciência da aritmética*, *Al-Fakhri*, livro de álgebra, e *Al-Badi*, livro de análise indeterminada.

Al-Karagi foi influenciado por outros autores árabes como Al-Khowarizmi (780-850, de que derivou o nome 'algoritmo') e Abu Kamil (850-930), e pela obra do grego Diofanto traduzida para árabe no séc. X.

Al-Karagi procede à adição dos primeiros n cubos como segue*:

Seja $1+2+...+n$ o lado de um quadrado *[ABCD]*.

Al-Karagi constrói neste quadrado um gnómon $BB'C'D'DC$ (parte sombreada) no qual $\overline{BB'} = \overline{DD'} = n$.



A área do gnómon vale:

$$2n(1+2+...+n)-n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Depois constrói o gnómon seguinte com $\overline{B'B''} = n-1$

A área deste gnómon vale naturalmente $(n-1)^3$.

Prosseguindo deste modo, obtemos no fim o quadrado de lado 1.

A área do quadrado inicial *[ABCD]* é igual à soma das áreas de todos os gnómons e do quadrado de lado 1.

Conclua que igualdade obteve Al-Karagi com este raciocínio.

* Referido em *Routes et dédales*, Amy Dahan-Dalmedico, Jeanne Peiffer, Ed. Études Vivantes, Paris, 1982

Nas caixas encontram-se excertos ou adaptações de vários textos de diferentes épocas que me parece poderem ser utilizados com proveito na sala de aula em alturas variadas (por exemplo, para motivar a introdução de um conceito, para fornecer mais uma perspectiva sobre um conceito, para ajudar a sedimentar um conceito, para servir como aula de exercícios – para não serem só exercícios rotineiros a cumprir esta função). Fazem parte de uma série de textos que tenho usado em sessões com professores e que espero poderem vir a ser editados um dia em forma de livro.

Notas

1. Em "Why study the history of mathematics?", *UMAP* Journal, vol. 1, nº 1, 1980, p. 3-28.

2. Algumas pessoas gostam pouco de coisas menos sérias na sala de aula, mas a verdade é que as anedotas também ajudam a mostrar que os matemáticos são seres humanos como os outros com os seus excessos e as suas fraquezas, contribuindo para desmistificar a ideia de que os matemáticos são 'seres do outro mundo que só fazem contas e têm os cabelos em pé'.

3. Em *Mathematics Magazine*, vol. 56, nº 4, p. 195-206.

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra

Nota da redacção: Além dos 3 exemplos inseridos neste texto, outros foram enviados pelo autor, intitulados *Pitágoras na China*, *Altura de uma torre*, *Sobre a teoria das paralelas* e *Euler e o crescimento populacional*. Serão incluídos em próximos números da revista.

Matemáticos Portugueses

Pedro Hispano (1216 - 1277)

Nasceu em Lisboa, filho de Júlio Rabelo, estudou em Paris, foi médico, diplomata, matemático e Papa (o único Papa português - João XXI).

A sua contribuição para a matemática situa-se nos conceitos e leis da lógica, onde se revelou inovador em relação à lógica aristotélica, sendo considerado um precursor da moderna Lógica Matemática.

Escreveu um compêndio escolar *Summulae Logicales*, usado em todos os centros europeus durante mais de três séculos. O valor desta obra, segundo o alemão L. Thomas, resume-se no facto de ela ter sido a "nova lógica", pois surge aí completamente remodelado o *Organon* de Aristóteles.

Entre as valiosas leis da sua "nova lógica" encontram-se as regras do tratamento da conjunção lógica "e" e da disjunção lógica "ou". Segundo o professor italiano Roberto Vacca, as actualmente chamadas "leis de De Morgan (1806 - 1871)" eram já conhecidas do matemático português, razão pela qual o professor italiano Bochenshi, em 1947, propôs para uma dessas leis o nome de "lei de Pedro Hispano".

A morte desta grande figura medieval portuguesa ocorreu em 20 de Maio de 1277, em condições ainda misteriosas, em Viterbo. Pedro Hispano era então Papa havia apenas sete meses.

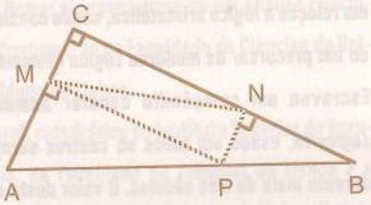
Compilação de Sérgio Macias Marques

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

No número anterior de "Educação e Matemática" propusemos o problema "Um mínimo no triângulo":

O triângulo [ABC] é rectângulo em C. Escolhe-se um ponto P sobre a hipotenusa e por ele traçam-se as perpendiculares PM e PN aos catetos.



Onde deve estar o ponto P para que a distância de M a N seja mínima?

Recebemos as respostas de Alberto Canelas (Queluz), Armando Mota (Matosinhos), Judite Barros (Lisboa), Luis Mota (Lisboa), Orlando Freitas (Funchal) e Pedro Esteves (Seixal).

Quase todas as resoluções seguem o mesmo caminho."É que - como diz Luis Mota - perante um problema de máximos e mínimos, a tentação imediata é seguir a via analítica: criar uma função, derivá-la e determinar os seus zeros. No entanto, uma simples observação da figura permite-nos encontrar a solução sem cálculos!"

Com efeito, dada a perpendicularidade de PM e PN aos catetos, o quadrilátero [PMCN] é um rectângulo e portanto as suas diagonais são iguais: CP = MN.

Logo, o comprimento de [MN] é mínimo quando [CP] for a altura do triângulo dado relativamente à hipotenusa.

A respeito da figura, Pedro Esteves indica algumas curiosidades:

1ª Para qualquer posição de P, os triângulos [ABC], [APM] e [PBN] são semelhantes.

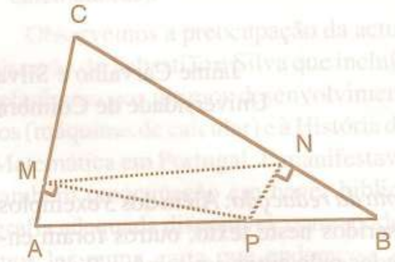
2ª Se P pertencer à bissectriz do ângulo ACB então o quadrilátero [PNCM] é um quadrado.

3ª Se P pertencer à mediana de [AB], a área de [PNCM] é metade da área do triângulo inicial [ABC], e é o único caso em que [MN] é paralelo a [AB].

Um novo problema

Tanto Alberto Canelas como Armando Mota propõem (e resolvem) uma generalização do problema:

Qual deverá ser a posição do ponto P para que a distância de M a N seja mínima, sendo [ABC] um triângulo qualquer?



Querem tentar resolvê-lo? A resposta virá no próximo número da revista.

(continua na pág. 34)

Problema proposto

O PRÉMIO DA VITÓRIA

No final da batalha de Hastings, o rei Guilherme da Normandia, satisfeito com a vitória sobre os saxões, quis premiar os cavaleiros e capitães que mais se tinham distinguido no combate.

- Quantos são eles? — perguntou ao comandante do exército.

- No total são 19.

- Aqui tens 1000 ducados de ouro para lhes dares. Vê lá como se há-de distribuí-los.

O comandante retirou-se. Passado algum tempo voltou com uma proposta em que cada cavaleiro receberia mais 30 ducados que cada capitão.

- Apesar de os cavaleiros terem de receber mais que os capitães, parece-me injusta uma tão grande diferença - disse o rei. — Arranja outra maneira de distribuir os mil ducados.

Uma hora depois, o comandante tinha nova proposta:

- Os cavaleiros já não recebem tanto e cada capitão recebe mais 8 ducados que na proposta anterior - explicou. — E distribuem-se também todas as moedas!

- Estou de acordo — disse o rei, depois de analisar a proposta.

Qual foi o prémio de cada cavaleiro e de cada capitão?

Impressões de uma viagem à história da matemática em Montpellier

João Rino

Nesta viagem a Montpellier, à primeira Universidade de Verão Europeia sobre História e Epistemologia em Educação Matemática, ficou-me o sabor de uma bela, belíssima cidade, duma agradável mistura de professores de mais de 30 países que tentaram conciliar a máquina fotográfica com o bloco de apontamentos, duma organização simpática mas a necessitar de um estágio nos Profmat, e duma série de temas onde se nota muito boa vontade, alguma experimentação, mas onde falta ainda burilar muita coisa neste assunto da história da matemática.

Nestes 5 dias o programa distribuía-se por comunicações, sessões de trabalho, sessões plenárias, mesas redondas e uma série de propostas culturais.

No belo anfiteatro do Centro de Conferências-CORUM, foram as sessões plenárias e as mesas redondas com que se iniciou e finalizou a semana. Estas últimas não discutiram realmente o "Lugar da História da Matemática nos Programas" dos diversos países nem na formação dos professores, antes deram uma ideia geral do ensino da Matemática nos seus países.

Já as conferências plenárias a que assisti, sobre as Matemáticas Mediterrâneas de 2000 a.C. ao séc.XVII, por Christian Hauzel, e sobre a Etnomatemática na História das Ideias, pelo brasileiro Ubiratan D'Ambrósio, foram cativantes.

D'Ambrósio, com uma intervenção calma, clara, concisa e com humor, relacionou o ensino com os factores culturais e políticos, mostrando que a "Matemática exacta e universal" pode não ser neutra e pode ter papeis importantes em contextos regionais e específicos, conseguindo prender uma assistência de várias línguas.

Aliás, ao longo de toda a semana, apesar do inglês e do francês serem as línguas oficiais, não há dúvida que a última se impôs, como seria de esperar; além de se realizar em França, havia mais de 150 participantes de língua francesa para um total de cerca de 260.

Eram mais de 30 países (os da C.E., muitos da América do Sul, Argélia, Suíça, Canadá, E.U.A., Marrocos, México, Egipto, Costa do Marfim, etc.) onde as maiores representações (>5) foram: França-130, Portugal-24, Bélgica-18, Itália-10, Alemanha e Inglaterra-8.

A representação portuguesa neste encontro foi bastante significativa, com 24 pessoas em 128 estrangeiros, "invadindo" algumas sessões. Penso que fomos bons ouvintes e diligentes participantes, com duas dinamizações:

- Eduardo Veloso, com uma intervenção bem humorada na mesa redonda sobre "História da Matemática no Ensino e nos Programas";
- Gertrudes Amaro, com um "atelier" intitulado "O uso da História da Matemática e da Epistemologia na Educação Matemática dos Professores".

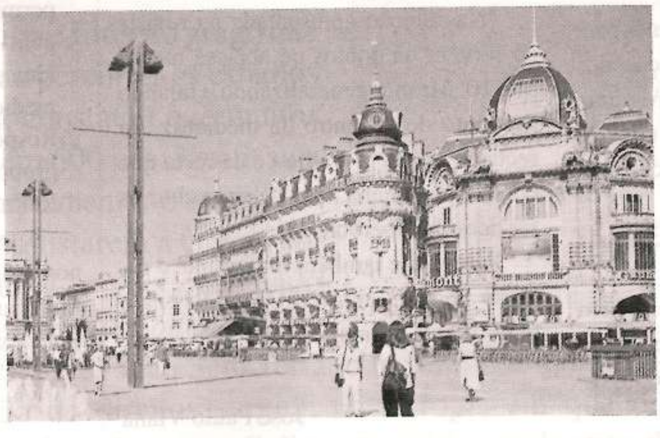
Além do Centro de Conferências, os trabalhos desenrolaram-se ao longo da semana junto do I.R.E.M. (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Montpellier, na Université des Sciences et Techniques du Languedoc, em salas onde as condições eram curiosas: navegação à deriva para se encontrar uma sala, dinamizadores às costas com o material, membros da organização porventura disfarçados, e salas com cadeiras em posições variadas e onde as janelas por vezes contaram como assentos.

Aqui as sessões distribuíram-se por sete temas:

- A construção histórica do conhecimento matemático;
- introdução duma perspectiva histórica no ensino das matemáticas;
- relações entre o ensino da matemática e os factores culturais;
- relações entre a epistemologia e questões didácticas e pedagógicas;
- história da matemática na formação inicial e contínua dos professores;
- matemáticas mediterrânicas;
- etnomatemática.

O sistema de haver quase todos os temas todos os dias, com a já habitual simultaneidade de intervenções (eram mais de 80, distribuídas pelos 7 temas) levou-me a ter de fazer opções, privilegiando a "Introdução duma Perspectiva Histórica no Ensino das Matemáticas" e a "Etnomatemática".

Foi muito curioso ouvir fa-



Place de la Comédie, no centro de Montpellier lar da influência dos árabes na Matemática Europeia, da quase inexistência da História da Matemática no ensino não superior, do processo de aparecimento dos números negativos, dos processos do árabe Ibn al Bannã para resolver equações do 2°grau, ou da forma como pessoas chilenas sem ou com pouca escolaridade resolvem problemas no dia-a-dia. Foi fascinante o estudo sobre jogos da Costa do Marfim (feito durante 10 anos) assim como a exploração de um texto de Herão em situação de sala de aula.

Já agora uma sugestão: uma vez que os portugueses eram um grupo grande e se foi distribuindo ao longo dos dias, talvez fosse possível juntar num encontro pelo menos parte desse grupo e elaborar um balanço do que ficou.

Impressionou-me também a apreciável quantidade de edições sobre história da matemática que em França se publica, principalmente através dos I.R.E.M., e que estiveram à venda, obrigando-me aos habituais limitados investimentos (pois então!) e fazendo-me pensar que muito, muito há por conhecer neste campo.

Como ideia geral ficou-me a impressão duma organização incipiente e muito amadora, de uns dias onde o sol me fez sempre hesitar entre a história da matemática e a de Montpellier, dum assunto que é fascinante e que se começa a explorar!

Vim com a sensação de que, apesar de haver trabalhos bastante intensivos e exaustivos por esse mundo, eles são mais iniciativas isoladas a ainda iniciadoras dum trabalho necessário de intercomunicação, de divulgação e aplicação a outros campos da matemática e do ensino.

Enfim, uma panóplia de perspectivas que me deixou sequioso e ao mesmo tempo com dúvidas de ter forças para entrar num mundo tão vasto no que respeita à história da matemática, já que relativamente a um estudo mais aprofundado das maravilhas de Montpellier, este se me afigura bem mais fácil...

João Rino
Escola Sec. Domingos Sequeira

Problema do Trimestre *(continuação)*

Sobre os problemas anteriores

A colega Judite Barros acrescenta as seguintes notas aos dois últimos problemas do trimestre.

Os espiões da Praça Vermelha

"Poderá ter interesse, pelo menos para alguns alunos, simular a actuação dos dois agentes recorrendo a um programa em, por exemplo, Turbo Pascal que:

- gere aleatoriamente a hora de chegada Tx do 1° agente,
- gere aleatoriamente a hora de chegada Ty do 2° agente,
- verifique que "nenhum espera pelo outro mais de 15 minutos" e, nesse caso, conte o acontecimento como favorável,
- calcule a razão entre os casos favoráveis e os casos totais,
- faça um gráfico com a evolução desta razão em função do número de casos totais."

Um triângulo APM

"Na solução apresentada na revista só servem os pontos de abcissa menor que 10. Mesmo generalizando e falando de ponto de encontro da mediatriz, da recta que contém a altura e da recta que contém a mediana, temos que excluir os vértices da hipérbole.

Parece-me também importante o recurso ao programa GÉOMÈTRE para obter vários triângulos [APM]."

José Paulo Viana
Escola Sec. de Carnide

GTHEM

Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática

Precisa de encontrar a biografia de um matemático? Gostava de conhecer bibliografia sobre a história do conceito de função? Quer um texto histórico sobre os números negativos? Gostava de saber mais sobre um matemático português? Quer saber se existe alguma actividade interessante, para o secundário, sobre o cálculo do volume de sólidos, à maneira de Cavalieri, precursor do cálculo integral?

Contacte o GTHEM, na sede da APM. Teremos gosto em a ajudar nas suas pesquisas.

Materiais para a aula de Matemática

Nos anos lectivos de 90/91 e 92/93 introduzi o capítulo de "Comprimentos" do 8° ano de escolaridade numa perspectiva histórica. Depois de recolher diversos factos históricos marcantes na evolução das unidades de comprimento, elaborei um texto e um conjunto de fichas de trabalho que visavam animar uma temática algo sensaborona. Na página seguinte estão reproduzidos o texto e a primeira ficha de trabalho.

A metodologia seguida foi a seguinte:

a) Leitura silenciosa do texto durante alguns minutos.
b) Um aluno leu o texto para todos o que permitiu acertar questões de linguagem (e. g. a fonética de côvado) e ideias nele expressas (e.g. "o que é medida linear?").
c) Resposta às questões da actividade em grupos de dois alunos.
d) Reflexão final conjunta.

Apesar deste capítulo não constar já nos programas, a ficha poderá ser utilizada para trabalhar os conceitos de múltiplo e submúltiplo.

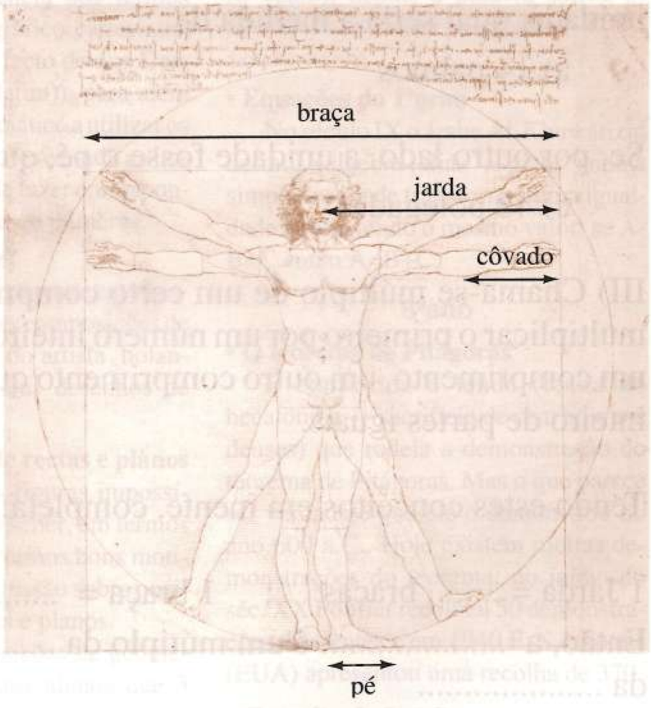
Paulo Oliveira
Escola Sec. de Leal da Câmara

Medidas antigas

O filósofo grego Protágoras afirmou, há 25 séculos, que "o homem é a medida de todas as coisas". Esta frase ilustra a tentativa dos homens da antiguidade de procurar no próprio corpo os padrões para comparar os comprimentos. Surgiram, deste modo, as primeiras unidades de comprimento, a saber, a *mão* e o *pé*. Estas unidades chamam-se antropométricas, uma vez que estão ligadas ao corpo humano (*antropos* significa homem e *metros* medida, em grego).

De acordo com algumas fontes históricas, o mais antigo padrão de medida linear foi concebido no Egipto por volta de 3000 a.C..

Era o *côvado*, baseado no comprimento do braço, do cotovelo à ponta do dedo médio. O submúltiplo básico era o *dígito* que , como o nome sugere, tinha a largura de um dedo. O côvado que os egípcios usavam como padrão era um bloco de granito negro de 52,4 centímetros de comprimento, subdividido em 28 dígitos. Estes, por sua vez, eram divididos em várias partes, até 16, cada uma das quais dedicada a uma divindade.



O côvado foi padronizado por Anemenés I, que reinou entre 1991 - 1962 a.C., como registam hieróglifos da altura.

A medida de maior difusão na antiguidade era o *pé*, *pous* em grego (1 pé = 30,474 cm, ou seja, mais ou menos o comprimento do pé de quem calça 43!!).

Pitágoras, matemático e filósofo grego que viveu no século VI a.C., ao percorrer os estádios de várias cidades gregas, constatou que muitos deles estavam divididos em 600 pés. Assim surgiu outra unidade de comprimento: o *estádio*.

Os romanos, ao conquistarem a Grécia em 146 a. C., dividiram o pé em 12 partes, chamando a cada uma *onça* (*unciae*) ou *polegada* (*polex*).

No século XII, o rei inglês João Sem Terra, o mesmo que subscreveu a Magna Carta (1215) — a primeira declaração de direitos surgida na Europa, em que o soberano se obrigava a salvaguardar os direitos básicos dos seus súbditos — emitiu um decreto chamado "Padrão de pesos e medidas". O decreto, imensamente popular, vigorou cerca de 600 anos. Contudo, havia grande imprecisão nas medidas. Por exemplo, a *jarda* real media três pés "nem mais nem menos", dizia o decreto.

Naturalmente, o pé real era o pé do rei, surgindo um problema quando outro monarca subia ao trono. Mudando o rei, mudavam todas as unidades.

Finalmente, após algumas tentativas frustradas, em Junho de 1799 foi apresentado à Assembleia Nacional (França) o *metro padrão* que não tinha qualquer relação directa com o corpo humano. Na verdade, o metro padrão era o comprimento de uma certa barra de platina. Desta forma, a França rompeu, pela primeira vez, com o sistema antropométrico e o mesmo fizeram aos poucos todos os países da Europa. No entanto, os países de língua inglesa resistiram à mudança. Em 1963 a Inglaterra abandonou oficialmente o antigo sistema de *polegadas*, *libras* e *galões*. Os hábitos da população, porém, são os mesmos. Ainda hoje se compra, por exemplo, duas libras de peixe (cerca de 1Kg).

Depois de teres lido o texto anterior responde às perguntas que se seguem. Consulta, também, a figura do texto.

I) Por que deixaram de se usar as unidades ligadas ao corpo humano?

II) Medir um comprimento é compará-lo com outro comprimento tomado para unidade e determinar quantas vezes ele contém a unidade. Assim, se escolhessemos o côvado para unidade, qual seria a medida de:

a) 14 palmos b) 112 dígitos

Se, por outro lado, a unidade fosse o pé, qual seria a medida de:

c) 48 polegadas d) 3 estádios

III) Chama-se múltiplo de um certo comprimento, um outro comprimento que resulta de multiplicar o primeiro por um número inteiro positivo. Além disso, chama-se submútiplo de um comprimento, um outro comprimento que resulta do primeiro dividindo-o num número inteiro de partes iguais.

Tendo estes conceitos em mente, completa:

1 Jarda = ... braças ; 1 braça = ... jardas
Então, a .... é um mútiplo da .... e a .... é um submúltiplo da ....

1 Côvado = ... palmos ; 1 palmo = ... côvados
Então, o .... é um múltiplo do .... e o .... é um submúltiplo do ....

Matemática, mas porque não História?...

Ana Maria Lino
Isabel Cristina Dias
Sérgia Nunes

Na sequência da comunicação que apresentámos no Profmat 92, onde estabelecemos um paralelo entre os items dos programas do 3º ciclo e alguns aspectos da história da matemática com eles relacionados, escrevemos este artigo que tem como objectivo primeiro auxiliar a integração da história da matemática nas aulas.

7º ano

• Problemas e jogos envolvendo números

Podemos referir a história do nascimento do xadrez, a qual se relaciona com a noção de potência de expoente natural, de número primo, de sequência de números e de potências de base 10.

Ainda em relação às potências de base 10 e à relatividade do conceito de número grande, podemos falar da história do Templo de Benares onde, segundo a lenda, terá surgido o conhecido problema das Torres de Hanói.

• Proporcionalidade directa

Quando da referência aos termos abcissa, ordenada e gráfico cartesiano, pode ser assinalado o facto de que Descartes (de *cartesius* (latim)), para além de ser o primeiro matemático a utilizar os dois primeiros termos, teve ainda a simples mas genial ideia de fazer corresponder a um ponto um par de números.

• Figuras semelhantes

Uma motivação certamente entusiasmante e divertida, são as composições de figuras semelhantes à do artista holandês M. Escher, nos seus desenhos de figuras impossíveis.

• Posições relativas de rectas e planos

Partindo ainda das figuras impossíveis dos desenhos de Escher, em termos de perspectiva, encontramos bons motivos de análise e de discussão sobre posições relativas de rectas e planos.

Para as restantes noções de geometria, dar a conhecer aos alunos que 3 séculos antes de Cristo, os gregos a consideravam a ciência formativa, e para eles, a Geometria estava de tal modo presente em todo o mundo que "mesmo Deus geometriza" (Platão). A sua importância era tanta nos domínios da astronomia, arquitectura e agrimensura que lhe chamavam Geo (de Gea deusa da terra na mitologia grega) e métria (de medida).

• Números racionais relativos

Porque se representa por Z o conjunto dos números inteiros relativos?

Nos séculos XVII e XVIII a ciência moderna desenvolvia-se na Alemanha, França, Itália e Holanda, com maior incidência na corte germânica, e a palavra alemã para número é *zahl*.

A origem do vocábulo zero vem da palavra *sifr*, que em árabe significa o vazio, para a qual Leonardo de Pisa encontrou a equivalência no latim *zephirus* (o vento); depois a palavra sofreu as alterações na língua portuguesa: *zevero->zero*.

• Equações do 1ºgrau

No século IX o árabe Al-Khuwarizni definiu a álgebra (aliás "al giabr") numa simples regra de transformar uma igualdade noutra tendo o mesmo valor: se A-B=C então A=B+C.

8ºano

• O teorema de Pitágoras

É conhecida a lenda (lenda do hecatombe — sacrifício de cem bois aos deuses) que rodeia a demonstração do teorema de Pitágoras. Mas o que parece ser verdade é que ele o demonstrou no ano 600 a.C.. Hoje existem muitas demonstrações do teorema; no início do séc. XX Fourier recolheu 50 demonstrações diferentes e em 1940 E. S. Loomis (EUA) apresentou uma recolha de 370.

• Conceito de função

Neste capítulo há um nome que é indispensável tornar conhecido dos alunos: Leibnitz, matemático extremamente rigoroso com o uso da linguagem, utiliza pela primeira vez o termo função para o distinguir de correspondência que já era utilizado com sentido próprio, nomeadamente na correspondência biunívoca, que Descartes estabelecera no plano.

• Sequência de números

Leonardo Fibonacci, aliás Leonardo de Pisa, matemático italiano conhecido pelos seus estudos de sequências de números (sucessão de Fibonacci), destaca-se no marasmo cultural da Idade Média, pela sua defesa do sistema de numeração indo-árabe, em relação ao sistema de numeração romano em vigor na época na Europa.

• Critérios de semelhança de triângulos

Cerca de 600 a.C. o faraó do Egipto recorreu a Thales de Mileto para que calculasse a altura da pirâmide de Keops. Este utilizou uma vara, e a semelhança de triângulos.

Podemos também nós e os alunos utilizar a vara e a semelhança de triângulos para calcular medidas.

• Operações com polinómios (casos notáveis da multiplicação de binómios)

Cerca de 300 a.C. Euclides demonstrou de uma forma simples a igualdade relativa do quadrado do binómio A+B. Não imaginava por certo que no séc.XVII Descartes e Newton iriam utilizar as propriedades dos números para fazer o mesmo.

Dar a conhecer a evolução das mentalidades matemáticas e científicas, desde a demonstração de Euclides (a qual os alunos, com simples peças de cartão ou outros materiais construídos por eles a aprendem de forma intuitiva) até à demonstração mecânica e repetitiva do séc. XVII, por ser um contributo para os motivar para a aprendizagem de um "caso" tão "notável" no ensino da Matemática.

9º ano

• Noção de probabilidade de um acontecimento

Laplace (1749-1827) afirmou que as probabilidades são "o senso comum reduzido a cálculo".

Os problemas relativos a jogos de azar, alguns bem complexos, deram início ao estudo das probabilidades quando no séc.XVII, o Cavaleiro de Méré, nobre da corte francesa, resolveu consultar o seu amigo Pascal acerca de um novo jogo que pretendia jogar, para ganhar. Pascal estabeleceu com Fermat uma longa correspondência na qual muitos termos que hoje se utilizam acerca do assunto surgiram pela primeira vez.

• Números irracionais

Arquimedes, no séc.IIIa.C., surgiu com um dado importante: $3,140<\pi<3,142$. No séc. XVII Frei Boaventura Cavalieri redescobriu o método dos indivisíveis e a sua utilização generalizou-se.

• Espaço, outra visão

No *Elementos* de Euclides, quando este geómetra afirmou que "por um ponto exterior a uma recta passa uma só paralela a essa recta", estabeleceu um dos pilares de toda a geometria euclidiana, a qual ainda hoje constitui a nossa visão de espaço.

Só o grau de perfeição atingido pelos geómetras gregos permitiu que 2000 anos depois outros matemáticos como Lobachevski ou Poincaré se atrevessem a ter do espaço outra visão.

Tendo este capítulo do 9º ano forçosamente uma componente bastante intuitiva e de exploração do espaço, terão os aspectos da história da matemática um papel importante como base de trabalho, dado que a riquíssima história da geometria euclidiana pode ser a análise de textos em actividades de aula ou exteriores à aula.

Todas as abordagens da história da matemática que aqui foram feitas poderão ser tanto mais ricas quanto mais e melhor forem exploradas por cada professor. E certamente que as metodologias aplicadas têm um papel decisivo, na medida em que de forma alguma será útil uma simples transmissão de informação do professor para os alunos, sobre um ou outro ponto da história da matemática. Este tipo de utilização só teria, no nosso entender, uma acção contraproducente.

A leitura, exploração e discussão de textos, a pesquisa individual ou em grupo, a utilização em actividades de caracter lúdico, a dramatização e tantas outras, são possíveis abordagens de motivação, exploração ou aplicação envolvendo a história da matemática.

Ana Maria Lino
Isabel Cristina Dias
Sérgia Nunes
Esc. Sec. de
Sto.António dos Cavaleiros

Alguns livros com referências a matemáticos portugueses

Panegíricos e Conferências, F. Gomes Teixeira, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1925

Cultura Portuguesa (18 volumes), Hernani Cidade, Carlos Selvagem, Ruy d'Abreu Torres, Editorial Notícias, 1967/1977

Pedro Nunes, A. Fontoura da Costa, Agência Geral do Ultramar, 2ª ed., Lisboa, 1969

Vida e Obra de Pedro Nunes, Manuel Sousa Ventura, Biblioteca Breve do ICLP, Lisboa, 1985

Escola de Outono em História da Matemática (Textos sobre Matemática e Matemáticos em Portugal), coligido por P. Almeida, J. M. Ferreira e A. J. Franco de Oliveira, S.P.M., Lisboa, 1988

Bicentenário da Morte de Anastácio da Cunha (Matemático e Poeta), Colóquio na Universidade de Évora, Évora, 1988

Galeria de Matemáticos do Jornal de Mathemática Elementar, por Sérgio Macias Marques e outros colaboradores do J.M.M. (1984-1991), Lisboa, 1991

História Concisa das Matemáticas, por Dirk Struik, 2ª ed., 1991 (com Apêndice sobre Matemáticos Portugueses, por J. J. Dionísio e A. J. Franco de Oliveira)

Materiais para a aula de Matemática

A actividade que apresentamos na página seguinte foi retirada do livro *Histoire des Mathématiques pour les Collèges*, publicado por IREM Université Paris 7, Editions CEDIC, 1980. Poderá ser trabalhada com alunos do 3º ciclo, a propósito do conceito de raíz cúbica e de número irracional.

Materiais para a aula de Matemática

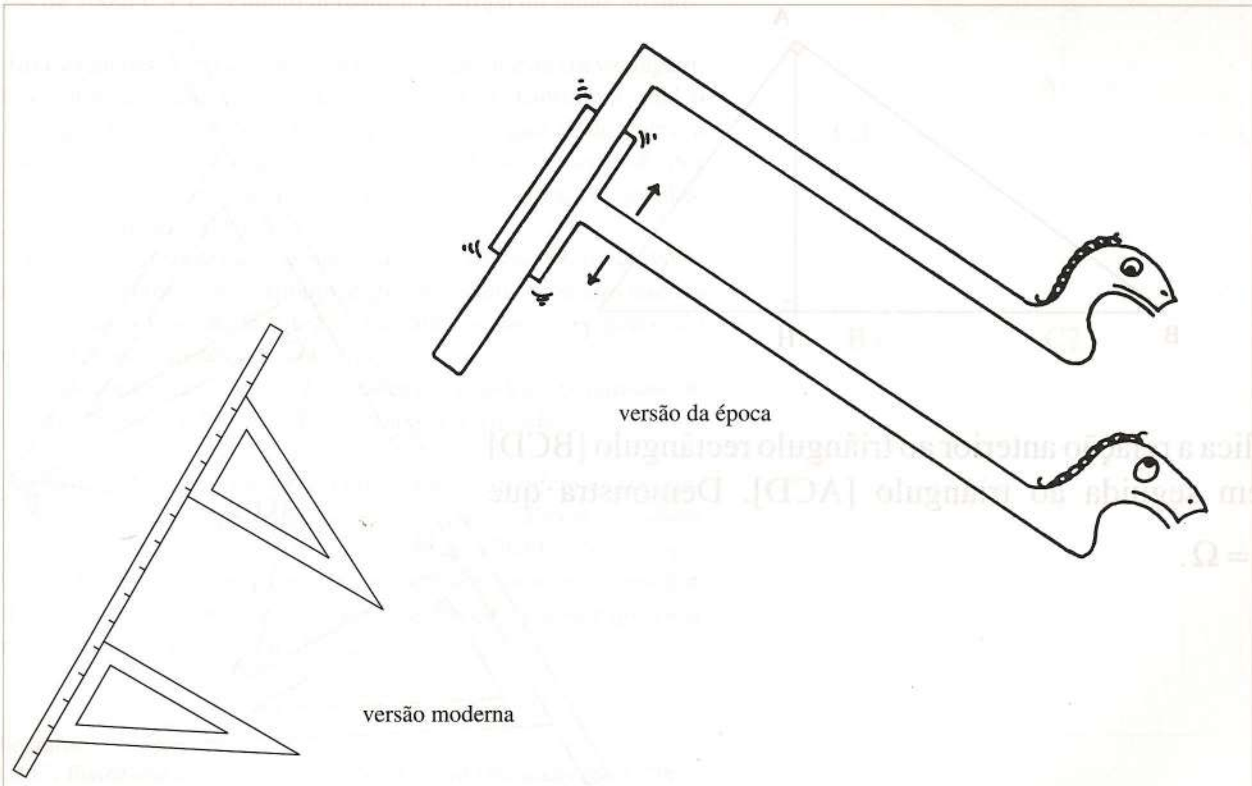
Cálculo de raízes cúbicas

No séc. IV a.C., foi estabelecida empiricamente uma fórmula segundo a qual o diâmetro (em "dactyles") do feixe de uma corda elástica duma catapulta devia ser igual a 1,1 vezes a raíz cúbica do cêntuplo do peso do projéctil a lançar (em "mines"*).*

O problema era então como calcular uma raíz cúbica.

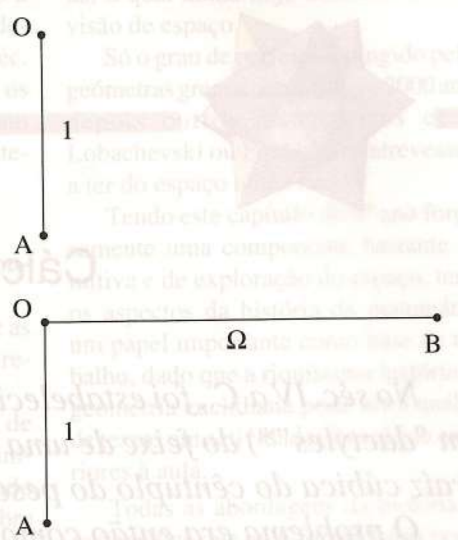
Um matemático grego desconhecido resolveu este problema geometricamente, segundo os costumes da época, em que os números eram sobretudo interpretados como medidas de comprimento. Para isso, construiu um dispositivo mecânico constituído por duas barras paralelas, deslizando sobre uma outra perpendicular comum, de forma que se possa ajustar o seu afastamento.

**Dactyle* — medida de comprimento antiga, equivalente a um dedo; *mine* — medida de peso antiga entre 400 e 600 gramas.



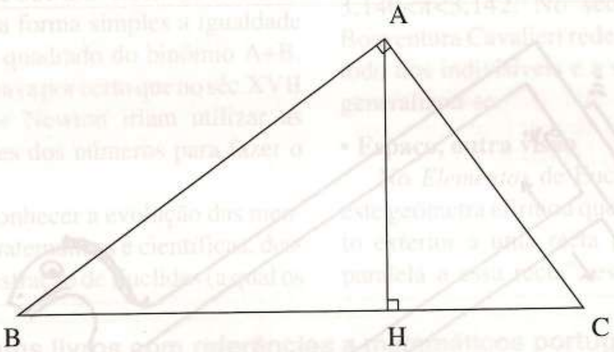
1• Modo de funcionamento:

Seja Ω o número do qual se pretende saber a raíz cúbica.
Escolher uma unidade de comprimento adequada às dimensões da folha e do número.
Traçar um segmento [OA] de comprimento 1.
Traçar um segmento [OB] perpendicular a [OA], de comprimento Ω.
Colocar o dispositivo correctamente como indica a última figura (não é muito fácil), e $\gamma = \sqrt[3]{\Omega}$!

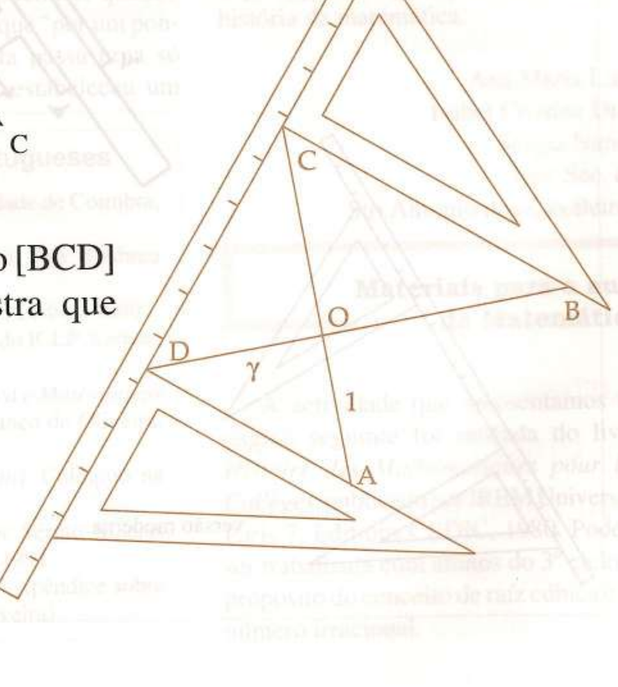


2• Utiliza este método para calcular uma aproximação de $\sqrt[3]{2}$ e de $\sqrt[3]{5,6}$

3• Justificação do processo:
Começa por verificar que num triângulo [ABC] rectângulo em A, se verifica a relação $\overline{AH}^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$.



Aplica a relação anterior ao triângulo rectângulo [BCD] e em seguida ao triângulo [ACD]. Demonstra que $\gamma^3 = \Omega$.



Vamos jogar

Jogo do Moínho

Nº de Jogadores: 2.

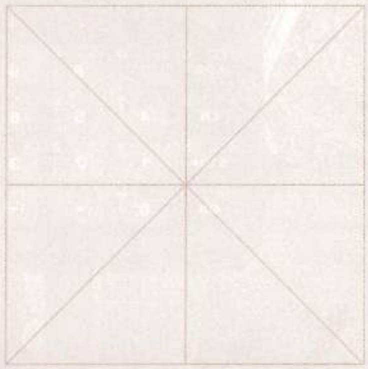
Material: um tabuleiro e dois conjuntos de 3 peças de cor diferente.

Cada jogador coloca alternadamente uma das suas peças numa das intersecções vazias do tabuleiro. O objectivo do jogo é colocar as 3 peças em linha (formando um "moínho).

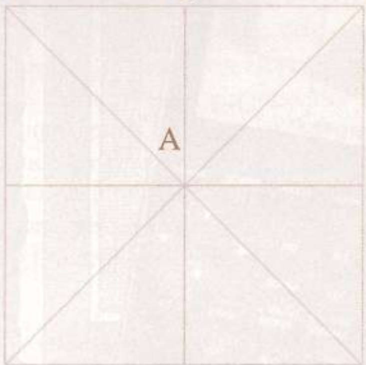
Se as peças forem colocadas sem que nenhum dos jogadores ganhe, então cada jogador, alternadamente, deverá deslocar uma das suas peças para um ponto de intersecção adjacente, até que um dos jogadores consiga alinhar as 3 peças.

Este jogo era jogado há cerca de 3500 anos no antigo Egipto, tendo sido encontrado o seu diagrama no templo de Kurna (construído cerca de 1400 a.C. no Egipto)

O mesmo jogo era também jogado na China na época de Confúcio (cerca de 500 a.C.), e foi muito popular na Europa da Idade Média.



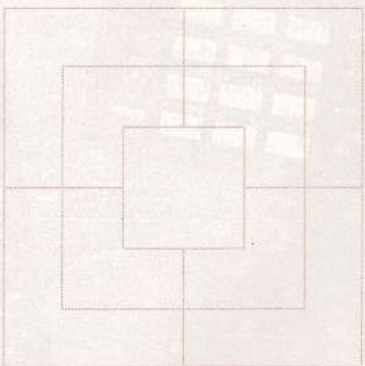
Investigações: Uma vez que o primeiro jogador está em vantagem, pode-se utilizar o lançamento de um dado para determinar qual o jogador que inicia a partida. O que propomos é que se descubra a estratégia que deve ser seguida para ganhar. Pode começar-se, por exemplo, por determinar as diferentes jogadas de abertura, as segundas, as terceiras... jogadas possíveis.



Facilmente descobrirá que não existe nenhuma diferença entre começar o jogo num canto ou noutro e que as diferentes jogadas iniciais são reduzidas a três (A, B e C no diagrama ao lado), as quais são equivalentes às restantes por simetria.

As posições equivalentes por simetria reduzirão o número de possíveis jogadas na descoberta da estratégia adequada.

Variantes: O jogo do moínho pode jogar-se em diferentes diagramas. A fúltima figura apresenta o diagrama mais conhecido, também originário do Antigo Egipto. As regras são semelhantes. Neste jogo, cada jogador dispõe de 9 peças. Quando um dos jogadores consegue alinhar 3 peças, retira uma peça adversária. Perde o jogador que ficar com apenas duas peças no tabuleiro.



Bibliografia:
Bell,R.C., *Board and Table Games*, London, Oxford University Press, 1960.
Sheppard, Reg, Wilkinson, John, *The Strategy Games File*, Stradbroke, Tarquin Publications, 1989.

Estudando juros em diversos momentos da História

J. Manuel Matos[1]

Neste texto procuramos utilizar uma abordagem histórica de um tema da vida real com o estudo das progressões e simultaneamente servir de pretexto para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de matematização.

O professor poderá dividir a turma em grupos que procurarão efectuar as actividades propostas nas fichas de trabalho. Será muito vantajoso utilizar uma folha de cálculo, um programa traçador de gráficos ou a calculadora gráfica.

Na primeira actividade (Ficha 1) procuraremos encontrar um processo de calcular a taxa de juro a partir da informação fornecida numa tábua de barro babilónica datada de 2 000 a.C. A tábua está incompleta e apenas se consegue ler:

> Vinte manehs de prata, o preço de lã, propriedade de Belshazzar, o filho do rei. ... Toda a propriedade de Nadin-Merodach na cidade e campo será a hipoteca de Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba todo o dinheiro assim como o juro sobre ele.

A interpretação da tábua não é imediata, e por isso as primeiras actividades solicitadas aos alunos concentram-se no estudo do conteúdo da tábua e podem ser feitas através de um diálogo envolvendo toda a turma. Talvez se consiga fazer sentido do que está escrito se notarmos o que conseguimos saber sobre cada personagem desta história.

Quem são os personagens? Em primeiro lugar existe *Belshazzar*. Descobrimos que é o filho do rei e que possui um quantidade apreciável de lã no valor de vinte manehs de prata. Depois existe *Nadin-Merodach* do qual sabemos que tem propriedades na cidade e no campo.

Que relação existe entre os dois? Os dois parece terem uma relação comercial. Belshazzar vende a lã e Nadin-Merodach está disposto a comprar. Não sabemos se vinte manehs de prata é muito ou pouco, no entanto podemos conjecturar que se trata de uma quantidade apreciável, já que, por um lado, foi preciso hipotecar toda a propriedade de Nadin-Merodach. Por outro, apesar deste último ter recursos, não conseguiu pagar imediatamente a lã e vai ter de recorrer a uma hipoteca. Belshazzar parece ainda ser um homem disposto a correr riscos, já que se acontecer algo à lã ficará sem todas as suas propriedades.

Em suma, a tábua conta-nos os termos em que Nadin-Merodach hipotecou toda a sua propriedade a Belshazzar para comprar uma quantidade apreciável de lã.

Após garantir que os alunos compreenderam o conteúdo da tábua, podemos calcular a progressão da dívida de Nadin-Merodach se ele protelar o pagamento. Uma forma de simplificar os cálculos é aplicar as progressões geométricas ao estudo do problema dos juros. Com alguma experimentação e recorrendo à álgebra descobre-se que, se t é a taxa de juro de um empréstimo e e o montante emprestado, p, o valor a pagar ao fim de n anos, será dado por

$$p = e(1+t)^n$$

O montante a pagar é uma progressão geométrica de razão $1+t$.

É importante estabelecer uma terminologia adequada, distinguindo entre *juro* (o montante a receber pela cedência de uma certa quantidade de dinheiro) e *taxa de juro* (a taxa ou proporção através da qual o juro é calculado).

Uma questão interessante é saber a partir de que momento o montante em dívida duplica (ou triplica). Este problema pode ser resolvido por diversos processos e em todos eles estamos implicitamente a considerar uma extensão da progressão inicial a todo o **R**.

1º processo: Utilizando uma calculadora pode-se tentar efectuar aproximações sucessivas de n na expressão

$$1,33^n = 2$$

experimentando diversos valores para n.

2º processo: Utilizando uma calculadora gráfica ou um traçador de gráficos fazer a intersecção da função $f(x) = 1,33^n$ com a função $g(x) = 2$.

3º processo: Por inspecção directa de uma tabela observa-se que o valor pretendido está entre o 2º e o 3º ano. Pode-se então fazer uma interpolação linear entre estes dois anos. Este processo corresponde a imaginar que, ao longo do ano, o juro é proporcional ao tempo. É interessante constatar que este processo é utilizado pelos bancos para interpolar juros durante o ano.

4º processo: Este é o processo mais imediato para alunos que já dominam logaritmos. Basta resolver

$$2e = e(1+0,33)^n$$

isto é

$$2 = (1+0,33)^n$$

ou seja,

$$n = \frac{log 2}{log 1,33}$$

que dá como valor aproximado

$$n \approx 2,43056905 \approx 2,4$$

O problema da duplicação do montante em dívida pode pois ser resolvido de forma diferenciada, consoante a sofisticação das ferramentas matemáticas disponíveis. Os processos indicados acima são apenas alguns dos possíveis. Certamente que existem outros, mais ou menos sofisticados, mais ou menos aproximados de uma solução.

É importante permitir que os alunos encontrem caminhos próprios para resolver este problema. A actividade de busca de ferramentas matemáticas adequadas e a sua discussão na turma é uma das formas mais poderosas de desenvolver a capacidade de matematização nos alunos.

Uma segunda actividade é proposta pela Ficha 2 e parte de um problema colocado por Fibonacci:

Um certo homem coloca um denário a juros com uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários e em cada cinco anos a partir daí o dinheiro duplica. Eu pergunto quantos denários ganharia a partir deste denário em cem anos?

A questão original de Fibonacci é de fácil resolução e, recorrendo a cálculos simples, encontramos a solução 2^{20} denários.

Este problema inicial leva-nos, no entanto a um outro, que é o de saber qual a taxa de juro anual que Fibonacci estava implicitamente a utilizar. Por outras palavras, qual a taxa de juro anual sabendo que o montante colocado a juros duplica em cinco anos.

Tal como o exemplo da tábua babilónica, este problema pode ser resolvido por mais do que um processo.

1º processo: Um primeiro processo para resolver este problema é experimentar diversas taxas de juros e encontrar a solução por aproximações sucessivas.

2º processo: Este problema pode também ser resolvido utilizando uma calculadora gráfica ou um programa de desenho de gráficos de funções e estudar a intersecção das funções

$$f(x) = 2$$
$$f(x) = (1+t)^5.$$

3º processo: Este processo necessita de alguma álgebra e recorre aos radicais. Se d for o montante colocado a juros, e t o número de anos decorridos, uma equação que descreve a situação é:

$$2d = d(1+t)^5$$

ou, simplificando

$$2 = (1+t)^5.$$

Donde, finalmente,

$$t = \sqrt[5]{2} - 1 \approx 0,148698354997 \approx 0,15$$

É provável que existam ainda outros processos para resolver ambas as situações.

Bibliografia:

Historical topics in algebra (1971). Washington: NCTM.

Lange, L. (1979). Some everyday applications of the theory of interest. Em S. Sharron e R. Reys (Eds.), *Applications in school mathematics* (pp. 98-108). Reston, Virgínia: NCTM.

Ficha 1 — Os juros na Babilónia

O pagamento de juros é já muito antigo. Uma tábua babilónica de 2000 a.C. contém a seguinte descrição:

Vinte manehs de prata, o preço de lã, propriedade de Belshazzar, o filho do rei. ... Toda a propriedade de Nadin-Merodach na cidade e campo será a hipoteca de Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba todo o dinheiro assim como o juro sobre ele.

1) Coloca-te no papel do investigador em História e procura entender o conteúdo desta tábua.

Quem são os personagens referidos na tábua?
O que sabemos sobre Belshazzar?
O que sabemos sobre Nadin-Merodach?
Que relação existe entre os dois?
Quem deve e quem tem a haver?

As taxas de juro na Babilónia podiam chegar a 33% ao ano. Isto é ao fim de um ano o devedor passaria a dever o valor inicial e mais 33% desse valor.

2) Calcula qual o valor que Nadin-Merodach ficaria a dever ao longo dos anos se a taxa de juro fosse efectivamente 33% ao ano.

3) Calcula qual o montante que Nadin-Merodach deveria pagar se a taxa de juro fosse 10%?

4) Ao fim de quanto tempo Nadin-Merodach deve o dobro do que devia inicialmente se a taxa de juro for de 33%? E se for 10%?

5) Ao fim de quanto tempo Nadin-Merodach deve o triplo do que devia inicialmente se a taxa de juro for de 10%?

[1] Esta actividade foi desenvolvida no âmbito do Projecto Pólya, apoiado pela JNICT/IIE e contou com a colaboração de António Pita Roque, Carla Cordeiro, Cláudia Isabel Esteves, Cristina Isabel Amaro, Luís Manuel Colaço Gabriel, Olga Pintado Vinhas, Rita Alexandra Basso, alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL e de António Domingos, assistente da mesma faculdade.

José Manuel Matos
Fac. de Ciências e Tecnologia,UNL

Ficha 2 — Os juros em Itália no século XII

No livro *Liber abaci* de Fibonacci (Leonardo de Pisa), escrito em 1202, aparece o problema seguinte:

Um certo homem coloca um denário a juros com uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários e em cada cinco anos a partir daí o dinheiro duplica. Eu pergunto, quantos denários ganharia a partir deste denário em cem anos?

1) Qual a solução do problema de Fibonacci?
2) Qual seria então a taxa de juro anual?

Egípcios, hindus, tentativas e aritmética

Albano Silva

As duas situações problemáticas apresentadas nas páginas seguintes destinam-se basicamente a alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico.

Na situação I em que se recorre aos antigos egípcios e aos seus números enigmáticos é dada ênfase ao método de resolução de problemas por tentativa e erro, dando a entender a sua importância na construção da matemática ao longo dos tempos. Actualmente a possibilidade de utilização da calculadora favorece bastante a resolução de problemas deste tipo ou por este método, que permite abordar determinado tipo de problemas antes da sua formalização matemática. Se no 2º Ciclo são possíveis discussões e explorações matemáticas diversas a partir do problema apresentado, nomeadamente uma abordagem simples à noção de variável, no 3º Ciclo poderá ser uma actividade a utilizar para despoletar o estudo das equações.

A situação II em que se recorre a um matemático hindu, Aryabhata, e também a problemas numéricos estão em jogo três tipos de objectivos que aqui se relevam. À volta do termo *método de inversão* coloca-se de uma forma directa a compreensão da noção de operação inversa mas também um método conhecido e bastante utilizado de resolução de alguns problemas em matemática — a resolução de problemas a partir do fim para o princípio, que no caso concreto se conclui após esquematizar a situação colocada.

Intimamente ligado a este último aspecto coloca-se o terceiro nível de objectivos — a conveniência de, em determinadas situações, compreender a possibilidade e abandonar o método das tentativas na procura de uma regra geral que permita e facilite resolver problemas de um mesmo tipo. Trata-se de um salto fundamental na experiência matemática dos alunos neste nível de escolaridade que ganha bastante quando vivida no seio de um grupo de trabalho em que se discutem estratégias e resultados e quando existe um esforço suplementar de elaboração de um pequeno relatório sobre as descobertas realizadas a partir de exemplos concretos.

É, a nosso ver, a capacidade de comunicar matematicamente que ganha maior relevância com esta metodologia de trabalho e organização da sala de aula.

Enquanto a primeira situação apresentada poderá ser trabalhada individualmente, nesta segunda muita da sua riqueza de descoberta e comunicação se perderia não optando por uma metodologia de trabalho de grupo.

Ainda sobre a situação II ela poderá, em níveis superiores ao 2º Ciclo, inspirar actividades para introduzir a noção de função inversa.

Mas estas são apenas algumas considerações, incompletas e discutíveis por certo, à volta de duas actividades construídas com inspiração numa pequena publicação de 74 páginas, editada pelo NCTM em 1991 e da autoria de Merle Mitchell, intitulada *Mathematical History — Activities, Puzzles, Stories and Games*. Esta publicação, que se encontra disponível no Centro de Recursos da APM, sugere um conjunto de materiais e actividades em torno da história da matemática para os 4º, 5º e 6º anos de escolaridade. Algumas das actividades apetece traduzir e usar imediatamente, outras, talvez a maior parte, sugerem adaptações e novas ideias. Trabalhar sobre a história da matemática não é reconhecidamente uma tarefa simples, apesar de importante, nestes níveis de escolaridade nem proliferam actividades sobre o tema. Por tudo isso, vale a pena desfolhar esta publicação do NCTM e inspirarmo-nos!

Albano Silva
Escola Superior de Educação de Portalegre

Materiais para a aula de Matemática

I — OS EGÍPCIOS E OS PROBLEMAS DE TENTATIVAS*

Os antigos egípcios tinham uma estratégia (caminho) especial para encontrar respostas para certo tipo de números, a que chamavam de enigmáticos. É um método de procurar a resposta por tentativas até encontrar o número enigmático.
Trata-se de um método ainda hoje utilizado para a resolução de problemas em matemática. Em grande parte dos casos acaba-se mesmo por descobrir uma regra geral para resolver problemas de um mesmo tipo, a partir de umas quantas tentativas efectuadas.

• Repara no seguinte exemplo apresentado por um matemático egípcio:

"O triplo de um número adicionado ao próprio número dá como resultado 24. Qual é esse número?"

O nosso amigo egípcio começou por experimentar o número 2, ou seja, fazer uma tentativa para verificar se seria o 2 o número enigmático.
A que conclusão terá chegado? Se o número enigmático não for o 2, tenta tu descobri-lo.

• Descobre, agora, outros números enigmáticos:

1) A soma do quíntuplo de um número com o seu dobro é 84. Qual é o número?

2) Se ao sextuplo de um número subtrairmos o dobro desse número obtemos como resultado 512. Qual é o número?

* Estas duas actividades foram inspiradas no livro de Merle Mitchell, intitulado *Mathematical History — Activities, Puzzles, Stories and Games*, ed. NCTM.

II — OS HINDUS E OS PROBLEMAS NUMÉRICOS

Os antigos hindus adoravam problemas numéricos. Um matemático chamado *Aryabhata*, que viveu na India, durante o século VI depois de Cristo apreciava problemas deste tipo:

"Se a um certo número adicionarmos 4, o resultado for dividido por 2, o novo resultado multiplicado por 5 e ainda ao novo resultado subtrairmos 6, encontramos como resposta o número 29. Qual era o número inicial?"

Poderás experimentar vários números, por aproximações sucessivas, até encontrares uma resposta. Contudo, *Aryabhata* descobriu outro caminho para procurar imediatamente o número desejado. Ficou, então, conhecido por *método de inversão*.

Que caminho será? Por que razão terá ficado conhecido por *método de inversão*?

1) Depois de fazeres algumas tentativas e com a ajuda de um esquema do problema apresentado, procura descobrir, com os colegas do teu grupo, o método de *Aryabhata*, isto é, o método que lhe permite chegar ao número pretendido directamente sem usar o método de tentativas.

2) Aplica, agora, o método encontrado a novos problemas do mesmo género:

2.1) Se dividirmos um número por 6, multiplicarmos o resultado por 5 e adicionarmos 8 ao novo resultado obtemos como resultado 23. Qual é o número inicial?

2.2) Se a um número adicionarmos 10, ao resultado adicionarmos 3, dividirmos o novo resultado por 4, multiplicarmos o resultado obtido por 7 e finalmente subtrairmos 2, obtemos como resultado 40. Qual é o número inicial?

2.3) Se um número for multiplicado por 2,4; o resultado multiplicado por 100 e o novo resultado dividido por 0,03 obtemos como resultado 40 000. Qual é o número inicial?

2.4) Se um número for multiplicado por 1/2, adicionarmos 6 ao resultado e se o novo resultado for dividido por 3/7, obtemos como resultado 56. Qual é o número inicial?

3) Verificado o método e o seu funcionamento para quatro novos exemplos faz, com o teu grupo de trabalho, um pequeno relatório explicando, através de um esquema e palavras vossas, o *método de inversão* do matemático *Aryabhata*.

índice