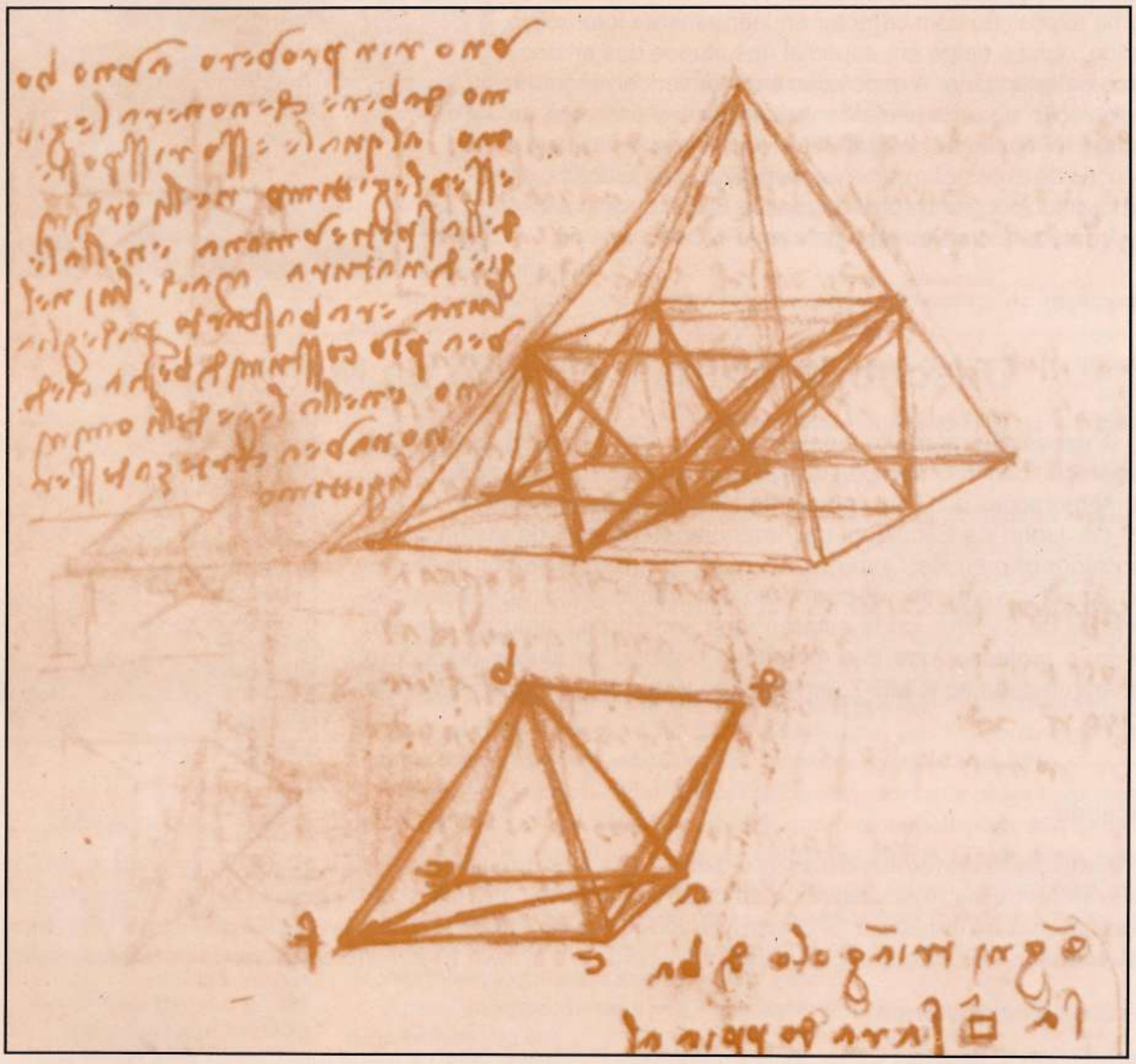
Educação e Matemática

Nº 21

1º trimestre de 1992



"Todas as ciências são vãs e cheias de erro se não nascem da experiência, mãe de toda a certeza, e se não são testadas pela experiência..."

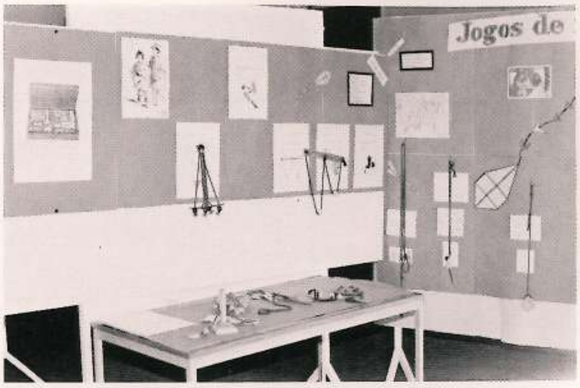
Leonardo da Vinci

400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

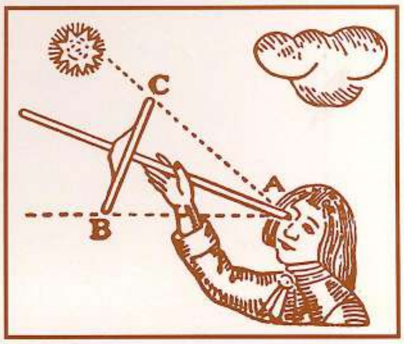
A Matemática no Museu da Ciência, em Lisboa

Entre 18 e 31 de Maio próximos estará exposta no Museu da Ciência, na Rua da Escola Politécnica, em Lisboa, uma exposição sobre Matemática e a sua história. Trata-se de uma exposição com carácter eminentemente interactivo e lúdico, que se dirige em especial aos alunos dos ensinos Básico e Secundário. A exposição é um desenvolvimento e reformulação de uma semelhante que esteve presente na Abertura à População do ProfMat 91, no Porto. A iniciativa e execução da exposição pertence a um Grupo de Trabalho da APM formado por professores da zona de Queluz. A exposição estará presente em Viseu no próximo ProfMat..



Descobrimentos e Ensino da Matemática

A exposição referente a este concurso, uma iniciativa da APM em colaboração com o Grupo de Trabalho do Ministério da Educação para a s Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, vai realizar-se de 8 a 19 de Junho na Esc. Sec. da Amadora. No dia 15 de Junho serão anunciados os prémios. Como já foi comunicado, os três grupos de alunos e os respectivos professores que obtenham prémios visitarão a Exposição Universal de Sevilha, onde estarão uma semana. Quanto ao primeiro prémio, o professor que tiver orientado o grupo de alunos respectivo ganhará uma ida ao ICME-7, em Quebec, Canadá, no próximo mês de Agosto.



Rectificando

1. Conforme anunciado no número anterior, damos conta do erro existente na secção "Materiais para a sala de aula" publicada no número 18. Na página 10 encontrará a rectificação e na página 11 uma proposta de substituição para as referidas actividades.

2. Por lapso, na capa do número 19/20 vem indicado que aquele número se referia aos 2ª e 3º trimestres de 1991. Na realidade, o número referente ao 2ª trimestre foi o número 18, e portanto o número 19/20 corresponde aos 3º e 4º trimestres de 1991.

Neste número colaboraram

Ângela Freitas, J. Sacadura Cabral, Júlio C. Mosquera P., Manuel Saraiva, Maria José Costa, Paula Teixeira.

Sobre a capa deste número

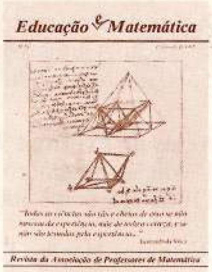
O artigo de Manuel Saraiva sobre o raciocínio visual inclui um desenho geométrico de Leonardo da Vinci (1452-1519), artista, engenheiro e cientista. Esse mesmo desenho é reproduzido na capa, acompanhado de uma frase característica sobre a ciência, que exprime de modo exemplar o espírito dos homens do Renascimento, de que Leonardo é reconhecidamente o caso mais representativo. E a propósito: será verdade o que Leonardo quer demonstrar com o desenho (ver legenda na pág. 3)?

O desenho foi extraído do livro *Leonardo, The Scientist*, ed. McGraw-Hill Book Company, N.Y.

Data de publicação

Este número foi publicado em Abril de 1992.

nº 21
1º trimestre
de 1992



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
António Bernardes
Henrique M. Guimarães
José Manuel Matos
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807
Depósito legal: 55232/92

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Ainda a pretexto da reforma...

José Manuel Varandas

"Fazer propostas de reforma do sistema educativo sem pensar nos recursos materiais e humanos necessários à sua implementação, sem pensar nas condições de trabalho de todos os que forem chamados a participar, é criar falsas esperanças, é mobilizar esforços inúteis, é apostar no fracasso".

Assim começou, a nossa colega Leonor Moreira, o editorial da *Educação e Matemática* nº 5, a propósito dos Documentos Preparatórios da Reforma, que na altura foram divulgados.

Alguns anos passados, os professores terão, finalmente, de implementar a reforma.

As propostas de programas passaram a programas definitivos, sem que para tal tivéssemos dado o nosso contributo.

A experiência adquirida ao longo dos anos, nomeadamente na introdução de metodologias, na alteração dos programas já desasjustados da realidade, não mereceu a consideração da Comissão da Reforma Educativa.

Apesar disso e durante algum tempo, os professores acalentaram a esperança de uma ampla divulgação e formação o que, sem dúvida, ajudaria a implementar os novos programas no respeitante, tanto a novas opções metodológicas, como à Estatística e Probabilidades, agora integrados em níveis de escolaridade mais baixos, temas nos quais grande parte dos professores não se sente muito à vontade para leccionar.

Com o passar do tempo, a ampla formação sobre os novos programas não foi além da capacidade de cada um a fazer individualmente, salvo o apoio esporádico de algumas iniciativas, nomeadamente em encontros da APM e da SPM.

Dos recursos materiais com que os professores vão contar para a implementação da reforma, nem é bom falar! As verbas de que as escolas dispõem não comportam, por exemplo, a compra de livros e publicações que deveriam fazer parte das bibliotecas. Pela mesma razão, os materiais que seriam convenientes utilizar, nomeadamente, nos temas de geometria, e que vão aparecendo no mercado, terão de ser adquiridos pelos professores, ou então, terá que funcionar a habilidade e sentido de improvisação em que eles vão sendo "mestres".

Apesar dos aspectos positivos e negativos desta reforma, os professores vão ter de trabalhar com ela!...

A primeira "prova" será a escolha dos manuais que servirão de base aos anos de generalização. Já não falta muito tempo... é necessário fazer-se um esforço para conhecer os novos programas, para assim se poder escolher os manuais pelo seu conteúdo e não apenas pela forma ou cor...

Para o final do ano, será também necessário que os grupos disciplinares façam a escolha de preferências de horários e níveis de ensino, com seriedade e em consciência, para que, cada um possa dar o seu melhor contributo para a formação dos nossos alunos.

Apesar de tudo, estou convicto de que os professores não vão deixar que a "aposta no fracasso" se venha a concretizar.

José Manuel Varandas
Esc. Sec. Seomara da Costa Primo

Publicações APM

Calculadoras na Educação Matemática
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)

O computador na aula de Matemática
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Cronologia Recente do Ensino da Matemática
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)

O Geoplano na Sala de Aula
1ª edição, Agosto de 1988, 276 pp.
1175$00 (sócios 825$00)

Jogos, Enigmas e Problemas
2ª edição, Julho de 1988, 48 pp.
280$00 (sócios 200$00)

Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)

A Matemática na Vida das Abelhas
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)

O Problema da Semana
4ª edição, Julho de 1988, 86pp.
520$00 (sócios 360$00)

PROFMAT nº 4
1ª edição, Janeiro 1989, 269 pp.
820$00 (sócios 580$00)

Renovação do Currículo de Matemática.
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)

Viagem de Ida e Volta
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática
1ª edição, Outubro de 1991, 304 pp.
3000$00 (sócios 2100$00)

Só ...Problemas
1ª edição, Outubro de 1991, 100 pp.
550$00 (sócios 400$00)

Computadores no Ensino da Matemática
1ª edição, Setembro de 1991, 258 pp.
1200$00 (sócios 850$00)
800$00 (sócios 600$00)

Cadernos de Educação Matemática nº2. 1ª edição, Junho de 1991, 112 pp.

Actas do Profmat 91
1ª edição, Outubro de 1991, 139 pp.
5500$00 (sócios 400$00)

Actas do Profmat 90 (vol. II)
1ª edição, Setembro de 1991, 244 pp.
1100$00 (sócios 800$00)

Algumas Noções Elementares de Astronomia
1ª edição, Outubro de 1991, 28 pp.
200$00 (sócios 150$00)

Avaliação: uma questão a enfrentar
1ª edição, Outubro de 1991, 97 pp.
450$00 (sócios 300$00)

Publicações — Envio pelo Correio

Envie fotocópia da ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para:

Associação de Professores de Matemática
Rua Major Neutel de Abreu, nº 11
1500 Lisboa

Educação e Matemática
nº1 a nº6 — 200$00
nº7 a nº12 — 250$00
nº13 e seguintes — 400$00
nº 19/20 800$00

Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA
Agenda do Professor 1990/1991
1ª edição, Julho 1990, 144 pp.
300$00 (sócios 200$00)
Agenda do Professor 1991/92
1ª edição, Julho de 1991, 152 pp.
550$00 (sócios 400$00)

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo

Sócio da APM ☐ Nº ☐ Assinatura
Não Sócio ☐ ______________________
Nome ______________________
Morada ______________________
__________ C. P. __________
Data do pedido ______________________

Subtotal	
Portes do Correio (20 %)	
Valor Total	

Para uso da APM — Pedido recebido em ________
Assinatura — Enviado em ________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

Raciocínio visual
Parente pobre do raciocínio matemático?

Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

O raciocínio visual desempenha um papel muito importante no trabalho diário dos matemáticos. A abordagem visual é um enorme potencial para gerar significado na aprendizagem da Matemática. A utilização do computador abre as portas à realização deste potencial.

O contacto com os alunos das nossas escolas tem-me levado à constatação do pouco uso que é feito, por eles, das figuras e dos diagramas na sua actividade matemática e, mesmo, na resolução de simples problemas do dia a dia.

Um mero problema de intersecção de rectas com circunferências é resolvido exclusivamente à custa de equações e de sistemas de equações. Não há, na maior parte dos casos, a mínima intenção de fazer uma pequena figura geométrica, num canto da folha de papel, de modo a tirar proveito da visualização para uma boa resolução do problema. É a Geometria Analítica interpretada "apenas" como Analítica.

Os alunos têm uma grande preocupação em recorrer a fórmulas trigonométricas, que muitas vezes baralham, para relacionarem senos e cosenos, por exemplo. Na maioria das vezes o problema resolver-se-ia de forma prática e fiável através do simples trabalhar com o círculo trigonométrico, de construção rápida.

Outros exemplos poderiam ser relatados. De uma maneira geral, os alunos não fazem a ligação da visualização com o pensamento analítico. Este comportamento dos alunos reflecte o ensino que lhes é ministrado, onde há uma subvalorização bastante grande do raciocínio que faz uso essencialmente da informação visual (raciocínio visual). Este é considerado um raciocínio de segunda categoria servindo, quando serve, apenas como um auxiliar para a aprendizagem.

Mas terá o raciocínio visual pouco peso no raciocínio matemático?

Deverá este raciocínio continuar a ser considerado pouco digno e de nível inferior ao raciocínio algébrico?

Raciocínio Visual na Matemática

Freudenthal (1973) afirma que a omnipresença da linguagem geométrica na Matemática de hoje não se deve só à tradição histórica. Mesmo nos domínios que aparentemente nada têm a ver com a Geometria é a intuição geométrica que sugere o que é importante, interessante e acessível, precavendo contra o desvio no emaranhado imenso dos problemas, das ideias e dos métodos. Para este autor, a intuição geométrica não se reduz à visão geométrica do espaço físico. A interacção do formalismo com as intuições primárias "ingénuas", baseadas na nossa experiência espacial, conduz às chamadas intuições refinadas ou prolongadas, podendo-se dizer que, quando um matemático está a trabalhar com a intervenção de imagens e de esquemas recordando estruturas espaciais, é a intuição geométrica que está em acção — as imagens acompanham a criação matemática.

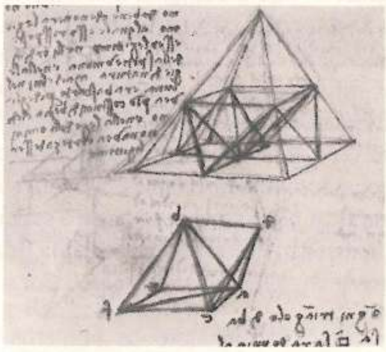


Fig.1 - Desenho de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci, homem da ciência e da arte, foi um génio da representação visual. Os seus esboços faziam parte integrante das suas investigações geométricas e mecânicas. Neste desenho, Leonardo demonstra que "qualquer pirâmide de base quadrada será o dobro de uma pirâmide de base triangular".

Por seu lado, Hadamard (1945) afirma que os matemáticos, na sua actividade profissional, utilizam imagens e estas, muitas das vezes, são de natureza geométrica (embora existam diferenças individuais quanto à forma como o pensamento dos matemáticos confia nas imagens). Ainda segundo este autor, um matemático quando está a pensar evita, geralmente, utilizar palavras ou mesmo símbolos algébricos (ou outros) — ele utiliza imagens. Einstein, em carta dirigida a Hadamard (e por este referida), escreveu o seguinte:

> "As palavras e a linguagem escrita ou oral parecem não desempenhar nenhum papel no meu pensamento. Os construtores psicológicos, que são os elementos do pensamento, são certos sinais ou figuras, mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados em liberdade".

Há, pois, indicadores que apontam para o facto de os matemáticos confiarem muito no raciocínio visual durante o seu trabalho, embora raramente explicitem a forma como chegam aos seus resultados.

Um dos poucos casos explicitados é o relatado por Van der Waerden que ilustra uma discussão com dois colegas seus através da qual eles encontraram uma demonstração para a conjectura de Baudet — "Se o conjunto dos números naturais fôr dividido em dois subconjuntos disjuntos, então pelo menos um deles contém uma progressão aritmética de razão L (com L arbitrário)" (Dreyfus, 1945, p. 36). O relatório desta discussão, com sete páginas, contém oito figuras. A primeira delas é a que a seguir se apresenta, que era acompanhada pela frase:

> "Nós desenhámos os números como pequenas barras transversais... as duas linhas horizontais supunham-se representarem os dois subconjuntos".

Porém, a publicação da demonstração desta conjectura foi feita em cinco páginas e não continha nenhum diagrama.

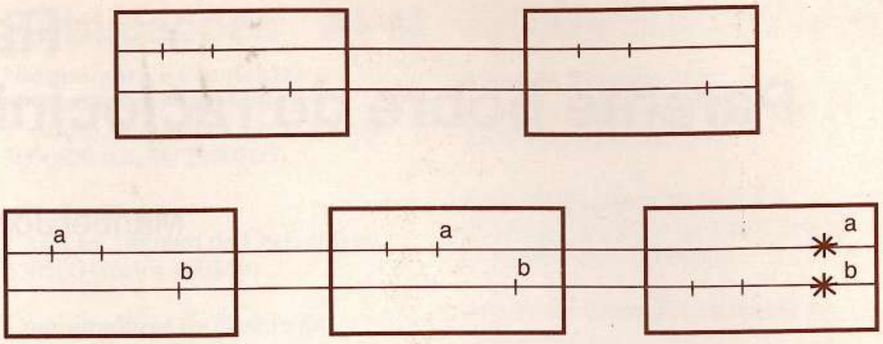


Fig. 2 - Diagrama de Van der Waerden usado na demonstração da conjectura de Baudet

Certamente que qualquer outro matemático que queira entender a demonstração publicada terá de recriar os mesmos (ou outros parecidos) diagramas de Van der Waerden.

Os diagramas são essenciais para o pensamento matemático mas a sua utilização tem sido sistematicamente escondida pelos matemáticos. Porque o será? Porque é que os matemáticos escondem as suas visualizações e os argumentos baseados nelas?

Para Dreyfus (1991) isto nem sempre se passou e justifica a situação por duas razões:

1ª. As imagens podem não ter surgido aos matemáticos de forma suficientemente penetrante para serem descritas por palavras ou figuras (caso das figuras "mais ou menos claras" de que Einstein falou).

2ª. Os diagramas são considerados, provavelmente, inaceitáveis para a publicação matemática standard (caso dos diagramas de Van der Waerden).

Ainda segundo este autor, hoje em dia há uma corrente em crescimento que defende o raciocínio visual não só na descoberta mas também na descrição e justificação dos resultados matemáticos. Esta corrente tem sido impulsionada pela existência dos poderosos computadores gráficos. Dreyfus refere o trabalho desenvolvido por Devaney (1989) e o desenvolvido por Davis e Anderson (1979). O primeiro descreveu certos processos dinâmicos através de sequências de transformações no plano complexo, representando-as graficamente através de programas computacionais, que depois foram filmadas. Os resultados, segundo o autor, foram sempre matematicamente estimulantes e muitos resultados matemáticos novos foram demonstrados. O segundo trabalho deu ênfase ao poder do raciocínio visual quanto à descoberta de novos resultados em Matemática.

O que diz a Ciência Cognitiva?

A visão, ao produzir modelos mentais, leva a que o suporte visual apropriado tenha efeitos positivos na compreensão dos alunos e na resolução de problemas. As ilustrações, ao ajudarem os alunos a organizar a informação em modelos mentais com significado, contribuem para o sucesso da resolução de problemas. As relações espaciais entre as componentes de um problema são garantidas pelas representações esquemáticas. Nos diagramas, a informação é indexada pelas suas localizações, dando possibilidade de agrupar toda a informação acerca de um elemento simples e expressar espacialmente relações lógicas.

A forma como é gerado o significado na aprendizagem da Matemática tem sido uma preocupação para alguns investigadores, nomeadamente para Dorfler (1991). A base da sua teoria assenta na ideia de esquema de imagem que, para muitos dos conceitos matemáticos, compreenderá uma componente-figura complementada com componentes-operativas, relacionais e simbólicas. A componente-figura levará, muitas vezes, a uma representação visual do conceito em causa, enquanto que as componentes operativas associadas capacitarão o raciocínio visual com e acerca do conceito.

Para Dreyfus (1991), este trabalho teórico de Dorfler é compatível e está completamente de acordo com a descrição de Hadamard sobre os modelos do pensamento dos matemáticos.

Implicações para a Educação Matemática

O desprezo a que tem sido votado o raciocínio visual é fruto da pouca importância que lhe tem sido dada pelos professores e educadores de Matemática como reflexo natural do paradigma dominante na comunidade dos matemáticos.

O combate a esta situação passará pela formação dos professores e pela apresentação da Matemática através de uma forma mais visual. Várias experiências têm vindo a ser feitas neste sentido, denotando uma grande confiança nas potencialidades do raciocínio visual. Um dos exemplos apresentado por Dreyfus (1991) foi o realizado por Artigue (1989). A experiência consistiu no desenvolvimento e ensino de um nível curricular universitário, no qual foi usado um "software" computacional, para ajudar os alunos a desenvolver uma abordagem geométrica e qualitativa das propriedades das soluções das equações diferenciais. Este estudo foi baseado no raciocínio com funções não apresentadas explicitamente por uma fórmula, mas apenas através da informação sobre as suas derivadas. Um dos objectivos do currículo, declarado explicitamente, era conduzir os alunos a trabalhar com curvas sem o suporte de uma fórmula. Ou seja, inferir informação gráfica sobre as curvas a partir da informação gráfica das suas derivadas. Para que este objectivo se tornasse realista, foi feita uma ruptura completa com o tratamento usual das funções utilizado no ensino secundário (essencialmente algébrico). Algumas das fases do currículo foram trabalhar com noções básicas como a inclinação do campo, isóclinas, curvas solução e simetrias para produzir curvas num efeito dialéctico recíproco entre predicção e justificação; aprender sobre noções do mais alto nível, tais como ramificações e fluxos, incluindo o facto da variação do tipo de fluxo nas equações depender de parâmetros. Uma das conclusões da experiência foi que os alunos entraram no trabalho geométrico com relativa facilidade, devido ao facto da complexidade das suas tarefas ter sido reduzida pela possibilidade de utilização de "software" computacional apropriado.

Computadores e Raciocínio Visual

Mason (1991) afirma que cada vez mais os factos e conhecimentos matemáticos estarão baseados numa intuição profundamente desenvolvida a partir do uso de programas computacionais, onde todo um vasto conjunto de conhecimento matemático sofisticado terá como suporte o rato — a mão — o olho — o "écran" do monitor, cuja generalidade não é expressa por letras mas experimentada pela força muscular. Cada vez mais o "software" permite que o utilizador manipule objectos no "écran" envolvendo ideias matemáticas como objectos geométricos (gráficos e curvas), ícons referentes a objectos matemáticos como grupos, transformações e fórmulas que até então só poderiam ser utilizadas através da Matemática formal — desta forma a Matemática aproxima-se muito mais do utilizador. Os computadores tornam, assim, possível uma representação visual da Matemática (não oferecida por nenhuma outra nova tecnologia), permitindo, por uma acção visual directa e pela observação de mudanças subsequentes, o acesso aos objectos e relações matemáticas. Por outro lado, torna-se possível, também, investigar o que conduz a uma determinada mudança numa certa relação matemática. O resultado desta acção pode ser implementado de forma dinâmica,

"E as acções podem repetir-se em liberdade, com ou sem mudança de parâmetros e podem ser desenhadas conclusões com base nos 'feedback' dados pelo programa computacional. São estas possibilidades que dão o poder ao computador para a aprendizagem do raciocínio visual em Matemática" (Dreyfus, 1991, p. 45).

Conclusão

Esta potencialidade dos computadores para a Matemática visual, se bem que muito importante, não basta por si. É preciso desenvolver todo um trabalho de investigação que permita ir progredindo no conhecimento da reacção dos alunos face aos programas existentes.

Por outro lado, é fundamental que os professores e educadores de Matemática devolvam ao raciocínio visual um estatuto de acordo com a sua importância de modo que seja conseguido o equilíbrio desejado: o da integração dos pensamentos visual, verbal e algébrico.

Referências

Dorfler, W. (1991). Meaning: Image schemas and protocols. *Proceedings of the XV International Conference for PME.*

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. *Proceedings of the XV International Conference for PME*, 1, p. 33-48.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Mason, J. (1991). Mathematical Problem Solving: Open, Closed and Exploraty in the UK. *ZDM*, 91/1, p. 14-19.

Manuel Saraiva
Universidade da Beira Interior

A minha primeira experiência com o LOGO.GEOMETRIA na sala de aula

Maria José Costa

Há longos anos - no mínimo dez - que não leccionava o programa de 9º ano de escolaridade. A última vez que o fiz estava em grande moda (pelo menos para mim!) a utilização de transparências, simples ou sobrepostas, de cores variadas, mostrando ou as fases de um traçado, ou as características de um determinado ente, ou ... sei lá o quê: tudo! E tudo facilmente se mostrava no todo ou nas suas partes constituintes usando um índice cromático.

Assim, com o auxílio do retroprojector e de um Geoplano gigante (um enorme platex, com orifícios suficientemente alinhados para se considerar um geoplano de malha quadrada, onde se encaixavam os "picos" necessários para "desenhar" as figuras desejadas), com elásticos tingidos e com cordões coloridos, trabalhei toda a unidade intitulada Geometria do Plano.

Ainda hoje recordo a enorme canseira de torcer os fios para fazer os cordões e de tingir os elásticos até obter toda a gama de cores necessária ao estudo em causa ou de fazer todas aquelas sobreposições; então as circunferências... tanto álcool gasto a retocar as diatribes de um compasso improvisado para trabalhar em acetato. Isto para não falar no tempo gasto nem da despesa feita na preparação de tais materiais... Mas também não esqueço o prazer de ter trabalhado essa unidade do modo escolhido: fiquei, desde essa data, com um gosto especial por esse assunto e confesso que, tendo naquela altura cerca de dez anos de trabalho, nunca tinha sentido de forma tão clara e nítida que tinha dado aos meus alunos tantas oportunidades de a entender e de a aprender. Tão pouco achei alguma vez ter contribuido tanto para que os meus alunos ficassem a gostar de Geometria! Pensei até que dificilmente algum dia superaria estas agradáveis sensações.

Passados todos estes anos, voltei a leccionar o 9º ano, mas desta vez na era dos computadores no ensino secundário e finalmente pude utilizar um programa que há muito reputava de fabuloso para a geometria do plano, mas não sabia quanto: LOGO.GEOMETRIA.

É dessa experiência que me vou ocupar a seguir.

A organização da turma

Os vinte e sete alunos da turma foram distribuidos por dois grupos que, em horas diferentes, realizavam a mesma tarefa: cada um dos grupos desenvolvia, nos seis computadores disponíveis, uma actividade seguindo um guião previamente elaborado e testado, sobre um assunto ainda não ventilado na aula de Matemática.

Entre estes alunos havia diferentes experiências relativamente aos computadores desde os que nunca os tinham utilizado (nem em jogos) aos que já o tinham utilizado curricularmente. Estes, catorze no total, tinham estudado, no ano lectivo 1989/90, as transformações geométricas com o LogoWriter, sendo cinco provenientes das turmas de dois dos estagiários e nove, da turma que eu própria leccionei; além disso oito destes últimos alunos, tiveram o seu primeiro contacto com o computador na aula de Matemática no 7º ano de escolaridade, quando, integrados na turma que então leccionava, fizeram o estudo da proporcionalidade directa e inversa recorrendo, também, ao LogoWriter (ver artigo correspondente em *Educação e Matemática*, nº 10).

A turma tinha seis alunos repetentes, daqueles que sabem muito pouco de Álgebra e ainda menos de Geometria.

Registe-se ainda que nenhum dos alunos tivera antes qualquer contacto com o LOGO.GEOMETRIA.

A organização do tempo

Os dois grupos frequentavam a sala dos computadores em dias consecutivos, um numa hora do horário outro em hora extra-horário, sempre em horas terminais do dia, isto é: cada aluno teve sempre quatro horas de aula por semana mas o professor, em algumas semanas, deu cinco aulas e os alunos não ficaram com "furos" nos horários. A primeira aula após estas era de síntese, prática, justificação dos resultados encontrados ou só complemento de informação sobre a tarefa realizada no computador; depois, consoante o conceito em estudo, seguiam-se outras horas para executar trabalhos de aplicação do assunto introduzido com o LOGO.GEOMETRIA, algumas vezes com material de desenho rigoroso, outras recorrendo apenas ao papel quadriculado, por vezes com o auxílio de papel vegetal.

A organização do conteúdo

A utilização do LOGO.GEOMETRIA foi feita para a seguinte sequência programática:

- Distância entre dois pontos
- Mediatriz de um segmento de recta
- Circuncentro de um triângulo
- Distância de um ponto a uma recta
- Bissectriz de um ângulo
- Incentro de um triângulo

Como trabalho de aplicação, após a definição de distância de um ponto a uma recta, fez-se o traçado rigoroso das alturas de um triângulo e respectivo ortocentro, bem como do apótema de um polígono regular e, em certos casos, a determinação das respectivas medidas.

A utilização do LOGOGEOMETRIA, propriamente dita

A metodologia utilizada

Nas aulas dadas na sala dos computadores, como atrás se disse, o aluno punha em prática um guião; ao professor cabia:

- acompanhar a execução feita pelo aluno;
- prestar apoio no que respeita à comunicação utilizador - máquina - programa, nomeadamente na interpretação das mensagens de erro;
- evitar que o aluno não realizasse a tarefa por falta de conhecimentos prévios ou por dificuldade de comunicação com o computador;
- fazer reflectir sobre a ligação guião/resposta (isto é, entre aquilo que no guião se chama MENSAGEM e a resposta dada no écran);
- tomar conhecimento da conclusão tirada pelo aluno;
- sugerir repetições ou alternativas de modo a desfazer concepções inadequadas ou esclarecer o conceito em estudo.

Estas aulas tiveram a colaboração dos três estagiários aos quais eram facultados previamente os materiais a utilizar na aula. Quando, por sua iniciativa, mostraram empenho em assistir à leccionação de toda a unidade, foram de imediato informados da planificação a longo prazo e, a seu tempo, foi-lhes apresentada a planificação a curto prazo; finalmente, no dia-a-dia tomavam conhecimento do plano da lição, colaboravam na avaliação da aula e, consequentemente, na apreciação das alterações a introduzir nos planos das lições seguintes. A sua colaboração nas aulas dadas com o computador foi aceite com a condição de não se afastarem da metodologia acima descrita.

O guião

Cada guião tinha pelo menos duas partes, além da comunicação da tarefa: informações e mensagens. Nas figuras 1 e 2 apresentam-se dois guiões, um respeitante à exploração de um conceito, outro referente à utilização de um conceito na exploração doutro. Eram fornecidos um a cada aluno, com a recomendação de serem trazidos, todos, para cada uma das aulas: os das lições anteriores serviram tanto para avivar o conceito que se pretendia utilizar como para desfazer equívocos.

Não houve grande dificuldade da parte dos alunos em os seguir. Após o primeiro par de aulas em que foram utilizados, fez-se a "tradução" guião-resposta: projectado linha a linha, recordou-se a actuação provocada. Esta leitura interpretativa facilitou o entendimento das mensagens posteriores, ajudando, também, à redacção da definição.

Escola Secundária de Augusto Gomes // Matosinhos
1991 ••• F.T. ••• 9º ANO

INFORMAÇÃO

O trabalho que vai fazer tem por finalidade definir MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RECTA.

INSTRUÇÕES

I.1) Tecle cada uma das mensagens, RESPEITANDO ESPAÇOS, PONTOS, ASPAS, MAIÚSCULAS E MINÚSCULAS (mas não o número da mensagem).
I.2) No fim de cada mensagem, carregue na tecla RETURN (ou ENTER, consoante o teclado).
I.3) Organize um quadro com os valores que vão surgindo.
I.4) Repita cinco vezes as mensagens de 6) até 11), substituindo C e D por E e F; depois por G e H etc; registe os valores num quadro.
I.5) Compare os valores registados e utilize essa comparação para dar uma nova definição de MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RECTA.

MENSAGENS

1) INICIO
2) APAGAR.REF
3) P.ACASO [A B]
4) FAZ.SEGMENTO "s [A B]
5) MEDIATRIZ "t [A B]
6) P.RECTA "C "t
7) PR DIST [C A]
8) PR DIST [C B]
9) P.ACASO "D
10) PR DIST [D A]
11) PR DIST [D B]

Fig. 1 — Um guião relativo ao conceito de mediatriz

Escola Secundária de Augusto Gomes // Matosinhos
1991 ••• F.T. ••• 9º ANO

INFORMAÇÃO

Ao teclar

1º MARCAR, vê aparecer uma cruz, que pode deslocar com as setas. Coloque-a onde desejar que fique um ponto e tecle P. Sem mover o cursor, dá-se o nome A a esse ponto teclando: FAZ.P "A POS.

2º MEDIATRIZ "r [A B], constrói a mediatriz do segmento de recta de extremos A e B.

3º FAZ.P "A INTERSEC [r s], está a chamar A ao ponto de intersecção das rectas r e s.

4º PR DIST [A B], aparece um número: é a distância entre os pontos A e B.

ACTIVIDADE

1) Use MARCAR e FAZ.P "A POS três vezes para obter os pontos não alinhados A, B e C.

2) Trace a mediatriz dos segmentos de recta [AB], [BC] e [AC].

3) Chame P ao ponto de encontro das mediatrizes traçadas em 2)

4) Conjecture a relação existente entre as distâncias de P aos pontos A, B e C.

5) Confirme a sua conjectura, pedindo essas distâncias. Rectifique a sua opinião, (se necessário, claro).

6) Sabendo que três pontos não alinhados definem um triângulo, escreva uma frase que traduza a conclusão que os resultados obtidos em 5) sugerem.

Fig. 2 — Da mediatriz ao circuncentro

As situações surgidas

De todas as sessões houve uma que se salientou pela riqueza de ecrãs surgidos: foi aquela em que a tarefa era a determinação do circuncentro de um triângulo.

Entregue o guião a cumprir, e após observação silenciosa pela sala, depressa nos apercebemos da existência de:

- um triângulo escaleno e acutângulo.
- dois triângulos obtusângulos, com o circuncentro fora do écran.
- um triângulo que parecia isósceles e acutângulo com o circuncentro quase sobre o maior lado.
- dois triângulos que pareciam isósceles com o circuncentro no interior.

À medida que um grupo acabava a determinação pedida, era confrontado com a questão: será sempre esta a posição do circuncentro, face ao triângulo? Depois de reflectir sobre a resposta dada, o grupo era convidado a fazer uma "visita de estudo" aos outros monitores para confirmar ou infirmar a resposta dada.

Depois dessa "visita de estudo", catalogaram-se as perguntas possíveis: haverá "uma família" de triângulos cujo circuncentro, se situe na fronteira do triângulo? E no interior ? E no exterior? Para contribuir para esta análise, alguns dos alunos ainda classificaram, com a ajuda do LOGO.GEOMETRIA, os triângulos com que trabalharam, quanto aos lados e quanto aos ângulos: constataram que um dos triângulos que parecia isósceles o era mas que o outro era escaleno; que um dos triângulos que parecia isósceles e acutângulo era de facto isósceles mas rectângulo.

As questões levantadas pela observação dos diferentes trabalhos foram tratadas na(s) aula(s) seguinte(s) em sala normal. Com vista a uma síntese tão completa quanto possível, cada uma destas situações foi explorada utilizando vários triângulos das famílias surgidas com a finalidade de comprovar se a posição do circuncentro era acidental, ou se, pelo contrário, seria uma característica dos triângulos daquela família.

Quando chegamos à determinação do incentro, havia uma certa expectativa: será que a localização deste tem tantas hipóteses como a do circuncentro?

As dificuldades encontradas.

Ultrapassando as dificuldades inerentes a uma experimentação autodidacta, gostaria de apresentar as que, no meu entender, merecem realce.

a) Ao definir "Mediatriz", "Circuncentro", "Bissectriz" e "Incentro", aparecia, em todas as mesas, pelo menos um par de valores diferentes! Era "a mediatriz com pontos mais próximos de um extremo que do outro", era "o circuncentro que não aparecia igualmente distanciado dos vértices do triângulo", etc, etc.

Comparando os valores aproximados a menos de uma décima e num caso a menos de uma unidade, das distâncias calculadas pelo programa, pareceu que as diferenças não eram significativas, sobretudo trabalhando com pontos daquele "tamanho"! Mas depois, quer nestes casos quer nos outros, fez-se a reflexão sobre os resultados que seriam de esperar, acompanhada da respectiva justificação: não foi dificil responsabilizar os arredondamentos feitos pelo próprio computador, nas diferenças surgidas.

b) Outra dificuldade teve a ver com o ACASO no LOGO.GEOMETRIA.

Menos rica, sem dúvida, foi a sessão com vista à definição de distância de um ponto a uma recta.

O guião utilizava a função ACASO do programa com vista à escolha de uma recta e seis pontos dos quais um não pertencente à recta.

Se numa sessão resultaram duas situações distintas, na outra todos os ecrãs deram a mesma posição relativa e quando pedidas as distâncias, conduziram aos mesmos valores!...

As situações surgidas também merecem uma referência: apenas um computador forneceu cinco pontos distintos sobre a recta e distribuidos de um e de outro lado da perpendicular traçada do ponto para a recta; nos outros e nos mesmos seis computadores no dia seguinte, a recta era quase uma recta vertical e todos apresentavam os pontos A e E sobrepostos bem como C e D; e sempre pela mesma ordem: B, A e C. E todos para o mesmo lado da perpendicular definidora da distância do ponto à recta!...

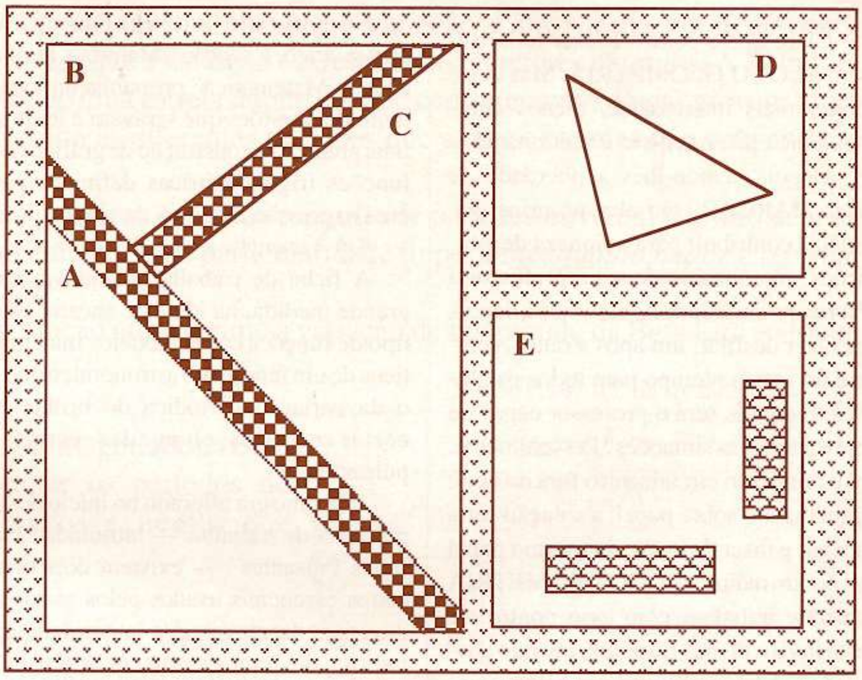
Poderiam estar tão próximos uns dos outros que pareciam coincidentes; e foi-lhes posta a questão: como decidir se eram pontos distintos ou se, pelo contrário, eram de facto o mesmo ponto? Uns pretendiam usar, como critério, a distância de um ponto à recta: argumentavam que se desse o mesmo valor eram o mesmo ponto; marcado um ponto sobre a mesma recta igualmente afastado do pé da perpendicular, mas para o outro lado, reconheceram que só em certas circunstâncias seria um critério ajustado. Outros recorreram de imediato à distância entre dois pontos (tratada em aulas anteriores) e concluiram que se tratava, de facto, do mesmo ponto.

Depois de tiradas as conclusões pedidas, utilizaram mais pontos sobre a mesma recta e fora dela, para testarem as conclusões tiradas.

Em conclusão e quanto a esta dificuldade, poderíamos dizer que o LOGO.GEOMETRIA a provoca e o LOGO.GEOMETRIA a ajuda a resolver, e isto porque de dificuldade passou a auxiliar educativo, se assim se pode dizer: a fraca aleatoriedade foi pretexto para recordar noções anteriormente tratadas e lembrar das vantagens de estarmos atentos e sermos críticos quanto ao trabalho produzido por aquela máquina (perante a resposta do programa a primeira reação dos alunos foi: o meu não dá os pontos pedidos!?).

c) Outra dificuldade tem a ver com o tempo que demora a carregar o programa: um intervalo entre duas aulas não chega para carregar mais do que um módulo. E se por qualquer utilização inadequada o programa se perde, não há tempo para o carregar de novo e fazer a aula prevista.

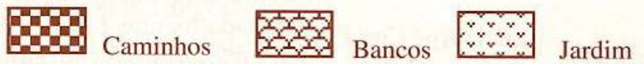
Escola Secundária de Augusto Alves // Matosinhos
9º ano ••• 1990/1991



O texto que se segue apoia-se na figura acima:

O Sr. Costa pretende construir uma PISCINA circular o maior possível na ZONA A, um ANEL circular à volta do canteiro na ZONA D, mas o mais pequeno que puder ser, e uma MESA redonda que sirva igualmente os dois bancos da ZONA E. Pretende ainda instalar dois CANDEEIROS DE PÉ na ZONA C, igualmente afastados dos caminhos internos e um terceiro na ZONA B, que fique na perpendicular ao contorno exterior tirada do ponto de encontro dos caminhos internos .Construa RIGOROSAMENTE os elementos que o Sr. Costa deseja, nos lugares escolhidos e nas condições exigidas pelo proprietário.

Legenda:



A avaliação

Do ponto de vista do trabalho feito, não serei a pessoa indicada para fazer tal avaliação, seja pela minha implicação na realização seja pela falta de preparação para avaliar projectos. Mas, do ponto de vista da aquisição de conhecimentos pelos alunos, preocupava-me o modo como os conceitos estavam interiorizados e como seriam capazes de os mobilizar. Recorri, por isso, à realização de um trabalho individual (ver quadro nesta página). Os resultados foram os melhores de sempre: houve 15 classificações acima de 55% (a nota a seguir foi 41%); a zona de maior sucesso foi a **A** e a de maior insucesso foi a **B**, a julgar pelos números: 20 alunos matematizaram correctamente a primeira, enquanto apenas 7 o conseguiram relativamente à zona **B**; quanto às zonas **C**, **D** e **E**, os números correspondentes foram: 12, 15 e 9, respectivamente; há ainda a salientar um dos alunos que teve boa nota (70%), nunca tinha obtido positiva em Matemática em anos anteriores, nem voltou a ter neste ano. Também as outras questões sobre este assunto que ao longo do ano fui incluindo nos diferentes testes não foram das pior sucedidas.

LOGO.GEOMETRIA, o auxiliar indispensável no ensino da Geometria?

Claro que é possível fazer tudo isto sem o LOGO.GEOMETRIA. Mas que é muito mais interessante, menos enfadonho, e mais rico, isso é indubitável.

Depois, dando-lhes a liberdade de usar MARCAR, são eles próprios que estão a contribuir para a riqueza de situações, ao contrário de ser o professor a fabricar a variedade de casos para depois os fazer desfilar, um após a outro, sempre no mesmo tempo para todos os alunos. E depois será o professor capaz de prever todas as situações? Pessoalmente, não previria o circuncentro fora do ecrã: trabalhando sobre papel, a solução seria apagar e fazer de novo, no mesmo papel ou noutro maior; o LOGO.GEOMETRIA permite trabalhar com esse ponto: ele está invisível mas responde quando chamado (poderá questionar-se a importância desta situação, mas foi a mais espectacular em termos de impacto).

Por outro lado exige muito menos confecção de material do que o geoplano ou o retroprojector que antes utilizara. É certo que tive que estudar o programa, mas o tempo gasto na preparação destas aulas foi muitíssimo menor do que tinha gasto da outra vez.

Para mim, será, realmente, indispensável ...

Maria José Costa
Esc. Sec. de Augusto Gomes,
Matosinhos

Nem tudo o que luz...

No número 18 da revista *Educação e Matemática*, a secção "Materiais para a aula de Matemática" propunha um conjunto de questões que visavam a leitura, interpretação e construção de gráficos de funções trigonométricas definidas por uma expressão analítica do tipo:

$f(x) = a\text{sen}(bx + c) + d$.

A ficha de trabalho assentava, em grande medida, na ideia de encarar este tipo de funções como modelos matemáticos de um fenómeno astronómico que é o da variação periódica do brilho de certas estrelas chamadas estrelas pulsantes.

Tal como era aflorado no início desta proposta de trabalho — intitulada "Estrelas Pulsantes" — existem dois conceitos essenciais usados pelos astrónomos para descreverem a intensidade luminosa de uma estrela: o brilho e a magnitude. Ambos constituem grandezas através das quais se pode exprimir a luz emitida por um astro, e em particular por uma estrela. Era dito, nesse texto inicial, que o brilho e a magnitude de uma estrela estão relacionados de tal forma que a magnitude de uma estrela é tanto maior quanto menor for o seu brilho. Sucede, porém, que depois de explicitada esta premissa essencial, ela foi renegada e desprezada na arquitectura da situação II da ficha de trabalho. O resultado foi uma falha do tipo "black-out"; *não há estrelas no céu* que resistam à sugestão de tratamento matemático proposto neste segundo grupo de questões. Vejamos porquê. Explicava-se que a Beta Lira é uma estrela dupla, ou seja, que é formada por um par de estrelas. Ambas giram em torno de um centro de gravidade comum e é em virtude desse movimento que se observa uma variação de brilho periódica análoga à de uma estrela pulsante. Esta periodicidade produzida pela interacção entre duas estrelas, que descrevem movimentos periódicos, fazia lembrar a soma de duas funções periódicas. De uma forma abreviada, a questão que se colocava era a de mostrar que a emissão de luz da Beta Lira seria teoricamente equivalente à emissão de luz resultante da agregação de duas estrelas pulsantes. Até aqui, não há sobressaltos de maior. O sinal de alarme veio a soar um pouco mais tarde, na frase seguinte: "Seria o mesmo que somar as variações de magnitude de duas estrelas pulsantes imaginárias". E a partir daqui surgiu o erro de imaginar a **magnitude** da Beta Lira como sendo a soma das **magnitudes** de duas estrelas pulsantes. Ora, isto contraria o que supostamente iria acontecer se se juntassem duas estrelas. Decerto, o brilho resultante iria aumentar e, consequentemente, a magnitude deveria diminuir (maior brilho implica menor magnitude). Portanto, se duas estrelas de magnitudes 2,6 e 4,15 se unissem, a magnitude resultante não poderia ser 6,75. Teria de ser necessariamente menor. Resumidamente, isto significa que "a magnitude da soma não é igual à soma das magnitudes". E, na verdade, existe uma razão para que assim seja. Tudo reside no facto de a magnitude ser calculada numa escala logarítmica, ao contrário do brilho, cuja escala é linear. Concretamente, a escala criada para a magnitude obedece à seguinte relação:

"Há uma diferença de 5 unidades de magnitude entre dois astros cujos brilhos estão na razão de 100 para 1."

Feita a explicação do erro, deverá notar-se que a variação de magnitude da Beta Lira ao longo do tempo, representada graficamente nesta ficha, nunca seria idêntica à que se obteria pela agregação das estrelas A e B, supondo que estas teriam as variações de magnitude correspondentes aos gráficos apresentados.

Por último, e embora não tenha chegado à redacção da revista qualquer resposta ao desafio, lançado no número anterior, de encontrar uma proposta de alteração da ficha de trabalho, aqui fica uma hipótese de remodelação. A acompanhá-la vai naturalmente o pedido de desculpas pelo engano.

Susana Carreira

Brilho e magnitude de uma estrela dupla

Existem estrelas cujo brilho é constante e outras cujo brilho varia ao longo do tempo. Basicamente, há dois tipos de estrelas de luminosidade variável: aquelas em que a variação é provocada por fenómenos intrínsecos às próprias estrelas e aquelas em que a variação é o resultado de factores externos. A Beta Lira é um exemplo do segundo tipo. Trata-se de uma estrela dupla, em que cada elemento do par gira em torno de um centro de gravidade comum. Devido às diferentes posições que as duas estrelas vão ocupando, o brilho emitido pelo par vai variando.

É frequente os astrónomos usarem uma grandeza chamada **magnitude** para descreverem o brilho de uma estrela. A escala da magnitude tem, no entanto, uma particularidade importante: *quanto maior é o brilho de uma estrela, menor é a sua magnitude.*

No gráfico 1, encontras representada a função que exprime a variação de magnitude da Beta Lira ao longo do tempo.

1. Explica o que se passa com a variação de magnitude da Beta Lira ao longo do tempo, fazendo notar os períodos de crescimento e decrescimento, os pontos extremos e a periodicidade da função.

2. Com base nas informações que podes retirar da análise deste gráfico, e tendo presente a relação entre brilho e magnitude, tenta fazer uma previsão do que seria o gráfico da variação do brilho ao longo do tempo.

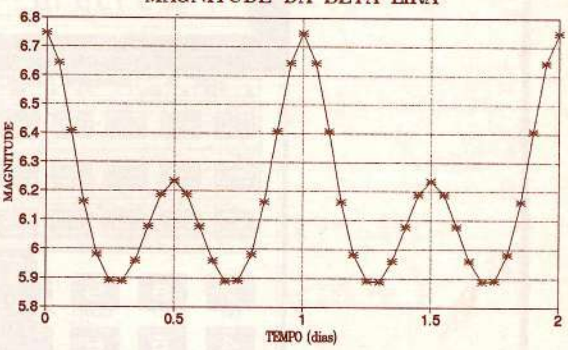


Gráfico 1. Magnitude da Beta Lira

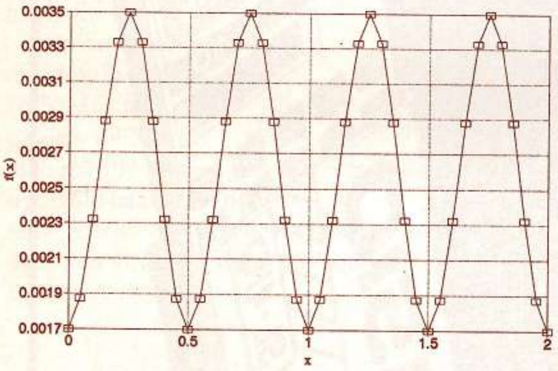


Gráfico 2. Função *f*

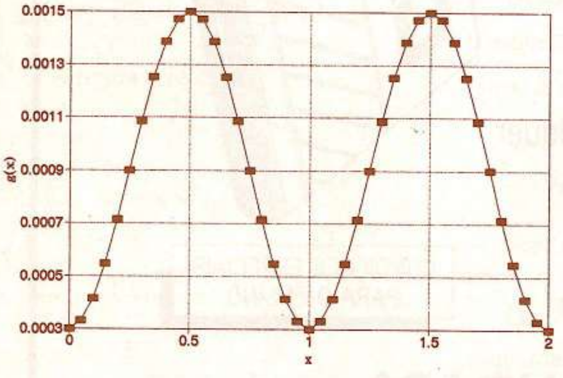


Gráfico 3. Função *g*

3. Considera as duas funções sinusoidais, *f* e *g*, representadas nos gráficos 2 e 3.

a) Relativamente a cada uma delas, identifica o período, os valores extremos e a amplitude.

b) Procura uma expressão analítica que permita definir cada uma destas funções.

c) Verifica se existe algum valor do domínio no qual as duas funções têm ambas os seus valores máximos.

d) Verifica se existe algum valor do domínio no qual as duas funções têm ambas os seus valores mínimos.

e) Considera a função que é definida pela soma destas duas funções. O que podes dizer quanto à sua periodicidade e valores extremos?

f) Faz um esboço do gráfico dessa nova função. Se dispuseres de um computador ou de uma calculadora gráfica, constrói o gráfico respectivo no intervalo [0,2], introduzindo a sua expressão analítica. Compara o resultado com o esboço que fizeste.

g) O que pensas da possibilidade de este gráfico ser uma representação da variação do **brilho** da Beta Lira ao longo do tempo? Explica a tua resposta.

CASIO. CALCULADORAS ELECTRÓNICAS

NÃO HÁ PROBLEMA QUE RESISTA!

FUNÇÃO FRACÇÕES EM TODAS AS CIENTÍFICAS

$$2\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=3\frac{11}{20}$$

2 [a b/c] 4 [a b/c] 5 [+] 3 [a b/c] 4 =

3⌟11⌟20

CALCULADORAS: PARA TODOS OS GRAUS DE ENSINO

A CASIO líder mundial em calculadoras possui a linha mais completa de máquinas para o ENSINO.
Possuidoras de mais funções, mais qualidade e garantia, as CASIO são imbatíveis!
A sua rapidez de cálculo, 3 vezes superior a qualquer outra marca e preço competitivo, são factores decisivos na escolha de alunos e professores.

CONDIÇÕES ESPECIAIS PARA O ENSINO

REPRESENTANTE

BELTRÃO COELHO, LDA.

LISBOA, PORTO, SETÚBAL, AVEIRO, COIMBRA, BRAGA

EMPRESA DO GRUPO BCL

Sobre um problema de geometria

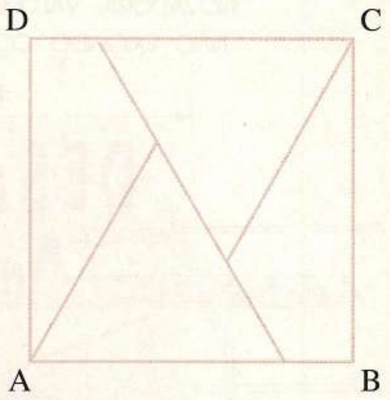
J. S. Cabral

Nas VIII Olimpíadas Nacionais da Matemática de 1990, categoria B, 1ª eliminatória, foi apresentado o problema indicado ao lado.

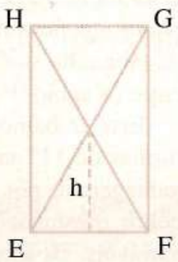
As "sugestões" para a resolução deste problema indicam duas soluções: uma envolvendo conhecimentos de trigonometria e a outra envolvendo conhecimentos de geometria analítica. Julgo que a resolução de qualquer problema se torna tanto mais "interessante" quanto mais simples forem os métodos usados, ou, por outras palavras, quanto mais rudimentares forem os conhecimentos necessários para a sua resolução.

Seguindo esta orientação, procurou-se um processo que estivesse ao alcance dum aluno do 9º ano de escolaridade, isto é, sem utilizar nem trigonometria nem geometria analítica.

Na figura ao lado, [ABCD] é um quadrado. Os dois triângulos indicados são ambos equiláteros e os seus lados medem 1. Quanto mede o lado do quadrado?



Coloquemos inicialmente os dois triângulos equiláteros de lado 1 como se indica na figura.



Nestas condições os lados do rectângulo [*EFGH*] têm os seguintes valores:

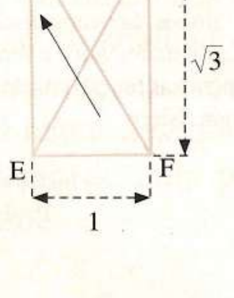
lado [*EF*] : $\overline{EF}=1$, por ser o lado do triângulo equilátero dado;

lado [*EH*]: o valor deste lado será o dobro da altura do triângulo equilátero de lado 1, ou

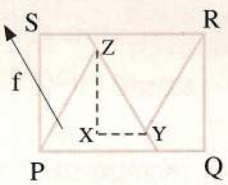
$$h=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então $\overline{EH}=2h=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

A figura será então



Vamos agora fazer "deslizar" o triângulo inferior no sentido da flecha **f**; ele será deslocado simultaneamente para a esquerda e para cima de forma a obter-se a figura



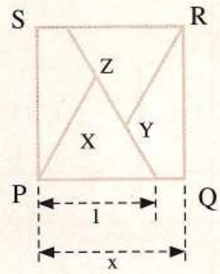
que se pretende seja um quadrado, ou, por outras palavras, que seja $\overline{PQ}=\overline{PS}$.

Designando por d_e a deslocação para a esquerda $d_e=\overline{YX}$, a deslocação para cima, $d_c=\overline{XZ}$, será

$$d_c=\sqrt{(2d_e)^2-d_e^2}=\sqrt{3}\,d_e$$

Seja x o valor do lado do quadrado, isto é, o valor a determinar.

Ora $\overline{XY}=x-1$ (é a deslocação para a esquerda, d_e) e $\overline{XZ}=\sqrt{3}\,(x-1)$ (porque $d_c=\sqrt{3}\,d_e$).(v. fig. seguinte)



Então será $\overline{PS}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,(x-1)$ (altura inicial menos $\overline{XZ}$)

Portanto $x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,(x-1)$

ou $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

Ao nível do nono ano de escolaridade o resultado estava encontrado. No entanto pode-se ainda escrever

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1},$$

ou finalmente $x=3-\sqrt{3}$.

J. S. Cabral
Esc. Sec. da Amadora

Materiais para a aula de Matemática

Na ficha de trabalho que publicamos neste número, pretende-se que se faça o estudo de uma função de três variáveis. Com efeito, o peso que a improvisada ponte aguenta vai depender da grossura da tábua, da sua largura e da distância entre os apoios.

Este trabalho foi feito com várias turmas de 11º ano e teve desde logo a vantagem de pôr os alunos a tentar descobrir e estudar uma função de várias variáveis. Os actuais programas apenas falam de funções de uma variável e é pena que se termine o ensino secundário sem nunca falar das outras funções, essenciais para a modelação da maioria das situações reais.

Além disso, neste exemplo, cada vez que fixamos duas das variáveis para investigarmos como se comporta a função, vamos encontrar funções importantes e já conhecidas dos alunos: a proporcionalidade directa para a largura, a proporcionalidade inversa para a distância entre apoios e a função quadrática para a espessura.

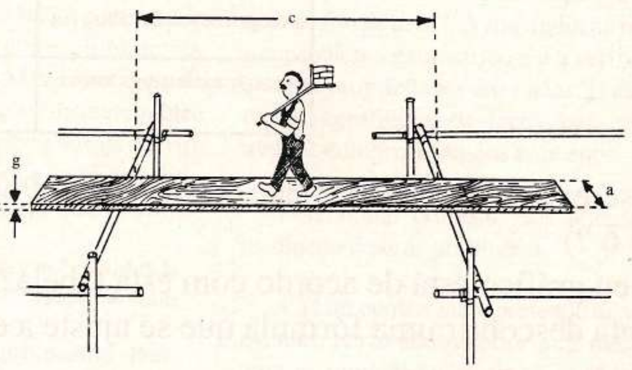
Finalmente, esta é uma boa ocasião para os alunos fazerem uma pequena investigação matemática e verificarem a importância das funções na descrição de fenómenos físicos.

José Paulo Viana
Paula Teixeira

Materiais para a aula de Matemática

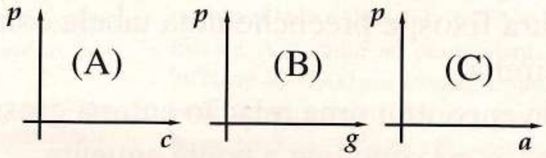
Uma função de várias variáveis*

Como prever se uma ponte construída com uma tábua aguentará o peso de uma pessoa que a atravessa?



I

1 - Imagina que vais mudando lentamente a distância *c* entre os apoios da ponte. Como é que isso afectará o peso máximo *p* que a ponte aguenta? Faz um gráfico (do tipo A) para mostrar como varia *p* com *c*.



2 - Imagina agora que, separadamente, se modificam a grossura *g* e a largura *a* da ponte. Desenha os gráficos (tipos B e C) que mostrem o efeito sobre *p*.

3 - Compara os teus gráficos com os do teu companheiro(a). Tenta convencê-lo de que os teus gráficos estão correctos. Não é muito importante que neste momento não consigam chegar a acordo.

II

A tabela ao lado mostra os pesos máximos que pontes de diferentes dimensões conseguem suportar. Os resultados aparecem por ordem, desde a ponte mais resistente até à mais fraca. Vamos tentar descobrir regras para prever a resistência de uma ponte a partir das suas dimensões

comprimento c (m)	largura a (cm)	grossura g (cm)	peso máximo p (kg)
2	40	5	250
1	20	5	250
2	50	4	200
2	40	4	160
1	20	4	160
2	20	5	125
2	30	4	120
1	20	3	90
2	20	4	80
1	30	2	60
4	40	3	45
1	20	2	40
2	10	4	40
2	30	2	30
3	30	2	20
3	10	3	15
4	30	2	15
5	30	2	12
1	20	1	10
4	40	1	5

Temos três variáveis: comprimento, largura e grossura. Se mantivermos fixas duas destas variáveis, podemos descobrir uma relação entre a terceira variável e o peso que a tábua aguenta.

Vamos reorganizar a tabela de forma que *c*, *a* e *g* variem de acordo com uma determinada regra. Comecemos por manter fixos *a* e *g* para descobrirmos como *p* depende de *c*.

Para isso...

1 - Reúne todos os dados relativos a uma tábua de 30cm de largura e 2cm de grossura, e preenche a tabela:

comprimento da tábua (c)						
peso máximo suportado (p)						

Descreve todas as regras que descobrires. (Podes prever, por exemplo, o valor de *p* quando $c = 6$?)

O teu gráfico está de acordo com esta tabela?

Tenta descobrir uma fórmula que se ajuste a estes dados.

2 - Procura agora pontes com comprimento e largura fixos, e preenche uma tabela como a da direita.

Tenta encontrar uma relação entre a grossura e o peso máximo que a ponte aguenta.

Descreve o que descobrires.

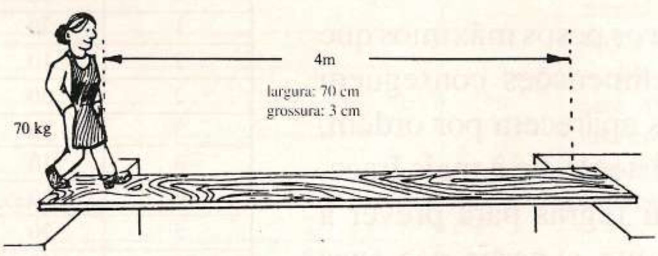
grossura da tábua (g)						
peso máximo (p)						

3 - Faz o mesmo para tábuas com comprimento e grossura fixos, preenchendo a tabela ao lado.

largura da tábua (a)						
peso máximo (p)						

4 - Conseguirás combinar todos os resultados de modo a obter uma fórmula que se possa utilizar para prever a resistência de uma ponte com quaisquer dimensões?

5 - Finalmente, que sucederá nesta situação?



(*) Adaptado da tradução em castelhano de *The Language of Functions and Graphs* ed. Shell Centre International, Londres.

Aplicações da Matemática: dois exemplos

Ângela Freitas

A extensão dos actuais programas de matemática dificulta que se trabalhe, nas aulas, com aplicações desta disciplina a outras áreas. É, no entanto, reconhecida por muitos a importância desta componente no ensino da matemática.

Quando encontramos uma situação que diz respeito à realidade dos alunos sentimos que a turma reage com agrado e que a curiosidade e o espírito de observação aumentam. Mas a vantagem da utilização das aplicações da matemática não se resume à contribuição que dá para motivar os alunos para a aprendizagem. Como refere Ana Vieira, ajuda-nos a:

"• adquirir uma visão mais equilibrada da Matemática e do seu papel no mundo;
• utilizar a Matemática noutras disciplinas e na sua vida futura, nomeadamente profissional;
• desenvolver o espírito crítico face ao seu uso, correcto ou incorrecto, nomeadamente profissional;
• desenvolver atitudes e competências de natureza geral ligadas à criatividade e à resolução de problemas;
• adquirir e compreender mais facilmente conceitos, métodos e resultados matemáticos e descobrir relações entre conceitos diferentes."[1]

Programação linear

A programação linear é um assunto que permite mostrar uma aplicação da Geometria Analítica, mais concretamente dos domínios planos. Na opinião de Sebastião e Silva:

> "A programação, linear ou não linear, é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em investigação operacional, no domínio da Economia. A sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa."[2]

A propósito deste assunto, numa turma da área de Economia, foram resolvidos problemas usando o método gráfico da Programação Linear. Foi estudado na aula o problema de optimização "Passeio de fim de ano"[3]. A sua tradução para um problema geométrico e a a verificação das propriedades das rectas, já estudadas, contribuiu, de facto, para uma melhor compreensão dos conceitos.

Foi, ainda, proposto aos alunos a resolução de dois problemas.

1º) Um comerciante pretende adquirir, num prazo não superior a 12 meses, uma quantidade, não superior a cinco toneladas, de um produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4000$00 por tonelada, mas não pode fornecer mais de três toneladas desse produto. A fábrica B garante apenas um lucro de 3500$00 mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Por outro lado, a fábrica A produz uma tonelada dessa mercadoria em cada dois meses, mas as fábricas não podem trabalhar simultaneamente na produção dessa mercadoria, por exigirem a presença de um mesmo técnico.

De que modo deve ser feita a encomenda de forma a obter o lucro máximo?[4]

2º) Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal por forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/Kg) constam do quadro seguinte:[5]

Ingredientes nutritivos \ Ração	Granulado	Farinha	Quantidade mínima requerida
Carbohidratos	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteínas	30	30	210
Custo (esc./Kg)	10	5	

Este problema suscitou uma resolução em forma de banda desenhada, por parte de dois alunos (Luís Ribeiro e Sérgio Coutinho) da Escola Secundária de Ermesinde, que se reproduz na página seguinte.

Foram momentos em que a turma (não toda, evidentemente) manifestou interesse superior ao habitual e foi também oportunidade para trabalharem em conjunto.

Torres de Hanoi

As sucessões e o método de indução matemática têm aplicação na resolução do problema posto pelo jogo das Torres de Hanoi, acerca do qual existe uma lenda[6], cujo objectivo é passar uma pilha de discos de diâmetros diferentes, de uma haste para outra, com o menor número de movimentos possível, não podendo um disco ir colocar-se em cima de outro de menor diâmetro.

Por tentativas, usando um disco, depois dois, depois três e assim sucessivamente chega-se à conclusão de que o número de movimentos necessários para deslocar *n* discos é obtido a partir do número de movimentos necessários para deslocar *n* - 1 discos.

Pode definir-se uma sucessão por recorrência, através da qual se obtém o número de movimentos necessários, conforme o número de discos em causa. De acordo com os esquemas do quadro abaixo[7], chega-se a :

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+1+1 = 1+2\times 1$

$a_3 = 3+1+3 = 1+2\times 3$

Vemos que, no caso dos três discos, 3 é o número de passagens necessárias para mudar os dois discos de menor diâmetro para a haste **B**. 1 é o número de passagens necessárias para mudar o disco maior para a haste **C** e 3 é o número de passagens necessárias para mudar os dois discos menores de **B** para **C**.

Calculemos agora o valor de a_n. Teremos sucessivamente:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+2a_1$

$a_3 = 1+2(1+2a_1) = 1+2^2 a_1$

...

$a_n = 1+2a_{n-1} = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} a_1$

Como $a_1 = 1$,

$a_n = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$.

Então, a_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 cujo primeiro termo é 1. Essa soma é $2^n - 1$.

Apliquemos o método da indução matemática para provar que

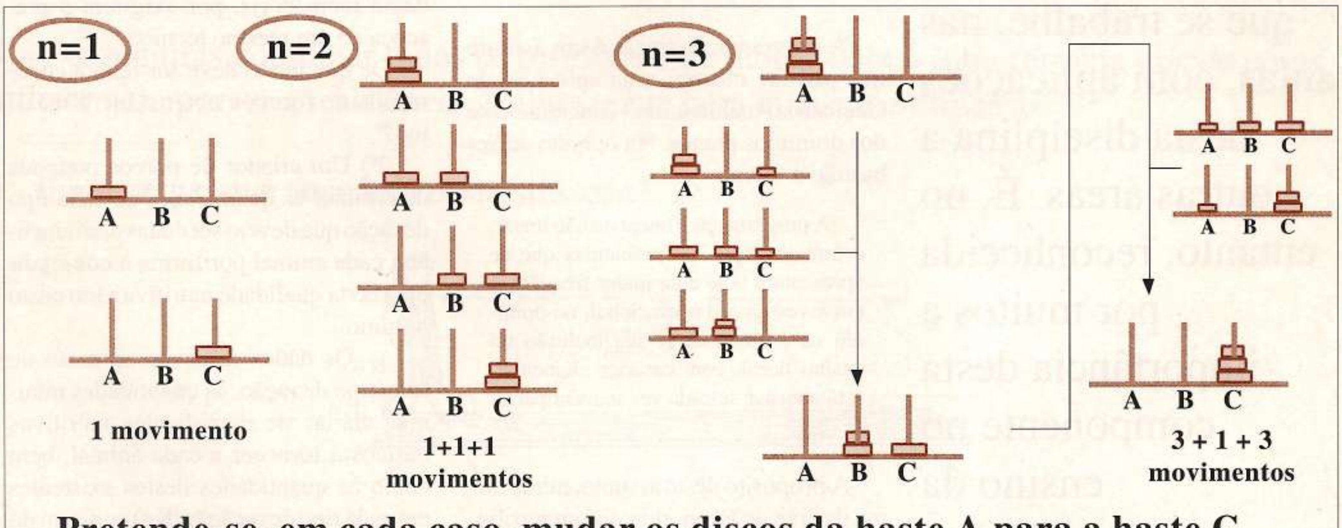
$a_n = 2^n - 1$,

qualquer que seja o número natural *n*.

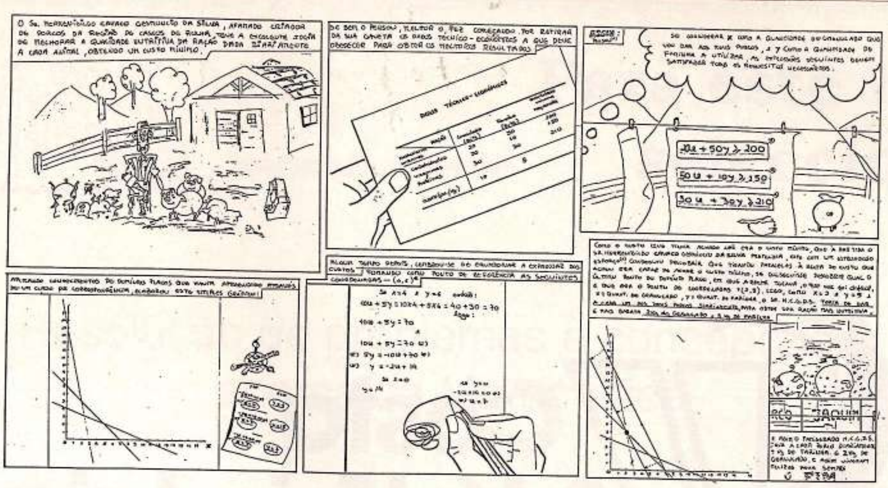
- A proposição é verdadeira para $n = 1$: $a_1 = 2^1 - 1 = 1$.
- Suponhamos que é verdadeira para n, ou seja, que é válida a igualdade $a_n = 2^n - 1$.
- Provemos que é verdadeira para $n+1$, isto é, que é verdadeira a igualdade $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$:

$a_{n+1} = 1+2a_n = 1+2(2^n-1) = 2^{n+1}-1$,

como queríamos demonstrar.



Pretende-se, em cada caso, mudar os discos da haste A para a haste C



Legendas da banda desenhada:

a) O Sr. Hermenegildo Cavaco Gesmúncio da Silva, afamado criador de porcos da região de cascos de rolha, teve a excelente ideia de melhorar a qualidade nutritiva da ração dada diariamente a cada animal, obtendo um custo mínimo.

b) Se bem o pensou, melhor o fez, começando por retirar da sua gaveta os dados técnico-económicos a que deve obedecer para obter os melhores resultados.

c) Assim pensou:
Se considerar x como a quantidade de granulado que vou dar aos meus porcos, e y como a quantidade de farinha a utilizar, as expressões seguintes devem satisfazer todos os requisitos necessários.

d) Apurando conhecimentos de domínios planos que havia apreendido, através de um curso por correspondência, elaborou este simples gráfico:

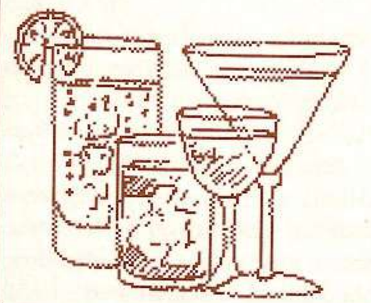
d) Algum tempo depois, lembrou-de equacionar a expressão dos custos, tomando como ponto de referência as seguintes coordenadas: (4,6)

e) Como o custo que tinha achado não era o custo mínimo, que à partida o Sr. Hermenegildo Cavaco Gesmúncio da Silva pretendia, este, com um estrondoso esforço, conseguiu descobrir que tirando paralelas à recta do custo que achou era capaz de achar o custo mínimo, se conseguisse descobrir qual o último ponto do domínio plano, em que a recta tocava, o que não foi difícil, e que era o ponto de coordenadas $P(2,5)$. Logo, como $x = 2$ e $y = 5$ e $x=$ quant. de granulado, y = quant. de farinha, o Sr. H.C.G.D.S. teria de dar a cada um dos seus porcos, diariamente, para obter uma ração, mais nutritiva e mais barata, 2Kg de granulado e 5 kg de farinha.
E assim, o famigerado H.C.G.D.S. dava a cada porco diariamente 5 Kg de farinha e dois kilos de granulado e assim viveram felizes para sempre.

Referências:

1) *Actas do Profmat de 1989* organizadas por Eduardo Veloso e Henrique Guimarães, A.P.M., pág. 458.
2) *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1° volume, Edição GEP, Lisboa, 1975, pág. 71.
3) *M10*, Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, Texto Editora, Lisboa, 1983, pág. 303.
4) *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1° volume, Edição GEP, Lisboa, 1975, pág. 72 e 73.
5) *Programação Linear*, Volume I, Manuel Ramalhete, Jorge Guerreiro e Alípio Magalhães, Mac Grw-Hill, 1984, pág. 5.
6) *Matemáticas Recreativas*, Y. Perelman, Litexa, Portugal, pág. 118.
7) *Profmat nº2*, Setembro de 1986, 2ª edição, 1987, pág.75 e 78.

Ângela Freitas
Esc. Sec. de Ermesinde



Fins de Tarde na nova sede da APM
Todas as sextas-feiras, durante o terceiro período escolar!

A partir das 5 da tarde; convívio, um pouco de matemática, e de novo convívio. Se vive em Lisboa e arredores, esteja atento ao correio.

Para este número seleccionámos

Resolução de problemas e concepções[1] acerca da Matemática

Martha L. Frank

Este artigo, publicado no Arithmetics Teacher de Janeiro de 1988, salienta a necessidade de promover mudanças nas concepções dos alunos acerca da Matemática e da resolução de problemas. Para muitos alunos, aprender e fazer Matemática é ouvir do professor um conjunto de factos, regras e procedimentos, ler no livro as partes destacadas e, de uma maneira geral, ser capaz de chegar, perante um exercício, à "resposta certa". A resolução de problemas é vista como uma actividade marginal. Sem esquecer que as concepções dos alunos não mudam da noite para o dia, Martha Frank apresenta sugestões para o ensino da Matemática que poderão influenciar positivamente a actuação dos alunos na resolução de problemas.

Uma questão frequentemente levantada nesta década, desde que a resolução de problemas se tornou um tópico importante na educação matemática, é "como desenvolvem os alunos a sua capacidade de resolução de problemas?". As respostas a esta questão têm dado especial importância a técnicas de ensino como a introdução de estratégias de resolução de problemas ("heurísticas"), o método das quatro etapas de Polya, ou mesmo o ensino de linguagens de programação de computadores como o Logo ou o BASIC.

Alguns investigadores têm sustentado que a inovação curricular não é suficiente para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos. Confrey (1984) sugere que uma implementação bem sucedida de metodologias centradas no processo de resolução de problemas e que encorajem a independência, persistência e flexibilidade "requer mudanças nas concepções de Matemática dos alunos". Ou seja, os alunos não serão capazes de melhorarem a capacidade de resolver problemas se não mudarem as suas concepções acerca da Matemática.

Que concepções têm os alunos sobre a Matemática? De que modo essas concepções influenciam a forma como resolvem problemas? Este artigo descreve alguns dos resultados de um estudo (Frank, 1985) construído para explorar estas questões. Neste estudo trabalhou-se com alunos da middle school[2], tendo-se escolhido bons alunos em Matemática (tomando como referência os resultados de um teste normalizado). Contudo, outros investigadores (Cobb, 1984; Confrey, 1984; Wheatley, 1984; Carpanter, Lindquist, Matthews e Silver, 1983; Buerk, 1982; Confrey e Lanier, 1980; Fey, 1979) descreveram algumas concepções similares entre alunos de uma maior diversidade de idades e capacidades.

As convicções dos alunos acerca da Matemática

Os vinte e sete alunos que frequentaram um curso de resolução de problemas de Matemática com computadores participaram num estudo sobre concepções acerca da Matemática. Este curso intensivo de duas semanas fazia parte dos STAR (Seminars for the Talented and Academically Ready) da Universidade de Purdue, programa destinado a alunos do ensino unificado. Quinze alunos (uma parte da classe) foram observados diariamente: deste grupo foram entrevistados quatro alunos. Cada aluno foi entrevistado pelo menos quatro vezes. O tempo mínimo de entrevista foi de trinta minutos. As entrevistas consistiam em conversas sobre a Matemática, mas os alunos também resolveram problemas não rotineiros de Matemática enquanto pensavam alto. A lista seguinte de concepções é baseada numa análise do estudo e em dados das entrevistas e das observações.

1. Matemática é cálculo. A Matemática, para estes alunos, era o que eles chamavam "as quatro operações básicas": adição, subtracção, multiplicação e divisão. Estas operações básicas envolviam a memorização de tabuadas e algoritmos. Algoritmos são procedimentos passo a passo ou listas de regras que se usam para obter respostas numéricas. Como extensões da concepção de que "Matemática é cálculo" surge também: "fazer Matemática significa seguir regras" e "aprender Matemática é sobretudo memorizar".

2. Os problemas de Matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos passos. Estes alunos acreditavam, de uma forma geral, que os problemas de Matemática eram supostos ser tarefas de rotina nas quais os conhecimentos de algorítmos aritméticos ou algébricos se podiam aplicar. Tarefas não rotineiras eram encaradas como "extra" — para além do que é normal em Matemática, não verdadeiramente Matemática. Eles acreditavam que alguma coisa estava errada, ou com eles ou com o próprio problema, se este se tornava "demasiado demorado", isto é, se levava mais que 5 ou 10 minutos a resolver.

3. O objectivo de fazer Matemática é obter "respostas certas". Os alunos tendiam a ver a Matemática como uma dicotomia entre o "completamente certo" ou "completamente errado". Eles centravam as atenções quase inteiramente nas respostas (produtos) e na dúvida sobre se essas respostas estariam certas ou erradas. Muitos alunos acreditavam que só o professor lhes poderia dizer se uma resposta estava certa ou errada. Se uma resposta estava errada, eles pareciam sentir que o trabalho desenvolvido no problema tinha sido uma experiência sem qualquer valor.

4. O papel do aluno de Matemática é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriu. Matemática — um conjunto de factos, regras e procedimentos — é um "saber enlatado" para ser passivamente recebido. Em entrevistas, os alunos explicaram que isso se consegue tomando-se atenção na aula, lendo o livro adoptado (particularmente "o texto realçado") e fazendo os trabalhos de casa (talvez com a ajuda do professor ou de outro adulto). E que se demonstra produzindo respostas certas aos problemas de Matemática. Se se consegue dar uma resposta correcta, então "compreendeu-se" a matéria; se não se consegue, não se compreendeu.

5. O papel do professor de Matemática é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar que os alunos adquiriram esses conhecimentos. É suposto que os professores de Matemática passem o tempo da aula a explicar ou a "dar" a "matéria" do livro adoptado. Se o professor explica bem a matéria, os alunos serão capazes de rápida e facilmente produzir respostas correctas nos problemas dos trabalhos de casa e nos testes de avaliação. Os professores confirmam que os alunos adquiriram os conhecimentos verificando se as suas respostas estão certas.

Implicações para a resolução de problemas

Quando um professor ou um investigador, fala ou escreve sobre a resolução de problemas, provavelmente tem na cabeça uma definição semelhante à de Wheatley: "Resolução de problemas é aquilo que se faz quando não se sabe o que fazer" (Wheatley, 1984). O NCTM [3] (1980) recomenda que a resolução de problemas seja o assunto central (o foco) da matemática escolar. Mas os alunos cujas concepções matemáticas são idênticas àquelas que aqui delineámos não aceitam sequer que a "resolução de problemas" (no sentido dado por Wheatley) seja Matemática. Matemática, para eles, nunca é suposto ser uma situação em que "não se sabe à partida o que fazer". Se o professor cumpriu o seu papel e os alunos também cumpriram as suas tarefas, eles deverão sempre ser capazes de aplicar um facto, regra ou procedimento para obter uma resposta rapidamente.

Muitos autores distinguem entre problemas e exercícios. Por exemplo, segundo Kantowski (1977), uma tarefa é um problema para um aluno se envolve "uma questão a que ele não pode responder ou uma situação que ele não é capaz de resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis". Num exercício, contudo, o aluno conhece o algorítmo que, "quando aplicado, conduz de forma segura a uma solução". Para os alunos com as concepções matemáticas acima mencionadas, a Matemática consiste em exercícios e não em problemas.

Esta distinção não é meramente um sofisma semântico. Um aluno para quem a Matemática é um conjunto de exercícios pode (desde que tenha aprendido uma colecção de factos, regras e procedimentos) ser totalmente bem sucedido na obtenção rápida de respostas a exercícios. O seu rendimento pode convencer o observador de que está perante um bom aluno em Matemática. Mas o que acontece quando este aluno encontra um problema?

Uma possibilidade é o aluno encará-lo como uma tarefa de características diferentes dos exercícios que ele está habituado a ver e, portanto, não a aceitar como Matemática (o que aconteceu nas entrevistas). Nesta situação o aluno recusa ter alguma coisa a ver com a tarefa (diz "eu não posso fazer isto" ou "isto não é Matemática") ou trabalha nela com um estilo desordenado (sem qualquer estratégia) apenas e enquanto o professor o incentiva. Em qualquer dos casos, o aluno terá aprendido muito pouco da experiência com o problema.

Outra possibilidade é o aluno abordar o problema como se se tratasse de um exercício. Esta reacção também aconteceu nas entrevistas. O aluno tentará mobilizar da memória um facto ou regra apropriada com o objectivo de produzir uma resposta rapidamente. Não o conseguindo, ele desiste de encontrar uma estratégia de resolução, o que usualmente envolve ou abandonar o trabalho ou pedir ajuda ao professor ("eu não consigo — diga-me o que fazer" ou "eu estou a fazer isto certo?"). Algumas vezes, através de uma mera manipulação numérica, aparece qualquer coisa parecida com uma resposta. Se o professor verifica que a resposta é correcta, óptimo; passa-se ao próximo problema ("não olhando para trás")! Se não (se ao aluno não é dito que a resposta está correcta ou se lhe é dito que é incorrecta), então ele sente que o trabalho no problema foi uma perda de tempo. De novo pouco foi aprendido do contacto com o problema, embora neste último caso o aluno possa ficar ainda com o desconfortável sentimento que ele não é muito bom em Matemática.

Finalmente, o aluno pode usar de facto uma estratégia geral de resolução de problemas e ir fazendo reais progressos numa solução. Mas se a resposta não fica visível no horizonte após cinco minutos, ele pode decidir abandonar o trabalho. O aluno sente que está a fazer alguma coisa de errado — ou que este é um daqueles problemas com "truque" que não tem solução — porque está a demorar muito tempo para obter uma "resposta final".

Onde está em tudo isto o foco no processo, na independência, na persistência e na flexibilidade que a resolução de problemas supostamente desenvolve? Manifestamente ausentes.

Implicações para o ensino

As convicções matemáticas não se desenvolvem da noite para o dia. Elas desenvolvem-se lentamente, ao longo de um período de experiências matemáticas. A principal origem das experiências matemáticas para a maior parte dos alunos é provavelmente a aula de Matemática. Assim, aquilo que se faz na sala de aula influenciará extremamente as convicções dos alunos. Estes aprendem muito mais que os conteúdos matemáticos das experiências da sala de aula. Eles desenvolvem também concepções (formas de encarar a Matemática) que podem ajudá-los — ou constrangê-los — a resolver problemas.

Como conseguiremos, então, que os nossos alunos desenvolvam a sua capacidade de resolver problemas? As sugestões seguintes dirigem-se para o desenvolvimento de concepções acerca da Matemática que se tornarão úteis na resolução de problemas.

1. Começar cedo a resolver problemas. Se a primeira vez que os alunos deparam com problemas ocorrer só na *middle school* [2] trata-se de uma experiência tardia. Todos os alunos necessitam de ter oportunidades para resolver exercícios e problemas desde o princípio da escolaridade.

2. Estar certo de que os problemas propostos são mesmo problemas. Convém relembrar que um problema para um aluno pode ser para outro um simples exercício. Deveremos assegurar-nos de que o trabalho de resolução de problemas corresponde a um desafio, também para os melhores alunos. Esses problemas deverão ocupar os alunos na sua resolução mais que cinco ou dez minutos e deverão requerer o uso de estratégias gerais de resolução de problemas como organização de dados, construção de gráficos ou esquemas, procura de modelos, trabalhar do fim para o princípio ou ensaiar métodos de tentativa-erro.

3. Centrar a atenção nos processos de resolução, não nas respostas. Deve-se discutir todo o processo de resolução e não apenas as respostas numéricas. Os alunos devem ser encorajados a mostrar como resolveram o problema, que estratégias utilizaram, em vez de apresentar unicamente a resposta final. Se um aluno usa uma estratégia razoável na resolução do problema ele não deverá ser penalizado por obter uma resposta final incorrecta. O aluno poderá mesmo não obter uma resposta final, mas se conseguir dizer o que aprendeu do trabalho realizado, deverá ser também encorajado.

4. Os alunos deverão trabalhar frequentemente em pequenos grupos. Demasiada Matemática escolar consiste em "professor fala - alunos escutam". Os alunos precisam de ter oportunidades para falar de Matemática com outros colegas. Eles precisam de aprender a depender uns dos outros e de si próprios como autoridades em Matemática e não depender só do professor.

5. Não colocar a ênfase no cálculo. Não surpreende que os alunos acreditem que Matemática é cálculo. Muitos professores gastam mais de 70% do ano lectivo com algorítmos de cálculo e memorização de factos (Wheatley, 1983). Nós cometemos o erro de tratar a resolução de problemas como um enfeite acessório (como os que se colocam numa peça de vestuário) — uma coisa que talvez façamos depois de "dar a matéria". É a resolução de problemas, e não o cálculo, que urgentemente devemos colocar no centro do ensino da Matemática se queremos que os nossos alunos se tornem capazes de resolver problemas.

Referências

Buerk, D. (1982). An Experience with some able Women Who Avoid Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*, 20-24.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Mathews, W. e Silver, E. (1983). Results of the Third NAEP Mathematics Assessment, Secondary School. *Mathematics Teacher*, **76**, 652-59.

Cobb, P. (1984). The Importance of Beliefs in the Problem Solving Performance of Second Grade Pupils. In J. M. Moser (ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for PME*, pp. 135-40, Madison, Wis..

Confrey, J. (1984). *An Examination of the Conceptions of Mathematics of Young Women in High Schookl*. Paper presentede at the annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans.

Confrey, J. e Lanier, P. (1980). Students Mathematical Abilities: A Focus for the Improvement of Teaching General Mathematics. *School Science and Mathematics*, **80**, 549-56.

Fey, J. T. (1979). Mathematics Teaching Today: Perspectives from Three National Surveys. *Mathematics Teacher*, **72**, 490-504.

Frank, M. L. (1985). *Mathematical Beliefs and Problem Solving*. Ph. D. diss. Purdue University, West Lafayette, Ind.

Kantowski, M. G. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, **8**, 163-80.

NCTM. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, Reston, Va: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the Purely Cognitive: Belief Systems, Social Cognitions, and Metacognitions as Driving Forces in Intellectual Performance. *Cognitive Science*, **7**, 329-63.

Wheatley, G. H. (1983). A Mathematics Curriculum for the Gifted and Talented. *Gifted Child Quarterly*, **27**, 77-80.

_____. (1984). The Importance of Beliefs and Expectations in the Problem Solving Performance of Sixth Grade Pupils. In J. M. Moser (ed.). *Proceedings of the Sixth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for PME*, pp. 141-46. Madison, Wis..

Notas:

[1] Não é fácil a tradução de *beliefs*. Optámos por concepções, mas poderá ser também convicção ou crença.

[2] O grau de ensino de certa forma equivalente ao nosso 2º ciclo do ensino básico (ensino preparatório). Nos EUA este ciclo corresponde aos níveis de escolaridade 6-8.

[3] National Council of Teachers of Mathematics.

Tradução de Albano Silva
Esc. Prep. Marquesa de Alorna

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

No número anterior de "Educação e Matemática" propusemos este problema:

"Quantos números de nove algarismos são divisíveis por 11, admitindo que os algarismos são todos diferentes e nenhum deles é o zero?"

Apesar do curto espaço de tempo que passou entre a saída do número anterior e elaboração deste, chegaram-nos quatro respostas, da autoria de Alberto Canelas, Helena Rocha, Judite Barros e Orlando Freitas. As respostas seguem caminhos bastante parecidos. A versão de Helena Rocha é basicamente a que apresentamos, com ligeiras adaptações.

Um número é divisível por 11 se a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par for um múltiplo de 11.

No nosso caso, interessa-nos a diferença entre a soma dos 5 algarismos de ordem ímpar e a soma dos 4 de ordem par.

A soma de todos os nove algarismos é 45. A menor soma que é possível obter com 5 algarismos é 15 e a maior é 35.

Valores possíveis para a soma de		Diferença
5 alg	4 alg	
15	30	-15
16	29	-13
17	28	-11
18	27	-9
...	...	...
28	17	11
29	16	13
...	...	...
35	10	25
a	b	a-b

Com diferença múltipla de 11 surgem dois casos. Primeiro: os algarismos de ordem ímpar somam 17 e os de ordem par 28. Segundo: os de ordem ímpar somam 28 e os de ordem par 17.

1) Como obter 17 somando os 5 algarismos de ordem ímpar?

Só há duas possibilidades:

1 2 3 4 7
1 2 3 5 6.

2) Como obter 28 somando os 5 algarismos de ordem ímpar?

Há nove possibilidades:

1 3 7 8 9
1 4 6 8 9
1 5 6 7 9
2 3 6 8 9
2 4 5 8 9
2 4 6 7 9
2 5 6 7 8
3 4 5 7 9
3 4 6 7 8

Temos então um total de 11 conjuntos de 5 + 4 algarismos. Em cada conjunto, os 5 algarismos de ordem ímpar podem ser colocados de 5! = 120 maneiras diferentes. Analogamente, os 4 de ordem par podem dispôr-se de 4! = 24 maneiras.

Assim, o total de números nas condições exigidas é de

11x120x24 = **31680**.

Alberto Canelas chama a atenção para o facto de a resposta ser também um múltiplo de 11.

Judite Barros junta um programa em Turbo Pascal para confirmar, por exaustão, o resultado obtido e aproveita para indicar o número de soluções para os diversos casos em que se usam menos algarismos:

Dígitos	Soluções
1	0
12	0
123	2
1234	8
12345	0
123456	0
1234567	576
12345678	4608
123456789	31680.

José Paulo Viana

Problema proposto

A MORADA DA EDITE

Um admirador da Edite queria escrever-lhe no dia de S. Valentim. Tinham-lhe dito que ela morava na Praça de S. Marcos. Como não sabia o número, resolveu perguntar-lhe, ao que ela respondeu:

– Digo-te apenas que na minha praça as casas estão numeradas sequencialmente: 1, 2, 3, ... e que, por coincidência, a soma dos números de porta inferiores ao meu é igual à soma dos números superiores.

No dia seguinte o admirador foi ter com ela e disse-lhe:

– Preciso que me dês uma ideia sobre o tamanho da praça.

– É grande mas não é enorme.

Qual é a morada da Edite?

Vamos jogar

Hex da Multiplicação

Nº de Jogadores: 2 ou mais.
Material: Tabuleiro, calculadora e marcas de dois tipos diferentes.

Os jogadores dividem-se em duas equipas, A e B, que farão os seus lances alternadamente, tirando-se à sorte para ver quem começa.

Em cada lance, a equipa escolhe dois quaisquer dos "Números em Jogo" e multiplica-os.

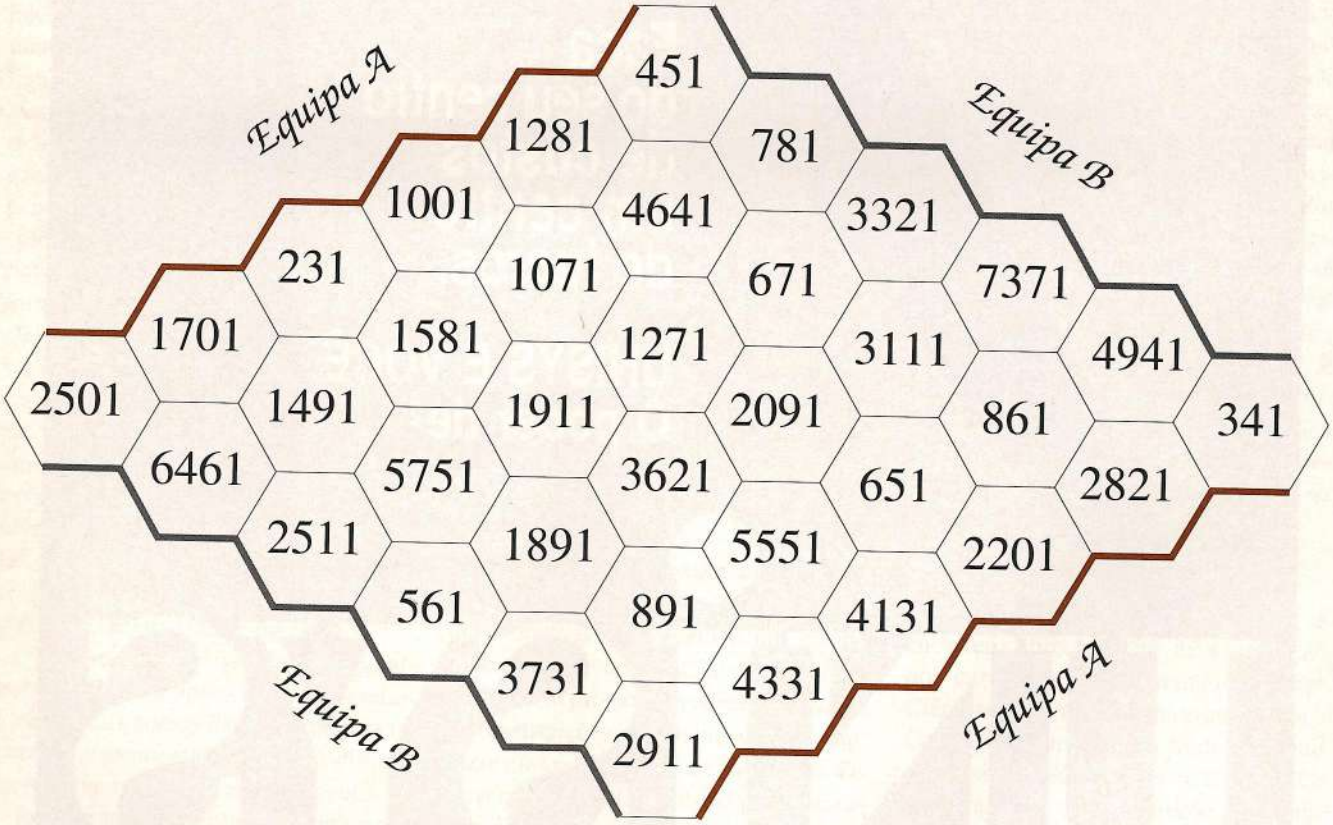
Se o resultado figurar numa casa livre do tabuleiro, a equipa coloca uma das suas marcas nessa casa. Se a casa já estiver ocupada, a equipa não pode colocar nenhuma marca. Em cada casa só pode ser colocada uma marca.

Ganha a equipa que conseguir ligar os seus dois bordos do tabuleiro com as marcas que colocou.

Números em jogo

11 31 51 71 91

21 41 61 81



(Adaptado de *Ideas from the Arithmetics Teacher*, N.C.T.M. e de *AlterMativas*, Núcleo APM de Almada-Seixal.)

A reforma curricular em Matemática noutros países: Dossier Internacional

Como foi anunciado no número anterior, continuamos a apresentação dos movimentos de reforma curricular no ensino da Matemática em diversos países, incluindo, desta vez no dossier internacional o caso da Venezuela. Contamos em próximos números retomar este dossier, dando conta dos rumos da educação matemática nos nossos dias, um pouco por todo o mundo.

Ensino das Matemáticas na Venezuela: Reforma na Escola Secundária

Júlio C. Mosquera P.

O objectivo deste artigo é o de apresentar alguns comentários acerca da reforma mais recente no ensino das matemáticas na escola secundária venezuelana. A análise das reformas nas matemáticas escolares na Venezuela está ligada a uma problemática mais geral associada à realização de mudanças curriculares em países com um currículo nacional. São as mudanças nas matemáticas motivadas por alterações no currículo nacional ou vice-versa? Será o currículo nacional um obstáculo para a reforma no ensino das matemáticas? Que alterações no currículo nacional devem ser realizadas como produto de mudanças no ensino das matemáticas? Quais são as verdadeiras forças que influenciam as mudanças no ensino das matemáticas? Neste trabalho não pretendemos oferecer respostas a todas estas perguntas. Cremos, no entanto, que é importante tê-las presentes nesta discussão acerca do caso específico da Venezuela.

Este artigo está dividido em três partes: na primeira apresentamos algumas ideias gerais acerca das matemáticas no currículo nacional, na segunda discutimos brevemente acerca dos agentes da reforma e na terceira apresentamos o que consideramos como as principais características da reforma.

As Matemáticas Escolares e o Currículo Nacional

Na Venezuela, todas as reformas no ensino das matemáticas têm sido acompanhadas de mudanças no currículo nacional ou, inclusivamente, de mudanças em todo o sistema escolar. Por exemplo, a implementação das matemáticas modernas durante os anos setenta foi realizada em simultaneo com mudanças importantes em todo o sistema educativo. O mesmo sucede com as reformas produzidas depois das matemáticas modernas, que nos países anglo-saxões se conheceram com o nome de *back-to-basics*. A situação neste momento não é muito diferente da de estas experiências anteriores.

A reforma educativa actual está, no entanto, acompanhada de alterações do sistema educativo de carácter administrativo mais importantes que em épocas anteriores. A Venezuela é um estado federal e o governo nacional está a levar a efeito um projecto de descentralização das instituições e agências do governo, entre elas o Ministério de Educação. Os governos dos estados estão pois a assumir progressivamente o controle administrativo do sistema educativo local, isto é, os governadores dos estados serão responsáveis pela administração do pessoal e dos recursos educativos. Simultaneamente o Ministério de Educação deseja aumentar a sua influência directa nas actividades académicas. Em alguns estados, como por exemplo no Estado Bolivar (Gobernación del Estado Bolivar, 1990), os governadores estão a tentar ganhar controlo sobre os conteúdos académicos e sobre o currículo locais. Por outras palavras, o Ministério de Educação tem como projecto o encarregar-se da matéria educativa aliviando-se do trabalho administrativo que passará agora para as mãos dos governos locais. É neste marco de descentralização administrativa e de centralização académica que a nova reforma no ensino das matemáticas está a ser levada a cabo na Venezuela.

Os Agentes da Mudança

O Ministério de Educação não se encarrega directamente da preparação dos currículos nas Matemáticas e nas Ciências Naturais, contando antes com o Centro Nacional para o Melhoramento do Ensino das Ciências (CENAMEC) que se encarrega desta função. Os membros deste instituto são professores do ensino secundário com muitos anos de experiência, professores universitários interessados em assuntos educativos e um reduzido número de especialistas com pós-graduação (mestrados e doutoramentos) no ensino das ciências e das matemáticas. A Coordenação das Matemáticas do CENAMEC é o grupo responsável perante o Ministério pela elaboração dos programas de matemáticas.

A nova reforma no ensino das matemáticas assemelha-se a reformas anteriores pelo seu carácter de reforma imposta do topo. O processo começou por uma ordem do Ministério ao CENAMEC para activar os seus mecanismos para iniciar o trabalho de preparação da reforma. Este enviou um inquérito sobre os alcances dos conteúdos a conhecidos especialistas (professores universitários, na sua marioria matemáticos), depois convocou cientistas e docentes para reuniões, e finalmente publicou um documento de trabalho. Este documento de trabalho, sem modificações substanciais, converteu-se no documento oficial apresentado pelo CENAMEC.

Principais Características da Reforma

Como vemos nesta breve exposição do processo, os docentes do ensino secundário não participaram como agentes da reforma e, uma vez mais, serão objecto de uma imposição de cima. Segundo esta perspectiva as professoras e os professores do ensino secundário são concebidos como meros implementadores do currículo. Para remediar esta situação os especialistas em didáctica das matemáticas têm que fazer um esforço para convencer os matemáticos e o pessoal do Ministério de que os docentes são agentes activos que pensam e que podem ser capazes de levar a cabo uma reforma educativa em coordenação com os "peritos".

A maioria dos estudantes que ingressam no ensino secundário na Venezuela tem como principal meta o ingresso nas universidades e pode dizer-se que os programas para o ensino das matemáticas neste nível são planeados com esta mesma finalidade, isto é, proporcionar um ensino das matemáticas que esteja relacionada com as matemáticas que se estudam na universidade. O ensino das matemáticas no ensino secundário não forma, pois, um sistema em si mesmo com um objectivo particular. Estudam-se as matemáticas hoje pensando nas matemáticas que se estudarão nos próximos anos.

É importante fazer notar que, neste artigo, utilizamos o termo *as matemáticas*, no plural, enquanto que na linguagem do Ministério e do CENAMEC se utiliza o termo *matemática*, no singular. Isto reflecte em parte na concepção das matemáticas predominante entre os peritos e os docentes que cooperam com esta instituição. Este conceito revela-se na lista das atitudes e dos valores que se espera que os estudantes desenvolvam durante o estudo das matemáticas. Estes são:

- Valorizar a verdade, a objectividade e a equidade;
- Valorizar a importância de ser crítico;
- Aprender a separar o importante do secundário;
- Compreender a necessidade e a importância da formalização científica e do desenvolvimento da capacidade para discernir. (CENAMEC, 1990, p. 1)

Ainda mais relevantes, neste sentido, são as finalidades do ensino das matemáticas adoptadas pelo CENAMEC, tomadas do trabalho de Gerard Vergnaud, entre as quais encontramos: "A transmissão do património científico" (Vergnaud, 1987, citado no CENAMEC, 1990, p.1). Podemos concluir que, quanto aos objectivos gerais da reforma, não há muita diferença em relação às reformas anteriores.

Vejamos o que sucede em matéria do conteúdo. A escola secundária compõem-se de um período de dois anos, no caso de Ciências, e de três anos no caso do Ensino Profissional. O programa de dois anos inclui, segundo os novos programas, um total de dez unidades, cinco em cada ano. As unidades do primeiro ano são: Funções Reais, Trigonometria, Vectores no Plano, o Conjunto C dos Números Complexos, Progressões. As unidades do segundo ano são: O Espaço Vectorial R^3, Polinómios, Inequações, Geometria e Probalidades, Estatísticas e Teoria Combinatória. A descrição de cada uma das unidades está dividida em quatro secções. Na primeira secção apresenta-se uma descrição geral da unidade, na segunda os objectivos, na terceira o conteúdo e na quarta algumas sugestões metodológicas.

Observemos alguns exemplos retirados da unidade Vectores no Plano. Entre os objectivos enuncia-se que "o estudante... seja capaz de definir vectores livres" (CENAMEC, 1990, p. 11). Na secção de conteúdos encontramos entre outros: vectores fixos, vectores livres, grandezas vectoriais e escalares, operações com vectores, dependência e independência linear e a sua interpretação geométrica, norma de um vector e vector unitário. Entre as sugestões metodológicas mencionam-se que: "Em geral, o estudo dos vectores no plano, deve facilitar ao aluno a aplicação destes conceitos no estudo da Física" (CENAMEC, 1990, p. 11).

Ao finalizar os estudos da matemática do ensino secundário o estudante terá, segundo o CENAMEC, uma formação integral nesta disciplina que lhe permitirá, entre outras coisas:

- Desenvolver uma estratégia metodológica centrada na resolução de problemas;
- Compreender a sequência lógica e o desenvolvimento do conhecimento abstracto que lhe propociona a Matemática;
- Motivar e consolidar a sua formação científica;
- Desenvolver uma atitude favorável para com a Matemática (p. 5).

Não é necessário muito esforço para reconhecer nestes exemplos elementos das reformas das matemáticas anteriores, isto é, da Matemática Moderna e do *back-to-basics*.

Antes de finalizar, apresentaremos outros detalhes importantes na reforma do ensino das matemáticas na Escola Secundária.

Problemas com Enunciado e de Aplicação. Somente numa ocasião se menciona no documento do CENAMEC a resolução de problemas com enunciado, a saber, na Unidade V do segundo ano (Probalidade, Estatística e Teoria Combinatória). O uso de aplicações é mencionado duas vezes: uma no contexto do estudo das cónicas, sem apresentar maiores detalhes; e uma outra na unidade onde se incluem os vectores, as transformações lineares, as matrizes e os determinantes, tratando-se, neste caso de aplicações a outras áreas da Matemática.

Integração dos conteúdos. Menciona-se em poucas ocasiões a importância de integrar os conteúdos de uma unidade nos conteúdos tratados em outras unidades. Em duas ocasiões se menciona a necessidade de integrar certos tópicos, como os vectores livres, em problemas de Física e no uso de papel logarítmico e semilogarítmico na Química.

Calculadoras e Computadores. As calculadoras são mencionadas em dois pontos. No primeiro, faz-se a observação de que devido à disponibilidade de calculadoras o estudo das tabelas logarítmicas e os cálculos utilizando logaritmos foram eliminados do programa. No segundo, menciona-se que o estudante deverá utilizar a calculadora para a avaliação de funções trigonométricas de argumentos que não sejam ângulos notáveis. O uso do computador não é mencionado em nenhuma parte do documento do CENAMEC.

Fundamentação Psicológica. No currículo oficial de Matemáticas para o Terceiro Ciclo da Educação Básica, assim como nos currículos para os outros ciclos, menciona-se a teoria dos níveis de desenvolvimento de Piaget como a teoria psicológica que serve de fundamentação. Pelo contrário, no documento do CENAMEC para a educação secundária não se menciona explicitamente nenhuma teoria psicológica ou de aprendizagem.

Conclusões

Em nosso parecer esta nova reforma do ensino das matemáticas na escola secundária venezuelana é motivada por mudanças mais gerais que se estão levando a cabo no sistema educativo. Estas mudanças nas matemáticas escolares não respondem pois, necessariamente, a novas tendências na disciplina ou a resultados da avaliação do estado do ensino das matemáticas no país e são, antes, uma resposta a pedidos educativos do ministério. Esta reforma apresenta características semelhantes a reformas anteriores. Neste sentido, faz-se notar a ausência de uma comunidade científica em didáctica das matemáticas. Esta situação poderia mudar num futuro próximo. Esperemos que uma reforma baseada em princípios globais, tais como as aplicações das matemáticas e a experimentação em matemáticas, lideradas por especialistas em didáctica das matemáticas em cooperação com os docentes do ensino secundário, se possa realizar na Venezuela antes do começo do próximo século.

Referências

Centro para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias (1990). *Programa de articulación contenidos de matemática para la educación media, diversificada y profesional (EMDP). Mención Ciencias.* Caracas: CENAMEC.

Gobernación del Estado Bolivar (1990). *Plan de desarollo Sector Educativo 1991-1993.* Ciudad Bolivar: Gobernación del Estado Bolivar.

Vergnaud, G. (1987). Refléxions sur les finalités de l'enseignement des mathématiques. *Gazette des Mathematiciens, 32.*

Júlio C. Mosquera P.
Universidade Central da Venezuela
Universidade da Geórgia, EUA
Tradução de Florbela Cunha
Revisão de José Manuel Matos

III Seminário de Investigação em Educação Matemática

No âmbito do 8º Encontro Nacional de Professores de Matemática - PROFMAT 92, realizar-se-á nos dias 2 e 3 de Novembro do corrente ano, nas instalações da Escola Superior de Educação de Viseu, o **III Seminário de Investigação em Educação Matemática.**

Este Seminário, da responsabilidade da APM, tem como principal objectivo reunir as pessoas que se dedicam à investigação em Educação Matemática, divulgando trabalhos que têm vindo a ser desenvolvidos e criando um espaço de comunicação entre os investigadores desta área. Espera-se que neste seminário sejam divulgados os trabalhos de investigação concluídos recentemente ou que estejam em fase de desenvolvimento, nomeadamente Teses de Mestrado, Doutoramento ou Projectos de Investigação.

O Seminário, além do espaço dedicado a este tipo de comunicações, prevê ainda a inclusão de um espaço para debate alargado a vários grupos de investigação.

As fichas de inscrição podem ser solicitadas pelos investigadores interessados para a morada abaixo indicada e deverão ser enviadas até 31 de Maio de 1992.

Qualquer pedido de esclarecimento poderá ser dirigido a:

José Manuel Matos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL
2825 MONTE DA CAPARICA
ou pelos telefones 800080 (J.M.Matos) e 2746393 (A.M.Domingos)

Índice dos números 9 a 20

Editados que são os vinte primeiros números de *Educação e Matemática*, correspondendo aos seus cinco primeiros anos de existência (feitos em Janeiro passado, lembram-se?), apresenta-se, no primeiro número de 1992, um índice das principais contribuições publicadas desde o número 9. Relativamente aos primeiros oito números de *Educação e Matemática*, existe também um índice do mesmo tipo publicado no referido número 9, sob o título "Dois anos passados".

Também desta vez se optou por um índice organizado por temas, apresentando, em cada caso, as contribuições mais directamente relacionadas com esse tema. Cada referência contém, por esta ordem, o título, o autor e o ano de publicação, a que se segue a indicação da revista e páginas em que foi publicada.

A reforma educativa e os novos programas foi, naturalmente, um tema forte, especialmente tratado no número duplo 19/20, recentemente editado. Em relação ao *índice* anterior, surgem ainda novos temas: "Utilização da máquina de calcular", "Funções" e "Vida Associativa". Não aparecem desta vez, como temas autónomos, "Probabilidades e Estatística", "A Matemática na animação escolar" e "Materiais para a aula de Matemática". No que diz respeito a este último tema, optou-se, desta vez, por referir, em conjunto, as "fichas de trabalho", publicadas na secção da revista com este nome, no tema "Utilização de materiais", existindo casos de algumas fichas que também são referidas em outros dos temas escolhidos.

Henrique M. Guimarães

Reforma Educativa. Novos programas de Matemática

Opções curriculares

Resolução de problemas

de *Educação e Matemática*

Um passeio pela cidade
Bernardes, A. (1991) — *EM 18*, pp. 10-12
O concurso de problemas do ProfMat 91
Viana, J. P. (1991) — *EM 19/20*, pp. 60

Algumas secções da revista, "Dia-a-Dia com a Matemática" (EM 9 a 12), "O problema do trimestre" e "Materiais para a aula de Matemática", incluiram também, com regularidade, problemas e resolução de problemas.

Utilização do computador

Computadores e Probabilidades
Matos, J. F. (1989) — *EM 9*, pp. 7-10
A minha primeira experiência de computador na sala de aula
Costa, M. J. (1989) — *EM 10*, pp. 25-27
Modelos, aplicações da Matemática e computadores: o exemplo dos autómatos celulares
Matos, J. F. (1989) — *EM 12*, pp. 17-22
Hexatris
Moreira, L. (1990) — *EM 14*, pp. 13-14
Funções e folha de cálculo
Capelão, M. T. e Martins, M. da P. (1990) — *EM 15*, pp. 23-26
Funções periódicas na folha de cálculo
Carreira, S. (1991) — *EM 17*, pp. 3-9
Um modelo matemático
Furtado, J. F. e Rei, N. (1991) — *EM 18*, pp. 23-26

Foram ainda publicados em secções da revista:

Um procedimento de cada vez — random, por acaso
Matos, J. F. (1989) — *EM 9*, pp. 20
Um procedimento de cada vez — Tell e os que tiveram à mão de semear
Nunes, F. (1989) — *EM 10*, pp. 28
Um procedimento de cada vez: diálogos com a tartaruga
Junqueira, M. e Valente, S. (1989) — *EM 11*, pp. 29-30
Uma aplicação do processamento de listas
Matos, J. F. (1989) — *EM 12*, pp. 35, 38
Diálogos com a tartaruga?! (versão 2.0)
Junqueira, M. e Valente, S. (1990) — *EM 14*, pp. 35
Estrelas pulsantes
Carreira, S. (1991) — *EM 18*, pp. 13-14

Utilização da máquina de calcular

Actividades com calculadoras
Veloso, G. (1989) — *EM 9*, pp. 25
A propósito da utilização da máquina de calcular: uma entrevista
Guimarães, H. M. (1989) — *EM 11*, pp. 13-16
A calculadora e o processo de ensino/aprendizagem
Ponte, J. (1989) — *EM 11*, pp.1-2
A calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem
Reys, B. J. (1989) — *EM 11*, pp. 19-21
Calculadoras na educação matemática: contributos para uma reflexão
Silva, A. V. (1989) — *EM 11*, pp. 3-6
A calculadora como ferramenta na resolução de problemas
Veloso, G. (1989) — *EM 11*, pp. 11-12
Utilizando a tecla % da calculadora
Veloso, G. (1989) — *EM 11*, pp. 23
Uso das calculadoras em trigonometria
Coelho, A. (1990) — *EM 15*, pp. 29-30
Calculadoras gráficas — mais um desafio para renovar os currículos de Matemática
Veloso, G. (1990) — *EM 16*, pp. 3-7

Utilização de materiais

Trigonometria... com um pouco de sorte
Baltazar, A. e Delgado, F. (1989) — *EM 11*, pp. 31
Construção de materiais manipulativos
Fonseca, L. et al. (1990) — *EM 13*, pp. 9-12
Geometria no espaço e materiais no 7º ano
Leal, L. C. e Veloso, E. (1990) — *EM 13*, pp. 13-14
A aprendizagem do número: que exercícios? que materiais?
Marchand, H. d'O. (1990) — *EM 13*, pp. 3-7
Um lugar para o geoplano no ensino da Geometria
Ponte, C. (1990) — *EM 13*, pp. 16-18
Os materiais e o ensino da Matemática
Serrazina, M. L. (1990) — *EM 13*, pp. 1
Construa você mesmo
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1990) — *EM 13*, pp. 34-37
Uma Matemática diferente
Dekker, R. (1990) — *EM 14*, pp. 9-10
Mira: um novo material para o ensino da Geometria
Fonseca, L. et al. (1990) — *EM 14*, pp. 15-16
Hexatris
Moreira, L. (1990) — *EM 14*, pp. 13-14
Vamos estimar
Bóia, M. J. e Oliveira, M. J. C. (1991) — *EM 19/20*, pp. 43-45

Na secção "Materiais para a aula de Matemática" foram publicadas, prontas para serem fotocopiadas e utilizadas com os alunos as seguintes fichas de trabalho, algumas das quais implicando a utilização de materiais:

Actividades com calculadoras
Veloso, G. (1989) — *EM 9*, pp. 25
Utilizando a tecla % da calculadora
Veloso, G. (1989) — *EM 11*, pp. 23
Um caminho de ferro económico
Viana, J. P. (1989) — *EM 12*, pp. 29-30
Pitágoras com cerca
Natal, A. P. (1990) — *EM 13*, pp. 33
Corrida de obstáculos
Barandela, T. (1990) — *EM 14*, pp. 33
Um estudo sobre o clima
Abrantes, P. (1990) — *EM 15*, pp. 27-28
Actividades com o tangran
Osório, H. (1990) — *EM 16*, pp. 19-20
Que desporto?
Abrantes, P. (1991) — *EM 17*, pp. 15
Estrelas pulsantes
Carreira, S. (1991) — *EM 18*, pp. 13-14
As folhas de papel e as semelhanças
Janeiro, J. (1991) — *EM 19/20*, pp. 41

Caberá bem aqui a referência à publicação de jogos, quase sempre na secção "Vamos jogar":

Sobe e desce; par ou ímpar
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1989) — *EM 11*, pp. 24-25
Jogo topológico de Black
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1989) — *EM 12*, pp. 37
Numeração
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1990) — *EM 13*, pp. 37
Corrida de obstáculos
Barandela, T. (1990) — *EM 14*, pp. 33
Polícia e ladrão; A ovelha e os lobos
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1990) — *EM 14*, pp. 31
Linha
Viana, J. P., Teixeira, P. e Vieira, R. (1990) — *EM 15*, pp. 17
À procura de quadrados
Ribeiro, R. (1990) — *EM 16*, pp. 11
Esta carola não pára
Barbosa, M. T., Pires, M. P. e Granês, C. (1991) — *EM 17*, pp. 11
O jogo icosiano e o problema do cavalo
Oliveira, P. (1991) — *EM 18*, pp. 27

Matemática e realidade

As aplicações da Matemática em foco
Moreira, L. (1989) — *EM 10*, pp. 1
Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária
Abrantes, P. (1989) — *EM 12*, pp. 3-6
Uma corrida de 400 metros
Amorim, I. et al. (1989) — *EM 12*, pp. 13-15
Finalidades e alcance das aplicações e modelos nos currículos de Matemática
Niss, M. (1989) — *EM 12*, pp. 31-34

Continuação do índice dos números 9 a 20

As gerações e os campos
Veloso, E. (1989) — *EM 12*, pp. 1-2
Aplicações na Matemática escolar em discussão no ProfMat 89
Vieira, A. e Abrantes, P. (1989) — *EM 12*, pp. 22
Fibonacci e a natureza
Amado, M. F. e Rocha, I. A. (1990) — *EM 14*, pp. 3-6
Trânsito, casa e lógica
Coelho, A. (1990) — *EM 14*, pp. 21
Novas aplicações da "Matemática incerta" (Matemática?)
Matos, J. F. (1990) — *EM 14*, pp. 11

Geometria

As mais belas rectas do mundo
Bensabat, F. (1989) — *EM 10*, pp. 7-10
Geometria no espaço no 7º ano
Leal, L. C. e Veloso, E. (1990) — *EM 13*, pp. 13-14
Um lugar para o geoplano no ensino da Geometria
Ponte, C. (1990) — *EM 13*, pp. 16-18
Mira: um novo material para o ensino da Geometria
Fonseca, L. et al. (1990) — *EM 14*, pp. 15-16
Hexatris
Moreira, L. (1990) — *EM 14*, pp. 13-14
Iguais, geometricamente iguais ou simplesmente... congruentes?
Veloso, E. (1991) — *EM 18*, pp. 26

Em secções da revista, directamente relacionado com o tema Geometria, foi ainda publicado:

Aproximações ao infinito com Escher
Loureiro, C. (1990) — *EM 13*, pp. 38-39
Pitágoras com cerca
Natal, A. P. (1990) — *EM 13*, pp. 33
Respostas recebidas: o penúltimo problema do trimestre
Viana, J. P. (1990) — *EM 14*, pp. 27-30
Sobre as respostas ao problema anterior
Viana, J. P. (1990) — *EM 15*, pp. 18-19
Actividades com o tangran
Osório, H. (1990) — *EM 16*, pp. 19-20

Funções

Códigos e mensagens
Frias, C. (1989) — *EM 12*, pp. 23-24
Funções e folha de cálculo
Capelão, M. T. e Martins, M. da P. (1990) — *EM 15*, pp. 23-26
O método das coordenadas e o conceito de função
Dieudonné, J. (1990) — *EM 15*, pp. 10
Funções no terceiro ciclo do ensino básico: uma possível abordagem...
Leal, L. C. (1990) — *EM 15*, pp. 13-16
Na peugada de Galileu
Moreira, L. (1990) — *EM 15*, pp. 1
O conceito de função no currículo de Matemática
Ponte, J. P. (1990) — *EM 15*, pp. 3-9
Funções "escondidas"
Loureiro, C. e Oliveira, M. J. C. (1990) — *EM 16*, pp. 9-10
Os alicerces do pensamento algébrico
Moreira, L. (1990) — *EM 16*, pp. 17-18
Sim e não (ou talvez)
Ponte, J. P. (1990) — *EM 16*, pp. 14-15
Sim, sim, mas...
Veloso, E. (1990) — *EM 16*, pp. 13-14
Funções periódicas na folha de cálculo
Carreira, S. (1991) — *EM 17*, pp. 3-9

Na secção "Materiais para a aula de Matemática", com relação directa com o tema das funções, foi ainda publicado:

Um estudo sobre o clima
Abrantes, P. (1990) — *EM 15*, pp. 27-28
Que desporto?
Abrantes, P. (1991) — *EM 17*, pp. 15
Estrelas pulsantes
Carreira, S. (1991) — *EM 18*, pp. 13-14

Outros temas

Foram ainda publicadas contribuições sobre temas como Estatística e Probabilidades e Manuais de Matemática, sobre questões como o problema da formação de professores, as finalidades do ensino da matemática e a avaliação e ainda sobre temas mais específicos:

Estatística nas aulas do 7º ano de escolaridade
Silva, M. C. (1989) — *EM 9*, pp. 3-6
Medir a sorte ou o azar? Porque não uma actividade para o ensino da Matemática do 2º ciclo?
Bernardes, O. (1989) — *EM 9*, pp. 11-12
Porquê ensinar estatística e probabilidades
Pereira-Mendonza, L. e Swift, J. (1989) — *EM 9*, pp. 17-18
Que papel para os manuais de matemática: uma sondagem junto dos autores
Guimarães, H. M. e Esteves, P. (1990) — *EM 13*, pp. 21-25
Manuais escolares no Ensino Primário
Vieira, J. D. (1990) — *EM 13*, pp. 19-20
Que manuais vamos ter
Ribeiro, R. (1991) — *EM 18*, pp. 15-16
Por uma visão não instrumentalista da Matemática
Guimarães, H. M. (1989) — *EM 12*, pp. 11-12
É preciso avisar toda a gente
Moreira, L. (1990) — *EM 14*, pp. 1
1º grupo do Ensino Secundário: o passado recente, o presente e o futuro
Abrantes, P. (1991) — *EM 17*, pp. 19-23
Uma espécie em vias de extinção
Carvalho, R. F. (1991) — *EM 17*, pp. 1
José Anastácio da Cunha — Um matemático português do período barroco
Costa, M. J. (1990) — *EM 16*, pp. 21-26
Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas...
Abrantes, P. (1990) — EM 16, pp. 1
Um mágico quadrado mágico
Moreira, L. (1989) — *EM 11*, pp. 27-30
Estimativa? Estimação?
Costa, L. B. (1990) — *EM 14*, pp. 30
O número de ouro e as suas propriedades: uma actividade com alunos
Gaspar, G. (1991) — *EM 19/20*, pp. 47-48
Um ProfMat à americana
Veloso, E. (1991) — *EM 18*, pp. 3-7

Textos seleccionados

Na secção "Para este número seleccionámos", foram publicados, em tradução, os seguintes textos, quase todos já referidos nos temas anteriores:

Porquê ensinar estatística e probabilidades
Pereira-Mendonza, L. e Swift, J. (1989) — *EM 9*, pp. 17-18
A calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem
Reys, B. J. (1989) — *EM 11*, pp. 19-21
Finalidades e alcance das aplicações e modelos nos currículos de Matemática
Niss, M. (1989) — *EM 12*, pp. 31-34
A matemática essencial para o século XXI
NCTM (1990) — *EM 14*, pp. 23-25
O método das coordenadas e o conceito de função
Dieudonné, J. (1990) — *EM 15*, pp. 10
A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças
Yackel, E. et al. (1991) — *EM 18*, pp. 17-21

Índice dos números 1 a 9

No que diz respeito ao índice relativo aos números 1 a 9, existe um do mesmo tipo deste, que foi publicado no nº 9 de *Educação e Matemática*, sob o título "Dois anos passados".

índice