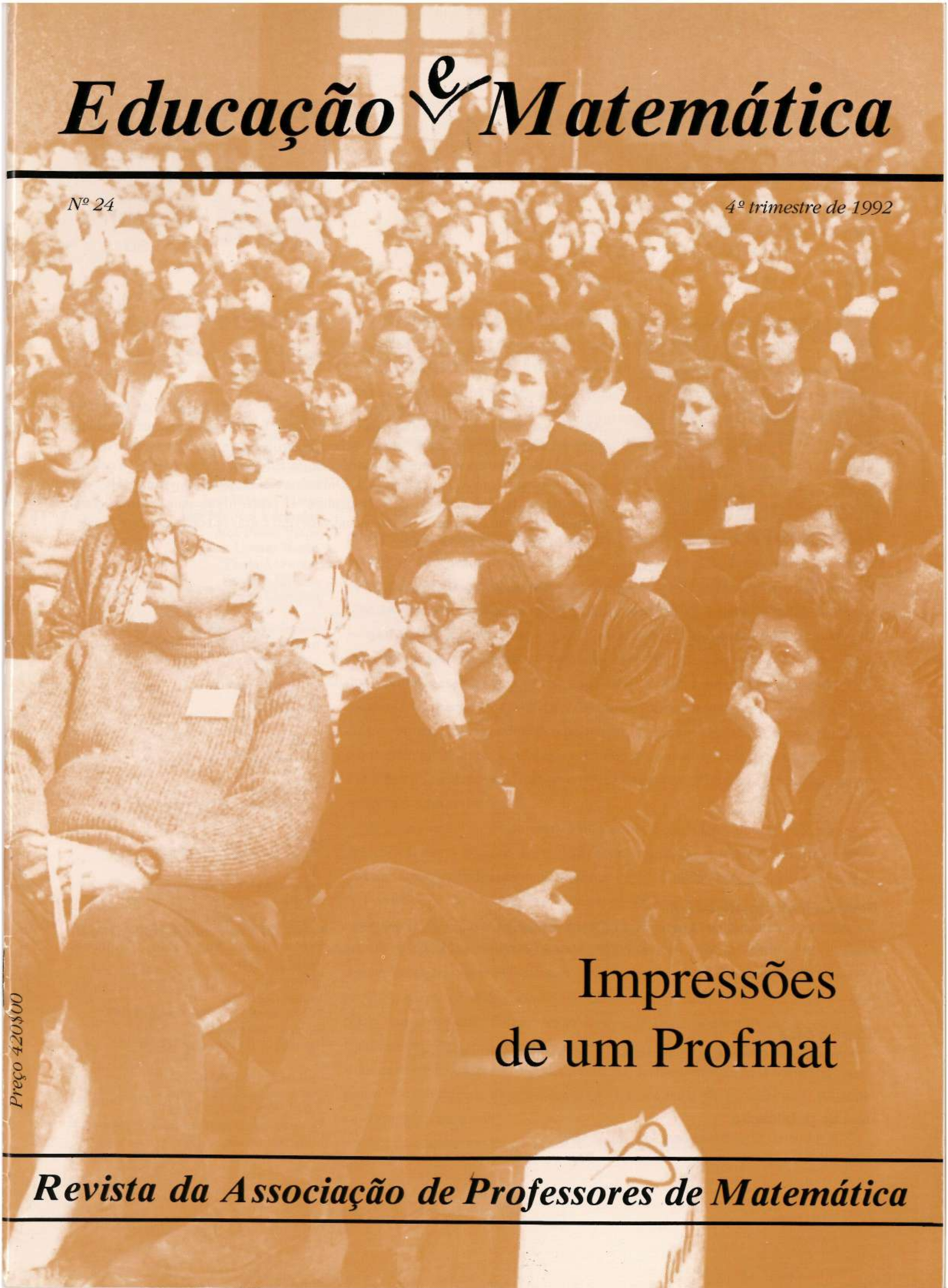
Educação e Matemática

Nº 24

4º trimestre de 1992



Impressões de um Profmat

Preço 420$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

VI Jornadas de Aprendizage y Enseñanza de las Matematicas

De 31 de Março a 3 de Abril deste ano realizam-se as VI Jornadas de Ensino e Aprendizagem da Matemática na cidade de Badajoz. Estas jornadas são convocadas pela Federação Espanhola de Associações de Professores de Matemática e são organizadas pela Sociedade da Estremadura de Educação Matemática "Ventura Reyes Prosper" e pelo Departamento de Didáctica das Ciências Experimentais e da Matemática da Universidade da Estremadura. O prazo limite para as inscrições termina em 15 de Fevereiro. Os interessados devem entrar em contacto com a sede da APM, para mais informações.

Neste número colaboraram

Albano Silva, António Domingos, Conceição Mesquita, Conceição Rodrigues, Graciosa Veloso, Filomena Marques, Inês Alegria, José Orlando Freitas, Márcia Freire, Margarida Oliveira, Miguel de Guzmán, Paulo Oliveira, Pedro Esteves, Simeon Hau, Teresa Leitão

Sobre a capa

A fotografia utilizada na capa é da autoria de Henrique M. Guimarães

Data de publicação

Este número foi publicado em Janeiro de 1993.

nº 24
4º trimestre
de 1992

De quem é a revista (... da APM)?

Eduardo Veloso

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
Ana Paula Canavarro
Ana Vieira
António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Manuel Matos
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Leonor Barão
Paulo Abrantes
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2400 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 63121/93

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa/Portugal
Tel. & Fax: (351) (1) 7782141

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

O número de Abril de 1991 da revista *Mathematics Teacher* — editada pelo *National Council of Mathematics Teachers* — incluía um artigo sobre um curioso problema de probabilidades, o qual já deu também muito que pensar entre nós. De que problema se tratava não é o que interessa agora (mas se quiser mesmo saber, o seu enunciado está na página 31 desta revista). O que eu gostava de referir é que em muitos números subsequentes da *Mathematics Teacher* — por exemplo nos de Janeiro, Fevereiro, Março e Setembro deste ano — têm sido publicadas cartas de leitores a propósito do dito artigo, apresentando novas soluções, discutindo as anteriores, sugerindo novos modos de explicar as diferentes resoluções, e assim por diante. De resto, em cada número dessa revista americana existe sempre uma secção para cartas dos leitores, onde normalmente aparecem cerca de uma dezena ou mais de reflexões ou críticas sobre artigos publicados, ou simples sugestões, ideias, desabafos, eu sei lá. Ora, até hoje, nestes seis anos de *Educação e Matemática*, contam-se pelos dedos de uma mão — e talvez não sejam precisos tantos — o número de leitores que nos escreveram! Quando levanto esta questão na redacção da revista, respondem-me sempre: "isso é dos portugueses, não têm os mesmos hábitos dos americanos, não gostam de escrever...". De acordo, seja essa a razão. Mas os portugueses também comiam dantes coisas normais, como sardinhas ou bacalhau cozido com batatas, e não sabiam sequer o que eram *hot dogs* ou *hamburgers*. E agora para muitos o máximo é irem jantar à *Pizza Hut* ou ao *McDonald*... Porque não imitamos os americanos nas coisas boas, e o fazemos apenas nas más?

A colaboração na nossa revista tem vindo a aumentar, de ano para ano, e a diversificar-se. O número de artigos espontaneamente enviados para a redacção, embora ainda muito diminuto, também tem crescido lentamente. A situação portanto está a melhorar. Mas a vitalidade da nossa Associação, revelada por exemplo no magnífico PROFMAT 92 em Viseu, poderia e deveria ter uma maior presença na revista. Cartas com críticas ou comentários a artigos, pequenos artigos de uma ou duas colunas, relatos de experiências, notas críticas sobre a situação dos professores, protestos em relação à degradação e à insuficiencia das instalações escolares: porque razão não aparecem? Porque razão nem uma centena dos mil participantes no encontro de Viseu, responderam ao questionário sobre a revista? Será que ainda subsiste em muitos a ideia, cada vez mais falsa, de que a revista é feita por um pequeno grupo? Ou, ainda pior, de que a revista *pertence* à redacção e a mais meia dúzia de colaboradores habituais?

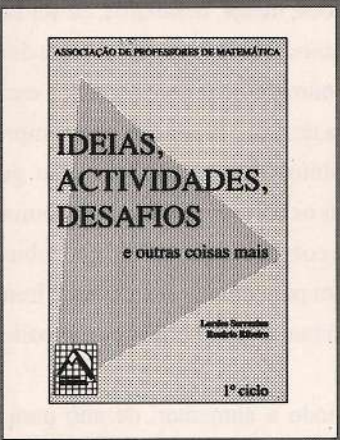
Apetece perguntar: de quem é a revista (... da APM)?

Publicações APM

Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar
tradução portuguesa dos **Standards** do National Council of Teachers of Mathematics

Quadrante nº 1
Revista Teórica e de Investigação

A Trigonometria está viva
Celina Maria Pereira, Isabel Azevedo Rocha e João Manuel Cegonho



Ideias, Actividades, Desafios e outras coisas mais
Lurdes Serrazina e Rosário Ribeiro

Aventura no País da Matemática - roteiro de uma exposição
Angelina Matela, Eduarda Paiva, Esmeralda, Isabel Hormigo, José Manuel Rodrigues, Margarida Pinto Teixeira, Maria Clementina Timóteo e Teresa Graça

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA
Agenda do Professor 1992/1993
Francisca Sousa, Hélia Oliveira, José Manuel Varandas, Paulo Oliveira e Rosário Laureano

Actas do Profmat 91 (vol II)
organizado por Graciosa Veloso, Lurdes Serrazina, Mário Maia

Veja na página 20 a lista completa das publicações, que inclui as últimas novidades. Nela encontrará também a ficha de pedidos para envio pelo correio.

Impressões de um Profmat

Pedro Esteves

Das impressões dispersas que tenho de Viseu 92 — foi o meu primeiro PROFMAT — gostaria de destacar ou estruturar algumas.

a) A importância, na nossa associação, do imaginário colectivo e da fantasia: "o sonho é uma constante da vida".

b) A Escola onde se realizou o Encontro, que me lembrou aquela onde estudei, inclusive devido às velhas carteiras de madeira que ainda possui.

c) Os enormes corredores, com todas as portas abertas, convidando à entrada nas salas cheias de computadores ou de materiais em exposição, na oficina, na venda de publicações (da APM, da SPM, do IIE, dos Núcleos - e também das editoras).

d) Os quiosques, nas esquinas de alguns corredores, e os cartazes, por todo o lado.

e) Lá muito ao fundo, após várias curvas e contracurvas, a sala da organização do PROFMAT, aonde não se pretendia resolver problemas - mas preveni-los.

f) O ginásio, de paredes altas encimadas por janelas por onde entrava, pletórica, a luz.

g) As Sessões Plenárias, de ginásio sempre cheio, onde se relacionaram modelos matemáticos e realidade, se abordou a perspectiva etnomatemática, se deu a volta à resolução de problemas e se interligou matemática, língua materna e filosofia.

h) Os temas mais abordados, numa grande diversidade de sessões, e que revelaram por certo a predominância de pesquisas dos investigadores e/ou de preocupações dos professores: a modelação matemática, a estatística, as calculadoras gráficas, a Reforma.

i) As várias reflexões, testemunhos e debates sobre os novos programas, que infelizmente não foram acompanhados por suficientes intervenções acerca do novo sistema de avaliação (talvez porque este não foi experimentado com os programas).

j) A primeira publicação APM para o 1º ciclo e uma nova revista consagrada à investigação em educação matemática.

l) O aparecimento da história da matemática como tema em ascensão (provavelmente com grande relevância no próximo PROFMAT), expresso quer nas exposições quer nas sessões.

m) E, claro, a permanência de temas já consagrados em anos anteriores: os materiais manipuláveis, os jogos, os problemas, os computadores, a geometria, a exploração dos números e das funções, a formação de professores,...

n) A impossibilidade de se ver tudo, de se participar sem interrupção em sessões não sobrepostas.

o) A simétrica insatisfação de todos os dinamizadores, que apenas tiveram tempo para esboçar algumas ideias, para mostrar alguns materiais, para lançar um pouco de discussão...

p) A apresentação do último número da "Educação e Matemática" na cave da Escola, ampla como uma cervejaria de Munique, com a Redacção, de avental, distribuindo castanhas e água-pé por entre a maior concentração (por metro quadrado) de todo o PROFMAT em gente, conversa e fumo.

q) A primeira corrida realizada durante um PROFMAT, na extensão de um vigésimo de Maratona, com o ar fresco a bater na cara, o pensamento acelerado para decidir estratégias de sobrevivência (fiquei, com o Zé Paulo, nos honrosos dois últimos lugares, fora os desistentes que nunca são mencionados).

r) O trabalho paralelo de organização do futuro (reuniões da Direcção, da formação contínua, do próximo PROFMAT,...) que preencheu tempos que poderiam ser de descanso mas que foram extremamente aliciantes para quem neles investiu desta maneira.

s) O isolamento (dramático?) em que está cada impulsionador de uma iniciativa (conferência exposição sessão, a própria organização), porque nela reflecte uma experiência e uma vontade cuja partilha, no momento, só pode ser ténue (terão entendido? terão gostado? terão aceite?).

t) A angústia de todo o participante em qualquer iniciativa, porque dela quer captar algo para a sua acção e se vê, no fim, confrontado com um longo e difícil caminho a percorrer (quando, muitas vezes, os meios necessários ultrapassam em muito os que adquiriu na altura).

u) A presença de tão pouca gente na Assembleia Geral da APM e o número reduzido de intervenções exteriores aos "habituais".

v) Um certo peso da "moda" a determinar os temas principais, com a correlativa pouca discussão das metodologias no seu todo (o quê será melhor quando?).

x) A excessiva origem bibliográfica de muitas das iniciativas, parecendo que ainda há quem prefira as garantias dadas pelo que nos chega do estrangeiro do que as garantias dadas pelas nossas cabeças e pela nossa experiência.

z) O desequilíbrio associativo interno à APM, na qual já existe um grupo de trabalho dos "investigadores", outro está a nascer para a "formação contínua" — mas não existe para os "inovadores", isto é, para aqueles que constituem a base de todo o sistema educativo.

Pedro Esteves
Esc. Sec do Seixal

Paradoxos geométricos, a sucessão de Fibonacci e o que mais se verá...

Paulo Oliveira

São estes velhos e amáveis paradoxos que fazem rir os bobos na taberna.

Desdémona, Otelo (acto II, cena 1)

Um dos mais antigos teoremas sobre números de Fibonacci deve-se ao astrónomo francês Jean-Dominique Cassini (1680) e estabelece que:

$$F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \ \forall n > 0$$

em que F_n designa o número de Fibonacci de ordem n. A demonstração desta propriedade pode fazer-se, por exemplo, por indução.

A identidade de Cassini está na base de um paradoxo geométrico atribuido a Lewis Carrol ou Sam Loyd, conforme as fontes. A ideia consiste em cortar um quadriculado de 8×8 de modo conveniente (ver fig.1) e reorganizar as partes obtidas para constituirem um rectângulo (fig. 2).

A área inicial de $8 \times 8 = 64$ quadrados transformou-se, pela reorganização das partes, numa área de $5 \times 13 = 65$ quadrados !!!

Noutra versão deste paradoxo, da autoria de Sam Loyd Jr.,a reorganização das partes conduz à fig. 3.

Neste caso, a área inicial converteu-se em 5x6+5x6+3 = 63 quadrados. Quer dizer, no primeiro caso a área aumentou de uma "unidade" e no segundo diminuiu da mesma quantidade !!

Vejamos como se pode "demonstrar" recuperando o primeiro procedimento mas em termos mais genéricos.

fig. 1

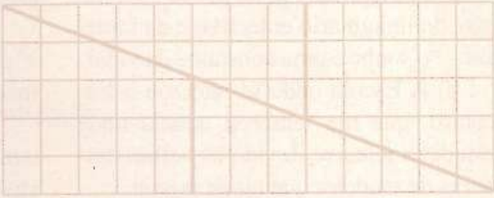


fig. 2

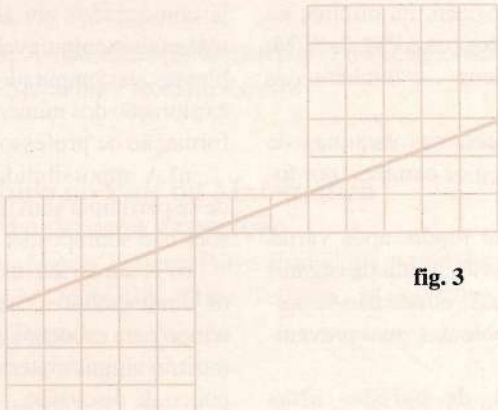


fig. 3

Seja, pois, um quadrado de lado F_n. Cortemo-lo em quatro partes e reorganizemo-las como anteriormente (fig. 4 e 5) de modo a constituirem um rectângulo. Ora o rectângulo (fig. 5) tem de área

$$F_{n-1} \times (F_{n-1} + F_n) = F_{n-1} \times F_{n+1}$$

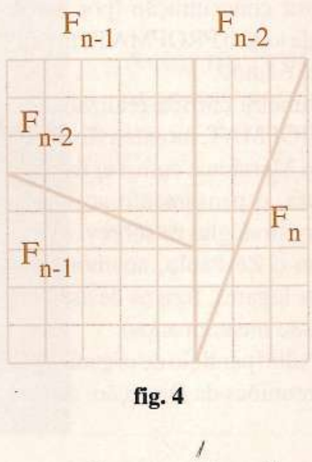


fig. 4

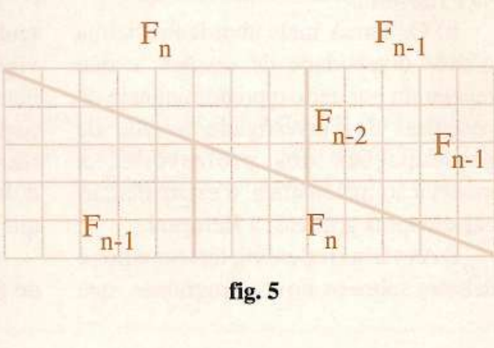


fig. 5

Como, pela identidade de Cassini,

$$F_{n-1} \times F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

ganha-se ou perde-se uma unidade de área, relativamente à área do quadrado, dependendo de n ser par ou impar respectivamente.

O paradoxo de Carrol-Loyd é susceptível de uma interpretação intuitiva em termos estritamente geométricos. De facto se se fizerem as construções mencionadas, em papel milimétrico, torna-se "evidente" que a linha "diagonal" que aparece depois de reorganizadas as quatro partes, não é uma linha recta:

• ou as partes sobrepõem-se ao longo da linha (diminuição da área);

• ou as partes não se ajustam completamente (aumento da área).

Existem muitos outros paradoxos aparentados com este, isto é, em que aparentemente há variação da área de uma figura qundo se altera a disposição das partes em que se divide a figura inicial. Martin Gardner discerniu que o princípio subjacente a todos eles é o mesmo. Denominou-o princípio da distribuição oculta pois em qualquer deles há uma distribuição imperceptível de uma certa porção de área.

Vejamos um outro exemplo de um paradoxo deste tipo. Tomemos um rectângulo e representemos 10 segmentos de recta equidistantes dois a dois e de igual comprimento (fig. 6).

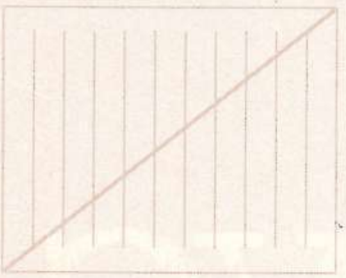


fig. 6

Fazendo um corte por uma das diagonais do rectângulo e deslocando as duas partes ao longo da diagonal, como mostra a fig. 7, o que se obterá?

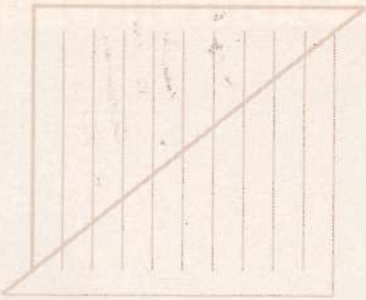


fig. 7

Dos 10 segmentos de recta iniciais restam apenas 9, sendo a soma dos seus comprimentos igual à soma dos dez iniciais!

O que aconteceu? Bom, dos 10 segmentos iniciais, 8 estão divididos em duas partes pela diagonal.. Ora, o realinhamento, pela deslocação das partes, produziu 9 segmentos cada um dos quais maior do que anteriormente. Quer dizer, o segmento desaparecido distribuiu-se de modo imperceptível pelos outros 9, aumentando ligeiramente o comprimento de cada um!

Estes exemplos ilustram quanto se pode aprender com os paradoxos, o que em si mesmo não é novidade já que o valor pedagógico dos paradoxos tem sido explorado desde a antiguidade. Euclides parece ter sido quem primeiro o fez conscientemente numa obra hoje perdida: *Pseudaria*, isto é, "Livro dos enganos". Muitíssimo afamados e não menos fertéis foram as aporias de Zenão sobre a impossibilidade do movimento e as antinomias da teoria ingénua (isto é, não axiomatizada) dos conjuntos.

Um paradoxo não deixa ninguém indiferente - causa espanto, admiração, perplexidade e uma saudável perturbação. Já Aristóteles dizia que é pela admiração que o homem começa a "filosofar". Quer dizer, o espanto intelectual convida à ponderação. E não é a reflexão factor chave no sucesso educativo?

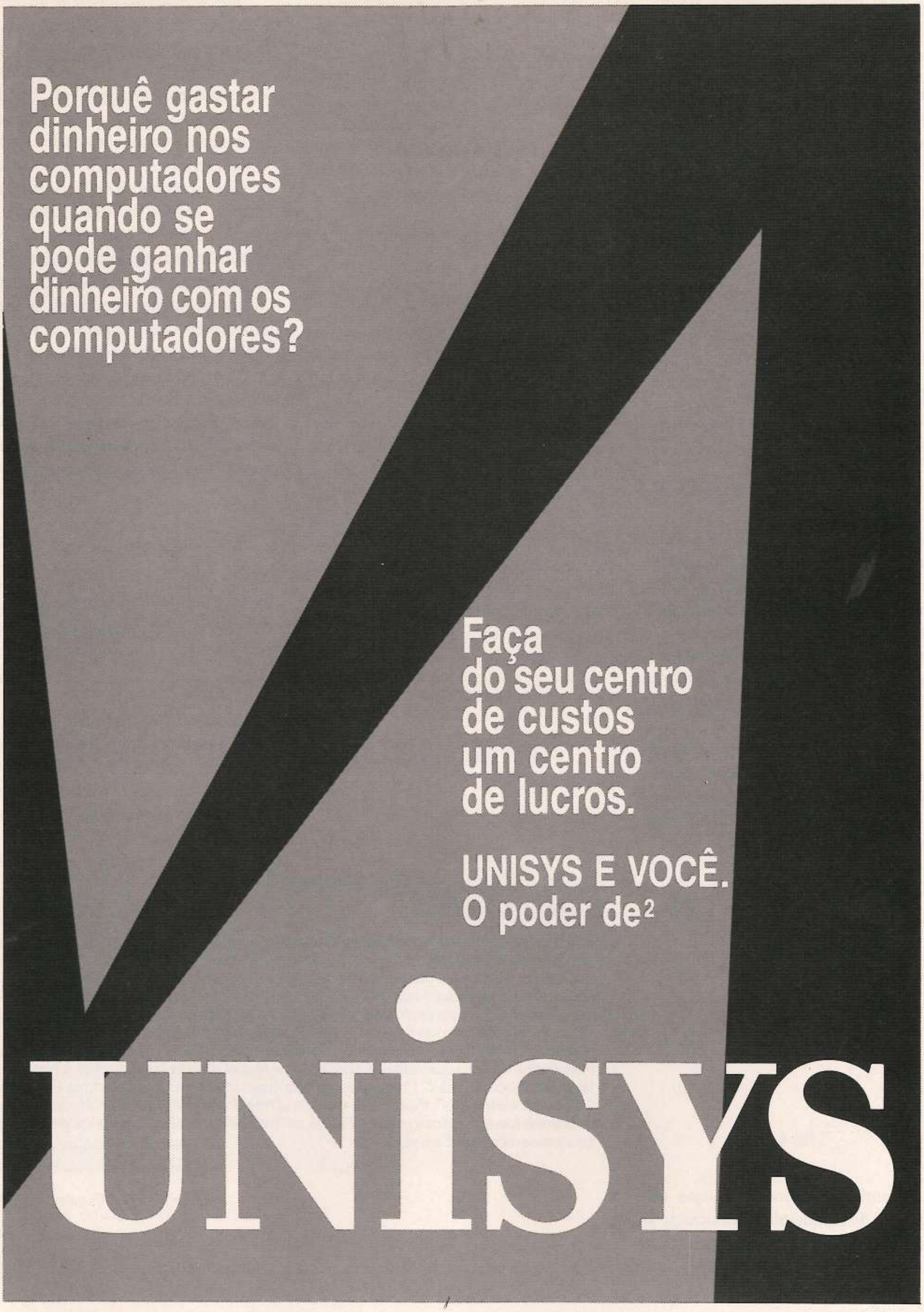
Paulo Oliveira
Escola Secundária
Seomara da Costa Primo

Matemática na Imprensa

Calem a Barbie!

É O QUE AS feministas norte-americanas querem fazer à boneca mais famosa. Ela é melhor sem pio. Depois de 20 anos muda, a Barbie abre agora a boca para dizer parvoíces. As feministas, sempre atentas aos pormenores onde possam encontrar alguma discriminação sexual, acham que ela prejudica a luta pela igualdade. Desta vez o alvo das críticas foi uma frase em que a boneca diz: "os cursos de matemática são mais difíceis". Ora tal frase poderia criar complexos de inferioridade nas meninas quanto à sua capacidade mental, acusam. A Associação Americana de Mulheres Universitárias, formada por mais de 130 mil mulheres licenciadas, enviou uma carta ao fabricante de brinquedos, a Mattel, a pedir-lhe que retire a boneca do mercado. Resposta: "não!" Porque elas também dizem coisas positivas: "Gosto da escola", ou " quero ser veterinária". Mas o porta-voz da empresa já prometeu que as próximas gerações de bonecas não dirão a frase profana. Para já, as "barbies" continuam a vender-se por cerca de dois contos cada uma. Com pio. ■

Público, 3 de Outubro de 1992


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

A folha de cálculo e a trigonometria em actividades de aplicação e modelação

Conceição Mesquita
Filomena Marques
Susana Carreira

"O que eu mais gostei nas aulas de trigonometria foram os problemas e as actividades dadas, que nos fizeram pensar de outra maneira para a resolução das questões propostas. Gostei também do facto de aprendermos esta matéria nos computadores, pois eu adoro computadores, e são raras as vezes que tenho a oportunidade de mexer ou trabalhar com um."

Organização e desenvolvimento da experiência

No 3º período lectivo de 1990/91 desenvolvemos um projecto de trabalho com duas turmas do 10º ano de escolaridade da Escola Secundária de Rio de Mouro, visando o tratamento da trigonometria num contexto de actividades de aplicação e modelação exploradas com o recurso à folha de cálculo.

Os alunos organizaram-se em grupos de 3 ou 4 elementos, o que correspondeu à constituição de 8 grupos em cada turma. Em cada grupo foi escolhido um elemento que funcionou como "representante do grupo" e que teve uma formação adicional em folha de cálculo, dada pela professora da turma, por forma a poder ajudar os colegas em questões de carácter técnico.

O projecto de trabalho foi concebido de modo a combinar dois tipos de aulas: (a) aulas de apresentação de conceitos, de resolução de fichas de exercícios e problemas clássicos de trigonometria, que tiveram lugar na sala de aula habitual; (b) aulas destinadas à realização de actividades com uma forte componente de aplicação e modelação, em que os alunos usaram o computador, concretamente a folha de cálculo, para a resolução das questões propostas. Estas aulas decorreram na sala de computadores do Projecto MINERVA, onde estiveram disponíveis oito computadores e uma impressora.

Cada uma das actividades de aplicação e modelação envolveu, em média, três aulas. No final de cada actividade, os grupos apresentaram relatórios sobre o trabalho desenvolvido com os computadores. No total, o tempo gasto em aulas com computadores foi sensivelmente igual ao tempo dispendido nas aulas sem computadores.

No início da experiência foi distribuída a cada um dos grupos uma pasta contendo a calendarização das aulas (com e sem computadores), um plano de orientação para a elaboração dos relatórios e um guião de apoio à utilização da folha de cálculo com os comandos principais.

O tipo de actividades introduzidas

No decurso da experiência foram introduzidas 4 actividades numa das turmas e apenas 3 destas actividades na outra turma, por insuficiência de tempo.

As actividades tiveram como ponto de partida uma situação extra-matemática e focaram questões como a construção de uma embalagem de sais de banho, os hipotéticos lançamentos de um pescador à beira-mar, um passeio na roda gigante da feira popular e o fenómeno acústico da produção de batimentos.

O formato das actividades corresponde à seguinte estrutura:

(a) Uma *introdução* em que é descrita uma situação extra-matemática, muitas vezes simplificada — por forma a que o seu tratamento se torne acessível aos alunos — onde são fornecidos dados que têm de ser filtrados e interpretados.

(b) Um *conjunto de questões* directamente relacionadas com a situação apresentada e que constituem suportes para o desenvolvimento de processos de modelação e aplicação de conceitos e métodos matemáticos.

Embora seguindo este tipo de esquema geral, as várias actividades apresentaram algumas diferenças no que concerne ao tipo de situação a tratar, à forma de exploração sugerida, aos processos de modelação induzidos e aos conhecimentos de Matemática envolvidos na sua resolução. As duas primeiras actividades incidiram sobre a utilização de razões trigonométricas definidas em triângulos rectângulos, a terceira envolveu o círculo trigonométrico e as funções circulares seno e coseno, e a quarta teve a ver com a variação de parâmetros em funções sinusoidais e respectivos efeitos gráficos, além de incluir noções como as de período e frequência e ainda a adição de funções trigonométricas. Neste artigo, optámos por seleccionar a segunda actividade (que a seguir se apresenta ligeiramente encurtada)[1] com vista à ilustração de alguns dos resultados e conclusões retirados desta experiência.

Em cada uma das actividades realizadas, os alunos tiveram à sua disposição a folha de cálculo, que puderam utilizar sempre que julgaram necessário e da forma que acharam mais adequada.

Os processos desenvolvidos pelos alunos na Actividade A2

A descrição das estratégias e procedimentos dos alunos tem por base a observação de um dos grupos ao longo das várias aulas dedicadas a esta actividade e a análise do trabalho que estes apresentaram sob a forma de um relatório, no final da actividade.

A primeira iniciativa tomada pelo grupo consistiu na elaboração de um esquema ilustrativo da situação descrita. Assim, os alunos fizeram um pequeno esboço no papel em que representaram três lançamentos sucessivos do pescador, fazendo variar a inclinação do fio de pesca.

Os alunos passaram então à análise da forma de variação do comprimento do fio e do alcance em função do ângulo α. Observando o esquema construído, rapidamente concluíram que quanto maior fosse o ângulo, maior seria o comprimento do fio e o alcance. Discutiram depois as amplitudes que o referido ân-

ACTIVIDADE A2

Há coisas que não é preciso saber para se poder ir à pesca, mas que podem perceber-se enquanto se espera que o peixe morda o anzol. Imagine-se, por exemplo, um pescador à beira-mar fazendo sucessivos lançamentos com a sua cana de pesca. De cada vez, ele vai tentando atirar o anzol para mais longe. Ao terminar cada lançamento, enterra a extremidade inferior da cana na areia, de modo que fique bem direita, e senta-se à espera. Enquanto espera, porém, repara que o ângulo formado pelo fio de pesca esticado e pela cana, vai aumentando nos sucessivos lançamentos. O mar está calmo e não há vento. A cana tem 3 metros de comprimento.

QUESTÕES

A) Esboça um esquema onde apareçam representados os sucessivos lançamentos do pescador.

B) Que relação haverá entre o ângulo observado pelo pescador e o comprimento de linha que se estende desde a ponta da cana até à superfície da água?

C) Que relação haverá entre o mesmo ângulo e a distância entre a cana e o ponto em que a linha de pesca entra na água?

D) Constrói um gráfico que represente a variação do comprimento de linha que vai da ponta da cana até à água, à medida que o ângulo atrás referido varia desde o seu valor mínimo até ao seu máximo.

E) Constrói um gráfico que mostre a variação da distância que o lançamento atinge sobre a água, com o mesmo ângulo.

F) O que podes concluir da comparação entre os dois gráficos?

G) Determina que valores poderá ter o ângulo se o comprimento de linha esticada for superior a 6 metros.

H) Qual será a amplitude do ângulo se o pescador conseguir fazer um lançamento que tenha um alcance de 20 metros?

gulo poderia ter para que fosse possível um lançamento. Depressa observaram que o ângulo nunca poderia ser de 90°. Além disso, concluíram que também era de excluir o ângulo de 0°, pois, nessas condições, não teria havido lançamento. (Veja-se o extracto do relatório apresentado pelos alunos que reproduzimos na página seguinte).

Quando resolveram representar graficamente a variação do comprimento do fio em função do ângulo de lançamento, os alunos acharam que seria útil recorrer à folha de cálculo. A primeira ideia avançada foi a de criar uma coluna de valores para o comprimento do fio. Uma das alunas referiu que podiam determinar o alcance a partir destes valores, através do Teorema de Pitágoras (uma vez que a altura da cana era conhecida) e acrescentou que tinham possibilidades de calcular o ângulo de lançamento a partir desses dados. Note-se que os alunos já tinham conhecimento da existência das funções trigonométricas inversas na folha de cálculo, embora estas não tivessem sido estudadas previamente. Porém, depois de discutirem esta hipótese, os alunos acabaram por abandoná-a. Um deles propôs uma nova estratégia: "Vamos antes dar valores ao ângulo, achar o seno ou o coseno e depois daí determinamos o comprimento ou o alcance". O mesmo aluno argumentou da seguinte forma a favor da sua proposta: "As distâncias podem ser muito grandes, não se sabe. Ao passo que o ângulo sabe-se que está compreendido entre 0 e 90".

Ao determinarem a fórmula para a determinação do comprimento do fio, os alunos cometeram um erro e, depois de a terem reproduzido na folha de cálculo, ao longo da respectiva coluna, aperceberam-se da incoerência obtida. Um dos alunos teve a seguinte reacção: "Não pode ser! O comprimento do fio tem de ser menor para ângulos menores e não é isso que está a acontecer!".

Depois de examinarem a fórmula usada, os alunos aperceberam-se do seu erro e corrigiram-no rapidamente.

Feito isto, passaram à construção dos gráficos pretendidos (alcance e comprimento do fio). Acharam que estes gráficos eram muito parecidos e resolveram sobrepor as duas curvas num mesmo gráfico para poderem compará-las melhor. Uma das alunas notou, então, que num dos gráficos se observavam alguns pontos um pouco mais abaixo do que no outro. Voltando à tabela da folha de cálculo, os alunos confirmaram que os valores existentes na coluna do alcance eram menores do que os respectivos valores do comprimento do fio. Verificaram também que essa diferença se atenuava à medida que o ângulo ia aumentando. Um dos alunos formulou a seguinte conjectura: "É que até 60° vão aumentando devagar e depois a variação começa a ser muito maior e já não se nota tanto que um é maior que o outro". Para testar a sua hipótese, sugeriu que fizessem os mesmos gráficos sobrepostos, mas apenas para ângulos de amplitude inferior a 60° (isto é, restringindo o intervalo do domínio). Logo que este gráfico ficou pronto, os alunos puderam aperceber-se claramente da diferença entre as duas curvas e confirmar as hipóteses colocadas.

Por fim, pensaram na razão que justificaria o facto de uma das curvas ficar acima da outra. Ao fim de algum tempo, uma das alunas notou que o comprimento do fio correspondia à hipotenusa de um triângulo rectângulo e que o alcance correspondia a um dos seus catetos. Então obteve a resposta: "É lógico, porque o comprimento do fio é a hipotenusa e a hipotenusa é sempre maior do que os catetos".

Para além destes aspectos, os alunos trabalharam de uma forma muito interessante nas questões que pressupunham a determinação dos ângulos correspondentes a determinados valores do comprimento do fio ou do alcance. É de referir que, nesta fase, os alunos ainda não tinham tido um ensino explícito do método de resolução de equações ou inequações envolvendo expressões trigonométricas. Assim, por exemplo, na questão que pedia a determinação do ângulo correspondente a um alcance de 20 metros, os alunos começaram por procurar o valor 20 na coluna relativa à distância **d**. Depressa verificaram, contudo, que esse valor não aparecia na tabela. Observaram, entretanto, que surgiam dois valores próximos de 20, um menor e outro maior do que 20. Encontraram nas células correspondentes da coluna dos ângulos os valores 81 e 82. Consideraram, desse modo, que o ângulo estaria entre 81° e 82°. No entanto, quiseram saber o valor exacto do ângulo e decidiram obtê-lo na folha de cálculo. Fazendo o quociente entre o alcance (20) e a altura da cana (3), ficaram na posse do valor da tangente do ângulo desejado. Numa célula à parte introduziram esse valor e numa outra usaram a função "ATAN" (arc tg) da folha de cálculo para chegarem à amplitude do ângulo em radianos, que depois converteram em graus. Deste modo, concluíram que o ângulo desejado era de 81,5°.

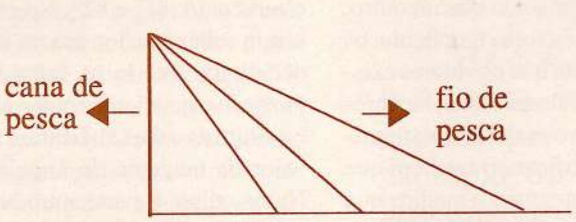
Algumas reacções dos alunos à experiência realizada

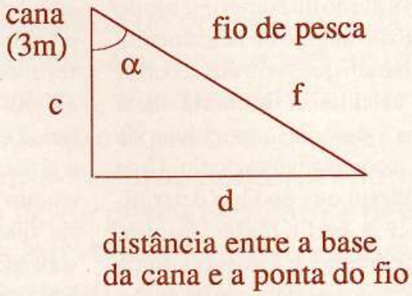
As opiniões dos alunos de ambas as turmas acerca da experiência vivida nas aulas de trigonometria foram recolhidas através de um inquérito que focou um conjunto de perspectivas de avaliação do trabalho realizado. Dada a limitação de espaço, faremos, neste artigo, uma breve referência às respostas dos alunos sobre os aspectos que consideraram mais positivos e os aspectos que sentiram menos conseguidos.

As respostas mais pessimistas foram dadas por dois alunos que declararam unicamente não gostarem de trigonometria, sem fazerem uma avaliação explícita das aulas. Houve ainda o caso de um aluno que classificou as aulas de "um pouco chatas", embora admitindo que tinha aprendido coisas novas.

No que diz respeito aos aspectos considerados mais negativos pelos alunos, a questão da necessidade de mais tempo foi muito referida. Além disso, houve alunos que acharam demasiadas, tanto as aulas que envolveram computadores como as actividades propostas. As respostas seguintes ilustram estas opiniões:

> "Em geral gostei da maneira como foram elaboradas as aulas, especialmente as do computador, pois prenderam-nos mais à trigonometria, não a vendo como aborrecida. É pena, como já referi, o factor tempo não ter ajudado. Contudo, penso que as aulas foram dadas de





"Pensámos ser melhor fazer um 'esquema' para tentar uma melhor compreensão.

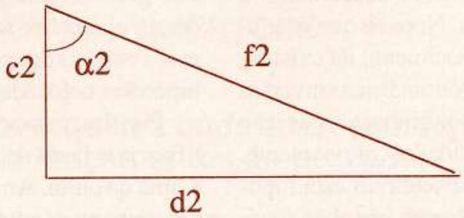
Após uma breve reflexão, concluímos que quanto maior for o ângulo, maior é o comprimento do fio e, é claro, maior é a distância entre a base da cana e a ponta do fio.

Se o ângulo aumentar,
é possível ver que:

$\alpha 2 > \alpha 1 \Rightarrow f2 > f1 \wedge d2 > d1$

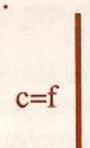
ou seja:

$> \alpha \Rightarrow$ > comp. fio $\wedge$ > distância



É preciso, desde o princípio, pensar nos valores em que o ângulo pode estar compreendido. Concluímos que:

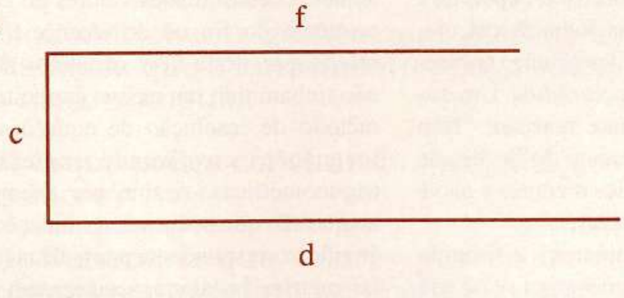
Se o ângulo for igual a 0°:



O fio vai ficar paralelo à cana, ou seja, a distância entre a base da cana e a ponta do fio seria igual a zero. Não é possível!!!

Se o ângulo for igual a 90°:

É igualmente impossível, dado que o comprimento do fio e a distância alcançada seriam infinitos.



Então o valor do ângulo pode estar contido nos seguintes valores:]0°,90°[."

Excerto do relatório de um dos grupos acerca da variação do comprimento do fio e do alcance em função do ângulo

acordo com o possível, e melhor do que isso, penso que era impossível."

"Concordo que tivemos uma grande sorte relativamente à utilização do computador, pois as aulas teóricas tornam-se, por vezes, demasiado monótonas. No entanto, também realizámos demasiadas actividades o que provocou um excesso de trabalho. Pode-se porém concluir que se pode continuar com estas actividades com diversas turmas."

Em relação aos aspectos julgados positivos na experiência realizada, distinguem-se duas tendências de opinião dos alunos:

1. Houve uma clara preferência pelas aulas que envolveram o computador.

Surgiram várias formas de exprimir esta preferência. Alguns alunos declararam sentir-se entusiasmados pelo uso desta ferramenta; outros, referiram o computador como um elemento de inovação, achando que quebrava a rotina das aulas de Matemática, que contribuía para aumentar o interesse pelo trabalho a desenvolver, que criava um ambiente de aprendizagem mais favorável e, finalmente, que levava a desenvolver o gosto pela trigonometria.

Por exemplo, um dos alunos declarou:

"Foram as aulas do computador que me agradaram mais. A parte de desenvolver o programa e o resultado (gráfico) foram as partes melhores da aula. Isto tudo com a cooperação do grupo e o ambiente da aula estava um 'espectáculo'. As aulas sem computador foram boas. A matéria estava bem dada, com bastante sentido, etc. A matéria encaixava de uma aula de computadores para uma aula sem computadores. Nas aulas teóricas a matéria que dávamos era precisa para a aula de computadores."

2. As actividades de aplicação e modelação propostas constituíram um dos aspectos positivos da experiência.

Um aspecto a salientar foi o facto de os alunos terem sentido que as actividades os levaram a pensar de outra maneira, a raciocinar e a descobrir uma outra dimensão da Matemática. Vejam-se, também neste caso, as respostas dadas por alguns alunos:

"O que eu mais gostei nas aulas de trigonometria foram os problemas e as actividades dadas, que nos fizeram pensar de outra maneira para a resolução das questões propostas. Gostei também do facto de aprendermos esta matéria nos computadores, pois eu adoro computadores, e são raras as vezes que tenho a oportunidade de mexer ou trabalhar com um."

"Agradou-me a resolução das actividades, visto que foi-nos dada uma outra 'dimensão' para ultrapassarmos as questões. Ou seja, aprendemos o programa de outra forma."

"Gostei bastante dos temas originais atribuídos a cada actividade, porque são temas realistas e que nos fizeram pensar. Porque eu conhecia aquelas situações, mas nunca imaginei o que podia saber sobre elas. Em suma, gostei."

Conclusões retiradas do trabalho desenvolvido

O trabalho realizado nas duas turmas forneceu dados que permitem analisar algumas das implicações da introdução de actividades de aplicação e modelação no currículo e, em particular, no domínio da trigonometria.

Algumas dessas implicações reportam-se ao tipo de processos de raciocínio e de estruturação de conceitos que estão envolvidos na realização das referidas actividades. Mencionaremos aqui apenas alguns dos efeitos observados ao longo da experiência.

Um dos processos que se revelou dominante em todas as actividades realizadas foi a identificação de variáveis e o estabelecimento de relações entre estas. De facto, os alunos foram capazes de reconhecer variáveis e parâmetros nos problemas tratados, de perceber intuitivamente a forma como estes interagiam e, por fim, de exprimir matematicamente tais relações. As situações problemáticas usadas implicaram a necessidade de distinguir variáveis dependentes e independentes e, em muitos casos, exigiram a manipulação de um elevado número de variáveis. Uma das razões que poderá explicar a forma como os alunos trabalharam estes aspectos poderá estar na atribuição de um significado concreto a cada uma das variáveis. É de facto presumível que os alunos, na presença de um contexto real, reconheçam mais facilmente a existência de variáveis quantificáveis e que sejam levados a formular juízos do tipo: "isto depende daquilo...", "a variação vai ser desta forma...", "nunca poderão ocorrer valores negativos para esta grandeza...", etc.. Por outro lado, a atribuição de significados reais aos resultados matemáticos produzidos suscitou a sua frequente avaliação, por parte dos alunos. Eles foram levados a comparar os resultados obtidos com as suas previsões e conhecimentos acerca da situação real e, por vezes, o reconhecimento de contradições entre os resultados matemáticos e a realidade conduziu à reformulação dos modelos matemáticos construídos.

As actividades propostas permitiram, não só a aplicação de conhecimentos de trigonometria previamente adquiridos, como deram ocasião à introdução de novos conceitos. Relativamente aos novos conceitos, devem ser mencionadas as funções trigonométricas inversas, arc sen, arc cos e arc tg, a que os alunos tiveram acesso por via da utilização da folha de cálculo. Este acesso, permitiu-lhes, nomeadamente, a descoberta de procedimentos alternativos para a resolução de equações e inequações trigonométricas, apoiados na análise de tabelas obtidas na folha de cálculo. Os conceitos de ciclo, frequência, amplitude e período de funções circulares foram também relacionados com determinados parâmetros presentes nas expressões analíticas das funções trigonométricas estudadas. Por último, foram abordadas as operações com funções trigonométricas, em particular, a adição de funções sinusoidais, e as transformações geométricas do gráfico da função seno correspondentes à adição e multiplicação de coeficientes na sua expressão analítica.

Outro aspecto a considerar tem a ver com o modo como os alunos utilizaram o círculo trigonométrico. Por exemplo, isto foi patente em determinadas actividades em que os alunos relacionaram trajectórias e movimentos circulares com o círculo trigonométrico. Assim, associaram a posição de um móvel em movimento circular uniforme às funções seno e coseno, introduziram correctamente nos modelos matemáticos formulados a dimensão do raio da trajectória descrita, relacionando-a com o raio do círculo trigonométrico e com a amplitude da função seno. Estes factos tornam-se relevantes, porquanto é usual, no estudo da trigonometria, detectar nos alunos alguma dificuldade em integrarem o círculo trigonométrico nos seus raciocínios.

Quanto à utilização da folha de cálculo, é de registar a forma como possibilitou e estimulou a manipulação de múltiplas representações matemáticas. Não só foram inúmeras as representações numéricas, algébricas e gráficas criadas na folha de cálculo, como se registaram diversas conexões entre aspectos matemáticos e extra-matemáticos das situações propostas. Em geral, a ocorrência de transferências entre vários sistemas de representação, nos processos de resolução dos alunos, contribuiu para uma eficaz monitorização dos seus resultados. O cruzamento das informações colhidas em diferentes representações (tabela, gráfico, fórmula, esquema geométrico) permitiu-lhes, em muitos casos, controlar a validade dos seus raciocínios e conjecturas e obter *feedback* acerca dos seus modelos matemáticos.

Finalmente, há a referir a questão do tempo e da dimensão das actividades. Na literatura sobre este tema, uma ideia que surge com frequência é a de que as actividades de aplicação e modelação requerem um maior consumo de tempo. A experiência que realizámos parece não ter fugido a esta tendência geral. No entanto, há que ter em conta que o contacto regular dos alunos com determinadas perspectivas de trabalho contribui para um aumento do seu rendimento, podendo vir a atenuar o consumo de tempo.

[1] A actividade incluía ainda duas outras questões que diziam respeito à leitura e interpretação de gráficos fornecidos. Por limitações de espaço, optámos por retirar essas duas questões, que embora tendo suscitado uma discussão animada, têm uma natureza diferente das restantes questões.

Conceição Mesquita
Filomena Marques
E. S. de Rio de Mouro
Susana Carreira
FCT - Univ. Nova de Lisboa

III Seminário de Investigação em Educação Matemática (APM)

António Domingos

Decorreu nos passados dias 2 e 3 de Novembro de 1992 na Escola Superior de Educação de Viseu o III Seminário de Investigação em Educação Matemática organizado pelo Grupo de Trabalho sobre Investigação em Educação Matemática da APM. Com este seminário pretendeu-se fundamentalmente estimular a produção de novo conhecimento científico na área da Educação Matemática criando um espaço de comunicação que contou com a participação de cerca de oitenta docentes de Universidades, Escolas Superiores de Educação, investigadores de outros organismos e professores.

Em ambos os dias os trabalhos foram iniciados por uma sessão plenária. No primeiro dia esta sessão foi proferida pela professora Terezinha Nunes da University of London subordinada ao tema "A Matemática na vida diária — mantendo as coisas nas devidas proporções" que incidiu sobre uma investigação acerca de um problema de proporcionalidades realizado com pessoas escolarizadas e sem escolarização. Ainda durante a manhã decorreu um espaço de comunicações onde foram apresentadas três comunicações subordinadas aos temas: Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular, Leonor Cunha Leal da ESE de Setúbal; Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria, Susana Carreira da E. Sec. Mem Martins; e Concepções dos professores do 1º Ciclo relativamente à Matemática e práticas da sala de aula, Maria de Lurdes Serrazina, ESE de Lisboa.

Na parte da tarde decorreram mais três espaços de comunicação onde foram apresentadas as comunicações seguintes: Matemática e individualidade — contribuição à compreensão da hipercomplexidade da pessoa em aprendizagem da Matemática, António Jorge Andrade da FCT-UNL; Desenvolvimento de um teste de avaliação diagnóstico em Matemática, Isolina Oliveira e Maria Judith Pereira do IIE; Uma investigação experimental sobre as capacidades de resolução de problemas que envolvem a multiplicação, Peter Bryant da University of Oxford e Luisa Morgado da FPCE-Univ.Coimbra; Insucesso em Matemática — fenómeno irreversível? Reflexões sobre uma abordagem em Hypercard, Isabel Cabrita do Dp.DTE da Univ.Aveiro; A experimentação do novo programa de Matemática de 11º ano: Um estudo de caso, João Filipe Matos, João Pedro Ponte, Henrique Guimarães e Ana Paula Teixeira Canavarro da FCL e Leonor Cunha Leal da ESE de Setúbal; Modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo, José Manuel Matos da FCT-UNL.

No final do primeiro dia foi ainda reservado um espaço de tempo destinado à apresentação dos vários grupos profissionais por forma a que todos os presentes pudessem ficar a par das suas realizações, publicações e possíveis contactos.

No segundo dia a sessão plenária foi proferida pelo professor Juan Díaz Godino da Universidad de Granada e subordinada ao tema: "Paradigmas, problemas y metodologias en Didáctica de la Matemática que discutiu diversas fundamentações teóricas para a Didáctica da Matemática.

Ainda durante a manhã houve mais dois espaços de comunicação cujos temas foram: Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferra-

(continua na pág. 14)

Oh! "Setora" então a Matemática também tem história?

Márcia Freire

A orientação dos novos programas relativamente ao tratamento de aspectos da história da Matemática veio ao encontro das preocupações sentidas por muitos professores.

Há uns anos atrás, tendo eu por hábito fazer algumas referências históri-cas e biográficas dos matemáticos relacionadas com os temas do programa do 11° ano, perguntou-me a certa altura uma aluna:

- Oh "Setora!" então a Matemática também tem história?

Esta observação fez-me pensar!

E quando pela primeira vez li os novos programas da Reforma Curricular do Ensino, uma das coisas que mais me animou, como professora experimentadora do programa de Matemática do ensino secundário, foi ver na introdução que deveria ser feito um certo tratamento histórico dos temas, o que "contribuiria para o desenvolvimento da capacidade cultural dos alunos o qual é um dos objectivos do programa".

Começando a preparar o 10° ano, tenho então o gosto de ver que nas unidades dos Reais, de Geometria e de Estatística realmente faz parte dos temas a tal abordagem histórica, o que deu para desenvolver com os alunos um projecto meu de longa data: a feitura de um jornalinho em que seriam divulgados, de uma maneira simples e leve, algumas biografias de Matemáticos e outros assuntos, tendo como base trabalhos feitos pelos alunos.

Desse jornalinho já existem até à data quatro números. Os três primeiros que expus na Feira de Ideias do Profmat 91, são sobre: 1- Pitágoras, 2- Euclides, Geometrias não euclideanas e Pedro Nunes, 3- Descartes e Gomes Teixeira.

O quarto número, em que colaboraram os mesmos alunos mas agora já no 11° ano, é sobre Galileu Galilei e estava integrado no projecto da Área Escola, no qual participavam as disciplinas de Matemática, Física, Português e Filosofia, em que o tema era "Galileu Galilei" tendo como objectivo a divulgação de aspectos científicos, metodológicos e filosóficos da sua obra.

Estão para sair mais alguns números relacionados com os temas de 11° e 12° anos, ainda baseados em trabalhos dos mesmos alunos, visto que os acompanho desde o 10° ano.

No que diz respeito ao 11° ano e continuando a analisar o programa sobre a mesma perspectiva, senti que o tal objectivo ficou um pouco esquecido, pois só no tema das Probabilidades faz parte das noções gerais uma referência á origem, evolução, conteúdo e importância do Cálculo das Probabilidades.

Nas funções poderia haver uma chamada de atenção para as suas origens, uma referência a Euler, Leibniz e a tantos outros. Na trigonometria uma alusão a Ptolomeu e ao seu "Almagesto", etc.

Só se volta a ter uma referência à perspectiva histórica no 12° ano, no desenvolvimento do tema Cónicas e do tema Funções IV, relativamente à evolução do Cálculo Integral.

É claro que, quando se consulta o programa no capítulo da Orientação Metodológica, lê-se que o professor, ao aplicar este programa, deve contemplar entre outras coisas a perspectiva histórico-cultural. Penso que isto não chega para mudar hábitos e que se esta orientação vier reforçada tendo em cada tema uma alusão à parte histórica, vai ajudar a lembrar e a refletir sobre a importância do assunto. Aí sim, começo a acreditar que a Matemática deixe de ser tão árida para os alunos e eles comecem a ter uma visão mais humanista da disciplina.

Márcia Freire
(experimentadora dos novos programas de Matemática do ensino secundário)
E. S. Dr. António Carvalho Figueiredo
Loures

(continuação da pág 12)
mentas computacionais, Margarida Junqueira da FCT-UNL; Reflexões sobre o trabalho de grupo, Paulo Abrantes e Eduardo Veloso da FCL; Inovação no ensino da Matemática, Albano Silva da E. P. Marquesa de Alorna e Ana Paula Teixeira Canavarro e Henrique Guimarães da FCL; A calculadora nas mãos dos professores — implicações para o processo de ensino aprendizagem, Maria Graciosa Veloso da E. S.nº1 de Loures e João Pedro Ponte da FCL.

Após o almoço teve lugar um painel subordinado ao tema "Psicologia e Educação Matemática" com a participação de Teresinha Nunes da University of London, Ana Paula Mourão e Leandro Almeida do IEU Minho, António Jorge Andrade da FCT-UNL e João Filipe Matos da FCL. Neste painel foram abordadas as relações entre a Psicologia e a Educação Matemática com ênfase nos processos psicológicos da construção do conhecimento Matemático.

Seguidamente realizou-se o último espaço de comunicações que incluiu duas comunicações: Construção, aplicação e avaliação de um programa de recuperação de alunos em Matemática (7º ano de escolaridade), Ana Paula Mourão, Leandro Almeida, António Barros, José Fernandes e Maria do Carmo Campelo, todos do IEU Minho; Processos de resolução de problemas — uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do Ensino Primário, Isabel Valente Pires da ESE Setúbal.

O segundo dia terminou com a reunião do Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI) em Educação Matemática da APM que tem por base dois grandes objectivos: (1) constituir-se como um espaço de expressão da comunidade investigativa no campo da Educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados e (2) promover a articulação entre a investigação nessa área e o ensino da Matemática. Nesta reunião, para além da definição das competências do grupo, foi eleita uma comissão de nove elementos que coordenará no próximo ano as actividades do grupo e que ficou assim constituída: José Matos e Ana Boavida da FCT-UNL, Ana Paula Mourão do IE-Univ.Minho, António Borralho da Univ. Évora, Henrique Guimarães, João Pedro Ponte e Madalena Santos da FCL, Lurdes Serrazina da ESE de Lisboa e Leonor Cunha Leal da ESE de Setúbal.

As actas deste seminário serão publicadas no Nº 2 da revista Quadrante.

Este seminário contou com os apoios da JNICT, ESE de Viseu, Instituto Politécnico de Viseu, Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas da FCT-UNL, Departamento de Educação da FCL e com os patrocínios da Visabeira Lda.,Porto Editora, Lda. e Texto Editora, Lda.

António Domingos
Departamento de Matemática
Fac. de Ciências e Tecnologia da UNL

Correio dos Leitores

O novo sistema de avaliação

Do nosso colega Alberto Almeida, professor de Matemática na Escola C+S Delfim Santos em Lisboa, recebemos um conjunto de documentação sobre o novo sistema avaliação que, como nos disse, elaborou com base nos textos oficiais relativos a esse sistema e que utilizou já em sessões informativas numa reunião da Associação de Pais da sua escola e num plenário da mesma escola. Trata-se de um conjunto de elementos de carácter essencialmente informativo, organizados em forma de quadros e produzidos para apoio às referidas sessões. Nesses quadros, apresenta sinteticamente alguns dos aspectos principais do novo sistema de avaliação — "o papel da avaliação", "instrumentos e meios de avaliação", "modalidades de avaliação", "o efeito da avaliação e efeitos da retenção", "as medidadas do apoio pedagógico", por exemplo — e um esquema onde indica os momentos temporais, em termos de períodos lectivos, onde são aplicadas as diferentes modalidades de avaliação, no que se refere aos 2º e 3º ciclos do ensino básico.

Na parte que antecede a apresentação dos quadros, Alberto Almeida, considerando que não existe uma escala ideal para a avaliação sumativa, defende um escala classificativa de 1 a 10 — "no meio é que está a virtude", diz-nos — acreditando que com essa escala se poderia conseguir "uma equiparação mais paritária entre níveis e percentagens" e facilitar "o rigor e a precisão da avaliação sumativa". Ainda como argumentos em favor dessa escala, considera que os alunos seriam mais estimulados — "é mais fácil o aluno transitar de nível, de período para período" — e mais facilmente diferenciados do que na escala de 1 a 5.

Registamos, e agradecemos, deste modo o que o nosso colega nos fez chegar, trabalho com que, como referiu em jeito de conclusão, atingiu "pelo menos", o objectivo de "uma certa arrumação de ideias". Quem tiver interesse em mais dados, pensamos poder dizê-lo, poderá contactar directamente Alberto Almeida, Escola C+S Delfim Santos em Lisboa.

A Redacção

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

O problema do trimestre proposto no número anterior de "Educação e Matemática chamava-se "Os Finalistas do Futuro" e rezava assim:

Nas 1000^{as} Olimpíadas Intergalácticas de Jogos Matemáticos, a FIJM (Federação Intergaláctica dos Jogos Matemáticos) reparou numa particularidade curiosa do número de finalistas.

Com efeito, esse número de quatro algarismos, todos diferentes de zero, era igual à soma dos seus algarismos elevados à sua própria potência. Por exemplo 2^2, 3^3, 7^7,...

Quantos finalistas participaram nas 1000^{as} Olimpíadas?

Este problema fez parte dos quartos de final dos Campeonatos de França de Jogos Matemáticos e Lógicos, para a categoria equivalente aos alunos do ensino secundário.

Apesar do curto espaço de tempo entre a saída do número anterior da revista e a elaboração deste houve um número significativo de respostas: Helena Rocha (Lisboa), Judite Barros (Lisboa), Luis Carmelo (Tondela), Mário Gonçalves (Porto), Orlando Freitas (Funchal), Paulo Lopes (Covilhã), Pedro Esteves (Seixal) e Raul Gonçalves (Paredes). As resoluções são diferentes, embora a resposta seja a mesma, claro. Vamos utilizar aqui elementos e sugestões destes oito colegas, mas gostávamos de transcrever o início da carta de Paulo Lopes:

Comecei por abordar o problema pelo lado das equações, embora sabendo que por aí teria poucas hipóteses de êxito devido ao elevado número de variáveis(...):

$$1000a + 100b + 10c + d =$$
$$= a^a + b^b + c^c + d^d$$

Depois pensei Não sei por onde começar, *pois começar pela equação não era propriamente começar.*"

Realmente, para limitar a pesquisa dos números, é preciso impor algumas restrições. Foi o que todos fizeram.

1) Nenhum dos algarismos que formam o número pode ser 6, 7, 8 ou 9. Como $6^6 = 46656$, se o número contivesse um algarismo igual ou maior a 6, não poderia ter apenas quatro algarismos.

2) Existe um e um só algarismo 5. Se não houvesse nenhum 5, a maior soma definida no enunciado correspondia ao número 4444 e era de $4^4+4^4+4^4+4^4=1024$, muito inferior ao necessário. Se houvesse dois "cincos", a menor soma correspondia aos algarismos 5, 5, 1 e 1 e era de $5^5+5^5+1^1+1^1=6252$. O número teria então de incluir um algarismo maior que o 5 (impossível, como já se viu).

3) O algarismo dos milhares é obrigatoriamente 3. Com efeito, o número procurado é maior que $5^5=3125$ e menor que $5^5+4^4+4^4+4^4=3893$.

Agora, os casos ainda possíveis são poucos e fáceis de analisar. Sabemos que existe pelo menos um 3, existe um único 5 e os restantes algarismos são inferiores a 5 e diferentes de 0.

Algarismos	Soma
3-5-1-1	3154
3-5-2-1	3157
3-5-2-2	3160
3-5-3-1	3180
3-5-3-2	3183
3-5-3-3	3206
3-5-4-1	3409
3-5-4-2	3412
3-5-4-3	3435
3-5-4-4	3664

Manifestamente, a única solução possível corresponde aos algarismos 3-5-4-3 e o número procurado é 3435.

José Paulo Viana

Problema proposto

ENCONTRO NA PRAÇA VERMELHA

Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de Outubro na Praça Vermelha. Com receio de uma possível actuação da contra espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:

— Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso, entre o meio-dia e a uma hora da tarde.

— Nenhum deles espera mais do que 15 minutos pelo outro.

Qual é a probabilidade de o encontro realmente se efectuar?


GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO fx-82D FRACTION
CASIO SL-300J
CASIO SL-410

Discurso do presidente do ICMI na cerimónia de abertura do 7º Congresso Internacional de Educação Matemática

De 17 a 23 de Agosto passado, realizou-se na cidade canadiana do Québec o 7º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME-7). Estes Congressos têm lugar de quatro em quatro anos e constituem a maior realização de âmbito mundial na área da educação matemática. A organização responsável é a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) cujo presidente actual é o Professor Miguel de Guzmán, da Faculdade de Ciências Matemáticas da Universidade Complutense de Madrid.

Miguel de Guzmán esteve recentemente em Viseu, tendo realizado uma das conferências plenárias do PROFMAT 92, a convite da respectiva Comissão Organizadora. Nessa ocasião, entregou à APM o texto do discurso que, na qualidade de presidente do ICMI, proferiu na cerimónia de abertura do Congresso de Quebéc com o pedido de que fosse divulgado junto dos professores de Matemática portugueses. É uma tradução desse texto que publicamos neste espaço.

Ao recordar que o ano 2000 será o Ano Mundial da Matemática, Miguel de Guzmán apresenta um programa de "solidariedade em educação matemática" como a prioridade actual definida pelo Comité Executivo do ICMI — solidariedade que devemos aos nossos colegas e aos alunos dos países menos desenvolvidos de um mundo, como o nosso, tão desigualmente desenvolvido.

Como Presidente da Comissão Internacional de Educação Matemática, em nome do seu Comité Executivo, da sua Assembleia Geral, de todos os participantes neste Sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática e de toda a comunidade matemática, especialmente daqueles que se ocupam da educação matemática, quero expressar a nossa mais profunda gratidão em primeiro lugar ao Governo do Canadá e ao da Província e Cidade do Québec e à Universidade Laval pela hospitalidade que nos ofereceram e por toda a ajuda que prestaram aos organizadores deste Congresso.

É um sinal muito significativo da elevada estima que um país tem sobre a educação, a matemática, a educação matemática e a cultura em geral, a sua ávida disposição em colaborar em tal grau na organização e no financiamento deste Congresso, do qual decorrem tantas e tão frutuosas consequências em todo o mundo no que se refere à educação matemática. A todas as pessoas do país e também às diferentes organizações do Canadá e de outros países que colaboraram e patrocinaram este magnífico acontecimento, a nossa mais cordial gratidão e as nossas mais calorosas felicitações pela sua maravilhosa atitude a respeito da cultura e da matemática.

Desejo também expressar o nosso mais profundo agradecimento a quem, dentro da organização do Congresso, na equipa canadiana assim como na equipa internacional, o tornaram possível através da sua constante dedicação durante vários anos. Em particular, gostaria de mencionar os nomes dos Professores Bernard Hodgson, Claude Gaulin e David Robittaille. A todos vós, que participaram na preparação deste Congresso, tão importante e tão cheio de consequências para toda a comunidade matemática internacional, e especialmente a todos os membros dos diferentes Comités, faço questão de dizer-vos em nome de todos nós: estejam certos de que temos em muito alta estima os esforços que fizeram por nós e por toda a comunidade matemática, e de que vos felicitamos pelo vosso evidente êxito na preparação deste Congresso.

Também desejo expressar o meu agradecimento a todos os participantes, todos vós que se deslocaram aqui a fim de partilhar as vossas experiências educativas de diversas maneiras, uns através de conferências, outros por meio de comunicações e participações em diversas actividades. A todos os que aqui nos encontramos une-nos um desejo comum, o de servir a comunidade matemática relacionada com a educação da maneira mais efectiva possível, trabalhando em conjunto por uma melhoria da educação matemática em todos os países do mundo, com a convicção profunda de que este trabalho será de grande influência para o progresso da cultura humana.

Este Congresso é uma manifestação da vitalidade crescente da Comissão Internacional de Educação Matemática, devida nos últimos anos de modo muito significativo aos esforços dos Professores Jean-Pierre Kahane e Geoffrey Howson, anteriores Presidente e Secretário da Comissão, que enriqueceram a sua actividade de muitas maneiras durante a última década. Para citar apenas um exemplo, através da influente ideia dos Estudos da Comissão Internacional, alguns dos quais já se realizaram e outros estão em preparação.

As actuais circunstâncias mundiais impelem-nos a continuar a trabalhar nas direcções em que a Comissão o tem vindo a fazer de modo tão frutuoso e a tentar proporcionar um forte estímulo a um projecto que, na opinião do nosso actual Comité Executivo, constitui neste momento uma firme prioridade. E esse projecto é o da **solidariedade em educação matemática.**

O programa para o desenvolvimento, das Nações Unidas, publicou há alguns meses um impressionante *Relatório sobre o Desenvolvimento Humano 1992*. Com uma extraordinária riqueza de informação, depois de vários anos de trabalho de uma equipa muito competente, o relatório examina os actuais problemas da distribuição dos recursos humanos e materiais no mundo. De acordo com este relatório, a última década caracterizou-se por um drástica intensificação do abismo que separa os países ricos dos países pobres, as pessoas ricas das pessoas pobres.

Dois pontos dessa informação são bem concludentes:

• Neste momento pode-se dizer que um quinto da população mundial (a parte mais rica da população) possui mais de 80% do total dos recursos mundiais, enquanto outro quinto (a parte mais pobre) possui menos de 1,5% de todos os recursos humanos.

• Esta situação de desigualdade tem vindo a deteriorar-se rapidamente nas últimas décadas, e muito especialmente durante os anos oitenta. Em 1960, a parte rica da população, isto é a quinta parte mais rica, era 30 vezes mais rica do que a quinta parte mais pobre. Em 1980, era 45 vezes mais rica. E em 1989, era 60 vezes mais rica.

Pode explicar-se de outra maneira. Havia uma família de cinco irmãos. Dizia-se por toda a parte que todos eles tinham os mesmos direitos. Mas um dos irmãos fez-se dono de quase todos os bens da família (80 por cento). E havia um dos seus irmãos que não possuía quase nada (1,5 por cento). Há algum tempo, o irmão rico era 30 vezes mais rico do que o pobre. Mas agora o rico é 60 vezes mais rico do que o pobre... **Este é o nosso mundo. Este é o nosso desenvolvimento... desumano.**

Claro que o desenvolvimento humano, as oportunidades educativas e culturais, as estruturas sociais, etc. estão em larga medida condicionadas pela situação económica e portanto a disparidade entre as pessoas pobres e as ricas nestes aspectos é pelo manos tão grande como estes números mostram.

Desta situação da distribuição dos recursos materiais e humanos no mundo, que se vai deteriorando rapidamente, podemos retirar várias consequências:

• As acções e esforços levados a cabo pelas organizações globais durante a última década foram intensos e bem aplicados em muitos casos, mas resultaram absolutamente insuficientes.

• É necessário que imaginemos novas formas criativas para procurar melhorar esta situação que se vai convertendo em algo intoleravelmente injusto. De outro modo, as condições globais acabarão por ser ainda piores do que o são neste momento.

• Não podemos conformar-nos apenas com o que as instituições globais vão procurando fazer. Não podemos silenciar as nossas consciências com a desculpa de que já há organizações encarregadas de procurar remediar as injustiças da situação actual. **É necessário que fomentemos em nós próprios e à nossa volta um empenhamento pessoal. Temos que participar activa e pessoalmente para melhorar esta situação. Que podemos fazer?**

A nossa tarefa é evidentemente de natureza educativa. E essa tarefa baseia-se em dois pilares fundamentais: recursos humanos e recursos materiais. O nosso empenhamento pessoal pode assumir formas muito diferentes:

• Podemos procurar activamente lugares à nossa volta nos quais a nossa cooperação pessoal em educação poderia ser muito bem recebida e necessária. Há um sul em cada norte. Existem muitos grupos de pessoas com necessidade de desenvolvimento dentro de cada país. Talvez durante muito tempo tivéssemos procurado lugares onde poderíamos encontrar proveito para o nosso próprio desenvolvimento. Talvez tenha chegado agora o tempo de procurar lugares onde possamos oferecer algo de nós próprios.

• Para alguns de nós, não existe a barreira da língua com muitos dos países carenciados de desenvolvimento em educação matemática. Podemos oferecer uma parte do nosso tempo para cooperar com eles. Talvez devessemos tomar a iniciativa, sem esperar que nos chamem ou convidem, procurando nós próprios lugares onde ir e fundos para financiar o nosso trabalho em tais países. Não impondo-lhes a nossa maneira de analisar os seus problemas, mas perguntando às pessoas desses países, com uma atitude aberta, onde, quando e como podemos dar alguma ajuda.

• Muitos de nós que vivemos e trabalhamos nos países com melhores condições económicas poderíamos e deveríamos oferecer pessoalmente uma parte dos nossos recursos materiais a fim de ajudar outros a conseguirem um maior desenvolvimento em educação matemática.

A Comissão Internacional de Educação Matemática poderia e deveria ajudar na articulação deste empenhamento pessoal. Estou certo de que haverá muitas pessoas em muitos países que desejariam encontrar formas concretas de actuar. A Comissão Internacional, em conjunto com a Comissão para o Intercâmbio e Desenvolvimento da União Matemática Internacional, poderia designar um grupo de pessoas para canalizar as ofertas que se recebam e de receber os pedidos de ajuda. Todos os que quiserem contribuir com as suas ideias e com o seu tempo e esforço pessoal para a realização deste programa de solidariedade estão convidados a contactar qualquer dos membros do Comité Executivo da Comissão Internacional e dos representantes nacionais da Assembleia Geral da Comissão. A todos aqueles que possam conceber modos efectivos de contribuir para a melhoria das condições educativas em Matemática em diferentes regiões ou para grupos concretos de pessoas no mundo, gostaria de pedir: por favor, partilhem as vossas ideias connosco.

Relativamente aos recursos materiais necessários para ir para a frente com este **programa de solidariedade**, alguns dos membros do Comité Executivo começámos já a trabalhar para iniciar aquilo a que poderíamos chamar um **fundo de solidariedade para a educação matemática**, procurando recolher fundos provenientes de amigos à nossa volta. Eles aceitaram muito generosamente colaborar com a Comissão Internacional desta forma. É um prazer expressar aqui o nosso agradecimento a estas pessoas de diferentes países que contribuíram para este fundo de solidariedade que pode, deste modo, começar com uma quantia de 20000 dólares USA. Não tenho a menor dúvida de que muitos de vós desejarão colaborar pessoalmente para aumentar esta quantia através das vossas próprias contribuições pessoais ou participando activamente para obter fundos de diversas fontes, pessoais ou institucionais. Este fundo de solidariedade será administrado de momento pelo Tesoureiro e Secretário da Comissão Internacional, Professor Mogens Niss. Todos aqueles que desejem contribuir para este fundo de solidariedade estão convidados a enviar as vossas contribuições para a sua morada.

Mas há muitas outras maneiras de cooperar. Eis um exemplo. Talvez muitos de vós tenham pensado que o custo de 300 dólares USA para a inscrição no Congresso que todos pagámos estava longe de ser barato. Se muitos de vós, que vêm de países mais ricos, estão inclinados a pensar que essa inscrição é cara, podem imaginar o que pensarão os professores de Matemática de muitos países cujo salário mensal está bastante abaixo de tal quantia. Se considerarem esta situação com atenção, estou certo que muitos de vós estariam de acordo em pagar, juntamente com a vossa própria inscrição, uma parte da de uma pessoa de um dos países menos favorecidos economicamente, cuja presença neste Congresso seria assim possível. Talvez devessemos introduzir este tipo de procedimento não meramente como uma opção, mas como um muito razoável e justo imposto de solidariedade. Ser solidário não é uma questão de caridade. **Ser solidário é uma questão de justiça.**

Para este Congresso existiu uma Comissão de Ajudas Económicas a fim de financiar alguns participantes de países onde as condições económicas não são boas. Aproximadamente 90 participantes receberam algum tipo de ajuda para assistirem ao Congresso, havendo entre eles representantes de todos os continentes. Isto foi possível graças aos esforços combinados da Agência Canadiana para o Desenvolvimento Internacional, da UNESCO, da Organização do ICME 7, da União Matemática Internacional e da Comissão Internacional de Educação Matemática. No total, distribuíram-se 75000 dólares canadianos. Quero expressar a nossa mais cordial gratidão a todos estes patrocinadores e também às pessoas responsáveis pela Comissão de Ajudas Económicas pelo trabalho delicado e intenso que realizaram.

No entanto, poderíamos tentar alcançar cotas ainda mais elevadas no futuro. Com este tipo de contribuições pessoais que sugerimos talvez possamos, no futuro, ter entre nós várias centenas de participantes de muitos mais países que têm uma necessidade urgente, muito mais do que a maioria de nós, de oportunidades de desenvolvimento e intercâmbio como as que o Congresso vai proporcionar. O Comité Executivo gostaria de apresentar esta ideia aos nossos colegas espanhóis que serão os responsáveis pela organização do próximo Congresso Internacional, ICME 8, em Sevilha, para que explorem a possibilidade da sua concretização. Para isso, estamos ainda a tempo.

Poderíamos ainda proceder de modo idêntico com as Actas deste Congresso e com muitas outras publicações relacionadas com a Comissão Internacional. As pessoas que se encontram em melhor situação económica poderiam pagar um pouco mais de modo que estas publicações que consideram úteis possam chegar com grandes descontos a pessoas, lugares e escolas em países menos favorecidos, onde, de outro modo, talvez não haja possibilidade de as comprar. Talvez devessemos instaurar um novo estilo de vida, espírito de austeridade e moderação. Austeridade não por si mesma mas para repartir. Talvez devessemos propor um novo lema: **leva um, paga dois.**

Naturalmente, este Programa de Solidariedade e este Fundo de Solidariedade, baseados prioritariamente no empenhamento e em contribuições pessoais de muitas pessoas em todo o mundo, terão que ser dotados de alguma estrutura de modo a serem eficazes. Essa estrutura terá que procurar por todos os meios que os recursos humanos e materiais cheguem de facto onde são realmente necessários e onde podem actuar mais eficazmente. Terá que explorar quais são em cada caso as formas correctas de conseguir tal objectivo. Como muitos de vós sabem, esta não é uma tarefa fácil já que em muitos casos os recursos chegam com restrições e noutros casos são canalizados através de organizações de cuja honradez, imparcialidade e integridade se pode duvidar com toda a justificação.

Este espírito de solidariedade está plenamente de acordo com os objectivos do programa proposto pela União Matemática Internacional para o ano 2000, declarando-o como o ano mundial da Matemática.

Como talvez saibam, no dia 6 de Maio de 1992, a União Matemática Internacional, em conjunto com a UNESCO e com outras instituições, declarou o ano 2000 como o **Ano Mundial da Matemática**. Decidiu-se, no segundo objectivo deste programa, proclamar a Matemática como uma das chaves para a compreensão do mundo e para o progresso da cultura humana. A Comissão Internacional de Educação Matemática, em conjunto com a Comissão para o Desenvolvimento e Intercâmbio, ficou responsável pela tarefa de promover um desenvolvimento adequado da educação matemática em todos os países do mundo. Podemos estar certos de que tal desenvolvimento será impossível a menos que tomemos medidas inovadoras drásticas que incluam um empenhamento pessoal como aquele que o Comité Executivo decidiu estimular na comunidade matemática internacional.

Se este Sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática servir para impulsionar um tal espírito de solidariedade, em primeiro lugar entre os seus participantes e, através deles, nas suas comunidades matemáticas locais, terá prestado um grande serviço ao desenvolvimento matemático no nosso mundo. Esperemos que assim seja.

Para concluir: **está inaugurado este Sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática.**

Publicações APM

Calculadoras na Educação Matemática
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)
O computador na aula de Matemática
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)
Cronologia Recente do Ensino da Matemática
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)
Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)
A Matemática na Vida das Abelhas
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)
Renovação do Currículo de Matemática.
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)
Viagem de Ida e Volta
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)
Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática
1ª edição, Outubro de 1991, 304 pp.
3000$00 (sócios 2100$00)
Só ...Problemas
1ª edição, Outubro de 1991, 100 pp.
550$00 (sócios 400$00)
Computadores no Ensino da Matemática
1ª edição, Setembro de 1991, 258 pp.
1200$00 (sócios 850$00)
Cadernos de Educação Matemática nº2. 1ª edição, Junho de 1991, 112 pp.
800$00 (sócios 600$00)
Avaliação: uma questão a enfrentar
1ª edição, Outubro de 1991, 97 pp.
450$00 (sócios 300$00)

Algumas Noções Elementares de Astronomia
1ª edição, Outubro de 1991, 28 pp.
200$00 (sócios 150$00)
Educação e Matemática
nº1 a nº6 — 200$00
nº7 a nº12 — 250$00
nº13 e seguintes — 400$00
nº 19/23 — 800$00
Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.
Actas do Profmat 88
1ª edição, Janeiro de 1989, 269 pp.
550$00 (sócios 400$00)
Actas do Profmat 89
1ª edição, Setembro de 1990, 496 pp
1500$00 (sócios 1000$00)
Actas do Profmat 90 (vol. I)
1ª edição, Novembro de 1990, 188 pp.
700$00 (sócios 500$00)
Actas do Profmat 90 (vol. II)
1ª edição, Setembro de 1991, 244 pp.
1100$00 (sócios 800$00)
Actas do Profmat 91 (vol. I)
1ª edição, Outubro de 1991, 139 pp.
5500$00 (sócios 400$00)
Actas do Profmat 91 (vol. II)
1ª edição, Outubro de 1992, 304 pp.
1100$00 (sócios 800$00)

Novidades

Agenda do Professor 1992/93
1ª edição,Setembro, 1991, 140 pp.
300$00 (sócios 250$00)

A Trigonometria está viva
1ª edição, Outubro de 1992, 48 pp.
450$00 (sócios 350$00)

Ideias, actividades, desafios e outras coisas mais
1ª edição,Outubro de 1992, 66 pp.
780$00 (sócios 600$00)

Aventura no País da Matemática
Roteiro de uma exposição
1ª edição, Outubro de 1992, 40 pp.
950$00 (sócios 750$00)

Quadrante nº1
1ª edição, Outubro de 1992, 192 pp.
900$00 (sócios 700$00)

Publicações — Envio pelo Correio

Caso deseje encomendar publicações deverá enviar fotocópia desta ficha preenchida e a quantia respectiva em cheque, ou vale postal, acrescida da respectiva percentagem de porte de correio, para: Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11, 1500 Lisboa.
As percentagens variam de acordo com a quantia em que avulta cada encomenda: até 1000$00 - 20%; de 1000$00 a 2000$00 - 15%; de 2000$00 a 5000$00 - 10% e mais de 5000$00 - 5%.

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo
		Subtotal	
		Portes do Correio (20 %)	
		Valor Total	

Sócio da APM ☐ Nº ☐ Assinatura
Não Sócio ☐ ____________________
Nome ______________________________
Morada ______________________________
______________________ C. P. ____________________
Data do pedido ______________________________

Para uso da APM — Pedido recebido em ________
Assinatura — Enviado em ____________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

A formação de professores, um novo amor?

Albano Silva

Algumas reflexões à solta... sobre uma nova (?) problemática na vida da APM.

A APM e a formação contínua Algumas considerações gerais

A formação contínua é inerente às diversas áreas de trabalho que se têm desenvolvido na Associação de Professores de Matemática.

É hoje reconhecida a importância que tem tido para o desenvolvimento profissional dos professores a existência da APM e das suas diferentes realizações — ProfMat(s), Encontros Regionais, Educação e Matemática, Publicações, Exposições, etc.

De facto, a formação contínua tem estado presente nestas iniciativas (de forma implicitamente evidente) mas, mais por consequência das preocupações dominantes de dinamização dos professores, tendo em vista a melhoria do ensino da Matemática.

Desde a fundação da APM que se perfilaram três ordens de preocupações, três frentes de trabalho para a Educação Matemática — dinamização pedagógica, formação de professores e investigação (ver sessão plenária de J. P. Ponte no ProfMat de Portalegre). Talvez a intervenção pública sobre questões de política educativa devesse ser considerada uma quarta vertente de trabalho, embora aqui se possa contrapor que se trata de uma área inerente às restantes.

Apesar de nunca termos deixado de ter aquelas três primeiras áreas de trabalho no horizonte — elas são, em limite, indissociáveis — tem sido na dinamização pedagógica que temos centrado fundamentalmente as nossas forças, preocupações e iniciativas.

Seis anos volvidos sobre a fundação da APM é ainda na dinamização pedagógica — incentivar, intervir, trocar experiências, experimentar, inovar e fundamentalmente fazer crescer uma "onda" de entusiasmo que potencie a criação de condições para tudo isso —, onde há tanto para fazer, que deveremos continuar a centrar parte importante das nossas preocupações. Mas é chegado o momento de explicitar vontades e criar condições para assumir de forma mais actuante e organizada as outras duas áreas de intervenção — formação e investigação. Mais, talvez tenha chegado o momento "amadurecido" de intersectarmos de forma mais esclarecida e profunda as três (ou até as quatro) vertentes de trabalho.

Neste sentido, um novo grupo de trabalho vai ganhando corpo na APM — o Grupo de Trabalho de (sobre) Formação Contínua. É o início de uma reflexão mais sistematizada sobre a formação contínua, a forma como a entendemos e como deverá ser enquadrada na vida da APM

A APM e a formação contínua Nasce um novo grupo de trabalho

A formação contínua está na ordem do dia da profissão de professor. Provavelmente ela faz parte integrante do entendimento que temos da nossa profissão, mas o que é certo é que só hoje é que ela está na ordem do dia. E sabemos bem porquê!

A associação que é feita entre a formação e a progressão na carreira docente é uma relação que apesar da evidência tem, curiosamente e ao mesmo tempo, qualquer coisa de perverso.

No fundo, embora nos pareça que a avaliação do desempenho deva ter também (ou fundamentalmente) que ver com a valorização profissional que cada professor faz, ou seja, com o investimento que coloca na sua própria formação, com a implicação que tem no desenvolvimento de iniciativas, experiências e projectos na sua escola com alunos e colegas de profissão, com trabalhos e investigações que individualmente realiza, receamos, no entanto, que a corrida aos créditos possa perverter a formação, comprometendo uma dinâmica que parta de necessidades sentidas pelos professores no desenvolvimento dos seus projectos pessoais e pelas escolas no desenvolvimento dos seus projectos educativos. O triângulo Professor - Formação - Escola, assente fundamentalmente em dinâmicas activas de formação e preocupações de investimento na profissão pode dar lugar ao triângulo Professor - Consumo de Formação - Crédito, assente unicamente em dinâmicas passivas de formação com limitadas preocupações de investimento profissional.

Parafraseando Sérgio Godinho será que a formação é, hoje, um novo "amor" que se perfila como "uma faca de dois gumes, de um lado a paixão e do outro os ciúmes"?

A criação de um grupo de trabalho sobre a formação contínua na APM é de alguma forma a demonstração da vontade de querer intervir nesta "polémica" animando-a, com um projecto próprio, na procura de processos de formação que:

• valorizem as experiências e projectos de formação em curso nas escolas;

• potenciem a criação de novos projectos centrados nas escolas e nos seus problemas (incluem necessidades, expectativas e perspectivas);

• apoiem e estimulem a autoformação;

• vivifiquem a interacção entre a acção e a reflexão, com incidência desta sobre as práticas, no sentido de as melhorar permanentemente;

• saibam equilibradamente interagir a filosofia e o acompanhamento de projectos com outros tipos de formação (acções presenciais, seminários, oficinas, módulos e cursos), acreditando que a formação se desenrola num processo de reflexão sobre as práticas, intersectada com contributos do exterior;

• possam responder a necessidades evidenciadas por grupos de professores envolvidos em dinâmicas de experiências de inovação ou em grupos informais de formação ao mesmo tempo que alarguem perspectivas e vontades de outros participarem em idênticas iniciativas;

• intersectem saberes e vivências de sócios de diferentes níveis de escolaridade.

É nossa convicção que a existência de um projecto de formação próprio com características nacionais passível de descentralizar regionalmente contribui para um reforço da autonomia da APM, potencializa as diversidades dos seus sócios (diferentes experiências, diferentes envolvimentos, diferentes saberes, diferentes níveis de escolaridade, em suma, diferentes percursos), responde e cria necessidades de formação e potencia uma maior dinâmica associativa dos professores de Matemática em torno dos diferentes núcleos existentes (e a existir) da APM.

Do trabalho realizado nesta área, em consonância com outras áreas de trabalho existentes, resultarão, com certeza, alterações qualitativas no ensino da Matemática em Portugal.

Nesta perspectiva e apesar de sabermos que estamos perante um desafio complexo, mas onde queremos intervir, a criação de um Centro de Formação na APM, com princípios orientadores e um plano de actividades, e uma eventual candidatura ao programa FOCO deverão ser próximos passos? Com que vantagens e com que inconvenientes?

Sem prejuízo de uma discussão mais organizada nas estruturas da APM, ela fica desde já aberta. Ao Grupo de Trabalho vão chegar pontos de vista, ideias, propostas, interrogações, "certezas" e "incertezas".

Um novo desafio aos sócios? Talvez. Mas não é essa uma razão primeira da existência da nossa Associação?!

Uma nota final

Embora este texto traduza uma opinião individual do seu autor, na sua elaboração estiveram presentes os contributos provenientes de uma primeira discussão havida no Conselho Nacional da APM e, sobretudo, os contributos provenientes da reflexão que sobre esta problemática o Grupo de Trabalho tem vindo a realizar.

Albano Silva
Esc. Prep. Marquesa de Alorna

Materiais para a aula de Matemática

Uma das finalidades desta ficha de trabalho* é articular diversas formas de representação (matemática) de uma situação da vida corrente. Realmente nas questões I e II trata-se de exprimir graficamente duas relações funcionais diferentes (no 1° caso uma relação linear, no 2° caso uma curva). Na questão II será com naturalidade que se coloca a necessidade de pensar no sentido da concavidade da curva e atribuir - lhe significado (físico). Na questão III está em causa a tradução e explicação de relações funcionais utilizando linguagem corrente.

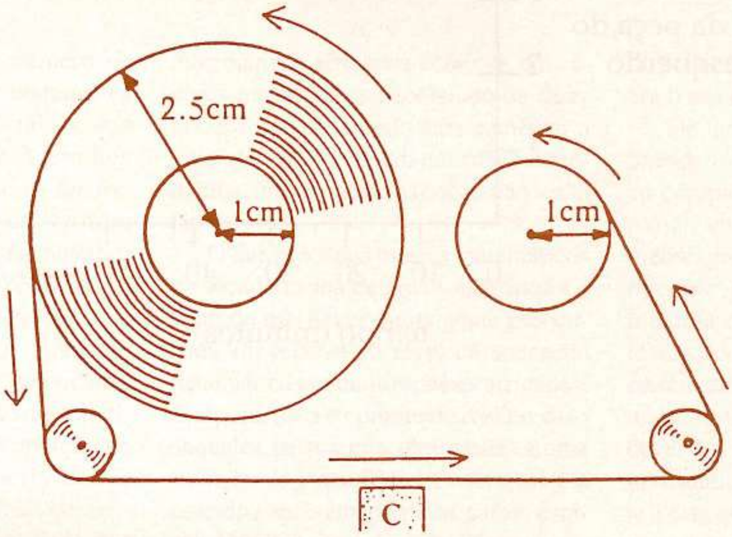
Propostas desta natureza podem ajudar professores a encarar a visualização como um processo de exploração de algumas ideias matemáticas importantes como por exemplo a de monotonia de uma função num contexto realista. Os novos programas de Matemática, sobretudo os do Secundário continua a colocar grande ênfase no estudo analítico de funções. e faz um compromisso rápido com as aplicações da Matemática.

Graciosa Veloso
Esc. Sec. nº1 de Loures

* Adaptada de *The Language of Functions and Graphs*, ed. Shell Centre International, Londres.

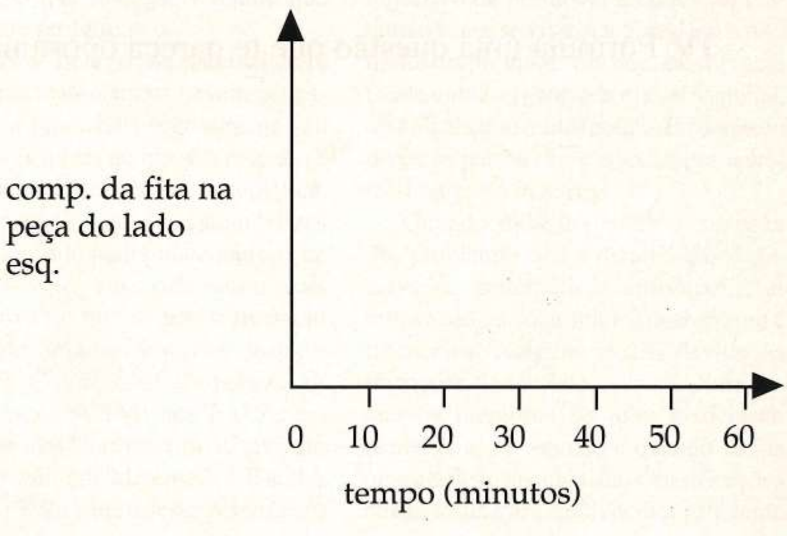
Materiais para a aula de Matemática

O leitor áudio

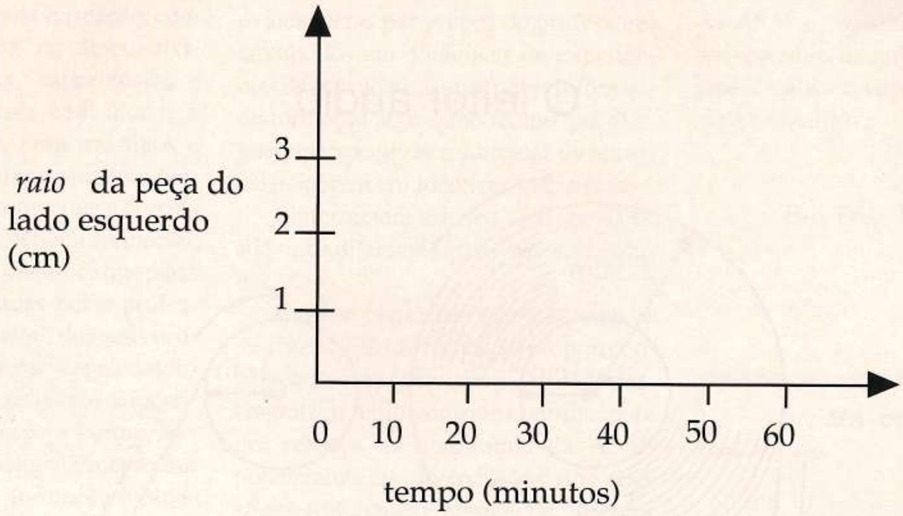


Esta figura representa um leitor áudio na posição de início de leitura. A fita está totalmente enrolada à volta da peça circular do lado esquerdo. A leitura da fita é feita pela peça “C” a uma velocidade constante e as setas representam o sentido do movimento da fita, da esquerda para a direita. Os suportes circulares têm raios iguais a 1 cm e a largura da coroa formada pela fita na posição de início de leitura (a fita está toda enrolada no lado esquerdo) é de 1,5 cm. A leitura total da fita num dos sentidos é feita em 60 minutos.

I Faz um esboço do gráfico que mostre como é que o *comprimento* da fita na peça do lado esquerdo varia com o tempo.



II. Faz um esboço do gráfico que mostre como é que o raio da peça do lado esquerdo varia com o tempo de leitura.



III. Descreve e explica como é que o *raio* da peça do lado direito varia com o tempo.

IV. Formula uma questão que te pareça oportuna no contexto desta actividade.

A revolução da Educação Matemática em África

Simeon Hau

Retomamos neste número o Dossier Internacional sobre a situação da Educação Matemática no estrangeiro, com artigos escritos especialmente para a nossa revista.

Percorrendo um certo número de publicações sobre educação matemática do mundo desenvolvido, tais como *Mathematics Teacher, The Australian Mathematics Teacher, Journal for Research in Mathematics Education, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, Education Studies in Mathematics* e muitas outras, fica-se com a impressão de que não existem muitas actividades relacionadas com a educação matemática em África. Será que a proporção de artigos referentes às actividades matemáticas africanas, publicadas nestas revistas, reflecte a intensidade das actividades em educação matemática realmente existentes em África? Por experiência própria sei que existem muitas actividades dessas a acontecer lá. O problema pode dizer respeito à proporção em que são aceites os artigos sobre educação matemática africana pelas revistas ocidentais.

Uma razão óbvia para a baixa taxa de aceitação consiste no facto do ocidente se situar num diferente nível de desenvolvimento em educação matemática e, consequentemente, não considerar a narração das actividades existentes em África de grande importância.

Independentemente das razões que fazem crer existir uma baixa actividade matemática no continente africano, uma coisa que precisa de aí ser feita é uma revolução em educação matemática. Parece que existe muito campo em que os professores de matemática africanos se podem expandir. Estou convencido de que existe espaço suficiente para que a educação matemática atinja mais altos níveis em todo este mundo. Tanto os matemáticos africanos como os educadores matemáticos necessitam de fazer um esforço deliberado para aumentar o nível da actividade em educação matemática. Infelizmente, as coisas não serão fáceis.

O que preocupa muitos matemáticos e educadores matemáticos africanos é o facto de não haver muita gente preocupada em relação ao nível da educação matemática em muitos países africanos. Claro que isto é compreensível no caso daqueles países que têm estado numa situação de instabilidade, mas qual é a desculpa apresentada pelos países estáveis? Visitei pessoalmente diversos países africanos, e uma das questões que perguntei aos meus colegas africanos foi: "A vossa disciplina merece atenção especial aqui?". A resposta usual era: " Está a brincar?".

Para que a África recupere o seu lugar no campo da matemática, como referi acima, devem ser dados passos consideráveis de modo a alterar a actual situação. O que se segue é aquilo que penso pode ser feito.

Em primeiro lugar, os matemáticos e educadores matemáticos devem preparar-se para lutar. Eles seguramente são os melhores juízes no que diz respeito à importância da educação matemática. Estou convencido que se sentem felizes por ter adquirido poder matemático que os ajuda a viver uma vida muito mais significativa do que se não o tivessem conseguido. Seja dito de passagem que o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) nos E.U.A. escreveu nas suas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1989 a) que o desenvolvimento do poder matemático em todos os alunos era o seu objectivo principal.

De acordo com os *Professional Standards* do NCTM, o poder matemático compreende "a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente; para resolver problemas não rotineiros; para comunicar sobre e por meio da matemática; e para relacionar ideias dentro da matemática e entre a matemática e outras actividades intelectuais" (NCTM, 1991, p.1). Penso que é dever dos matemáticos e dos educadores matemáticos fazerem algo relativamente a esta questão, de modo a que o poder matemático possa ser adquirido pelo maior número possível de pessoas. Não deveriam deixar esta tarefa por mãos alheias.

Infelizmente, por muito energética e entusiasmada uma pessoa se sinta com a matemática, se pretender causar algum impacto, terá de haver continuidade. Por outras palavras, será necessário que os educadores matemáticos se juntem com objectivo de promover a educação matemática nos seus países. Este é um ponto muito importante. Se não existir uma frente unida, organizada a nível nacional, será alcançado muito pouco. Eu conheço diversos países cujas associações matemáticas estão inactivas.

Quando indaguei sobre a natureza dos problemas que a maioria das organizações matemáticas enfrentam, fui informado que o problema número um é financeiro. Nalguns casos, devido às restrições financeiras, a única altura em que os membros de uma associação matemática se reunem é quando se faz uma aferição nacional das classificações de um teste. Para resolver este problema de uma vez por todas, temos de considerar o modelo que foi adoptado nos E.U.A., onde o *National Council of Teachers of Mathematics* é um organismo autónomo dirigido por um grupo de directores. Tenho a certeza que este tipo de organização poderia recolher fundos por um processo qualquer. Será este plano muito sofisticado para certos países? Penso que não. Acredito sinceramente que uma vez este passo dado, o crescimento da matemática no continente seria acelerado. Poderá ser necessário, numa fase inicial da formação individual das associações matemáticas independentes em cada país, formar um organismo similar a nível do continente. Este organismo poderá ser útil no sentido de aconselhar e apoiar aquelas associações que estão actualmente a passar por algumas dificuldades.

Assim que esta "frente organizada da matemática" for formada, estou certo de que muito progresso será obtido na educação matemática no continente africano. No que se segue discutiremos o modo como um tal plano irá revolucionar a abordagem da educação matemática no continente.

Os futuros matemáticos

O futuro da educação da matemática deve estar sempre presente em todas as actividades realizadas pelas instituições referidas acima. Como todos sabemos, o futuro reside nas crianças, e isto significa que a prioridade tem de ser centrada nos alunos. Os educadores matemáticos têm que compreender que os alunos que vão à escola hoje serão os futuros matemáticos africanos. As associações matemáticas devem convencer as autoridades que se deve fornecer educação matemática a todos os alunos. Evidentemente, todos os alunos quer dizer tanto rapazes como raparigas. Neste momento, é triste que a proporção de matemáticos e educadores matemáticos do sexo feminino, relativamente ao masculino, seja de 1 para 20. Esta proporção deve diminuir, e para tal é necessário que seja realizado um trabalho considerável por todos os interessados. As organizações ligadas à educação matemática que estamos a propor deveriam liderar este processo.

O objectivo de fornecer educação matemática a todos implica que a certa altura seja necessário apoiar financeiramente estudantes que estejam interessados nesta área. Isto significa que as associações devem ser capazes de angariar fundos para bolsas de estudo. Alguns Governos estão já a fazer isto; no entanto, infelizmente, em muitos locais a maior parte das bolsas de estudo são concedidas a estudantes de minas, agricultura, silvicultura e outras áreas práticas. A razão disto é que as pessoas julgam que estas actividades correspondem a necessidades mais imediatas. No entanto, a verdade é que África precisa tanto de matemáticos como de agricultores ou outras profissões similares.

A minha experiência pessoal diz-me que, devido à falta de professores de matemática, esta disciplina é ensinada por outros professores. Isto não nos levará muito longe na tentativa de melhorar a educação matemática no continente. Deve ser levantada a questão seguinte: "Para onde vão os professores de matemática depois da graduação?". A resposta é que a maior parte dos poucos que acabam o curso vão para ocupações onde são mais bem pagos. Que melhor solução pode existir aqui do que competir com o outro mercado? O que quero dizer é que os educadores deveriam usar a lei da oferta e da procura para lidar com esta falta de educadores matemáticos. Também neste caso este assunto seria mais bem tratado por uma associação como aquela já aqui proposta. Este assunto deve ser levado a sério porque é uma das principais razões pelas quais o progresso nesta área não tem sido ainda visível. Quanto mais professores de matemática não qualificados ensinarem esta disciplina, pior o resultado.

Um dos principais problemas que a associação profissional de matemáticos e educadores matemáticos terá que enfrentar reside no conteúdo matemático que é actualmente ensinado. De momento, a matemática ensinada na maioria dos países africanos é uma matemática "estrangeira". Com isto quero significar que a matemática é encarada como se não fosse "nossa" e, na realidade, não parece "possuirmos" o conhecimento matemático. Isto está certamente relacionado com a relevância da matemática que é ensinada nas nossas escolas. Além disso, as relações dessa matemática com a realidade não são focadas e quando tal acontece, não se trata da "nossa" realidade.

A questão levantada acima diz respeito à filosofia da matemática. As organizações matemáticas terão de tomar uma posição firme sobre como deve ser vista a matemática se se quiser que seja aprendida pelo maior número possível de pessoas. Esta questão exige muita reflexão. Será a matemática um corpo de conhecimento infalível e objectivo? Ernest (1991) afirma que uma tal visão da matemática não implica responsabilidade social. Declara que "... a fraca participação de sectores da população, tal como as mulheres; o sentimento de alienação cultural sentido por muitos grupos de estudantes; a relação da matemática com problemas tais como a transmissão de valores políticos e sociais; o seu papel na distribuição da riqueza e poder; nenhuma destas questões são relevantes para a matemática" (Ernest, P.,1991, p. xii). Por outro lado, Ernest salienta que a matemática pode ser vista como uma construção social falível, o que significa que é um processo de pesquisa e aquisição do conhecimento, uma criação e invenção humana continuamente em expansão, e não um produto acabado. (p. xii).

O último assunto que eu gostaria de apresentar refere-se à investigação. Parece que, na maior parte dos casos, as pessoas menosprezaram o papel da pesquisa numa reforma. O que está aqui a ser proposto é uma reforma profunda e que, se for tomada a sério, poderá revolucionar a educação da matemática no continente. Larrabee (1945) é citado como tendo afirmado que qualquer pessoa que tenha estudado a longa história das pretensões sobre o conhecimento é "surpreendida pela discrepância entre a dimensão dessas pretensões e as poucas provas que realmente existem para as apoiar (NCTM, 1989 b, p, 28). Isto significa que a reforma deveria ser baseada em resultados da investigação, tal como foi declarado no boletim do NCTM:

(continua na pág 28)

O concurso de problemas do Profmat 92

José Paulo Viana

Como já se tornou habitual, realizou-se um concurso de problemas durante o último ProfMat. A proposta deste ano foi a que se segue:

Álvaro, Batista, Carlos e Daniel são quatro gémeos absolutamente iguais e andam sempre vestidos da mesma maneira. Álvaro e Batista são verdadeiros — dizem sempre o que pensam — e os outros dois irmãos são mentirosos — dizem sempre o contrário do que pensam.

Outra característica destes gémeos é a seguinte: enquanto Álvaro e Carlos têm ideias correctas sobre tudo — por exemplo, acreditam que a soma de dois mais dois é quatro —, Batista e Daniel pensam tudo ao contrário — por exemplo, Batista julga que não se chama Batista...

Os quatro gémeos são alunos de uma escola secundária e pertencem à mesma turma. Um dia o professor de Matemática encontra um deles no recreio e pergunta-lhe: "Quem és tu?". O gémeo respondeu-lhe com um dos quatro nomes (Álvaro, Batista, Carlos ou Daniel) e o professor ficou a saber quem ele era.

Pouco depois, o professor de Filosofia encontra o mesmo gémeo e pergunta-lhe: "Quem acreditas que és?". De novo o gémeo lhe responde com um dos quatro nomes e o professor ficou a saber quem ele era.

Afinal, quem é ele?

Este ano, ao contrário do anterior, o júri do concurso (Eduardo Veloso e eu) resolveu escolher um problema mais complexo e, sobretudo, que permitisse estratégias de resolução bastante diferentes. Para ir habituando os possíveis concorrentes a este universo dos quatro gémeos, nas semanas anteriores foram propostos nos "Desafios" do *Público* dois problemas do mesmo tipo mas mais fáceis. Com isto, algumas pessoas ficaram em vantagem, mas paciência...

Recebemos 6 respostas individuais:
— Helena Valério
— Assunção Ferraz de Oliveira
— Ana Cristina Brito
— Maria José Santos
— Manuel António Rodrigues
— Elisa Silva

e 5 respostas colectivas:
— Rosa Costa e Olímpia Rodrigues
— Pedro Esteves e Sérgio Valente
— Ana Lúcia Santos e Dora Almeida
— Alzira Santos e Mª João Lagarto
— Susana Carreira, Otília Moreirinha, Leonor Cunha Leal e Ana Paula Canavarro.

Para se resolver o problema era essencial conseguir responder primeiro a duas questões que levantavam muitas dúvidas:

1ª) Que significa exactamente "pensar ao contrário"?

2ª) Que diferença existe entre as duas perguntas feitas pelos professores?

Na nossa opinião, pensar ao contrário é pensar exactamente o oposto da verdade: Batista pensa que não é Batista (mas não pensa que é outra pessoa — isso seria *pensar diferente*).

No que se refere às perguntas dos professores, há realmente diferença. Para responder a "Quem és tu?", o gémeo tem de pensar primeiro "Quem sou eu?" e só depois fala.

Para responder a "Quem acreditas que és?", terá de pensar primeiro "Quem sou eu?" e a seguir "Que acredito sobre o meu pensamento anterior", ou seja, tem de pensar **duas** vezes antes de falar. Ora, se para quem tem ideias correctas é indiferente pensar uma ou duas vezes, isso já não se passa para quem pensa tudo ao contrário — pensar duas vezes é inverter duas vezes a verdade.

Vejamos agora que respostas poderiam ter dado cada um dos gémeos à pergunta do primeiro professor "Quem és tu?". Por comodidade escreveremos apenas as iniciais das possíveis respostas.

O Álvaro só pode responder A.

O Batista, como pensa que não se chama Batista e fala verdade, pode responder qualquer um dos outros nomes: A, C ou D.

O Carlos sabe perfeitamente que se chama Carlos, mas como é mentiroso, vai responder A, B ou D.

O Daniel pensa que não se chama Daniel mas como mente responde precisamente D.

Se o professor de Matemática tivesse ouvido o gémeo responder A ou D ficava sem saber com quem estava a falar pois havia, tanto num caso como no outro, mais do que um irmão a poder dar essa resposta. Mas se a resposta foi C ficou a saber que estava perante o Batista — só ele poderia ter respondido assim. Da mesma forma, se ouviu B ficou com a certeza de que ele era o Carlos.

Ou seja, o professor de Matemática ficou a saber com quem falava, mas nós só sabemos que era com o Batista ou com o Carlos.

Passemos à 2ª pergunta "Quem acreditas que és?".

O Álvaro, claramente, só pode responder A.

O Batista pensa que não se chama B, mas ao pensar sobre o que acredita comete novo erro (que anula o primeiro) e responde B.

O Carlos, como pensa correctamente

(*continuação da página anterior*)
deveria responder C mas, como mente, diz A, B ou D.

O Daniel, tal como o Batista, comete dois erros de pensamento que se anulam e deveria responder D. Mas como é mentiroso dirá A, B ou C.

Se a resposta que o professor de Filosofia ouviu fosse A ou B ficava sem saber com quem falava (vários gémeos poderiam responder assim). Se ouviu C, ficou com a certeza de estar perante o Daniel. Se ouviu D é porque o gémeo era o Carlos.

Em resumo, o professor de Matemática encontrou o Batista ou o Carlos. O professor de Filosofia encontrou o Carlos ou o Daniel. Portanto, o gémeo em questão só podia ser o Carlos.

A resolução que mais se aproximou da nossa foi a do colectivo Susana Carreira, Otília Moreirinho, Leonor Cunha Leal e Ana Paula Canavarro. Esta resposta, seguindo os conselhos de Gúzman, estava apresentada sob a forma de um protocolo com 3 anexos...

Parabéns às quatro colegas que em breve irão receber o prémio — o livro "Desafios 2" das Edições Afrontamento.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Carnide

Correio dos Leitores

Com muito pesar, vimos noticiar o falecimento, a 20 de Outubro de 1992, de Amélia Folhadela, sócia nº 166 da APM, presença constante e interessada em todas as actividades do núcleo do Porto.

Dela recordamos, apesar de prolongada doença, a sua extraordinária força e vontade de viver e de se manter sempre actualizada e actuante no campo da Educação Matemática, do que é prova a sua inscrição no ProfMat 92, onde infelizmente já não pode estar presente.

Professora efectiva na Esc. Sec. Garcia da Horta, no Porto, onde foi responsável pelo Clube de Matemática da Escola Cultural em 87/88 e orientadora de estágio do ramo educacional da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto de 1988 a 1991. Foi também professora na Faculdade de Letras da Universidade do Porto, monitora de várias acções de formação, e autora do livro *Iniciação à Estatística* para o 11º ano.

Os seus materiais relativos à Matemática (livros, publicações e muitos jogos) foram doados pela família ao núcleo do Porto da APM, o que agradecemos.

Helena Martins
Isabel Quinta
Luis Reis
Teresa Barandela
Núcleo Regional do Porto (APM)

Matemática na Imprensa

SABIA QUE...

▪ Um total de 376 presos espanhóis, numa população reclusa de 40 mil, se matricularam durante o ano lectivo de 1991-92 nos estudos universitários que é possível frequentar nas instituições penitenciárias do país vizinho. Destes, 150 fizeram o curso de acesso à universidade e 226 frequentaram cursos superiores. Cem matricularam-se em Direito e 202 escolheram letras. O único curso que não suscitou interesse a nenhum preso foi o de matemática.

© PÚBLICO

(*continuação da pág. 26*)
"O papel da investigação no movimento de reforma consiste em fornecer conhecimentos fidedignos sobre aspectos importantes da reforma "(NCTM, 1989b, p.10).

Concluo este texto salientando o facto de que, para que ocorra uma mudança genuína, no que diz respeito à posição da matemática na sociedade, é necessário um esforço considerável para iniciar e realizar efectivamente mudanças permanentes. Sugiro que África aprenda com os outros, especialmente com a abordagem realizada nos E.U.A. de formar um organismo matemático autónomo e que pode angariar os seus próprios fundos. Claro que os E.U.A. não devem ser o único país que deveremos ter em conta na construção do nosso modelo, dvemos ter o espírito aberto quanto a isto. Estão os matemáticos e educadores matemáticos africanos prontos para uma revolução?

Referências

Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. Bristol, PA.: Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (1989a) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989b) *Setting a Research Agenda* Vol. 5. Reston, Va.: NCTM & Lawrence.

National Council of Teachers of Mathematics (1991) *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Simeon Hau
University of Georgia
Mathematics Education Department

Aparecimento dos números negativos e dos complexos a partir da resolução de equações

José Orlando Freitas

Se pensarmos qual o número que satisfaz a equação $x+1=0$, virá $x=-1$. Só com Albert Girard, em 1629, se aceitaram os números negativos como soluções de equações. Este matemático afirmava: "O número negativo em geometria indica um recuo enquanto o positivo indica um avanço." Até Descartes desconfiava destes números, nunca os utilizando na geometria (evitando-os) e chegando a escrever em 1637: "Muitas vezes acontece que as soluções são impossíveis ou inferiores a zero."

Se pensarmos numa solução da equação $x^2+1=0$, será um número ainda mais monstruoso. Podemos pensar em $\sqrt{-1}$ como solução da equação anterior; Euler foi o primeiro matemático a representar $\sqrt{-1}$ por i. Mas, segundo reza a história, o aparecimento dos números complexos deve mais às equações do 3° grau do que às de 2° grau, como poderemos ver já de seguida.

Em 1545 Geronimo Cardano, um matemático e filósofo italiano, publicou um livro intitulado *Ars Magna* (traduzido em inglês por *The Great Art*), no qual descreve um método algébrico para resolver equações do 3° e 4° graus. Foi por esta altura que pela primeira vez a raíz de um negativo surgiu.

Qualquer equação do 3° grau é transformada facilmente numa do tipo $x^3=ax+b$. A solução de Cardano é

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Esta última fórmula é conhecida como Fórmula de Cardano, embora descoberta por Tartaglia (ver *Jornal de Matemática Elementar* n° 107).

Quando esta fórmula é aplicada à equação $x^3=15x+4$, esta fornece o valor $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano afirmava que a "sua" fórmula era inaplicável neste caso.

Para $x^2+1=0$ não existe solução real, para $x^3=15x+4$ podemos, por inspecção, verificar que $x=4$ é uma solução real; de facto, as duas outras raízes também são reais: $-2\pm\sqrt{3}$.

O problema foi resolvido pelo engenheiro hidráulico Rafael Bombelli, cerca de trinta anos depois da publicação da obra de Cardano. Bombelli fez a "feliz conjectura" de que, como os números $2+\sqrt{-121}$ e $2-\sqrt{-121}$ diferem apenas num sinal, o mesmo deveria ser verdade na verdadeira raíz cúbica. Assim, fez

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$$

e $$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}.$$

Aplicou a àlgebra, chegando a $a=2$ e $b=-1$, e mostrando que

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=$$
$$=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4.$$

"Bombelli, com esta excelente ideia, deu significado ao *significado*. Este acontecimento assinala o nascimento dos números complexos". (Israel Kleiner, 1988)

Para resolver os aparentes paradoxos das equações cúbicas exemplificadas por este tipo de equações, Bombelli desenvolveu um conjunto de regras com números complexos. As suas regras, na nossa notação, são

Geronimo Cardano (1501-1576)

$$(\pm1)i=\pm i$$
$$(\pm1)(-i)=\mp i$$
$$(+i)(+i)=-1$$
$$(-i)(+i)=1$$
$$(+i)(-i)=1$$
$$(-i)(-i)=-1$$

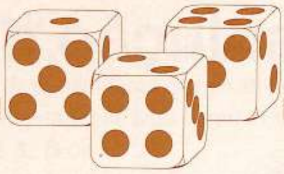
Também considerou exemplos envolvendo adição e multiplicação de complexos, tais como $8i+(-5i)=+3i$ e $\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{2i}}\right)\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8i}}\right)=\sqrt[3]{8+11\sqrt{2i}}$.

Bibliografia:

Abrantes, Paulo. (1989). *O Novo M7* Lisboa: Texto Editora.

Kleiner, Israel. (1988). *The story of complex numbers*. Mathematics Teacher 81-7. 583-592.

José Orlando Freitas
Esc. Sec. do Funchal



Vamos jogar

Corrida de Automóveis

Nº de Jogadores: no mínimo dois. Não existe um limite máximo porque esse limite vai depender da largura da pista desenhada.

Material: carrinhos, ou alguma representação destes em número correspondente ao número de jogadores. Uma pista numa folha de papel quadriculado que pode ser um simples A4 onde cada carro pode ser representado com pontos marcados a cores diferentes. Na situação de sala de aula podem ser utilizadas ampliações da pista em diferentes folhasA3 devidamente montadas, ou em papel de cenário no tamanho que se queira, utilizando carrinhos "de brincar", de preferência leves, presos à pista com algum material autocolante não fixo.

Regras:

1 - Sorteia-se quem é o primeiro a jogar. O último a jogar é o primeiro a escolher a posição de partida para o seu carro.

2 - A posição que os carros ocupam é sempre no vértice dos quadrados.

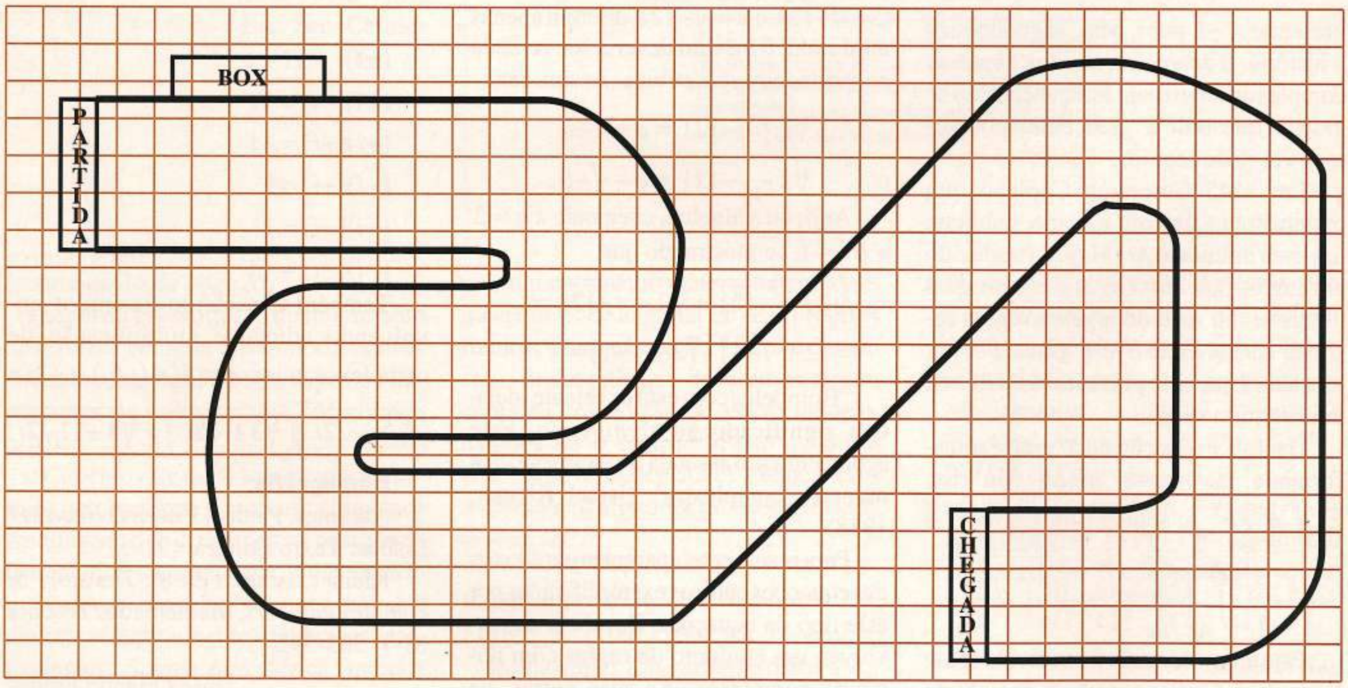
3 - Os carros deslocam-se segundo um vector, cujas coordenadas são indicadas pelo jogador. Cada jogador tem que ter em atenção a jogada anterior, pois não poderá haver uma diferença superior a uma unidade entre as coordenadas de dois movimentos seguidos, ou seja: se o movimento anterior foi o correspondente a (a,b) então agora só se poderá jogar com um movimento em que a primeira coordenada seja a-1, a ou a+1 e a segunda seja b-1, b ou b+1.

4 - O segmento de recta que une a posição inicial e a posição final de cada movimento, tem que estar contido no interior da pista.

5 - Penalizações:

- Se a jogada não respeita o definido no ponto três, o carro não se move e o jogada é anulada passando a vez ao jogador seguinte;

- Se dois carros ocuparem a mesma posição considera-se que houve uma colisão, e o carro que se deslocou em



Adaptado de Gardner, Martin, *Knopped doughnuts and other mathematical entertainments,* Freeman, 1986.

segundo lugar para essa posição terá que se dirigir para a box, de onde sairá quando for a sua vez de jogar, considerando-se novamente que está num ponto de coordenadas (0,0). Ao primeiro carro que se tinha deslocado para a posição referida nada acontecerá, continuando a jogar normalmente;

- Se o carro sair da pista (ou seja, ultrapassar ou pisar a linha que a delimita) ou não respeitar o definido no ponto quatro, considera-se que houve despiste, tendo o carro que se despistou de se dirigir à box de onde sairá quando for a sua vez de jogar.

- Se houver alguma colisão ou despiste antes da box, far-se-à nova partida.

6 - Ganha quem primeiro passar a meta com o menor número de jogadas.

nota: por vezes é conveniente colocar mais "boxes" ao longo da pista, pois torna-se desmotivante para o jogador que já está muito adiantado ter de voltar a uma posição demasiado recuada.

Algumas sugestões

Como utilizar o jogo na sala de aula

É conveniente colocar ao lado de cada pista uma cartolina onde se anotam as jogadas de cada equipa, de forma que todos possam ir acompanhando as jogadas de cada grupo.

São necessárias duas pessoas para orientar o jogo em cada pista: uma pessoa movimenta os carrinhos e a outra anota as jogadas na cartolina, ao mesmo tempo que fiscaliza a validade dessas mesmas jogadas.

Distribui-se a cada aluno uma fotocópia das regras do jogo e uma pista em tamanho A4 de modo que cada jogador possa acompanhar no lugar o desenrolar do jogo e estabelecer as suas estratégias que deverão ser discutidas no grupo.

Cada pista comporta no máximo quatro equipas, pelo que deverá ser necessário ter mais que uma pista na sala de aula.

Cada equipa (formada por 4/5 alunos), deverá eleger um porta voz antes do início do jogo, e este só poderá anunciar a jogada da equipa depois de ouvido o grupo.

Como organizar um torneio interturmas numa escola

Para permitir uma maior participação no torneio, em vez de um jogador apenas, constitui-se uma equipa (de 3 a 5 elementos) para movimentar um carro. Cada equipa será representante de uma turma, e poderá ser escolhida por ter ganho o jogo na turma respectiva, por eleição, ou por outro processo previamente estabelecido.

Cada pista tem um limite máximo de carros, pelo que serão com certeza necessárias várias pistas.

É conveniente que em cada sala esteja apenas uma pista e um júri (se possível composto por dois elementos) para movimentar os carros e verificar a validade das jogadas.

As equipas que jogam em cada pista, obtêm-se por sorteio.

Realizam-se assim, simultaneamente, todos os jogos necessários para envolver todas as equipas.

Para a segunda volta serão apuradas apenas as equipas vencedoras.

O número de "voltas" necessárias para chegar a uma final, dependerá do número de equipas participantes.

Breve comentário

Este jogo foi utilizado por nós em situação de sala de aula na Escola Secundária de Linda-a-Velha e num torneio na Escola Secundária de Mafra (apenas para alunos do Complementar), o que nos permite adiantar algumas considerações sobre vantagens e limitações que o jogo apresenta.

É um jogo difícil para ser aplicado por um único professor numa turma muito grande, pois habitualmente é necessário utilizar mais do que uma pista por turma.

No entanto, é um jogo que gera muito entusiamo entre todos os participantes, o que se pode tornar um estímulo para as actividades lectivas. Como o jogo se pode relacionar com vários conteúdos programáticos, tem sido utilizado para reforçar conceitos já adquiridos ou antes da introdução desses mesmos conceitos (conceito de vector, adição de vectores, representação de pontos num sistema de eixos, gráficos cartesianos, números negativos, adição e subtracção de números relativos).

A versatilidade do jogo revela-se na sua aplicação a diferentes níveis etários, verificando-se a utilização de estratégias diferentes, diferentes capacidades de antecipação, diferentes ritmos de compreensão do jogo.

Mesmo não sendo relacionado directamente com conteúdos programáticos, pode ser uma boa actividade para uma centésima lição, ou para um torneio a desenvolver numa Ludoteca, nas escolas onde exista.

Depois da compreensão das regras do jogo, este pode ser dificultado ou simplificado, adaptando-se a todos os níveis etários, bastando para isso alterar a configuração da pista (quanto mais curvas esta tiver, mais difícil se torna).

Conceição Rodrigues
Inês Alegria
Margarida Oliveira
Esc. Sec. Linda-a-Velha
Teresa Leitão
Esc. Sec. Mafra

O concurso da TV

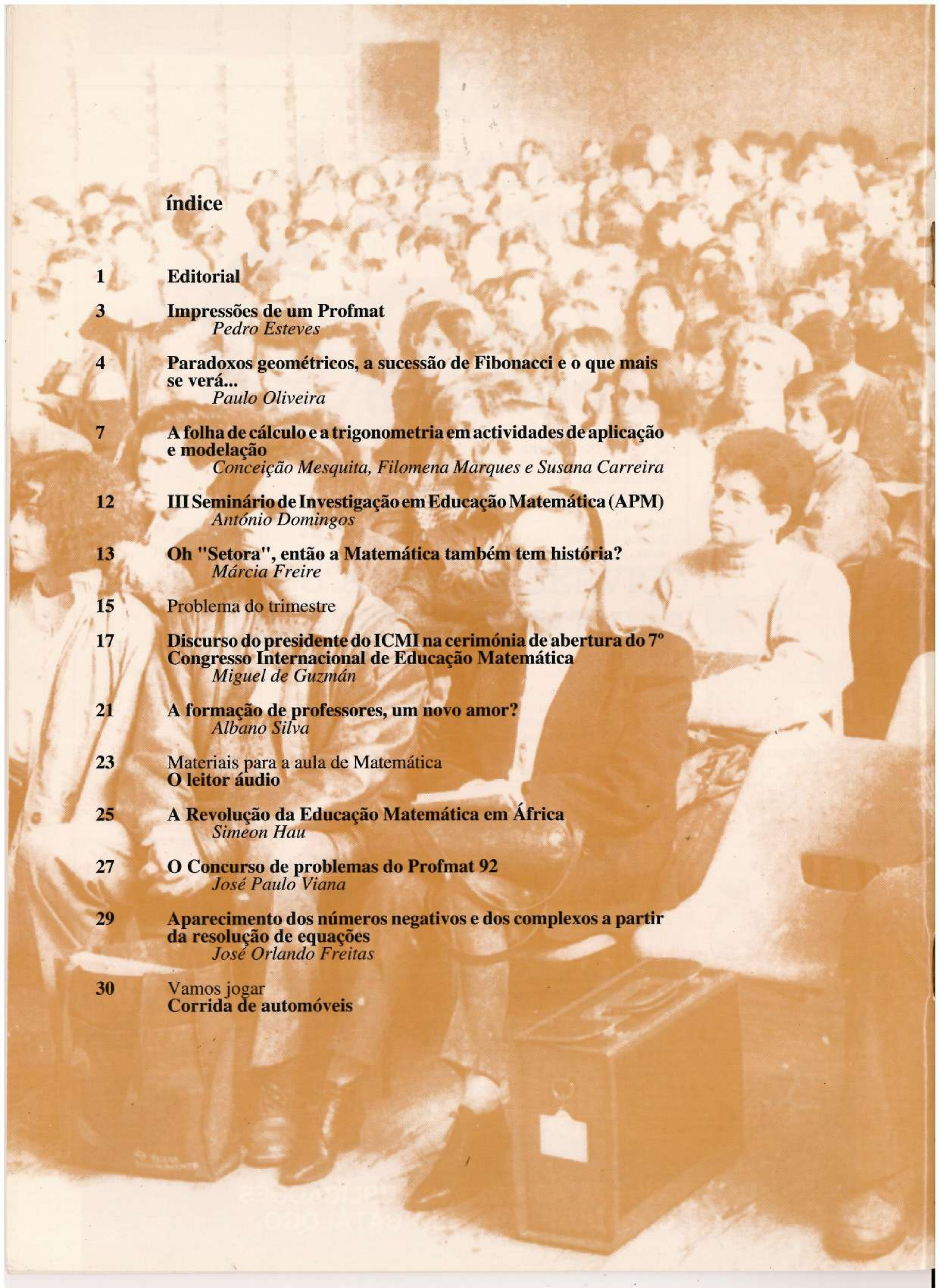
(Um problema da *Mathematics Teacher)*

Num concurso de televisão, o concorrente tem perante si três portas fechadas, atrás de uma das quais está o prémio.

O concorrente escolhe uma das portas e o apresentador diz-lhe "Vou abrir uma porta que sei que não tem prémio".

Abre uma das duas outras portas, que está efectivamente vazia, e pergunta: "Quer manter a sua aposta ou trocar de porta?"

Qual é a melhor opção: Manter a porta escolhida inicialmente ou mudar para a outra ainda fechada?



índice