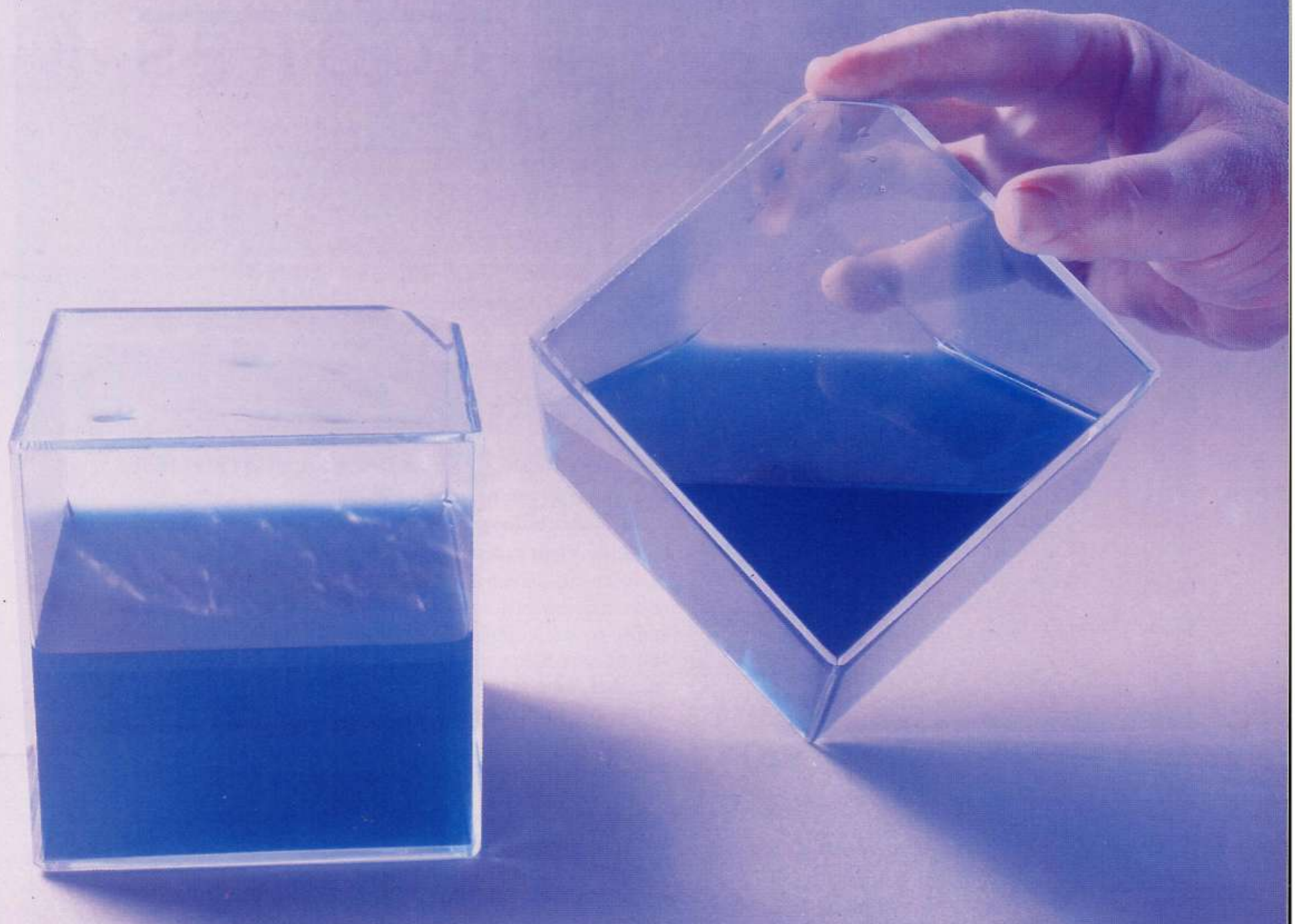
# Educação e Matemática

N.º 26

2.º trimestre de 1993



Preço: 400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Queixa das almas jovens censuradas

*Dão-nos um lírio e um canivete*
*E uma alma para ir à escola*
*E um letreiro que promete*
*Raízes, hastes e corola*

*Dão-nos um mapa imaginário*
*Que tem a forma de uma cidade*
*Mais um relógio e um calendário*
*Onde não vem a nossa idade*

(...)

*Poemas a rebate*
Natália Correia, escritora açoreana de Fajã de Baixo, S. Miguel


O PROFMAT 93 É JÁ DAQUI A QUATRO MESES.
Já reservou passagem e alojamento?
Não se esqueça que o prazo para pagamento à Agência Açoreana de Viagens termina a 10 de Setembro.

**Neste número colaboraram**

A. J. Franco de Oliveira, Alberto Canelas, António Sá, Branca Silveira, Helena Paradinha, J. Orlando de Freitas, José Paulo Viana, Maria de Fátima Gordo, Maria L. Fernandez.

**Sobre a capa**

A fotógrafa Margarida Dias aceitou amavelmentente fotografar um cubo de acrílico, cheio de aguarela, exemplificando o corte perpendicular a uma diagonal espacial que produz um hexágono como secção. São também da sua autoria as duas fotografias que ilustram o artigo "Tudo o que há num cubo...".

**Data de publicação**

Este número foi publicado em Julho de 1993.


nº 26
2º trimestre
de 1993

# "Mas isto é muito giro!"

A. J. Franco de Oliveira

**EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

*Director*
**Eduardo Veloso**

*Redacção*
**Ana Paula Canavarro**
**Ana Vieira**
**Leonor Barão**
**Helena Lopes**
**Henrique Guimarães**
**José Manuel Matos**
**Maria João Lagarto**
**Paulo Abrantes**
**Paulo Alvega**
**Rosário Ribeiro**
**Susana Carreira**

*Entidade Proprietária*
**Associação de Professores de Matemática**

*Periodicidade*
**Trimestral**

*Tiragem*
**3000 exemplares**

*Composição*
**Gabinete Técnico da APM**

*Capa*
**Gabinete Técnico da APM**

*Montagem, fotolito e impressão*
**Costa e Valério**
**Nº de Registo: 112807**
**Nº de Depósito Legal: 67956/93**

*Correspondência*
**Associação de Professores de Matemática**
**Rua Major Neutel de Abreu, nº 11**
**1500 Lisboa**



O presente número de ***Educação e Matemática*** é sobre Geometria. Após uma leitura rápida do seu conteúdo, eu diria que os autores dos artigos incluídos gostam de se divertir com as coisas matemáticas e, em particular, as geométricas, transformando o seu divertimento num eficiente meio de motivação e aprendizagem na sala de aula. Perdoem-me se lhes disser que não têm nisso originalidade alguma: os matemáticos e geómetras da antiguidade divertiam-se imenso, descobrindo e partilhando as suas descobertas na praça pública. Com o andar do tempo a Geometria tornou-se mais séria e complicada. As suas aplicações interessaram a senhores poderosos e a construtores de impérios, e os geómetras viram-se disputados e pagos pelo seu divertimento. O ensino oficializou-se e o divertimento tornou-se obrigação. Isto tirou toda a graça. Mas houve sempre amadores e curiosos, a par de espíritos brilhantes, comungando secretamente do prazer inigualável de brincar com coisas sérias. Estamos numa época de redescoberta desses secretos prazeres, e a Geometria é um campo imenso e privilegiado para incutir esse espírito nos jovens que polulam nas nossas escolas, como prova este número. Os professores mais maduros sabem que a brincadeira, em Matemática, é uma coisa muito séria, mas não é preciso dizer isso aos jovens. Eles descobrem por si próprios, se os orientarmos nesse sentido. Fixei a frase da Ana Patrício: "Mas isto é muito giro!". Veja-se também, a propósito, o livro de C. Stanley Ogilvy *Excursions in Geometry* (Dover, 1969).

Pediram-me para escrever duas páginas para este editorial. Francamente! Há coisas mais giras!

A. Franco de Oliveira
Dep. de Matemática
Fac. de Ciências da
Universidade de Lisboa

18000 visitantes também devem ter achado "muito gira" a Exposição "Explorar, Jogar, Descobrir — a Matemática ao alcance de todos", no Mercado Ferreira Borges, no Porto. Ver pág. 28 e 29 deste número.

# Publicações APM

**Calculadoras na Educação Matemática**
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)

**O computador na aula de Matemática** - Esgotado
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)

**Cronologia Recente do Ensino da Matemática**
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)

**Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas** - Esgotado
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)

**A Matemática na Vida das Abelhas**
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)

**Renovação do Currículo de Matemática.**
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)

**Viagem de Ida e Volta**
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)

**Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática**
1ª edição, Outubro de 1991, 304 pp.
3000$00 (sócios 2100$00)

**Só ...Problemas**
1ª edição, Outubro de 1991, 100 pp.
550$00 (sócios 400$00)

**Computadores no Ensino da Matemática**
1ª edição, Setembro de 1991, 258 pp.
1200$00 (sócios 850$00)

**Cadernos de Educação Matemática nº2.** 1ª edição, Junho de 1991, 112 pp.
800$00 (sócios 600$00)

**Avaliação: uma questão a enfrentar**
1ª edição, Outubro de 1991, 97 pp.
450$00 (sócios 300$00)

**Algumas Noções Elementares de Astronomia**
1ª edição, Outubro de 1991, 28 pp.
200$00 (sócios 150$00)

**Educação e Matemática**
nº1 a nº6 — 200$00
nº7 a nº12 — 250$00
nº13 e seguintes — 400$00
nº 19/20 — 800$00
Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.

**Actas do Profmat 88**
1ª edição, Janeiro de 1989, 269 pp.
550$00 (sócios 400$00)

**Actas do Profmat 89**
1ª edição, Setembro de 1990, 496 pp
1500$00 (sócios 1000$00)

**Actas do Profmat 90 (vol. I)**
1ª edição, Novembro de 1990, 188 pp.
700$00 (sócios 500$00)

**Actas do Profmat 90 (vol. II)**
1ª edição, Setembro de 1991, 244 pp.
1100$00 (sócios 800$00)

**Actas do Profmat 91 (vol. I)**Esgotado
1ª edição, Outubro de 1991, 139 pp.
5500$00 (sócios 400$00)

**Actas do Profmat 91 (vol. II)**
1ª edição, Outubro de 1992, 304 pp.
1100$00 (sócios 800$00)

**Agenda do Professor 1992/93**
1ª edição,Setembro, 1991, 140 pp.
300$00 (sócios 250$00)

**A Trigonometria está viva**
1ª edição, Outubro de 1992, 48 pp.
450$00 (sócios 350$00)

**Ideias, actividades, desafios e outras coisas mais**
1ª edição,Outubro de 1992, 66 pp.
780$00 (sócios 600$00)

**Aventura no País da Matemática**
Roteiro de uma exposição
1ª edição, Outubro de 1992, 40 pp.
950$00 (sócios 750$00)

**Quadrante nº1**
1ª edição, Outubro de 1992, 192 pp.
900$00 (sócios 700$00)

# Novidades

**Só ... Problemas II**
1ª edição, Março de 1993, 107 pp.
750$00 (sócios 600$00)

**Colecção de Teses:**

**A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo** - Susana Carreira
406 pp. 2300$00 (sócios 2000$00)

**Ensinar Matemática: concepções e práticas** - Henrique M. Guimarães
290 pp. 1950$00 (sócios 1500$00)

**Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular** - Maria Leonor Cunha Leal
pp.371 2350$00 (sócios 1800$00)

Nota: Estas são apenas algumas das Teses que existem na Sede da APM para venda.

| Títulos | Nº de Ex. | Preço Unitário (*) | Custo |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Sócio da APM ☐ Nº ☐ Assinatura
Não Sócio ☐ __________________

Subtotal
Portes do Correio (ver rev. anterior)
Valor Total

Nome ______________________
Morada ______________________
______________ C. P. ______________
Data do pedido ______________________

Para uso da APM
Pedido recebido em ________
Assinatura
Enviado em ________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

# Perseguindo polígonos, simetrias e números

Helena Paradinha

Quando preparei esta aula, tentei prever várias situações. Mas tive muitas surpresas, a maior das quais foi o aparecimento de várias conjecturas e a facilidade com que eram reformuladas.

### A actividade

A proposta foi a seguinte:
"*Investiguem qual o número máximo de eixos de simetria de polígonos regulares e irregulares.*"*

Ela surgiu da leitura do artigo "Symmetries of irregular polygons" da revista *Mathematics Teacher* (Maio de 1992) e pelo facto de, na altura, estar a planear as primeiras aulas de Geometria, optando por simetrias axiais.

### A turma

A proposta foi feita a uma turma do 9º ano, heterogénea relativamente ao aproveitamento, quer na disciplina de Matemática quer nas restantes.

Desde o início do ano que têm sido propostas à turma actividades de exploração e problemas, que os alunos resolvem em grupo, a maioria delas ligadas aos conteúdos programáticos. Este tipo de actividades tem ocupado cerca de metade das aulas. Esta turma tem reagido muito bem a esta metodologia. Contrariamente à minha experiência anterior, os "bons alunos" têm sido os que melhor aderem, quer ao tipo de actividades, quer à metodologia utilizada. Estes alunos, nos anos anteriores não tinham tido experiências análogas.

### A metodologia

Para o estudo da Geometria do plano, foram constituídos novos grupos, com 3 alunos cada. Estas aulas de 2 horas semanais, realizaram-se numa sala com computadores. Enquanto metade da turma realiza actividades em Logo.Geometria, a outra metade trabalha com outros materiais, trocando as tarefas na semana seguinte. Esta foi a segunda actividade realizada fora do computador e previa-se que decorresse numa aula de duas horas. Porém, mais tarde, pareceu-me importante prolongá-la por mais uma hora.

Os materiais utilizados foram a ficha de trabalho, espelhos e papel quadriculado.

Os alunos deveriam elaborar um relatório sobre o trabalho desenvolvido. Esse relatório poderia ser concluído em casa.

### Os objectivos

Com esta actividade pretendia levar os alunos a:

- resolver problemas;
- experimentar... desenhar figuras que obedecessem a determinadas condições;
- formular conjecturas, testá-las e reformulá-las;
- organizar dados;
- identificar regularidades;
- demonstrar, argumentar e criticar;
- confrontar, em grupo, diferentes opiniões e convicções;
- aprofundar conhecimentos sobre polígonos e simetrias;
- estimular o gosto pelas actividades de investigação;
- adquirir hábitos de trabalho, reflexão e persistência;
- desenvolver autonomia e auto-confiança.

* Duas fichas de trabalho para os alunos podem ver-se nos "Materiais para a aula de Matemática" desta revista.

## O papel do professor

A minha intervenção no desenrolar da actividade centrou-se em:

- observar o trabalho dos alunos;
- encorajar a experimentação;
- incentivar o confronto de experiências e opiniões;
- questionar os alunos com vista a:
  - explicitar raciocínios;
  - estimular a argumentação;
  - sensibilizar para a necessidade da demonstração;
  - incentivar o aparecimento de novas questões.

## Descrição do decorrer da actividade

Alguns grupos perguntaram: "O que é que temos de fazer?". Outros iniciaram espontaneamente o trabalho encontrando os eixos de simetria dos polígonos regulares. Este acabou por ser o modo como todos os grupos iniciaram a actividade. Nesta fase, todos os alunos desenhavam os eixos nas suas fichas, alguns utilizando muito os espelhos, e comparavam com os colegas de grupo o que iam fazendo. Passado algum tempo os grupos diziam "... o número de eixos de simetria é igual ao número de lados do polígono" (ou ao número de vértices). Nas folhas que estavam em cima das mesas viam-se fichas de alunos que tinham estudado os 5 primeiros polígonos regulares que figuravam na 1ª folha anexa, outros 6 e outros todos os da 2ª folha anexa (polígonos regulares com 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 lados).

Perguntei a cada grupo a razão por que afirmavam que o número de eixos de um polígono era igual ao número de lados.

Em alguns grupos houve dificuldade em responder à questão e então eu perguntei porque é que um polígono de 15 lados tinha 15 eixos, sem desenharem esse polígono. A esta questão responderam:

- É semelhante ao caso do pentágono e como aí há um eixo por lado, neste caso também haverá.

Depois de questões do tipo: "O que acontece se o polígono tiver 37 lados? E 38?" os alunos foram identificando mais semelhanças e ao fim de pouco tempo formularam conclusões separando o caso dos polígonos com um número par e um número ímpar de lados.

O Nuno Miguel foi o único aluno que respondeu logo:

- No caso do polígono ter um número ímpar de lados, os eixos de simetria constroem-se unindo um vértice ao meio do lado oposto e, se o número de lados for par, unem-se os vértices opostos e os pontos médios dos lados opostos.

Passaram então a estudar o caso dos polígonos irregulares.

Começaram a desenhar triângulos e nos primeiros que fizeram (escalenos e rectângulos) não encontravam qualquer eixo de simetria. Seguidamente desenharam triângulos isósceles e houve grupos onde surgiram triângulos rectângulos isósceles. Quando questionados sobre que características teriam que ter os triângulos para terem 1 eixo de simetria alguns grupos responderam imediatamente que tinham que ter lados iguais (ou que eram isósceles). Nenhum grupo referiu que dois ângulos deveriam ser iguais.

Perguntei-lhes se haveria triângulos com dois eixos de simetria. Nesta altura, na maior parte dos grupos as respostas foram categóricas: "não é possível", "se houver dois, haverá três eixos", "se houver dois eixos, o triângulo é equilátero".

Pedi-lhes para explicarem o que os levava a dizer isso, aproveitando o facto de haver elementos do grupo que não estavam convencidos. Uma vez que os alunos se limitavam a reafirmar as suas convicções, sugeri-lhes que pensassem no que acontecia se num dos triângulos que eles tinham desenhado acrescentassem um eixo. Eles desenharam o segundo eixo unindo um vértice ao ponto médio do lado oposto e viram que isso implicava que o lado diferente fosse igual aos outros e portanto o triângulo fosse equilátero.

Quando isto foi conseguido no grupo da Ana Patrícia, esta exclamou: "Já sabia!". Voltou a olhar para aquilo que tinha acabado de ser feito e disse ainda: "Mas isto é muito giro!".

A afirmação "se houver dois, haverá três eixos" apareceu mesmo em grupos que não a explicitaram inicialmente. Por exemplo, reparei que num grupo, quando sugeri que desenhassem o segundo eixo, enquanto o Henrique o desenhava, a Sónia já estava com o seu lápis próximo do papel. Logo que o colega acabou, ela desenhou imediatamente o terceiro eixo. Perguntei-lhe porque razão ela estava a fazer isso e ela disse-me que se existisse o segundo eixo então existiria o terceiro.

Houve só um grupo onde a resposta inicial foi um tímido "Talvez haja...".

Dei-lhes mais algum tempo para fazerem mais experiências e depois disso todos asseguravam que não era possível.

Os grupos estudaram a seguir quadriláteros e encontraram os dois casos em que havia 2 eixos de simetria (rectângulos e losangos). Em todos os grupos havia vários desenhos de quadriláteros côncavos e convexos com 1 eixo e sem eixos de simetria. Houve alunos que tinham rectângulos desenhados com 4 eixos e trapézios com 2 eixos, onde foi necessário a minha intervenção nos grupos para confrontarem as suas experiências. Os espelhos deram aqui uma importante ajuda.

## Primeiras conjecturas

Nessa altura surgiram nos grupos algumas conjecturas:

"Nos polígonos com um número par de lados há 2 eixos, e com um número ímpar há 1 eixo";

"Cada 2 lados iguais dá origem a um eixo."

Estudaram polígonos de 5, 6, 7 e 8 lados e a primeira conjectura mantinha-se pois as figuras que eles faziam ou tinham 1 ou 2 eixos, e estavam convencidos que o problema estava resolvido. Nas folhas quadriculadas, onde eles faziam experiências, estavam desenhados muitos polígonos côncavos e convexos e os grupos solicitavam-me para mostrar o que tinham concluído. A segunda conjectura foi abandonada quando estudaram polígonos com 5 lados.

Nesta altura, enquanto eu conversava com um grupo, ouvi no grupo ao lado o Carlos dizer: "Quando o número de lados do polígono é primo o número de eixos de simetria é 1". Mais tarde, o Carlos disse-me:" Foi uma ideia que me veio de repente à cabeça quando estava a ver porque é que o pentágono tinha 1 eixo de simetria". Acrescentou ainda "...não sei bem explicar o que aconteceu".

Na aula que se seguiu, disse-lhes para continuarem a procurar o número máximo de eixos de simetria de polígonos irregulares. Disse-lhes que procurassem, por exemplo, hexágonos ou octógonos com mais de dois eixos.

Nalguns grupos, que não conseguiram descobrir nenhum hexágono com três eixos, sugeri-lhes que uma vez que já tinham um polígono regular com três eixos (triângulo equilátero), o modificassem de modo a obter um hexágono. Assim, os alunos encontraram hexágonos, como os da fig. 1, e havia discussão nos grupos se ele era regular ou não, uma vez que a figura obtida tinha todos os lados iguais. Outro grupo encontrou outro hexágono (fig. 2)

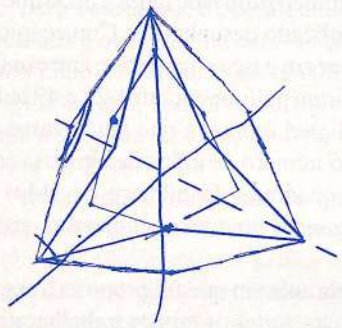


figura 1

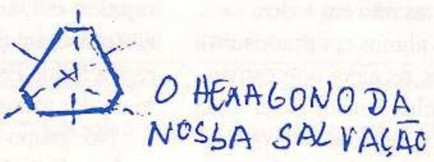



figura 2

Nem todos os grupos começaram pelos hexágonos. Houve grupos cujo primeiro contra-exemplo encontrado foi um octógono (fig. 3), obtido a partir de um quadrado, e ainda outros que encontraram um polígono de 28 lados (fig. 4), partindo de um heptágono regular

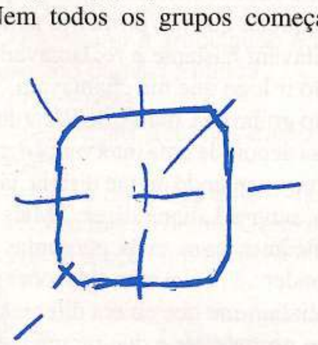


figura 3

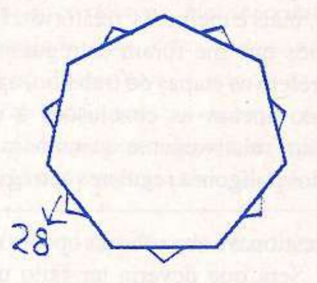



figura 4

## Reformulando as conjecturas

Houve grupos que reformularam as suas conjecturas. O grupo do Nuno Miguel entregou-me um relatório, onde eles escreveram que, para os polígonos com um número par de lados, o número de eixos se obtem pela divisão do número de lados por 2. Continuaram a afirmar que para os polígonos com um número ímpar de lados, o número de eixos será 1.

Do grupo das Catarinas, que na aula diziam que o número de eixos estava ligado aos divisores do número de lados dos polígonos, recebi, uns dias depois, um relatório onde aparece: "... Por exemplo no triângulo, o dividendo será 3 porque é o número de lados. O divisor será um número inteiro positivo, para o quociente ser um número inteiro positivo, porque não há meios eixos ou eixos negativos. Os divisores só poderão ser 1, que dará 3, que é o que acontece com os polígonos regulares, e 3 que dará 1, que é o que acontece com os irregulares. O 2 não poderá ser pois a divisão não será um número inteiro."

Perguntei-lhes como calculavam o número de eixos no caso de polígonos com 15, 30 e 49 lados. Fizeram as divisões

15 | 3    30 | 2    49 | 7
0   5    0   15    0   7

e responderam que haveria 5, 15 e 7 eixos. Interroguei-as ainda sobre como tinham descoberto os divisores das operações que fizeram e elas disseram que "era como na decomposição dos números em factores, que vimos nos radicais", isto é, dividiam o número de lados pelo menor número primo divisor desse número.

## Reflectindo sobre o trabalho

O meu gosto por este tipo de actividades e o facto de as simetrias serem um tema a ser tratado levaram-me a propor esta actividade aos alunos.

Sabia que não ia ter uma adesão fácil e imediata da parte de todos e que o apoio que iria dar aos grupos ia ser importante no desenrolar do trabalho.

Na primeira aula de duas horas os grupos solicitaram muito a minha presença e eu sentia que avançavam pouco sem a minha intervenção. O facto dos grupos terem sido constituídos há pouco tempo e haver alguns com alunos que não tinham trabalhado juntos no primeiro período, levaram-me a pensar que não tinha escolhido a melhor altura para esta actividade. Esta talvez necessitasse de mais experiência anterior da parte dos alunos, quer em resolver problemas, quer em trabalhar em grupo.

Identifiquei 3 níveis de envolvimento diferente por parte dos alunos, que a meu ver, acompanharam 3 fases distintas do trabalho. Na primeira fase, todos começaram pelo estudo de polígonos regulares e encontraram facilmente uma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria. Com o mesmo interesse, iniciaram o estudo nos polígonos irregulares e formularam a conjectura: " nos polígonos com um número par de lados é 2 e nos ímpares é 1". O facto de terem uma explicação que lhes parecia adequada aos dados recolhidos, levou uma grande maioria dos alunos a considerarem que o trabalho estava terminado. Foi demorado e não foi fácil encontrarem um contra-exemplo que novamente lhes criasse uma situação de "instabilidade" e a necessidade de a ultrapassar. A minha sugestão de modificarem polígonos regulares, mantendo os eixos de simetria, foi importante para desbloquear esta situação. Surgiram vários desenhos nos grupos e o trabalho de grupo retomou a dinâmica anterior. O facto de aparecerem vários polígonos côncavos, ao contrário da minha expectativa, veio enriquecer o trabalho.

No decorrer da actividade senti prazer quando, por várias vezes, os vi a formularem conjecturas, algumas das quais vinham posteriormente a rejeitar. Embora esta actividade tenha surgido na sequência de outras que também envolviam exploração de problemas, aquele processo de reformulação de conjecturas exigiu dos alunos um maior esforço.

A componente experimental da actividade permitiu o envolvimento dos alunos mais fracos tendo havido intervenções destes alunos enriquecedoras como, por exemplo, encontrarem um polígono de 9 lados com 3 eixos, enquanto os colegas procuravam um hexágono irregular com os mesmos eixos.

Quando preparei esta aula pensei em várias situações que poderiam surgir. No entanto tive muitas surpresas. Uma delas foi a facilidade com que surgiram as primeiras conjecturas, por exemplo "cada 2 lados iguais dão origem a um eixo", que pouco tempo depois foi reformulada para "cada 2 lados iguais e paralelos dão origem a um eixo".

Outra foi a importância da intuição no desenrolar dos trabalhos. Surpreendeu-me o caso do Carlos que, ao fim de cerca de uma hora e meia de trabalho, já tinha intuído que os polígonos com um número primo de lados tinham no máximo um eixo de simetria.

Ainda uma outra surpresa foi o número de explorações laterais que surgiram a propósito do tema central, bem como o facto de os alunos terem seguido caminhos diferentes e terem prosseguido até níveis diferentes de profundidade.

## E por fim...

Apesar de os alunos terem revelado interesse em descobrir cada vez mais polígonos irregulares e se terem mostrado intrigados por não descobrirem rapidamente uma conjectura que abrangesse todos os casos que estudaram, eu não estava satisfeita. Gostaria que tivesse havido mais empenhamento na tarefa, mais discussão nos grupos, mais "demonstrações", mais contra-exemplos e ainda... mais e melhores relatórios. Nos relatórios que me foram entregues nenhum refere as etapas do trabalho, apresentando apenas as conclusões a que chegaram relativamente ao número de eixos dos polígonos regulares e irregulares.

Questionava-me sobre as opções que tomei: Será que deveria ter feito uma ficha mais estruturada? Será que deveria ter usado outros materiais? O livro de espelhos? O geoplano circular? Papel e tesoura? Deveria ter estimulado outras abordagens ao problema, por exemplo, ter dado mais importância à orientação dos eixos de simetria nas figuras? Pensei também nas implicações das minhas sugestões. Teriam sido dadas na altura certa? Os alunos usarão o raciocínio seguido na demonstração, por redução ao absurdo, noutras situações? Teria sido boa ideia pedir aos alunos para modificarem polígonos regulares, para obter polígonos irregulares, com os mesmos eixos? Pensava também que deveria ter dado uma maior atenção à motivação para este tipo de actividade. Em alguns grupos este assunto surgiu, mas não em todos.

Queria que os alunos continuassem a investigação, mas receava que estivessem cansados dela. Pensei fazer uma aula de discussão, mas pensava que resultaria melhor se os alunos tivessem avançado mais. Surgiu-me então a ideia de fazer uma segunda ficha de trabalho onde começaria por salientar a importância do trabalho de investigação, colmatando assim a falta de atenção dada à motivação. Queria também que eles conhecessem o trabalho que os outros grupos desenvolveram e que respondessem a questões que foram surgindo nos grupos. Eu tinha registado uma série de questões, pois sempre que eu pensava neste problema, novas perguntas me surgiam.

Elaborei então, de um só fôlego, uma segunda ficha de trabalho, com as questões surgidas entretanto, para a aula de 2h seguinte.

Antes da realização dessa ficha, no fim de uma das aulas de 50 m, o grupo das Catarinas entregou-me um novo relatório. O Nuno Miguel, o Carlos e o Miguel, faziam-me várias perguntas. Queriam saber como calcular o número de eixos de polígonos com um número ímpar de lados, pois já sabiam com um número par. O Nuno Miguel entregou-me um novo relatório e dizia que continuava com dúvidas se teriam um só eixo. Ficaram os três no intervalo a falar comigo e o Nuno insistia para eu lhe tirar a dúvida. O Carlos dizia " às vezes estou a ver televisão e a imaginar os polígonos". Queria encontrar mais exemplos com um número ímpar de lados e dizia que era complicado desenhá-los. Começámos a pensar em casos concretos e entre outros surgiram polígonos com 9, 25 e 49 lados. O Miguel reparava que havia casos em que o número de eixos de simetria era a raiz quadrada do número de lados do polígono e uma nova conjectura aparecia.

Na aula em que foi proposta a segunda ficha, todos os grupos trabalharam na actividade com empenhamento. Ainda havia dificuldade em responder a perguntas do tipo "porque é que isto acontece?", mas notei a facilidade em perceber a necessidade do contra-exemplos e a rapidez em encontrá-lo. As Catarinas não quiseram fazer intervalo para acabarem a ficha. Estavam confiantes que sabiam dar todas as respostas.

No grupo do Miguel falavam do m.d.c., dizendo "o m.d.c. de 25 era 5". Disseram-me que ficaram muito satisfeitos por eu ter conversado com eles sem me terem solicitado. Este grupo foi um daqueles que nas primeiras aulas me solicitavam bastante e reclamavam por eu não ir logo que me chamavam.

No grupo da Liliana, do Ricardo e da Teresa depois de uma intervenção minha no grupo e quando eu me dirigia já para outro, ouvi a Liliana dizer: "Mais uma vez ficámos com mais perguntas para responder ...". Falei com eles sobre isto e eles diziam-me que eu era diferente dos outros professores e que raramente lhes dava respostas. Disse-lhes que gostava de saber as opiniões deles sobre este trabalho e pedi-lhes para as escreverem. Eles decidiram que o fariam em grupo. A Liliana é a delegada da turma, no inicio do ano disse-me que não gostava de Matemática e que já há alguns anos que tinha dificuldades na disciplina. Na aula participa pouco mas disse-me, no fim do 1º período, que as aulas a interessaram. Quando se pede uma opinião sobre assuntos fora da disciplina, ela é a primeira a falar e apresenta argumentos com facilidade. Estas últimas características são também as do Ricardo que me disse no inicio do ano que não gostava de Matemática e nas aulas se mostrou várias vezes desinteressado. Tal como a Liliana tem vindo progressivamente a colaborar mais, nas aulas. O terceiro elemento do grupo é a Teresa, que é considerada uma boa aluna e que trabalha bem em grupo, tendo muito em atenção as dificuldades e opiniões dos colegas com que tem vindo a trabalhar. Este grupo só foi constituído no 2º período.

Acabo com a convicção de que foi fundamental não ter desistido numa altura em que não conseguia avaliar claramente até que ponto os alunos tinham avançado na exploração. Pare-ce-me que a persistência foi um factor essencial para superar a fase inicial do trabalho que era um pouco desen-corajadora, pois os seus frutos não eram observáveis.

Uma das sensações com que fiquei foi a de que com estas actividades os alunos revelaram potencialidades que de outra forma me poderiam ter passado despercebidas. Particularmente estimulante foi o facto de, passadas três semanas, o Nuno Miguel me ter entregue um 4º relatório. Por corresponder a uma preocupação em melhorar e reflectir o próprio processo de investigação, descrevendo as dificuldades que teve, as conjecturas que fez, os contra-exemplos que o levaram a reformular as conjecturas, a leitura deste relatório constituiu para mim um dos momentos mais compensadores na minha vida profissional.

A nossa opinião é muito precisa. Após vários trabalhos realizados no decorrer de todas estas aulas, chegámos à conclusão de que estes trabalhos são muito úteis para o desenvolvimento mental. Na medida em que temos que formular ideias variadas e depois, primeiro por tentativas e seguidamente por certezas, passamos para a concretização destas.
De cada vez que nos surge uma dúvida e temos a ideia de perguntar á professora, ela esclarece-nos mas dá-nos outras informações que por um lado resolve a nossa dúvida mas por outro deixa-nos mais pensativos e outras dúvidas, sendo quase um ciclo repetitivo onde acabamos por encontrar soluções.
Resumindo, nós deparamo-nos com a matemática nas coisas mais simples da vida, pondo-nos sempre pensativos em relação ao que ela nos pede.

Opinião sobre este trabalho do grupo da Liliana, Ricardo e Teresa

Helena Paradinha
Esc. C+S Pedro de Santarém

Nota — Agradeço aos alunos da turma 9º D o prazer que me deram em ter realizado este trabalho.

## Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI)

- Aberto a todos os sócios interessados na investigação em educação matemática; grupo coordenador escolhido pelo Grupo
- Objectivos essenciais:
  - constituir um espaço de comunicação entre os sócios do Grupo
  - promover a articulação entre investigação em educação matemática e ensino da Matemática
- Actividades
  - realização dos *Seminários de Investigação em Educação Matemática* (SIEM)
  - edição da *Quadrante —revista teórica e de investigação*
  - constituição de um *Centro de Documentação* (conta já com a *Colecção Teses* e com um ficheiro informatizado)

Para mais informações, escrever para
APM/sede — A/c Henrique M. Guimarães

## Materiais para a aula de Matemática

As propostas apresentadas nas duas fichas das páginas seguintes referem-se ao artigo anterior "Perseguindo polígonos, simetrias e números" onde se encontram indicações sobre a metodologia seguida, algumas respostas, reacções e atitudes dos alunos.

Com a primeira ficha pretendia levar os alunos a formular conjecturas, experimentar, demonstrar, argumentar, criticar e estimular-lhes o gosto por actividades de investigação. O anexo facilitou a organização dos dados. Foi também fornecido um outro anexo com desenhos de polígonos regulares de 3 a 12 lados. Os alunos puderam usar espelhos, sempre que o desejaram.

Pedi-lhes que fizessem um relatório do trabalho desenvolvido pois interessava sobretudo valorizar o processo vivido por eles, mais que os resultados a que chegaram. Este relatório poderia ser concluído em casa.

A segunda ficha de trabalho surgiu da necessidade de preencher algumas lacunas relacionadas com o aparecimento nos grupos de diferentes conjecturas, contra-exemplos e problemas laterais que eu gostava que fossem partilhados por todos. Além disso pretendia reforçar a percepção do que era um trabalho de investigação.

A facilidade com que os alunos responderam a algumas questões desta ficha restituiu-lhes confiança, levou-os a compreender a importância do trabalho feito anteriormente e permitiu-lhes aprofundá-lo.

Helena Paradinha

# Materiais para a aula de Matemática

## Eixos de simetria em polígonos irregulares (I)

**Investiguem qual o número máximo de eixos de simetria de polígonos regulares e irregulares.**

*Sugestão para a organização do trabalho:*

- *Comecem por estudar o caso dos polígonos com 3 lados (triângulos). Registem na tabela anexa na página seguinte:*

  *- para o polígono regular (triângulo equilátero) o nº máximo de eixos;*

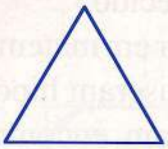
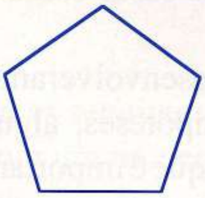
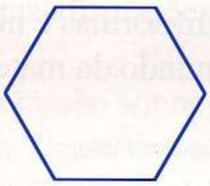
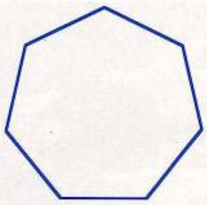
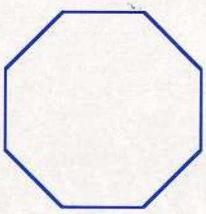
  *- para os irregulares, os triângulos onde encontraram o maior nº de eixos de simetria e esse nº.*
- *Prossigam estudando o caso de polígonos de 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, .... lados.*

Nesta actividade é importante que elaborem um relatório onde registem todos os elementos que considerarem significativos do vosso trabalho.

Alguns dos elementos que devem figurar no relatório:

- as descobertas que fizeram;
- os raciocínios que vos levam a afirmar que encontraram o número máximo de eixos;
- as relações que encontraram entre o número de lados e o número máximo de eixos;
- as previsões para o caso de polígonos com um número de lados maior que os estudados;
- as dificuldades que encontraram;
- outras conclusões.

Adaptado do artigo "Symmetries of irregular polygons" publicado na revista *Mathematics Teacher,* Maio de 1992

| Nº de lados dos polígonos | Polígonos Regulares | | Polígonos irregulares | |
|---|---|---|---|---|
| | | Nº de eixos | Polígonos irregulares com maior nº de eixos | Nº de eixos |
| 3 |  | | | |
| 4 |  | | | |
| 5 |  | | | |
| 6 |  | | | |
| 7 |  | | | |
| 8 |  | | | |

# Eixos de simetria em polígonos irregulares (II)

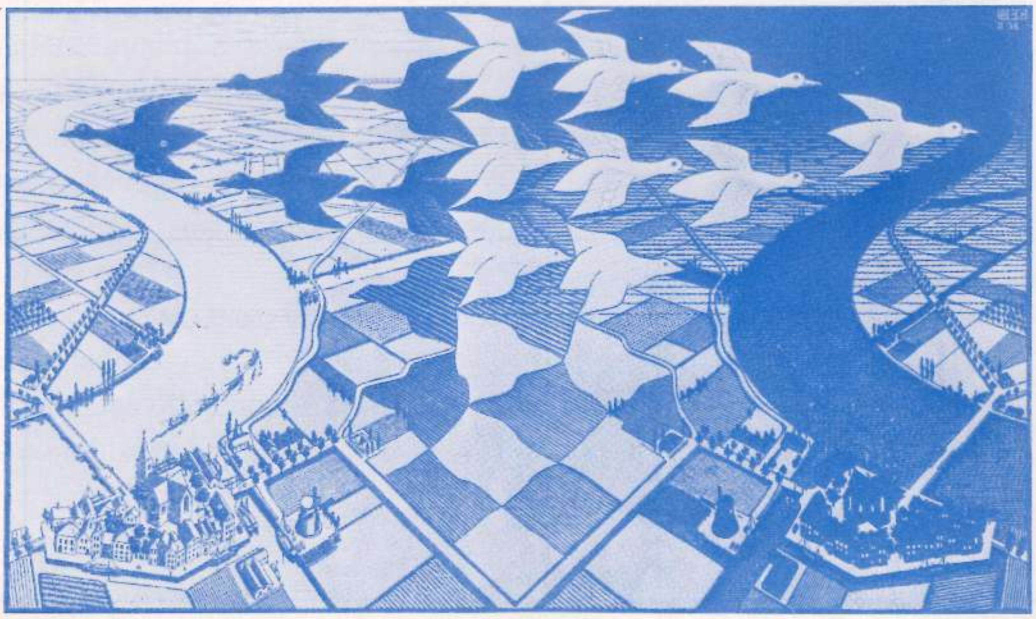
Uma investigação matemática é uma viagem até ao desconhecido.
Vocês já iniciaram esta aventura. O trabalho de um investigador em matemática é semelhante ao do detective. Tal como ele, vocês já procuraram pistas, puseram hipóteses, viram se as hipóteses não eram contraditórias com os factos que tinham encontrado, tiveram que convencer outros que as vossas opiniões são válidas, tiveram que responder a perguntas do tipo: "Porque é que isto acontece? Será que isto se verifica sempre?"...

Uma investigação precisa de tempo. Como em qualquer investigação de um detective, podes não encontrar logo as melhores pistas. Por vezes é preciso fazer várias experiências, pôr hipóteses, reformulá-las, no caso de não satisfazer todos os casos estudados, etc.

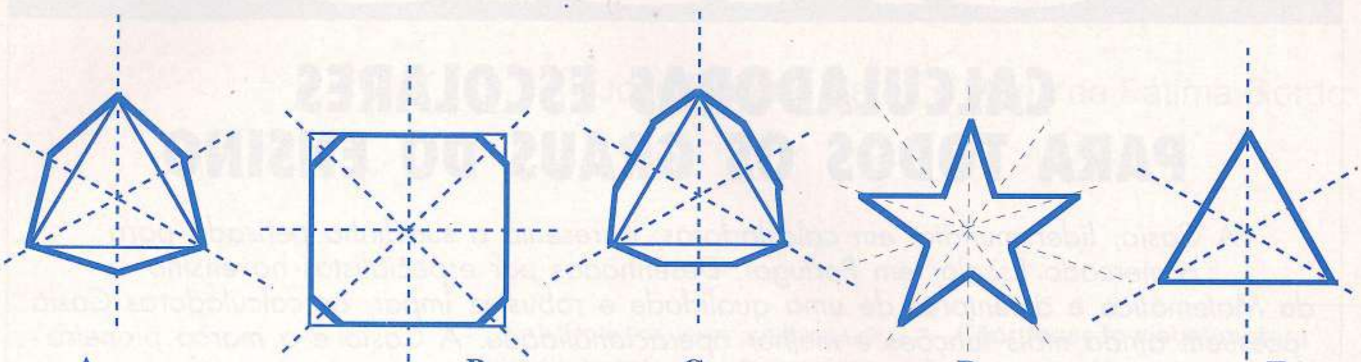
Nesta ficha vocês podem aprofundar o trabalho que desenvolveram. Pretende-se que apresentem as vossas opiniões sobre ideias, questões, hipóteses, algumas surgidas nos grupos. Escolham as que mais vos agradarem e lembrem-se que é importante que apresentem razões que convençam toda a gente da justeza das vossas opiniões.

Sigam os caminhos que preferirem e divirtam-se a perseguir formas e números.
Deixem a imaginação ser o vosso guia numa viagem ao mundo da matemática!*

* Adaptado de *Viva a Matemática*, Nigel Langdom e Charles Snape, Colecção Gradiva Júnior.



A) Imagina que numa outra turma os alunos tinham realizado a actividade anterior e tinham apresentado os desenhos seguintes:



A B C D E

Tinham ainda feito as seguintes conjecturas:

"Nos polígonos com um número par de lados, há dois eixos de simetria; com um número ímpar, há um eixo".

"Cada dois lados iguais dão origem a um eixo de simetria".

O que pensas destas afirmações?

B) Escreve a tua opinião sobre estas afirmações:

- O hexágono da figura A é um polígono regular.
- Num polígono se os lados são todos iguais, os ângulos também o são.
- Há mais de um polígono irregular de 7 lados com todos os lados iguais.
- A afirmação anterior verifica-se em polígonos com outro número de lados.

C) Concordas com esta afirmação: " Num pentágono se existirem 2 eixos de simetria, então existirão 5."? Formula uma afirmação semelhante à anterior para outros polígonos.

D) Regista todos os desenhos e raciocínios que fizeres para responder às questões:

- Qual o número máximo de eixos de simetria num polígono irregular de 15 lados?
- E se o polígono tiver 16 lados?
- E com 17 lados?

Faz uma tabela para registar o número de lados e o número máximo de eixos de simetria de polígonos irregulares dos casos que estudaste e procura uma relação entre os dados obtidos.

# Visualização espacial: algumas actividades

José Manuel Matos e Maria de Fátima Gordo

**Ultimamente muito se tem falado na importância da visualização na aprendizagem da Matemática. Este artigo explora diversas capacidades relacionadas com a visualização espacial e apresenta algumas sugestões de actividades.**

No espírito dos novos programas de Matemática parece estar subjacente uma preocupação em envolver o aluno em actividades que contribuam para a construção e o desenvolvimento das suas noções geométricas. Papel especial parecem desempenhar as actividades que envolvam de alguma maneira as capacidades espaciais da criança pois são susceptíveis de facilitar a aprendizagem da Geometria.

A visualização espacial, em particular, é simultaneamente facilitadora de uma aprendizagem da Geometria, e desenvolvida pelas experiências geométricas na sala de aula. Engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos. Diversos educadores têm-se debruçado sobre a interacção entre estas capacidades e a aprendizagem da Matemática, procurando especificamente ultrapassar as dificuldades perceptuais dos alunos na compreensão de desenhos de figuras tridimensionais, na interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos e no estudo dos processos relacionados com a imaginação de transformações de entidades matemáticas. Neste artigo analisaremos sete capacidades de visualização espacial seguindo de perto a descrição feita por Del Grande (1990) e proporemos diversas actividades com elas relacionadas. De fora ficarão outras categorizações das capacidades espaciais, assim como uma análise mais apro-fundada de investigações dos processos mentais a elas associados.

## Coordenação visual-motora

Uma primeira capacidade espacial é a coordenação visual-motora, isto é, a capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo.

Desde o início da escolaridade devem ser dadas aos alunos possibilidades de desenvolvimento da coordenação da visão com os seus actos motores. Se um aluno tem dificuldade em empilhar pequenos cubos para construir um cubo maior, é natural que não possa prestar muita atenção aos pormenores da construção do cubo, nomeadamente se os cubinhos estão todos alinhados, se o número de cubinhos nas três direcções do espaço é igual, etc.

Esta capacidade começa a ser desenvolvida desde muito cedo em actividades como comer, vestir, jogar e muitas outras. Na escola ela pode ser estimulada através do recurso a actividades de escrita, a jogos com bolas e actividades de desenho livre ou de colagens.

A coordenação visual-motora também se desenvolve propondo aos alunos a descoberta de um caminho, a pintura de um desenho ou a reprodução de figuras dadas. Muitas revistas propõem passatempos deste tipo. Na sala de aula, o professor pode ainda propor aos alunos que simulem um labirinto com cordas no chão e que procurem o caminho certo. Este labirinto pode ser preparado por alunos mais velhos sob a orientação do professor.

Uma actividade deste tipo pode ser mesmo transformada num trabalho de projecto. Se a escola necessitar de pinturas, é comum deixar o trabalho de acaba

## Capacidades relacionadas com a visualização espacial

**Coordenação visual-motora**
Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo.

Exemplos:
- Resolver e fazer labirintos,
- Pintar desenhos,
- Reproduzir desenhos dados,
- Pintar espaços marcados com pontinhos.

**Memória visual**
Capacidade de recordar objectos que já não estão visíveis.

Exemplos:
- Observar figuras e copiá-las, mas sem as voltar a observar,
- Observar figuras em papel ponteado e desenhá-las no geoplano, sem as voltar a observar.

**Percepção figura-fundo**
Capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos.

Exemplos:
- Completar figuras de forma a se assemelharem a outras dadas,
- Procurar figuras imersas noutras (por exemplo, utilizando Tangram e pavimentações).

**Constância perceptual**
Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos e contextos e texturas.

Exemplos:
- Procurar todos os quadrados num geoplano 5x5,
- Construir uma figura geométrica utilizando diversos materiais,
- Procurar, na sala de aula ou noutro contexto, uma determinada figura geométrica.

**Percepção da posição no espaço**
Capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes.

Exemplos:
- Desenhar uma figura simétrica de uma dada,
- Descobrir figuras com eixos de simetria, utilizando o Mira ou um espelho,
- Encontrar figuras iguais a uma dada mas com orientações diferentes.

**Percepção de relações espaciais**
Capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco.

Exemplos:
- Construção da aldeia dos cubos,
- Fazer uma construção com cubos a partir do desenho da mesma,
- Descobrir qual o cubo que corresponde a uma planificação.

**Discriminação visual**
Capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

Exemplos:
- Identificar características de triângulos,
- Descobrir as diferenças entre dois desenhos,
- Descobrir critérios. que conduzem a determinadas classificações ou ordenações.

mento de algumas paredes exteriores ao cuidado dos alunos. Claro que este tipo de trabalho exige um planeamento das pinturas e efectuar. Nesse planeamento poderão intervir outras áreas da Matemática, especialmente no que diz respeito ao cálculo da tinta necessária para cobrir a área a pintar.

### Memória visual

A memória visual é a capacidade de recordar objectos que já não estão à vista. Com alunos mais pequenos é possível propor uma actividade na qual o professor dispõe alguns objectos familiares sobre uma mesa e pede que todos os observem com atenção. Depois o professor remove os objectos e pede aos alunos que recordem os objectos observados. Pode ainda pedir que reconstituam a posição em que eles estavam.

Para além de actividades deste tipo mais elementar, desenvolve-se esta capacidade quando, por exemplo, se pede aos alunos que copiem figuras mais complexas numa base de papel ponteado ou quadriculado, ou utilizando o geoplano. Após esta actividade é importante que o professor discuta com os alunos estratégias que eles utilizaram para recordarem as figuras e a sua posição.

### Percepção figura-fundo

Esta é a capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos.

É possível desenvolver esta capacidade através de actividades que exijam a observação de figuras escondidas. A figura 1 mostra uma possibilidade de desenvolvimento desta capacidade solicitando que os alunos isolem elementos geométricos de um fundo, isto é, que deixem de tomar atenção aos detalhes ou a eventuais marcas extemporâneas e que destaquem as figuras geométricas e pode ser utilizada até ao 2º Ciclo.

Um conjunto de actividades que desenvolvem a percepção figura-fundo pode ser explorado a partir de um problema de pavimentação. De início podem

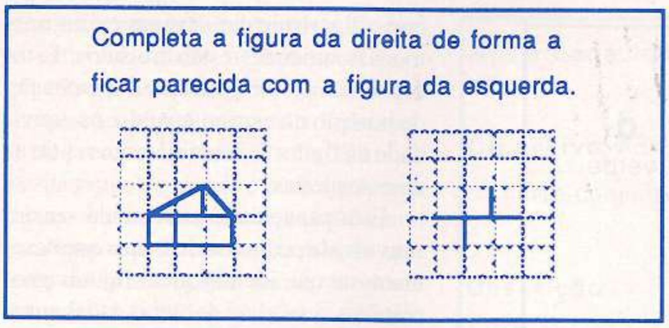



figura 1

ser utilizadas figuras geométricas iguais (quadrados, triângulos de vários tipos, rectângulos, paralelogramos, etc.) recorrendo, por exemplo, aos blocos lógicos. Seguidamente será interessante procurar nessas pavimentações figuras diferentes das que foram usadas para a sua construção. Na figura 2 mostram-se um quadrado, um rectângulo e um hexágono não regular que podem ser encontrados numa pavimentação com quadrados.

Podem ainda ser encontrados octógonos e outras figuras geométricas. Não podem, no entanto, ser encontrados círculos, hexágonos regulares, e outras. Será interessante pedir aos alunos que procurem rectas paralelas ou que se intersectem.

Na pavimentação da figura 2, por exemplo, encontram-se dois sistemas de rectas paralelas. No entanto, numa pavi-

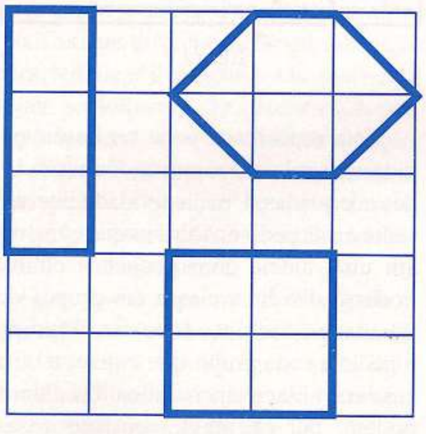


figura 2

mentação com hexágonos regulares só é possível encontrar rectas paralelas se prolongarmos os lados dos hexágonos. Estas actividades podem ser integradas inclusiva-mente no 3º Ciclo.

O Tangram pode também desenvolver a percepção figura-fundo. A activi dade da figura 3 é um exemplo de muitas outras que podem ser propostas.

## Constância perceptual

A constância perceptual, também chamada constância de forma e tamanho, implica a capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas. Uma pessoa mostra possuir constância perceptual quando reconhece um cubo ou um quadrado, mesmo numa posição não habitual.

Muitos alunos apenas reconhecem figuras geométricas nas suas posições habituais (bases horizontais no caso dos triângulos, rectângulos, quadrados ou paralelogramos, diagonais horizontais e verticais no caso do losango) ou bem proporcionadas (não são reconhecidos como triângulos triângulos "magros" ou "achatados", ou triângulos "muito escalenos").

Outros exemplos podiam ser encontrados, quer no domínio da Geometria, quer noutros domínios do conhecimento. A origem desta situação pode ser encontrada na forma como formamos os nossos conceitos. Por exemplo, os alunos normalmente encontram quadrados desenhados nos manuais ou na aula em certas posições particulares (um dos lados horizontais). O seu conceito de quadrado vai pois incluir a propriedade implícita que tenham um lado horizontal.

É possível conseguir que os alunos formem conceitos de entidades geométricas mais amplos. Para isso os alunos deverão vivenciar experiências através das quais contactem com exemplos diversificados. Aos alunos mais pequenos pode-se pedir que construam rectângulos utilizando materiais variados (canetas de feltro, papel e tesoura, fios de lã, arame, etc.). Aos mais velhos pode-se propôr que procurem todos os quadrados num geoplano de 5x5. Facilmente os alunos chegarão aos casos em que os quadrados têm um dos lados horizontais. Existem, no entanto outros quadrados que não estão colocados nas posições mais comuns (figura 4) e que devem ser abordados na sala de aula. Este tipo de actividades tem-se revelado importante mesmo para alunos de cursos de forma-

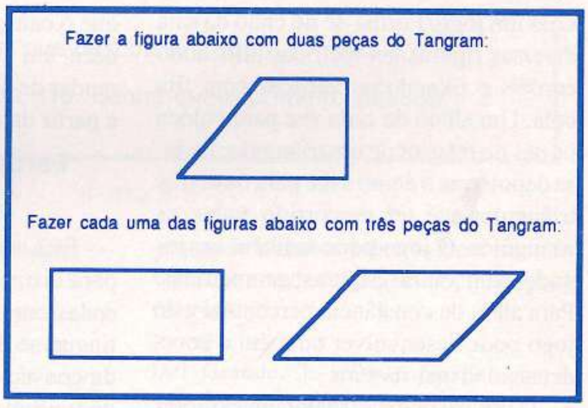



figura 3

ção inicial de professores.

Actividades semelhantes podem ser desenvolvidas para outras figuras geométricas. Pode-se ainda procurar, neste geoplano, todos os rectângulos, todos os triângulos isósceles, etc.

Para os alunos mais novos é possível

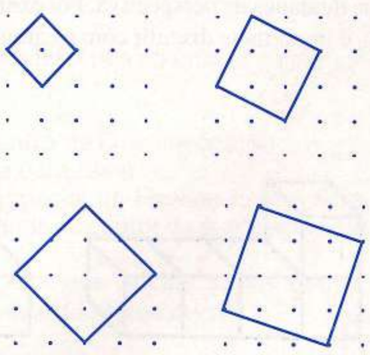


figura 4

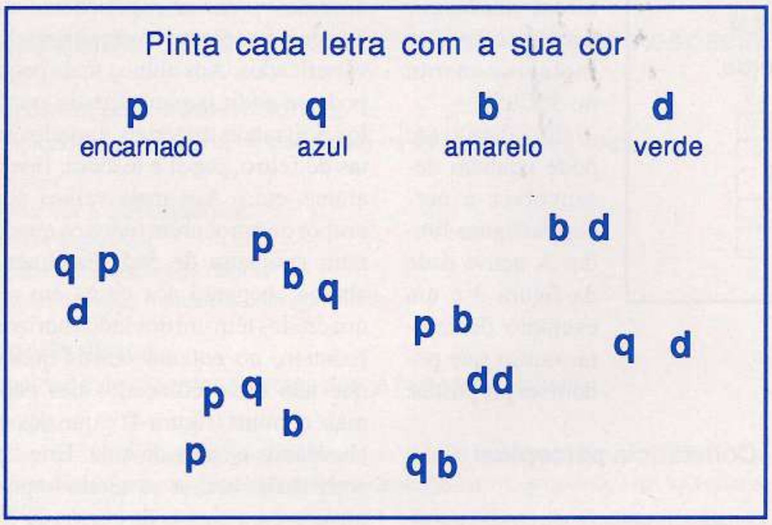



figura 5

criar um jogo. Forma-se no chão da sala diversas figuras geométricas utilizando cordéis e fixando os vértices com fita cola. Um aluno de cada vez para coloca os pés no interior de um triângulo. Pede-se depois que o aluno salte para os outros triângulos até ter percorrido todos os triângulos. O jogo pode também ser jogado com outras figuras geométricas. Para além da constância perceptual este jogo pode desenvolver também a coordenação visual-motora.

O professor deverá também explorar não-exemplos dos conceitos: no caso dos triângulos, o professor deve apresentar figuras geométricas que embora parecendo triângulos não o são ("triângulos" com lados curvos, ou em que um dos vértices não fecha, etc).

Associada à constância perceptual aparece ainda a capacidade de reconhecer características geométricas que permanecem inalteráveis mesmo depois de uma mudança de perspectiva. Por exemplo, é importante discutir com os alunos que o campo de jogos da escola permanece um rectângulo, apesar de poder mudar de aparência conforme a posição a partir da qual o observemos.

### Percepção da posição no espaço

Esta capacidade envolve a aptidão para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes. Distingue-se da percepção figura-fundo ou da constância perceptual porque nestas duas últimas procuramos identificar entidades geométricas numa diversidade de contextos, posições e tamanhos. Exercemos a capacidade de percepção da posição no espaço quando procuramos discriminar quais das figuras que sendo iguais do ponto de vista da percepção figura-fundo ou da constância perceptual estão dispostas com uma orientação diferente.

Por exemplo, há alunos que confundem os bb, os dd, os pp ou os qq, ou que algumas vezes escrevem números em que o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades estão trocados. Estamos a exercer a capacidade de percepção da posição no espaço quando, na actividade da figura 5, discriminamos entre as diversas letras.

Esta capacidade pode ainda ser desenvolvida pedindo aos alunos que desenhem ou que identifiquem figuras geométricas simétricas de outras dadas numa base quadriculada, ponteada ou até no geoplano. Pode-se também descobrir eixos de simetria em diversas figuras utilizando o Mira ou um espelho.

### Percepção de relações espaciais

Estamos a usar a percepção de relações espaciais quando conseguimos ver ou imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco. Quando as crianças mais pequenas estão a jogar às escondidas têm muita dificuldade em imaginar se, do ponto de vista do seu companheiro de brincadeira, estão bem escondidas ou não. Mais tarde, quando elas desenvolvem a capacidade de percepcionar as relações espaciais entre os jogadores, já são capazes de se esconder eficazmente.


figura 7

Esta capacidade pode ser desenvolvida na escola, se recorrermos a actividades adequadas. Uma actividade interessante é a de pedir aos alunos que construam uma aldeia com pequenos cubos. Pode-se dividir a classe em grupos de três alunos, dar cinco cubos a cada grupo e pedir a cada grupo que construa uma casa com esses cinco cubos. Os alunos podem, por exemplo, construir casas como as da figura 6.

Esta actividade pode ser complementada propondo aos alunos a colocação dos diversos edifícios ao longo de ruas. Pode ainda ser desenvolvida através da construção de casas mais complexas,

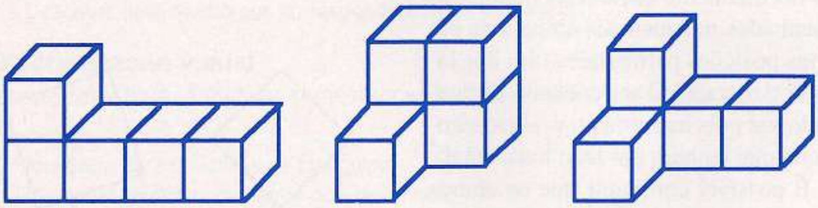


figura 6

com um número maior de cubos. Durante esta actividade o professor deve questio-nar os alunos sobre quais as casas que são iguais e as que são diferentes.

O professor pode ainda dar 20 cubos a cada grupo de alunos e pedir que construam: a) uma casa que seja alta, b) uma casa que seja baixa, c) uma casa que tenha dois andares, etc. Um outro tipo de actividades pode ser proposto pedindo aos alunos que reproduzam casas feitas pelo professor ou pelos colegas. O professor pode pedir aos alunos que indiquem com quantos cubos foi feita cada casa, sem desfazer a casa.

Nalgumas actividades não é possível distinguir entre a percepção de relações espaciais e a percepção da posição no espaço de que falámos atrás. Uma actividade como a proposta na figura 7 requer simultaneamente uma discriminação entre as duas posições diferentes tomadas pelo Y (percepção da posição no espaço) e uma antecipação da posição que o próximo Y vai tomar (percepção de relações espaciais).

Na percepção das relações espaciais inclui-se ainda a capacidade de relacionar objectos geométricos com as suas vistas (perspectivas, na linguagem dos desenhadores) e as suas planificações.

### Discriminação visual

Esta última capacidade está envolvida quando procuramos analisar se duas figuras são iguais ou, sendo diferentes, quais as suas diferenças. Procura-se aqui características das figuras nas quais elas sejam semelhantes ou diferentes. Nesta capacidade não está envolvida a situação do objecto no espaço, contrariamente à percepção da posição no espaço ou à percepção de relações espaciais que discutimos anteriormente.

Um passatempo muito divulgado e que desenvolve a discriminação visual é o de descobrir as diferenças entre dois desenhos. Esta actividade pode também ser proposta na sala de aula.

Nas aulas de Geometria, usamos e desenvolvemos esta capacidade quando propomos aos alunos que efectuem classificações e ordenações de formas geométricas.

Uma actividade mais elaborada que

**Actividade:** Identificar características de triângulos.

**Objectivo:** Adivinhar o critério que o professor pensou ao formar um certo conjunto de triângulos.

**Descrição:**

1) O professor forma grupos de alunos e dá-lhes diversos triângulos.
2) O professor escolhe secretamente uma regra para formar um subconjunto desses triângulos e pede aos alunos que adivinhem essa regra.
3) Cada grupo de alunos pega num triângulo e pergunta ao professor se ele pertence ao grupo. O professor apenas responde "Sim" ou "Não".
4) Quando um grupo achar que descobriu a regra formula-a e o professor confirmará ou não. Ganha quem primeiro descobrir a regra.

figura 8

também desenvolve a discriminação visual é a proposta na figura 8.

Durante esta actividade o professor deve discutir com os alunos as consequências da aceitação das regras propostas por estes. Esta actividade pode ser desenvolvida com outras figuras geométricas quaisquer ou envolvendo animais ou entidades fantásticas que é preciso agrupar segundo características a descobrir (Tyler e Round, 1990). Uma actividade do tipo da da figura 8 pode ser adaptada a alunos mais velhos, inclusivamente aos da formação inicial de professores.

Referências

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37( 2)*, 14-20.

Tyler, J., Round, G. (1990). *Enigmas com figuras.* Lisboa: Gradiva.

José Manuel Matos
F. C. T.-UNL
Maria de Fátima Gordo
ESE de Setúbal

# A Geometria torna-se Álgebra

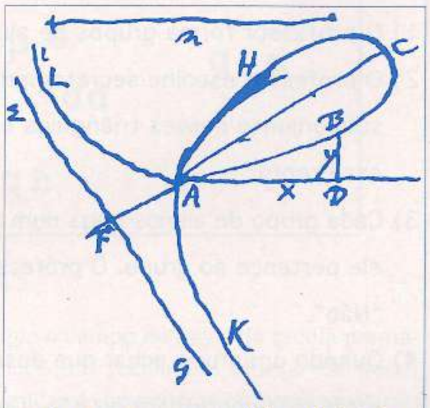
J. Orlando de Freitas

*A Geometria grega pode ser comparada a um elemento manual, a Álgebra árabe a uma produção automática, a uma máquina.*
Luci L. Radice

Já é do nosso conhecimento que a geometria analítica é "a geometria que usa sistemas de coordenadas e métodos algébricos na representação de pontos, rectase curvas". A geometria analítica parece consistir na associação de três factores: a expressão de uma realidade geométrica por uma relação entre quantidades variáveis, o uso das coordenadas e o princípio da representação gráfica. Ora, se cada um destes factores surge desde muito cedo no desenvolvimento da geometria anterior a Descartes, eles não tinham sido no entanto encadeados.

A ideia de caracterizar um ponto do plano por meio das suas coordenadas surge na Grécia antiga. Apolónio (séc. III a.C.) caracterizou as secções cónicas através das suas coordenadas, sem as designar por esses nome e sem lhes atribuir valores numéricos. Também na mais alta antiguidade, a observação astronómica conduzira a referenciar as direcções no espaço por duas coordenadas angulares: altura acima do horizonte e afastamento em relação ao meridiano. Contudo, a interpretação das relações entre essas coordenadas, ou seja, a geometria analítica, só aparece muitos séculos depois.

Um diagrama cartesiano é uma coisa que se vê agora todos os dias, que todos compreendem, ainda que não saibam que aquelas figurinhas se chamam assim: diagramas cartesianos. Quando jogamos à batalha naval, para nos referirmos a um lugar temos uma letra e um número, ou seja, duas coordenadas. Quando analisamos um mapa do mundo ou mesmo uma planta de Lisboa ou do Funchal, utilizamos duas coordenadas para indicar o destino desejado. Para os aviões em pleno voo é preciso mais um número para dar a sua altitude. E se quisermos, usamos uma coordenada para o tempo.



A curva representa o *folium* (folha) de Descartes, uma cúbica cuja equação é $x^3 + y^3 = 3axy$. A parte fechada da curva corresponde à "folha". Descartes, desprezando os pontos com coordenadas negativas, não teve em conta o resto da curva. A verdadeira forma da curva apenas foi apresentada pela primeira vez, 54 anos mais tarde, neste desenho de Huyghens (1629-1695).

"$y = ax + b$, com $a$ e $b$ constantes reais, é uma recta; $x^2 + y^2 = r^2$ é uma circunferência com centro na origem e raio $r$; e por aí adiante... à Descartes." A primeira vez que afirmei isto às minhas turmas do 10º ano (programa novo), os alunos fizeram uma cara de *espanto* mas, umas aulas depois, eles próprios já chamavam recta a $y = x$ e circunferência a $x^2 + y^2 = 1$, entre outros exemplos.

Descartes terá sido influenciado pelos trabalhos de Nicolau Oresme (bispo de Lisieux) que num seu trabalho (1360) introduz as coordenadas rectangulares (longitude e latitude), bem como a equação da linha recta. Oresme começa por apresentar o princípio de representação gráfica no plano, passando ao espaço a três dimensões e chegando a antever o que hoje é o espaço a quatro dimensões. Mas a sua teoria não pôde evoluir devido à falta de simbolismo algébrico. E é precisamente neste aspecto que Descartes — paralelamente com Fermat, apesar da notação deste último ser antiquada, apegado à linguagem pesada da álgebra dos gregos — desempenha um papel fundamental. Recorrendo a dois eixos perpendiculares e às coordenadas dos pontos do plano, relativamente a esses eixos, desenvolve o estudo das curvas e considera que a definição de cada curva (ou linha) é a expresão da relação algébrica entre as coordenadas $x$ e $y$ dos seus pontos. Estendendo ao espaço o que se passa no plano, Descartes considera três planos perpendiculares dois a dois e estabelece que, fixados esses planos, qualquer ponto do espaço é determinado pelas distâncias a cada um deles, ou seja, por três coordenadas.

O verdadeiro progresso realizado por Descartes reside no facto de, em vez de limitar tal cálculo ao estudo de uma dada figura, como faziam os gregos, ele o erigir em processo geral susceptível de permitir a criação de uma infinidade de novas curvas. As ideias e obra de Descartes vão revolucionar não só a Matemática como também a Filosofia. Após a sua morte é colocado no *Index*, o que não impede que a sua obra venha a ser divulgada e influencie as gerações seguintes.

Bibliografia:

Costa, Liliana (1992). *Matemática — 10º Ano*. Lisboa: Texto Editora.

Radice, L. Lucio (1971). *La Matematica da Pitagora a Newton*. Roma: Editori Riuniti.

Vários autores (1987). *Galileu, Descartes e o Mecanismo*. Lisboa: Gradiva.

J. Orlando de Freitas
Esc. Sec. Francisco Franco (Funchal)

# O problema do trimestre

## Sobre as respostas ao problema anterior

No número anterior de "Educação e Matemática" propusemos o problema "Um triângulo APM":

*Construir um triângulo [APM], não equilátero, nas seguintes condições:*

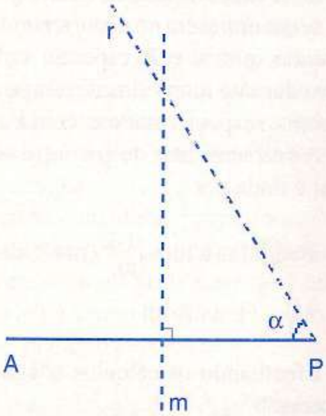
*- O lado [AP] mede 10 cm.*

*- A mediatriz de [AP], a altura a partir de A e a mediana a partir de P são concorrentes no mesmo ponto.*

Recebemos duas respostas, de Pedro Esteves (Seixal) e Alberto Canelas (Queluz). Os métodos propostos para a construção do triângulo são praticamente iguais.

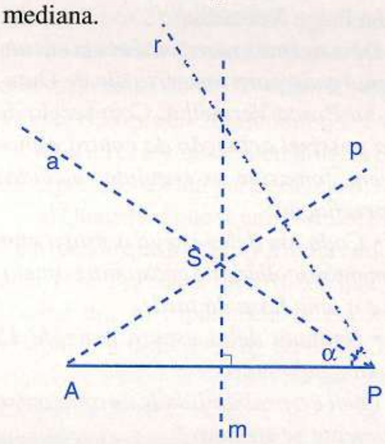
1º Traça-se o lado [AP] e a sua mediatriz **m**.

Escolhe-se um valor diferente de 60° para o ângulo α de vértice **P** e traça-se a recta **r** sobre a qual ficará o lado [PM].

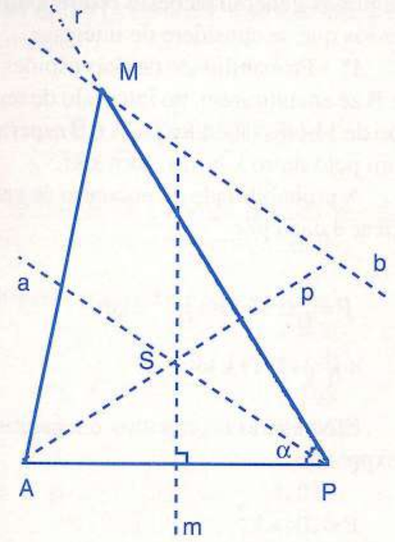



2º Traça-se por **A** a perpendicular **p** à recta **r**. A altura a partir de **A** ficará evidentemente sobre a recta **p**.

As rectas **p** e **m** intersectam-se em **S**. A mediana a partir de **P** terá então de passar por **S**. Por isso, unindo **P** com **S**, traça-se a recta **a** que irá conter essa mediana.




3º Como **a** é a mediana do lado [AM], o ponto **M** terá de ficar numa recta **b**, paralela a **a** e tal que a distância de **A** a **b** é o dobro da distância de **A** a **a**.




Traçada a recta **b**, o ponto **M** é a intersecção desta recta com **r**.

Está construído o triângulo nas condições pedidas.

A solução encontrada não é única, visto o ângulo α ter sido escolhido aleatoriamente. Para conhecer todas as soluções podemos resolver o problema analiticamente.

Fixamos o lado [AP] no eixo dos Ox, com **A** na origem do referencial e **P** de coordenadas (10;0) e procuramos as posições em que pode ficar o vértice **M**.

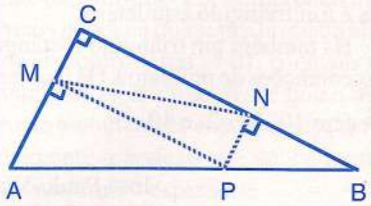
(*continua na página seguinte*)

*Problema proposto*

## UM MÍNIMO NO TRIÂNGULO

O triângulo [ABC] é rectângulo em C. Escolhe-se um ponto P sobre a hipotenusa e por ele traçam-se as perpendiculares PM e PN aos catetos.

Onde deve estar o ponto P para que a distância de M a N seja mínima?



Este vértice é o ponto de intersecção das rectas **r** e **b**.

A recta **r** tem declive igual a - tg $\alpha$.

Como **p** é perpendicular a **r**, o ângulo [SAP] mede 90 - $\alpha$. Como o triângulo [SAP] é isósceles, a recta **a** tem declive - tg(90 - $\alpha$) ou - cotg $\alpha$. A recta **b** é paralela a esta, logo tem o mesmo declive.

Obtemos então o sistema:

Recta **r** $\quad y = -\text{tg}\,\alpha \,.\, x + 10\,\text{tg}\,\alpha$

Recta **b** $\quad y = -\text{cotg}\,\alpha \,.\, x + 20\,\text{cotg}\,\alpha$

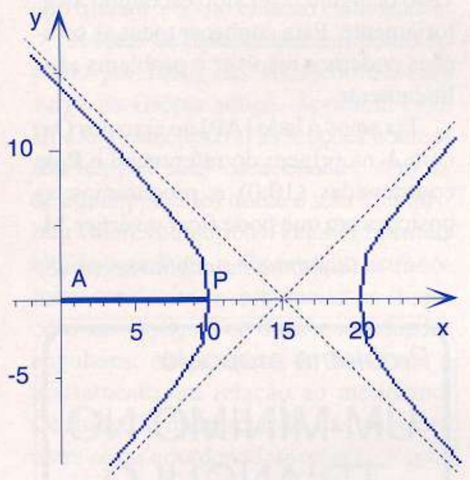
Eliminando $\alpha$ chegamos à equação

$y^2 = x^2 - 30x + 200$

que é o lugar geométrico dos pontos onde se pode situar o vértice **M**.

Esta curva é uma hipérbole de focos em $(15+\sqrt{50}\ ;0)$ e $(15-\sqrt{50}\ ;0)$ e em que as assímptotas são as rectas

$y = x - 15$ e $y = -x + 15$.




Pela análise da figura verificamos que, se **M** estiver no ramo do lado esquerdo da hipérbole, o ângulo $\alpha$ pode variar entre 45° e 90° (exclusivé). Se **M** estiver no ramo do lado direito, $\alpha$ pode variar entre 135° e 180° (exclusivé).

Alberto Canelas faz notar que o único triângulo isósceles solução do problema é um triângulo equilátero.

Há também um triângulo rectângulo nas condições do problema. Os seus lados medem 10, $10\sqrt{2}$ e $10\sqrt{3}$.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Carnide

# Os espiões da Praça Vermelha

Alberto Canelas

*De vez em quando aparecem problemas a partir dos quais se pode partir para novas aventuras.*

*É o que se passa com o "Encontro na Praça Vermelha", que permite fazer uma série de interessantes prolongamentos, variantes e generalizações.*

No número 24 de *Educação e Matemática* foi proposto o problema "Encontro na Praça Vermelha":

*Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de Outubro na Praça Vermelha. Com receio de uma possível actuação da contra espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:*

- *Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso entre o meio-dia e a uma hora da tarde.*
- *Nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.*

*Qual é a probabilidade de o encontro realmente se efectuar?*

A resolução deste problema foi publicada no número 25 desta revista. Apesar destes encontros de agentes secretos na Praça Vermelha estarem a ficar um pouco fora de moda, vale a pena fazer algumas generalizações e referir outros casos que se considere de interesse.

**1º** - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem, no intervalo de tempo de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro k horas, com k≤1.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^k (t+k)dt+\int_k^{1-k} 2k\,dt+$$
$$+\int_{1-k}^{1} (1-t+k)dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P= 2k - k^2$$

Substituindo k por 1/4, obtemos o valor7/16, solução do problema inicial.

Podemos fazer uma tabela para alguns valores de k.

| **k(h)** | **P** | **k(h)** | **P** |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,6 | 0,84 |
| 0,1 | 0,19 | 0,7 | 0,91 |
| 0,2 | 0,36 | 0,8 | 0,95 |
| 0,3 | 0,51 | 0,9 | 0,99 |
| 0,4 | 0,64 | 1 | 1 |
| 0,5 | 0,75 | | |

Como seria de esperar, a probabilidade tende para 1 quando k tende para 1. De notar, que quando o intervalo de tempo de espera é de 0,9 h (54 minutos) já existe uma probabilidade de 99% de os espiões se encontrarem.

**2º** - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem no decorrer de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro durante intervalos de tempo de k e m horas, respectivamente, com k,m ≤ 1.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^m (t+k)dt+\int_m^{1-k} (m+k)dt+$$
$$+\int_{1-k}^{1} (1-t+m)dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P = k + m - \frac{k^2+m^2}{2}$$

Podemos calcular alguns valores dando as probabilidades de encontro de dois espiões que esperam k e m horas, obtendo a tabela ao lado.

| m \ k | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0,18 | 0,32 | 0,42 | 0,48 | 0,50 |
| 0,2 | 0,18 | 0,36 | 0,50 | 0,60 | 0,66 | 0,68 |
| 0,4 | 0,32 | 0,50 | 0,64 | 0,74 | 0,80 | 0,82 |
| 0,6 | 0,42 | 0,60 | 0,74 | 0,84 | 0,90 | 0,92 |
| 0,8 | 0,48 | 0,66 | 0,80 | 0,90 | 0,96 | 0,98 |
| 1 | 0,50 | 0,68 | 0,82 | 0,92 | 0,98 | 1,00 |

Note-se que, fazendo k=m nesta expressão, obtemos a do 1º caso.

Como se pode observar, mesmo que um dos espiões seja extremamente impaciente, isto é, não espere pelo outro, existe sempre probabilidade de se encontrarem desde que o outro espião seja um bocadinho menos impaciente. Por exemplo, quando B não espera por ninguém mas A espera 0,4 h (24 minutos), a probabilidade de se encontrarem é de 32%.

**3º** - Probabilidade de dois espiões se encontrarem no decorrer de um intervalo de tempo de n horas, sabendo que cada um espera pelo outro k e m horas, respectivamente, com $k, m \leq n$.

O raciocínio é idêntico ao do caso anterior e a fórmula a aplicar é a mesma desde que se substitua k e m por k/n e m/n, respectivamente. Isto é, nas condições do problema, o intervalo [0;n], com tempos de espera k e m, é equivalente ao intervalo [0;1] com tempos de espera k/m e m/n. A fórmula obtida será

$$P = \frac{k+m}{n} - \frac{k^2+m^2}{2n^2}$$

Claro que fazendo n = 1 vamos obter a expressão do 2º caso.

**4º** - Probabilidade de r espiões se encontrarem no decorrer de um intervalo de tempo de n horas, sabendo que cada um espera k horas pelos outros, com $k \leq n$ (para não complicar mais, não estudamos o caso em que os tempos de espera são diferentes).

Vamos considerar primeiro o caso em que o intervalo de tempo durante o qual o encontro se pode dar é de 1 hora. Seguindo o mesmo tipo de raciocínio do 1º caso, podemos escrever:

$$P=\int_0^k (t+k)^{r-1}dt+\int_k^{1-k}(2k)^{r-1}dt+ \\ +\int_{1-k}^{1}(1-t+k)^{r-1}dt$$

Efectuando os cálculos e generalizando para o caso em que o intervalo de tempo tem a dimensão n, tal como fizemos no 3º caso, isto é, substituindo k por k/n e m por m/n, chegamos finalmente à expressão:

$$P = \frac{2k^r}{m^r}(2^r-1)+\frac{2^{r-1}k^{r-1}}{n^{r-1}}\left(1-\frac{2k}{n}\right)$$

Se, na expressão anterior, substituirmos r por 2 (apenas dois espiões) e n por 1 (intervalo de uma hora para o encontro), vamos obter $P = 2k - k^2$, que é a expressão que encontrámos no 1º caso.

Vou tecer alguns comentários acerca da expressão obtida para este caso:

a) Quaisquer que sejam os valores de k e n (desde que $n \neq 0$), a fórmula conduz a P=1 se r=1. Isto quer dizer que, se houver um só espião, ele se encontra sempre consigo próprio qualquer que seja o seu tempo de espera (inclusive um tempo de espera nulo), o que está de acordo com o esperado!

b) Vamos também examinar um caso semelhante ao do enunciado original do problema, mas com a diferença de, em vez de dois, existirem r espiões. Isto é, vou aplicar a fórmula anterior para o caso de n=1 e k=0,25, o que conduz à expressão:

$$P = \frac{1}{2^{r-1}r}\left(1-\frac{1}{2^r}+\frac{r}{2}\right)$$

Fazendo os cálculos para os possíveis valores de r, obtemos a tabela:

| Espiões (r) | Probabilidade |
|---|---|
| 1 | 1,000 |
| 2 | 0,438 |
| 3 | 0,198 |
| 4 | 0,092 |
| 5 | 0,043 |
| 6 | 0,021 |
| 7 | 0,010 |

Como se pode observar, a probabilidade de haver encontro diminui à medida que aumenta o número de espiões. Para o caso que estamos a estudar, podemos confirmar que para r=1 vem P=1 e para r=2 vem P=0,438 que é a solução do problema original. No caso de termos 7 espiões, a probabilidade de todos se encontrarem é de apenas 1%. Se os espiões fossem 20, a probabilidade desceria para 0,002%.

**5º** - Probabilidade dos espiões se encontrarem em qualquer dos casos anteriores, mas em que o número de dias s para o possível encontro é variável.

Por outras palavras, vamos considerar o caso em que os espiões fazem o seguinte acordo: se não nos encontrarmos no primeiro dia, durante o intervalo de tempo previsto e esperando o tempo combinado, voltaremos no dia seguinte nas mesmas condições, e assim sucessivamente até se efectuar o encontro.

Se representarmos por P a probabilidade de o encontro se efectuar no primeiro dia, 1 - P representa a probabilidade de o encontro não se efectuar nesse dia. A probabilidade de o encontro não se efectuar nem no primeiro nem no segundo dia será (1 - P)(1 - P). Ao fim de s dias, a probabilidade de o encontro não se ter ainda verificado é dada por $(1 - P)^s$. Logo a probabilidade de o encontro se efectuar até ao s-ésimo dia será dada por:

$$P_s = 1-(1-P)^s$$

Vou tecer alguns comentários acerca desta expressão.

a) Quaisquer que sejam os valores de P, a expressão conduz a $P_s = 0$ se s = 0. Isto apenas quer dizer que, se os espiões não comparecerem a nenhum encontro de certeza que não se encontram, o que está de acordo com o esperado!

b) Quaisquer que sejam os valores de P (desde que $P \neq 0$), o $\lim P_s = 1$ quando s tende para infinito. Por outras palavras, por mais pequena que seja a probabilidade de encontro (mas $\neq 0$), o encontro acabará por se efectuar desde que o número de tentativas de encontro seja suficientemente grande, o que também está de acordo com o esperado!

c) Consideremos em terceiro lugar o

caso inicial dos nossos dois espiões que combinaram encontrar-se entre o meio-dia e a uma hora da tarde, com tempo de espera máximo de 15 minutos, e que, adicionalmente, combinaram voltar ao local até se encontrarem. Neste caso particular, a expressão toma a forma

$$P = 1 - (9/16)^s$$

Representando $P_s$ em função de s, obtemos a tabela:

| Dias (s) | $P_s$ | Dias | $P_s$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 4 | 0,900 |
| 1 | 0,438 | 5 | 0,944 |
| 2 | 0,684 | 6 | 0,969 |
| 3 | 0,822 | 7 | 0,982 |

Vamos interpretar os resultados.

Para s = 0 temos P = 0, concordante com o anteriormente referido. Para s = 1 obtemos P = 0,438, solução do problema original. Ao fim de uma semana de encontros marcados, a probabilidade de os 2 espiões se encontrarem já é superior a 98%. Se não se encontrarem durante estas tentativas ou têm muito azar ou é caso para começarem a desconfiar. O valor da probabilidade de se encontrarem ao fim de duas semanas sobe para mais de 99,9%. Nesse caso não há azar que resista! Se não se encontrarem é porque algum deles foi preso pela contra-espionagem!

d) Vamos finalmente explorar um pouco mais a expressão do 5° caso. Consideremos dois espiões muito impacientes que só esperam um minuto um pelo outro. A probabilidade de se encontrarem numa única tentativa de encontro é bastante baixa (3%). No entanto, se tentarem durante um mês, essa probabilidade sobe para 64% e ao fim de um ano encontram-se quase de certeza (P=99,999%). Mesmo se fossem extremamente impacientes (por exemplo, com um tempo de espera de apenas um segundo), ao fim de 20 anos tinham grandes probabilidades de já se terem encontrado (P=98%).

Alberto Canelas

# Primeiro Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática

Organizado pelo Seminário Nacional da História da Matemática, da Sociedade Portuguesa de Matemática, vai realizar-se o 1° Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, em Coimbra, nas instalações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, de 31 de Agosto a 3 de Setembro de 1993. Este Encontro é apoiado pela Associação de Professores de Matemática e pelos Departamentos de Matemática da Universidade de Coimbra e da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Os dois primeiros dias são destinados a conferências por investigadores brasileiros e portugueses, e os dois últimos a mini-cursos simultaneos de 10 horas. No fim de cada um dos dois primeiros dias realizar-se-ão mesas redondas, a primeira sobre "A História da Matemática no Ensino de Matemática" e a segunda sobre "Cooperação Luso-Brasileira em História da Matemática".

Do programa provisório constam as seguintes conferências: *A institucionalização da pesquisa matemática no Brasil, nos últimos 60 anos* (Ubiratan D'Ambrósio, Campinas), *A Matemática na Universidade de Coimbra de 1537 a 1771* (João Filipe Queiró, Coimbra), *José Anastácio da Cunha e a crise ideológica portuguesa dos fins do século XVIII* (Graça Silva Dias, Lisboa), *A teoria das paralelas segundo Euclides* (Rubens Gouvêa Lintz, São Paulo/Ontário), *Sobre a obra de J. Vicente Gonçalves* (José João Dionísio, Lisboa), *De Euler a La Condomine — da Matemática à História Natural da Amazónia* (Guilherme de la Penha, Belém), *Notas sobre o Ensino da Aritmética em Portugal* (Rogério Fernandes, Lisboa), *A epistemologia dos números complexos na Didáctica da Matemática* (Niltze Almeida, São Paulo), *A aritmética comercial na época dos Descobrimentos* (António Marques de Almeida, Lisboa), *A "Matemática-Materna" de algumas tribos indígenas brasileiras* (Eduardo Sebastiani Ferreira, Campinas), *Rudolfo Guimarães e "Les Mathématiques au Portugal"* (Luis Saraiva, Lisboa), *O desenvolvimento da Matemática no Brasil na século XIX e o positivismo de Conte* (Circe Mary da Silva, Caxias do Sul), *A Matemática no Brasil: seu desenvolvimento a partir de 1810* (Clóvis Pereira da Silva, Paraná), *Uma solução de Fermat para um problema de Frénicle* (José Morgado, Porto), *A difícil fundamentação dos números negativos na primeira metade do século XIX* (Fernando Raul Neto, Pernambuco), *Uma obra inédita de José Anastácio da Cunha: O "Ensaio das Minas"* (Maria Fernanda Estrada, Braga), *A divulgação da Matemática através das Enciclopédias Universais* (Sérgio Nobre, São Paulo/Leipzig).

Os mini-cursos até agora previstos são os seguintes:

Clóvis Pereira da Silva (Paraná) — *História do desenvolvimento da Matemática no Brasil*

Eduardo Sebastiani Ferreira (Campinas) — *O uso da História da Matemática no Ensino*

Carlos Sá (Porto) — *História da Geometria Projectiva*

Luis Saraiva (Lisboa) — *História da Astronomia Grega*

**Preços de inscrição:**

Encontro (dias 31 de Agosto e 1 de Setembro): Sócios da SPM ou da APM— 1000$00; não sócios —1400$00.

Mini-cursos (dias 2 e 3 de Setembro): Sócios da SPM ou da APM —4000$00; não sócios — 4800$00.

Fichas de inscrição encontram-se na sede da APM, bem como uma lista de alojamentos recomendados pela Comissão Organizadora.

**As inscrições terminam a 29 de Julho. Existem pré-inscrições nos cursos, devendo indicar-se uma ordem de preferência, pois o número de participantes é limitado.** Enviar as inscrições para:

I Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3000 Coimbra.

# Tudo o que há num cubo...

Eduardo Veloso

Pedro, aluno do 7º ano do currículo experimental $MAT_{789}$, dizia que o que gostava na geometria era "ver tudo o que há num sólido". Referia-se assim às explorações que tinha feito com cubos, tetraedros e outros poliedros. Será que já vimos *tudo o que há num cubo*?

A geometria ocupa de novo um lugar de relevo nos programas de Matemática. No entanto, se bem compreendo o que os autores do programa pretendem, não se trata de um regresso ao passado, à interminável lista de postulados, teoremas, lemas, corolários e escólios com que se

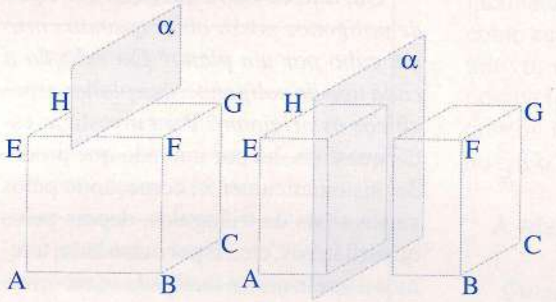



figura 1

pretendia, desastradamente, levar os alunos a penetrar nas belezas do raciocínio dedutivo! Em lugar disso, outros modos de abordar o ensino da geometria têm sido propostos, dando um papel preponderante, por exemplo, às actividades de visualização e às conexões da geometria com outros temas da Matemática.

A geometria no espaço tridimensional deverá também ser privilegiada, com a inclusão de propostas envolvendo a utilização de materiais manipuláveis, a planificação e a construção de modelos, e a compreensão e aprendizagem das representações no plano de objectos a três dimensões.

Um dos sólidos mais simples e mais conhecido, supostamente, é o cubo, o qual pode constituir um ponto de partida excelente para explorações interessantes, pondo em jogo diversas actividades dos tipos que acabámos de referir. Neste artigo serão apresentadas algumas propostas de trabalho para alunos de diversos níveis de escolaridade. A primeira fez parte do currículo experimental do projecto $MAT_{789}$.

## Cortar um cubo ao meio

*De quantas maneiras diferentes se pode cortar, com um plano, um cubo ao meio*? O mais interessante nesta actividade é talvez a forma *nebulosa* como ela está enunciada e daí as estimulantes discussões a que dá lugar... O que é *cortar ao meio*? A princípio podemos ser levados a considerar que "ao meio" significa em duas partes simétricas, como por exemplo no caso dos planos $\alpha$ (fig. 1) e $\beta$ (fig. 2). Mas, reflectindo um pouco, podemos pensar que ao meio significa "em duas partes iguais" e então o plano $\gamma$ também serve (fig. 3). E o que são *maneiras diferentes*? No primeiro significado de "cortar ao meio", poderíamos

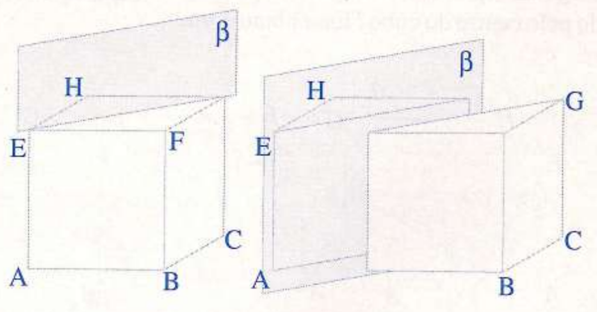



figura 2

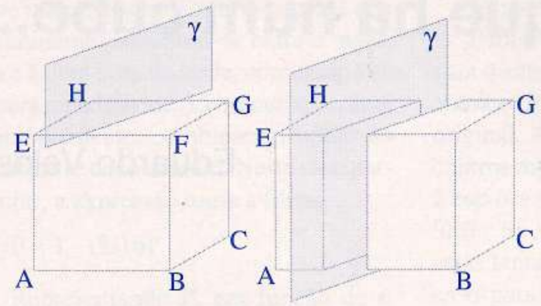



figura 3

considerar que haveria três modos diferentes com planos tipo $\alpha$ (correspondentes às faces *EFGH*, *FBCG* e *ABFE*) e seis modos diferentes com planos tipo $\beta$ (correspondendo aos seis pares possí-

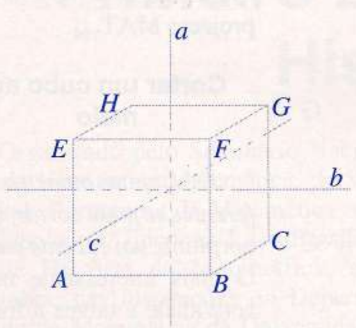



figura 4

veis de arestas opostas). Mas, se $\gamma$ também corta ao meio, então começamos talvez a pensar que os planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são afinal do mesmo tipo... contêm todos a recta *a*, perpendicular à face *EFGH* e passando pelo seu centro (ver fig. 4). E assim haveria três tipos de cortes, correspondendo respectivamente a planos contendo as rectas *a*, *b* e *c*. Mas que dizer de um plano perpendicular à diagonal espacial do cubo, *FD*, e passando pelo centro do cubo? Esse plano corta

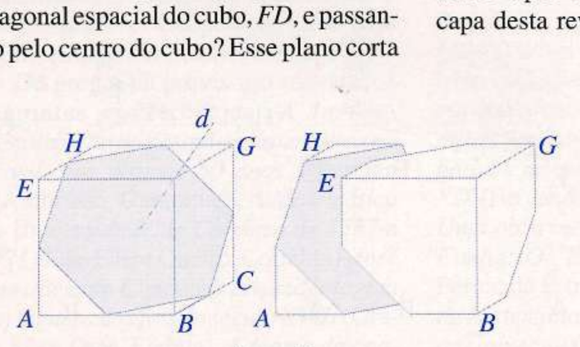


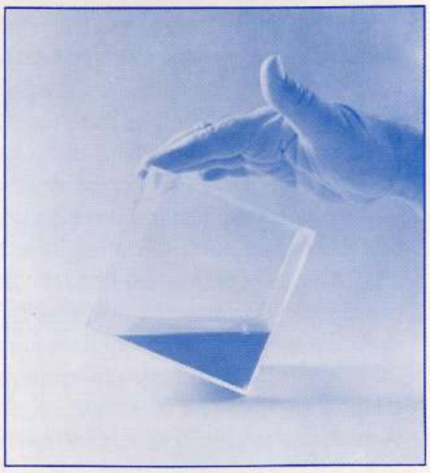

figura 5

o cubo segundo um hexágono regular (visível na capa desta revista) e divide-o em duas partes geometricamente iguais (ver fig. 5). E não é de nenhum dos tipos anteriores! E não acontecerá o mesmo — divisão do cubo em duas partes geometricamente iguais — para todo o plano passando pelo centro do cubo? Decididamente, esta exploração não vai acabar mais...

### Que polígonos *há* num cubo?

Ou, dito de outra maneira: *que tipos de polígonos posso obter quando corto um cubo por um plano? Em relação a cada tipo de polígonos, que planos específicos os originam?* Para investigar estas questões, há por um lado que proceder sistematicamente, começando pelos vários tipos de triângulos, depois pelos quadriláteros, etc.. E por outro lado, teremos a tarefa muito facilitada se recorrermos a algum tipo de material manipulável. Um "esqueleto de cubo" (cubo formado pelas arestas), como diziam os alunos do $MAT_{789}$, e elásticos de cor ou uma simples linha de coser são suficientes. Um material interessante mas um pouco mais caro consiste em cubos com as faces em acrílico e um dos cantos cortado. Este canto destina-se a permitir encher parcialmente o cubo com um líquido colorido, de modo a que a sua superfície defina, conforme a posição do cubo em relação ao plano horizontal, os vários tipos de polígonos de corte (ver capa desta revista). O líquido pode ser simplesmente água colorida com uma pequena diluição de Écoline, uma aguarela líquida que se vende nas lojas de produtos para belas artes[1].

A tabela da página seguinte apresenta alguns resultados desta investigação.



Margarida Dias

Quando o plano de corte é paralelo a uma aresta, como neste caso, a secção é um rectângulo. Como se indica no texto, para certos volumes de líquido e certas inclinações do cubo, a secção é exactamente um quadrado.

Como podem chegar os alunos (e nós) a estes resultados? Manipulando, visualizando, conjecturando, argumentando, inventando contra-exemplos, recorrendo à intuição espacial. Quanto a demonstrações, deve dizer-se que provar, com um mínimo de rigor, muitos destes resultados, não é tarefa fácil. Podem-se dar algumas justificações parciais, apoiadas sobretudo na intuição, e isso já é importante. Mas a demonstração completa de muitos deles exige algumas horas e várias páginas escritas. Por isso é tarefa que está para além do que se pretende dos alunos em geometria, mesmo no ensino secundário.

*Investiguemos em particular o caso interessante dos cortes que dão quadrados.* Um caso evidente é o dos planos paralelos a uma face — se deitarmos um pouco de líquido no cubo, e assentarmos uma sua face sobre uma mesa horizontal, logo vemos surgir um quadrado. Mas existem outros planos que também dão quadrados. Para o reconhecermos, deitemos um pouco de líquido, não muito, no cubo, e assentemos uma das arestas na mesa horizontal. Inclinando o cubo para um ou outro lado, sempre com a aresta sobre a mesa, conseguimos *em geral* obter um quadrado, com uma inclinação conveniente. Digo em geral porque isso

### Polígonos que resultam de cortes planos num cubo

| polígonos | propriedades dos planos |
|---|---|
| triângulos | cortando apenas três faces do cubo |
| triângulos equiláteros | perpendiculares a uma diagonal espacial do cubo |
| triângulos isósceles | paralelos a uma diagonal facial do cubo |
| triângulos escalenos | nem perpendiculares a qualquer diagonal espacial nem a qualquer diagonal facial |
| quadriláteros | cortando exactamente quatro faces |
| trapézios isósceles | paralelos a uma diagonal facial |
| trapézios rectângulos | não existem, a não ser dando rectângulos |
| paralelogramos | cortando dois pares de faces opostas |
| rectângulos | paralelos a uma aresta |
| quadrados | ver texto |
| pentágonos | cortando exactamente 5 faces |
| hexágonos | cortando seis faces |
| hexágonos regulares | perpendiculares a uma diagonal espacial, cortando as arestas nos pontos médios |

só é possível para certas quantidades de líquido, e não para outras!

Observe-se a fig. 6, em que se representa a face $ABCD$ de frente, com a aresta $CG$ apoiada na mesa, e com diferentes quantidades de líquido. O ângulo $\phi$ define a posição do cubo em relação à mesa horizontal. É intuitivo que a superfície do líquido, nestas condições, é sempre um rectângulo. Um dos lados do rectângulo é igual à aresta $l$ do cubo, seja qual for a quantidade de líquido. O outro, representado pelo segmento $PQ$, é inferior a $l$ para pequenas quantidades de líquido (fig. 6A), mas quando essa quantidade aumenta suficientemente, é superior a $l$ (fig. 6C). Então, numa posição intermédia (fig. 6B), obteremos um quadrado. O volume de líquido para obter um quadrado é função do ângulo $\phi$, quando este varia no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Notando que o ângulo $QPC = \phi - \frac{\pi}{4}$ e que o volume $v$ do líquido é o de um prisma recto de base triangular $PQC$ e altura igual a $l$, teremos $v = \frac{l^3}{2} cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) . sen\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$, para $\phi \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

O volume máximo obtém-se quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, ou seja quando as arestas $CG$ e $AE$ estão no mesmo plano vertical. O volume de líquido nesse caso será igual a $\frac{l^3}{4}$. Vemos assim que para um volume de líquido inferior a um quarto do volume do cubo podemos obter, com uma aresta assente na mesa horizontal e uma inclinação conveniente, um quadrado como superfície do líquido. Como é intuitivo, também o mesmo resultado é possível com volumes de líquido superiores ou iguais a três quartos do volume do cubo.

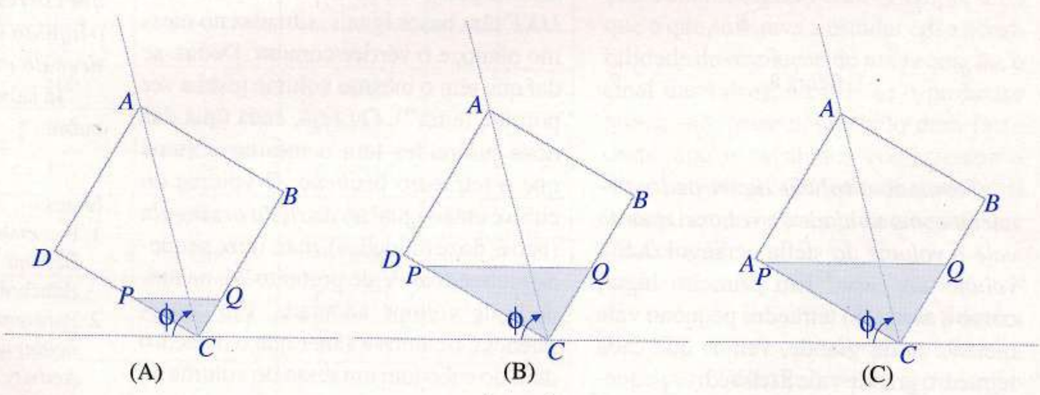


figura 6

### A *stella octangula*[2] de Kepler

*Como poderemos inscrever um tetraedro regular num cubo*? "Inscrever" significa aqui que os 4 vértices do tetraedro coincidirão com vértices do cubo. Na fig. 7 os vértices $A$, $C$, $H$ e $F$ definem um tetraedro regular, representado a sombreado. Dos oito vértices do cuba sobram quatro, com os quais podemos formar outro tetraedro regular igual ao primeiro, e que o cruza. O conjunto dos dois tetraedros foi estudado pelo frade e matemático Luca Pacioli, autor de uma célebre álgebra (a primeira impressa) do início do Renascimento, a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni e proportionalita*, publicada em 1487. Ao par de tetraedros deu Pacioli o nome de *octaedrum elevatum*, por razões que veremos em breve. Um século

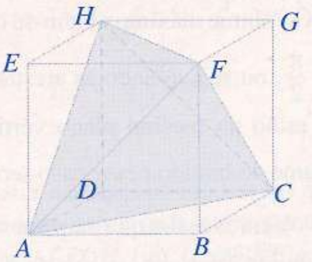



figura 7

mais tarde, Kepler também estudou o conjunto dos dois tetraedros, agora com o nome de *stella octangula*. Na fig. 8 está representada a *stella octangula*. É relativamente fácil ver (quer o leitor tentar?) que cada uma das pequenas pirâmides triangulares, de que *IJKF* é um exemplo, é também um tetraedro regular, cuja aresta tem por comprimento metade da diagonal da face do cubo. Referiremos o teraedro *IJKF* como tetraedro pequeno, e o tetraedro inscrito no cubo como tetraedro grande, no que se segue.

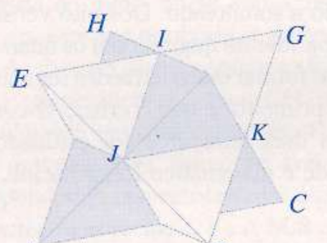
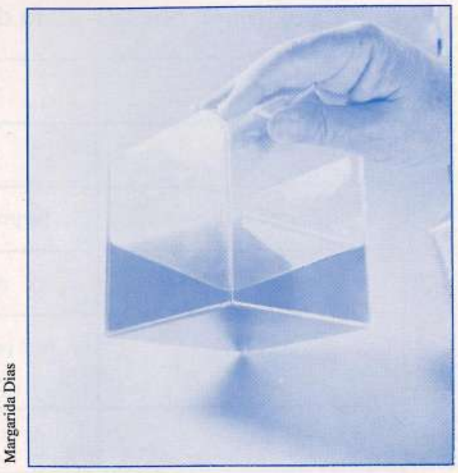



figura 8

*Tomando o volume do tetraedro pequeno como unidade de volume, quanto vale o volume da* stella octangula*? E o volume do cubo*? Em primeiro lugar, como a aresta do tetraedro pequeno vale metade da do grande, vemos que cada tetraedro grande vale 8 tetraedros pequenos (dois tetraedros regulares são sempre semelhantes...). Podemos também ver que a intersecção dos dois tetraedros grandes é um octaedro, pois é claramente um sólido com oito faces triângulos equiláteros. De resto, não é mais do que o poliedro dual do cubo, cujas arestas se obtêm unindo por segmentos os centros das faces do cubo (ver fig. 9). Portanto, um tetraedro grande é formado por um octaedro e por quatro tetraedros pequenos. Como o volume do tetraedro grande vale oito pequenos, concluímos que o octaedro vale quatro tetraedros pequenos. Mas, por outro lado, a *stella octangula* pode considerar-se um octaedro a que se colaram oito pequenos tetraedros, um em cada face (daí o nome de *octaedrum elevatum*, de Pacioli). Assim, o volume da *stella* vale 4+8=12 tetraedros pequenos.

figura 9

Quanto ao cubo, se pensarmos na *stella octangula* nele inscrita, vemos que o espaço do cubo não ocupado pela *stella* é formado por 12 pirâmides — uma por cada aresta do cubo. Uma dessas pirâmides tem por base o triângulo *EIJ* e por vértice o ponto *F*. Note-se que o triângulo *EIJ* é igual ao triângulo *IJK* e está no mesmo plano. Então as pirâmides *EIJF* e *IJKF* têm bases iguais, situadas no mesmo plano, e o vértice comum. Deduz-se daí que têm o mesmo volume (está a ver porquê, leitor?). Ou seja, cada uma das doze pirâmides tem o mesmo volume que o tetraedro pequeno. O volume do cubo é então igual ao da *stella octangula* (isto é, doze unidades), mais doze pequenos tetraedros. Vale portanto 24, na unidade de volume adoptada. Em consequência, ficamos a saber que o octaedro dual do cubo tem um sexto do volume do cubo.




Em que condições se obtém um losango, num corte plano de um cubo? O plano tem que cortar, está claro, quatro faces. Tem que cortar duas arestas opostas. E, finalmente, tem que ser paralelo a uma diagonal facial. Este caso não está considerado na tabela de resultados.

## Possíveis extensões

Coloquemos o cubo na posição indicada na fig. 6, com $\phi = \pi/2$. Se enchermos a pouco e pouco o cubo com líquido, e designarmos por $h$ a altura da sua superfície em relação ao tampo da mesa, como são os gráficos das funções que exprimem:

- *a área da superfície do líquido em função de* h?
- *o volume de líquido em função de* h?

Coloquemos agora o cubo assente sobre um dos vértices e com a respectiva diagonal espacial vertical. Como é o

- *gráfico da função que exprime o perímetro do polígono formado pela superfície do líquido, em função de* h?

Relativamente a esta última posição do cubo, *quais são os volumes de líquido que correspondem aos momentos em que o líquido vai atingindo os diferentes vértices do cubo*?

Já saberemos agora *tudo o que há no cubo*...?

Eduardo Veloso

Notas:

1. Um material deste tipo é sugerido no livro *Beyond the Third Dimension*, de Thomas Banchoff, Ed. Scientific American Library.
2. Para outras actividades envolvendo a *stella octangula*, consultar *The Stella Octangula Activity Book*, da *Key Curriculum Press/ Visual Geometry Project*.

# Mais um "caso" com computadores...

Branca Silveira

O caso que vou relatar passou-se numa das sessões de formação para professores de Matemática, realizada no âmbito do Projecto Minerva.

A sessão era de formação técnica em folha de cálculo e os objectivos eram essencialmente o uso de fórmulas e a utilização de funções específicas da folha.

Como tem sido habitual, procuramos fazer a formação técnica integrada na formação pedagógica e, como tal, a maior parte das actividades propostas tem por base temas de Matemática e de preferência temas curriculares.

Nesta sessão, uma das actividades propostas era a construção de um modelo na folha de cálculo que permitisse fazer o estudo das equações do 2º grau.

A actividade não tinha dificuldades técnicas, era apenas de aplicação, mas queríamos com ela sugerir um tema de discussão sobre estratégias de aplicação na sala de aula, isto é, pensarmos no que seria possível explorar com uma actividade tão simples como esta, e reflectirmos sobre o modo de fazer essa exploração.

Aconteceu então que um dos grupos resolveu introduzir, como dados dos coeficientes de uma equação, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$. Seguidamente em vez de atribuirem valores ao acaso resolveram (utilizando o comando *Fill Down)* ir variando $a$ de 2 em 2, $c$ de -2 em -2 e manter o $b$ constante [ver tabela abaixo].

Resultado: em todos os casos as equações tinham uma raiz igual a 1. Procuraram regularidades e relações na tabela, verificaram que em cada caso o discriminante era um quadrado perfeito, que a soma de $a$ com $c$ era o simétrico de $b$, etc... Então começaram a partir daí a fazer conjecturas. Pensaram em várias hipóteses que foram testando, como por exemplo conservar a série de valores de $a$ e $c$ e substituir apenas o $b$ por -5. Claro que neste caso os resultados foram diferentes, então substituiram os valores de $a$ e de $c$ de modo que a sua soma fosse sempre 5. Novamente obtiveram em todos os casos uma raiz igual a 1.

| $a$ | $b$ | $c$ | $b^2-4ac$ | $\sqrt{b^2-4ac}$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | -4 | 1 | 4 | 2 | 0,33333 | 1 |
| 5 | -4 | -1 | 36 | 6 | -0,2 | 1 |
| 7 | -4 | -3 | 100 | 10 | -0,42857 | 1 |
| 9 | -4 | -5 | 196 | 14 | -0,55556 | 1 |
| 11 | -4 | -7 | 324 | 18 | -0,63636 | 1 |
| 13 | -4 | -9 | 484 | 22 | -0,69231 | 1 |
| 15 | -4 | -11 | 676 | 26 | -0,73333 | 1 |
| 17 | -4 | -13 | 900 | 30 | -0,76471 | 1 |
| 19 | -4 | -15 | 1156 | 34 | -0,78947 | 1 |
| ... | ... | | | | | |

Foram considerados vários casos (e naturalmente as restantes actividades ficaram esquecidas nesta sessão) e o resultado era sempre o mesmo. Então havia que pensar no porquê, que ficou para "TPC" pois a sessão acabou e de tarde as colegas tinham aulas.

Claro que a razão disto acontecer é extremamente simples de demonstrar, acontece sempre que $a+b+c = 0$, para quaisquer valores de $a$, $b$ e $c$, mas não é isso que está em causa neste momento. O que eu achei interessante foi o caminho seguido pelo grupo. Normalmente, quando surge algo que não se espera, é habitual, logo á partida, pegar num lápis e num papel e tentar uma demonstração. Aqui não. Foi seguido um processo experimental, foram elaboradas conjecturas, fizeram-se simulações para testar essas conjecturas e a teoria ficou para depois.

Isto levou-nos mais uma vez a colocar algumas das interrogações já clássicas, como por exemplo: Sem a folha de cálculo o problema surgia? Será que o trabalho com o computador modificou a atitude do professor? E se isto acontecesse numa aula? Será que o professor deixava os alunos seguirem a investigação ou, preocupado com o tempo, diria que o que se estava a estudar era a possibilidade de resolução de uma equação, o sinal das raízes, etc.? E se o professor nunca se tivesse apercebido dum facto deste tipo e os alunos começassem a fazer perguntas? Que atitude tomaria? E se essa turma fosse a sua e esse professor fosse você?

Branca Silveira
Projecto Minerva
Pólo do Instituto Politécnico do Porto

# Impressões de uma visita

António Sá

O grupo de trabalho *Clubes de Matemática,* da A.P.M. (Porto), organizou entre os dias 24 de Abril e 10 de Maio uma exposição no Mercado Ferreira Borges, subordinada ao tema "Explorar, Jogar, Descobrir — a Matemática ao alcance de todos"*.

A exposição foi estruturada segundo os seguintes blocos temáticos:

1 - Marcos da Matemática;
2 - O número;
3 - O Infinito;
4 - Sorte ou saber?;
5 - Sondagens;
6 - O teorema de Pitágoras;
7 - Curvas e superfícies;
8 - Reflectir, rodar e ampliar;
9 - Pavimentações;
10 - Geometria da distorção;
11 - Redes e caminhos;
12 - Caos;
13 - Fractais;
14 - Geometrias;
15 - A medida;
16 - Jogos e desafios;
17 - Nem tudo o que parece é;
18 - A Matemática e a Arte;
19 - Bricolage Matemático.

Uma ideia, uma exposição, a matemática nos fins deste século, uma ilha por descobrir no nosso Portugal. Muitos "marinheiros" desconfiados e surpresos acabaram por encontrar uma ilha habitada por histórias, imagens e objectos, afinal conhecidos, mas que transmitiam algo de mágico, prazer e vontade de realizar novas experiências.

Ao longo de 15 dias cerca de 18000 pessoas, na sua maioria jovens entre os 10 e 15 anos, visitaram a exposição e encontraram nela uma oportunidade de olhar a matemática com outros olhos. Uma iniciativa que pretendeu uma aproximação até ao infinito entre o céptico e a matemática.

A velha história dos números, as mãos que contam, os símbolos de civilizações antigas, números representados por pirâ-

Ao longo de 15 dias cerca de 18000 pessoas, na sua maioria jovens entre os 10 e 15 anos, visitaram a exposição "Explorar, Jogar, Descobrir — a Matemática ao alcance de todos" e encontraram nela uma oportunidade de olhar a matemática com outros olhos.

mides de bolas, o ábaco, conduziam o visitante no passado. Através de um corredor de espelhos iniciava a sua visita até ao infinito, e numa surpreendente caixa cabiam todas as rosas que podíamos imaginar.

A sorte e o azar podiam ser postos à prova com jogos, roletas, *flippers*. E o "velho Pitágoras" era dissecado num *puzzle* e pesado.

Mas novas experiências esperavam o visitante: brincar com os espelhos, rodá-los e escrever palavras fê-lo entrar no país de Alice. Curvas e superfícies e apostas na bola que chegaria em primeiro lugar deixavam-no incrédulo. Desorientado, o visitante encontrava nas pavimentações o descanso desejado. Triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos coloridos libertavam a sua imaginação. Quadrados e hexágonos surgiam de animais e peças decorativas. E os caleidoscópios embriagavam os olhos de imagens. Quem diria que naquela ilha deserta se pavimentavam estrados com figuras nunca vistas?

E a viagem continuava através da célebre Fita de Mœbius, e por redes e caminhos com novos desafios desembocava num labirinto.

Desesperado e perdido, o visitante era surpreendido por movimentos estranhos de um pêndulo e a água fresca de uma azenha que não se cansava de girar lançando-o no mundo da medida. Ângulos divertidos, áreas e volumes misteriosos, instrumentos de medida e pesagem permitiam o visitante reflectir se as suas forças seriam suficientes para continuar viagem.

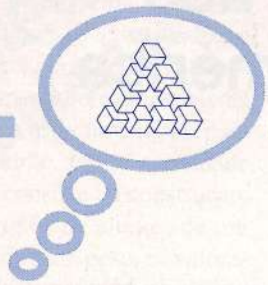
Depois de uma breve passagem pelo mundo estranho dos fractais, era a vez de experimentar a alegria do fim de uma viagem. Explorar e descobrir o mundo inesgotável dos jogos e dos *puzzles*, descobrir o enigma de um duplo cone que em vez de descer subia, de uma imagem que dava a ideia de ser outra, o teatro matemático do que nem tudo o que parece é.

Em fim de viagem ainda era permitido ao visitante brincar com o papel e fazer nascer dele novas formas geométricas.

E a visita terminava com a arte e a matemática.

António Sá
Esc. Sec. da Areosa

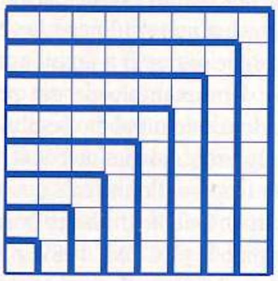
* Comissão organizadora: António Sá, Aurélio Sousa, Fátima Palermo Faria, Fernanda Resende, Graça Zenhas, Judite Gonzalez, Lícinia Brandão Costa, Margarida Faria, Maria Augusta Lima.



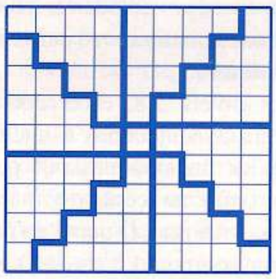
# Pense nisto

## *Proof by looking*

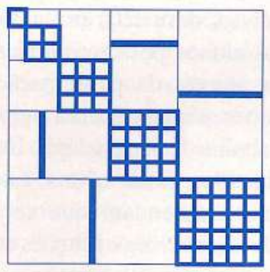
Folheava um livro sobre tópicos de Geometria* quando reparei na expressão *proof by looking*. Lembrei-me do último "Pense nisto" e nas questões levantadas sobre eventuais demonstrações geométricas de resultados numéricos. As três figuras eram apresentadas como "prova" de três resultados numéricos:



A soma dos primeiros $n$ ímpares é $N^2$.



Se $T_n$ é o n-ésimo número singular, então $8T_n + 1 = (2n+1)^2$.



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... = (1+2+3+4+5+...)^2$$

Qual o raciocínio utilizado em cada situação?
Considerei curiosos estes três exemplos.
A questão continua: Terão validade estas "demonstrações"? Pense nisto...

Paulo Alvega

* *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, por David Wells. Penguin Books (1991)

# Reformas em curso nos Estados Unidos da América

Maria L. Fernandez

*O Dossier Internacional, sobre movimentos de reforma curricular no ensino da Matemática em diversos países, é retomado neste número com a tradução de um artigo original, da autoria de Maria L. Fernandez e referente ao caso dos Estados Unidos da América.*

As reformas actuais da Matemática escolar nos Estados Unidos parecem focar-se na *alfabetização matemática* dos estudantes num mundo de constantes desenvolvimentos tecnológicos e de crescimento matemático em diversos campos. Tipicamente estas reformas encaram os alunos como estudantes activos em ambientes matemáticos desenvolvidos. O objectivo principal é que os alunos aprendam a comunicar matematicamente e consigam resolver problemas matemáticos. As raízes destas reformas podem ser vistas em "An Agenda for action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's", um documento publicado em 1980 pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Este documento foi escrito para dar resposta a uma crescente necessidade de directrizes na Educação Matemática durante a década de 70.

Um importante impulso na reforma da Matemática escolar actual aconteceu com o "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" (Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar) publicado pelo NCTM em 1989. As *Normas* são encaradas frequentemente como uma visão para a Matemática escolar. Elas indicam critérios pelos quais professores, directores regionais, governos e outros podem julgar as suas decisões sobre o currículo e a avaliação (NCTM,1989). Outro documento semelhante neste aspecto mas com uma leitura mais centralizada é o "Mathematics Framework for California Public School" (Estrutura Matemática para o ensino oficial na Califórnia), publicado pelo *California State Department of Education* (1985, 1990) e que designaremos de modo abreviado por *Framework.* Ambos os documentos valorizam o envolvimento dos estudantes no processo de aprendizagem através da utilização de materiais manipuláveis, calculadoras e computadores, trabalho de grupo e resolução de problemas. Eles dão exemplos de como incorporar estas ideias nas aulas incluindo problemas, actividades, projectos, e ideias para unidades temáticas.

Nos níveis K-4, as *Normas* e o *Framework* desvalorizam os actuais currículos que frequentemente ainda se concentram em exercícios rotineiros e memorização de regras através de fichas de trabalho e de ensino expositivo durante o qual "as crianças começam a deixar de acreditar que aprender matemática é uma experiência que faz sentido (e) tornam-se aprendizes passivos em vez de participantes activos que criam conhecimento" (NCTM, 1989, p. 15).

No que diz respeito aos conteúdos nos níveis K-4, ambos os documentos apelam a uma crescente atenção às Probabilidades e Estatística, aos padrões e relações, ao sentido numérico e espacial, e à estimação. O *Framework* acrescenta ainda a Lógica. Uma actividade que engloba algumas destas ideias é o "Dia da Estimação" em toda a escola, durante o qual os alunos, trabalhando em grupos, preparam actividades de estimação para serem realizadas por alunos de outras turmas, tais como: estimar as alturas dos alunos ou estimar o número de vezes que se consegue escrever o nosso nome num minuto. Um exemplo de um problema adequado a este nível é o seguinte : "Eu tenho algumas moedas de 5$00, 10$00 e 20$00 no bolso. Ponho três dessas moedas na mão. Quanto dinheiro posso ter na minha mão?" (NCTM, 1989, p. 24). Os alunos podem resolver este problema usando moedas verdadeiras ou uma estratégia de tentativa-erro para resolução de problemas.

Nos níveis 5-8, estes documentos destacam a conjectura, a análise e as aplicações matemáticas por parte dos alunos tanto no contexto matemático como na vida real. O papel do professor deve ser sobretudo o de facilitar o conhecimento em vez de o "distribuir"; além disso, deve criar um ambiente no qual os alunos possam aprender Matemática através da participação activa, dando menos importância à memorização e ao trabalho de papel e lápis. Em termos de conteúdos nestes níveis, estes documentos recomendam que se dê mais atenção aos padrões e funções utilizando relações funcionais, assim como tabelas, gráficos, regras, e outras representações que descrevam situações matemáticas. Por exemplo, o problema seguinte pode ser explorado através de diferentes processos:"Quantos apertos de mão podem ser dados numa festa em que cada um dos 15 convidados aperta a mão a cada um dos outros?" (NCTM, 1989, p.77).

Os alunos podem representar o problema, desenhando um esquema, utilizando pontos para indicar os convidados e segmentos de recta para indicar os apertos de mão, ou começar com um problema mais simples e construir uma tabela para encontrar um padrão. Outra actividade matemática rica consiste na construção, por pequenos grupos de alunos, de um pêndulo com corda e um peso, e exploração do seu funcionamento, formulando questões tais como: Como é que o comprimento da corda afecta a oscilação? Como é que o peso utilizado afecta a oscilação? (NCTM,1989). Os grupos podem partilhar a informação pelo uso de gráficos e tabelas.

Nos níveis 9-12, ambos os documentos apelam ao estabelecimento de um currículo nuclear, diferenciado apenas pela profundidade e desenvolvimento do tratamento de tópicos que reflectem as necessidades de todos os indivíduos vivendo "numa sociedade dominada pela tecnologia e métodos quantitativos" (NCTM,1989, p.123). Referem que cada vez mais se deve dar atenção à inclusão da Estatística, das Probabilidades e da Matemática Discreta, assim como à integração dos diversos temas incluindo Álgebra, Geometria e Trigonometria, em todos os níveis.

O *Framework* salienta ainda a Lógica como parte deste conjunto de temas. Os professores nestes níveis são responsáveis pelo estímulo das capacidades dos alunos no que se refere à investigação e construção de conceitos a partir de novas situações, tanto na Matemática como em contextos da vida real, fornecendo oportunidades para os alunos experimentarem e partilharem ideias numa variedade de métodos de ensino, incluindo pequenos grupos, explorações individuais, discussões com toda a turma e trabalho de projecto. Uma actividade que ilustra estas ideias, integrando Estatística com o estudo de equações, envolve a análise por parte dos estudantes de dados recolhidos pelo método estatístico de ajustamento de curvas. Por exemplo, os alunos podem recolher dados: idades de automóveis e respectiva "quilometragem".

Apesar do *Framework* discutir a avaliação em termos da classificação de soluções e de projectos, a avaliação é tratada de um modo mais profundo nas *Normas*. As *Normas* apelam à valorização daquilo que os alunos sabem como parte integrante do ensino em vez de valorizar o que os alunos não sabem simplesmente com o objectivo de atribuir uma classificação. Também devem ser valorizadas uma visão mais holística da Matemática e uma variedade de métodos que incluam formas escritas, orais e demonstrativas envolvendo tecnologia e materiais manipuláveis apropriados. A avaliação de um programa deve ser realizada através de uma recolha sistemática de dados quanto a resultados, currículo e ensino.

Outros movimentos de reforma envolvem programas e projectos que desenvolvem materiais para a sala de aula, assim como para a formação de professores. O *Projecto de Matemática da Universidade de Chicago* (UCSMP), que começou em 1983, é um dos mais extensivos programas deste tipo. É um ambicioso projecto curricular centrado no "melhoramento da experiência matemática escolar do aluno mediano" (Usiskin,1988, p.3). Consiste em cinco componentes cada uma das quais desenvolvendo actividades específicas: a Componente de Materiais Básicos está a desenvolver materiais para alunos nos níveis K-3 ; a Componente de Desenvolvimento do Professor do Ensino Elementar está a elaborar programas para preparar os professores dos níveis K-6 para a mudança curricular; a Componente Secundária está a escrever um currículo matemático de 6 anos para os alunos dos níveis 7-12; a Componente de Desenvolvimento de Recursos está a traduzir materiais de outros países sobre Educação Matemática e a promover a disseminação de informação no estrangeiro; e a Componente de Avaliação está continuamente a examinar a eficácia das outras Componentes.

Os livros de texto do UCSMP e outros materiais curriculares são desenvolvidos para comunicar aos alunos a ideia da importância que a Matemática tem nas suas vidas através da integração de desenvolvimentos recentes da Matemática com as suas aplicações, assim como ensinando aos estudantes como utilizar a Matemática efectivamente. Os materiais em desenvolvimento para o nível básico e os programas elaborados para formar professores do ensino elementar são consistentes com a principal atenção dada pelas *Normas* ao envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem através da sua participação activa. No nível secundário, os livros de texto tentam construir conexões matemáticas entre novos temas e outros previamente estudados. Os exercícios são variados e consistem em aplicações.

Através de programas que começaram nos anos 80, encorajados pela *Agenda Para Acção* e pela adopção do *Framework* e das *Normas*, as reformas estão a começar a emergir nas salas de aula. Por exemplo, no nível elementar há uma crescente ênfase na utilização de materiais manipuláveis e actividades para ensinar Matemática. Os estudantes têm sido confrontados mais frequentemente com o uso dos computadores. Nos níveis médios, muitos programas têm salientado a importância da Álgebra para todos os alunos. No nível secundário, a visão de um currículo nuclear, destacada no *Framework* desde 1985, tem constituído uma alternativa aos cursos gerais de Matemática tradicionalmente ensinados nos níveis 9-12. A reestruturação de livros de texto iniciou-se segundo os critérios do *Framework* e da possível adopção no estado da Califórnia. Com o ímpeto dado pelas *Normas*, as reformas discutidas têm-se tornado mais difundidas.

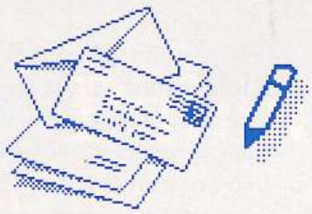
Referências:


California State Department of Education. (1985/1990). *Mathematics framework for California Public Schools*. CSDE.

NCTM (1989). *The curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM. (N.R.— Traduzido em português com o título "Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar", edição da APM/IIE).

NCTM (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980's*. NCTM.

Usiskin, Z. (1988). Texto em *The University of Chicago School Mathematics Project* (p. 3-6), Outono 1988.



# Pontos de vista, reacções, ideias...

*Foi com agrado que começámos a receber cartas de leitores de Educação e Matemática. Reacção aos editoriais apelativos? Sinal de que a revista começa a mobilizar e a provocar a participação? Afinal, e isso é importante para nós, o "feedback" recebido, além de estimulante, pode (deve) ser construtivo. Nesse sentido iniciamos neste número uma secção permanente que incluirá cartas, reacções a artigos publicados ou outros textos curtos expressando pontos de vista dos nossos leitores.*

*O desafio lançado aos leitores, apelando à sua colaboração, nos últimos números, continua.*

### "A revista da APM é nossa!"

Do Brasil, escreveu-nos Maria Claire Ribeiro Pola, professora de Desenho do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Paraná. Leitora de E. M. desde 1990 e sócia da APM, Maria Claire manifesta o seu agrado pelos números da revista: "... temos em nossa Universidade um curso de Especialização onde ensino Geometria. As revistas da APM são amplamente divulgadas... São feitos seminários baseados em artigos da revista, pena que só temos os números que eu tenho..." Maria Claire refere ainda a qualidade dos trabalhos de alunos portugueses relativos às Comemorações dos Descobrimentos e expostos no Quebec. A sua carta termina dirigindo-se ao director de E. M. "... valeu a pena seu 'puxão' de orelhas dos leitores da Revista da APM. Podemos continuar o nosso intercâmbio se você quiser..."

Nota: A Profª Maria Claire Pola enviou-nos o texto de um curso de Geometria Descritiva da sua autoria, que pode ser consultado na sede da APM.

### A organização como facilitadora de uma melhor prática docente

A colega Mª Natividade Luz (E.S. Laranjeiras, Ponta Delgada) escreveu-nos partilhando algumas reflexões sobre formas de organização dos professores, por grupos disciplinares, que permitam trabalhar em equipa, troca de experiências e utilização de material didáctico:

"... 1 - No início do ano lectivo (de preferência antes do começo das aulas), deve fazer-se uma relação das várias tarefas que são necessárias realizar, a nível do grupo disciplinar...;

2 - Os professores do grupo formam equipas de trabalho, constituidas na base dos interesses e aptidões comuns...;

3 - Distribuição pelas equipas das tarefas a realizar, de acordo com os interesses de cada uma;

4 - Calendarização, com a data de conclusão de cada tarefa e consequente apresentação ao grupo disciplinar...;

5 - Criação de um "Laboratório de Matemática" ou "Centro de Recursos para o ensino da Matemática"..., deve-se providenciar que cada turma tenha pelo menos uma aula semanal, no referido Centro..."

### "Sócio nº103"

De Seia, chegou uma carta do colega António Silva Abrantes. É com "orgulho" que se tornou sócio da APM desde a assembleia constituinte de Portalegre, escreve o colega. Refere-se à importância que a APM tem tido para si e descreve a situação no 1º grupo da E.S. de Seia, porventura semelhante à de muitas escolas: "... Parece-me que a sensibilização para a mudança de atitudes dos professores está a dar resultados, começam a ver-se formas diferentes de trabalhar, mas reafirmo que me parece ser falta de professores de Matemática um problema essencial da Educação Matemática.

Em Viseu, comentava-se junto de um dos postos do bom café Delta (não há problemas da publicidade) o seguinte: Damos uma boa nota a um aluno do 12º ano (porque de facto ele é bom) e dentro de 5/6 anos ele é economista, engenheiro, médico e ganhará mais dinheiro que nós. Damos um 10 (talvez como a reforma a veteranos do 12º ano) e no ano seguinte teremos um aluno em Matemática ou ... nosso colega. É uma situação real e parece-me que é necessário criar incentivos para que haja boa gente a ingressar nos cursos de Matemática...

Uma outra reflexão que aqui gostaria de deixar é sobre a formação contínua e a corrida às unidades de crédito. O sistema estará viciado e não vai trazer os efeitos desejados. Para que é que me hei-de andar a matar a estudar Normas, Polya, espaços de Banach, quando posso fazer uns créditos sobre iniciação à Informática de que já sei umas coisas e obtenho o que preciso para progredir na carreira? A formação contínia é necessária mas deve resultar de necessidades, tendo sempre em conta a qualidade do ensino. E esta como se mede? O que é importante para mim em Seia é o mesmo que para a colega em Massamá? A profundidade que se dá às derivadas no 11º ano é a mesma que se dá em Seia e em Trás-os-Montes? Acho que as coisas andam sem rei nem roque e vão passar a andar sem roque nem rei. É o ensino de sucesso neste oásis de concertação ... já agora, demonstramos frequentemente nas nossas aulas que ... a maioria não tem sempre razão ... só uma minoria acerta em muitas questões..."

### Considerações sobre o "Pense Nisto" do número 25

"..A demonstração clássica da proposição 'A soma de dois números pares é um número par', mais pormenor, menos pormenor, poderá ser a seguinte:

Seja $x$ um número par qualquer, então

(1) $\exists n \in \mathbf{N}: x = 2n$.

Seja $y$ outro qualquer número par, do mesmo modo

(2) $\exists m \in \mathbf{N}: y = 2m$.

De (1) e (2) resulta que $x + y = 2n + 2m = 2(n + m)$ de onde se conclui que $x + y$ é par, porque

$\exists p \in \mathbf{N}: x + y = 2p \quad (p = n + m)$

c.q.d.

Tudo isto teve como base a boa e velha definição:

"$x$ diz-se número par se e só se existir um número natural $n$ tal que $x = 2n$"

Como **N** é um conjunto numerável, a representação pictórica de qualquer número natural é bastante acessivel desde muito cedo:

$1 \mapsto \bullet$

$2 \mapsto \bullet\bullet$

$3 \mapsto \bullet\bullet\bullet$

$4 \mapsto \bullet\bullet\bullet\bullet$ etc.

Daí também que a intuição de número natural par se processe de forma pacífica. Dizemos que um número é par se os seus "átomos" puderem ser dispostos rectangularmente seguindo uma malha 2x...

$$2 \mapsto \bullet \quad 4 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\end{array} \quad 6 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\bullet\end{array} \quad 8 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\end{array}$$

ou atendendo à propriedade comutativa do produto 2x ... = ... x2

$$2 \mapsto \bullet\bullet \quad 4 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\end{array} \quad 6 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\\ \bullet\bullet\end{array} \quad 8 \mapsto \begin{array}{c}\bullet\bullet\\ \bullet\bullet\\ \bullet\bullet\\ \bullet\bullet\end{array}$$

Assim sendo a demonstração pretendida parece-nos aceitável ainda que salientemos dois pormenores:

1 - É conveniente salientar bem a diferença entre as proposições

$(p_1)$— "A soma de dois pares é um par"

$(p_2)$— "A soma de quaisquer pares é um par".

$p_2 \Rightarrow p_1$ apenas por argumentação lógica mas não é imediato que $p_1 \Rightarrow p_2$. Nem sempre isto é claro para os alunos. Em Matemática muitas vezes desleixamo-nos em relação ao uso dos artigos o\a\os\as\ e um\umas\uns\umas. Atendendo a esta observação apenas ficou provado que 6+8=8+6=14 e que sendo 6 e 8 números pares também o é 14, isto é, a sua soma. O aluno terá de entender com segurança que o processo funciona com quaisquer outros números, embora a sua demonstração "pictórica" ofereça sérias dificuldades a partir de certa altura. Será que, com o processo utilizado pelo aluno, alguém se convenceria que 2013546+7150774 é um número par? Ou mesmo que qualquer uma das parcelas é um número par?

2 - A demonstração pictórica é útil e intuitiva em **N**, talvez o seja ainda em $\mathbf{N_0}$, mas em **Z** poderá oferecer resistências insuspeitadas. Em $\mathbf{N_0}$ bastará dizer que 0= ..., i. e., 0 não tem átomos. Em termos de malha 2x... temos uma abstração que nem sempre é bem sucedida. Muitas vezes o aluno fica com a ideia que o zero é par por convenção.

Em conclusão, diríamos que, para um aluno do 10º ano, só seria aceitável esta demonstração como ponto de partida para um raciocínio "mais forte". Este tipo de questões arrasta consigo um problema mais vasto a que poderiamos chamar "o salto para o infinito". A generalização demasiado ousada a partir de alguns casos particulares, para uma verdade totalizante, deve ser muito cautelosamente abordada pelos professores de Matemática ...".

Alberto Martins Teixeira

*Nota da Redacção*: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas, no espaço disponível.

### Gralhas

No último número de ***Educação e Matemática*** surgiu um elevado número de gralhas que alastraram como um vírus. Pelo facto pedimos desculpa aos nossos leitores e aos autores dos artigos, os quais não são responsáveis pelas gralhas ocorridas.

Em particular, os colegas José A. Fernandes e Conceição Almeida enviaram-nos uma amável carta em que se dão conta das numerosas gralhas que apareceram no seu artigo "Vantagens pedagógicas da perspectiva frequencista de probabilidade" e nos pedem que publiquemos um texto corrigindo as gralhas que podem afectar uma correcta leitura do artigo. Segue-se um extracto desse texto:

"ao longo de todo o texto, nas expressões simbólicas onde aparece o símbolo », devia aparecer o sinal $\cup$. Assim, por exemplo, onde se lê

$$P(\{F\} » \{V\}) = 1$$

deve ler-se

$$P(\{F\} \cup \{V\}) = 1;$$

na página 29 e a propósito de "O ponto de vista frequencista e as outras perspectivas", onde se lê

$$\varnothing = \{F, V\}$$

deve ler-se

$$\Omega = \{F, V\};$$

e onde se lê

$$f(A » B) = f(A) + f(B) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(A) + P(B),$$

$B$ é incompatível com $A$,

deve ler-se

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

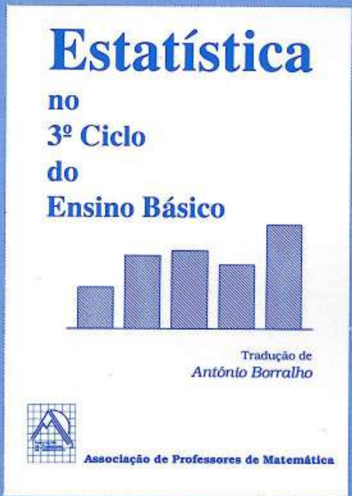
$B$ é incompatível com $A$."

Estamos a tentar melhorar os processos de revisão dos artigos de modo a reduzir ao mínimo a ocorrência de tais falhas.

*A Redacção*

# Publicações APM

## Uma nova publicação da APM!




# Estatística no 3º Ciclo do Ensino Básico

tradução de António Borralho da obra
*Curso inicial de Estadística en el Bachillerato*
Grupo Azarquiel

"(...) A Estatística é, quiçá, a parte da Matemática que se utiliza com mais frequência nas Ciências Sociais e Naturais, com uma presença contínua e crescente nas informações dos meios de comunicação.

Isto torna-a num tema idóneo para ser tratado de forma interdisciplinar com outras matérias tais como Geografia, Física, Línguas, etc., como se pode observar em algumas actividades que se propõem neste livro."

in *Estatística no 3º Ciclo do Ensino Básico*, APM, 1993

*À venda na Sede da APM.*
*Preço: 1000$00 (não sócios 1300$00).*
*Caso pretenda que esta publicação lhe seja enviada pelo correio deverá enviar-nos em cheque, ou vale postal, em nome da APM, a quantia de 1200$00 (se não for sócio deverá enviar-nos 1560$00).*

## índice