Educação e Matemática

Nº 23

3º trimestre de 1992

Aplicações e Modelação na Matemática Escolar

Revista da Associação de Professores de Matemática

Mais um número temático de *Educação e Matemática*

Este número da revista, correspondente ao 3º trimestre deste ano, é o número temático de 1992, de acordo com a decisão da Redacção de dedicar o número do fim do Verão de cada ano a um tema específico. Em 1991, esta prática iniciara-se com o número 19/20 dedicado à Reforma.

O tema das *aplicações e modelação na Matemática escolar* foi escolhido por se tratar de uma área à qual se vem atribuindo uma importância crescente na renovação curricular em Matemática, um pouco por todo o mundo. Nos últimos tempos, diversos professores têm desenvolvido actividades com os seus alunos envolvendo aplicações da Matemática, sendo oportuna uma reflexão sobre o papel de tais actividades e sobre a forma de as concretizar.

Neste número colaboraram

Celina Pereira, Cremilde Ribeiro, Eugénia Barreto, Henk van der Kooij, Isabel Rocha, Jaime C. Silva, João Cegonho, João Ponte, Margarida Junqueira e Mogens Niss.

Sobre a capa

A fotografia da capa foi reproduzida de um postal da colecção *Calçadas* — Irene Buarque, publicada por Edições Rolim e diz respeito a uma calçada de Elvas. Trabalhos realizados por alunos de diversas escolas têm tratado calçadas e pavimentações e a sua interpretação em termos geométricos. Neste número, um dos artigos refere-se justamente a um desses trabalhos.

Sobre o editorial

Atendendo ao tema deste número da revista, o editorial foi pedido a Mogens Niss que é professor na Universidade de Roskilde, na Dinamarca, onde há cerca de 20 anos conduz um tipo de ensino caracterizado por uma presença significativa de aplicações e modelos da Matemática, e ainda por uma forte componente de trabalho activo e independente da parte dos estudantes.

Mogens Niss tem sido um elemento chave na renovação curricular da Matemática ao nível do Ensino Secundário. Tem realizado um trabalho notável como autor de publicações e organizador de encontros internacionais, em especial na área das aplicações e modelação nos currículos de Matemática de todos os níveis escolares. É actualmente o secretário geral da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), a mais importante organização internacional na área da educação matemática.

O artigo que constitui o editorial foi escrito no dia 30 de Junho de 1992 propositadamente para o presente número de Educação e Matemática.

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 1992.

Rectificando

No artigo *O Número de Ouro e suas propriedades: uma actividade com alunos*, de Gracinda Gaspar, que foi publicado no número 19/20, referiu-se por lapso que o número de ouro é $(-1 + \sqrt{5})/2$. Na verdade, o número de ouro é $(1 + \sqrt{5})/2$, sendo aquele o seu inverso.

nº 23
3º trimestre
de 1992

O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar

Mogens Niss

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
Ana Vieira
António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Manuel Matos
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Leonor Barão
Paulo Abrantes
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Nº de Depósito Legal: 60139/92

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Porquê?

Durante as últimas décadas, as aplicações e a modelação matemáticas, além de terem atraído considerável atenção na comunidade internacional ligada à educação matemática, ganharam posições bem visíveis na maioria dos currículos de Matemática um pouco por todo o mundo. Naturalmente, as razões para isto variam com o lugar e o nível educacional, e há grandes diferenças na interpretação e implementação das aplicações e da modelação entre países e currículos. No entanto, algumas das razões parecem ser comuns a muitos lugares.

Primeiro que tudo, é um traço característico do desenvolvimento nos últimos vinte anos o facto de se dar formação matemática a uma proporção cada vez maior dos alunos de cada nível etário. De um modo simples, a matemática tornou-se *uma disciplina para todos*. Isto aconteceu principalmente porque a competência matemática tem adquirido uma importância crescente para o exercício de um largo espectro de profissões e actividades e para a vida privada e social dos cidadãos numa sociedade em mudança, e consequentemente para a preparação das crianças e dos jovens para o trabalho e para e cidadania. A associação da matemática com estas finalidades manifesta-se através da aplicação da matemática a problemas e situações extra-matemáticos o que ocorre por meio de modelos matemáticos e da modelação.

Naturalmente, estas causas para se dar uma educação matemática a segmentos cada vez maiores de cada nível etário têm que reflectir-se no currículo: Se a matemática é tão importante na sociedade parece natural que no ensino da matemática se mostre porquê e como. Além disso, uma vez que apenas uma minoria daqueles que são submetidos a essa considerável formação matemática serão no futuro matemáticos profissionais num sentido ou noutro, não é óbvio que apenas as suas necessidades devam ser consideradas pela educação matemática promovida pela sociedade.

Ainda que a matemática seja ensinada à grande maioria dos alunos predominantemente devido à sua importância social, não resulta daí automaticamente que o currículo deva incluir aplicações e modelação. Não é verdade que o poder da matemática ao lidar com situações extra-matemáticas reside precisamente na sua *abstracção* e *generalidade* mais do que em ligações com casos específicos e circunstâncias particulares, e que ligações demasiado estreitas a tais situações de aplicação pode mesmo por vezes impedir a activação eficiente e transparente da matemática?

Sim, de facto há muito de verdade nisso. Contudo — e esta é a **segunda** principal razão para se incluírem aplicações e modelação no currículo — experiências de todo o lado têm demonstrado que para a utilização eficiente, flexível e reflectida da matemática em situações extra-matemáticas *não é suficiente* saber-se apenas matemática pura, qualquer que seja o nível e a sofisticação desse conhecimento. Para se ser capaz de praticar e analisar, de modo competente, aplicações da matemática e construção de modelos em áreas exteriores à própria matemática, é preciso que haja aprendizagem e portanto ensino — ou pelo menos nós, como professores, acreditamos numa relação causal entre as duas coisas.

Em **terceiro** lugar, um argumento muito comum para se trabalhar com aplicações e modelação na matemática escolar destaca o facto de estes elementos servirem para motivar e apoiar a aquisição e compreensão, pelos estudantes, de conceitos, métodos e resultados matemáticos. Basicamente, trata-se de um argumento de natureza táctica e não estratégica uma vez que utiliza as aplicações e a modelação como um veículo para se atingirem objectivos que podem nada ter a ver com a substância das aplicações e da modelação. Mas não há mal nenhum num argumento táctico desde que se reconheça a sua natureza táctica.

O quê e como?

Também para mim as três razões, apresentadas atrás, para se incluirem aplicações e modelação nos currículos de matemática em todos os níveis são perfeitamente válidas. No entanto, elas não nos dizem, só por si, onde devemos colocar a nossa ênfase. Não será aqui o local indicado para entrar em muitos pormenores sobre esta questão. Limitar-me-ei a partilhar convosco algumas das minhas principais preocupações.

Uma das tarefas mais importantes para uma educação matemática que pretende servir as necessidades da generalidade dos estudantes é a de tornar **visível** o papel da matemática no mundo. Apesar da importância largamente reconhecida do papel que desempenha no mundo, a matemática é ainda em grande medida bastante invisível para a maioria das pessoas. Tornar a matemática visível tem duas implicações: (1) Devemos demonstrar que a matemática *desempenha de facto* um papel essencial no mundo, incluindo a nossa sociedade, mostrando *onde* podemos encontrar matemática fora da própria disciplina. (2) Devemos demonstrar as (ou algumas das) razões *porque* é a matemática capaz de desempenhar este papel, isto é, mostrar de que modo o poder externo da matemática está relacionado com as suas propriedades internas. Neste breve artigo vou abster-me de dizer mais sobre a questão (2), uma questão muito importante mas bastante complicada e intrincada que tem as suas raízes na natureza básica e no estatuto da matemática como ciência.

Se queremos tornar visível o significado da matemática para se compreender e lidar com o mundo, é crucial que se trabalhe no ensino da matemática, em diversas ocasiões, com casos **autênticos** de aplicações e modelação matemáticas. Quando nos referimos a um caso de aplicação e modelação como sendo autêntico, queremos dizer que ele pertence a uma disciplina ou actividade existente fora da matemática e que compreende objectos, fenómenos, questões e problemas que têm um interesse genuíno de uma perspectiva extra-matemática para pessoas ligadas a essa disciplina ou actividade. Se todas as situações envolvendo aplicações e modelação que os estudantes encontram são não-autênticas, é muito natural que eles fiquem com a impressão que tais situações servem principalmente para disfarçar aquilo que essencialmente é matemática pura com uma roupagem pseudo-realista. Isto leva rapidamente a que se encarem as actividades de aplicações e modelação como um tipo especial de *jogo*, e depois à ideia de que a matemática escolar aparentemente não tem o poder suficiente para enfrentar situações e problemas da realidade concreta. E, ao chegar a este ponto, a conclusão de que a matemática escolar é inútil parece impor-se por si própria.

Não estou a defender que, no ensino da matemática, todas as situações envolvendo aplicações e modelação tenham que ser autênticas. Muito longe disso. Na verdade, pode haver muito valor matemático e educativo em situações não-autênticas ou mesmo artificiais. Mas não devemos esquecer-nos que há uma grande distância entre "nunca" e "sempre".

Se queremos que os nossos alunos se tornem capazes de utilizar a matemática com flexibilidade e reflexão ao lidarem com situações extra-matemáticas, então alguns pontos merecem ser destacados.

Não é suficiente que os estudantes adquiram experiência com os aspectos e as fases puramente matemáticos do trabalho com aplicações e modelação. De vez em quando — mais uma vez, não necessariamente sempre — eles devem te oportunidade de trabalhar em profundidade com **todo o processo de modelação** o qual inclui as seguintes componentes: clarificar o *objectivo* de aplicar um modelo matemático ao contexto dado; especificar os *aspectos* a considerar e as *questões* a responder, tal como as *assumpções* e *condições* subjacentes; realizar o processo de *matematização*, isto é, *traduzir* os elementos, relações e assumpções importantes da situação extra-matemática para um universo matemático, o que conduz a um *modelo matemático*; usar métodos e resultados matemáticos para obter *resultados matemáticos* a respeito das propriedades do modelo; *interpretar* esses resultados em termos da situação extra-matemática; *validar* o modelo.

Em princípio é possível que os estudantes tomem conhecimento de uma variedade de aspectos das aplicações e modelação matemáticas através de um ensino expositivo pelo professor ou através da leitura de manuais, como receptores passivos de conhecimento. Contudo, tal como ler os mais esplêndidos livros sobre ciclismo não faz de cada um de nós um ciclista, ouvir exposições ou ler excelentes manuais não chega para tornar cada um de nós um produtor criativo ou um analista competente de aplicações e modelação matemáticas. Para esse fim os estudantes precisam de se envolver em trabalho com aplicações e modelação de modo **activo e independente** pelo menos algumas vezes.

Observações finais

O leitor terá notado que eu não procurei oferecer quaisquer pistas específicas sobre o tipo de currículos de matemática no que diz respeito às aplicações e à modelação nem sobre a implementação efectiva de tais actividades nos currículos existentes. Trata-se de uma omissão deliberada. Quando se abordam as especificidades, cada contexto educativo e as suas disposições curriculares são especiais. Ambos estão sujeitos a condições e circunstâncias políticas, económicas, culturais e tradicionais peculiares que não podem e não devem ser generalizadas. Por isso, não devemos tentar importar um pacote curricular pronto-a-usar independente das suas virtudes efectivas ou potenciais e dos seus sucessos e fracassos prévios. Isto não implica que não possamos aprender uns com os outros, mesmo quando temos formação, experiência e condições muito diferentes e somos de diferentes partes do mundo. Claro que podemos, mas o desenvolvimento curricular e o ensino só podem estar nas mãos daqueles que vivem e trabalham com esse ensino. É a eles — a nós — que compete procurar inspiração a partir de todas as fontes possíveis e transformar aquilo que achámos interessante para a nossa própria comunidade. Esta é afinal a essência da cooperação internacional.

Mogens Niss
Universidade de Roskilde
(Dinamarca)
Tradução de Paulo Abrantes

As aplicações da Matemática: a vida quotidiana na sala de aula

Jaime Carvalho e Silva

"A *cultura científica* resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática"
Sebastião e Silva, "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pág. 10.

Introdução

A matemática é geralmente considerada pelo comum dos cidadãos um assunto árido que pouco tem a ver com a vida de todos os dias, excepto talvez em pequenos problemas de cálculo.

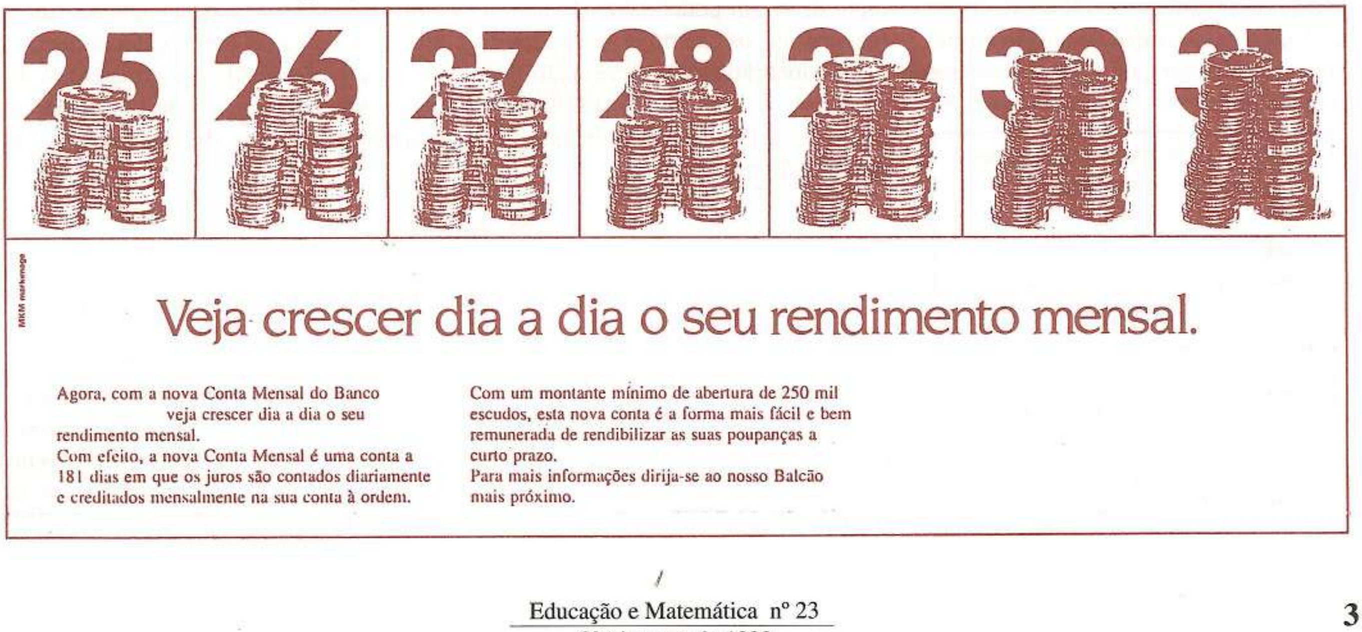
Mas, embora possa não parecer, a verdade é que existe uma relação muito íntima e profunda entre a matemática e a vida de todos os dias, e toda a gente é constantemente confrontada com uma multidão de problemas matemáticos de cuja resolução atempada depende a qualidade de vida de todos, e isto não apenas na simples gestão das compras diárias no mercado ou no supermercado.

Senão, vejamos: todos os dias somos confrontados com anúncios de bancos que descrevem a inegável vantagem das suas contas à ordem ou a prazo de modos tão obscuros como aqueles que observamos nos recortes e que incluem afirmações complicadas como a de os juros anuais serem creditados mensalmente ou os juros serem contabilizados diariamente e creditados mensalmente. Que juros reais nos dá cada conta? Qual a mais favorável? A resposta não é imediata, e é por vezes surpreendente (como no exemplo do anexo I).

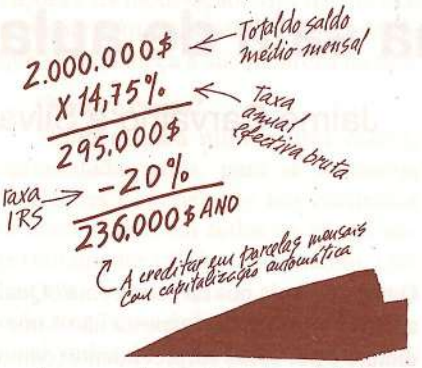
Todos os dias nos jornais e na televisão somos bombardeados com gráficos que pretendem descrever as situações mais variadas desde a evolução da situação social à evolução económica de um país ou de uma empresa, e cuja interpretação nem sempre é tão simples como parece, não sendo raro aprecerem mesmo gráficos enganadores.

Quando consultamos um horário de autocarro ou de comboio, temos de fazer várias operações (geralmente cálculo mental não elementar) para determinar qual o horário que mais nos interessa, quando tempo demoramos na viagem, etc.

As sondagens de opinião, muitas vezes ligadas a intenções de voto são o pão nosso de cada dia, sendo frequentes as discussões públicas entre as empresas de sondagens sobre os métodos empregues que levam a resultados diferentes. Qual o mais fiável?



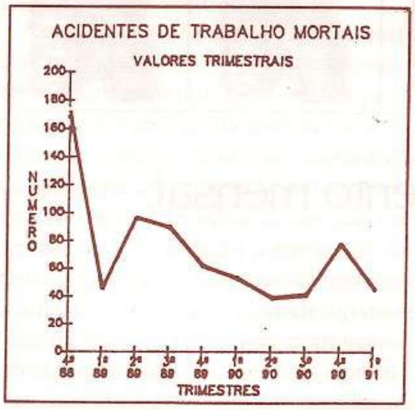
Peça ao seu banco que lhe explique esta conta



A geometria está à nossa volta para onde quer que nos viremos: nas construções, nos monumentos, nas pontes, nos pavimentos com azulejos de formas diversas (mas não de uma forma arbitrária) nas calçadas com formas geométricas tão atraentes em que os portugueses são especialistas, etc, etc, etc.

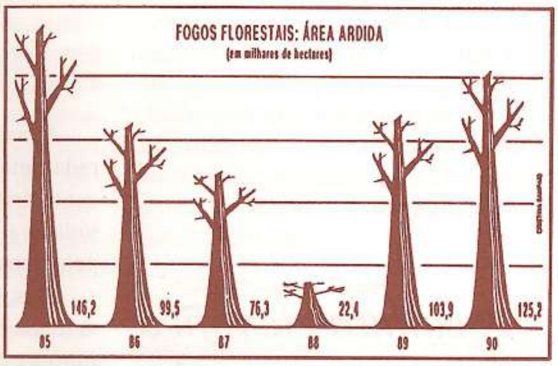
Ligadas ou não a uma profissão específica formas geométricas variadas aparecem em todas as instâncias da nossa vida profissional ou de lazer. Olhemos à nossa volta com olhos de ver e as formas geométricas saltam à vista, suficientes para encher um catálogo de muitas páginas. E porque é que uma ponte toma uma certa forma e um contentor outra forma totalmente diferente? Certamente não é por acaso!

Num mundo cada vez mais preocupado com questões ambientais e da protecção da natureza, ouvimos falar de modelos matemáticos para prever a evolução do "buraco na camada de ozono", para prever as alterações climáticas, para analisar a despoluição de um rio ou um lago, para estudar qual a quantidade que se pode pescar de uma determinada espécie sem a levar à sua extinção. Ou outras questões aparentadas, características do mundo de hoje: a propagação do vírus da Sida, a previsão dos terramotos, a queda de satélites artificiais ou de meteoritos de grandes dimensões. Tudo questões que muito nos preocupam. mesmo quando não conseguimos entrar nos detalhes técnicos de cada uma delas.



Quando queremos comprar um apartamento, geralmente não temos mais do que uma planta à nossa disposição. Não nos resta outra solução senão interpretá-la, isto é, imaginar a três dimensões aquilo que apenas vemos em duas dimensões. Muitas pessoas não se sentem à vontade ao fazê-lo. Mas isso é geometria!

Quando consultamos uma mapa temos de determinar qual o caminho mais curto entre o ponto em que estamos e aquele para onde pretendemos ir. E se isso implicar tomar dois meios de transporte que andem a velocidades diferentes então o problema não é nada simples.



1º argumento

Estes exemplos da nossa vida quotidiana representam apenas uma pequena parte dos inúmeros exemplos que nos provam a necessidade de a Escola dar uma formação matemática alargada e multifacetada aos nossos jovens, se queremos que a Escola os prepare realmente para os desafios da sociedade moderna.

E isto sem considerar exemplos ligados às características específicas das diversas profissões. Neste caso as necessidades da educação matemática são inquestionavelmente maiores, mas eventualmente variáveis com a profissão. Mas acontece que, para usar na sala de aula exemplos mais ligados à prática de cada profissão as coisas se complicam; por um lado, as situações são normalmente mais complexas, e, por outro lado, o professor de matemática tem mais dificuldade em entrar nos detalhes da outra disciplina. Da minha experiência na disciplina de "Análise Matemática I" do 1ª ano da licenciatura em Engenharia e em Física, constato que os exemplos que melhor têm funcionado são aqueles que são menos especializados e mais ligados à experiência quotidiana. Além do mais, para aqueles que começam a estudar actualmente engenharia, biologia, física, etc. na universidade, devido ao facto de terem pouco contacto anterior com as questões ligadas às aplicações da matemática, os exemplos utilizados dificilmente poderão ser muito elaborados.

A educação escolar deve então claramente incluir, além das técnicas matemáticas abstractas, o modo como essas técnicas se relacionam com a realidade, ou seja, deve incluir aquilo que habitualmente se designa por **aplicações da matemática** ou **modelação matemática**.

2º argumento

Mas há mais razões para que o ensino da matemática inclua as aplicações da matemática.

A primeira, e fundamental, é que não é verdadeiramente possível ensinar matemática, de forma eficaz, ensinado apenas a teoria. A teoria não existe por acaso, existe por alguma razão profunda enraizada na realidade do mundo que nos rodeia, e um aluno que não se aperceba dessa razão não pode fazer mais do que repetir mecanicamente a teoria, acabando por a esquecer facilmente, conforme afirmou o grande matemático e pedagogo português José Sebastião e Silva:

"A *cultura científica* resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2°/3° vol, pg 10)

"O professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um ***professor de matematização***, isto é, deve habituar o aluno a **reduzir situações concretas a modelos matemáticos** e, vice-versa, **aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos**."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2°/3° vol, pg 9)

Observamos que estão aqui descritos dois processos totalmente diferentes: primeiro, o de pegar em situações concretas e ver qual a melhor descrição matemática dessa situação; segundo, o de aplicar uma teoria matemática num caso concreto. Destas duas situações tradicionalmente o ensino da matemática contempla apenas a segunda (de forma aliás muito incompleta).

Salientou também José Sebastião e Silva que:

"(...) tudo o que se refere a **aplicações concretas da matemática** é da máxima importância, quer formativa, quer informativa. É principalmente a propósito de **problemas concretos** - e não em abstracto - que interessa fazer a discussão de equações ou sistemas de equações."

(in "Compêndio de Matemática", 1° vol-2° tomo, pg 135-136, ed. GEP)

O que Sebastião e Silva afirma aqui a propósito de equações e sistemas de equações repetiu para muitos outros temas matemáticos, e o mesmo argumento pode ser estendido a quase todos os capítulos do curriculo de matemática.

E o facto de um ensino da matemática demasiado abstracto não só não ser adequado, como se tornar ineficaz e até contraproducente, foi salientado por José Sebastião e Silva da seguinte forma:

"Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as **intuições**, o **método heurístico** e as **aplicações concretas**, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2°/3° vol, pg 111)

Não se fique com a ideia que a matemática tradicional tem de ser eliminada. Não se pode lidar directamente com a realidade se se desconhecem as técnicas matemáticas necessárias, nem se pode esperar que o aluno as reinvente todas. A aritmética, a teoria dos números, as equações, a geometria euclidiana, a estatística, as inequações, as derivadas, etc., têm de ser estudadas com mais ou menos profundidade, mas esse estudo não pode limitar-se à teoria, à parte abstracta, como tem sido regra em Portugal. O que se observa actualmente é que os alunos rapidamente esquecem o (pouco) que aprenderam, muitas vezes de um ano para o outro (ou até passados um ou dois meses). O que acontece é que também se insiste em demasia em fórmulas a "fixar" ("Existem tabelas de fórmulas, como existem tabelas numéricas, listas telefónicas, catálogos ou enciclopédias. A finalidade é sempre a mesma: evitar um esforço inútil e mesmo incomportável de memória dando maior grau de liberdade ao pensamento - in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2°/3° vol, pg 111), que na realidade não se "fixam" nem se poderiam "fixar" pois não só são em demasia como não existe a compreensão por trás para lhes dar significado.

Taxa de juros até 15%*

O B faz-lhe uma proposta. Atraente. Apresenta-lhe a nova Conta Remunerada B .. Uma conta de elevado rendimento. Que lhe dá muito mais que um cartão multibanco, um livro de cheques ou um serviço de pagamento de consumos domésticos. O B lança-lhe um desafio. Porque é que você tem uma conta vulgar se pode ganhar até 15% de juros na nova Conta Remunerada B ?

PAGAMOS MAIS PELO SEU DINHEIRO

Quadro I.

Montantes em contos	Taxas de Juro*
251 a 500	4,66%
501 a 1000	10%
1001 a 2000	11%
2001 a 5000	13%
Mais de 5000	15%

* T. A. E. – Taxa Anual Efectiva.

"Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2°/3° vol, pg 11)

José Sebastião e Silva exprimia assim o facto de automatismos como o cálculo não terem sentido se ensinados isoladamente e não integrados num conjunto harmonioso.

Em suma, um ensino da matemática verdadeiramente eficaz deve contemplar de forma equilibrada tanto a teoria como as aplicações.

E este princípio significa que, na universidade, mesmo os alunos de um curso de matemática (qualquer que seja a variante) devem também contactar com aplicações significativas que usem os conceitos que vão aprendendo; só assim têm possibilidade de dominar e até apreender devidamente o alcance desse conceito.

3º argumento

Uma última razão para que o ensino da matemática contemple as aplicações é puramente administrativa: faz parte dos objectivos gerais da disciplina de Matemática em todos os ciclos o ensino das aplicações da matemática. Por exemplo, no segundo ciclo aparecem frases como:

"Aplicar conhecimentos e processos da matemática em situações reais"

No 3° ciclo encontramos:

"Matematizar situações da vida real e reconhecer que fenómenos aparentemente díspares podem ser interpretados pelo mesmo modelo"

E no ensino secundário a situação é semelhante:

"Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução"

No Ensino Superior, como não há sequer programas oficiais, quanto mais objectivos educacionais claramente definidos, não se pode invocar esta razão administrativa. Está tudo dependente da consciência pedagógica do docente; infelizmente, como já referi noutros sítios, existe uma quase total ausência de reflexão no Ensino Superior sobre esta problemática.

Alguns exemplos

Em face de tudo o que foi afirmado anteriormente, há que passar a nossa teoria à prática...

Exemplos concretos não faltam. Basta olhar à nossa volta, folhear os jornais, observar a televisão, para encontrar muitos todos os dias. Certamente muito interessantes e potencialmente mais motivadores para os alunos são os problemas que se relacionam com a realidade local. Olhem à vossa volta. Certamente encontrarão muitos temas interessantes, embora nem todos sejam adequados a uma utilização escolar no nível de escolaridade que se pretende.

Na introdução foram já referidos muitos exemplos que sugerem diferentes utilizações. Noutros sítios tenho vindo a apresentar exemplos de forma mais ou menos informal, como numa sessão temática no "Profmat 91", no Encontro 'Computadores no Ensino da Física e da Química' e na revista 'Nonius'. Alguns desses textos vêm referenciados na bibliografia.

Na universidade tenho-me inspirado sobretudo nos "UMAP modules" em que UMAP designa "Undergraduate mathematics and applications", isto é 'módulos de matemática pré-graduada e aplicações'. Pela sua extensão é impossível apresentar um módulo aqui, pois eles não se limitam a pôr o problema, pretendem guiar o aluno através da resolução, apresentando-lhes os factos necessários para a boa abordagem do problema e semeando questões de resposta rápida ou de discussão ao longo do texto, que vão lentamente contribuindo para a solução final e suas consequências.

Vejamos brevemente alguns temas abordáveis nos diversos níveis, embora de modo diverso (e uma abordagem que funcione com uns alunos não funciona necessariamente com outros — pensemos que a vida quotidiana dos alunos não é uniforme devido às diferenças geográficas e sociológicas).

Jornais aumentam acima do IVA

O AUMENTO global do preço dos jornais a partir de 1 de Abril, provocado pela aplicação do IVA, foi superior aos cinco por cento do imposto introduzido pelo Governo na sua proposta de Orçamento de Estado para o presente ano. Ao efeito deslizante do IVA, induzindo arredondamentos por cima, somaram-se aumentos de preços da iniciativa dos próprios periódicos.

O «Tal e Qual» foi o jornal que mais encareceu relativamente (20%), ao passar de 100$00 para 120$00. O EXPRESSO, que passou de 280$00 para 294$00, e «O Jornal», que custa 273$00 contra os anteriores 260$00, foram os únicos semanários a aumentar rigorosamente cinco por cento. «O Jornal» anunciara, inicialmente, uma subida para 275$00, mas esta semana, seguindo o exemplo do EXPRESSO, optou por não fazer o arredondamento.

Entre os restantes semanários, «O Independente» (de 260$00 para 275$00, um aumento de 5,8%) evoluiu menos que o «Semanário», o qual aproveitou para alinhar o preço pela concorrência (de 250$00 para 275$00, subindo 10%). O «Sete» (de 190$00 para 200$00, mais 5,3%) e «O Diabo» (de 180$00 para 190$00, mais 5,5%) foram, apesar de tudo, mais moderados.

Três diários — «Diário de Notícias», «Correio da Manhã» e «Jornal de Notícias» — aumentaram rigorosamente cinco por cento (de 100$00 para 105$00), menos do que o «Público» e o «Diário Económico» (de 110$00 para 120$00, uma subida de 9,1%). «A Capital» subiu de 80$00 para 85$00 (mais 6,3%), enquanto o «Primeiro de Janeiro» e «O Dia» passavam de 75$00 para 80$00 (um acréscimo de 6,7%).

CARTAS AO DIRECTOR

O prazer de ler o PÚBLICO

Sendo leitor assíduo do PÚBLICO, não queria deixar passar em claro um reparo que entendo dever fazer. Perdoem-me se estiver enganado. E já agora esclareçam-me.

Tudo isto a propósito do mais recente aumento do jornal.

Diz uma nota da Direcção que tal aumento se deu em virtude da aplicação do IVA. Até aqui, tudo bem. Não discuto se será certo ou errado. Se deve ser ou não aplicado. Se a referida taxa podia ser maior ou menor.

O que eu não compreendo, e penso que a maioria dos leitores também não, é que me venham "explicar" que tal aumento se deve exclusivamente à aplicação de uma taxa de IVA no valor de 5 por cento.

Ora, se aplicarmos 5 por cento ao anterior preço do jornal, este não poderia custar mais de 115$00.

Quer dizer que o jornal aumentou de 110$00 para 120$00, sendo metade deste aumento para os cofres do Estado e a outra metade para os cofres do... PÚBLICO.

Não tenho nada contra isso. Até porque não me importo nada de pagar mais por um jornal que tenha qualidade, o que até é o caso, mas já me aborrece bastante ser passado por imbecil.

Francamente, o jornal não precisa disso. E se tiverem de fazer comentários às notas do Governo, pelo menos esclareçam totalmente os vossos leitores e, já agora, façam as contas à moda do Porto...

Aproveito para agradecer ao PÚBLICO o prazer que me dá todos os dias de o ler...

José Carlos Pereira de Sousa
Porto

Aumento para facilitar os trocos?

Leitor desde o primeiro número, desejo exprimir o meu mais veemente protesto pelo facto de o PÚBLICO, à boleia da aplicação do IVA aos jornais, aproveitar para subir novamente o seu preço, descarregando sobre o famigerado imposto o ónus de toda a culpa.

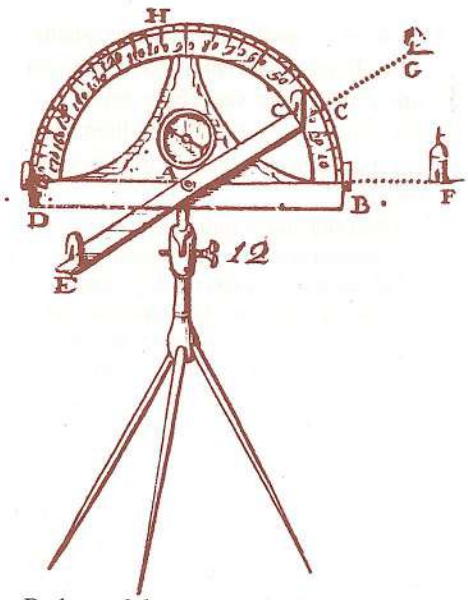
De facto, sendo o IVA de 5 por cento, o aumento a suportar pelos leitores não devia ser superior a 5$50. E não colhe eventual argumentação que é para facilitar os trocos, pois, a ser assim, era mais justo fixar o preço em 115$00, sofrendo o PÚBLICO um prejuízo de 50 centavos e não o público um de 450 centavos.

Carlos Costa
Lisboa

N.D. — Os nossos leitores só em parte têm razão. Ao contrário do seu raciocínio, os 5 por cento de IVA não se aplicam sobre o anterior preço, mas sobre o novo preço. É um erro que alguns editores de semanários também cometeram. A aplicação directa do novo imposto levaria o PÚBLICO a custar 115$80 ao dia de semana e 168$50 ao domingo. Mas como a distribuição retém uma comissão de 30 por cento (que também se aplica sobre o novo preço, incluindo o IVA), a coisa complica-se. Para não ficarmos prejudicados com a introdução do novo preço e continuarmos a receber, por cada exemplar vendido, exactamente o mesmo do que antes da introdução do imposto, o preço deveria ser: 118$50 ao dia de semana e 172$30 ao domingo. Não teremos abusado das carteiras ou das inteligências dos leitores ao fixarmos os novos preços em 120$00 e 170$00. Os leitores foram, isso sim, confundidos pelos semanários, que apesar de terem estruturas de formação do preço iguais à nossa se enganaram (?) a fazer as contas e quiseram (?) ajudar Cavaco Silva a arrecadar mais impostos com menos inflação e à custa deles...

Primeiro exemplo: Recentemente apareceu nos jornais uma controvérsia sobre o aumento de preços dos jornais devido à alteração da taxa de IVA que era de 0% e passou a ser de 5%. Actividade: ler os recortes de jornais e decidir quem tem razão. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao director do jornal que não tem razão, ou até ao Ministro das Finanças.

Segundo exemplo: Comparar as ofertas de vários bancos, determinar exactamente que juros se rece-berão em cada período. Tanto se podem explorar estes exemplos de uma forma elementar (percentagens, fracções, proporcionalidade) como de uma forma mais sofisticada (recorrendo a sucessões até chegar à sucessão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ou recorrendo às funções exponencial e logarítmica — a função logarítmica aparece quande se pretende resolver o problema inverso: dado o dinheiro ganho, determinar a taxa de juro que lhe corresponde).



Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de artigo de uma revista de defesa do consumidor.

Terceiro exemplo: Usar a trigonometria para determinar altura de prédios ou torres e largura de rios; ir mesmo para a rua, construindo instrumentos rudimentares como o da figura junta, que aparece num manual de trigonometria do século passado. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao Presidente da Câmara ou ao Presidente da Escola.

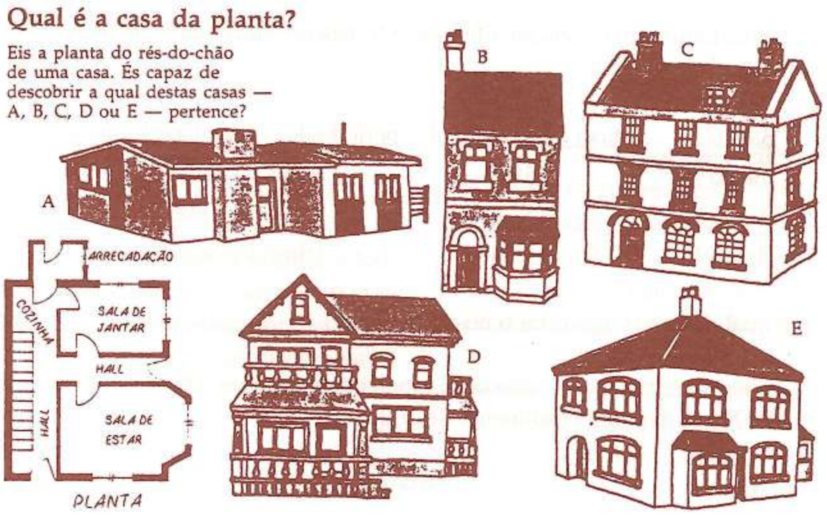
Quarto exemplo: Determinar as dimensões óptimas de um depósito. Há tantas embalagens comerciais que têm uma forma quase invariável que deverá existir uma explicação para tal. Todos (ou quase todos) os pacotes de um litro de leite têm forma de um certo paralelepípedo. Porque não tentar ver se o paralelepípedo que contêm um litro é o que usa a menor quantidade de material. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao Presidente do Conselho de Administração da Empresa (visto que os nossos resultados óptimos não vão coincidir com os dos pacotes reais).

Quinto exemplo: Ao fim de quanto tempo será possível despoluir um lago? Usando equações diferenciais elementares é possível analisar esta questão e chegar a respostas surpreendentes que justificam um relatório muito forte.

Sexto exemplo: Que quantidade de mexilhões cultivar sem que o meio ambiente fique afectado? Não tanto quanto os industriais gostariam. Quantas baleias e camarões se podem pescar sem afectar a evolução das populações animais? Não tanto quanto os pescadores desejariam. A primeira questão pode ser abordada de forma elementar usando apenas exponenciais e logaritmos, enquanto que a segunda pode ser abordada usando equações diferenciais elementares.

Sétimo exemplo: Interpretar plantas de cidades ou casas, respeitando as respectivas escalas. Podem-se usar exercícios elementares como aquele que aparece no livro "Enigmas com figuras" (Gradiva Júnior) e é aqui reproduzido, ou mais sofisticados em que se elabora a planta a partir do modelo real ou ainda se efectua um modelo a escala reduzida a partir de uma planta.

Tenho utilizado com os meus alunos actividades baseadas no segundo, quarto, quinto, sexto e sétimo exemplos, mas que são demasiado estensas para se poderem reproduzir aqui. Terei muito gosto em enviar uma cópia a quem manifestar interesse em as conhecer. Apenas apresento em anexo duas das questões que usei para avaliação depois de ter já feito abordagens diversas a problemas em contextos semelhantes, ou seja, quando chegou à altura da avaliação os problemas de aplicações também foram considerados, mas o contexto não era novo, já tinha sido trabalhado durante o ano lectivo.



Anexo I

Neste período de grande concorrência entre bancos, vemos que cada um publicita as suas taxas de juros de variadíssimos tipos de depósitos. Somos literalmente invadidos pela propaganda dos diversos bancos!

Recentemente um anúncio dizia o seguinte:

> "Agora, com a nova conta mensal do Banco X veja crescer dia a dia o seu rendimento mensal.
>
> Com efeito, a nova conta mensal é uma conta a 181 dias em que os juros são contados diariamente e creditados mensalmente na sua conta à ordem.
>
> Com um montante mínimo de abertura de 250 mil escudos, esta nova conta é a forma mais fácil e bem remunerada de rendibilizar as suas poupanças a curto prazo."

Vamos tentar perceber se a conta publicitada é assim tão boa como dizem. Para isso, vamos comparar com outros bancos.

a) Suponhamos que queremos depositar 250 mil escudos a prazo de 181 dias (que tomamos equivalente a 6 meses e a dois trimestres, para simplificar) e que dois bancos oferecem as condições abaixo.

Banco	taxa de juro anual	período de contabilização dos juros
Banco X	15%	todos os dias
Banco A	15%	todos os meses

Subentende-se que os juros são contabilizados às 24 horas do último dia do período de contabilização dos juros, imediatamente depositados na conta e simultaneamente começam a vencer juros (no anúncio acima isso não é muito claro, mas a redacção significa que os juros apesar de serem creditados diariamente não podem ser levantados todos os dias mas apenas no fim de cada mês).

Claro que, nas condições acima, o banco X oferece maior rendimento que os outros. Porquê? (Não é preciso efectuar qualquer cálculo!)

b) Mas acontece que o banco X está mais distante de casa do depositante do que os outros, e que, por isso, gasta mais 600$00 por mês em transportes do que se depositar no banco A. Compensará depositar o dinheiro no banco X?

c) Agora temos uma situação diferente. Os bancos A e B oferecem mais juros do que o banco X.

Banco	taxa de juro anual	período de contabilização dos juros
Banco X	15%	todos os dias
Banco A	15,25%	todos os meses
Banco B	15,25%	trimestralmente

Em qual devemos depositar o nosso dinheiro?

d) Indicar quantos anos é necessário esperar de modo que 500 contos depositados no Banco X nos dêm um rendimento de 3000 contos.

Anexo II

Um dos problemas importante na embalagem comercial, na construção de depósitos ou na construção de contentores industriais é o de determinar, supondo dado um certo volume, qual a menor quantidade de material necessária para o obter.

Feitas medições em várias embalagens de leite e de sumos de formato pequeno, todas com a forma de um paralelepípedo, obtiveram-se os seguintes resultados (se designarmos as suas dimensões por **a**, **b** e **c**):

produto	dimensões a	b	c	capacidade
leite Bon-O-Mel	4,7 cm	6,2 cm	7,6 cm	0,2 l
leite Nesquik	4,7 cm	3,7 cm	11,8 cm	200 ml
leite Gresso	4,1 cm	6,2 cm	8,3 cm	200 ml
sumo L&V	4,1 cm	6,3 cm	8,2 cm	200 ml

Todas as embalagens contêm o mesmo volume de líquido. Qual será a mais económica?

1. Determina qual utiliza menor quantidade de material (isto é, a embalagem que tem menor superfície total); supõe-se que o material é semelhante nas diversas embalagens e tem espessura igual.

Determinemos a embalagem ideal, ou seja, aquela que utilizaria a menor quantidade de material mas conteria o mesmo volume de 200 cm^3. Observamos que uma das dimensões é praticamente invariável, certamente de modo a que as crianças peguem facilmente nela. Tanto podemos tomar **a** = 4,7 cm como **a** = 4,1 cm. Consideremos **a** constante, mas não escolhamos para já o valor de **a**.

2. Designando a quantidade de material por **S**, determina os valores de **b** e **c** que tornam **S** mínimo, considerando que o volume se deve manter constante e igual a 200 cm^3.

3. Determina a economia em superfície total, para o caso do leite Nesquik, se as dimensões **b** e **c** forem tais que a superfície seja mínima. Qual o ganho em percentagem?

4. Mostra que o valor mínimo da superfície, em função de **a**, é

$$S = 40\sqrt{2a} + \frac{400}{a}$$

Para cada valor de **a**, a superfície é dada pela expressão acima. Determinemos agora, caso exista, um valor **a** para o qual a superfície **S** seja a menor de todas.

5. Determina o minimizante de **S(a)**. Determina o valor mínimo de **S(a)**. Identifica a forma da embalagem obtida.

6. Determina a economia em superfície total, para o caso do leite Gresso, se as dimensões **a**, **b** e **c** forem tais que a superfície seja o valor obtido em **5.** Qual o ganho em percentagem?

Bibliografia

Abrantes, Paulo, "Viagem de ida e volta", APM, 1988.

Agudo, F.R.Dias, "A matemática no mundo contemporâneo", Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1980.

Burghes, D.N., et al, "Applying Mathematics: a course in mathematical modelling", Ellis Horwood, Chichester, 1982.

Burghes, D.N., et al, "Modelling with differential equations", Ellis Horwood, Chichester, 1981.

Carvalho e Silva, Jaime, "Matemática, dinossauros, mexilhões, baleias e outros bichos (uma digressão pelas aplicações da matemática às ciências naturais)", Sessão temática, Profmat 91.
Carvalho e Silva, Jaime, "Sobre a proposta de novos programas de Matemática para o Ensino Secundário (10º, 11º e 12º anos)", Educação e Matemática nº 19/20, 1991.
Carvalho e Silva, Jaime, "Os computadores e o ensino da análise elementar: as aplicações da matemática", Nonius nº 23, Fev 1990.
Carvalho e Silva, Jaime, "A modelação matemática nas ciências naturais", Encontro "Computadores no ensino da Física e da Química", Coimbra, 1990.
Carvalho e Silva, Jaime, "Análise Infinitesimal I versus Análise Matemática I - o ensino da análise elementar", Trabalho elaborado para o concurso para Professor Associado de Matemática Pura, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 1990.
Jesus, Fernando de, "A utilização da Matemática nas Ciências do Homem" - Actas IV ENCONTRO REGIONAL DO CENTRO, SPM.
Kooy, Henk van der, "Assessment of mathematical modelling and applications", in "Information Technology and Mathematical Problem Solving Research", Viana do Castelo, Abril 1991.
Lucas, William F., (ed.), "Modules in Applied Mathematics" (4 vols), Springer-Verlag, New York, 1983.
Mason, John, "Modelling: What do we really want pupils to learn?", in "Mathematics, teachers and children", The Open University, Hodder and Stoughton, London, 1988.
Ponte, João Pedro, "Resolução de problemas: da matemática às aplicações", Actas 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino, Universidade de Aveiro, 1991.
Projecto Minerva, "Perspectivas interdisciplinares em Física e Matemática", FCT Univ. Nova de Lisboa, 1991.
Queiró, João Filipe, "Ovelhas, matrizes e computadores", Actas IV ENCONTRO REGIONAL DO CENTRO, SPM.
"UMAP modules: Tools for teaching, 1977-1979, 1980, 1981", Birkhäuser, Boston.
Uspenski, V.A., "Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas", "Lecciones populares de matemática", Editora Mir.
Vorobiov, N.N., "Problemas elementales de maximo e mínimo", "Lecciones populares de matemática", Editora Mir.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Cartas à Redacção

Um olhar sobre os novos programas de Física

No último número da revista *Educação e Matemática* [...] foi publicada uma entrevista acerca dos novos programas de Física em que uma das autoras faz uma afirmação que *não traduz a verdade dos factos*. Essa afirmação é a seguinte: "Houve uma 1ª versão que sofreu bastantes críticas no que toca aos programas de Física, e estes portanto não foram homologados.". Sendo um dos autores do anterior projecto, terei o maior prazer em lhe apresentar *documentos* que comprovam o seguinte:

1º- O programa não foi homologado pelo Senhor Secretário de Estado da Reforma Educativa de então com base "nos pareceres de eminentes especialistas e com o conhecimento do Conselho de Acompanhamento da Reforma Curricular".

2º- As críticas foram de facto muitas (pois o projecto foi amplamente divulgado), vieram de praticamente todas as zonas do país, mas foram *na sua larga maioria favoráveis*, excepção feita à extensão do projecto, particularmente da 1ª versão e quase todas dirigidas a todo o programa e não só à Física até porque o programa foi elaborado por físicos e químicos em trabalho interdisciplinar.

3º- Pouco mais de um mês antes da decisão do Senhor Secretário de Estado o projecto estava tão aceite pelos professores envolvidos na Reforma que decorreu uma acção na Figueira da Foz de onde todos sairam dispostos a iniciar a experiência de lançamento.

4º- Não foi comunicada aos autores qualquer justificação de carácter oficial acerca das razões científicas ou pedagógicas que estiveram na base da não homologação do anterior projecto apesar dos sucessivos apelos dos autores junto dos Senhores Ministros e Secretários de Estado (os autores tomaram conhecimento da decisão por uma colega com quem trabalharam na Figueira da Foz).

Devo adiantar que *particularmente* fomos informados do seguinte (mas a este respeito não temos documentos que o comprovem pelo que estas informação carecem de confirmação):

1º- os "eminentes especialistas" atrás referidos foram três professores universitários todos da área de Lisboa;

2º- o projecto actual está sendo elaborado à boa maneira antiga, apenas estando a ser criticado por um grupo restrito de consultores e por uma Comissão Científica de que fazem parte os referidos "eminentes especialistas";

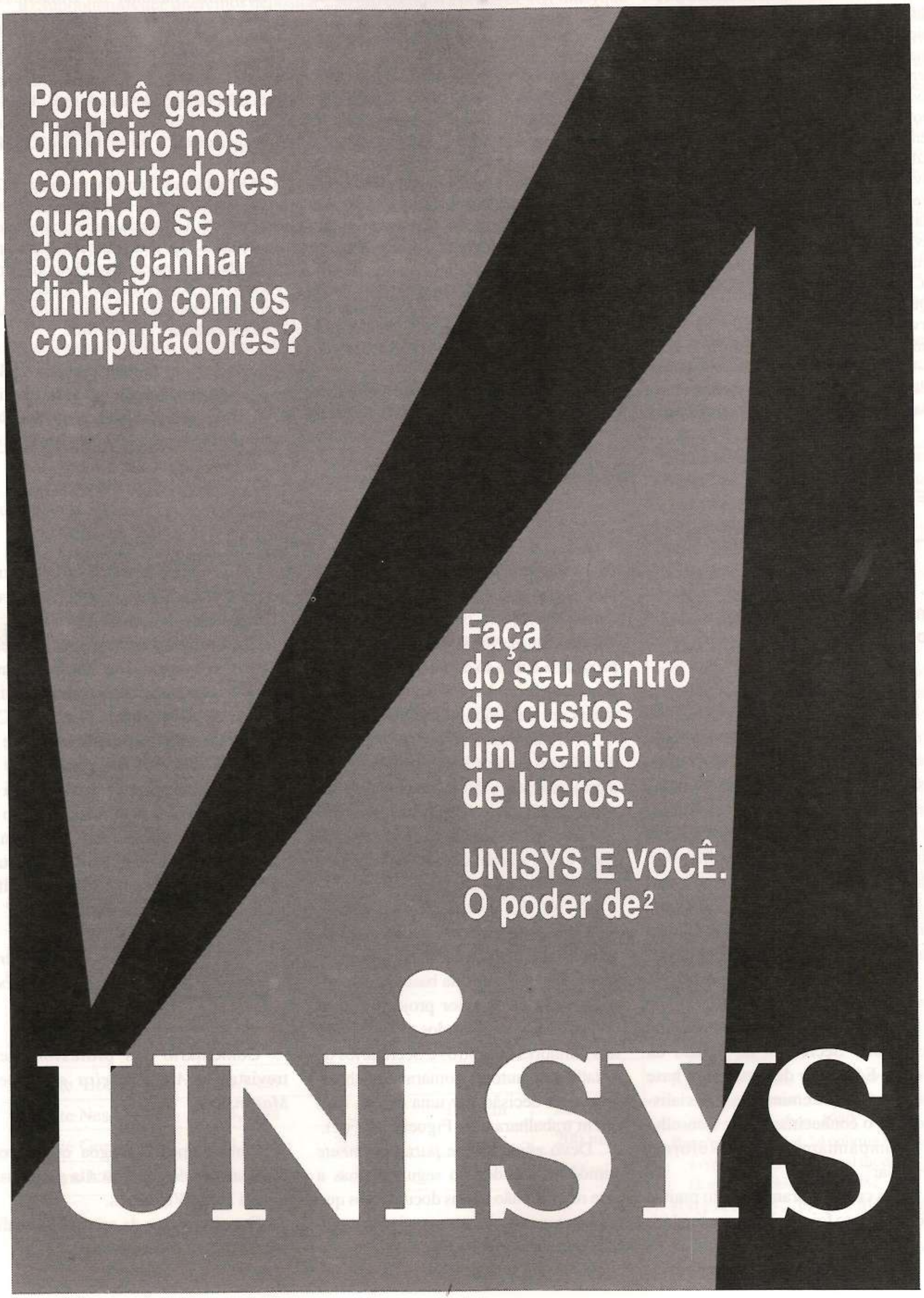
3º- o actual projecto do programa de Física está totalmente desenquadrado de qualquer interdisciplinaridade com a parte de Química, mais parecendo tratar-se de programas de duas disciplinas diferentes do que de uma só disciplina".

Jorge António Valadares
Lisboa

Comentário das professoras entrevistadas, *Alda Pereira e Anabela Martins* :

Lamentamos a mágoa que parece transparecer da carta escrita pelo nosso colega Jorge Valadares.

Quanto ao teor da entrevista, reafirmamos o seu conteúdo.


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

À descoberta dos empedrados artísticos de Lisboa

Eugénia Barreto

No ano lectivo de 1990/91, os novos currículos da Reforma começaram a funcionar, em regime experimental, na Escola Preparatória Marquesa de Alorna em Lisboa. E numa das suas turmas do 5º ano, um projecto interdisciplinar envolvendo as disciplinas de Matemática e Educação Visual e Tecnológica proporcionou aos alunos um contacto com os empedrados artísticos de Lisboa...

Antes de...

A ideia do projecto surgiu de uma notícia num telejornal sobre a ida de técnicos portugueses (Arquitecto Rivera e Mestre Calceteiro) ao Brasil para ensinarem a fazer empedrados artísticos, cuja tradição se tinha perdido naquele país.

As etapas necessárias para passar à prática esta ideia foram:

• Observação directa de empedrados artísticos dos passeios de Lisboa para descobrir calçadas cujos motivos se pudessem integrar nos conteúdos programáticos da Geometria do 5º ano.

• Contacto com o Arquitecto Rivera, Director da Escola de Calceteiros da Câmara Municipal de Lisboa.

• Fotografias, postais e fotocópias de empedrados.

• Consulta do livro *Empedrados Artísticos de Lisboa* do Arquitecto Eduardo Martins Bairrada, Ed.Banco Espírito Santo e Comercial de Lisboa (1985)

Objectivos

• Sensibilizar para o património artístico português.

• Desenvolver o gosto pela pesquisa.

• Desenvolver atitudes de respeito mútuo.

• Estudar Geometria a partir da realidade.

• Diversificar os materiais utilizados nas aulas de Matemática.

Desenvolvimento do projecto

1ª fase: Motivação

Visita à escola de Calceteiros da C.M.L. (que hoje já não está em funcionamento) onde os alunos aprenderam a calcetar.

2ª Fase: Pesquisa

Cada grupo de alunos fez o registo do empedrado artístico deslocando-se ao local por eles escolhido a partir de uma lista de calçadas dada para ser discutida:

- nas imediações da escola;
- no percurso para casa;
- no local de trabalho dos pais;
- nos locais onde passearam no fim de semana.

3ª Fase: Trabalho no computador

• Iniciação à linguagem Logo.

• Utilização desta linguagem para cada grupo "construir a sua calçada".

(Ver em anexo os trabalhos de alguns grupos)

4ª Fase : Comunicação na turma

Cada grupo apresentou o seu trabalho à turma e a partir das apresentações foram explorados diversos conteúdos programtáticos.

Conteúdos programáticos abordados:

• Traçado e identificação de segmentos de recta geometricamente iguais, perpendiculares e paralelos.

• Traçado e identificação de ângulos.

• Ângulos complementares e suplementares.

• Construção e identificação de quadrados e rectângulos.

• Traçado e classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

• Superfícies geometricamente iguais.

• Superfícies equivalentes.

Materiais utilizados:

• Computador (programa Logo Writer—versão em Português).

• Papel quadriculado.

• Geoplano.

• Régua e esquadro.

• Transferidor.

Divulgação do trabalho à escola

No final do ano foi organizada uma exposição contendo:

• um painel com

- os objectivos deste trabalho sobre os empedrados artísticos integrado na "área escola";
- fotografias da visita de estudo e de alunos a trabalhar com computadores;
- trabalhos sobre empedrados artísticos realizados nas disciplinas de Educação Visual e Tecnológica e em Matemática;

• um programa que corria num computador onde iam aparecendo os nove trabalhos realizados em linguagem Logo.

Avaliação da actividade

Os alunos mostraram-se, desde o início, muito interessados em trabalhar com o computador:

"Oh Professora nem que seja preciso vir fora das aulas!"

O único aluno que parecia menos interessado, tendo faltado à aula de iniciação de trabalho com computador, passou a aderir à actividade quando verificou ser um dos que mais rapidamente venceu as dificuldades levantadas pela utilização da Linguagem Logo.

A realização desta actividade permitiu abordar os conteúdos programáticos relativos a ângulos e triângulos que, geralmente, não são tratados no 5ºano por falta de tempo.

No que diz respeito à aquisição de conhecimentos pelos alunos, numa ficha individual de Geometria realizada no final da actividade, 21 alunos tiveram uma classificação superior a 55% e os restantes 3 entre 45% e 52%, o que denotou uma melhoria em relação às avaliações anteriores.

No final do ano, em resposta a um inquérito, 14 alunos referiram esta actividade como aquela de que tinham gostado mais, mas acrescentando:

"Todos gostamos de trabalhar com os computadores".

Todos os alunos mencionaram a visita à Escola de Calceteiros ou a actividade prática de trabalhar nas calçadas. Algumas frases:

"Fiquei a saber como se fazem os passeios"

"Já podemos embelezar o recreio da escola com uma calçada inventada por nós"

"Achei como se fosse uma aventura"

"Gosto de fazer calçada e adoro vê-la em vários tipos"

"É giro ver e fazer calçadas e as ruas de Lisboa bem precisam..."

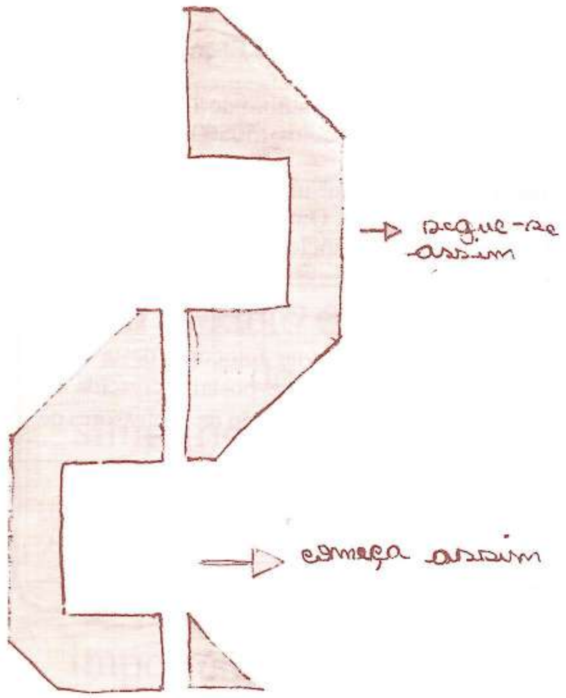
"É giro trabalhar com pedras e outras coisas sem vida".

Em contrapartida, o número de aulas inicialmente previsto para esta actividade foi largamente ultrapassado, em parte porque foi sendo enriquecida com conteúdos que à partida não se pensava poderem ser incluídos.

Notas à margem

Breve referência à maneira como os alunos foram "construindo" as suas calçadas em Linguagem Logo.

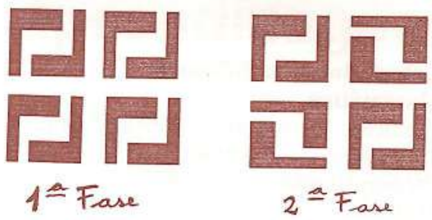
1º Exemplo:



Este grupo não conseguiu vencer o obstáculo que era o traçado da hipotenusa dos triângulos e então alteraram-no ligeiramente transformando-o num "novo" empedrado.

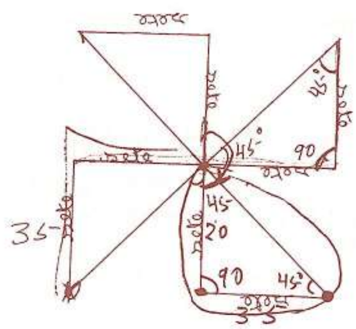
2º Exemplo:

Outro grupo começou por repetir o "motivo" sempre na mesma posição. Foi preciso voltarem ao local do empedrado artístico para darem conta do erro, pois só tinham trazido o desenho de um "motivo".



3º Exemplo:

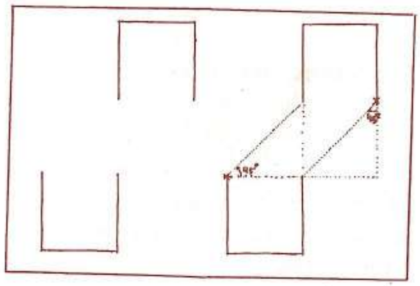
Este grupo resolveu o problema do traçado da hipotenusa dando à tartaruga uma rotação de 45° e em seguida "mandámos avançar a tartaruga a pouco e pouco e deu certinho"

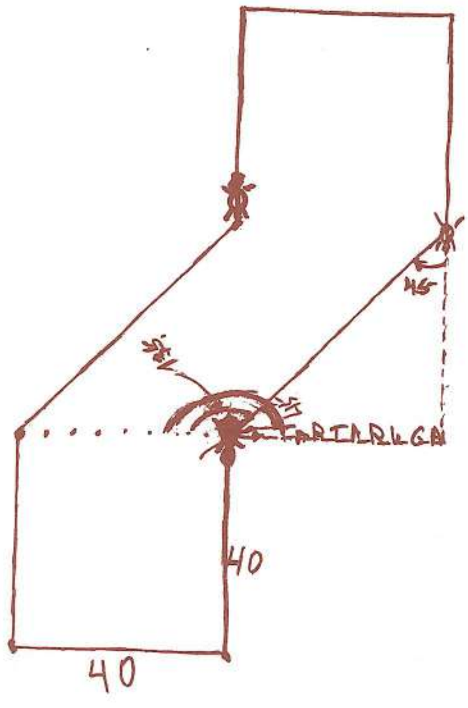


4º Exemplo:

Começaram por construir os três lados dos dois quadrados ("o outro lado não é preciso"), na posição exemplificada em I.

Em seguida o traçado dos dois lados maiores do paralelogramo que une os dois quadrados foi feito a partir dos dois triângulos rectângulos e de forma idêntica ao grupo anterior, como exemplificado em II.





Eugénia Barreto
Escola Preparatória
Marquesa de Alorna

Publicações APM

Calculadoras na Educação Matemática
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)

O computador na aula de Matemática
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Cronologia Recente do Ensino da Matemática
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)

O Geoplano na Sala de Aula
1ª edição, Agosto de 1988, 276 pp.
1175$00 (sócios 825$00) **Esgotado**

Jogos, Enigmas e Problemas
2ª edição, Julho de 1988, 48 pp.
280$00 (sócios 200$00)

Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)

A Matemática na Vida das Abelhas
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)

O Problema da Semana
4ª edição, Julho de 1988, 86pp.
520$00 (sócios 360$00)

PROFMAT nº 4
1ª edição, Janeiro 1989, 269 pp.
400$00 (sócios 550$00)

Renovação do Currículo de Matemática.
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)

Viagem de Ida e Volta
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática
1ª edição, Outubro de 1991, 304 pp.
3000$00 (sócios 2100$00)

Só ...Problemas
1ª edição, Outubro de 1991, 100 pp.
550$00 (sócios 400$00)

Computadores no Ensino da Matemática
1ª edição, Setembro de 1991, 258 pp.
1200$00 (sócios 850$00)

Cadernos de Educação Matemática nº2. 1ª edição, Junho de 1991, 112 pp.
800$00 (sócios 600$00)

Actas do Profmat 91
1ª edição, Outubro de 1991, 139 pp.
5500$00 (sócios 400$00)

Actas do Profmat 90 (vol. II)
1ª edição, Setembro de 1991, 244 pp.
1100$00 (sócios 800$00)

Algumas Noções Elementares de Astronomia
1ª edição, Outubro de 1991, 28 pp.
200$00 (sócios 150$00)

Avaliação: uma questão a enfrentar
1ª edição, Outubro de 1991, 97 pp.
450$00 (sócios 300$00)

Publicações — Envio pelo Correio

Caso deseje encomendar publicações deverá enviar fotocópia desta ficha preenchida e a quantia respectiva em cheque, ou vale postal, acrescida da respectiva percentagem de porte de correio, para: Associação de Professores de Matemática

Rua Major Neutel de Abreu, nº 11, 1500 Lisboa.

As percentagens variam de acordo com a quantia em que avulta cada encomenda. Assim, temos: até 1000$00 - 20%; de 1000$00 a 2000$00 - 15%; de 2000$00 a 5000$00 - 10% e mais de 5000$00 - 5%.

Educação e Matemática
nº1 a nº6 — 200$00
nº7 a nº12 — 250$00
nº13 e seguintes — 400$00
nº 19/20 — 800$00

Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA

Agenda do Professor 1991/1992
1ª edição, Julho, 1991, 152 pp.
550 (sócios 400$00)

Agenda do Professor 1992/93
1ª edição,Setembro, 1992, 140 pp.
300$00 (sócios 250$00)

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo

Sócio da APM ☐ Nº ______ Assinatura
Não Sócio ☐ ____________________

Subtotal
Portes do Correio
Valor Total

Nome ____________________
Morada ____________________
____________ C. P. ____________
Data do pedido ____________________

Para uso da APM — Pedido recebido em ________
Assinatura — Enviado em ________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

A modelação no processo de aprendizagem

João Pedro da Ponte

Um modelo é uma descrição simplificada duma situação, real ou imaginária. Particularmente importantes são os modelos matemáticos, que utilizam como base a linguagem e os conceitos desta ciência. Este texto apresenta alguns exemplos de actividades de modelação e discute o seu possível papel no processo de aprendizagem da Matemática.

A actividade de modelação

Os modelos matemáticos podem ter diversas formas, mas com frequência consistem basicamente numa equação, num sistema de equações ou num sistema de inequações. Se tivermos diversas variáveis actuando em simultâneo, o modelo pode ser representado por uma equação matricial. Se for preciso considerar taxas de variação de algumas variáveis, teremos um modelo com equações diferenciais.

Para traduzirmos uma situação da vida real por um modelo matemático, o primeiro passo é definir precisamente em que consiste o problema. Não adianta pretender resolver um problema que não se sabe muito bem qual é.

Uma vez definido o problema, precisamos de escolher uma estrutura matemática para o representar. Ao mesmo tempo, seleccionamos as variáveis que nos parecem fundamentais, e procuramos relacioná-las entre si.

Uma vez representado matematicamente o problema, procuramos utilizar as ferramentas matemáticas ao nosso dispor para o analisar, de modo a chegar a novas conclusões.

Estas conclusões, por sua vez, têm de ser interpretadas de acordo com a situação real de partida. Nestas condições, procedemos à avaliação do nosso modelo, decidindo se o consideramos ou não adequado. Em caso negativo, procuramos redefinir o problema, considerar novas variáveis, estabelecer novas relações entre variáveis, ou tentar novas vias de análise matemática. Poderemos ter de realizar vários ciclos deste processo até obtermos um resultado que julgamos satisfatório (v. figura 1)[1].

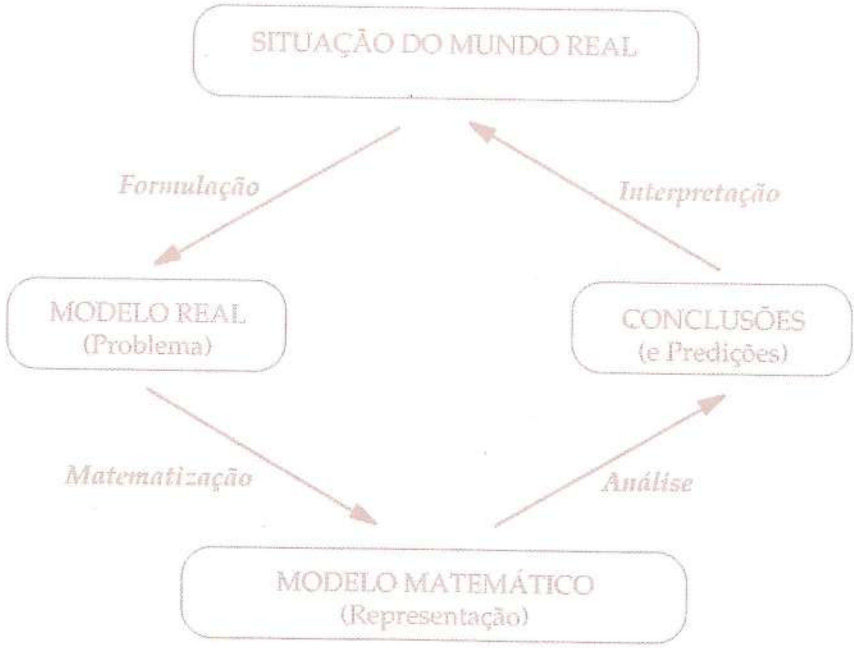


Figura 1

Vejamos agora alguns exemplos de problemas de modelação que podem ser usados como actividades de aprendizagem.

Exemplo 1- O percurso do carteiro[2]

O nosso problema consiste no seguinte. Um carteiro tem que entregar a correspondência nos dois lados da rua. Mas algumas artérias são largas, outras são estreitas. Em zonas de vivendas, circundadas por jardins, a distância entre pontos de entrega sucessivos é normalmente maior do que em zonas de prédios. Convém escolher o percurso que minimize a distância total a percorrer.

Imaginemos que as caixas do correio se encontram todas à mesma distância y umas das outras, e de lados opostos da rua, que tem largura x (v. figura 2). Imaginemos que o carteiro começa a sua distribuição no canto inferior esquerdo e que depois de acabada a distribuição passa à rua seguinte sem necessitar de voltar ao ponto de partida. Termina assim no canto superior esquerdo ou direito, conforme seja par ou ímpar o número de casas em cada um dos lados da rua.

Uma vez desenhado um diagrama da situação, sentimos que a solução há-de ser representada por uma das duas possibilidades indicadas.

No primeiro caso o carteiro vai atravessando sucessivamente a rua, cobrindo um par de caixas de cada vez. No segundo caso faz todo o percurso num dos lados, atravessa a rua, e depois faz o lado oposto. Como tem de continuar para a rua seguinte, volta a percorrer este último lado uma vez mais.

Adoptando uma estratégia clássica, procuramos representar o nosso problema algebricamente. Chamando D_1 ao primeiro percurso e D_2 ao segundo, teremos:

$$D_1 = 7x + 6y$$

$$D_2 = x + 18y$$

Para uma dada rua, de largura x, a primeira estratégia será preferível se

$$7x + 6y < x + 18y$$

Resolvendo a inequação concluímos que esta condição se verifica se $x < 2y$, isto é, se a largura da rua for menor do que o dobro da distância entre duas caixas consecutivas.

Esta solução tem por base um caso particular em que considerámos sete caixas de correio de cada lado da rua. O que se passaria se em vez de sete tivéssemos n caixas?

Neste caso, as nossas equações seriam:

$$D_1 = nx + (n-1)y$$

$$D_2 = x + 3(n-1)y$$

donde a inequação

$$nx + (n-1)y < x + 3(n-1)y$$

cuja solução é ainda dada por $x < 2y$. Portanto, a mesma solução é válida qualquer que seja o número de caixas de cada lado da rua!

Consideremos agora um problema algo diferente. Imaginemos que o carteiro, em vez de continuar para a rua seguinte, regressa antes ao ponto de partida. Para n ímpar teremos:

$$P_1 = (n+1)x + 2(n-1)y$$

$$D_2 = 2x + 2(n-1)y$$

Para n par, D_2 será dado pela mesma expressão mas D_1 virá dado por:

$$D_1 = nx + 2(n-1)y$$

Podemos desde já notar que em ambos os percursos, seja n par ou ímpar, aparece-nos sempre o mesmo termo em y. Isso quer dizer que a solução não vai concerteza depender da variável y mas apenas da variável x. Mas continuemos. Somos conduzidos às inequações

$$(n+1)x + 2(n-1)y < 2x + 2(n-1)y$$
(para n ímpar)

$$nx + 2(n-1)y < 2x + 2(n-1)y$$
(para n par)

Uma vez que os termos em y são todos iguais, estas inequações simplificam-se de imediato para (uma vez que x é necessariamente maior que zero)

$n < 1$ (para n ímpar)

$n < 2$ (para n par)

condições ambas impossíveis, o que mostra que o percurso D_2 é sempre preferível, quaisquer que sejam os valores de x e y. Ou seja, a solução que já sabíamos não depender de y, afinal não depende também de x. Mas não poderia este resultado ter sido imediatamente previsto, por simples raciocínio geométrico sobre a respectiva figura?

Proponho ao leitor que pense noutras estratégias para resolver estes problemas. Proponho igualmente que pense noutros problemas sobre percursos que possam ser postos a alunos de diferentes níveis etários, indicando quais os conhe-

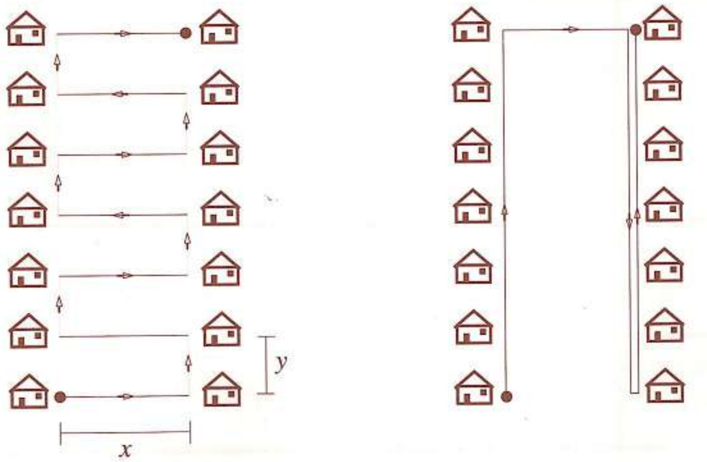


Figura 2

cimentos matemáticos relevantes para a sua resolução.

Poderá ser interessante referir aos alunos que os problemas sobre percursos constituem actualmente um ramo muito activo da Matemática. Por exemplo, um problema particularmente famoso é o problema do caixeiro viajante: Uma pessoa tem de se deslocar a *n* cidades, de que se conhecem as distâncias entre si; qual o percurso mais curto que pode ser escolhido? Para muitos destes problemas de percursos não se conhecem soluções exactas, desempenhando o computador um papel fundamental no seu estudo.

Exemplo 2 - O desporto em altitude[3]

Neste segundo exemplo vamos considerar os efeitos da altitude no rendimento dos atletas. Em que medida é a altitude vantajosa ou desvantajosa para conseguir melhores marcas?

A pressão atmosférica, que é de 1033 milibares ao nível do mar, diminui progressivamente à medida que se sobe. Em

Altitude (m)	Pressão (mb)
0	1033
1000	$1033 \times .885$
2000	$1033 \times .885^2$
3000	$1033 \times .885^3$
4000	$1033 \times .885^4$
5000	$1033 \times .885^5$
6000	$1033 \times .885^6$
7000	$1033 \times .885^7$
8000	$1033 \times .885^8$
9000	$1033 \times .885^9$
10000	$1033 \times .885^{10}$

cada 1000 m esta diminuição é de aproximadamente 11.5%. Podemos assim organizar a seguinte tabela:

Não será difícil concluir que uma expressão geral da pressão atmosférica P_1 em função da altitude h vem dada por

$$P_1 = 1033(.885)^{h/1000}$$

Temos agora que estudar esta função. Para isso será uma boa ideia tabelá-

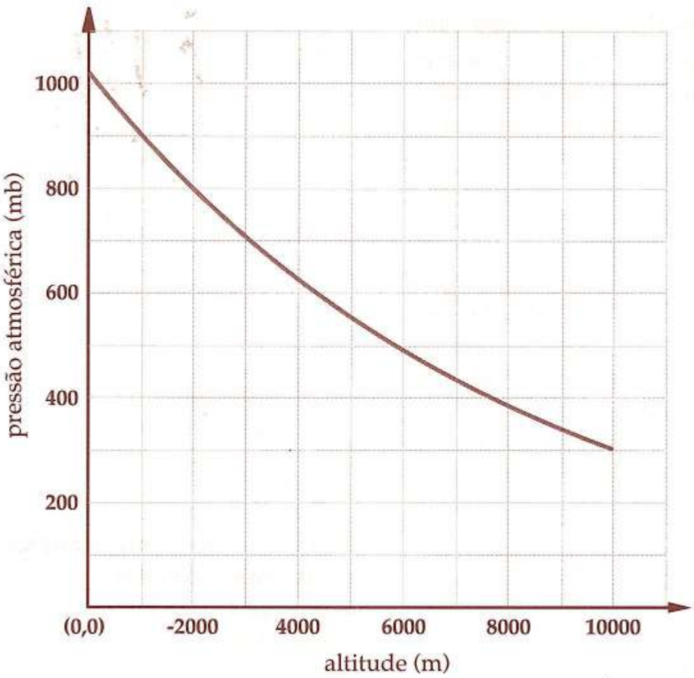


Figura 3

la em diversos intervalos e traçar o respectivo gráfico, tarefa em que o computador será de grande utilidade (figura 3).

Estaremos então em condições de considerar questões como as seguintes:

- qual a pressão atmosférica na cidade da Guarda (a cidade portuguesa a maior altitude)? (1 000 m)
- no alto da Serra da Estrela? (1 993 m)
- no alto da Ilha do Pico? (2 345 m)
- no Monte Branco? (4 807 m)
- no Monte Evereste? (8 848 m; parece-te possível realizar a escalada sem oxigénio suplementar?)
- partindo do nível do mar, qual a altitude a que é preciso subir para que a pressão atmosférica se reduza a metade?
- e para que se reduza de novo a metade (isto é, a um quarto do valor inicial)?
- e de novo a metade (a um oitavo do valor inicial)?

Verificamos assim que a pressão atmosférica diminui muito rapidamente. No entanto, a pressão atmosférica não actua directamente sobre o nosso organismo. Ela tem várias consequências, uma das quais diz respeito à pressão de oxigénio nos pulmões.

O oxigénio existe na atmosfera terrestre, a qualquer altitude, sempre na percentagem de 20.94%. Mas a composição do ar nos pulmões modifica-se porque, ao respirarmos, saturamos o ar de vapor de água. Este é responsável por uma parte constante da pressão de ar nos pulmões, no valor de aproximadamente 68 milibares. Deste modo, a pressão de oxigénio nos pulmões (que indicaremos por P_2) vem dada por

$$P_2 = (P_1 - 68) \times .2094$$

ou seja

$$P_2 = \left[1033(.885)^{h/1000} - 68\right] \times .2094$$

Façamos o estudo desta função, novamente tabelando-a e traçando o seu gráfico, de preferência usando o computador (v. figura 4, página seguinte). Podemos considerar questões semelhantes às anteriores. Qual a pressão de oxigénio nos pulmões a diversas altitudes? Qual a altitude a que é preciso subir para que ela se reduza a metade, a um quarto, a um oitavo do valor inicial? Observando o gráfico, verificamos que a partir de 22 800 m a pressão de oxigénio nos pulmões começa a ser negativa. Como interpretar essa situação?

Através da análise dos intervalos em

que as funções P_1 e P_2 se reduzem a uma fracção do seu valor inicial, verificamos que a diminuição da pressão de oxigénio nos pulmões é ainda mais rápida que a diminuição da pressão atmosférica. A altitude não parece assim ser muito favorável para a prática desportiva. No entanto, sabe-se que excelentes marcas têm sido conseguidas em certas modalidades precisamente nestas condições. Deveremos procurar então outros factores que possam contrabalançar o efeito negativo da diminuição da pressão.

Um deste factores é a diminuição da aceleração da gravidade. Como sabemos, esta tem o valor de 9.8 m/s^2 ao nível do mar. O seu valor em altitude poderia ser determinado de modo experimental. Façamos, em vez disso, um estudo teórico da questão.

A força F de atracção entre dois corpos é dada pela lei de Newton:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

sendo m_1 e m_2 as massas dos corpos cujos centros de massa se situam à distância d, e G uma constante universal.

Como o raio da terra é 6366 Km, temos para um corpo de massa de 1 Kg colocado à superfície terrestre:

$$9.8 = \frac{Gm_1}{6366000^2}$$

(sendo m_1 a massa da Terra), ou seja,

$$Gm_1 = 6366000^2 \times 9.8.$$

Deste modo, a uma dada altitude h teremos para um corpo de massa de 1 Kg:

$$F = \frac{9.8 \times 6366000^2}{(6366000 + h)^2}$$

Trata-se agora de estudar esta função. Para isso será conveniente tabelá-la em diversos intervalos e traçar o respectivo gráfico. Para isso de novo o computador será de grande utilidade. Qual o valor da gravidade a diversas altitudes? A que altitude a gravidade se reduz a metade, a um quarto, a um oitavo?

Para compararmos os efeitos da diminuição de pressão de oxigénio nos pulmões e da força da gravidade, poderemos sobrepôr os respectivos gráficos (escolhendo para cada um uma escala adequada — ver figura 4). Será a diminuição da gravidade um factor capaz de contrabalançar a diminuição de oxigénio nos pulmões? Será que isso depende das modalidades desportivas? Poderá ser interessante, neste ponto, alargar a discussão deste assunto a um professor de educação física.

A modelação no currículo de Matemática

Estes exemplos podem constituir boas situações de partida para propor aos alunos. No caso do carteiro, uma vez enunciado o problema, pode-se deixar aos alunos a elaboração do respectivo diagrama e a discussão das melhores estratégias. É, no entanto, importante clarificar as condições-chave do problema (o carteiro regressa ou não ao ponto de partida? como se distribuem as caixas de correio ao longo da rua?). Trata-se de um problema que não exige pré-requisitos especiais exteriores à Matemática, como de resto acontece com muitos problemas actuais de Matemática Aplicada.

O problema do desporto em altitude, pelo contrário, envolve numerosos aspectos de Física que poderão constituir fontes de dificuldades para os alunos. Dentro na perspectiva que os domínios tradicionais de aplicação, devem continuar a ser valorizados[4], procurei mostrar como a sua abordagem pode ser feita de forma simplificada. Se os alunos tiverem já estudado a pressão atmosférica e a lei

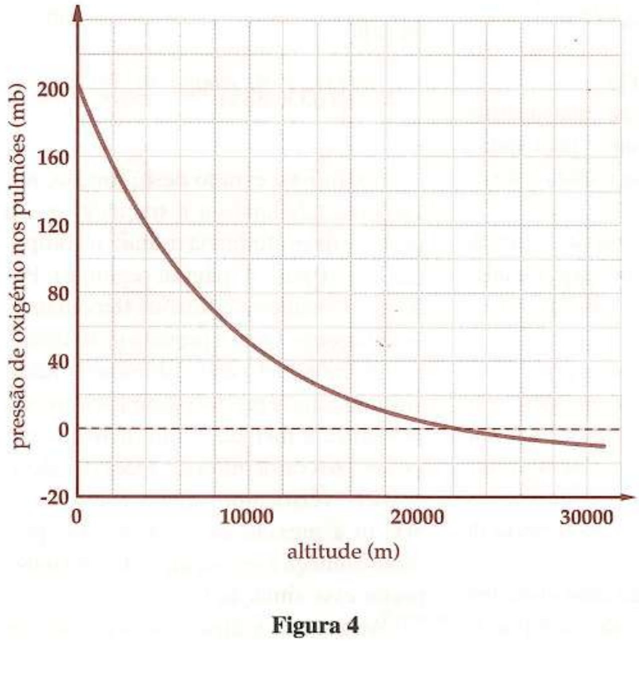


Figura 4

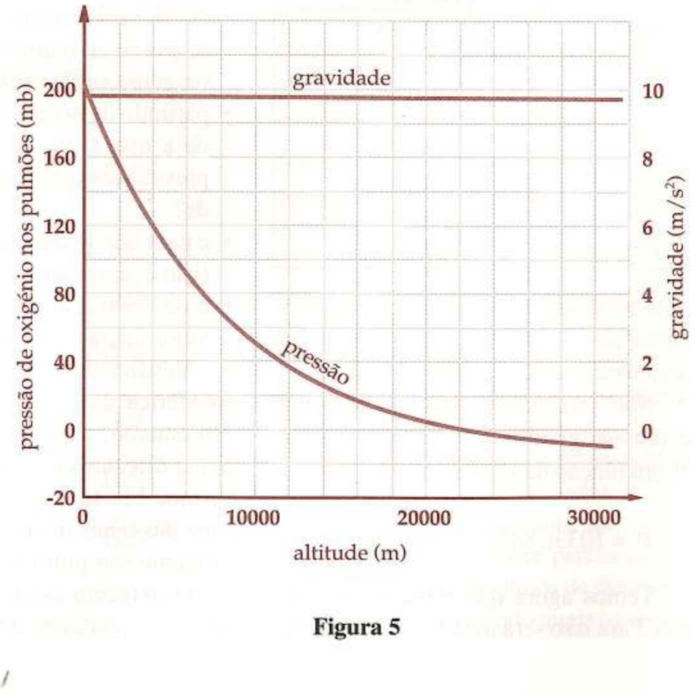


Figura 5

de Newton, terão agora oportunidade para um novo olhar sobre esses assuntos. Caso contrário, servirá de motivação para um posterior estudo mais aprofundado.

Na apresentação destes problemas é necessário que o professor dê ao aluno material para trabalhar. Mas será igualmente importante ter presente a recomendação de Pólya (1945, p. 1): "O professor deve ajudar, mas nem de mais nem de menos, de modo a deixar ao aluno uma parte significativa do trabalho".

Nestas actividades o computador constitui, obviamente, um auxiliar fundamental. Para construir tabelas, para traçar gráficos, comparando valores, fazendo mudanças de escala, etc. Nalguns casos o computador poderá simular através de animações o próprio desenvolvimento de fenómenos dinâmicos. O computador permite a realização de numerosas experiências, estimulando a formulação e testagem de conjecturas.

As interfaces entre a Matemática e a realidade podem aparecer essencialmente de três formas ao longo do processo de ensino-aprendizagem: (a) como ponto de partida para a formulação de novos conceitos ou ideias matemáticas; (b) como exemplos de aplicação de conceitos e ideias matemáticas a problemas concretos, e (c) como situações de modelação, em que se procura fazer o estudo duma dada situação recorrendo se necessário a ferramentas matemáticas diversificadas. Do meu ponto de vista, todas estas três formas são necessárias e devem ser vistas como complementares.

A introdução de novos conceitos e ideias a partir de situações reais, devidamente estruturadas, pode constituir uma importante base concreta para desenvolver os conceitos e ideias pretendidos. Pode igualmente ter um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática e do interesse dos alunos.

A realização de actividades de aplicação, bem definidas, em que os alunos usam os conhecimentos aprendidos, são evidentemente necessárias e devem ser propostas frequentemente — tanto para um melhor esclarecimento daqueles conceitos, como para que os alunos ganhem sensibilidade para o tipo de estruturas e técnicas matemáticas que se utilizam numa variedade de situações.

O estudo global duma situação, percorrendo todo o ciclo do processo de modelação, deve ser realizado uma ou duas vezes ao longo do ano, eventualmente como um projecto que os alunos realizam em grupo. Esta actividade é fundamental para que os alunos se apercebam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles (abordagens geométricas, algébricas, algorítmicas, numéricas, lógicas). Esta actividade é igualmente essencial para que os alunos ganhem sensibilidade para os aspectos mais globais do processo de modelação, nomeadamente a concepção geral, a avaliação e a análise crítica dos modelos (Davis, 1988).

Ser competente em Matemática (quer ao nível do cálculo, quer ao nível da resolução de problemas), não implica necessariamente ser competente na sua utilização em situações concretas. Trata-se de competências diferentes, que têm de ser igualmente tidas em consideração pelo currículo desta disciplina, o que só recentemente começou a ser reconhecido ao nível das orientações oficiais (nomeadamente nos novos programas).

Sempre que se trabalha com uma situação real, está necessariamente explícito ou implícito um modelo dessa situação. O conhecimento do alcance e dos limites do processo de modelação matemática, e a capacidade para compreender, explorar, construir e analisar criticamente modelos matemáticos simples, são importantes objectivos que o desenvolvimento da Matemática e das suas aplicações na sociedade moderna colocam como da maior relevância educativa. Valorizar claramente esta perspectiva, é um dos mais sérios desafios que presentemente se põem no ensino desta disciplina.

Notas

[1] Uma descrição mais pormenorizada do processo geral de modelação, bem como dos processos cognitivos usados nesta actividade, com numerosas indicações bibliográficas, encontra-se no meu trabalho indicado nas referências, de onde foi também retirada a figura.

[2] Este problema é retirado de Swetz e Hartzler (1991).

[3] Os elementos para este exemplo foram colhidos em De Sapio (1976).

[4] A este respeito, duas tendências me parecem igualmente negativas: a preocupação de alguns programas de ciências para só estudar os fenómenos de forma qualitativa, evitando o mais possível a Matemática, e a falta de interesse dos professores de Matemática pelos problemas concretos que envolvem as aplicações reais da sua disciplina.

Referências

Davis, P. J. (1988). Applied Mathematics as Social Contract. *ZDM, 88/1*, 10-15.

De Sapio, Rodolfo (1976). *Calculus for the Life Sciences.* San Francisco: Freeman.

Pólya, G. (1945/1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* New York: Doubleday (Edição original da Princeton University Press)

Ponte, João Pedro da (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. *Revista de Educação,* Vol 2, Nº 2.

Swetz, Frank e J. S. Hartzler (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum.* Reston, VA: NCTM.

João Pedro da Ponte
Departamento de Educação
Fac. de Ciências, Univ. de Lisboa

A Trigonometria à volta de uma caneca de cerveja

Celina Maria Pereira
João Manuel Cegonho
Maria Isabel Rocha

A indústria dos moldes na Marinha Grande foi o tema que suscitou um projecto interdisciplinar envolvendo a Matemática e a Mecanotecnia. Duas turmas do 9º ano da Escola Secundária Acácio Calazans trabalharam a unidade didáctica da Trigonometria a partir de problemas recolhidos junto das empresas dessa indústria.

Verão! Uma esplanada, frente ao mar, e uma cerveja fresquinha!

Não se trata de um anúncio publicitário, mas propomos que enquanto bebe o referido líquido observe a caneca depositária do mesmo. De igual modo, se ao chegar a casa ajudar o seu filho com as construções Lego, observe as peças. Quais os processos de concepção e fabrico envolvidos, até estes objectos chegarem às suas mãos?

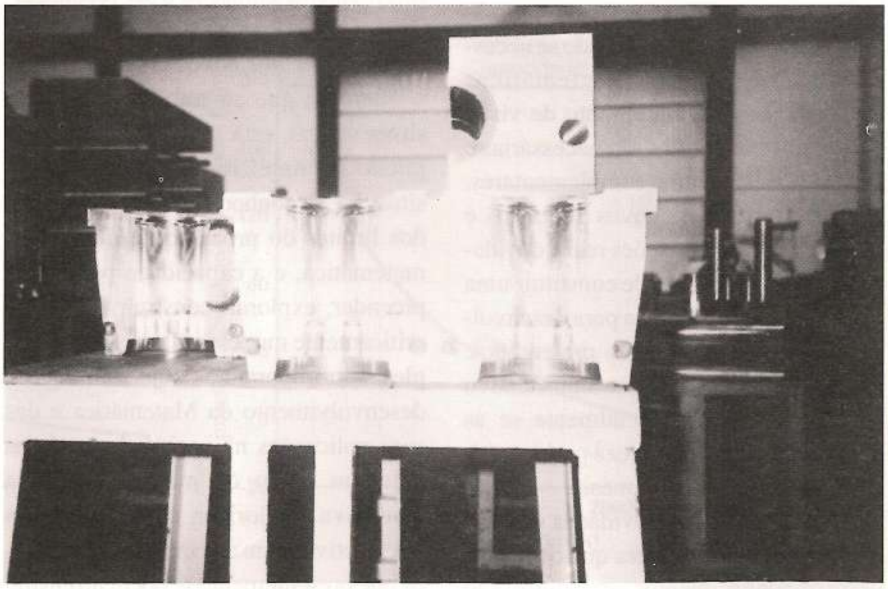
E o que tem a Matemática a ver com tudo isto?

As referidas peças, para serem fabricadas, precisam de um molde e este, por sua vez, também precisa de ser fabricado, daí a existência de uma indústria de moldes, que em Portugal está concentrada nas áreas da Marinha Grande (140 empresas) e de Oliveira de Azemeis (60 empresas).

A indústria de moldes portuguesa tem, desde sempre, acompanhado a modernização tecnológica da indústria metalomecânica e hoje muitas empresas estão equipadas com maquinaria CNC (controlo numérico por computador) e CAD/CAM (desenho por computador), o que permite que se fabriquem moldes muito complexos e de grande precisão.

Esta complexidade e rigor, obriga a formas geométricas muito variadas, exigindo aos que nela trabalham conhecimentos de Trigonometria e de Geometria. Como tal, a concepção e a realização das peças passam inevitavelmente por uma compreensão matemática do problema.

Na Escola Secundária Acácio Calazans Duarte, da Marinha Grande, foi criado em 1972 um curso profissional de fresadores de moldes, ao abrigo de um



Molde aberto de uma caneca de cerveja

protocolo entre o Ministério da Educação, Ministério da Indústria e Empresas, em que estas subsidiam o funcionamento do referido curso (ainda não existiam verbas da CEE).

Este curso, ainda em funcionamento, foi criado para dar resposta às necessidades, sentidas pelos empresários, de formação adequada dos seus trabalhadores. Mais recentemente foi criado o Curso Complementar Técnico Profissional de Moldes.

Com frequência, nós — professores de Matemática — ouvimos os colegas de outras áreas comentarem episódios das suas aulas, em que determinados conhecimentos da "nossa área" são necessários e os alunos ou não os dominam ou não os sabem aplicar num problema de outro ramo do conhecimento.

É nestas situações que surge o apelo à interdisciplinaridade. Com efeito, a sociedade actual tem acelerado o processo de especialização de conhecimentos, o que conduziu, na escola, a uma divisão exagerada num grande número de disciplinas, com um ensino não integrado dos diversos saberes.

Esta reflexão esteve na base de um projecto, realizado na Escola Secundária acima referida, no ano lectivo 90/91, com alunos do 9ºano de escolaridade e que envolveu professores de Matemática e da área de Mecanotecnia.

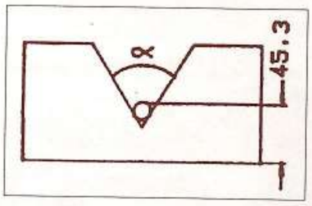
Desenvolvimento do projecto

Estiveram envolvidas duas turmas de áreas vocacionais diferentes, uma de Mecanotecnia e outra de Administração e Comércio.

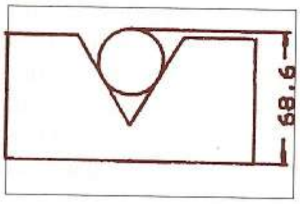
Procedeu-se a uma recolha e selecção de problemas junto das empresas, a partir dos quais se planificou a unidade didáctica Trigonometria.

Por exemplo, a noção de seno surgiu associada a um problema que envolve uma técnica muito utilizada nesta indústria. É esse problema que se apresenta a seguir.

Na peça representada, deseja-se conhecer a medida do ângulo α, com aproximação ao minuto. Para isso tem de se utilizar um processo indirecto, que usa dois rolos com diâmetros diferentes (10 e 20 mm). Tem em atenção a sequência apresentada nas figuras e as medidas dadas.



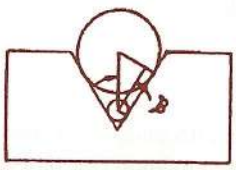
Rolo com diâmetro de 10 mm



Rolo com diâmetro de 20 mm

Este problema gerou alguma discussão e foram surgindo as pistas para a sua resolução:

- Os rolos (cilindros) são tangentes às arestas da ranhura
- Toda a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência
- Relacionar a amplitude do ângulo α com a amplitude do ângulo ß



- Considerar o triângulo rectângulo, em que ß é um dos ângulos agudos

- É possível calcular a medida da hipotenusa (distância entre os centros das circunferências) e do cateto oposto a ß (diferença entre os raios das mesmas).
- Relacionar a medida do ângulo com as medidas calculadas anteriormente (introdução do seno).

De salientar que todas as peças (componentes do molde), a que se referiam os problemas, foram simuladas pelos alunos de Mecanotecnia, nas aulas da respectiva área vocacional. Sendo um molde obtido a partir de um bloco de aço, os alunos utilizaram a madeira para obter um modelo do mesmo.

A utilização, manipulação destas peças, deu oportunidade a explorações enriquecedoras a nível da Geometria, acerca das formas bi e tridimensionais, devido às dificuldades dos alunos, que eram previsíveis, de passar do espaço para o plano. Foi também uma oportunidade de exploração do raciocínio visual.

A calculadora científica

Este projecto envolveu outra experiência, a da utilização da calculadora científica, em detrimento das tábuas naturais.

Duas razões essenciais:

- os valores dados pelas tábuas, apresentadas pelos manuais, não têm a aproximação exigida nesta indústria.
- os alunos, aquando da visita de estudo a uma das fábricas, verificaram que a calculadora científica era uma ferramenta utilizada desde o fresador ao desenhador. Se pretendíamos mostrar aos alunos que as nossas indústrias estão cada mais matematizadas, e que o ensino da Matemática deve acompanhar a evolução tecnológica, não teria sentido não utilizar a calculadora.

De salientar a opinião expressa por um aluno: *Penso que uma vez que as coisas são inventadas, devemos dar-lhe utilidade. Se, hoje em dia, já todos temos acesso a uma calculadora, porquê desprezar a sua utilidade?*

Já ouviu falar na régua de senos? Já viu a sua aplicação?

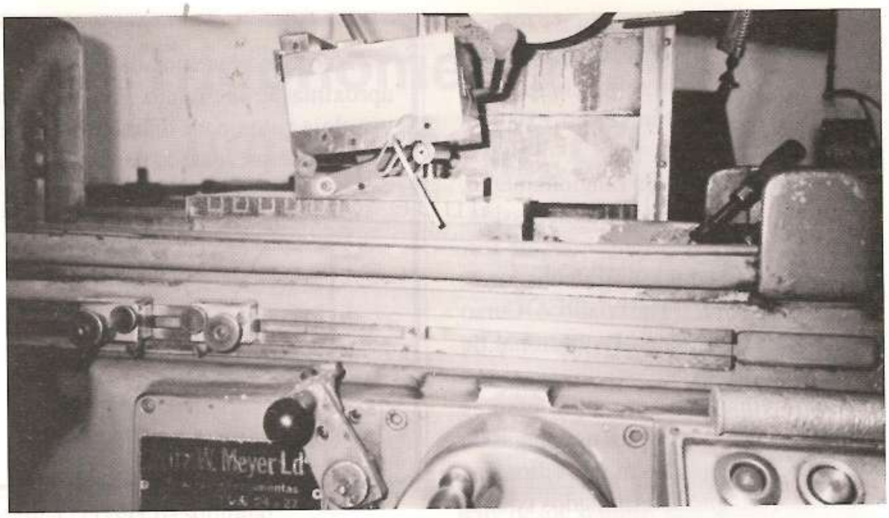
A régua de senos é um instrumento quotidiano da Metalomecânica de precisão e usa-se para obter, com exactidão, ângulos em peças prismáticas e em peças com forma de sólidos de revolução.

Os alunos tiveram oportunidade de

ver a sua aplicação, quando visitaram a fábrica, mas nessa altura ainda não sabiam o que era o seno de um ângulo. Assim, houve uma aula dedicada à aplicação da régua. Essa aula, que teve lugar nas oficinas de Mecânica, foi preparada e orientada pelos alunos da turma do curso complementar Técnico-Profissional de Moldes, que fizeram uma demonstração da utilização da mesma. Nesta aula, os professores de Matemática presentes foram alunos motivados para a aprendizagem.

Foi importante esta aula, como situação com a qual nos temos de familiarizar. Professor e aluno, num intercâmbio de saberes.

Para mais pormenores sobre a utilização da régua de senos, terá de esperar pelo Profmat92.



Régua de senos aplicada numa fresadora

Algumas conclusões

Esta experiência veio de encontro a uma das orientações metodológicas dos novos programas: "O desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da Matemática, ...".

Por outro lado, ao mostrar a aplicabilidade de ideias/teorias matemáticas a problemas correntes da comunidade em que a escola está inserida, contribuiu para desenvolver nos alunos as seguintes atitudes/capacidades:

• interessar-se pela realidade da sua região, do seu país e do mundo em geral

• aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, nomeadamente as sugeridas por outras áreas de conhecimento.

A utilização da calculadora favoreceu a exploração dos problemas, mas tornou irrelevantes outras questões, como seja a utilização da fórmula fundamental da Trigonometria. Os alunos não sentiram a sua necessidade: para quê utilizar uma fórmula para calcular o seno de um ângulo, conhecendo o seu coseno, se rapidamente a máquina me dá esses valor?

De salientar que no ano lectivo 91/92, este projecto deixou de ser experimental e foi implementado em todas as turmas do 9ºano.

Celina Maria Pereira
João Manuel Cegonho
Maria Isabel Rocha

Esc. Sup. de Educação de Leiria

Materiais para a aula de Matemática

As marés são fenómenos naturais de periodicidade evidente. Pode definir-se um modelo matemático que dê a altura da água em função do tempo, aplicável, pelo menos localmente, a alguns dias consecutivos.

A proposta de trabalho que aqui é apresentada consiste fundamentalmente na descoberta de uma função do tipo $A = a + b \cos(cT)$ que se "ajuste" ao conjunto de dados representados.

A determinação dos parâmetros da função basear-se-á necessariamente num processo de tentativa e erro e envolverá a discussão de questões como o período da função, o seu contradomínio, ...

Esta actividade só tem sentido se for apoiada na utilização do computador, nomeadamente de uma folha de cálculo. Esta ferramenta permite a visualização imediata, em tabela e gráfico, das modificações que ocorrem quando se altera o valor de um dos parâmetros, facilitando a comparação entre os dados obtidos através da função e os dados da previsão.

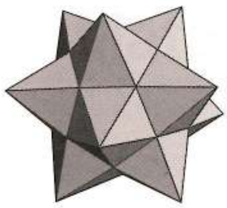
Bibliografia

Edwards, D. & Hamson, M. (1989). *Guide to Mathematical Modelling*. Florida: CRC Press.

IHM (1992). *Tabela de Marés 1992*, Vol. I. Lisboa: Inst. Hidrográfico da Marinha.

Projecto MINERVA (1992). Materiais de Formação desenvolvidos no Projecto "Modelação e Inovação Curricular". Lisboa: Pólo do Proj. MINERVA do DEFCUL.

António Bernardes



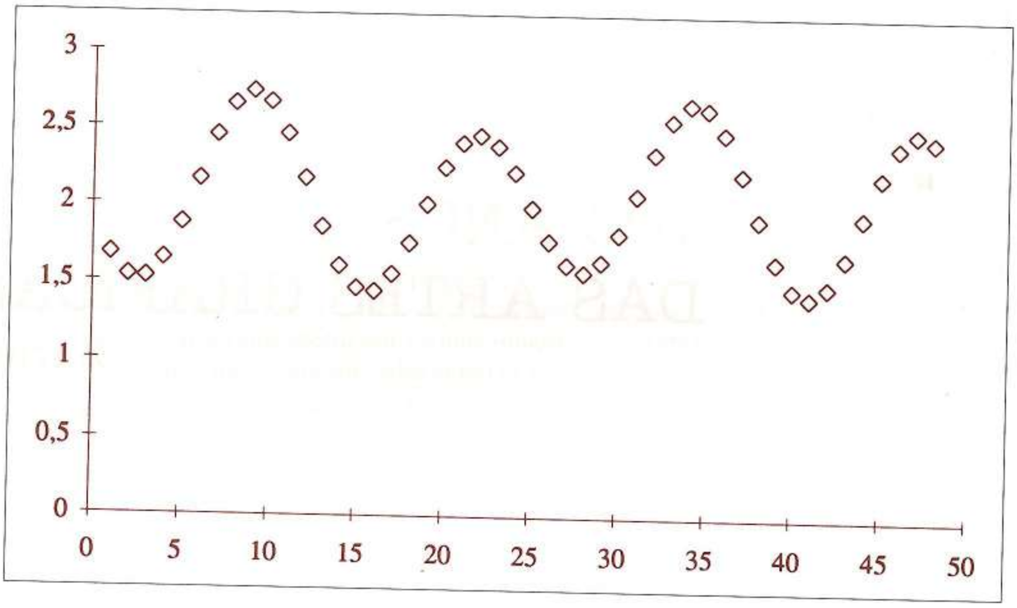
Materiais para a aula de Matemática

Ao sabor da maré...

Na previsão das marés o Instituto Hidrográfico da Marinha (IHM) baseia os seus cálculos em análises efectuadas sobre observações maregráficas de, pelo menos um ano.

São tidos em conta principalmente os efeitos astronómicos de periodicidade rigorosamente conhecida (atracções lunares e solares e rotação da Terra), e não os efeitos meteorológicos de periodicidade mal definida e que se traduzem em oscilações diárias do nível médio do mar (pressão atmosférica e ventos, por exemplo).

horas	dia 2	dia 3
0	1,68	1,99
1	1,54	1,78
2	1,53	1,63
3	1,65	1,58
4	1,88	1,65
5	2,16	1,83
6	2,45	2,08
7	2,66	2,35
8	2,74	2,57
9	2,67	2,68
10	2,46	2,65
11	2,17	2,49
12	1,86	2,22
13	1,61	1,93
14	1,47	1,66
15	1,45	1,48
16	1,56	1,43
17	1,76	1,50
18	2,01	1,69
19	2,25	1,95
20	2,41	2,21
21	2,46	2,41
22	2,39	2,50
23	2,22	2,45



Na tabela são apresentadas as previsões de alturas horárias para o porto de Leixões para os dias 2 e 3 de Novembro de 1992. A sua representação gráfica é dada ao lado.

1. Tenta encontrar uma função que traduza a variação da altura das marés nesses dias.

2. Compara os resultados obtidos com a função e as previsões. Tenta afinar o mais possível o teu modelo.

3. Consulta uma tabela de marés e modifica o teu modelo de modo que se aplique também aos dias seguintes aos indicados.

Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real?

Paulo Abrantes

Em Maio deste ano, realizou-se um concurso de características originais, para alunos do 9º ano do concelho da Amadora, intitulado *Matemática & Realidade*. Para além de sugerir que uma "competição matemática" deste tipo pode ter muito interesse para os nossos alunos e as nossas escolas, a análise do que se passou suscita um conjunto de reflexões sobre a aprendizagem da Matemática.

No dia 16 de Maio, um sábado muito quente, a Escola Secundária da Amadora abriu propositadamente para que aí se realizasse o concurso ***Matemática & Realidade***. Cerca de 70 alunos do 9º ano de quatro escolas participaram na prova.

Esta "competição matemática" assumiu características pouco comuns, bem identificadas no regulamento:

• os concorrentes eram grupos, constituídos por 3 a 5 alunos;

• a prova consistia em produzir uma resposta para uma (única) situação problemática;

• a situação proposta referia-se a um problema da realidade concreta, "susceptível de ser interpretado e tratado com o apoio ou através de processos matemáticos" e assumia a forma de uma questão de "resposta aberta", para a qual "não há uma abordagem ou uma solução previamente consideradas como as únicas *correctas* ou as *melhores*";

• os alunos tinham praticamente todo o dia para trabalhar e podiam circular à vontade pelas salas disponíveis, os pátios ou a zona do bar;

• os concorrentes eram encorajados a utilizar livremente livros, calculadoras, etc. e os computadores e impressoras da escola foram colocados à disposição dos grupos interessados.

O concurso foi promovido pelo Projecto MAT789 que, nos últimos anos, desenvolveu um currículo inovador para o 3º ciclo do ensino básico. Na ocasião, a turma experimental do Projecto que funcionava na Escola Secundária da Amadora estava no 9º ano, prestes a terminar uma experiência curricular que incluira diversos projectos envolvendo a utilização da Matemática em situações da realidade concreta. O concurso fora inicialmente pensado como uma forma de avaliar a resposta que os alunos dessa turma dariam a um problema *realista* mas que fosse para eles desconhecido. No entanto, a Equipa do Projecto decidiu *abrir* a iniciativa a todos os alunos do 9º ano do concelho, tendo em vista um objectivo adicional: chamar a atenção para o interesse educativo de um tipo de problemas pouco considerados nos programas e aulas de Matemática.

A organização do concurso contou com o apoio do Conselho Directivo da escola, da Câmara Municipal e de professores das escolas que aderiram à iniciativa.

A situação proposta

A folha que os alunos receberam no início da prova está reproduzida (em tamanho reduzido) na Fig. 1. Era apresentada uma situação relativa ao trânsito num cruzamento da Amadora e cada grupo era convidado a produzir uma proposta para a colocação de um sistema de semáforos nesse cruzamento.

Ao longo do dia, os vários grupos foram concluindo os seus relatórios. Os trabalhos seriam depois apreciados, sob anonimato, por um júri formado por cinco pessoas (um membro da organização e um professor de cada escola participante) que decidiria dos prémios a atribuir.

A tarefa do júri não era fácil. Não se tratava de "classificar respostas" mas sim de "apreciar trabalhos" como referia o próprio regulamento. No entanto, os *critérios de apreciação* e, em geral, os resultados do concurso serão comentados mais adiante. Antes disso, convirá reflectir sobre algumas questões ligadas à aptidão para resolver problemas, em particular quando se trata de usar a Matemática em situações da *vida real*. Isso poderá ajudar a compreender o interesse em propor um certo tipo de actividades e

Considera o problema seguinte. Estuda-o e propõe as tuas soluções. Claro que não tens possibilidades, em pouco tempo e nas condições do concurso, de reunir todos os dados necessários. No entanto, deverás descrever os processos que usarias para os obter. Como as tuas propostas devem ser tão concretas quanto possível, poderás inventar, tu próprio, os dados de que precisas para explicar como funciona o teu modelo.

As avenidas D. José I e Dr. José Pontes admitem os dois sentidos de trânsito e têm duas faixas de rodagem. Junto ao seu cruzamento, a Av. D. José I é um pouco mais larga e nela estão assinaladas três faixas de rodagem, dado o trânsito ser muito intenso.

Para regular o trânsito neste cruzamento, poderiam ser colocados semáforos. Mas para adoptar uma tal solução há vários problemas a resolver e diversos aspectos que podem ser tidos em conta...

Locais onde podem (devem) ser colocados os semáforos.

A melhor maneira de organizar o sistema: num dado momento, alguns semáforos estão abertos e outros fechados; no período de tempo seguinte, alguns fecham, outros abrem e outros mantêm-se como estavam... e o processo continua até que o sistema volte à situação inicial.

O tempo de abertura não tem que ser o mesmo para todos os semáforos. E o sistema não tem que ser "fixo" ao longo do dia. Há portanto factores que se devem considerar e talvez um estudo prévio a fazer antes de se tomarem decisões.

Se nos fixarmos num certo período do dia — por exemplo, entre as 18 e as 20 horas — como é que poderia (deveria) funcionar o sistema?

Mas a decisão de implantar um sistema de semáforos tem custos. Além disso, há a opinião dos principais interessados. E haverá eventualmente outros aspectos relevantes...

Fig. 1 - A situação proposta no concurso *Matemática & Realidade* — Escola Secundária da Amadora, 16 de Maio de 1992

em criar um certo tipo de ambiente e de condições de trabalho.

Saber Matemática é diferente de saber usar a Matemática...

Pode saber-se muita Matemática e não se ser capaz de a usar quando se está perante um problema novo. Todos os professores conhecem alunos que têm muitas dificuldades em resolver problemas, às vezes bastante simples, mesmo conhecendo perfeitamente todos os procedimentos necessários para o fazer.

Diversos investigadores têm estudado os processos usados por aqueles que são bem sucedidos a resolver problemas. Um deles é Alan Schoenfeld que, num artigo publicado em 1987, analisa a maneira como um problema de geometria foi abordado por estudantes que dominavam todos os processos necessários para o resolver mas não conseguiram fazê-lo e por um matemático que não se recordava desses processos mas acabou por ser bem sucedido. Schoenfeld afirma que a diferença ficou a dever-se ao modo como "fizeram uso do que sabiam". Ao contrário dos estudantes, o matemático passou mais tempo a *pensar* do que a *fazer* e, por diversas vezes, usou com eficiência processos de *auto-verificação*.

Estas capacidades *metacognitivas* (assim chamadas por se referirem à gestão do próprio pensamento) não são os únicos factores que distinguem os "bons resolvedores de problemas". O mesmo autor salienta a importância das crenças acerca da Matemática: alunos que acreditam que todos os problemas se podem resolver em menos de 10 minutos desistem de trabalhar num problema ao fim de pouco tempo mesmo que fossem capazes de o resolver com mais esforço; aqueles que estão preocupados sobretudo com a forma da resposta gastam mais tempo com esse aspecto do que a tentar compreender o que estão a escrever; etc.

Mesmo quando o aluno tem os conhecimentos e aprendeu os processos cognitivos apropriados, não é garantido que ele esteja automaticamente *disposto* a utilizá-los. Lauren Resnick, uma investigadora da psicologia cognitiva, escreveu em 1987 que é preciso aprender a reconhecer e mesmo a procurar oportunidades para aplicar as capacidades que se tem, e que a escola deve ajudar a desenvolver não só as capacidades do pensamento mas também a disposição para usá-las. E admite que o tipo de motivação que se tem por uma tarefa esteja fortemente relacionado com a maneira como se trabalha na realização dessa tarefa.

Parece legítimo supor-se que estes factores estão associados à aptidão para resolver uma grande variedade de problemas, incluindo problemas de *aplicação* da Matemática. Mas será que a utilização da Matemática em situações da *vida real* não requer capacidades específicas que decorrem da natureza dessas situações e que não são geralmente mobilizadas em problemas *puramente matemáticos*?

Os *problemas* dos problemas de aplicação da Matemática...

Quando enfrentamos uma situação da realidade concreta (em que a Matemática nos pode ajudar!) alguns dos problemas que precisamos de resolver não se parecem muito com aqueles que se aprendem nas aulas.

Na vida real, muitas vezes, os problemas nem sequer estão ainda bem formulados e prontos a ser respondidos. Esta *indefinição* pode gerar dificuldades.

Alunos pouco habituados a enfrentar situações deste tipo tendem a mostrar-se pouco confiantes por "não se saber bem o que é para fazer". Por isso, faz sentido falar de uma capacidade para *formular problemas*.

Uma outra característica de muitos problemas da realidade é o facto de termos à partida, ao mesmo tempo, *dados a mais e a menos* (para usar os termos de Lesh num texto escrito em 1990). Ao contrário do que se passa na generalidade dos problemas propostos nas aulas, há dados que é preciso ignorar por serem irrelevantes para o processo pelo qual tencionamos atacar o problema. Mas, ao mesmo tempo, é quase sempre necessário recolher novos dados, seja através de consulta (de documentos ou pessoas) ou por meios experimentais.

O que fazemos normalmente não é considerar a realidade *tal e qual* mas sim uma versão simplificada. Depois, traduzimos os elementos desse *modelo real* em termos matemáticos, construindo um *modelo matemático* sobre o qual podemos usar os métodos que conhecemos desta disciplina. Finalmente, interpretamos os resultados em função da situação real e verificamos se é necessário fazer correcções ao modelo, por exemplo introduzindo factores que haviam sido ignorados. Este ciclo — que pode ter que ser percorrido várias vezes — é designado por *modelação* (Mogens Niss, num texto escrito em 1987, distingue modelação de *matematização* reservando este último termo para o processo de traduzir uma situação em termos matemáticos, ou seja, uma das etapas do ciclo atrás referido).

Ao fazermos e executarmos um plano para responder a uma situação da vida real, outra dificuldade pode vir da necessidade de considerar factores *extra-matemáticos* que são decisivos na situação concreta e que têm a ver com a área à qual a Matemática está a ser aplicada. Nas aulas, os alunos podem pensar que são auto-suficientes ou que precisam apenas da ajuda do professor ou de outra pessoa que *saiba* Matemática. Mas, na vida real, os problemas são muito mais interdisciplinares e a colaboração de pessoas de outras áreas pode ser essencial.

Outra dificuldade do *realismo* de um problema pode surgir se os alunos estão apenas habituados a resolver problemas artificiais nos quais as *respostas matemáticas* não são as *reais* e as diferenças não se discutem. Lesh, no texto atrás citado, diz que muitos alunos tendem a suspender os seus conhecimentos sobre o mundo real quando resolvem problemas de Matemática e apresenta um exemplo, retirado de um livro do 7º ano, que mostra como os alunos são por vezes *encorajados* a proceder dessa forma: "Pat corre 8 milhas numa hora; que distância conseguirá percorrer em 10 horas?".

Os problemas da realidade são geralmente de "resposta aberta". Isto quer dizer que não existe uma maneira única de os resolver nem uma solução única. E mesmo depois de se optar por um caminho, continua a ser preciso tomar decisões: qual é o grau de pormenor desejável, qual é a maneira apropriada de comunicar os resultados...? A qualidade das respostas pode estar mais ligada às explicações e justificações sobre os processos do que propriamente aos resultados produzidos. Henry Pollak escreveu em 1987 que estes problemas são muitas vezes da forma "aqui está uma situação, descreve-a (de um modo simplificado ou mais significativo)!" mais do que da forma "aqui está uma pergunta e alguns dados, responde-lhe!".

Um outro tipo de requisitos para se enfrentarem problemas realistas está ligado às atitudes e crenças dos estudantes. Muitos destes problemas exigem tempo e persistência, por vezes mais do que conhecimentos muito específicos. Este facto cria dificuldades àqueles que estão habituados apenas a resolver problemas do tipo "uma regra — um passo" ou que estão prontos a declarar que um problema é impossível se não é resolvido em pouco tempo.

Ao reflectirmos sobre estas *exigências* somos levados a questionar o grau de preparação dos nossos alunos para lhes responder... Resta saber se a Matemática escolar pode contribuir para desenvolver as capacidades e atitudes correspondentes e, em caso afirmativo, como. Pelo caminho, terão ficado já algumas pistas para uma resposta positiva. Uma vista de olhos pelo que se passou no concurso ***Matemática & Realidade*** talvez ajude a levantar outras.

As *lições* do concurso

Do ponto de vista do envolvimento dos alunos, o concurso foi um êxito indiscutível. Muitos alunos revelaram uma notável criatividade e gosto pelo trabalho autónomo (digno de registo é o facto de mais de metade dos grupos ter usado o computador, recorrendo a programas de desenho e de texto e à folha de cálculo). No entanto, a falta de experiência neste tipo de actividades foi também notória, sendo útil que se identifiquem alguns dos traços mais visíveis:

• vários grupos demoraram muito tempo a organizar-se e a começar verdadeiramente a trabalhar;

• alguns grupos gastaram pouco tempo a discutir colectivamente a solução que iriam propor e fizeram tudo muito depressa, entregando o seu relatório ao fim de duas ou três horas;

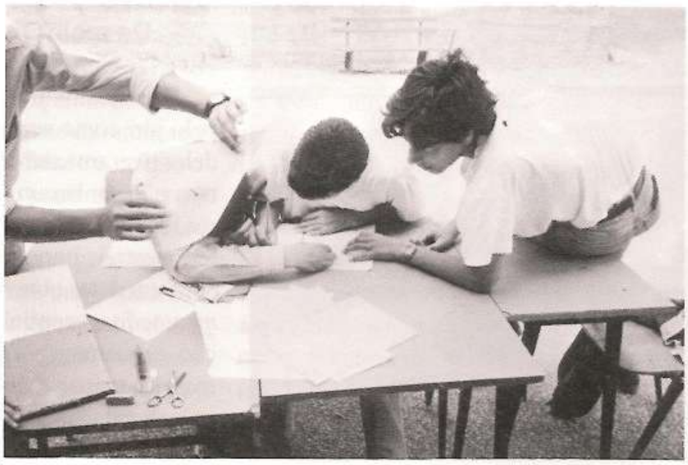


Fig. 2 - A motivação, a criatividade e a persistência são geralmente elementos essenciais quando se enfrentam problemas da realidade.

• um dos grupos escreveu que não se percebia "que Matemática é que se pretendia que fosse usada", acabando por apresentar um trabalho muito simplista e incompleto;

• alguns grupos deram mais atenção à forma do trabalho do que às soluções propostas — um deles, por exemplo, produziu um relatório em que o conteúdo não correspondia (infelizmente) à excepcional apresentação.

Dos 70 participantes (17 grupos), 20 eram os alunos da turma experimental do Projecto MAT789 (5 grupos). Enquanto os concorrentes das outras turmas eram em geral bons alunos em Matemática, da turma experimental participaram *todos*. No entanto, se é certo que eles eram, em termos médios, *piores alunos* que os restantes, tinham em contrapartida uma vantagem: possuíam alguma experiência de realização de projectos envolvendo relações da Matemática com a realidade.

Os grupos da turma experimental revelaram, todos, algumas *qualidades* — que também se verificaram noutros grupos (mas apenas em alguns!) — designadamente: (a) capacidade de organização e de cooperação entre os elementos do grupo; (b) persistência — ao contrário de metade dos outros, todos os grupos da turma experimental entregaram os seus trabalhos perto do fim do prazo; (c) forte motivação pelo trabalho mesmo da parte dos alunos mais fracos.

Estes dados são, só por si, dignos de atenção. Mas uma vista de olhos pelos critérios que o júri utilizou e pelas características dos trabalhos premiados fornecerá novas indicações.

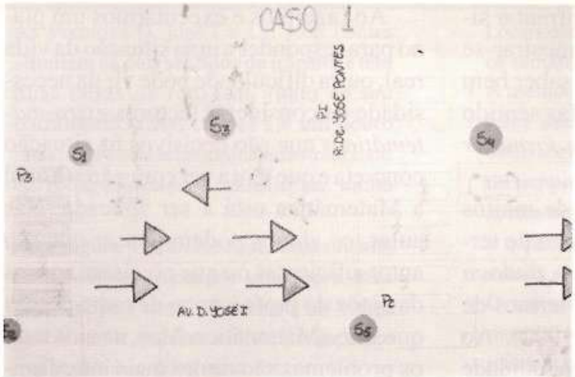


Fig. 4 - Propor representações adequadas é um dos problemas que é preciso geralmente resolver quando se está perante uma situação da realidade.

Os critérios de apreciação

De acordo com o regulamento, o júri deveria ter em conta: a pertinência e viabilidade da resposta em relação com a situação proposta; a relevância e correcção dos aspectos matemáticos envolvidos; a qualidade da argumentação; a clareza, organização e originalidade do trabalho.

Depois de cada membro do júri ter feito a sua avaliação individual de todos os trabalhos, efectuou-se uma reunião geral. Vale a pena referir que não foi difícil chegar a acordo sobre quais eram os trabalhos fracos, razoáveis ou bons. A maior dificuldade residiu no facto de ser preciso atribuir um primeiro e um segundo prémios.

Ao contrário do que sucede nos *testes objectivos*, a avaliação deste tipo de trabalhos é:

(i) mais *absoluta* do que relativa — cada trabalho tem que ser apreciado de acordo não só com os critérios gerais mas também com critérios específicos que atendam à maneira como o grupo abordou o problema (não se trata tanto de comparar uns com os outros mas de apreciar o *valor absoluto* de cada trabalho);

(ii) mais *qualitativa* do que quantitativa — faria sentido atribuir um nível a cada trabalho que nada teria de arbitrário mas seria justificado, caso a caso, com base nos critérios gerais e específicos referidos;

(iii) mais *global* do que resultante de pontuações atribuídas a diversas componentes — é essencial fazer-se uma apreciação global de cada trabalho, pesando os seus aspectos positivos e negativos.

Nestas situações, há (felizmente!) factos imprevisíveis. Surgiram trabalhos que, não sendo globalmente os melhores, tinham aspectos muito bons, o que levou o júri a atribuir prémios especiais, como se faz nos óscares de cinema... Um deles foi o da *originalidade* — atribuído a um trabalho muito sugestivo, apresentado na forma de maquete a três dimensões, feita em cartão. No entanto, a proposta não era adequada nalgumas fases do ciclo de funcionamento dos semáforos e a explicação era incompleta.

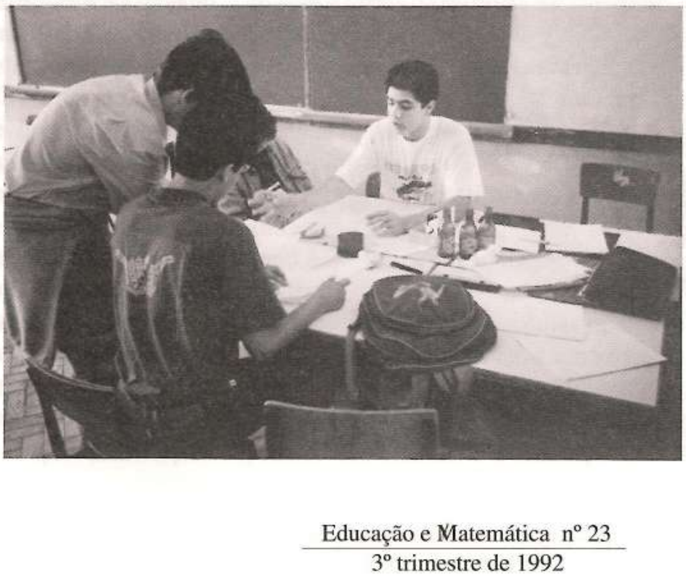


Fig. 3 - O ambiente de trabalho pode favorecer ou dificultar coisas tão importantes como a cooperação e a discussão entre os alunos.

Os melhores trabalhos

Dos quatro trabalhos considerados pelo júri como sendo os melhores, dois deles tiveram também prémios especiais mas não ganharam um dos dois primeiros lugares porque falhavam nalguns critérios gerais importantes:

• um deles obteve o prémio de *argumentação* — continha a melhor explicação esquemática do sistema proposto mas não respeitava as condições reais do cruzamento, fazendo *batota* com a largura de uma das ruas;

• outro ganhou o prémio de *planificação* — apresentava a mais completa sequência de etapas, partindo de um estudo sobre a quantidade de trânsito nas várias ruas e sentidos como base para as decisões sobre a duração das fases do ciclo de funcionamento dos semáforos, mas propunha uma solução um tanto simplista, não considerando factores como as passadeiras para peões.

Os dois restantes trabalhos ganharam o primeiro e segundo prémios previstos no regulamento. Ambos foram produzidos por alunos da turma experimental do Projecto MAT789. Em comum, estes dois grupos:

(a) dedicaram tempo a discutir e a planear antes de começar a responder;

(b) adoptaram uma perspectiva realista, respeitando as condições da situação e procurando mesmo fazer uso da sua experiência como peões;

(c) mostraram-se dispostos a correr riscos, considerando factores (como a articulação entre a passagem dos automóveis e a dos peões) que, embora sendo uma fonte potencial de erros, iriam enriquecer a proposta;

(d) fizeram uso de uma variedade de materiais, em particular do computador, e aproveitaram todo o tempo de que dispunham (o vencedor foi mesmo o último grupo a entregar);

(e) deram visível importância à comunicação da proposta, tanto ao texto como aos esquemas.

Claro que algumas destas qualidades foram também reveladas por outros grupos, de outras turmas, e alguns fizeram mesmo coisas brilhantes em certos aspectos. O que parece ser uma característica comum aos vencedores é o facto de terem exibido o conjunto de todas essas qualidades de um modo integrado e equilibrado. A naturalidade com que o fizeram (alunos que, do ponto de vista do *rendimento escolar*, são *médios* ou *fracos* quando comparados com grande parte dos outros participantes no concurso) sugere fortemente que as capacidades e atitudes reveladas são *comportamento aprendido* ou, por outras palavras, ganharam muito com a experiência adquirida em projectos que desenvolveram no âmbito do seu currículo de Matemática.

Fig. 5 - O lugar mais óbvio para zelar por componentes essenciais da formação matemática dos alunos parece ser a aula de Matemática...

Observações finais

Assim como é de esperar que alunos mais treinados a resolver equações obtenham melhores resultados numa prova de resolução de equações, também não surpreenderá afinal que alunos mais experientes a realizar projectos envolvendo o uso da Matemática em problemas da realidade se sintam mais à vontade numa situação deste tipo. A maneira de desenvolver as aptidões necessárias num e noutro caso é que não será a mesma — e daí o uso propositado dos termos "treinados" (para resolver equações) e "experientes" (na realização de projectos). Também a maneira de avaliar as aptidões correspondentes não será a mesma: para saber se um aluno é capaz de resolver uma equação, podemos trocar coeficientes e sinais a uma que ele já tenha resolvido; mas para avaliar as suas capacidades de enfrentar um problema novo, não vamos certamente trocar os semáforos (de um projecto realizado) por um polícia sinaleiro...

Pensando no conjunto de aptidões necessárias para usar a Matemática em problemas da vida real, somos levados a considerar que a escola pode (e deve) considerar uma boa parte delas e que isso implica incluir entre as experiências de aprendizagem dos alunos a realização de actividades adequadas. Embora não se negue o valor educativo que podem ter (em algumas ocasiões) problemas artificiais e estruturados, os alunos deviam ter oportunidade — pelo menos algumas vezes, como afirma Mogens Niss no editorial deste número da revista — de trabalhar sobre problemas *autênticos*, participando em *todo o processo* de modelação e envolvendo-se nesse trabalho de um modo *activo e independente*.

O trabalho de projecto implicando a utilização da Matemática para interpretar situações ou resolver problemas da realidade pode desempenhar um papel insubstituível, visto que as suas características favorecem o tipo de trabalho acima enunciado e valorizam factores decisivos como a cooperação, o trabalho autónomo dos alunos, a possibilidade de se fazerem consultas, a utilização de variados instrumentos e o tempo.

As maiores limitações da situação aqui relatada resultaram até do facto de se tratar de um concurso! Noutras circunstâncias, não só o problema poderia ter originado um projecto mais prolongado e mais realista (recolhendo-se dados sobre o trânsito, consultando-se pessoas, etc.) como as dificuldades de avaliação seriam bem menores visto que não se trataria de decidir posições e entregar prémios.

E sendo a capacidade de usar a Matemática em situações da vida real um aspecto tão relevante da própria Matemática, o lugar mais óbvio para zelar por tais componentes da formação dos nossos alunos parece ser a aula de Matemática...

Paulo Abrantes
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

No último número de *Educação e Matemática* foi proposto este problema:

"No dia do aniversário de Cinderela, apareceu-lhe a Fada-madrinha que lhe disse:

— Formula um desejo que eu satisfa-ço-o.

— Como a madrinha sabe, a Ada, que é a mais velha das minhas duas irmãs, tem mais oito anos do que eu. Ora eu detestaria vir a ser assim velha. Peço-lhe que me dê o dom da eterna juventude.

— Assim seja. Fica para sempre com a tua idade actual — disse a Fada Boa tocando-lhe com a varinha de condão.

Quando as duas irmãs souberam da prenda da Fada ficaram furiosas.

— És uma egoísta — gritou a Ada. — Esqueceste que, todos os anos na festa do reino, o pai nos dá, para dividirmos equitativamente entre nós, um saco com um número de moedas de ouro que é igual ao produto das nossas três idades.

— É verdade — confirmou a Brenda que era muito boa em cálculo mental. — Só nos próximos dois anos o teu egoísmo vai-nos custar um total de 1382 moedas de ouro.

Quantos anos tem a Cinderela?"

Este problema foi originalmente proposto por Hubert Phillips no livro *My best puzzles in Mathematics*, editado pelas Dover Publications (Nova York, 1961). Recebemos desta vez um número significativo de respostas com contributos interessantes e curiosos.

Sejam **A**, **B** e **C** as idades actuais de Ada, Brenda e Cinderela, respectivamente, em que A=C+8.

Se a Fada-madrinha não tivesse acedido aos desejos da Cinderela, as três irmãs receberiam, nos próximos dois anos, (C+1)(B+1)(A+1)+(C+2)(B+2)(A+2) moedas, mas vão receber apenas

$$C(B+1)(A+1)+C(B+2)(A+2).$$

A diferença entre estes dois valores é de 1382. A equação que se obtém, depois de simplificada e de eliminada por substituição uma das variáveis, é

$3AB + 5A + 5B = 1373$ (eliminando C)

ou

$3BC + 5C + 29B = 1333$ (eliminando A).

Resta agora procurar as soluções inteiras de uma destas equações, directamente ou resolvendo primeiro em ordem a uma das incógnitas.

Resolvendo em ordem a C vem

$$C = \frac{1333 - 29B}{3B + 5}$$

Como afirma Judite Barros, "podendo recorrer a computador, dada a rapidez de cálculo, não há vantagem de ordem prática em perder tempo com o estudo de restrições". Caso contrário, vale a pena verificar que, como

$A = C + 8 > B$, vem

$$\frac{1333 - 29B}{3B + 5} + 8 > B$$

Resolvendo a inequação, vê-se que B<20. Há só 19 tentativas a fazer, ou até menos porque, como diz Dora Almeida, quando B diminui, C aumenta, e para B=11 a Cinderela já teria mais de 29 anos "e estaria quase a perder a juventude" (nem toda a gente pensa assim, Dora!)

Testando todos os valores possíveis para B, obtêm-se 3 soluções. Quem seguir outras vias, incluindo a de usar computador, poderá encontrar uma quarta solução, conforme se vê no quadro.

	Brenda	Cind.	Ada
1ª	1	163	171
2ª	3	89	97
3ª	17	15	23
4ª	23	9	17

A 4ª solução é de eliminar porque a Ada não seria a mais velha, embora Helena Rocha e Judite Barros salientem que, mesmo sem essa informação, não é aceitável que Cinderela, com 9 anos, tivesse "preocupações com a velhice" e desejasse "conservar a eterna juventude".

Também se tem de rejeitar as duas primeiras soluções. Argumentos: "Estas idades da Ada são um tanto inverosímeis, sobretudo tendo em conta que o pai das manas ainda está vivo" (Pedro Esteves); "uma diferença de 94 anos na idade

Problema proposto

OS FINALISTAS DO FUTURO

Nas 1000as Olimpíadas Intergalácticas de Jogos Matemáticos, a FIJM (Federação Intergaláctica dos Jogos Matemáticos) reparou numa particularidade curiosa do número de finalistas.

Com efeito, esse número de quatro algarismos, todos diferentes de zero, era igual à soma dos seus algarismos elevados à sua própria potência. Por exemplo 2^2, 3^3, 7^7,...

Quantos finalistas participaram nas 1000as Olimpíadas?

de duas irmãs não é humanamente possível" (Helena Rocha); "seria pouco provável que Brenda, só com 3 anos, pudesse" ser tão boa em cálculo mental (Alberto Teixeira); ou "Cinderela, que é uma rapariga nova..." (Orlando Freitas).

A **solução única** será então: Cinderela 15 anos, Ada 23 e Brenda 17.

Houve quem resolvesse o problema impondo curiosas restrições. Para João Torres "a Cinderela deve ter pelo menos 15 anos para poder casar com o Príncipe e nenhuma das irmãs deve ter mais de 40. Segundo reza a história, eram ambas moçoilas casadoiras e tinham esperança de ser escolhidas pelo Príncipe". Também para Alberto Canelas "Cinderela é uma menina casadoira, portanto não deve ter menos de 13 nem mais de 25". Para Luis Madureira, o produto das idades terá de ser múltiplo de 3.

Helena Rocha propõe um interessante método de resolução gráfico em computador (embora não o tenha conseguido testar): traçar o gráfico da função C=f(B) e sobrepor-lhe um quadriculado de lado unitário. As possíveis soluções seriam os pontos em que o gráfico coincidisse com os vértices do quadrado (valores inteiros).

Finalmente, Alberto Teixeira faz as seguintes considerações:

"Sou de opinião que Cinderela fez o desejo não por egoísmo, antes por puro altruísmo. Repare-se que, caso não pedisse para continuar com 15 anos, nem sempre seria fácil dividir as moedas pelas três irmãs.

Por exemplo, passados dois anos, elas teriam 25, 19 e 17 anos e o produto, 8075, dividido por 3 dá um número com dízima infinita: 2691,(6).

Penso, por isso, que não devemos pensar mal da Cinderela que, além de altruísta, é quase tão boa como a sua irmã Brenda em Teoria dos Números."

Ainda A MORADA DA EDITE

O problema *A morada da Edite*, proposto no número 21, foi também apresentado na secção "Desafios" do jornal *Público*. Um dos leitores, **Jorge Oliveira**, enviou-nos uma carta que, pelas questões que levanta, nos pareceu de grande interesse pôr à discussão.

"A solução de um leitor em que a praça teria 39490 casas e a Edite moraria no nº 27924 não está correcta. Penso que o erro se deve a uma insuficiente capacidade da máquina de calcular. (...) Pode-se verificar o erro desta solução reparando que 27924^2 termina no algarismo 6 e o produto (39490 x 39491)/2 terminará em 5, não respeitando a relação $k^2 = n(n+1)/2$.

A sugestão de Judite Barros é aquela que explorei. De facto, tudo se passa em torno de quadrados perfeitos ímpares mas, na minha modesta opinião (sou engenheiro e não matemático), é possível restringir drasticamente a pesquisa(...). Com efeito, as soluções encontram-se junto aos quadrados dos seguintes números: 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363,..., os quais constituem uma sucessão que obedece à seguinte fórmula de recorrência: $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$

A partir daqui podemos determinar, por exemplo, as primeiras 10 soluções (muito longe das primeiras 50 referidas que dariam números gigantescos). O limite de n/k é $\sqrt{2}$, como era de esperar.

nº ímpar da série	quadrado	nº de casas (n)	nº da Edite (k)	n/k
1	1	1	1	1
3	9	8	6	1,(3)
7	49	49	35	1,4
17	289	288	204	1,4117647
41	1681	1681	1189	1,4137931
99	9801	9800	6930	1,(41)
239	57121	57121	40391	1,4142012
577	332929	332928	235416	1,4142114
1393	1940449	1940449	1372105	1,4142132
3363	11309769	11309769	7997214	1,4142135

A série de números ímpares pode dividir-se em duas:

a) 1, 7, 41, 239, 1393,... a que correspondem valores de **n** que são quadrados perfeitos e **n+1** o dobro de um quadrado perfeito;

b) 3, 17, 99, 577, 3363,... a que correspondem valores de **n** que são o dobro de um quadrado perfeito e **n+1** quadrado perfeito.

Cada uma das subsucessões obedece à fórmula de recorrência: $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$

(...) Esta separação permite aplicar mais facilmente o método de indução, demonstrando a validade das fórmulas de recorrência, o que garante que os quadrados daqueles números ímpares são ou **n** ou **n+1**, com n(n+1)/2 = quadrado perfeito.

Para chegar a estas conclusões utilizei uma simples máquina de calcular de 8 dígitos, determinando exaustivamente as primeiras 6 soluções, até observar a lei de formação da sucessão dos números ímpares que suportam as soluções.

Penso, no entanto, que fica por demonstrar que esta sucessão de números ímpares esgota o problema. Confesso que perdi algum tempo a pesquisar uma demonstração mais formal, tendo "descoberto" algumas relações bastante interessantes entre os números envolvidos... mas as férias acabaram!

(...) talvez algum matemático se sinta desafiado à tal demonstração."

Também **Alberto Canelas** nos enviou uma carta sobre *A morada da Edite* discordando de "algumas das conclusões apresentadas, relativamente à generalização para uma praça de um tamanho qualquer". Tendo resolvido o problema de duas maneiras, com dois programas de computador em GWBASIC, obteve, a partir de certa altura, soluções diferentes. Afirma então: "(...) gostaria de lembrar que o computador é um precioso auxiliar nestas situações, mas é igualmente preciso ter um certo cuidado com o modo como é utilizado.

Em certas condições, o computador é incapaz de distinguir um número inteiro de um número *aproximadamente inteiro*. Por exemplo, substituindo na fórmula o valor n=39490, apresentado por António Amaral na revista, e fazendo as contas numa máquina de calcular suficientemente precisa obtemos o valor k=27924,00034 que não é, evidentemente, solução do problema."

Chama ainda a atenção para o facto curioso e inesperado de a razão entre duas soluções sucessivas de **n** (ou de **k**) tender para uma constante **c**. E, "embora não o conseguisse demonstrar, presumo que o valor da constante é dado por

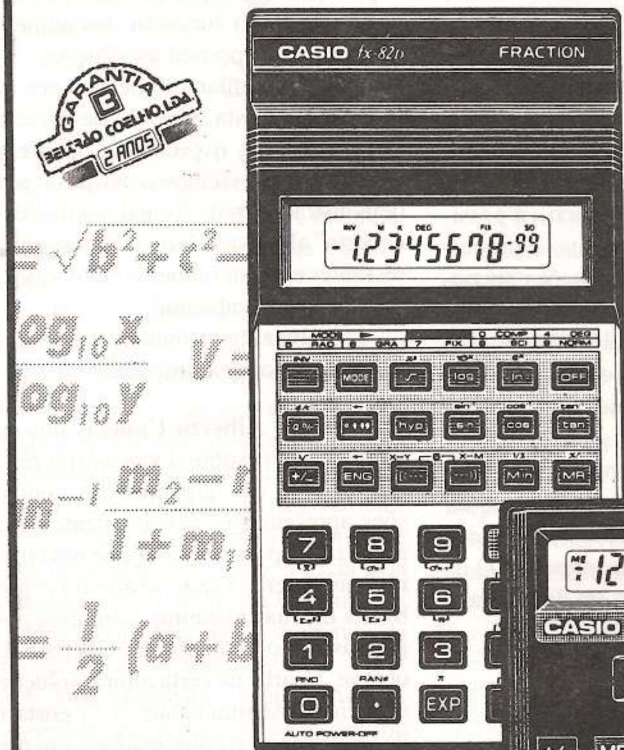
$$c = 2\sqrt{2} + 3 = 5{,}828427124746...$$"

Finalmente, apresenta a 13ª solução. A praça teria 2.239.277.041 casas e a Edite moraria no nº 1.583.407.981.

José Paulo Viana

CASIO® CALCULADORAS ELECTRÓNICAS

NÃO HÁ PROBLEMA QUE RESISTA!



FUNÇÃO FRACÇÕES EM TODAS AS CIENTÍFICAS

$2\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=3\frac{11}{20}$

2 $\boxed{a\,b/c}$ 4 $\boxed{a\,b/c}$ 5 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{a\,b/c}$ 4 =

3⌐11⌐20

CALCULADORAS: PARA TODOS OS GRAUS DE ENSINO

A CASIO líder mundial em calculadoras possui a linha mais completa de máquinas para o ENSINO.

Possuidoras de mais funções, mais qualidade e garantia, as CASIO são imbatíveis!

A sua rapidez de cálculo, 3 vezes superior a qualquer outra marca e preço competitivo, são factores decisivos na escolha de alunos e professores.

CONDIÇÕES ESPECIAIS PARA O ENSINO

REPRESENTANTE

BELTRÃO COELHO, LDA.

LISBOA, PORTO, SETÚBAL, AVEIRO, COIMBRA, BRAGA

EMPRESA DO GRUPO BCL

Perspectivas Interdisciplinares em Física e Matemática

Cremilde Ribeiro e Margarida Junqueira

No âmbito das actividades de formação de professores promovidas pelo Pólo do Projecto MINERVA da FCT/UNL, levámos a cabo, em 1991, um trabalho de pesquisa e formação subordinado ao tema geral "Perspectivas Interdisciplinares em Física e Matemática".

As interrelações entre a Fsica e a Matemática são múltiplas e variadas. Um dos pontos de vista em que podem ser discutidas é o da articulação de saberes respectivos com base em situações experimentais concretas. Tais considerações servem para fundamentar e contextualizar as opções por nós tomadas no que se refere aos temas abordados no curso, bem como às metodologias utilizadas. Afim de se proporcionar uma ideia mais clara sobre o trabalho realizado incluem-se alguns exemplos das actividades propostas aos professores. O texto ficaria, porém, incompleto sem algumas reflexões, nomeadamente sobre a forma como os diferentes grupos de professores aderiram às nossas propostas.

1. Introdução

1.1 Cruzar a Física com a Matemática

Cruzar a Física com a Matemática não pode ser considerado propriamente uma ideia original. Desde os tempos mais remotos que estes dois ramos do saber se têm comportado qual casal ora profundamente enamorado, fundindo-se numa união profícua, ora com profundas desavenças, trabalhando furiosamente de costas viradas, tentando demonstrar a sua independência e superioridade recíporocas.

A evolução do conhecimento científico fez-se marcada por uma forte tendência para a especialização e particularização dos diferentes ramos do saber. Esta tendência traduz-se por uma organização curricular do ensino espartilhada em disciplinas apresentadas aos alunos (e aos professores) como nós de uma rede com fracas ou nulas conexões entre si.

São hoje reconhecidos os efeitos perversos da «excessiva parcelização e disciplinarização do saber científico [que fazem] do cientista um ignorante especializado» (Santos, 1987, p. 46). O reconhecimento da complexidade dos fenómenos organizadores da pessoa, da sociedade e do Mundo, e a necessidade da sua compreensão, veio provocar uma mudança nesta ênfase e promover novos quadros epistemológicos e novas abordagens metodológicas que opõem a fragmentação temática à fragmentação disciplinar.

No âmbito das disciplinas do 3º ciclo do ensino secundário a Física e a Matemática situam-se entre as que menos se ignoram, —não há dúvida que muitos professores de Física apostam no domínio dos conceitos e algoritmos matemáticos como forma de ir mais longe no entendimento da Física e que muitos professores de Matemática se socorrem de problemas físicos como meio de descobrir e/ou aplicar ideias matemáticas. Porém, a verdade é que poucos são os que conseguem uma verdadeira unificação destes dois saberes, abordando-os a partir de temas, na perspectiva referida anteriormente.

1.2 Partir de situações experimentais

A acrescentar a estas questões há, ainda, a forma descontextualizada e formal de que se reveste o ensino em geral e destas duas disciplinas em particular. Fazem-se experiências físicas com giz ... no quadro, constroem-se modelos matemáticos sem a menor preocupação em os relacionar com as situações que lhes subjazem ou a que se podem aplicar.

Que dizer do conhecimento assim "adquirido"?

Qual é o significado de *medida* para quem só ouve falar de medidas sem ter a possibilidade de medir? De *movimento* para quem não os provoca e observa em tempo real? De *vector* quando este é apresentado como *a propriedade comum a segmentos de recta equipolentes*?

Espantamo-nos com a dificuldade demonstrada pelos alunos no desenvolvimento do raciocínio e na transferência das aprendizagens para novas situações. Mas esquecemo-nos que a aprendizagem enquanto processo no qual os alunos absorvem informação e a armazenam de forma fragmentada ignora as reais fontes do conhecimento, —as situações problemáticas que propiciam um envolvimento activo. «As actuais estratégias de ensino devem ser invertidas, o conhecimento deve resultar da experiência com situações concretas. Desta forma os alunos podem reconhecer a necessidade de aplicar um determinado conceito ou procedimento e adquirir uma forte base conceptual que lhes sirva mais tarde para reconstruir o seu conhecimento» (NCTM, 1991, p.11).

2. O curso

A reflexão sobre estas questões levou--nos, assim, a pensar um curso de formação de professores com base na exploração de situações experimentais diversificadas que permitissem investigar e construir significados para novas situações, interrelacionando conceitos e suas aplicações à luz da Física e da Matemática.

Para a frequência do curso foram seleccionados, preferencialmente, pares de professores de Física e de Matemática da mesma escola que aceitaram o compromisso de desenvolverem trabalho em conjunto.

As seis sessões do curso decorreram mensalmente entre Janeiro e Junho de 1991. A existência de períodos relativamente longos entre as sessões possibilitou, por um lado o aprofundamento das matérias a tratar, por outro a progressiva adaptação dos temas e metodologias aos interesses e necessidades manifestados pelos participantes. A primeira sessão do curso teve carácter teórico. Na sua primeira parte foi proferida uma lição subordinada ao tema "Uma visão física da Matemática ou uma visão matemática da Física", pelo Dr. Vítor Duarte Teodoro, após o que se seguiu a análise comparativa das propostas dos novos programa de Física e Matemática. As quatro sessões seguintes tiveram um carácter essencialmente prático. Em todas elas se adoptou a mesma metodologia de trabalho, baseada na realização de experiências e problemas físicos, antecida ou seguida pela discussão teórica dos modelos que lhes estavam subjacentes, quer do ponto de vista físico, quer do ponto de vista matemático. Estas sessões[1] são descritas com mais promenor no § 2.1. Encerrou--se o curso com uma conferência sobre "Modelos, atitudes e padrões das ciências" proferida pelo Prof. Doutor Nunes dos Santos, à qual se seguiu um debate sobre o mesmo tema e que possibilitou uma reflexão colectiva sobre o trabalho realizado ao longo do curso.

Realizámos mais duas "versões" da parte prática do curso, uma para professores de Física e de Matemática da Escola Secundária do Monte da Caparica, — escola que sempre colocou à nossa inteira disposição as instalações e o equipamento necessário para a realização deste trabalho—, e outra para professores de Matemática inserida nos cursos que antecederam o PROFMAT 91. O tema "Um verdadeiro movimento" (ver § 2.1) deu origem ainda a quatro sessões práticas[2]. Nestas sessões participaram professores de Física e de Matemática (mas sem que a sua incrição se fizesse por "pares") ou apenas professores de uma das disciplinas.

2.1 Temas abordados[3]

2.1.1 Medir, calcular, estimar...

Como ponto de partida para o trabalho a desenvolver considerou-se fundamental confrontar os professores com alugumas questões que se colocam no domínio da utilização do método experimental, em particular na medição directa e indirecta de grandezas. Quando se efectua uma medição obtem-se sempre

---

Algumas actividades propostas

1 Volumes de sólidos. Massas e massas volúmicas

(a) Introduza uma esfera de aço numa proveta com água e meça o volume de líquido deslocado.
(b) Determine o raio da esfera .
(c) Compare o valor que obteve anteriormente com o valor que pode determinar utilizando uma craveira.
(d) Critique os resultados.
(e) Utilize a balança para determinar a massa da esfera de aço.
(f) Determine a massa volúmica do aço.

2 Ordem de grandeza do tamanho de uma molécula

(a) Numa tina de vidro, larga e limpa, deite água até, aproximadamente, metade da altura.
(b) Friccione um pau de giz com lixa e deixe cair uma fina camada de pó sobre a superfície da água.
(c) Com um conta gotas deixe cair uma gota da solução alcoólica de ácido oleico sobre a superfície da água da tina. Proceda de modo a poder estimar a área da película formada.
(d) Determine o volume de uma gota. (Sugestão: meça o volume ocupado por um determinado número de gotas e calcule a partir daqui o volume de uma gota.)
(e) Determine a espessura da camada de ácido oleico.
Uma vez que o ácido oleico está muito diluído em alcool, podemos admitir que a gota da solução vai espalhar-se completamente à superfície da água.e que o alcoól se evapora. Assim, as moléculas ocupam uma só camada, encontrando-se "encostadas" umas às outras. A espessura da camada é uma estimativa aceitável para o diâmetro da molécula de ácido oleico.

3 Estrelas brancas anãs

As estrelas brancas anãs são extremamente densas. Têm uma massa volúmica de cerca de 100 milhões kg/m^3. Se tivesse uma caixa de fósforos cheia de matéria de uma dessas estrelas, qual seria a sua massa?

um valor aproximado para a medida, com determinado grau de precisão o qual depende de vários tipos de erros. Assim, analisou-se o rigor com que se deve proceder às medições, bem como o modo de exprimir o valor de uma grandeza através do produto de um valor numérico por uma unidade, questão que nem sempre é tida em conta pelos professores de matemática, facto que levanta dificuldades aos alunos.

Os trabalhos experimentais e problemas realizados permitiram abordar os temas seguintes :

- a importância da estimativa
- a importância da medição
- medidas de grandezas
- erros
- algarismos significativos
- ordem de grandeza de um número

2.1.2 Um verdadeiro movimento

Nesta sessão realizou-se um trabalho experimental que permitiu estudar o movimento de um móvel que se deslocou por acção de uma força de tracção constante. A análise e interpretação dos dados experimentais, utilizando uma Folha de Cálculo, permitiu:

- determinar o valor da aceleração
- determinar o valor de velocidades instantâneas

Através deste estudo procurou-se exemplificar a utilização prática dos conceitos matemáticos seguintes:

- recta de regressão e coeficiente de correlação
- derivada, quer como limite do quociente entre a variação da posição e o intervalo de tempo correspondente quando este tende para 0, quer como declive da tangente ao gráfico da função x=f(t).

3. Conclusões

A observação da atitude dos professores nos diferentes cursos e sessões práticas (no total cerca de 50 professores participaram nos cursos e 60 nas sessões práticas), as conversas que fomos tendo e as fichas de avaliação permitem-nos estabelecer as conclusões que se seguem.

- O primeiro curso foi o que melhor resultou, na medida em que nos pareceu ser o que propiciou interacções mais

Actividade proposta

1 Monte o equipamento experimental[4] que permite colocar em movimento um carro através da aplicação de uma força de tracção constante, e simultaneamente marcar numa fita de papel pontos a intervalos de tempo iguais, como se mostra na figura 1.

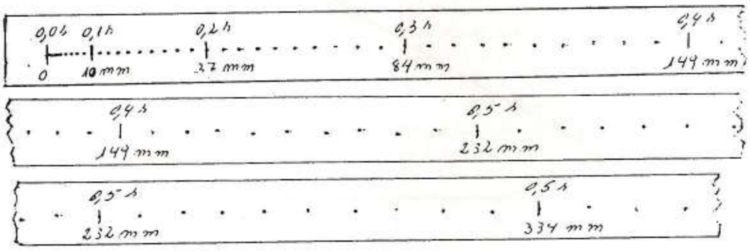


Figura 1

2 O intervalo de tempo que decorre entre dois pontos é 0,01 s. Registe as posições **x** dos sucessivos pontos marcados na fita de papel (com erro inferior a 0,5 mm) e relacione as distâncias percorridas com os intervalos de tempo correspondentes.

De acordo com a hipótese de Galileu, mais tarde explicitada por Newton, uma força constante provoca, num móvel, um movimento uniformemente acelerado. Assim, a razão entre a distância percorrida pelo móvel, e o quadrado do tempo que essa distância demora a ser percorrida deve ser constante, sendo o dobro dessa constante a aceleração do movimento.

3 Para verificar esta hipótese, introduza os dados experimentais numa folha de cálculo e construa um gráfico da função $x=f(t^2)$. Observe que os pontos parecem dispersarem-se à volta de uma recta que parece passar pela origem, deixando prever a existência de uma relação de proporcionalidade directa entre as duas grandezas.

4 Procure traçar a recta que melhor se ajuste aquele conjunto de pontos experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados. O dobro do declive dessa recta representa uma estimativa do valor da aceleração.

Este estudo é exemplificado no Quadro I e na figura 2.

A	B	C	D	E	F	G
tempo - t	tempo^2 -t^2	posição - x	$(t^2)^2$	$t^2 \times x$	y=71.9 x+1.1	x^2
0	0	0	0	0	1.129103	**0**
.1	.01	1.7	.0001	.017	1.848271	**2.8**
.2	.04	4.6	.0016	.184	4.005777	**21.1**
.3	.09	8.2	.0081	.738	7.601619	**67.2**
.4	.16	13.7	.0256	2.192	12.63580	**187.6**
.5	.25	20.0	.0625	5	19.10832	**40**
.6	.36	27.3	.1296	9.828	27.01917	**745.2**
.7	.49	35.7	.2401	17.493	36.36836	**1274.4**
.8	.64	45.6	.4096	29.184	47.15589	**2079.3**
.9	.81	55.8	.6561	45.198	59.38175	**3113.6**
1	1	76.7	1	76.7	73.04595	**5882.8**
Somas =	3.85	289.3	2.5333	186.534	---	**13774.8**
declive = ord. orig.=	71.9 1.1		r = r^2 =	**.99** **.99**		

Quadro I

Neste exemplo, a aceleração do movimento é a=1,4 m/s^2

5 Compare este valor com o valor da aceleração determinado através da segunda lei de Newton: a=F/m (F- força que provoca o movimento e m - massa do sistema).

6 Na segunda parte do trabalho pretende-se estimar o valor da velocidade em cada um dos instantes 0; 0,1; 0,2; ... Para tal considere intervalos de tempo Δt cada vez menores que se aproximam do instante em causa.

7 Determine o valor da velocidade média $(\Delta x/\Delta t)$ em cada um desses intervalos. O valor

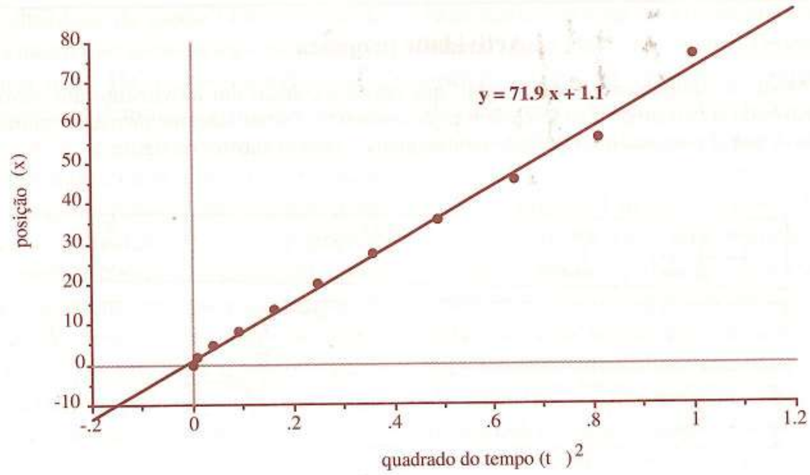


Figura 2

para o qual tendem as velocidades médias é o valor da velocidade instantânea. Este limite é, por definição, a derivada de x=f(t) no instante t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$$

Por exemplo, no caso t=0,3 s, meça para cada Δt indicado o valor correspondente de Δx na fita de papel e complete o Quadro II.

Δt (s)	Δx (cm)	$v_m=\Delta x/\Delta t$
0,30-0,20=0,10 0,30-0,21=0,09 ... 0,30-0,29=0,01		
----------	----------	$v_{0,3}\approx$
----------	----------	$v_{0,3}\approx$
0,31-0,30=0,01 ... 0,39-0,30=0,09 0,40-0,30=0,10		

Quadro II

8 O valor da velocidade instantânea que se obtém por este processo, é pouco rigoroso. Calcular o seu valor por outro processo.

• Construa e imprima o gráfico x=f(t) (posição em função do tempo)

• Trace a tangente ao gráfico no ponto de abcissa t=0,3

• Determine o declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto (figura 3)

9 Calcule os valores das restantes velocidades instantâneas.

10 Construa o gráfico dos pontos experimentais v=f(t), trace a recta de regressão destes pontos e determine o respectivo coeficiente de correlação. O declive desta recta é a terceira estimativa do valor da aceleração.

11 Compare e comente os três valores que obteve para a aceleração.

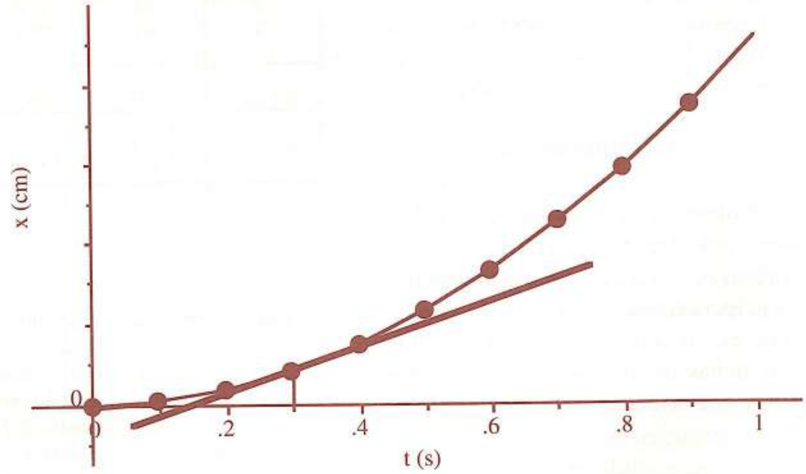


Figura 3

ricas, mesmo tendo em conta que foi o primeiro e que nas acções seguintes muita coisa foi reformulada. Levanta-se, contudo, a questão de saber se tal se ficou a dever: à duração do curso, à introdução de sessões com carácter teórico a par das sessões práticas, aos "pares física-matemática", ou a outros factores que não identificámos.

• Neste curso foi solicitada aos professores a apresentação de uma proposta de situação problemática que interrelacionasse conceitos de Física e de Matemática para ser realizada por alunos. Apenas um professor completou o trabalho e a maioria nem sequer o tentou. Aparentemente é contraditório o modo entusiástico como todos os professores se empenharam na realização das actividades que lhes foram propostas e a falta de vontade em realizarem um trabalho deste tipo com os seus alunos. A justificação para tal facto prendeu-se essencialmente com razões de ordem logística (falta de tempo, de espaço físico, de equipamentos).

• O tema "Um verdadeiro movimento" (ver § 2.1) foi, sem dúvida, aquele que maior interesse suscitou junto dos participantes. Entre muitas outras razões tal interesse pode ter sido provocado pela utilização da folha de cálculo como meio de estudar os modelos matemáticos das situações em análise.

• Como última reflexão anotamos a sensação desconfortável que atravessou a maioria dos professores de Matemática, quando confrontados com o que apelidaram de *falta de rigor matemático dos trabalhos práticos*, nomeadamente dos valores que se obtinham como resultados de medições indirectas. A título de exemplo referimos a desilusão de uma professora que para calcular a medida do raio de um berlinde utilizou uma aproximação de π com 7 casas decimais e que, tendo em conta o erro de leitura respeitante ao instrumento de medição, obteve o mesmo resultado que uma outra sua colega que utlizara π=3,14.

Como afirma Carmona (1991, p. 55): «inovar e mudar a qualidade do acto educativo passa, sem dúvida, por mudar o tipo e o conteúdo do trabalho dos professores». Do nosso ponto de vista o trabalho que desenvolvemos terá contribuido para isso, ainda que de forma modesta, na medida em que proporcionou o espaço e o tempo para a reflexão de grupos de professores em torno de novos modos de abordar velhas questões.

Bibliografia e referências

ADLEY, P., SHAYER, M., YATES, C. (1989). *Thinking Science - The curriculum materials of the Cognitive Acceleration through Science Education* (CASE) Project. London: Macmillan Education.

ALBUQUERQUE, W., *et al* (1980). *Manual de Laboratório de Física*. S. Paulo: McGraw-Hill do Brasil.

CARMONA, D. (1991), *Os professores e a Reforma in Educação e Matemática* (19/20) pp. 49-56.

EISBERG, R. M., LERNER, L. S. (1983). *Física. Fundamentos e Aplicações -Volume I-* McGraw-Hill do Brasil.

FERREIRA, V. (1985). *Conjunto Cinemática e Dinâmica* Lisboa: Foc Escolar

GADSDEN, R., QUINCEY, R. (1989). *Quantitative Studies*. Cambridge: ICSA Publishing.

HAVARD PROJECTS PHYSICS (1978). *Projecto Física - Unidade 1 - Conceitos de Movimento* . Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

INTERNATIONAL UNION OF PURE AND APPLIED PHYSICS (1987). *Symbols, Units, Nomenclature and Fundamental Constants in Physics*. Document IUPAP 25.

MAJORANA, P., HEILMANN, C. (1978). *Ferramentas matemáticas para o estudo de Física*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

NATIONAL COUNCIL of TEACHERS of MATHEMATICS (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

PÓLO DO PROJECTO MINERVA DA FCT/UNL (1991). *Manual de Formação 1990/91*. Documento policopiado.

SILVA, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática II Volume*. Lisboa: GEP

SILVA, L., VALADARES, J. (1984). *Manual de Física - Tomo I - Mecânica Fundamental*. Lisboa: Didáctica Editora.

SANTOS, B. S. (1987). *Um discurso sobre as Ciências*. Porto: Edições Afrontamento

TOPPING, J. (1972). *Errors of observation and their treatment*. New York: Halsted Press

[1] Por limitações de espaço, não foi possível a inclusão de todas as actividades descritas pelas autoras. Assim, apenas se apresentam neste artigo as sessões relativas aos temas 2.1.1 e 2.1.2. (Nota da Redacção).

[2] Estas quatro sessões tiveram lugar, respectivamente, no âmbito de: 1° Encontro de Professores de Matemática dos Conselhos de Almada e Seixal (Seixal, Julho 1991), Profmat 91 (Porto, Outubro 1991), Encontro do Pólo da UE do Projecto MINERVA, (Évora, Outubro 1991), Encontro de Professores de Física e de Química, Projecto MINERVA, (Pólos do Porto, Porto, Novembro 1991).

[3] Apenas são apresentados neste artigo dois dos temas abordados no curso. O 3° tema, intitulado "Vectores", não pôde ser reproduzido dada a limitação de espaço existente. As autoras enviaram gentilmente à Redacção um exemplar dos materiais do curso, pelo que os leitores interessados poderão consultá-los na APM. (Nota da Redacção).

[4] Para a realização experimental utilizou-se o *Conjunto Cinemática e Dinâmica da FOC Escolar* existente em grande parte no laboratório de física das nossas escolas.

Cremilde Ribeiro e
Margarida Junqueira
Projecto MINERVA - FCT
Universidade Nova de Lisboa

Encontros Regionais APM em 92/93

De 10 a 12 de Fevereiro de 1993, realizar-se-á nas instalações da Universidade dos Açores, o **AÇORMATE 93**. Este Encontro é promovido pelo Núcleo Regional dos Açores da APM na sequência do trabalho desenvolvido no âmbito do 1° Encontro Regional dos Professores de Matemática que teve lugar entre 22 e 24 de Abril passado na Escola Secundária Domingos Rebelo, em Ponta Delgada.

Informações sobre o AÇORMATE podem ser pedidas para Helena Melo, Dep. de Matemática - Universidade dos Açores, Rua da Mãe de Deus, Apartado 1422, 9502 Ponta Delgada Codex.

Uma semana mais tarde, de 18 a 20 de Fevereiro, decorrerá o Encontro anual dos professores de Matemática do Algarve — **ALGARMAT 93**, Encontro promovido pelo Núcleo Regional do Algarve da APM. Depois de Faro, Lagos, Portimão e Silves, será Olhão o cenário desta iniciativa que os nossos colegas daquela região organizam pelo 5° ano consecutivo.

O ALGARMAT 93 realizar-se-á na Escola Secundária de Olhão. A Comissão Organizadora do Encontro é presidida pelo nosso colega Idalécio Nicolau que é também membro da Comissão Coordenadora do Núcleo do Algarve.

Em 1993 haverá outros Encontros Regionais da APM, programados pelos núcleos respectivos mas cujas datas definitivas não foram ainda fixadas.

Um deles será o **LEIRIMAT 93**, a realizar no 3° período de 1992/93. Será o 3° Encontro anual consecutivo que o Núcleo Regional de Leiria da APM organiza.

Outro será o Encontro da Região de de **ALMADA/SEIXAL** promovido pelo núcleo da APM daquela região, iniciativa anual que também já teve duas edições (em 1991 e 1992) e que, como habitualmente, está previsto para datas próximas do final do ano lectivo.

Matemática realista na Holanda

Henk van der Kooij

"Um professor que não sabe todas as respostas pode ser mais útil do que um professor que as sabe. Mais precisamente, saber a/uma resposta pode tornar mais difícil ao professor apreciar o pensamento dos alunos e, com maiores probabilidades, ele acabará por conduzi-los à sua solução."

John Mason,
Viana do Castelo,
Abril de 1991

Renovação dos currículos na Holanda

No decurso da última década, a educação matemática nas escolas secundárias da Holanda (idades dos 12 aos 18) tem vindo a sofrer mudanças bastante revolucionárias. Em 1985, a *Matemática A* foi introduzida a nível nacional nos últimos anos da via pré-universitária (VWO, idades de 16 a 18). Este novo programa destina-se aos alunos que se preparam para ingressar na universidade em cursos de psicológia, ciências sociais e económicas. A experimentação que conduziu ao novo currículo (o HEWET--Project) foi levada a efeito pelo Instituto Freudenthal (antes IOWO e OW&OC). Em 1990, novos currículos foram introduzidos nos últimos anos da via técnico-profissional[1] (HAVO): não apenas a *Matemática A* para os estudos sociais e para a "vida quotidiana", mas também um novo currículo (*Matemática B*) para os futuros alunos de ciências exactas e de outras áreas vocacionais. Mais uma vez, as experiências com os novos programas (o HAWEX-Project) foram conduzidas pelo Instituto Freudenthal (IF). Para completar as transformações: a introdução de um novo currículo (preparado pelo IF em cooperação com o Instituto de Desenvolvimento Curricular-SLO) destinado a alunos dos 12 aos 16 anos está prevista para Agosto de 1993. (Esta estranha transformação curricular de cima para baixo é devida a algumas decisões políticas absurdas).

Perspectivas de mudança na educação matemática

É claro que a educação matemática na Holanda, a todos os níveis, está a ser actualmente influenciada pelas ideias de Freudenthal e do seu Instituto, uma vez que estes estiveram profundamente envolvidos no desenvolvimento dos novos programas. Esta visão da educação matemática, geralmente referida como *educação matemática realista*, enquadra-se muito bem nas ideias de mudança que surgem actualmente em muitos países, tanto na Matemática como na Educação Matemática. De certa forma, todas as questões têm como foco aquilo que a equipa do projecto português MAT_{789} formulou do seguinte modo:

> "... a escola deve, acima de tudo, contribuir para desenvolver a compreensão do papel que a Matemática desempenha na vida dos alunos e na sociedade (ao longo da história e no presente) e para gerar atitudes positivas em relação à Matemática. Para isso, deve valorizar os *processos* em vez do conhecimento factual e as *ideias* em vez das técnicas, e deve proporcionar uma larga variedade de actividades de resolução de problemas, envolvendo relações da Matemática com diversas áreas da realidade e internas à própria Matemática."

A Matemática como uma ciência isolada, sem qualquer referência ao mundo real, não tem valor para a maioria dos nossos alunos. Eles não precisam de um ensino da Matemática que seja essencialmente focado no treino de algumas técnicas de cálculo que se tornem inúteis para as suas profissões futuras e para a sua vida diária.

Por outro lado, o uso extensivo de computadores na sociedade modificou a forma como as pessoas têm de trabalhar em muitas profissões:

> "Cada vez mais, a sociedade é influenciada pelos processos controlados por computador. A maioria das profissões requer, actualmente, capacidades de análise em vez de capacidades mecâni-

cas, portanto, a maior parte dos estudantes precisa de mais Matemática na escola como preparação para a sua profissão. Também na vida quotidiana as pessoas se vêem confrontadas com todas as espécies de gráficos e dados estatísticos, por exemplo, nos jornais diários e nas discussões políticas." (Mathematical Sciences Education Board, USA, 1990).

Na Holanda, os objectivos recentemente formulados da educação matemática (para a maioria dos alunos) são:

1. Tornar-se um cidadão esclarecido (alfabetização matemática): o objectivo social.

2. Preparar-se para o mundo do trabalho e para estudos posteriores: o objectivo económico.

3. Compreender a Matemática enquanto ciência: o objectivo científico.

Há também uma mudança nos conteúdos da educação matemática.

Nos antigos currículos, a maior parte do tempo era gasto em álgebra e cálculo. Uma fracção muito menor era atribuída à geometria plana e, nos níveis mais avançados, à geometria vectorial no espaço (aqui também de uma forma meramente algébrica).

Nos novos programas, aparecem quatro temas principais:

- matemática discreta (combinatória, grafos e matrizes),
- probabilidades e estatística,
- álgebra e cálculo aplicados,
- geometria no espaço.

Nos níveis mais elevados dos HAVO e VWO, os alunos podem escolher Matemática A e/ou Matemática B. Na Matemática A não existe geometria no espaço; a Matemática B é construída de um modo mais teórico com base no cálculo (aplicado) e na geometria no espaço.

Educação matemática: abordagem realista versus abordagem mecanicista

Até 1985, a educação matemática na Holanda em todos os níveis do ensino secundário era apenas centrada no treino de técnicas e na manipulação de algoritmos algébricos. Nesta visão, aqui designada por *mecanicista*, a Matemática é entendida como um sistema de regras. As regras são dadas aos alunos, que as verificam e as aplicam em problemas ("exercícios") semelhantes aos exemplos dados previamente. Na abordagem mecanicista, não há necessidade de dispender tempo em problemas do mundo real e em aplicações à realidade. A única forma de responder a perguntas como: "porque é que temos de aprender todas estas técnicas?", é dizendo: "porque precisarás delas para resolver os exercícios do próximo ano".

Após alguns anos de experiências com os novos programas, reconheço que a coisa mais importante que a maior parte dos alunos aprendeu comigo nessa altura talvez tenha sido: obedecer cegamente a ordens dadas por um superior, sem saber porquê e para quê. Para muitos alunos, a Matemática significava: procurar uma forma eficiente de imitar as estranhas manipulações do professor.

Uma das componentes essenciais da *educação matemática realista* é a oportunidade que é oferecida aos alunos de re-inventarem ou re-construirem ideias e conceitos matemáticos, ao serem colocados perante muitos e variados problemas do "mundo real" e situações que apresentam traços do mundo real ou traços de modelação.

Os alunos têm a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução dos problemas. Um aspecto muito importante deste tipo de aprendizagem está no facto de os alunos serem confrontados com diferentes processos de resolução para o mesmo problema, usados pelos colegas (ou mesmo pelo professor). Deste modo, eles aprendem a ouvir outras pessoas de uma forma crítica, a valorizar o seu próprio trabalho e o trabalho dos outros e a apresentar as suas estratégias.

A certa altura, a abstracção, a formalização e a generalização têm lugar, *mas não necessariamente para todos os alunos* e não obrigatoriamente para todos os alunos ao mesmo tempo.

Um exemplo que ilustra a ideia de re-invenção (retirado de uma brochura do projecto HEWET acerca do crescimento exponencial) é a introdução dos logaritmos (para alunos de 15 anos).

Exemplo 1

Este gráfico representa o crescimento de plantas aquáticas, que ocupam inicialmente $1m^2$ (fig. 1).

1) A partir do gráfico, faz uma estimativa do número de dias a partir dos quais existem $20m^2$ de plantas.

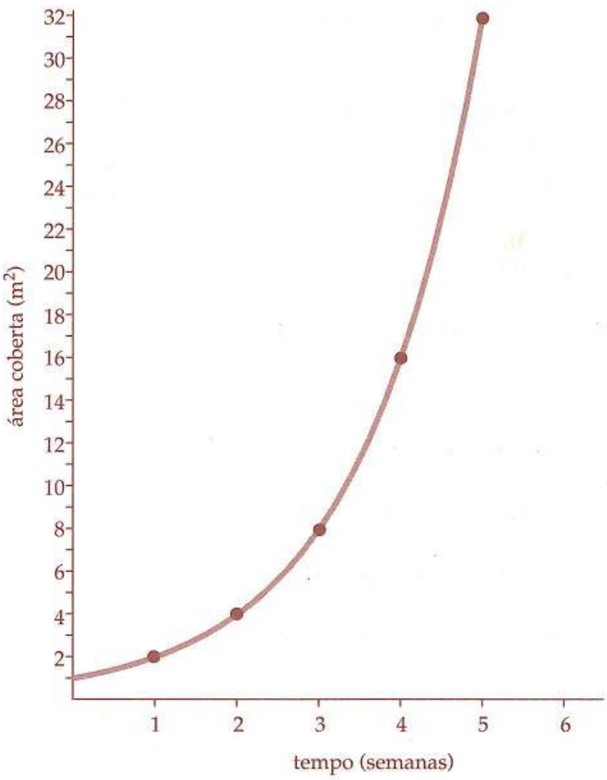


Fig. 1

2) Ao fim de quantos dias existiriam $40m^2$ de plantas? E $80m^2$? E $10m^2$? Verifica a última resposta através do gráfico.

A resposta à questão 1 é "cerca de 4.3 semanas".

Ao responder à pergunta 2 é importante notar que em cada semana que passa a área total duplica, logo as respostas serão respectivamente, 5.3, 6.3 e 3.3 semanas.

Uma observação notável: muitos

professores encontram obstáculos, ao tentarem responder a esta questão, devido ao seu conhecimento de logaritmos "isolado do contexto", que têm tendência a usar aqui. Para a maior parte dos alunos esta "duplicação em cada semana" é óbvia.

Apresenta-se agora a seguinte "definição enquadrada pelo contexto":

$\log_2 10$ é definido como o momento em que estão formados $10m^2$ de plantas, sendo 2 o factor de crescimento (começando em $1m^2$).

Neste momento, exercícios desligados do contexto são resolvidos por muitos alunos, a partir da noção de tempo que foi introduzida pelo contexto:

3) Justifica: $\log_2 16 = 4$; $\log_3 27 = 3$; $\log_5 25 = 2$.

Alguns alunos fazem logo a abstracção para a igualdade $2^4 = 16$.

A próxima questão antecipa a propriedade fundamental das funções logarítmicas:

4) Explica as seguintes igualdades:
$\log_2 3 + 1 = \log_2 6$
$\log_2 7 + 1 = \log_2 14$
$\log_2 6 + \log_2 2 = \log_2 12$

A explicação decorre directamente do facto de o número 1 ser interpretado como uma semana no contexto real. Uma forma diferente de exprimir a mesma igualdade seria: $\log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 6$. A partir deste momento, os alunos começam a confiar na sua intuição e percebem que: $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$.

Durante este processo, que termina com a demonstração formal da propriedade fundamental dos logaritmos, é possível observar-se uma diversidade de comportamentos dos alunos. Alguns deles abandonam o contexto do "tempo" rapidamente, ao passo que outros precisam da tradução para o contexto do tempo a cada momento em que têm de resolver problemas envolvendo logaritmos.

No caso da re-invenção, os alunos são, na maior parte do tempo, guiados numa direcção bem definida que conduz a um conceito matemático.

A ideia de *(re)construção* oferece outras possibilidades interessantes para a educação matemática. Perante um problema do mundo real, os alunos são desafiados a resolvê-lo sem que lhes seja dito exactamente como fazê-lo. O próximo exemplo simples ilustra esta ideia:

Exemplo 2

Mieke recebe uma quantia de 5 florins por semana e amealhou 25 florins. Annemarie apenas recebe 3 florins por semana, mas já conseguiu economizar 35 florins. Ao fim de quantas semanas terão elas a mesma quantidade de dinheiro?

É verdade que este tipo de problemas do "mundo real" pode encontrar-se em qualquer livro de Matemática, por todo o mundo. A maior parte dos professores e autores de livros escolares acham que constituem boas aplicações da teoria sobre resolução de equações lineares. Assim, nos livros de texto mecanicistas aparece um capítulo em que é apresentado o algoritmo para a resolução de equações lineares e este é treinado pela resolução de um grande número de exercícios com uma complexidade crescente. A última secção contém "aplicações" análogas ao problema das semanadas. A maior parte dos alunos não reconhece equações lineares numa situação como aquela e a minha experiência mostrou-me que eles só pretendem resolver o problema através de uma equação linear quando lhes é ensinado a traduzir o problema por meio de uma equação. Na abordagem mecanicista nunca é pedido aos alunos que desenvolvam actividades de tradução matemática ou modelação. Consequentemente, na abordagem mecanicista estes problemas do "mundo real" não são mais do que exercícios "disfarçados".

Quando este problema é dado a alunos de 12 anos, por exemplo, sem referência a qualquer teoria, obtêm-se importantes informações sobre o modo como as crianças atacam tais problemas. Com frequência, as estratégias usadas pelas crianças diferem muito daquilo que nós (matemáticos bem treinados) achamos que elas deviam fazer.

Duas estratégias de resolução para o problema das semanadas são:

1. Construir uma tabela para comparar o dinheiro que as duas raparigas têm:

depois de... semanas	Mieke	Annemarie
inicialmente	25	35
1	30	38
2	35	41
3	40	44
4	45	47
5	50	50

2. No início, Mieke está com 10 florins a menos. Em cada semana ela tem uma recuperação de 2 florins. Portanto, ao fim de 5 semanas não haverá diferença e as duas terão o mesmo.

A primeira estratégia é a mais natural: trata-se apenas de comparar as duas quantidades de dinheiro, semana após semana. É evidente que estas tabelas suscitam discussões acerca de regularidades e sobre formas de abreviação quando as tabelas se tornam demasiado longas.

A segunda estratégia é de uma ordem superior, mas mesmo assim muito elementar. Comparemos agora esta estratégia com a forma "profissional" de resolução. A maioria dos matemáticos usa a via algébrica: seja x o número de semanas desde o início, então:

$5x + 25 = 3x + 35$, logo $2x = 10$ e portanto $x = 5$.

Existe uma grande diferença entre esta estratégia e a estratégia 2: ao ser feita a tradução do contexto real para uma forma algébrica, o problema torna-se *estático*. Na estratégia 2 os alunos trabalham no interior do contexto do problema e este torna-se *dinâmico*.

A maioria dos problemas que nós resolvemos por meio de equações lineares podem ser atacados de uma forma dinâmica e enquadrada pelo contexto. O mesmo é válido em muitas outras áreas em que nós (matemáticos) caímos no uso formal, estático e (pelo menos para algumas crianças) místico da álgebra.

Nos novos programas para os níveis mais baixos foi dado um grande espaço à resolução de problemas sobre situações do mundo real, de modo informal e enquadrado pelo contexto. Desta maneira, os alunos ganham confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos. Com o decorrer do tempo, eles podem interessar-se pela resolução destes problemas através de ferramentas algébricas.

No programa antigo, as manipulações algébricas eram feitas logo pelos alunos de 12 anos. No novo programa é dada grande atenção, nos dois primeiros anos, à leitura, à interpretação (no interior de um dado contexto) e à construção de fórmulas. Deste modo, os alunos vão sendo familiarizados com conceitos difíceis como os de variável e parâmetro. A calculadora é frequentemente usada como uma ferramenta concreta para a preparação de noções algébricas.

Consequências das mudanças para a prática na sala de aula

Como foi dito atrás, as mudanças são verdadeiramente uma revolução para muitos dos professores. Os novos programas requerem novas visões acerca do papel dos professores e dos alunos, acerca da elaboração de livros de texto e do modo como os programas devem ser avaliados.

O papel do professor

Na abordagem mecanicista e estruturalista, o professor é a única autoridade na sala de aula. Quase sempre ele ensina a toda a turma o modo de resolver exercícios e de evitar erros, uma vez que ele viu, ano após ano, toda a espécie de erros possíveis. É ele que conhece *a* solução para cada problema.

Quando um professor deseja ensinar os novos programas tendo em conta as intenções que estiveram na base da sua concepção, ele tem de modificar a sua atitude; e isto diz respeito não só ao seu estilo de ensino como também às suas ideias acerca da qualidade da educação matemática. Para certos professores, os novos programas representam um declíneo na qualidade matemática, já que a ênfase dos antigos programas em técnicas e teorias mais ou menos difíceis é substituída por aquilo que eles consideram como actividades *menos* matemáticas de aplicação e modelação.

O estilo de ensino tem de ser alterado porque nos novos programas:

- a Matemática perde muito da sua estrutura,

- a Matemática não é sinónimo de certeza,

- são possíveis várias respostas e estratégias de resolução,

- os alunos podem descobrir melhores soluções do que o professor, quando têm possibilidade de as discutir.

Nos novos programas o papel do professor deixa de ser o da autoridade absoluta para ser o de uma pessoa que está a activar e a guiar os processos individuais de aprendizagem de todos os alunos. Importantes actividades do professor são: oferecer apoio, questionar, ouvir e raciocinar juntamente com os alunos, provocar, estimular e guiar discussões.

O papel do aluno

A principal diferença no papel dos alunos está em esperar que eles aprendam de uma forma activa em vez de passiva. Eles terão de pensar por si próprios e formular respostas em que expliquem, não só o que fizeram, mas mais importante ainda, *como* e *porquê* escolheram aquela solução. No princípio, muitos alunos não gostam disto e dizem que estão sempre pressionados a pensar e detestam que assim seja. "Você é o professor e, portanto, tem de me ensinar o que devo fazer. É para isso que lhe pagam." Ao fim de algum tempo, quando eles descobrem que esta abordagem é bem sucedida, acabam por apreciá-la bastante. Na verdade, isto também se aplica aos professores críticos: quando eles verificam que um maior número de alunos tem sucesso em fazer Matemática desta forma, eles mudam a sua opinião sobre os novos programas.

O livro de texto

Os novos currículos trazem consequências importantes para a elaboração de bons livros de texto. Isto porque os antigos livros de texto eram preenchidos com páginas inteiras de exercícios para praticar um conjunto de técnicas ou aspectos teóricos. As aplicações, se as havia, eram colocadas no final do capítulo.

Uma vez que as aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro da matemática realista, os livros terão de oferecer uma abundância de bons contextos reais. As aplicações integradas em contextos são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, são parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos alunos e são usadas como fontes de exercícios.

Sendo as actividades de modelação e resolução de problemas partes importantes dos novos currículos, um bom livro de texto deverá cumprir os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações têm de estar interligadas,

- os problemas apresentados têm de estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos,

- em diversos locais devem aparecer contextos ricos. Isto significa: contextos em que estão integradas diferentes ideias matemáticas,

- têm de incluir muitos problemas abertos: problemas para os quais os alunos precisam de escolher a ferramenta matemática mais adequada.

Os problemas interessantes não se encontram apenas em contextos do mundo real. O exemplo seguinte é tirado do programa de Matemática B, para os últimos anos da via técnico-profissional (os alunos são preparados para qualquer disciplina exacta de um ensino superior vocacional). O contexto é puramente matemático. De facto, pretendia-se um exercício sobre substituição de expressões algébricas.

Exemplo 3

Dadas as linhas rectas l: $y = 2x - 10$ e m: $y = 10 - 0.5x$, o ponto A está sobre a recta l e o ponto B está sobre a recta m, de tal modo que AB é horizontal e o comprimento de AB é 6. Calcula as coordenadas de A e B (fig. 2).

(Sugestão: Seja $x_B = x$; exprime y_B, x_A e y_A à custa de x).

A sugestão pretendia ajudar os alunos a resolver o problema mas, uma vez mais, verificámos que a forma como os alunos resolvem problemas difere das nossas ideias. Eles não souberam o que fazer com aquela pista. Os alunos que procuraram uma solução pelos seus próprios meios fizeram um óptimo trabalho. Repare-se nas seguintes soluções elegantes:

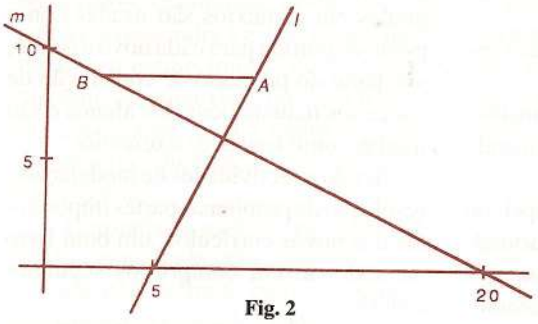


Fig. 2

1. Uma abordagem algébrica:

$x_A = 0.5y + 5$ e $x_B = 20 - 2y$, logo $x_A - x_B = 2.5y - 15$. Sendo $x_A - x_B = 6$, segue-se que $y = 8.4$ e $x_A = 9.2$ e $x_B = 3.2$.

2. Uma abordagem dinâmica:

A translação da recta l segundo o vector (-6,0) dá a recta l': $y = 2x + 2$. A intersecção da recta l' e da recta m é o ponto B: $2x + 2 = 10 - 0.5x$, logo conclui-se que $x_B = 3.2$, etc.

3. Usando o significado de declive (fig. 3):

Se o declive de l é 2, então se $\Delta x = 1$

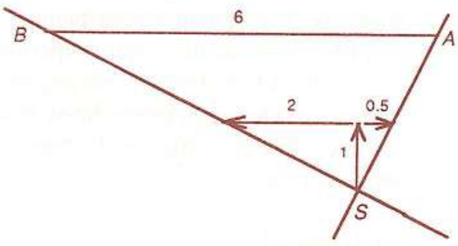


Fig. 3

será $\Delta y = 2$ ou se $\Delta y = 1$ será $\Delta x = 0.5$. Para a recta m pode fazer-se o mesmo raciocínio: se $\Delta y = 1$, então será $\Delta x = -2$. Portanto, um deslocamento vertical $\Delta y = 1$ origina uma ampliação horizontal $\Delta x = 2.5$.

Conclusão: $y_A = y_B = 8.4$; $x_B = 8\ 2*2.4 = 3.2$ e $x_A = 8 + 0.5*2.4 = 9.2$.

4. Uma abordagem geométrica (fig. 4).

Da figura resulta que:

$h/6 = 15/6$, donde $h = 2.4$.

O ponto de intersecção das rectas é S(8,6), logo $y = 8.4$.

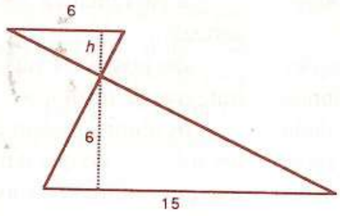


Fig. 4

Os valores de x_A e de x_B obtêm-se por substituição do valor de y nas equações das rectas dadas.

As quatro estratégias diferentes são todas baseadas em conhecimentos que os alunos possuíam de lições anteriores. Este exemplo mostra o que os alunos são capazes de fazer depois de terem aprendido a pensar por si próprios e a usar as suas próprias estratégias na resolução de problemas.

A avaliação

Nos antigos programas, a avaliação era quase sempre feita por meio de testes escritos de duração limitada, nos quais apenas se testavam capacidades relacionadas com o uso de técnicas e algoritmos. É óbvio que os novos programas exigem outras formas de avaliação. A avaliação não se deverá restringir às técnicas matemáticas. Deverá operacionalizar todos os objectivos da educação matemática, pelo que os alunos deverão ter oportunidade de demonstrar que são capazes de:

- escolher uma estratégia apropriada para resolver problemas e de usar algoritmos quando resolvem esses problemas,
- criticar um dado modelo ou argumentação,
- integrar diferentes modelos matemáticos,
- usar novos conceitos ou dados em situações novas, após uma breve descrição,
- explicar a escolha de um método, o processo usado na resolução e os resultados obtidos, através de palavras convenientemente organizadas ou mediante outras formas de representação adequadas.

Embora tenham sido desenvolvidos diversos instrumentos alternativos de avaliação ao longo das experiências dos projectos HEWET e HAWEX, ainda não foi dada a palavra final acerca da avaliação. Para muitos professores, parece ser bastante difícil elaborar bons testes.

Os três exemplos seguintes darão uma ideia sobre o que poderá ser perguntado num exame final na Holanda, embora os exames finais não sejam o instrumento mais indicado para a avaliação dos novos programas. Os exemplos são retirados, respectivamente, de um exame experimental, MAVO de 1991 (para alunos de 15 anos do 1º ciclo do ensino secundário), do exame HAVO de 1990 em Matemática B (para alunos de 17 anos da via técnico-profissional) e do exame VWO de 1989 em Matemática A (para alunos de 18 anos da via pré-universitária).

Exemplo 4

MAVO:

Este baloiço (fig. 5) não está desenhado à escala!

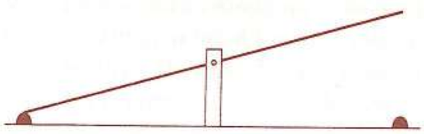


Fig. 5

O centro de rotação do baloiço está 52 cm acima do solo. Os batentes têm 16 cm de altura. A prancha tem um comprimento de 5.32 metros.

1) A que altura se situa o ponto mais alto do baloiço?

O baloiço não pode ser muito inclinado, pois as crianças poderão escorregar e cair. De acordo com os padrões de exigência, o ângulo de inclinação não pode ser superior a 10°.

2) É verdade que este baloiço satisfaz os padrões de exigência?

Supõe que a prancha do baloiço passa a ter um comprimento três vezes maior. As posições dos batentes são então ajustadas.

3) Qual será o ponto mais alto que o baloiço atinge acima do solo?

4) Qual será o ângulo de inclinação nesse caso?

Exemplo 5

HAVO:

Um pistão (fig. 6) é ligado a um disco rotativo por meio de uma haste (a vara do pistão). À medida que o disco roda, o pistão move-se horizontalmente para trás e para a frente. M é o centro do disco, S é o ponto de ligação da vara com o disco e P é o ponto de ligação da vara com o pistão. MS = 1 e PS = 4. Seja x radianos a amplitude do ângulo PMS. A distância PM depende do ângulo x; seja PM = a(x).

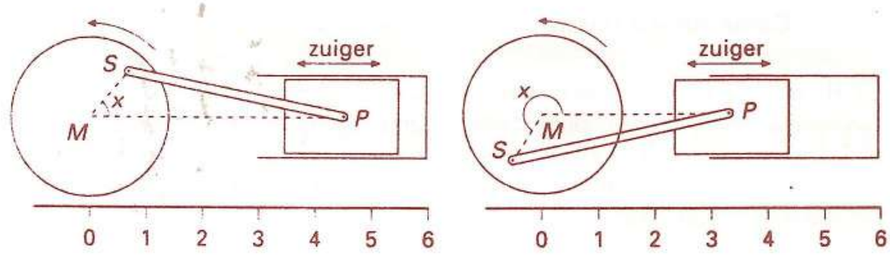


Fig. 6

A fórmula seguinte é válida para qualquer ângulo x:

$a(x) = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$

1) Demonstra que esta fórmula se verifica para um ângulo $0 < x < \pi/2$.

Na figura seguinte (fig. 7) está representado o gráfico de **a** como função de **x** no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Neste gráfico observa-se que o mínimo de a(x) é 3 e o máximo é 5.

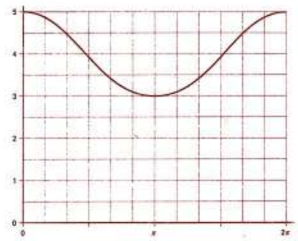


Fig. 7

2) Como é que isso pode ser explicado através da figura 6?

Há dois momentos ao longo de uma volta completa do disco em que o comprimento de PM fica igual ao comprimento da vara do pistão PS.

3) Quais serão os valores do ângulo PMS nesses casos?

A distância a(x) pode ser calculada aproximadamente pela fórmula:

$b(x) = 4 + \cos x$

4) Desenha o gráfico de b.

5) Investiga para que valores de x a diferença entre b(x) e a(x) é máxima e calcula essa diferença máxima.

Note-se que as questões 3 e 5 podem ser resolvidas de duas maneiras: por cálculos algébricos e por raciocínio geométrico.

Exemplo 6

VWO:

Numa tese acerca da criminalidade juvenil, um investigador partiu da hipótese que 30% dos estudantes do ensino secundário cometeram ocasionalmente furto em lojas. O presidente de um conselho directivo quer saber se a percentagem de 30% é também verdadeira para os 1200 alunos da sua escola. Supõe que efectivamente 30% dos alunos daquela escola já cometeu alguma vez furto numa loja. É escolhida ao acaso uma amostra de 15 alunos.

1) Calcula a probabilidade de haver pelo menos 5 alunos da amostra que já cometeram furto em lojas.

Parte do princípio que 6 dos 20 alunos de uma turma já cometeram furto daquele tipo.

2) Numa amostra aleatória de 10 alunos da turma, calcula a probabilidade de haver menos de 3 alunos que já cometeram furto.

Um professor decide fazer uma investigação exaustiva, interrogando todos os alunos da escola. Ele sabe que nesse inquérito nem todos dirão a verdade e, como tal, pensou em usar um método com o qual não é necessário responder sempre verdade. O método que ele resolveu usar é o seguinte:

- a cada aluno é feita a pergunta: "alguma vez roubaste numa loja?"

- antes do aluno responder à pergunta, ele tem de lançar um dado; o professor não fica a saber o resultado desse lançamento.

- o aluno terá de responder da seguinte forma à pergunta:

número sorteado	resposta a dar
1, 2, 3 ou 4	a verdade: "sim" ou "não"
5	obrigatoriamente "sim"
6	obrigatoriamente "não"

O aluno é o único a saber se a sua resposta é devida ao acaso ou se está de acordo com a verdade. Este método de questionário, conhecido como "*técnica de resposta aleatória*" torna possível tirar conclusões a partir do estudo de todas as respostas dadas.

Das 1200 respostas dadas, 416 foram "sim". O professor estimou que o número de alunos que alguma vez cometeram furto em lojas é de 324.

3) Explica como é que ele chegou a esta estimativa.

O número de 324 estudantes é obviamente menor do que os 360 estudantes que se esperaria encontrar, de acordo com a tese. É claro que os alunos desta escola não constituem uma amostra aleatória de todos os alunos do ensino secundário. Assim, a hipótese do investigador não pode ser rejeitada com base nesta amostra.

4) Verifica se deveria ou não ser rejeitada a hipótese do investigador, no caso de uma amostra aleatória de estudantes em que houvesse exactamente 324 alunos que já tivessem praticado furto em lojas. Usa um nível de significância de 5%.

A técnica de resposta aleatória é discutida numa aula de Matemática. Um aluno propõe um método bastante mais simples, com as seguintes instruções:

número sorteado	resposta a dar
1, 2 ou 3	a verdade
4, 5 ou 6	o contrário da verdade

O aluno diz ainda que, neste caso, também é garantida a privacidade de cada pessoa que responde.

5) Será útil esta variante da técnica de resposta aleatória?

Os alunos estão familiarizados com questões semelhantes às questões 1, 2 e 4. As questões 3 e 5 apresentam uma grande originalidade. Os alunos nunca viram algo do mesmo género anteriormente. Estas questões ultrapassam, de facto, o nível dos algoritmos e das técnicas. Os alunos (e os professores!) que nunca tiveram hipóteses de desenvolver as suas próprias estratégias de resolução de problemas, falharão na resposta a este tipo de questões. Faça uma tentativa!

Comentários finais

Há muito a dizer sobre as mudanças na Holanda, especialmente sobre as ideias da abordagem realista. Existem vários livros e artigos publicados em inglês pelo Instituto Freudenthal, que falam das ideias holandesas.

Embora as experiências com os novos currículos sejam positivas, permanecem muitas questões. Para mencionar algumas:

- Qual é exactamente o papel da álgebra? Como foi referido, muitos alunos não a usam do mesmo modo que nós, quando resolvem problemas do mundo real. Os matemáticos preferem a generalização dos métodos. Mas talvez a transferência seja mais importante do que a generalização.

- Como é que os novos programas podem ser avaliados de uma forma adequada? É necessária bastante investigação a propósito deste tema.

Terminarei com dois comentários de alunos que fizeram a Matemática A no nível pré-universitário. Ambos estão agora na universidade, um em Psicologia e o outro em Matemática. Os comentários mostram de que forma grande parte dos alunos é a favor da nova abordagem na educação matemática. E não será isso que realmente se pretende?

"Eu gostei da forma como fizemos Matemática na escola. Porque quando descobrimos as coisas por nós próprios, nunca mais as esquecemos ao longo de toda a vida."

"Primeiro, fica-se com uma ideia de como uma coisa funciona. Depois de algumas experiências e alguns exercícios acabamos por provar o que acontece. Eu acho que isto foi a coisa mais importante que eu aprendi na Matemática A. Desta maneira fico com uma perfeita preparação para os meus estudos na universidade. Neste sistema, também é muito positivo o facto de nunca nos podermos esconder atrás da autoridade do professor. Temos de aprender por nós próprios."

Títulos em inglês sobre a educação matemática realista:

Jan de Lange: *Mathematics, Insight and Meaning*, 1987.

K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, L. Streefland: *Contexts, Free Production, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, 1990.

L. Streefland (ed.): *Realistic Mathematics Education in Primary Schools: on Occasion of the Opening of the Freudenthal Institute*, 1991.

[1] Na Holanda existe uma "via de ensino ou via pré-universitária" e, em paralelo, uma via para aqueles que pretendem terminar o secundário ou aceder a cursos técnicos. Esta via foi aqui designada por "técnico-profissional", para uma mais fácil identificação do seu significado, embora este termo não corresponda à tradução literal do inglês.

Henk van der Kooij
HMN/FEO, Utreque
Tradução de Susana Carreira
Revisão de Paulo Abrantes

ICTMA — uma conferência internacional sobre o ensino de modelos e aplicações da Matemática

O valor educativo das aplicações da Matemática nos currículos e nas aulas desta disciplina não será um tema novo. No entanto, nos últimos anos, tem vindo a merecer uma crescente atenção por parte da comunidade internacional ligada à educação matemática, seja ao nível da investigação, do ensino ou do desenvolvimento curricular.

Se, há uns anos atrás, as *aplicações* eram um tema de artigos em revistas ou sessões em Congressos sobre o ensino da Matemática, muitas vezes incluídos em secções mais gerais de resolução de problemas ou de interdisciplinaridade, hoje constituem uma área de trabalho a que muitas pessoas dedicam a sua actividade profissional e que é o tema central de diversas publicações e Congressos.

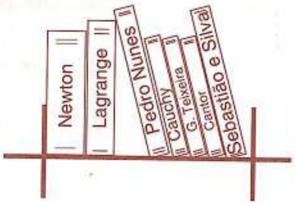
Um sintoma desta importância crescente é a realização de dois em dois anos, desde 1983, da ***International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*** (ICTMA).

As duas primeiras edições tiveram lugar em Exeter, Inglaterra (1983 e 85) e eram voltadas essencialmente para os níveis de ensino pós-secundário. Em 1987, a conferência realizou-se em Kassel (Alemanha) e em 1989 em Roskilde (Dinamarca). Conotadas inicialmente com os países do Norte da Europa — nos quais o ensino das aplicações da Matemática e da modelação tem, de facto, tradições muito maiores do que noutros países — estas conferências têm vindo a alargar-se tanto do ponto de vista dos países de proveniência dos participantes como no que se refere aos níveis escolares abrangidos. O ICTMA-5, realizado em Noordwijkerhout (na Holanda) em 1991, confirmou esta tendência, com participantes de muitos países (entre os quais vários portugueses) e com a apresentação e discussão de trabalhos relativos a todos os níveis de ensino.

O principal objectivo do ICTMA é "constituir um *forum* para a apresentação e troca de informações, perspectivas e ideias entre pessoas envolvidas na investigação ou na prática do ensino das aplicações, modelos e modelação matemática". São considerados os níveis escolares que correspondem, em Portugal, às escolas preparatórias, secundárias e superiores.

O **ICTMA-6** terá lugar em **Delaware** (Estados Unidos da América) e decorrerá de **15 a 19 de Agosto de 1993**. De acordo com a prática habitual, o Comité Organizador é formado pelos responsáveis das conferências anteriores: David Burghes (UK), Ian Huntley (UK), Werner Blum (Alemanha), Mogens Niss (Dinamarca) e Jan de Lange (Holanda).

Informações sobre o ICTMA-6 podem ser pedidas a Cliff Sloyer, Department of Mathematics, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA.



Para este número seleccionámos

Quando e como podemos usar modelação?

Frank Swetz

Para este número, dedicado à problemática das aplicações e da modelação no ensino da Matemática, seleccionámos o artigo de Frank Swetz, publicado no Mathematics Teacher de Dezembro de 1989, em que o autor ilustra o processo de modelação a partir de exemplos concretos e discute o seu papel no ensino secundário. No final deste artigo, uma nota a registar: a modelação deveria ser incorporada gradualmente e de uma forma moderada em todos os currículos de Matemática.

Tipos de modelação

Intuitivamente, a palavra *modelo* evoca a imagem de uma entidade física. Um modelo, no sentido usual do termo é uma réplica, frequentemente numa escala menor, de algum objecto. As crianças e certos praticantes de modelismo constróem modelos de barcos e de aviões. Os seus modelos, que parecem brinquedos, exibem muitas, senão todas, as características físicas do objecto real em questão. Alguns modelos funcionam realmente de forma análoga à do objecto que imitam. Tais modelos são considerados bons se possuem a maior parte das propriedades e características do objecto que retratam.

Mas a construção de modelos não está limitada aos intuitos recreativos das crianças e dos praticantes de modelismo. Um escultor que pretende produzir uma grande estátua em pedra, pode primeiro criar uma miniatura num material mais fácil de trabalhar, como a argila ou o gesso. E quando estiver satisfeito com a sua forma, irá transferi-la e aumentá-la para o bloco de pedra a ser esculpido, através de instrumentos de medição. Os desenhadores de automóveis usam um processo do mesmo tipo na criação dos novos protótipos. Facilmente manipuláveis e podendo ser alterados quando necessário, os modelos oferecem aos seus utilizadores um certo grau de liberdade para experimentação e controlo de despesas. Em muitas situações industriais e tecnológicas, a criação e o uso de modelos nos processos de planeamento e produção são imperativos.

Nem toda a modelação tem uma natureza física. Os modelos teóricos são conjuntos de princípios ou regras que descrevem adequadamente o comportamento de um fenómeno na mente de um observador. Os economistas falam de "modelos económicos", os técnicos de planeamento populacional empregam o termo "modelos demográficos" e assim por diante. Quando os princípios de um modelo teórico têm uma base matemática, diz-se que se criou um modelo matemático. Assim, um modelo matemático é uma estrutura matemática que descreve aproximadamente as características de um fenómeno em questão. Ao processo activo de idealizar um modelo matemático chama-se *modelação matemática.*

Modelos matemáticos

Os modelos matemáticos podem assumir diversas formas. Algumas das estruturas matemáticas básicas do currículo do ensino secundário que se prestam imediatamente a situações de modelação são tabelas de dados numéricos, gráficos, equações (fórmulas), sistemas de equações ou inequações e algoritmos, incluindo os que podem estar contidos em programas de computador.

Considere a situação:

Uma engenheira que trabalha numa firma de acessórios para piscinas, é encarregada de avaliar a segurança de uma prancha de mergulho construída num novo material sintéctico. Uma das suas preocupações de segurança diz respeito ao grau de deflexão que a prancha sofre quando uma pessoa se coloca na sua extremidade livre.

Ela analisa a situação e conclui que os principais factores que afectam a deflexão D são: o peso da pessoa em

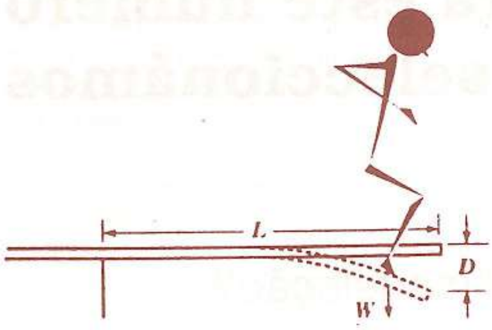


Fig. 1. Esboço do problema da prancha de mergulho

questão, W; o comprimento da prancha, L; a forma da secção transversal da prancha; e o material em que a prancha foi construída. Veja-se a figura 1.

O comprimento da prancha é standard e, portanto, fixo. O material da prancha e a área da sua secção são pré-determinados. Esta situação envolve duas variáveis, o peso e a deflexão. A dependência da deflexão em relação ao peso pode ser facilmente determinada, aplicando diferentes pesos ao extremo da prancha e registando os resultados da deflexão. A tabela numérica dos valores assim obtidos serve como um modelo da deflexão da prancha sob diferentes pesos. Se os valores forem representados num gráfico, o próprio gráfico pode servir como modelo. Os dados numéricos podem também sugerir uma relação funcional, baseada numa simples proporcionalidade entre o peso e a deflexão, ou seja:

$D = W/K$.

Por questões de conveniência, dado que a engenheira não quer construir uma prancha e carregá-la com pesos, o último modelo, uma simples equação, é o mais simples. Tentando refinar o seu modelo, a engenheira usa métodos analíticos mais avançados para calcular:

$K = 3EI/L^3$ e $D = WL^3/3EI$

em que E é o módulo da elasticidade que depende do material usado e I é o momento de inércia da área da secção transversal da prancha.

Em seguida, vamos examinar os passos inerentes ao processo de modelação:

1. Formular o problema, neste caso, os efeitos do peso na deflexão de uma prancha de mergulho.
2. Isolar os factores relevantes (W, E, I, D, L).
   a) Quais são parâmetros? (E, I, L).
   b) Quais são variáveis? (D, W).
3. Determinar as relações matemáticas que existem entre os factores relevantes e que são úteis para resolver o problema ($D=f(W)$).
4. Estabelecer a relação e criar um modelo ($D = W/K$).
5. Testar o modelo — determinar valores para situações conhecidas e examinar o ajustamento.
6. Refinar o modelo, como se pretendia, para obter informações mais úteis e precisas ($D=WL^3/3EI$).

No refinamento do modelo, a engenheira pode colocar várias questões. Por exemplo, "A relação será válida para todos os valores de W?"; "Será necessário que isso aconteça?". A resposta a ambas as questões é certamente não. A relação funcional entre W e D será linear apenas num domínio limitado constituído pelos valores de W que não forçam a prancha a exceder os seus limites de elasticidade. Uma vez que a prancha de mergulho em questão é alta, ficando a 10 pés acima da água, não é normalmente usada por crianças pequenas ou grandes adultos; portanto, usando a sua experiência, a engenheira pode fixar seguramente o domínio $80 \leq W \leq 300$.

Considere uma outra situação de modelação que se enquadra facilmente nas capacidades e interesses dos alunos do secundário (Sloyer, 1986):

Uma companhia de transporte de carga está a lançar um serviço expresso de helicóptero para transporte em pequenas distâncias, isto é, para deslocações inferiores a 1000 milhas. Há duas maneiras de transporte de carga no helicóptero: internamente ou externamente, suspensa do aparelho. Existem vantagens e desvantagens em ambos os métodos: externamente, o carregamento e a descarga são mais rápidos, mas durante o voo, a carga externa produz atrito, atrasando o helicóptero e aumentando o tempo de viagem. Suponha que a carga é protegida do tempo com coberturas. Quando deverão ser usados os diferentes métodos?

Um chefe de carregamento tem de encontrar o método mais económico de carregar o aparelho para viagens num raio de 1000 milhas a partir da base do helicóptero. Ele assume que os custos acarretados são directamente proporcionais ao tempo de entrega; desse modo, ele procura uma relação entre o tempo, T, e a distância da entrega, D. Identifica o problema e define as variáveis. Para prosseguir, ele precisa de alguns dados reais e, como tal, faz alguns testes usando uma carga standard. Os resultados do teste estão resumidos na tabela 1.

Tabela 1

Comparação entre carregamento interno e externo			
Método de carga	Velocidade média (milhas/hora)	Tempo (mn)	
		Carga	Descarga
Interno	144	30	20
Externo	120	15	10

A partir dos dados da tabela 1, podemos verificar que o tempo necessário para um helicóptero carregado internamente T_i, é dado por:

$$T_i = \frac{30}{60} + \frac{D}{144} + \frac{20}{60} = \frac{120 + D}{144}$$

e que o tempo necessário para um helicóptero carregado externamente, T_e, é dado por:

$$T_e = \frac{15}{60} + \frac{D}{120} + \frac{10}{60} = \frac{50 + D}{120}$$

Em seguida, o chefe de carregamento decide determinar os valores de D para os quais se tem $T_e < T_i$; então o seu modelo matemático passa a ser:

$$\frac{50 + D}{120} < \frac{120 + D}{144}$$

ou seja,

$$60 + 12D < 1200 + 10D$$

donde,

D < 300 milhas

Assim, para viagens inferiores a 300 milhas, o carregamento externo é preferível, ao passo que o carregamento interno deverá ser usado para viagens que excedam as 300 milhas. E em relação às viagens que sejam exactamente de 300 milhas? Ele refina o seu modelo, testando a situação das 300 milhas na expressão para T_i e para T_e:

$$T_i = \frac{120 + 300}{144} = 2.9h$$

$$T_e = \frac{50 + 300}{120} = 2.9h$$

Ti = Te quando D = 300 milhas, mas uma vez que o carregamento e o descarregamento externos são mais rápidos, o chefe decide usar a carga externa para viagens que requeiram exactamente 300 milhas. Com base nos resultados destes modelos, o esquema de carga é definido da seguinte forma:

$0 < D \leq 300$ — usar a carga externa para reduzir as despesas de transporte

$300 < D \leq 1000$ — usar a carga interna para reduzir as despesas de transporte.

Porquê a modelação no currículo?

Um objectivo fundamental do ensino da Matemática é preparar os jovens para actuarem de forma conhecedora e confiante em situações problemáticas do mundo real. A modelação matemática é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real. Coloca em acção uma variedade de capacidades matemáticas e força a atenção sobre o problema como um todo, e não sobre uma solução única. Quem resolve o problema é compelido a definir e clarificar o problema com cuidado. Através da compreensão do problema o método para obter a solução é revelado.

A modelação é uma forma especialmente compreensível de resolução de problemas. Normalmente, um modelo não fornece uma resposta específica, mas antes um conjunto de respostas que descrevem um certo fenómeno. A compreensão adquire uma natureza dinâmica e activa em vez de estática e passiva. Quem constrói o modelo experimenta uma sensação de participação e controlo no processo de solução. Os modelos podem ser manipulados matematicamente, modificando variáveis e parâmetros. Por exemplo, no problema da prancha de mergulho, pode-se investigar o comportamento para um peso, W, fixo e um comprimento da prancha, L, variável; ou então pode-se analisar o efeito de diferentes materiais de construção no comportamento da prancha, fazendo variar o E. O uso de um modelo matemático ajuda a adquirir uma percepção da forma como funciona uma prancha de mergulho.

A modelação ajuda a exteriorizar a dinâmica que é inerente a muitas situações problemáticas. Considere o seguinte problema: Um emprenteiro de tratamento de relvados deseja estabelecer o seu negócio numa nova urbanização de 400 casas. Os seus serviços de manutenção de relva custam 275 dólares por ano a cada cliente. Ele sabe, por experiência própria que, nestas condições, consegue obter cerca de 100 clientes, mas procura angariar mais. Para atrair mais clientela, ele propõe que por cada novo cliente que arranjar, além dos 100, fará um desconto de 1.50 dólares a cada um dos clientes da urbanização. Neste sistema, qual será o número de clientes que dará o maior lucro ao emprenteiro?

Suponha que este problema era dado a alunos do primeiro ano de álgebra. Eles não aprenderam a maximizar funções. Como poderiam ser ajudados a resolver este problema? O problema consiste em *ver* como se comportam os lucros relativamente ao número de clientes que ultrapasse os 100. Portanto, o comportamento dos lucros tem de ser modelado. Usando uma calculadora, podem calcular-se alguns valores que se organizam numa tabela, e torna-se possível descobrir um padrão de comportamento. Veja-se a tabela 2.

Tabela 2

Efeito das bonificações nos lucros		
Número de clientes (C)	Custo por cada cliente	Lucro total (R)
100	275	27500
101	275 - (1.50)	27623.50
102	275 - (1.50 x 2)	27744
...	...	...
110	275 - (1.50 x 10)	28600
...	...	...
150	275 - (1.50 x 50)	30000
200	275 - (1.50 x 100)	25000

Os dados da tabela 2 indicam que para novos clientes, além dos 100, os lucros aumentam e depois começam a diminuir. Uma pesquisa mais cuidadosa do padrão de comportamento é justificada para valores próximos de C = 150. Veja-se a tabela 3. Os lucros máximos são encontrados para 142 clientes, permitindo fazer um desconto de 63 dólares a cada cliente individual da urbanização. A tabela de valores serve de modelo ao mostrar que os lucros aumentam para $100 < C \leq 142$ e diminuem para $142 < C \leq 400$. Um modelo mais sucinto seria o gráfico da relação funcional R = f(C) ou a dedução da expressão da função lucro, definida por ramos:

$R = 275C$ para $1 \leq C \leq 100$

e

$R = C(425 - 1.50C)$ para $100 \leq C \leq 400$.

Consequentemente, o emprenteiro, ao fazer a sua oferta especial deveria incluir a frase "apenas por um tempo limitado", por forma a poder retirar a bonificação quando tivesse adquirido 142 clientes.

Tabela 3

Pesquisa refinada do efeito dos clientes sobre os lucros		
Número de clientes (C)	Custo por cada cliente	Lucro total (R)
160	275 - (1.50 x 60)	29600
155	275 - (1.50 x 55)	29837.50
151	275 - (1.50 x 51)	29973.50
140	275 - (1.50 x 40)	30100
145	275 - (1.50 x 45)	30087

Após uma experiência de modelação como esta, os alunos podem apreciar melhor certos conceitos como as limitações de um dado processo e a sua maximização. No contexto da situação de modelação, a tabela de valores e o gráfico são mais do que uma colecção de números ou uma figura. Estes têm um significado especial como forma de representação do comportamento matemático associado a um problema. A modelação permite uma maior percepção do poder da Matemática.

Em situações de modelação, a Matemática decorre do problema e os alunos reconhecem este facto. As situações de modelação matemática podem servir também como veículos para a introdução de novos conceitos: investigações sobre o crescimento de populações e a diminuição de recursos naturais conduzem ao uso de funções exponenciais; a análise de interacções e os modelos de cadeias alimentares empregam algoritmos matriciais; e os programas de computador permitem gerar modelos para simular diversos fenómenos, como por exemplo o movimento de um projéctil.

Como incorporar a modelação matemática?

A resposta a esta questão depende, naturalmente, dos conhecimentos, interesses e personalidades dos professores envolvidos e das capacidades da turma com que se trabalha. Embora não se possa dar uma resposta pronta a esta questão, é possível oferecer algumas observações e reflexões. Uma abordagem a problemas de modelação deveria ser integrada, gradualmente e de forma moderada, em todos os currículos de Matemática existentes. Palavras como *modelo* e *modelação* podem ser empregues em situações apropriadas. Os passos do processo de modelação podem ser seguidos e explicitados. Quando são estabelecidos modelos, estes devem ser identificados — por exemplo, "Temos aqui um modelo para a comissão de vendedores" — explorados e manipulados. A separação e o isolamento da modelação matemática e resolução de problemas em relação ao resto do currículo de Matemática tende a levantar nos alunos a suspeita de que eles estão a ser colocados perante algo de estranho ou difícil. Daí que não haja qualquer necessidade de criar cursos específicos ou de definir partes de um curso exclusivamente destinados à modelação matemática.

Referências

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). *Overview and Analysis of School Mathematics Grades K-12*. Washington, D. C.: CBMS, 1975.

MMSC Project. *Mathematical Modelling in the School Curriculum: A Resource Guide of Classroom Exercises*. Middletown, Penn.: Pennsylvania State University at Harrisburg, 1988.

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: The Council, 1989.

Sloyer, Cliff. *Fantastiks of Mathematiks: Applications of Secondary Mathematics*. Providence, R.I.: Janson Publications, 1986.

Próximo número temático

História e Ensino da Matemática

O número temático de 1993, correspondente ao terceiro trimestre, será dedicado à problemática da presença da História da Matemática nos ensinos básico e secundário e sua correcta inserção no currículo. O número está a ser preparado desde já, e evidentemente, a equipa responsável convida os leitores de Educação e Matemática a enviarem a sua colaboração, sob a forma de artigos, pequenas notas ou observações, relatos de experiências, interrogações, etc.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrés a l infini. mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres; ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equa-

La façon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

Poderia dar aqui várias outras maneiras de traçar e conceber uma série de curvas, cada uma mais complexa do que a anterior, mas penso que a melhor maneira de agrupar todas essas curvas e de classificá-las pela sua ordem é através do reconhecimento de que todos os pontos de tais curvas, que poderemos chamar "geométricas", isto é, as que se podem medir de forma precisa e exacta, devem admitir uma relação com todos os pontos de uma linha recta, e essa relação deve ser expressa por meio de uma simples equação.

Descartes: inícios da Geometria Analítica(1637)

índice