Educação e Matemática

Nº 18

2º trimestre de 1991

Porto
ProfMat 91

400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Os *Standards* em tradução portuguesa

Em 1989 o NCTM (*Nacional Council of Teachers of Mathematics*) publica nos Estados Unidos os *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* onde se apresenta um conjunto de normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar desde a pré-primária até aos doze anos de escolaridade. Logo nesse ano, considerando a grande importância desta obra, a APM conseguiu, junto do NCTM, os direitos para a sua publicação em língua portuguesa. Começou assim um processo que haveria de durar mais do que desejávamos mas que, finalmente, temos a satisfação de ver terminado: a tradução e revisão, a paginação e arranjo gráfico, e, por último, a impressão. Tendo sido contactado nesse sentido, e reconhecendo o grande interesse dessa publicação, o Instituto de Inovação Educacional aceitou a co-edição com a APM o que possibilitou uma edição maior e de melhor qualidade e permitirá, certamente, a sua divulgação mais alargada.

As **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar** - título da edição portuguesa - constituem uma proposta global para o ensino e aprendizagem da Matemática ao longo de doze anos onde é apresentado o conteúdo matemático para ser trabalhado durante esses anos, o que se espera que os alunos realizem no estudo desse conteúdo e o que os professores devem fazer para auxiliar os alunos neste trabalho. São apresentados e desenvolvidos muitos exemplos de situações de aprendizagem de modo a tornar mais claro o que em cada norma se defende para a Matemática escolar. Não se pretende com a publicação destas normas, como disse um dos autores, "prescrever" um currículo mas "descrever uma visão para a Matemática escolar" visando, como se diz na introdução, que os alunos de hoje "se tornem cidadãos produtivos e auto-realizados no próximo século".

Neste número colaboraram

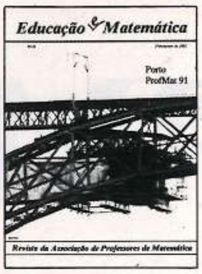
César Augusto Viana, J. Francisco Furtado, Lurdes Serrazina, Margarida Belchior, Nuno Rei e Paulo Oliveira.

Sobre a capa

A fotografia da capa foi obtida a partir do cartaz que anuncia o ProfMat91 a ter lugar na cidade do Porto, no próximo mês de Outubro. Para além de consideraramos que se trata de uma interessante composição visual da ponte *nova* e de uma das pontes *velhas* que atravessam o rio Douro, foi escolhida pensando que este número de *Educação e Matemática* será distribuido em primeira mão no ProfMat.

Data de publicação

Este número foi publicado em Outubro de 1991.



nº 18
2º trimestre
de 1991

De novo reunidos...

Eduardo Veloso

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
António Bernardes
Henrique M. Guimarães
José Manuel Matos
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Gabinete Técnico da APM

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Av. 24 de Julho, 134 - 4º
1300 Lisboa

A preparação da arte final foi executada num Mac II, cedido à APM pela Interlog, SA.

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Dentro de dias, largas centenas de professores de Matemática estarão de novo reunidos no encontro anual promovido pela APM. Cabe perguntar: o que move os professores de Matemática? que razões para esta afluência crescente?

É um facto que as nossas reuniões anuais oferecem inúmeras ocasiões para a criação de novas amizades e para o fortalecimento de outras mais antigas. Depois, ao longo do ano, é a dispersão inevitável, e mesmo os que vivem ou trabalham em locais próximos apenas se cruzam, não se encontram. Por isso, ao fim de um ano, trata-se do prazer do reencontro, sem mais. Uma primeira razão...

Por outro lado, poder-se-á dizer que tanto os novos sócios como os "veteranos" querem saber que novidades vão aparecer no sector das publicações, que novos materiais e ideias estarão presentes na Feira de Ideias e Materiais, e até mesmo quem será eleito para a futura direcção da Associação.

Pese embora estas explicações, julgo que a situação de profundo desencanto a que um grande número de professores tem vindo a chegar, aliada à expectativa criada pelos futuros programas, tem provocado um forte estímulo no sentido da participação em realizações onde possam exprimir as suas preocupações, tentar encontrar em comum soluções para os problemas educativos relativos à matemática, e procurar meios de formação para enfrentar os desafios que inevitavelmente qualquer reforma vai colocar. Eu diria portanto que o que leva muitos de nós a "não perder" um Profmat é, conscientemente ou não, sentirmos que não nos podemos dar ao luxo de desprezarmos os poucos momentos ricos de formação que temos ao nosso dispor, e as várias actividades incluídas nos PROFMAT são exemplo disso. De resto, a formação contínua, e neste momento particular a formação tendo em vista os futuros programas, é tema recorrente nas discussões entre os professores de Matemática. Afirma-se frequentemente que sem formação dos professores, todas as mudanças positivas que os novos programas propõem — para muitos de nós mesmo assim ambíguas e de escassa amplitude — serão letra morta. No entanto, propostas concretas sobre o modelo de formação apropriado para essa formação escasseiam. Não se conhece o que o Ministério da Educação pretende fazer, e até se tem dúvidas se existe algum plano, dado o carácter aparentemente improvisado das poucas iniciativas que vai tomando. Por outro lado, quando se ouve falar alguns professores, fica-se com a sensação que eles consideram que uma solução possível para o problema seria a organização pelo Ministério de cursos de actualização por todo o país, de uma ou duas semanas, em que poderia ser adoptado um sistema em escada — os autores dos programas formavam uns tantos professores, cada um destes formava outros tantos, e através de um crescimento exponencial rapidamente seriam atingidos todos os professores existentes... Mas isto é uma miragem, não apenas porque seria impraticável, mas sobretudo porque esse não é um modelo de formação para a mudança das práticas pedagógicas dos professores, como se deve pretender, mas um modelo administrativo de formação, que apenas teria como possível "benefício" tranquilizar a consciência do Ministério da Educação — se é que os ministérios têm consciência.

Devemos procurar outros modelos de formação, e sobre isso o que há a fazer em primeiro lugar é ler com atenção a magnífica intervenção de Rui Canário na sessão de abertura do PROFMAT 90, e que tratou precisamente dos modelos de formação contínua. Esse texto, que consta do 2º volume das actas desse encontro, deve ser lido na íntegra. Direi apenas que num modelo de formação que não seja "de cima para baixo", mas que tenha por centro a escola e por motor o dinamismo a a iniciativa dos professores, estes poderiam reencontrar, ao longo do ano e em múltiplas ocasiões, os mesmos momentos ricos de formação e de partilha de experiências que agora procuram nos Profmats. Tratar-se-ia depois, nos encontros anuais e regionais da APM, de pôr em comum essa experiência acrescida.

Publicações APM

Lógica e Aritmética

Augusto Franco de Oliveira

Co-edição APM/Gradiva
30% de desconto aos sócios da APM
Pedidos à Gradiva - Publicações Lda.

Dia-a-dia com a Matemática

Agenda do Professor 1991/1992
Cristina Viegas, Graça Mota, José Cardoso
Teresa Pereira, Pedro Pimentel e Rosário Reis

1ª Edição, Julho 1991, 144 pp.
550$00 (sócios 400$00)

O Computador na Educação Matemática

Cadernos de Educação e Matemática nº 2
Organização de João Pedro Ponte

1ª Edição, Junho de 1991, 112 pp.
800$00 (sócios 600$00)

Um Profmat à americana...

Eduardo Veloso

Uma vez na vida temos que ir à reunião anual do National Council of Teachers of Mathematics, a APM dos americanos... Uma pessoa já imagina um pouco como será... Mas, apesar de tudo, três dias no meio de dez mil e tal professores e de 750 comunicações, *workshops* e reuniões de vários tipos, excede a nossa imaginação! E ainda por cima em New Orleans, na terra do Louis Daniel "Satchmo" Armstrong. Oh! my God!

A reunião do NCTM durou três dias e meio — nisso é igual ao PROFMAT... — de 17 a 20 de Abril, mas no dia 12 eu já estava, está claro, em New York. Dormi em Long Island, em casa de um amigo, e o resto do tempo passeei, fui a livrarias e a lojas de software e a alguns museus. Contrariamente ao que transparece de alguns filmes e ao que muitos imaginam, New York é uma cidade agradável, calma, onde as pessoas não se agridem. Os autocarros "ajoelham" — são os chamados *kneeling bus* — colocando o estribo junto do chão para as pessoas mais idosas entrarem com facilidade, arrancam só depois das pessoas estarem acomodadas e devagar, e travam com cuidado. O motorista responde com simpatia às perguntas que lhe fazemos, e deseja-nos *a good day in New York*! Nas lojas, não dá ideia que nos estão a fazer um favor quando queremos comprar alguma coisa — e até ficam tristes quando não têm o que pedimos, fazendo um esforço para descobrir onde o poderemos encontrar. E então as livrarias são um paraíso! Ar condicionado, muitas vezes uma cadeira para folhearmos os livros, por vezes até um pequeno café dentro da livraria.

Na Barnes & Nobles, a "maior livraria do mundo", como não podia deixar de ser nos Estados Unidos..., encontramos praticamente tudo o que queremos e que tenha saído recentemente. Não comprei muita coisa, pois sabia que na reunião do NCTM havia imensas possibilidades, possivelmente com desconto para os sócios. Mesmo assim, não resisti ao livro de Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, e a um livro de que tinha ouvido falar e que não conhecia, *Philosophy of Mathematics*, uma selecção de textos organizada por Paul Benacerrat e Hylary Putnam. A livraria fica perto de Greenwich Village, um bairro de estudantes e artistas junto da Universidade de New York. Há uns anos Greenwich Village, embora com casas muito bonitas e antigas, estava muito degradado. Verifiquei com surpresa que o ambiente tinha mudado, que tinham sido feitas obras de restauro em muitas fachadas, e que as ruas estavam impecavelmente limpas, com pequenos jardins bem arranjados por toda a parte e muitas flores. Constatei que New York já está na curva ascendente, em relação à qualidade de vida nas cidades, e fiquei um pouco triste ao pensar que nós, em Lisboa e noutras cidades portuguesas, continuamos a descer...

O avião da TWA em que segui de New York para New Orleans ia quase cheio. Preparei-me para cinco horas e tal de viagem, colocando ao meu lado o livro do Polya e o programa do Encontro Anual do NCTM.

George Polya (1887-1985) foi um matemático e professor húngaro que trabalhou durante largos anos da sua vida nos Estados Unidos. É conhecido sobretudo através de *How to Solve It?*, um livro em que expõe magistralmente, embora de forma resumida, as suas ideias sobre a resolução de problemas. Muito citada e difundida, traduzida em numerosas línguas, incluindo o português numa versão publicada no Brasil, esta obra de Polya contribuiu decisivamente para colocar a resolução de problemas no centro das atenções das várias correntes que têm procurado renovar a matemática escolar nas últimas décadas. O livro *Mathematics and Plausible Reasoning* foi publicado pela primeira vez em 1954, pela Princeton University Press, e significativamente está agora na 12ª edição, a primeira em *paperback*. Sobre o que significa o título do livro — de onde se pode inferir o conteúdo do mesmo — nada melhor do que deixar falar o próprio Polya:

> "Falando em sentido estrito, todo o nosso conhecimento fora da matemática e da lógica (a qual é, de facto, uma parte da matemática) consiste em conjecturas. Existem, está claro, conjecturas e conjecturas. Existem conjecturas muito respeitáveis e de confiança como aquelas que são expressas pelas leis da física. Mas há também outras, nem respeitáveis nem de confiança, algumas das quais nos enchem de raiva quando as lemos num jornal. E no meio existe todo o tipo de conjecturas, "bocas" e hipóteses.
>
> Asseguramos os nossos conhecimentos matemáticos através do *raciocínio demonstrativo*, mas apoiamos as nossas conjecturas por meio do *raciocínio plausível*. Uma demonstração matemática é raciocínio demonstrativo, mas a evidência inductiva do físico, a evidência circunstancial do advogado, a evidência documental do historiador e a evidência estatística do economista pertencem ao raciocínio plausível.
>
> [...]
>
> Toda a gente sabe que a matemática oferece uma oportunidade excelente para aprender o raciocínio demonstrativo, mas afirmo que não existe outro assunto do currículo escolar que se preste tanto à aprendizagem do raciocínio plausível. Dirijo-me [neste livro] aos estudantes interessados de Matemática de todos os níveis e digo-lhes: está claro, vamos aprender a demonstrar, mas vamos também *aprender a fazer tentativas*."

Depois de folhear durante algum tempo os dois volumes deste interessante livro, e de pensar quanto seria bom estar traduzido em português, decidi-me a atacar o programa do encontro do NCTM. O encontro ia decorrer de quarta a sábado de manhã (como nos Profmat's) e a recepção estaria aberta durante a tarde de terça e depois a partir das 7 (sim, sim, sete..) da manhã de quarta-feira. O pavilhão de exposições estaria aberto todos os dias a partir das 8 da manhã. Quanto ao resto, já imaginava que iria ser difícil fazer uma escolha entre as múltiplas sessões paralelas que deviam existir, mas mesmo assim foi com surpresa que percebi a dimensão do meu problema! As sessões de vários tipos tinham uma numeração única corrida, e fui logo ver à última página do programa quantas sessões havia ao todo: 751!!! Por exemplo, na quarta feira, às 8.30 da manhã havia 18 sessões e logo às 9 começavam mais 14 e em seguida às 9.30 mais outras... Bom, e durante os quatro dias iria ser sempre assim!

Dois tipos de sessões requeriam inscrições adiantadas, e infelizmente eu estava excluído delas, pois só tinha recebido os boletins de inscrição um ou dois dias antes de partir. Estas sessões eram os *workshops*, equivalentes às nossas sessões práticas, mas de duração menor (apenas uma hora e meia), e as *Math Action Planning Sessions* (MAPS). As MAPS duravam três horas e destinavam-se a aprofundar os *Standards*[1]: em cada MAPS, era escolhido um tema dos *Standards*, e os participantes, agrupados por ano de escolaridade, planeavam actividades para a aula relativas a esse tema e ao respectivo ano de escolaridade. A título de curiosidade, direi que na quarta feira de manhã, às 8.30, havia 3 MAPS, um sobre avaliação dedicado ao nível K-4 (jardim escola até ao 4º ano de escolaridade), outro sobre sentido espacial para o nível 5-8 e outro para o nível 9-12 sobre matemática discreta. Em cada MAPS eram admitidos 80 participantes. Quanto aos *workshops* eles destinavam-se a grupos de anos de escolaridade, como por exemplo 1-3 (1º ao 3º ano do nosso ensino básico) ou 5-9 (5º ao 9º ano). Às 8.30 havia 14 *workshops* que cobriam praticamente todos os níveis de escolaridade, do pré-primário ao fim do secundário. Temas incluídos: probabilidades, materiais manipuláveis, avaliação, divisão, calculadoras, proporcionalidade, geometria no espaço, estratégias na sala de aula, etc.

Ao longo do dia, outros tipos de sessões eram propostas no programa:

- sessões de interesse geral, isto é, não dedicadas a um nível de escolaridade específico; como exemplo, duas sessões de uma hora, a horas diferentes, para aqueles que vinham pela primeira vez ao encontro do NCTM: explicações e conselhos sobre a organização do encontro e sobre como melhor participar e usufruir das várias oportunidades disponíveis (talvez uma ideia para os organizadores dos nossos futuros Profmat's...)
- comunicações longas (uma hora)
- comunicações curtas (meia hora)
- sessões organizadas pelo próprio NCTM

Bom, passei o resto da viagem a escrever num folha de papel, para as várias horas, as opções que me interessavam — sempre uma meia dúzia a todas as horas — deixando a opção final para decisões de última hora.

O avião começou a descida para New Orleans. Nessa última meia hora, olhei para os meus companheiros de viagem e passei um desafio a mim próprio: quais deles seriam também participantes do encontro do NCTM? Por outras palavras: o que distinguirá exteriormente um aficionado de encontros de professores de matemática de uma pessoa "normal"? Havia pessoas novas e não tão novas, com óculos e sem óculos, pretos e brancos, mulheres e homens. Ainda por uns momentos me passou pela cabeça a ideia de pedir a uma assistente para me deixar propor um problema pelo sistema de intercomunicação, a ver quais deles se entusiasmavam... Mas seria isso um bom critério?

Um pouco depois, já à espera das bagagens, duas jovens tentavam prever em que passadeira iam aparecer as suas malas, e uma delas disse: "é mais provável que seja nesta passadeira, pois está toda a gente a vir aqui para o pé dela, talvez tenham perguntado a alguém..." Pensei: pronto, já descobri duas...

O aeroporto de New Orleans parece acabado de fazer, mas não é diferente de muitos outros que nos Estados Unidos adoptam o mesmo estilo alegre e lavado dos mármores claros e das grandes vidraças. Mas, enquanto me dirigia para o local onde se recebiam as malas, senti uma atmosfera diferente que a princípio não identifiquei imediatamente. Qualquer coisa que andava no ar... Aí está, eram as ondas sonoras! Em vez da música *soft* de fundo que está sempre a tocar em todos os lugares públicos norte-americanos, e que pende para músicas do tipo "Dr. Jivago", o que eu estava a ouvir era mesmo o mais espantoso par de cantores de jazz que se pode imaginar: Louis Armstrong e Ella Fitzgerald. *Heaven, I'm in heaven*... Agora acreditava que estava realmente em New Orleans...

Pouco depois, ao ouvir as outras pessoas num balcão de informações perguntando como podiam ir para os hoteis respectivos, encontrei a solução para o problema de quais eram os professores de Matemática: eram todos! Na realidade, pensando bem, num encontro com mais de dez mil pessoas, em que uma grande parte mora a três ou mais horas de avião, é natural que sejam precisas várias dezenas de aviões cheios para reunir os seus participantes... Eu apenas tinha vindo num deles! Comecei a visualizar uma outra dimensão de encontros de professores de Matemática...

Todos os dias, desde as sete da manhã até à noite, cinco carreiras especiais de autocarros funcionavam em permanência, transportando os participantes entre os vários hoteis e os locais do encontro. Este decorreu no Centro de Convenções de New Orleans e nas instalações do Hotel Hilton, a cinco minutos de distância a pé. O Centro de Convenções é um edifício moderno, com instalações modelares para encontros deste tipo, como por exemplo muitas dezenas de salas para conferências e *workshops*, todas completamente equipadas com instalação sonora, projectores de vários tipos, grandes salões para exposições de materiais e livros, e ainda outros tipos de salas para fins múltiplos. Era aí que estavam instalados os vários serviços do Encontro e que se realizavam grande parte das sessões e *workshops* de menores dimensões. No Hotel Hilton existiam, além de múltiplas salas de pequenas dimensões para reuniões de vários tipos, grandes salões comportando mais de mil pessoas sentadas e que se podiam agrupar para sessões ainda de maiores dimensões. Sobre a organização do encontro, só por um esforço lógico (10 mil pessoas... 750 sessões) posso dizer que deve ter existido, pois aparentemente não notei nada... Um quarto de hora ou mais antes de cada sessão, lá estava já o moderador ou introdutor da sessão e o *speaker*, trocando umas piadas em voz baixa ou arrumando uns acetatos perto do rectroprojector. As pessoas iam entrando, lentamente. Dois ou três minutos antes do início, a sala estava em geral cheia. Exactamente à hora marcada, o moderador começava a falar. Fosse a sala grande ou pequena, estivessem lá 30 ou duas mil pessoas, ouvia-se sempre bem. Logo na primeira sessão a que fui, percebi porquê, ao ver o moderador, no fim de ter falado, passar o microfone de pendurar na gravata para o orador.

Admirado por não ver ninguém a correr de um lado para o outro com rectroprojectores ou computadores, fui ver ao programa se realmente existia alguma comissão organizadora... Verifiquei que sim! E até era bastante grande... Vejamos o número de pessoas em cada subcomissão: programa: 12; banquete, recepção e dança (sim, sim, dança...): 7; equipamentos: 6; hospitalidade: 44; salas das sessões: 84; assuntos NCTM: 120; venda de materiais NCTM: 51; publicidade: 23; acolhimento de estudantes: 2; cartazes: 10; exposição de trabalho de alunos: 17; apoio aos workshops: 26. Ao todo, 402 pessoas...

Um dos locais mais frequentados do Encontro era uma espécie de feira de publicações e materiais didácticos em que inúmeras empresas editoras e produtoras de materiais escolares expunham os seus mais recentes produtos. Visitei essa feira durante horas, como muitos dos outros participantes. Notei que muitos dos novos livros escolares eram publicitados invocando o facto de se conformarem com os *Standards*. o que não deixa de ser significativo. Alguns deles, no entanto, pareceu-me que só superficialmente o faziam. Um caso diferente é o dos livros do projecto UCSMP: *The University of Chicago School Mathematics Project*. Este projecto é dirigido por Zalman Usiskin e desde há vários anos vem publicando e experimentando materiais para um currículo renovado de matemática. Começaram agora a sair, editados pela *Scott, Foresman*, uma série de livros escolares para os vários níveis de ensino. Embora esses livros tenham títulos como *Algebra*, *Geometry* e *Advanced Algebra*, por exemplo, eles correspondem verdadeiramente a um curso integrado, pois os títulos reflectem somente um certo acento tónico em cada livro e a geometria é usada intensamente no livro de álgebra e reciprocamente. Os livros são também exemplares no que diz respeito à ligação da matemática com o mundo real.

No meio da feira, alguém atrás de mim me chamou em português. Era o professor Ubiratan d'Ambrósio, da Universidade de S. Paulo, que já esteve várias vezes em Portugal. Convidou-me para uma reunião do *International Study Group on Ethnomatematics* (ISGEm), que se realizaria nessa tarde. O termo Etnomatemática refere-se, para dizê-lo de uma maneira superficial, à matemática que pré-existe nas crianças e mesmo nos adultos e que resulta naturalmente do ambiente cultural que os rodeia — das tradições, da longa sedimentação de processos expeditos de contar, efectuar operações, resolver problemas do mundo real. Normalmente, a matemática escolar não só não toma como ponto de partida essas tradições e conhecimentos que os alunos trazem para a escola, como os abafa, ao impor um só modo de pensar a matemática. A reunião realizou-se numa sala do Hotel Hilton, e além de tratar de questões administrativas do grupo, incluiu duas comunicações, uma sobre uma experiência apoiada pela Unesco de desenvolvimento de um currículo de Matemática na Guiné-Bissau e outra, *Video Games in the USA*, referente à matemática que os jovens americanos aprendem nos jogos de video. No fim, houve uma recepção (aperitivos e bebidas várias) para comemorar a filiação do ISGEm no NCTM. A recepção era oferecida pela Addison-Wesley, uma editora de livros escolares, e à saída notei que em cada uma das dezenas de salas do Hilton estava a decorrer, sob os mais variados pretextos (lançamento de um livro ou de um material pedagógico, reunião de um grupo especializado, etc), uma recepção do mesmo tipo. Cada uma delas era oferecida por uma editora, por uma empresa de software, ou por outra empresa ligada à educação matemática e presente no encontro. Talvez outra ideia a aproveitar para os nossos convívios de fim de tarde nos Profmats...

Numa das manhãs, no autocarro em que eu seguia para o Centro de Convenções, sentou-se ao meu lado a Ella Fitzgerald!!! Pelo menos era igualzinha, com os seus dois metros de diâmetro, 150 quilos de peso, um ar incrivelmente simpático, e aqueles dentes de marfim a contrastar com a cor de ébano. Embora os autocarros americanos sejam "proporcionais" a tudo o resto, só a muito custo cabíamos lado a lado. Como é inevitável nos Estados Unidos, sabia que ia meter conversa comigo. E pensei: se for a Ella, vai cantar talvez

I thought I had found the man of my dreams
Now it seems this is how the story ends
He is going to turn me down and say
Can't we be friends...

Já estava a pensar como lhe havia de responder à letra, quando ela me fez a pergunta sacramental: *Where are you from?* (donde é que vem?). Expliquei-lhe que vinha de Portugal, da Europa, e ela fez um ar espantado e disse: *You must be a very big shot to come from so far away only for this!* (o que quer dizer mais ou menos: "você deve ser um tipo muito importante para vir de tão longe só para isto!"). Lá lhe tentei explicar que não pagava bilhetes de avião e que portanto me podia dar a estes luxos, mas não sei se ficou muito convencida. Era professora do ensino primário. De resto, se a amostra dos meus encontros e conversas é significativa, a percentagem de professores do ensino primário presente no encontro era enorme — para aí 30% ou mais — comparada com a que nós temos tido nos Profmat's.

No fim do primeiro dia, à noite, houve uma sessão especial — uma espécie de abertura do encontro — em que estavam presentes cerca de três mil participantes. Constou fundamentalmente, além da apresentação da nova direcção do NCTM e de outras intervenções sobre assuntos associativos, de uma longa intervenção feita em conjunto pela presidente cessante — Shirley M. Frye — e pela actual presidente, Iris M. Carl. O tema era o próprio tema central do encontro: *The NCTM Standards: New Dimensions in Leadership*. O impacte que estão a ter os *Standards* nos Estados Unidos é imenso, com as autoridades educativas de grande número de estados favorecendo a sua implementação. Assim, novas responsabilidades e dimensões de liderança no movimento para a reforma da matemática escolar estão a ser assumidas pelo NCTM, e foi sobre as implicações deste facto e sobre o seu significado associativo que as duas presidentes fizeram uma animada e muito interessante intervenção. Mas estávamos em New Orleans e a música de jazz não poderia deixar de estar presente. Por isso, no início da sessão, um dos melhores conjuntos de jazz da cidade actuou durante três quartos de hora. E no fim da sessão, os três mil professores presentes seguiram para a recepção que se seguiu dançando atrás de outro conjunto tradicional de bombos e trompetes — *when the saints go marching in...*

Quanto ao conteúdo científico do encontro, ele foi muito variado, devido ao grande número de comunicações e de *workshops*. Mas foi possível detectar algumas tendências, e um possível barómetro para as medir poderia ser a dimensão das salas e a popularidade de certas sessões.

• **Temas dos *Standards*** — alguns temas globais dos *Standards* foram objecto de sessões muito concorridas: a matemática como comunicação, as conexões matemáticas, e está claro, a resolução de problemas. Neste último caso, assisti a uma sessão muito interessante por Mary Grace Kantowski, defendendo a ultrapassagem de uma certa interpretação estreita do Polya e chamando a atenção para o livro *Mathematics and Plausible Reasoning*, que já referi atrás. Salientou ainda o partido a tirar do software que está a ser produzido, em particular de geometria, citando em particular o *The Geometer's Sketchpad* (O Bloco de Notas do Geómetra), para o Macintosh, um programa excelente de geometria na mesma linha do francês *Cabri-Géomètre*. No fim da sessão, corri com muitos outros para a feira dos materiais e ainda consegui comprar um dos últimos exemplares.

• **Fractais, Caos, etc.** — sem dúvida, os assuntos que moviam maiores multidões para as respectivas sessões, que foram várias. Numa delas, *Fractals for the Classroom: The Fascinating Concept of Chaos and Fractals*, apresentada por Heinz-Otto Peitgen, um professor alemão da Universidade de Bremen, foi preciso abrir a divisória entre dois salões do Hilton para comportar os milhares de professores que quiseram assistir. Alguns ecrãs gigantes de video, um belíssimo sistema sonoro, uma assistência animadíssima e um apresentador excepcional tornaram aquela sessão também inesquecível.

Outros assuntos populares eram os relativos a **modelação e aplicações da matemática** , comportando um grande número de sessões, e **matemática discreta**, o tema do *yearbook* deste ano do NCTM.

Por fim, não quero deixar de salientar, por ser assunto de muita actualidade para nós, um tema que atraiu também um grande número de professores, que seguiram com muito interesse a comunicação de Zalman Usinski chamada: *The Creation and Destruction of a Myth: Either You Have It in Math or You Don't.* O mito que Usiskin tentou destruir com a sua fulminante argumentação foi o de que "uns têm jeito ou queda para a matemática e outros não" e o sistema que ele atacou foi o da criação de classes especiais para "aqueles que não conseguem acompanhar". Esse sistema, muito usado nos Estados Unidos, tem provado mal, segundo Usiskin e outros. Um aluno que passa para uma classe mais atrasada, para supostamente *recuperar* o seu atraso, e repetir sem qualquer motivação aquilo que não o interessou, o mais certo é nunca mais sair de lá, e manter e aumentar o seu atraso até ao fim da escolaridade. Por outro lado, como dizia Usiskin, nas classes para os "superdotados" é que se fazem as coisas interessantes que motivariam todos os alunos.

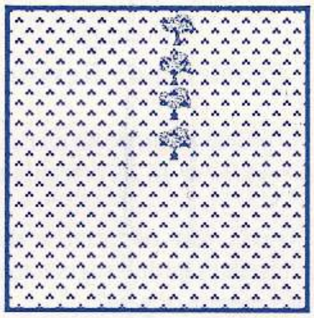
O direito de *todos* os alunos aos benefícios de um programa interessante e rico de Matemática é um ponto de vista central nos *Standards*. Neste aspecto, o NCTM luta contra a situação actual norte-americana, em que a discriminação é a regra. Como vai ser entre nós? Vamos deixar que se formem classes especiais, ou "introdutórias", como lhes chamava o projecto ministerial de avaliação que se tornou conhecido no passado ano lectivo, para daqui a 20 anos termos de lutar como o NCTM contra elas?

1. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, edição do NCTM, 1989. Ver a tradução portuguesa organizada pela APM: *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática.*

A herança

No número 15 desta revista apresentámos uma solução para o problema "A Herança", cujo enunciado passamos a transcrever:

Um lavrador deixou aos seus quatro filhos um terreno quadrado, onde existiam quatro árvores. As suas disposições estipulavam que o terreno deveria ser dividido em quatro partes iguais, com a mesma configuração e tendo uma árvore em cada uma das parcelas. Os filhos satisfizeram integralmente a vontade do pai. Como foi possível?



Mais duas soluções

Tal como desejavamos, houve quem descobrisse mais duas brilhantes maneiras de satisfazer a vontade do lavrador.

Estas resoluções chegaram-nos da Esc. Sec. de Mira-Sintra e foram elaboradas por dois alunos do 8º ano: o Pedro Alves (fig. 1) e o Nuno Oliveira (fig. 2).

Nota: Nas figuras, foram utilizadas diferentes tramas, em substituição das cores que existiam nos originais.

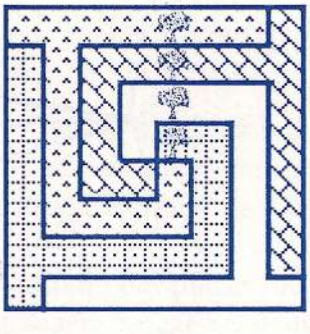


figura 1

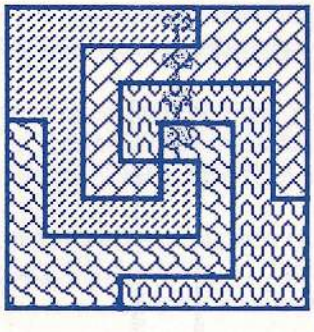


figura 2

O problema do trimestre

Sobre as respostas aos problemas anteriores

Problema da Revista 16

O problema proposto na *Educação e Matemática* nº 16 foi o seguinte:

Quais são os pontos do plano equidistantes de dois segmentos de recta com a mesma origem?

Recebemos respostas de quatro colegas: Paula Paleta (Ourique), Orlando Freitas (Funchal), J. Sacadura Cabral (Amadora) e Alberto Canelas (Queluz). Todos eles fazem uma abordagem semelhante e vamo-nos limitar a transcrever o essencial da resolução.

Relembremos primeiro que: distância de um ponto a um segmento de recta é a menor das distâncias entre o ponto dado e todos os pontos do segmento. Logo, podem acontecer dois casos. Ou é possível traçar a perpendicular do ponto ao segmento, e a distância é medida nessa perpendicular. Ou não se pode traçar a perpendicular, e a distância é medida entre o ponto dado e o extremo do segmento que esteja mais próximo.

A partir dos dois segmentos dados, construa-se a figura indicada de acordo com estas indicações:

1) Marque-se no segmento [OP] o ponto T, cuja distância a O seja igual ao comprimento de [OQ].

2) Tracem-se por T a perpendicular a [OP] e por Q a perpendicular a [OQ].

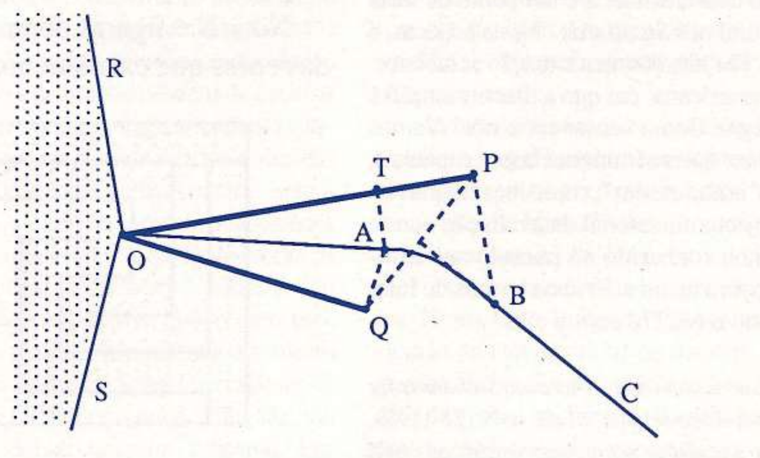
3) Estas duas perpendiculares intersectam-se num ponto A e a semi-recta $\dot{O}A$ é a bissectriz do ângulo formado pelos segmentos dados.

4) Trace-se a mediatriz do segmento [PQ] e a perpendicular a [OP] pelo ponto P. A intersecção destas duas rectas define o ponto B. Seja BC a mediatriz.

5) A curva AB é um arco de parábola com foco em Q e directriz OP.

6) Tracem-se por O as semi-rectas $\dot{O}R$ e $\dot{O}S$, perpendiculares a [OP] e [OQ] respectivamente.

A solução do problema está representada na figura e é constituída



Solução do problema

pelos pontos pertencentes:

1) ao ângulo ROS,
2) ao segmento de recta [OA],
3) à linha AB,
4) à semi-recta BC.

J.S. Cabral vai mais longe e demonstra que os pontos A e B nunca são pontos angulosos, isto é, que OA e BC são tangentes à parábola nos pontos A e B, respectivamente. Portanto, "a linha OABC é contínua, com derivada contínua".

Por seu lado, Orlando Freitas chama a atenção para o caso em que os dois segmentos de recta têm o mesmo comprimento. Quando isso acontece, os pontos A e B são coincidentes.

Problema da Revista 17

No nº 17 de *Educação e Matemática* propusemos um problema dividido em duas partes:

1) Que números têm exactamente a mesma parte decimal que os seus inversos?

2) Que números têm exactamente a mesma parte decimal que os seus quadrados?

Também para este problema nos chegaram quatro respostas, exactamente dos mesmos leitores que nos enviaram a resolução do problema 16: Paula Paleta, Orlando Freitas, J. Sacadura Cabral e Alberto Canelas. Para eles, os nossos agradecimentos pela persistência, pelo entusiasmo, pelo interesse. Aos restantes leitores da revista renovamos o nosso apelo: esta secção vive muito da participação de quem a lê e será tanto mais interessante quanto mais respostas nos chegarem. Mandem-nos as vossas resoluções.

Neste problema, houve duas abordagens diferentes. Escolhemos a seguida por Sacadura Cabral e por Orlando Freitas por nos parecer mais clara e simples.

Números com a mesma parte decimal do seu inverso

Pensando primeiro apenas nas soluções positivas, os números **x** a determinar têm de obedecer à condição

$$x - \frac{1}{x} = n$$

em que **n** é um número natural, incluindo o zero. Vem então:

$$x^2 - nx - 1 = 0$$

Das duas soluções da equação, só nos interessa a que nos dá um valor positivo para x, ou seja,

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

Para cada valor de n temos uma solução do problema. No quadro 1 podemos ver a lista das primeiras soluções, obtidas em computador com uma folha de cálculo e apresentadas com sete casas decimais.

A estas soluções, temos de juntar as negativas que são exactamente os simétricos dos números já obtidos.

Números com a mesma parte decimal do seu quadrado

Novamente, pensando apenas nas soluções positivas, e sendo **n** um número natural, incluindo o zero, os números **x** a descobrir terão de satisfazer a condição

$$x^2 - x = n$$

Das duas soluções desta equação de segundo grau só nos interessa a positiva, ou seja,

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}$$

No quadro 2 temos as soluções para os primeiros valores de n.

A estas soluções, temos de acrescentar o zero e os simétricos das soluções positivas.

José Paulo Viana

Quadro 1

n	x	1/x
0	1,0000000	1,0000000
1	1,6180340	0,6180340
2	2,4142136	0,4142136
3	3,3027756	0,3027756
4	4,2360680	0,2360680
5	5,1925824	0,1925824
6	6,1622777	0,1622777
7	7,1400549	0,1400549
8	8,1231056	0,1231056
9	9,1097722	0,1097722
10	10,0990195	0,0990195
11	11,0901699	0,0901699
12	12,0827625	0,0827625
13	13,0764732	0,0764732
14	14,0710678	0,0710678
15	15,0663730	0,0663730
16	16,0622577	0,0622577
17	17,0586214	0,0586214
18	18,0553851	0,0553851
19	19,0524866	0,0524866
20	20,0498756	0,0498756

Quadro 2

n	x	x^2
0	1,0000000	1,0000000
1	1,6180340	2,6180340
2	2,0000000	4,0000000
3	2,3027756	5,3027756
4	2,5615528	6,5615528
5	2,7912878	7,7912878
6	3,0000000	9,0000000
7	3,1925824	10,1925824
8	3,3722813	11,3722813
9	3,5413813	12,5413813
10	3,7015621	13,7015621
11	3,8541020	14,8541020
12	4,0000000	16,0000000
13	4,1400549	17,1400549
14	4,2749172	18,2749172
15	4,4051248	19,4051248
16	4,5311289	20,5311289
17	4,6533119	21,6533119
18	4,7720019	22,7720019
19	4,8874822	23,8874822
20	5,0000000	25,0000000

Problema Proposto

Temos 5 objectos de pesos diferentes que queremos dispor por ordem crescente de peso, utililizando apenas uma balança de pratos para os comparar 2 a 2.

Como devemos proceder para minimizar o número de pesagens e qual é esse número?

Um passeio pela cidade

António Bernardes

Os passeios pelas cidades sempre foram grandes inspiradores de problemas matemáticos. A maior parte desses passeios "matemáticos" têm por cenário cidades bem ordenadas, mais ou menos imaginárias, que, curiosamente, fazem lembrar a baixa lisboeta, com a sua rede de ruas paralelas e perpendiculares.

A quadrícula tem sido o lugar privilegiado para essas caminhadas, obrigando a horas de viagem nos limites duma folha de papel. O espaço é pequeno, mas o prazer de resolver esses problemas pode ser grande.

Os desafios que aqui proponho são três exemplos desse tipo de passeios problemáticos ligados a trajectos em cidades urbanisticamente "perfeitas". Eles convidam-nos a fazer a caminhada até ao fim e aliciam-nos para a descoberta do caminho mais curto ou matematicamente mais perfeito.

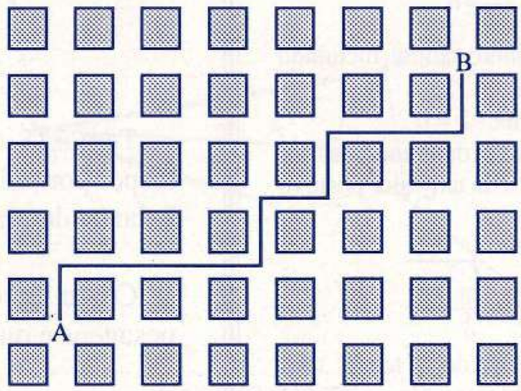
Contudo, a associação destes problemas não obedece apenas ao facto de se desenrolarem no mesmo tipo de cidade. Eles permitem evidenciar dois aspectos a que podemos estar atentos quando resolvemos problemas. Por um lado, a conveniência de procurar reconhecer, num conjunto de problemas, a presença de semelhanças significativas. Por outro, a importância de saber identificar diferenças entre problemas aparentemente semelhantes.

Os dois primeiros problemas, por sinal bastante conhecidos, ilustram bem o primeiro aspecto. O terceiro, superficialmente semelhante aos anteriores, aponta para caminhos matemáticos e estratégias de resolução muito diversas.

Sem querer fazer concorrência à secção *Problema do Trimestre* aqui ficam os três desafios. Para os dois primeiros não são apresentadas, obviamente, sugestões de exploração. A resolução do problema "Uma volta pela cidade" fica propositadamente em aberto... para quem a queira continuar.

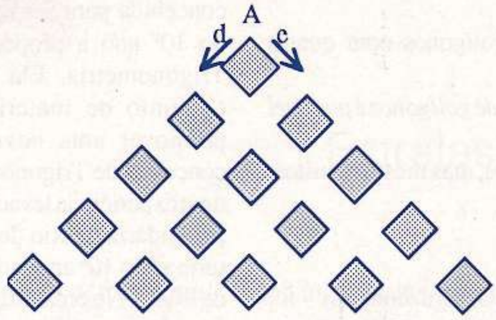
Os caminhos

Quantos trajectos diferentes existem para uma pessoa ir do cruzamento A para a esquina B, sabendo que em cada intersecção pode escolher seguir para Norte ou para Este?



Os cruzamentos

Do ponto A, cruzamento de uma rede de caminhos, partem 2^{1000} homens, metade no sentido indicado por $\vec{d}$ e metade no sentido de $\vec{e}$.



O movimento continua de tal forma que qualquer grupo que chegue a um cruzamento se divide sempre em dois novos grupos iguais, seguindo um no sentido $\vec{d}$, o outro no sentido $\vec{e}$.

Qual será o número de homens que chega a cada um dos cruzamentos da milésima fila?

Convém talvez esclarecer que teremos que designar a fila 0 como aquela que contém o cruzamento A, a fila 1 a que contém dois cruzamentos, a fila 2 a que tem três, e assim sucessivamente.

Uma volta pela cidade

Imagine-se numa grande cidade desconhecida, cheio de vontade de passear a pé. Imagine também que as ruas dessa cidade formam uma grelha de quadrados, o que é conveniente para a investigação que lhe vou propor.

E, imagine ainda que, antes de começar o seu passeio turístico decidiu:

• Após andar um quarteirão, virar à direita ou à esquerda.

• Depois, andar dois quarteirões, e virar em seguida à direita ou à esquerda.

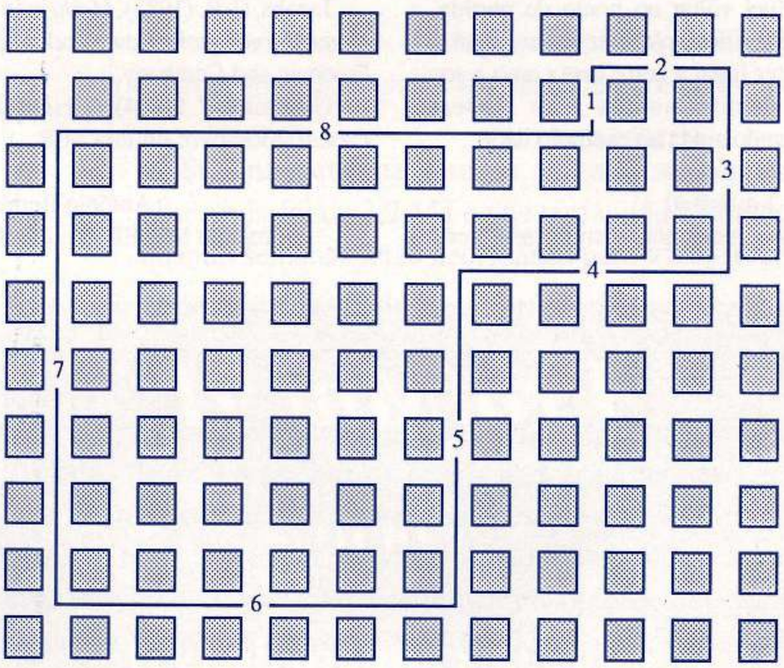
• Depois, andar três quarteirões e, é evidente, virar à direita ou à esquerda.

• E assim sucessivamente ...

Ao seguir esta regra, cada vez que muda de direcção anda sempre mais um quarteirão que no troço anterior.

Se está com medo de se perder, pegue numa folha de papel quadriculado e simule o trajecto. Se observar o mapa verá que tem hipóteses de voltar ao ponto de partida.

Este trajecto é composto por oito troços, todos diferentes. Sempre que conseguir obter um caminho como este, ou seja, voltar ao ponto de partida de acordo com as regras estabelecidas, terá acabado de construir um *golígono*.



Um golígono com oito lados

Bom, um golígono, se quisermos defini-lo, é uma linha fechada composta por segmentos de recta, perpendiculares dois a dois, cujas medidas dos comprimentos são representadas por uma sequência finita de n números inteiros consecutivos, de 1 a n. Os lados de um golígono podem intersectar-se.

O desafio é o seguinte:

Descubra que tipo de golígonos é possível construir.

Se não lhe apetecer andar a pé, pegue numa folha e divirta-se. Para não fique a pensar que lhe quero estragar as férias aqui vão algumas pistas.

Em primeiro lugar, e voltando à cidade, iniciemos um passeio dirigindo-nos para Norte. Assim, o primeiro percurso, para Norte, terá o comprimento de 1 quarteirão. Voltando à direita ou à esquerda, seguiremos para Este ou Oeste durante 2 quarteirões, e assim sucessivamente, fazendo por voltar ao ponto de partida e construir um golígono. Deste modo, todos os lados impares do golígono (o primeiro, o terceiro, o quinto,...) medirão um número ímpar de quarteirões e estarão dirigidos para Norte ou para Sul, e todos os lados pares do golígono (o segundo, o quarto,...) medirão um número par de quarteirões e estarão dirigidos para Este ou Oeste. Como o último lado tem que encontrar o primeiro, no ponto de partida, segundo um ângulo recto, então o último lado está apontado para Este ou Oeste. O último lado, então, é um lado par do golígono, e portanto o número de lados do golígono tem que ser múltiplo de dois.

Mas é fácil verificar que é impossível construir um golígono com 2, 4 ou 6 lados. O primeiro que conseguimos construir é o que está representado na figura e tem oito lados. Com que número de lados será afinal possível desenhar um golígono?

Sabemos que para voltar ao ponto de partida, a distância percorrida para Norte tem que ser igual à distância percorrida para Sul, e da mesma forma para Este e Oeste. Associemos sinais contrários aos deslocamentos com sentidos opostos. Para o exemplo dado:

Para Norte: +1 e +7.

Para Sul: -3 e -5.

Para Este: +2 e +8.

Para Oeste: -4 e -6.

Seguindo esta regra, para que seja possível voltar ao ponto de partida, a soma dos deslocamentos Norte e Sul tem que ser igual a zero, bem como a soma dos deslocamentos Este e Oeste. Voltando ainda ao exemplo dado:

+1-3-5+7=0

+2-4-6+8=0

Mas para que a soma seja zero o número de lados (Norte e Sul) tem que ser par (a soma de um número par de impares é sempre par e soma de um número ímpar de impares é sempre ímpar). Então, o número total de lados do golígono é múltiplo de quatro, já que é sempre o dobro do número de lados Norte e Sul.

Mas não há golígonos com quatro lados!

Então que tipo de golígonos é possível construir?

Existem muitos, mas mesmo muitos.

Bom passeio!

Notas:

1) O problema "Os cruzamentos" foi proposto aos participantes do oitavo concurso matemático de Moscovo em 1945.

2) A aparição dos golígonos deve-se ao engenheiro Lee Sallows, da Universidade Católica de Nijmegen, na Holanda, que iniciou as suas investigações sobre este assunto em 1988.

Bibliografia:

Dewdney, A. K. (1990). An odd journey along even roads leads to home in Golygon City. *Scientific American*, Vol. 263, Nº 1. New York: Scientific American Inc.

Jacobs, H. R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor*. New York: W. H. Freeman and Company.

Uspensky, V. (1984). *O triângulo de Pascal*. Moscovo: Editora MIR.

António Bernardes
Projecto MINERVA, DEFCUL

Materiais para a aula de Matemática

A ficha de trabalho proposta foi concebida para ser utilizada por alunos do 10º ano a propósito do estudo da Trigonometria. Ela fez parte de um conjunto de materiais destinados a promover uma nova abordagem dos conceitos de Trigonometria ao longo de uma experiência levada a efeito na Escola Secundária de Rio de Mouro, com duas turmas do 10º ano, no 3º período lectivo de 90/91. No entanto, por falta de tempo, não chegou a ser experimentada com os alunos. Neste projecto, presidiram diversas intenções, entre as quais se destacam a exploração de situações reais capazes de permitirem a manipulação de modelos matemáticos, a sua interpretação e avaliação, no sentido de desenvolver novas formas de aprender e fazer Matemática, fomentando, por seu turno, a construção e amplificação de modelos conceptuais nos alunos.

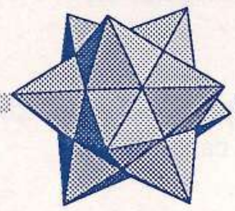
A folha de cálculo constituiu um instrumento privilegiado na realização das actividades propostas, tornando possível a experimentação, a análise gráfica, a integração de múltipos dados, todos estes, factores de capital importância no processo de modelação.

Embora nesta actividade se sugira, a certa altura, a utilização da folha de cálculo, ela não é indispensável e poderá eventualmente ser substituida por um programa de funções. O que, em suma, se torna determinante nesta actividade é a capacidade de interpretação de gráficos e a descoberta de que certas funções trigonométricas mais complexas podem ser geradas pela simples soma de funções já bem conhecidas.

Referência Bibliográfica

Boulton, J. (1979). *Basics steps in astronomy*. Dorset: Blandford Press

Susana Carreira



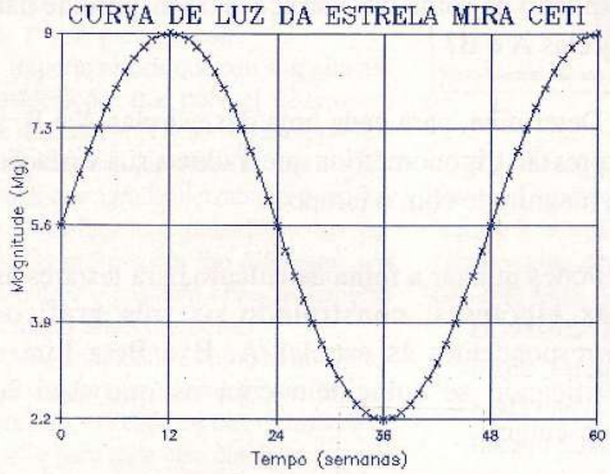
Materiais para a aula de Matemática

Estrelas pulsantes

I

Chamam-se estrelas pulsantes às estrelas cujo brilho aparente varia periodicamente. A grandeza que exprime o brilho relativo de uma estrela é a magnitude e a escala adoptada para a sua medição é tal que a uma **maior magnitude** corresponde um **menor brilho**. A Mira Ceti é um exemplo de uma estrela pulsante da constelação de Baleia e foi a primeira deste género a ser descoberta, há cerca de 200 anos.

O gráfico seguinte representa a variação de magnitude da Mira Ceti ao longo de várias semanas. À falta de um telescópio, talvez o gráfico nos revele um pouco mais dos segredos da Mira Ceti.



1. Qual é o período de variação da magnitude da Mira Ceti?

2. Se esta semana a Mira Ceti estiver no máximo da sua magnitude, quantas semanas terão de se esperar para a ver com o seu brilho mais intenso?

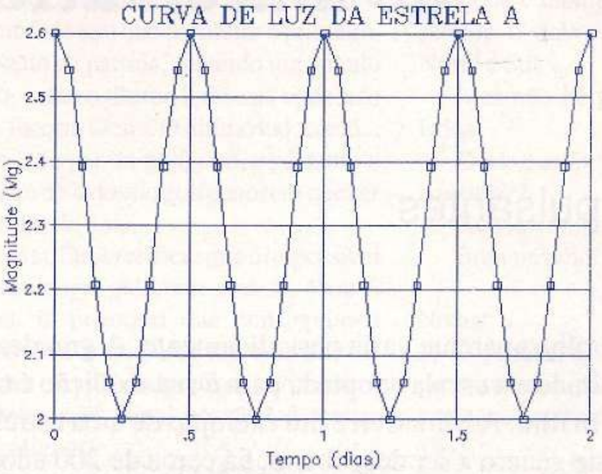
3. Propõe uma expressão trigonométrica que relacione a variação de magnitude da Mira Ceti com o tempo.

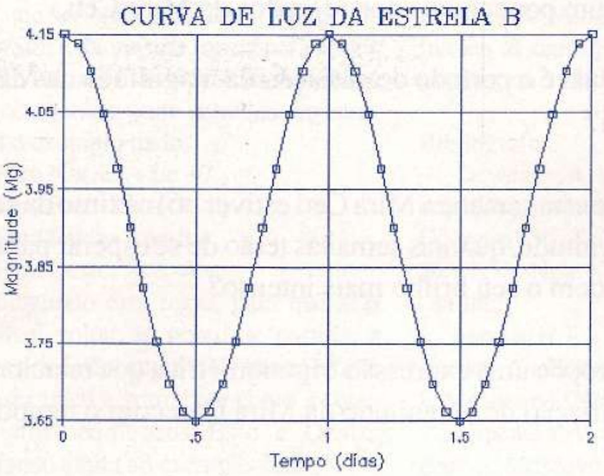
4. Supondo que na semana passada a magnitude observada foi de 3,9 Mg e que tem vindo a diminuir, quantas semanas serão necessárias para se observar de novo essa magnitude?

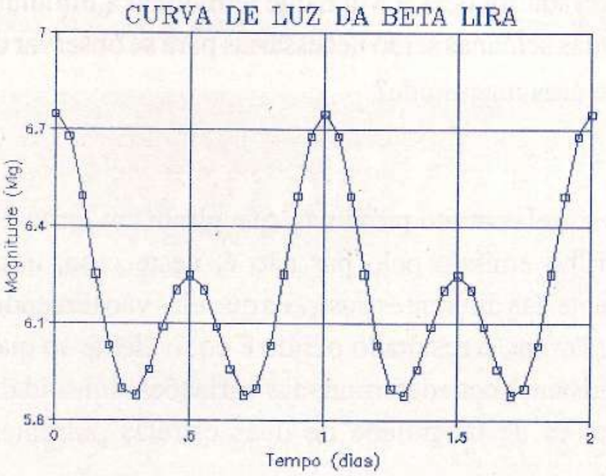
II

Pelo nome de Beta Lira é conhecido um par de estrelas muito próximas, que giram em torno de um centro de gravidade comum. A variação de brilho emitido pelo par não é, neste caso, uma característica interna das duas estrelas, mas sim resultante das diferentes posições que elas vão tomando pelo facto de se deslocarem uma em relação à outra. Porém, o resultado obtido é equivalente ao que surgiria, imaginando que se juntavam duas estrelas pulsantes com determinadas variações sinusoidais de magnitude. Seria o mesmo que somar as variações de magnitude de duas estrelas pulsantes imaginárias.

Esta conclusão acerca da Beta Lira pode ser comprovada através da análise dos 3 gráficos seguintes, que representam a variação de magnitude de duas estrelas pulsantes imaginárias, A e B, e a variação de magnitude observada na Beta Lira.







1. Indica o período e a amplitude da variação de magnitude em cada um dos casos.

2. Determina para cada uma das estrelas A e B uma expressão geral para todas as ocorrências de magnitude mínima e outra para todas as ocorrências de magnitude máxima.

3. Existe alguma altura em que as estrelas A e B estejam simultaneamente com o máximo de magnitude?

4. Existe alguma altura em que uma das estrelas esteja no seu máximo e outra no seu mínimo?

5. Tendo em conta os resultados das alíneas 3 e 4, parece-te que o gráfico da Beta Lira pode ser o resultado da soma das variações de magnitude das estrelas A e B?

6. Determina, para cada uma das estrelas A e B, a expressão trigonométrica que traduz a sua variação de magnitude com o tempo.

7. Podes utilizar a folha de cálculo para testares as tuas hipóteses, construindo os três gráficos correspondentes às estrelas A, B e Beta Lira e verificando se coincidem com os que aqui se apresentam.

8. Indica a expressão trigonométrica que descobriste para a variação de magnitude da Beta Lira ao longo do tempo.

Não passa uma só semana sem que um novo pedaço de informação seja acrescentado ao infinito puzzle do universo

J. Boulton

Que manuais vamos ter?

Rosário Ribeiro

No ano lectivo que iniciamos, entram em vigor, para o 1º ano do 1º ciclo do ensino básico, os novos programas. Novos manuais existem no mercado. Quantidade não escasseia. O mesmo não se poderá dizer da qualidade.

A implementação dos novos programas decorre, já neste ano, em todas as turmas do 1º ano do 1º ciclo do Ensino Básico, pelo que me pareceu importante debruçar-me sobre os novos manuais escolares.

Comecei por me informar quais foram as editoras que se abalançaram a fazer sair novos manuais - onde não poderá faltar o rótulo **novos programas** - que irão fazer parte da pasta de cada uma das crianças que vai entrar este ano, pela 1ª vez, para a escola.

Importa referir que sou suspeita nas considerações que poderei fazer sobre este assunto, pois desde que sou professora considero que não existe um manual escolar que agrade plenamente o professor e satisfaça as necessidades dos alunos. Os professores são diferentes uns dos outros e ensinam crianças também diferentes umas das outras.

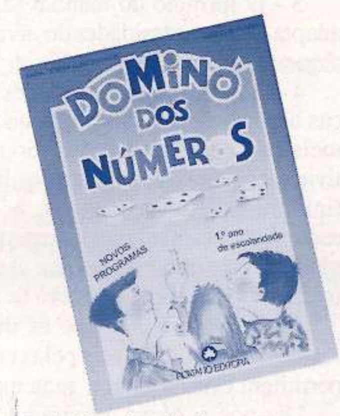
Mas a realidade é outra: há um período fixo, durante o qual os professores escolhem, em cada escola, os manuais a adoptar para cada uma das áreas, que os pais terão de comprar.

Finalmente, obtive 14 manuais editados por 7 editoras. Quantidade não escasseia. O mesmo não se poderá dizer da qualidade.

Procurei, assim, analisar, em cada um deles:

1- os conteúdos
2- a estruturação
3- a ligação ao novo programa
4- o aspecto gráfico

porque considero que todos estes aspectos são importantes, ainda que uns possam ter mais peso do que outros.



Nota: As cores não são as dos originais

Na fase seguinte, escolhi dois desses manuais, que pelo contraste, me chamaram à atenção e por isso me pareceram dignos de aqui serem mencionados. São eles:

DOMINÓ DOS NÚMEROS
Maria Teresa Albuquerque e Luís José Pombal
Plátano Editora

MATEMÁTICA
Luísa Abranches, Bárbara Giraldes, Neusa Costa
Constância Editores

Do primeiro **"Dominó dos Números"**, e relativamente aos **conteúdos**, devo dizer que o achei fraco, principalmente porque não é dada a devida importância a dois importantes Blocos do Programa: "Forma e Espaço" e "Grandezas e Medidas".

O livro é elaborado basicamente a partir de actividades, mas estas, por serem pouco motivantes, arriscam-se a não proporcionar à criança o prazer da descoberta e a não promover o desenvolvimento do raciocínio.

Os números surgem na sequência de várias actividades ligadas à *linguagem* dos conjuntos (conjunto, subconjunto, elemento, reunião, está contido, conjunto singular - são termos que se vão seguindo), o que parece um pouco ultrapassado e sobretudo, não concordar com aquilo que se define no Bloco 1 - "Números e Operações", do novo programa, onde os Conjuntos, e não a sua linguagem, são apenas apontados como um dos suportes de aprendizagem para a descoberta progressiva dos números.

Quanto à **estruturação**, pode dizer-se que embora as actividades se sigam com alguma continuidade, não se constata neste manual qualquer preocupação em agrupar os temas tratados. Os conteúdos vão aparecendo sem estarem compartimentados, como num mero caderno de exercícios.

O aspecto gráfico é fraco.

As cores são pouco atraentes, sendo frequentes os castanhos e cinzentos em ilustrações que se tornam, à partida, pesadas e tristes.

O formato do livro (17 x 24), julgo, não vai de encontro às necessidades das crianças a que se dirige. Há páginas onde as actividades, forçosamente se condensam, limitadas pelo espaço.

Por último, a capa não me parece ter sido bem conseguida, já que o próprio título "Dominó dos números" permitia um jogo de imagem e cor bastante mais atraente.

Quanto ao 2º manual, **"Matemática"**, e no que respeita a **conteúdos**, pode dizer-se que aqui todos os Blocos definidos no programa se encontram contemplados. É finalmente dada importância à Geometria e já são indicados novos materiais de apoio, salientados no novo programa.

Através duma linguagem clara e concisa as crianças realizam actividades (por vezes, autónomamente) que as levam a desenvolver o raciocínio, a capacidade de comunicação e as põem a resolver problemas,aspectos essenciais, que estão no espírito do novo programa.

Este manual faz parte duma série de obras para as diferentes áreas do 1º ano do ensino básico e, por isso, nas páginas 2 e 3 é-nos apresentada a sua **estrutura:** trata-se de um corpo dividido em 16 unidades temáticas (englobadas por um índice), que, por sua vez, se interligam às restantes unidades temáticas das outras obras.

E para terminar, relativamente ao **aspecto gráfico**, (à excepção das expressões faciais dos personagens desenhados que são claramente feias), há a louvar alguns aspectos:

1 - A linguagem simbólica escolhida, para além de ser bonita, é apropriada;

2 - As cores são atraentes e adequadas;

3 - O formato do manual (21 x 28) adapta-se às necessidades do nível etário a que se dedica;

4 - Cada uma das 16 unidades temáticas abre com uma ilustração que ocupa meia página e segue-se de variadas actividades que ocupam espaços bem definidos. Nalgumas páginas, à laia de rodapé, são dadas algumas sugestões que ajudam o professor a explorar essas ilustrações e/ou actividades com os alunos.

5 - A capa é alegre e as imagens, facilmente identificáveis pelas crianças, permitem brincar com a matemática.

Diz-nos o Novo Programa que "a tarefa principal dos professores é conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática".

Essa tarefa, nem sempre é fácil. Será que os novos manuais a virão facilitar?

Manuais escolares que consegui obter e que conheci através da A.P.M, para além dos dois já mencionados:

Edições Asa

Brincar com números. Helena P. Pinto, Valentina Mota

Número Azul 1. Dinis Salgado, Teixeira da Costa

Quadrado Mágico 1. Ana Pinto, M. Aurélia Carneiro, M. Cerqueira Correia, Pedro Mesquita

Editorial O Livro

A Alegria da Matemática 0 /A Alegria da Matemática 1.

M.Isabel Loureiro e A. Gil

Matemática a sorrir. M. Isabel Loureiro e A. Gil

Lisboa Editora

Contas são contas. Gonçalo Machado

Plátano Editora

Estamos contigo na Matemática. Mili Pereira, Fátima Cruz, Luísa Destapado

Na Hora da Matemática. Moisés Coutinho

Porto Editora

Conta comigo... Nelson Timóteo, Conceição Marques

Descobrir os números 1 Conceição Neves, Rosa Costa

Novo Olá Matemática Manuel Ramalho

Retintim. Arlindo Miranda, C. Figueiredo Lopes, Mário Ramiro

Raiz Editora

Vamos pensar. Diamantina Carmona, Elsa Aguilar, Helena George, Lurdes Varela

Trabalho de grupo na Repartição de Finanças...

O marido de uma das minhas colegas é funcionário da Repartição de Finanças e certo dia, encontrando-me de passagem na rua, disse-me:

- Então agora pões o "pessoal" todo da repartição a resolver problemas de matemática?!

Confesso que fiquei paralisado e perplexo sem saber o que fazer. Tentei balbuciar algumas palavras enquento procurava entender a sua pergunta. Após alguns segundos, lembrei-me que três dos meus alunos, de uma das turmas nocturnas que lecciono, são funcionários da repartição. Como não é muito habitual ouvir falar das acividades que desenvolvo nas minhas aulas (e muito menos que elas sejam discutidas fora da escola), procurei colher mais algumas informações para inteirar-me do que se passava, ao mesmo tempo que crescia em mim um certo temor de que o meu trabalho estivesse a ser rudemente criticado — o que, aliás, acontece frequentemente nas pequenas cidades, onde os erros e os defeitos de cada um são discutidos em cada esquina.

Foi com grande alívio que fiquei a saber que algumas das minhas propostas de trabalho, para discussão em pequenos grupos, eram depois retomadas à hora de almoço. O interesse e entusiasmo desses alunos era tal que não resistiam à tentação de colocar aos seus colegas as situações problemáticas que tinham em mãos. Para indivíduos com idades entre os 30 e 40 anos, há muito afastados da escola e habituados a um tipo de ensino tradicional, aquela era uma forma estranha de aprender, mas o certo é que se empenhavam na discussão como se o trabalho também lhes fosse destinado.

Dizia-me esse amigo que, não raras vezes, os três colegas estudantes eram procurados para prestar esclarecimentos ou divulgar qual a questão que no momento estavam tratando. Fiquei plenamente convencido da veracidade das suas afirmações, e perfeitamente pasmado, quando ele resolveu relatar-me, rindo a bandeiras despregadas, algumas das historietas que eu, por vezes, no início de uma determinada unidade didáctica, contava, de modo a criar um clima de descontracção e de boa disposição, servindo ao mesmo tempo de motivação para o trabalho que de seguida lhes iria propor.

Há dias, quando fui entregar o boletim para pagamento do I.R.S., reparei que havia um sorriso cúmplice em alguns funcionários, todavia fui imediatamente atendido e dispensaram-me uma atenção especial. Sei que tenho mais dez ou doze críticos das minhas aulas e sei que tenho que pagar o I.R.S., mas que importa... sei que estou no caminho certo!!

César Augusto Viana
Esc. Sec. Rafael Bordalo Pinheiro

Para este número seleccionámos

A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças

E. Yackel, P. Cobb, T. Wood, G. Wheatley, G. Merkel

Este artigo, extraído do livro "Teaching and Learning Mathematics in the 1990s - 1990 Yearbook", publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, foi dado a conhecer, no Profmat 90, aos professores que estiveram presentes no Grupo de Discussão: "Matemática no 1º ciclo do Ensino Básico".

Parece-nos importante a sua divulgação, porque ele põe em relevo as possíveis atitudes que o professor e os alunos devem ter numa sala de aula, para que, de facto, se processe a aprendizagem da Matemática.

Quando as crianças aprendem matemática na escola fazem-no na sala de aula onde certas normas de conduta estão estabelecidas implícita ou explicitamente. Estas normas influenciam a forma como as crianças interagem com o professor e com os colegas, o que, por sua vez, influencia quer a Matemática que as crianças aprendem e como a aprendem. Neste artigo discutiremos uma abordagem pedagógica na qual é dada atenção explícita ao papel da interacção social na aprendizagem da matemática pelas crianças. Esta abordagem reflecte a perspectiva, segundo a qual, a aprendizagem da matemática é um processo activo de resolução de problemas. Quando são dadas às crianças oportunidades de conversar acerca da sua compreensão da matemática, surgem problemas genuínos de comunicação. Estes problemas, assim como as próprias tarefas matemáticas, constituem oportunidades para aprender matemática. A abordagem que discutiremos é coerente com as exigências actuais de reforma em educação matemática (National Research Council, 1989), com os princípios que levaram ao desenvolvimento dos *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), e com os princípios do construtivismo como teoria de aprendizagem (Confrey, 1987; von Glasersfeld, 1984). (...)

Este artigo foca três aspectos da abordagem pedagógica: primeiro, a construção pelas crianças dos seus próprios métodos não standards; segundo, aprendizagem da matemática como actividade de resolução de problemas e finalmente, o papel da interacção social na aprendizagem da matemática. Os dois primeiros aspectos fornecem-nos uma base de reflexão para a discussão do terceiro.

As crianças constroem a sua própria matemática

Quando são apresentadas às crianças tarefas que fazem sentido para elas, encorajando-as a resolvê-las, as crianças em vez de seguirem procedimentos que tenham sido apresentados pelo professor, desenvolvem uma variedade de estratégias para alcançarem a solução. No início do ano lectivo, as crianças arranjaram os seguintes estratégias para 9+11= ___ :

Bárbara: 9 e 9 são 18, mais 2 são 20.

Adão: 7 e 7 são 14, portanto 8 e 8 são 16, 9 e 9 seria 18 assim 9+11 deve ser igual a 20.

Cristina: 11 e 11 igual a 22. 10 e 11 igual a 21. 9 e 11 igual a 20.

Joana: 11 e 9 mais — 12, 13, ..., 18, 19, 20

Como ilustram estes exemplos, numa situação desafiante, as crianças utilizam os conhecimentos que já têm para desenvolver raciocínios com siginificado pessoal. As suas soluções reflectem as diferenças do conhecimento actual a que recorrem para solucionar a tarefa.

Afirmamos que, as crianças não só são capazes de desenvolver as suas próprias estratégias para realizar as tarefas da matemática escolar, mas também que cada criança tem de construir o seu próprio conhecimento matemático. Isto é, segundo o nosso ponto de vista, o conhecimento matemático não pode ser *dado* às crianças. Pelo contrário, elas desenvolvem conceitos matemáticos quando se entregam a actividades matemáticas, incluindo a apreensão de "métodos" e explicações que vêem ou ouvem de outros. Este ponto de vista implica que na escola sejam proporcionadas às crianças actividades adequadas ao desenvolvimento de problemas matemáticos genuínos. Estes problemas dão-lhes oportunidade para reflectir e reorganizar as suas formas de pensar. De acordo com o que fica dito, desenvolvemos actividades que foram concebidas para encorajar a construção de conceitos e procedimentos relativamente sofisticados pelas crianças, tais como o valor de posição e os algoritmos de cálculo.

As quatro soluções para 39 + 53 =__ ilustram a natureza conceptual de algoritmos alternativos das crianças:

Ana: 50 mais 30___80, então 9 mais 1 seria 90, mais 2 seria 92.

Joel: Tens 53, mais 10 é 63, mais 10 ___73, mais 10___83, mais 9 ... 92.

Joana: Deixa ver, 39 mais 50 é 89, depois junta 3 faz 92.

Eurico: 30 mais 50 são 80 e 9 mais 3 são 12. Ponho tudo isto junto e obtenho 92.

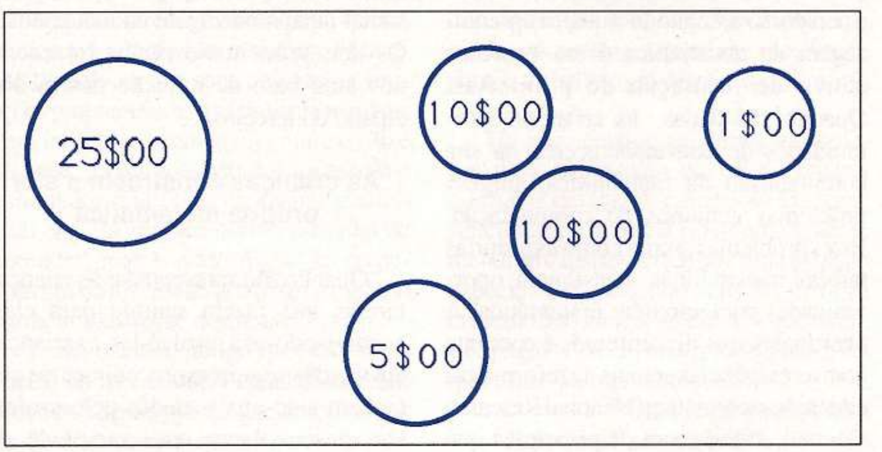
Uma tão grande variedade de algoritmos desenvolvidos pelas crianças, quando estas se envolvem em raciocínios significativos, contrasta com a aplicação cega de regras que vemos frequentemente a serem utilizadas pelos alunos que foram treinados na utilização de um algoritmo particular. É a diferença entre "O que é que me disseram que eu deveria fazer?" e "Como posso imaginar isto?". Uma consequência importante da nossa abordagem, é que alguns tipos de erros que habitualmente acompanham o uso dos algoritmos tradicionalmente ensinados e que frequentemente resultam em respostas não razoáveis (e. g., 39 + 53 = 812), raramente ocorrem, pois as crianças estão a utilizar "métodos" baseados na sua compreensão. A nossa experiência diz-nos que a compreensão pelas crianças do valor de posição se desenvolve ao mesmo tempo que a sua construção da eficácia crescente dos algoritmos. Concordamos com Brownell (1956) que compreensão conceptual e proficiência no cálculo, ou significado e prática, como ele a descreveu, não devem ser vistos como objectivos pedagógicos distintos (Cobb, Yakel, e Wood, 1988).

Aprendizagem como uma actividade de resolução de problemas

A característica principal de uma abordagem pedagógica, baseada numa visão construtivista da aprendizagem, são as as actividades propostas que devem dar origem a problemas para os alunos resolverem. Contudo, as situações que as crianças acham problemáticas distinguem-se devido às diferenças dos seus conhecimentos, experiências e objectivos. À primeira vista, isto pode parecer uma limitação, por não podermos garantir que todas as crianças pensarão, acerca duma mesma tarefa, da mesma forma. De facto, torna-se uma vantagem, isto é, um meio de individualização. As crianças em diferentes níveis conceptuais não só utilizam diferentes estratégias de solução como interpretam as tarefas de diferentes formas. Em resumo, cada criança tenta resolver problemas que façam sentido para o seu nível de compreensão e desenvolvimento conceptual. É neste sentido que dizemos que os professores não podem dar problemas aos alunos "prontos a fazer". Os professores podem dar actividades pedagógicas. A estratégia de resolução dos problemas diferirá de criança para criança. O exemplo que se segue comprova-o:

Bruno tem todo este dinheiro. Compra um lápis por 7 escudos e um chocolate por 35 escudos.

Com quanto dinheiro fica?



A solução do Luís é retirar a moeda de 25 escudos e a de 10 escudos para o chocolate (indicando com um traço no desenho) e retirar depois os 5 escudos, a moeda de um escudo e por fim um escudo dos 10 (a outra moeda de 10 escudos) para o lápis e dar como resposta 9 escudos. Adão, contudo, resolveu o problema como se segue:

Juntei-as todas e obtive 51, depois tirei 35. (Depois, subtraiu 7).

Adão conceptualizou a tarefa como um problema de adição e subtracção simbólica. Luís, pelo contrário, considerou uma situação do mundo real e usou o valor das moedas. Como Adão, ele envolveu-se em cálculo mental, mas o seu problema era retirar moedas que igualavam o valor dos objectos adquiridos e portanto encontrar o valor das moedas restantes. As duas crianças envolveram-se em actividade matemática significativa na mesma tarefa, apesar das diferenças no seu conhecimento conceptual.

Resolver problemas envolve muitas vezes mais do que realizar as actividades propostas. Pode incluir também o aparecimento de resultados surpreendentes, tais como quando duas estratégias alternativas conduzem ao mesmo resultado, a justificação de um método de solução, ou a explicação de como um método aparentemente erróneo conduz a uma contradição. Quando o ensino na sala de aula é organizado de forma a que as crianças trabalhem cooperativamente nas actividades pedagógicas, situações como estas ocorrem frequentemente. A seguir discutiremos o papel da interacção social na aprendizagem.

Aprendizagem através da interacção social

Vamos primeiro descrever a abordagem pedagógica e depois ilustrar interacções típicas professor-aluno e aluno-aluno.

A Abordagem Pedagógica

As actividades pedagógicas são de dois tipos: actividades propostas pelo professor para toda a classe e actividades de pequeno grupo. Numa aula típica de cinquenta minutos, a primeira metade é dedicada à resolução de problemas em pequeno grupo e a segunda metade a uma discussão da turma na qual os alunos explicam como resolveram as actividades. Na introdução das actividades limitamo-nos a certificar que as crianças compreendem a sua intenção e conhecem os símbolos utilizados. Não incluimos qualquer explicação ou demonstração pelo professor de como resolver as actividades. Durante o trabalho em pequeno grupo espera-se que cooperativamente, as crianças, trabalhando em pares, desenvolvam soluções para as actividades. Entretanto o professor circula entre os grupos observando e intervindo nos seus esforços de resolução do problema.

Na discussão subsequente na classe, as crianças explicam como resolveram as actividades. O professor ajuda as crianças a clarificarem as suas explicações, apoia-as quando elas verbalizam o seu pensamento e encoraja-as a apresentarem soluções alternativas. O professor não diz às crianças se as suas repostas estão correctas ou incorrectas, mas incita todas a reflectirem nas soluções apresentadas e a concordar ou discordar. Quando as crianças discordam, a classe trabalha como um todo para resolver o desacordo e chegar a um consenso. Alguns problemas permanecem não resolvidos por vários dias, durante os quais as crianças podem ser vistas muitas vezes tendo grandes discussões, durante os intervalos ou à hora do almoço. No fim da discussão na classe, o professor recolhe as páginas das actividades das crianças, data-as, e coloca-as nas capas individuais dos alunos, as quais são mandadas para casa periodicamente.

As actividades apresentadas seguem uma série de formatos, mas são todas concebidas de modo a facilitar a ocorrência de problemas de matemática para as crianças resolverem. Modelos detalhados da aprendizagem inicial do número, feita pelas crianças, foram usados no desenvolvimento das actividades.

Interacção Professor-Aluno

A atitude do professor é crucial para o desenvolvimento duma atmosfera de resolução de problemas na sala de aula. Com vista a que as crianças partilhem os seus pensamentos matemáticos, devem comunicar activamente entre si e com o professor. Comunicação com sucesso exige a negociação de intenções e "depende de todos os elementos da classe expressarem respeito e apoio pelas ideias uns dos outros". Em relação à abordagem aqui defendida, pode dizer-se que, cada vez que uma criança quer fazer um comentário na discussão da classe, o professor assume que a actividade matemática que a criança está a tentar descrever é significativa para essa criança. Torna-se responsabilidade do professor tentar imaginar o que a criança quer dizer e, se necessário, apoiar a criança na verbalização desse significado. A importância das tentativas do professor para atribuir significado é ilustrada com o seguinte exemplo.

Numa aula do início de Dezembro, a classe estava a trabalhar numa actividade em grande grupo, na qual o professor pediu às crianças para tentarem imaginar a resposta a 9 + 9 + 9 sem contarem. A primeira criança a dizer a solução juntou 10 mais 10 mais 10 e depois subtraiu três uns para obter 27. A solução seguinte foi dada por Miguel:

Eu mudei um 9 para um 10 e um 9 para um 17 e depois deitei fora um 9 e obtive 27.

Em vez de tratar isto como uma confusa manipulação de números, o professor assumiu que Miguel estava a comunicar pensamento significativo. Primeiro ele assinalou esta hipótese com os seus comentários e depois procedeu para tentar imaginar o que o Miguel pode ter estado a tentar dizer:

Professor: Ouviste isto, Joana? Deixa isso - está bem, agora escuta. Posso necessitar da tua ajuda. (Para o Miguel) Quero que digas novamente. Disseste que pegavas num 9 e transformava-lo num 10.

Miguel: E eu tirei 9 - tirei sete... - e mudei o segundo 9 para um 17.

Professor: Mudaste este (apontando para o segundo 9) para um 17.

Miguel: E mudei o último 9 para um igual e depois veio 27.

Aqui novamente o professor pode assumir que o Miguel não sabe acerca do que ele está a falar. Contudo, continua a assumir que o que ele fez tem sentido para ele, e tenta ajudá-lo a desenvolver uma explicação que possa fazer sentido para as outras crianças.

Professor: (para a classe) Vejam como ele fez?

Adão: Ele deitou-o fora - o último 9 e pô-lo nesse (o primeiro 9).

Juntou esse 8 ao 9 e obteve 17.

Professor: Vamos dar uma olhadela a esta parte (apontando para os últimos dois 9). Quanto é 9+9?

Alunos: (em uníssono) 18.

Professor: 18. Está bem. Ele sabia que 9 + 9 são 18. Está bem. Ele sabia isso. Agora, ele retirou 1 de 18 e o que nos dá?

Alunos: (em uníssono) 17.

Professor: 17, e ele pegou no 1 que tinha tirado daqui (tirado do 17) e juntou-o a este 9 (o primeiro 9) e fez dez. Essa foi uma forma de pensar.

Embora seja impossível para nós dizer se a solução que o professor desenvolveu é a que o Miguel tinha em mente, a continuação da sua discussão com ele teve vários efeitos positivos. Primeiro, o professor deu a perceber às crianças que as suas soluções delas fazem sentido para ele. Segundo, Miguel e as outras crianças da aula confirmaram mais uma vez que o professor os ajudaria quando eles tentassem verbalizar as suas tentativas de solução. Finalmente, toda a classe teve a vantagem de poder pensar, seguindo outro "método" de resolução.

Quando uma criança dá uma resposta incorrecta, é especialmente importante para o professor assumir que a criança esteve envolvida em actividade significativa. Assim é possível que a criança reflita na sua tentativa de solução e a avalie. Neste projecto quando uma criança dá uma resposta incorrecta, é comum que, sem auxílio, ela encontre o erro no decurso da explicação da solução. Uma criança disse em tal situação: "Agora discordo da minha resposta". Ao permitir que uma criança prossiga com uma explicação mesmo quando a resposta é errada, o professor mostra que ele não é a única autoridade na aula a quem as crianças têm de perguntar se a sua resposta é certa ou errada. As crianças são capazes de tomar essas decisões por si mesmas. A autoridade matemática não reside só no professor, mas no professor e nas crianças como uma comunidade intelectual.

Não só o professor assume que o que as crianças estão a dizer e a fazer faz sentido para elas, como também espera que as crianças estabeleçam essa hipótese acerca umas das outras. Ele procura obrigá-las a dar sentido às tentativas de solução umas das outras. Isto aplica-se ao trabalho em pequeno grupo e às discussões de toda a classe. As observações de Adão, no exemplo anterior, indicam que logo no início da segunda classe, os alunos podem começar a aceitar esta obrigação. O seu papel na discussão na aula é escutar, reflectir sobre o que está a ser dito e tentar tirar partido, em termos da sua própria estrutura cognitiva. No exemplo, Adão pensa, aparentemente, que compreende o método de solução de Miguel. Ao entrar na discussão Adão tira benefícios para si, pois clarifica o seu próprio pensamento. Outras vezes as crianças podem fazer comentários como: "Não compreendo o que ela está a tentar dizer" ou "Oh, eu percebo como ele fez", realçando que os ouvintes estão a tentar compreender o que o orador está a dizer.

A postura do professor ao tentar imaginar que sentido as crianças estão a dar às actividades também se aplica à resolução de problemas em pequeno grupo. De facto, este é um dos princípios mais importantes que deve guiar a intervenção do professor nos pequenos grupos. Quando aborda um pequeno grupo que está a trabalhar, a primeira responsabilidade do professor é tentar imaginar como as crianças estão a pensar sobre a sua tarefa. Só assim o professor se envolve numa discussão com elas. O seu papel nessas intervenções, assim como na discussão na aula, não é dizer às crianças se estão certas ou erradas ou conduzi-las a uma solução correcta, mas antes apoiá-las quando tentam desenvolver actividades matemáticas significativas. Isto significa que o professor deve decidir que tipo de apoio deve dar, e se algum é apropriado. Pode ser encorajar as crianças a trabalhar cooperativamente ou a escutar as explicações de outro. Pode ser pôr às crianças questões provocatórias ou entrar num diálogo socrático com elas. Pode ser ajudar uma delas a explicar o seu pensamento, ou pode ser facilitar um diálogo.

Interacção Aluno-Aluno

As crianças envolvem-se em dois tipos de actividades para resolver problemas, quando trabalham juntas em pequenos grupos. Por um lado, tentam resolver os seus problemas de matemática; por outro, têm de resolver o problema de trabalhar produtivamente juntos. Na perspectiva dos professores, alunos ao trabalhar em pequenos grupos (1) devem cooperar para resolver os problemas e (2) devem chegar a um consenso. Estes dois deveres significam que as crianças devem explicar o seu pensamento uns aos outros, tentar compreender o pensamento do outro, assumir que as tentativas de solução do outro fazem sentido, e persistir, tentando imaginar coisas para si próprias.

As interacções que têm lugar quando os problemas de cooperação social são temporariamente resolvidos dão origem a oportunidades de aprendizagem que não ocorrem em situações de sala de aula tradicional (Yakel, Loob e Wood), incluindo oportunidades para os alunos verbalizarem os seus pensamentos, explicarem ou justificarem as suas soluções e tirarem dúvidas. Tentativas para resolver conflitos dão origem a oportunidades para as crianças reconceptualizarem um problema e alargarem a sua estrutura conceptual incorporando métodos de solução alternativos.

O seguinte exemplo mostra como duas crianças alargaram a sua estrutura conceptual quando tentaram resolver um conflito decorrente da adição

$39 + 19 =$

Carlos: (Usa um quadro de centenas e começa a contar em 40 no quadro) 40, 41, ..., 57, 58, 59. (Enquanto conta, não deixa visível nenhuma pista dos seus actos de contagem).

Carina: 39, 49. Esse é dez (apontando para o quadro das centenas. Continua contando pelos dedos começando em 50. Põe mais um dedo por cada número e pára quando tem nove dedos levantados.) 50, 51, ..., 57, 58.

No processo de tentar resolver o desacordo entre as suas respostas, cada criança repete a sua solução várias vezes. Finalmente Carina imagina a possível origem da dificuldade de Carlos.

Carina: Tu não estás mesmo a contar (significando deixar visíveis pistas da contagem). Vem aqui. Eu explico-te como obtive o meu número. Vês, tens 39 e juntas mais 10 e tens 49, 50, 51, ..., 58. (Desta vez Carina está a contar no quadro das centenas apontando nele o numeral com o seu lápis. Simultaneamente usa os dedos das suas duas mãos para indicar os actos de contagem. Pára quando os nove dedos estão levantados).

Aqui Carina reconceptualizou a sua própria solução à luz do método do Carlos e adaptou a sua explicação ao quadro das centenas como Carlos tinha feito. Ao fazer isso, teve de esboçar a sua própria compreensão para desenvolver uma estrutura dentro da qual existisse uma explicação que fizesse sentido para o Carlos. Ao longo do diálogo, Carlos alargou eventualmente a sua conceptualização individual quando as explicações de Carina fizeram sentido, e o conflito foi resolvido.

Conclusão

Discutimos uma abordagem pedagógica que se baseia na perspectiva de que a matemática é uma actividade humana criativa e que a interacção social na sala de aula desempenha um papel crucial quando as crianças aprendem Matemática. Tanto a interacção professor-aluno como a que se processa entre os alunos influenciam o que é aprendido e como é aprendido. O professor toma um papel crucial ao conduzir o desenvolvimento do que Silver (1985) chamou uma atmosfera de resolução de problemas, um ambiente no qual as crianças se sentem livres para conversar acerca das suas matemáticas.

O papel do professor é indispensável também para que a regra da classe de que se deve ajudar sempre os colegas, não é secundária, mas sim um aspecto central do papel dos alunos (Slavin, 1985, p.16). Desde que esta regra seja assumida, oportunidades para a aprendizagem, que não estão presentes no ensino tradicional, crescem na medida em que as crianças colaboram entre si na resolução de problemas.

A terminar, notamos que as crianças aprendem muito mais do que Matemática neste tipo - ou em qualquer tipo - de situações de sala de aula. Desenvolvem convicções sobre a Matemática e sobre o seu papel e o do professor. Além disso, um sentido do que é valorizado desenvolve-se com atitudes e formas de motivação. A abordagem aqui descrita foi elaborada de modo a valorizar concepções que fomentem a persistência e o desenvolvimento de estratégias pessoais na resolução de problemas estimulantes opondo-se a uma página cheia de respostas certas; concepções que valorizem mais actividades significativas são aquilo a que uma criança chamava "misturar um monte de números", e ainda opiniões que valorizem mais a cooperação e a negociação do que a competição e o conflito.

Acima de tudo a abordagem que encoraja os alunos a conversar acerca dos seus "métodos" de solução sem os avaliar pela sua correcção, é caracterizada pelo desenvolvimento de uma confiança mútua entre o professor e os alunos. O professor confia nos alunos e incita-os a tentarem resolver os seus problemas de Matemática e consequentemente sente-se livre para lhes pedir que descrevam o seu pensamento. Os alunos confiam que o professor respeita os seus esforços e consequentemente entram nas discussões explicando como realmente compreenderam e tentaram resolver os seus problemas de Matemática.

Referências

Barnes, Douglas, and Frankie Todd. *Communication and Learning in Small Groups.* London: Routedge & Kegan Paul, 1977.

Bishop, Alan. "The Social Construction of Meaning- a Significant Deve-lopement for Mathematics Education? "*For the Learning of Mathematics* 5 (1) (1985): 24-28.

Brownell, William A. "Meaning and Skill: Maintaining the Balance." *Arithmetic Teacher* 3 (October 1956): 129-36.

Cobb, Paul, Terry Wood, and Erna Yackel. "Learning through Problem Solving: A Constructivist Approach to Second-Grade Mathematics." In *Construtivism in Mathematics Education,* edited by Ernst von Glaserfeld. Dor-drecht, Netherlands: D. Reidel, forthcoming.

Cobb, Paul, Erna Yachel, and Terry Wood. "Curriculum and Teacher Deve-lopement: Psycholgical and Anthropological Perspectives." In *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics,* edited by Elizabeth Fennema, Thomas Carpenter, and Sue Lamon. Madison: Wisconsin Center for Education Research, 1988.

______. "Young Children's Emotional Acts While Doing Mathematical Problem Solving".In *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective,* edited by Douglas B. McLeod and Verna M. Adams. New York: Springer-Verlag, 1989.

Confrey, Jere. "The Current State of Construtivist Thought in Mathematics Education". Paper presented at the annual meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Montreal, July 1987.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1989.

National Research Council. *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* Washington, D.C.: National Academy Press, 1989.

Nicholls, John G., Paul Cobb, Terry Wood, Erna Yackel, and Michael Patashnick. "Dimensions of Sucess in Mathematics: Individual and Classroom Differences." *Journal for Research in Mathematics Education,* in press.

Nicholls, John G., Paul cobb, Terry Wood, Erna Yackel and Grayson Wheatley. "Assessing Young Children's Mathematical Learning." In *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics,* edited by Gerald Kulm. Washington D.C.: American Association for the Advancement of Science, forthcoming.

Silver, Eduard A. "Research on Teaching Mathematical Problem Sol-ving: Some Underrepresented Themes and Needed Directions." In *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives,* edited by Edward A. Silver. pp. 247-66. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

Slavin, Robert. "An Introduction to Cooperative Learning Research." In *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn,* edited by Robert Slavin, Shlomo Sharan, Spencer Kagan. Rachel Hertz-Lazarowitz, Clark Webb, and Richard Schmuck, pp. 5-15. New York: Plenum Press, 1985.

Steffe, Leslie P., Paul Cobb, and Ernst von Glaserfeld. *Young Children's Cons-trution of Arithmetical Meanings and Strategies.* New York: Springer-Verlag, 1988.

Steffe, Leslie P., Ernst von Glaserfeld, John Richards, and Paul Cobb. *Children's Counting Types: Philosophy, Theory, and Application.* New York: Praeger Scientific, 1983.

Thompson, Patrick. "Experience, Problem Solving, and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula." In *Teaching and Learning Mathematical Problem Sol-ving: Multiple Research Perspectives,* edited by Edward A. Silver, pp. 189-236. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

von Glaserfeld, Ernst. "An Introduction to Radical Construtivism." In *The Invented Reality,* edited by Paul Watzlawick, pp.17-40. New York: W.W. Norton & Co., 1984.

Wood, Terry, and Erna Yackel. "The Development of Collaborative Dialogue within Small-Group Interactions." In *Transforming Early Childhood Mathematics,* edited by Leslie P. Steffe and Terry Wood. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, forthcoming.

Yackel, Erna, Paul Cobb, and Terry Wood. "Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics." In *Cooperative Learning in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education Monograph,* forthcoming.

Tradução de Lurdes Serrazina (E.S.E. de Lisboa) e Margarida Belchior (Projecto Minerva).

Um modelo matemático

J.Francisco Furtado

Nuno Rei

"Oh s'tore!... Desculpe, mas isto que demos serve para alguma coisa, ou é só palha?!..." Esta frase, familiar a muitos professores de Matemática, não aparece por acaso. Os alunos, na sua maioria, vêem-se confrontados com muita teoria embebida em exercícios e não encontram no seu dia a dia situações onde possam aplicar esses conhecimentos.

Introdução

Compreende-se facilmente que qualquer unidade programática faz muito mais sentido se de antemão o aluno souber que vai aplicar os conhecimentos adquiridos em situações reais. É claro que nem todas as matérias têm uma aplicação directa, muitas delas servem simplesmente como fundamentação para temas posteriores, e é essencial fazer o aluno sentir isso. Um aluno não é propriamente um vaso pronto a encher de matéria a nosso belo prazer, um aluno é capaz de entender as contingências, inclusivé as programáticas, e colaborar com o professor desde que no horizonte vislumbre uma aplicação, que poderá ser imediata, dos assuntos tratados.

Assim, o ideal seria iniciar cada unidade programática com situações que envolvessem os alunos e lhes mostrassem a aplicação da matéria a estudar. Se na resolução dessa situação, individualmente ou em grupo, os alunos conseguissem construir por si próprios, ainda que de forma rudimentar, os fundamentos da teoria objectivada nesse capítulo, então a assimilação de conhecimentos iria ser muito facilitada. Não é que sejamos acérrimos defensores do ensino por descoberta, nem os vastos programas, nomeadamente ao nível complementar, se compadecem com isso, queríamos apenas deixar bem claro nesta introdução que é importante levar o aluno a tirar conclusões das quais ainda não conhece formalmente os conceitos que melhor vão dar resposta aos seus problemas.

Uma questão que se pode colocar é qual o papel do professor nesta fase de aprendizagem. É nossa convicção que nesta altura o professor deve ser o mais discreto possível, mostrando porém aos alunos que não é um mero espectador e que está em todos os momentos presente e disposto a ajudar com todo o agrado.

Modelos matemáticos

Os alunos podem e devem construir modelos matemáticos que os ajudem a atingir os objectivos propostos tendo em conta os conteúdos programáticos. Mas o que é um modelo matemático?

Vamos começar por distinguir dois conceitos, o conceito de "modelo em Matemática" e o de "modelo matemático". Enquanto que um modelo em Matemática se define sem ambiguidade a partir da noção de valor de uma fórmula do cálculo dos predicados de primeira ordem, numa realização de uma linguagem, noções que se podem explicitar na teoria formal dos conjuntos, o conceito de modelo matemático está mais ligado ao processo de modelação, isto é, o processo mediante o qual se definem estratégias de acção, numa representação abstracta de uma situação real. É este o conceito que nos interessa analisar.

Modelar uma situação real consiste essencialmente em:

- observar e pôr em evidência os elementos e as relações que pareçam essenciais;
- transformar os elementos em objectos matemáticos e as relações em relações matemáticas;
- resolver os problemas específicos da situação real usando conceitos matemáticos;
- interpretar os resultados e confrontá-los com a situação real para assim tirar as conclusões que eram nosso objectivo.

Quando a situação real é complexa, torna-se evidente que em todos os estádios da elaboração do modelo se fazem simplificações, esquematizações e aproximações. Portanto, se o modelo inicial for muito grosseiro, ou mesmo caricatural, isso não quer dizer que seja um mau modelo e que por isso deva ser abandonado. Deve simplesmente ser modificado e dirigido para os nossos objectivos ao longo das várias etapas do trabalho.

Na aula, é exactamente neste ponto, que o professor tem um papel decisivo. Quando todo o trabalho do aluno lhe parece perdido, uma pequena ajuda é suficiente para colocar de novo este jovem investigador no caminho correcto da resolução do problema.

Para ver como se constrói e optimiza um modelo matemático escolhemos uma situação concreta que desenvolvemos, com resultados que para nós se vieram a revelar espectaculares, o que prova a nudez dos programas vistos à luz dos manuais. Um professor que goste realmente da sua profissão e dos seus alunos, que tenha sólidos conhecimentos científicos, não se deve acomodar a cumprir os programas que lhe são impostos, embora isso também seja importante, pelo menos para aqueles alunos que pretendam continuar os seus estudos, enquanto o crivo por onde têm de passar para ingressar na Universidade não se alterar.

Desenvolvimento de um modelo

Escolhemos um capítulo do programa do 11º ano que, por ser dos últimos (?), normalmente não é dado: o cálculo combinatório.

A situação que nos propomos analisar como motivação para este capítulo é saber de quantas formas diferentes se consegue construir a tão conhecida "casinha" da fig.1, que todos nós sabemos que se pode desenhar sem levantar o lápis e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho.

Foi sem dúvida ambiciosa a nossa pretenção. Não pelo facto de querer descobrir como se faz a "casinha", mas pelo facto de pretendermos saber quantas maneiras diferentes existem de a desenhar nas condições pretendidas, ou seja, sem levantar o lápis e sem passar duas

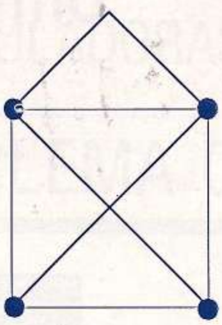


fig. 1

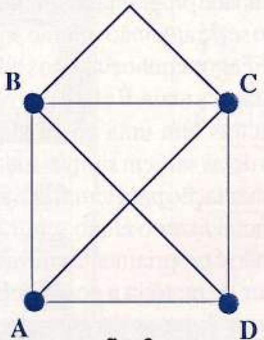


fig. 2

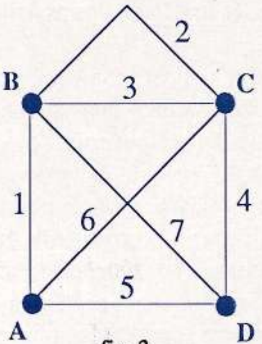


fig. 3

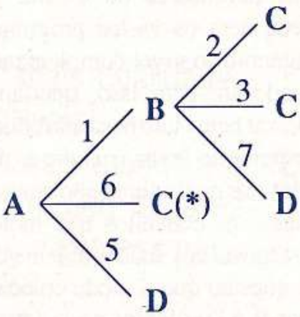


fig. 4

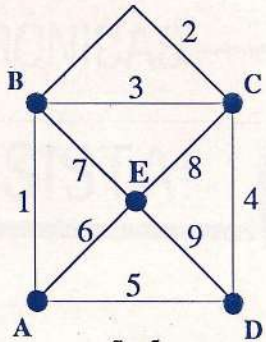


fig. 5

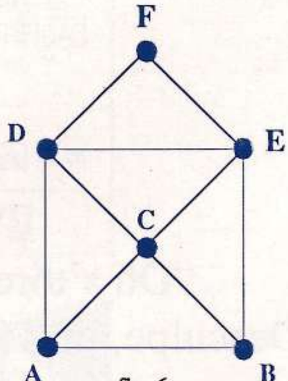


fig. 6

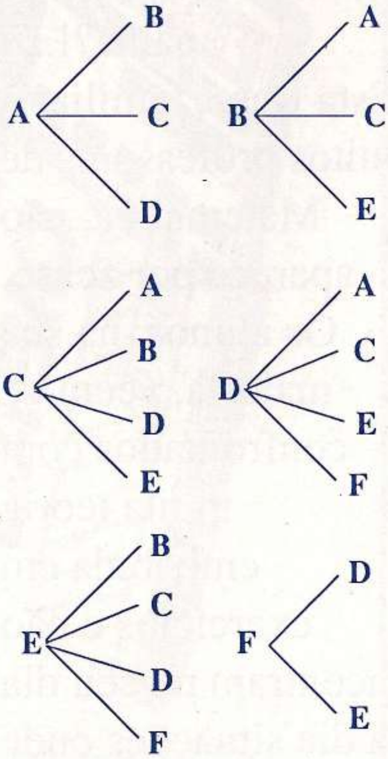


fig. 7

vezes pelo mesmo caminho.

Ao que sabemos, e ao que nos foi dado observar nos vários livros que consultámos posteriormente, ninguém se deu a este trabalho, nem nós suposemos que o problema tomasse as proporções que tomou, ao ponto de necessitarmos da ajuda de um computador e de um programa que demorou três dias a fazer. Estas são as contingências próprias de quem desenvolve um modelo, mas é o espírito de descoberta que nos move sempre com a esperança de descobrir algo de novo. Mesmo que esse algo já tenha sido descoberto antes, o "investigador" sente que ele também teria sido capaz de ser o primeiro a descobrir, o que significa que o assunto em causa tem algo a ver consigo.

Passamos a descrever a construção do modelo.

Começamos por estabelecer uma correspondência entre quatro vértices da "casinha" e as letras A, B, C e D, como se pode observar na fig.2

Cedo verificámos que era insuficiente esta correspondência, pois o caminho BC não é único, havia que diferenciar dois caminhos e optámos por numerar os diversos caminhos (fig.3).

Começámos a construir o seguinte diagrama em árvore (fig.4)

No entanto, ao desenvolver a árvore, no ponto assinalado com um (*), ocorreu-nos uma ideia que viria a revelar-se fundamental no nosso estudo posterior: a colocação de um ponto E no ponto de intersecção dos caminhos 6 e 7. É claro que isto vai ser decisivo, pois a casa consegue ser construida sem usar as diagonais 6 e 7, de acordo com uma nova correspondência (fig.5)

Consegue-se por exemplo construir a "casinha" da seguinte maneira :

$A \xrightarrow{6} E \xrightarrow{7} B \xrightarrow{1} A$

$A \xrightarrow{5} D \xrightarrow{9} E \xrightarrow{8} C$

$C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} D$

Começámos seguidamente a pensar que a nossa missão era impossível, o diagrama, se já não era nada simples sem a inclusão desta nova hipótese surgida com o ponto E, agora tornava-se impraticável fazê-lo.

Pensámos então na hipótese de utilizar o computador, mas também não era simples a execução de um programa que avaliasse todas as hipóteses e que nos desse uma resposta eficaz, ou seja certa.

Começámos por resolver alguns problemas específicos para aproximarmos a nossa situação real de uma situação lógica. A solução de caminhos que tinhamos encontrado tornava-se agora muito complicada, pensámos então em estabelecer uma hierarquia entre os pontos e

Programa em GWBASIC para determinar todas as hipóteses de construir a "casinha"

```
10 CT1=1:CT2=0:CT3=0
20 DIM D(6):DIM D1(11,2):DIM D2(11):DIM D3(11)
30 IF CT1=7 THEN END
40 LPRINT "........................"
50 FOR F0=1 TO 11
60 READ B
70 D3(F0)=B:D2(F0)=0
80 NEXT F0
90 A=0
100 FOR F1=1 TO 11
110 IF D1(F1,2)<>D3(F1) THEN F1=11:GOTO 140
120 NEXT F1
130 CT1=CT1+1:GOTO 30
140 FOR F2=1 TO 11:D1(F2,1)=0:D1(F2,2)=0:NEXT F2
150 CT2=CT2+1
160 LPRINT USING "####";CT2;:LPRINT " - ";
170 C=0
180 P=CT1
190 CT4=0
200 D(1)=11100:D(2)=101010:D(3)=110110:D(4)=101011:
   D(5)=11101:D(6)=110
210 DATA 1,4,6,5,4,3,5,2,3,1,2,2,5,6,4,5,3,4,1,3,2,1,3,5,6,
   4,5,2,3,4,1,3,0
220 DATA 4,6,5,4,3,5,2,3,1,4,0,5,6,4,5,3,4,1,3,2,5,0,6,5,4,
   6,0,0,0,0,0,0,0
230 LPRINT CHR$(64+P);" ";
240 E=0:CT4=CT4+1
250 IF A=1 THEN GOSUB 450
260 IF D(P)=0 THEN GOTO 350
270 FOR F4=5 TO 0 STEP -1
280 AUX1=10^F4
290 AUX2=6-F4
300 IF D(P)>=AUX1 THEN GOSUB 500
310 NEXT F4
320 D(P)=D(P)-AUX1+C
330 C=0
340 D1(CT4,2)=P
350 IF E=0 THEN GOTO 530
360 P=AUX2:D1(CT4+1,2)=P:GOTO 240
370 A=1
380 FOR F5=11 TO 1 STEP -1
390 IF D1(F5,2)<>0 AND D1(F5,1)=0 THEN D2(F5)=D1(F5+1,2):
   G=F5:F5=1
400 NEXT F5
410 FOR F6=G+1 TO 11
420 D2(F6)=0
430 NEXT F6
440 LPRINT " ":GOTO 100
450 IF D2(CT4)<>0 THEN C=0 ELSE RETURN
460 FOR F3=1 TO D2(CT4)
470 IF D(P)>=10^(6-F3) THEN D(P)=D(P)-10^(6-F3):
   C=C+10^(6-F3)
480 NEXT F3
490 RETURN
500 LPRINT CHR$(70-F4);" ";:D(AUX2)=D(AUX2)-10^(6-P):E=1:
   F4=0
510 IF D(P)=AUX1 THEN D1(CT4,1)=1
520 RETURN
530 D1(CT4,1)=2
540 IF CT4=11 THEN CT3=CT3+1:LPRINT "  (SOLUÇÃO ";:
   LPRINT USING "###";CT3;:LPRINT ")";
550 GOTO 370
```

fomos obrigados a criar um novo ponto que fizesse a distinção entre os antigos caminhos 2 e 3. Assim estabelecemos a seguinte correspondência (fig.6).

Esta ordem é a pedra angular de tudo o que se vai seguir a nível de programação.

Um programa de computador

É óbvio que o computador não sabe o que é a "casinha".

Através do programa, o computador foi apenas "informado" das hipóteses de caminhos consideradas na fig.7, e ainda que após ter efectuado um dado caminho não poderá repeti-lo nem pelo mesmo sentido nem por sentido inverso.

O programa foi feito para que se analisassem exaustivamente todas as hipóteses partindo das de "valor" mais baixo até às de "valor" mais alto, sem depender da acção do utilizador. Isto quer dizer que após introduzir o programa em GWBASIC num computador que aceite esta linguagem (ver caixa), obtém-se 1248 (mil duzentas e quarenta e oito!) sequências, das quais 240 (duzentas e quarenta!!) são solução.

Analisando as soluções verificamos que somente quando se parte dos pontos A ou B se tem hipótese de sucesso e que quando se parte do ponto A, acaba-se obrigatoriamente no ponto B e vice-versa. As 240 soluções dividem-se de igual modo pelos dois pontos, ou seja 120 quando se começa em A e 120 quando se começa em B.

Terminamos o nosso artigo reafirmando a importância da construção de modelos matemáticos, e em todas as outras disciplinas e situações da vida real, e afirmando também que a construção desses modelos pode ser muito facilitada se se conhecer a teoria dos grafos.

J. Francisco Furtado

Nuno Rei

Alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática.

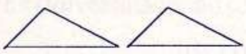
Carta aberta aos autores dos novos programas

Iguais, geometricamente iguais ou simplesmente... *congruentes* ?

Caros colegas

Esta carta tem um único fim: convencer-vos a que passem a usar a palavra congruentes em vez de geometricamente iguais, na próxima revisão dos programas.. Vou explicar a minha ideia.

Os dois triângulos da figura seguinte são iguais?



Na linguagem corrente, certamente que sim (ou pelo menos parecem). Em matemática não, porque dois objectos são iguais quando são o mesmo objecto, e aqui temos certamente dois triângulos distintos. Está claro que se um miúdo com doze anos me disser que os dois triângulos são iguais, eu fico mais do que satisfeito e penso de mim para mim: "está bem, eu sei o que tu queres dizer, a pouco e pouco irás percebendo pela tua própria experiência que precisas de refinar o teu conceito de igualdade em matemática...". Mas eu, como professor que vou ajudar os alunos, ao longo da sua vida escolar, a tornar mais rigoroso o modo como comunicam em matemática, tenho que ter preparada, para quando for precisa, outra palavra para substituir a palavra "igual". Daí o "geometricamente igual". Alguns dirão, que mal há em adoptarmos este modo de dizer? Parece-me que há muito mal e que a experiência tem mostrado precisamente isso:

• Na maior parte dos casos, a dupla "geometricamente igual" é um modo tão rebuscado de exprimir uma ideia que o *geometricamente* acaba por cair, ficando apenas *igual*. Mas então não se avançou nada, do ponto de vista da comunicação, e agora a situação é pior: a duas ideias que se sabe serem diferentes, continua a corresponder a mesma palavra, quando o que se pretendia era refinar o conceito. Até vocês, caros colegas, se aborrecem por vezes de dizer geometricamente iguais e dizem "ângulos iguais" e acrescentam em nota: "usaremos 'iguais' em vez de 'geometricamente iguais'" (Materiais de apoio aos novos programas, Ens. Sec., texto de apoio às fichas G1 e G2).

• Mesmo se não se reduz a "igual", "geometricamente igual" pode dar a falsa ideia de que existe um conceito de igualdade em geometria, porventura outro em álgebra, e assim por diante, o que está claro é errado.

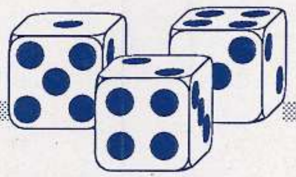
Eu julgo que a boa regra é a seguinte: cada novo conceito, quando está devidamente identificado e interiorizado pelos alunos, pode e deve receber uma nova designação. Porque não "congruente"? Eu iria jurar mas não tenho a certeza, nem tempo para ir investigar, que esta palavra já foi usada neste sentido em português. Em qualquer caso, os anglo-saxónicos usam "congruent". Os franceses usam "isométrique" no mesmo sentido, mas gosto menos.

Duas observações:

a) Julgo que foi Sebastião e Silva que introduziu o hábito do "geometricamente igual". Mas, está claro, isso não nos impede de ir evoluindo como o próprio Sebastião e Silva faria, se a prática viesse a provar que uma ideia não tinha sido feliz. Julgo que não é muita ousadia introduzir um termo novo numa época que se pretende de reforma completa dos programas de Matemática...

b) Enquanto para os polígonos me parece importante incorporar, na altura própria, o conceito de "congruência", em lugar do de "igualdade geométrica", julgo que seria talvez pretensioso aplicá-lo sistematicamente a segmentos e a ângulos, e tornaria os textos muito pesados. Penso que devemos continuar a dizer "segmentos iguais" e "ângulos iguais", explicando uma vez por todas que se trata de modos abreviados de nos referirmos a "segmentos de igual comprimento" ou "ângulos de igual amplitude". Sem mais, por hoje

Eduardo Veloso



Vamos jogar

O Jogo Icosiano e o Problema do Cavalo

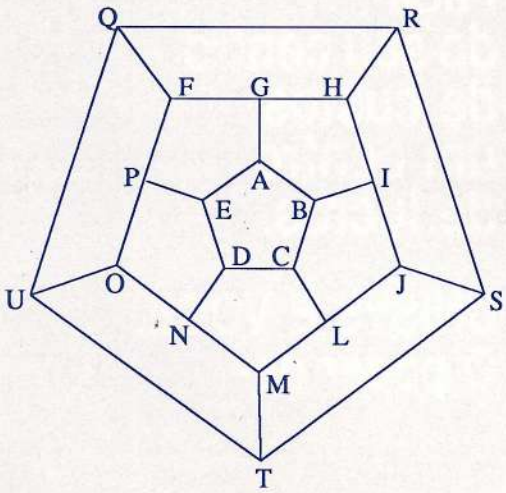
Paulo Oliveira

Propomo-vos para este trimestre dois solitários em voga no sec. XIX aos quais estiveram ligados três dos maiores matemáticos da história - Hamilton, Euler e Vandermonde.

O Jogo Icosiano

O jogo icosiano foi criado em 1850 por Sir William Hamilton como ilustração dos princípios por ele descobertos na chamada "Algebra dos quaterniões"

O jogo pode ser praticado num dodecaedro (ou em qualquer dos outros sólidos platónicos) ou numa figura plana que lhe seja topologicamente equivalente (ver figura).



Por uma questão de simplicidade sugerimos que seja usado este último tabuleiro.

O objectivo do jogo é percorrer toda a figura passando por cada vértice uma e uma só vez e regressar ao ponto de partida (que pode ser qualquer vértice).

Na versão comercializada (em 1859), o jogo chamava-se "A volta ao mundo" e a cada vértice correspondia não uma letra mas o nome de uma grande cidade.

Desafio: Quantos caminhos existem nas condições mencionadas?

O Problema do Cavalo

Considere-se um tabuleiro quadriculado de 8 por 8 e um cavalo que pode deslocar-se como habitualmente no xadrez (i.e. em "L").

Poderá o cavalo "visitar" rodas as casas do tabuleiro regressando à casa de partida?

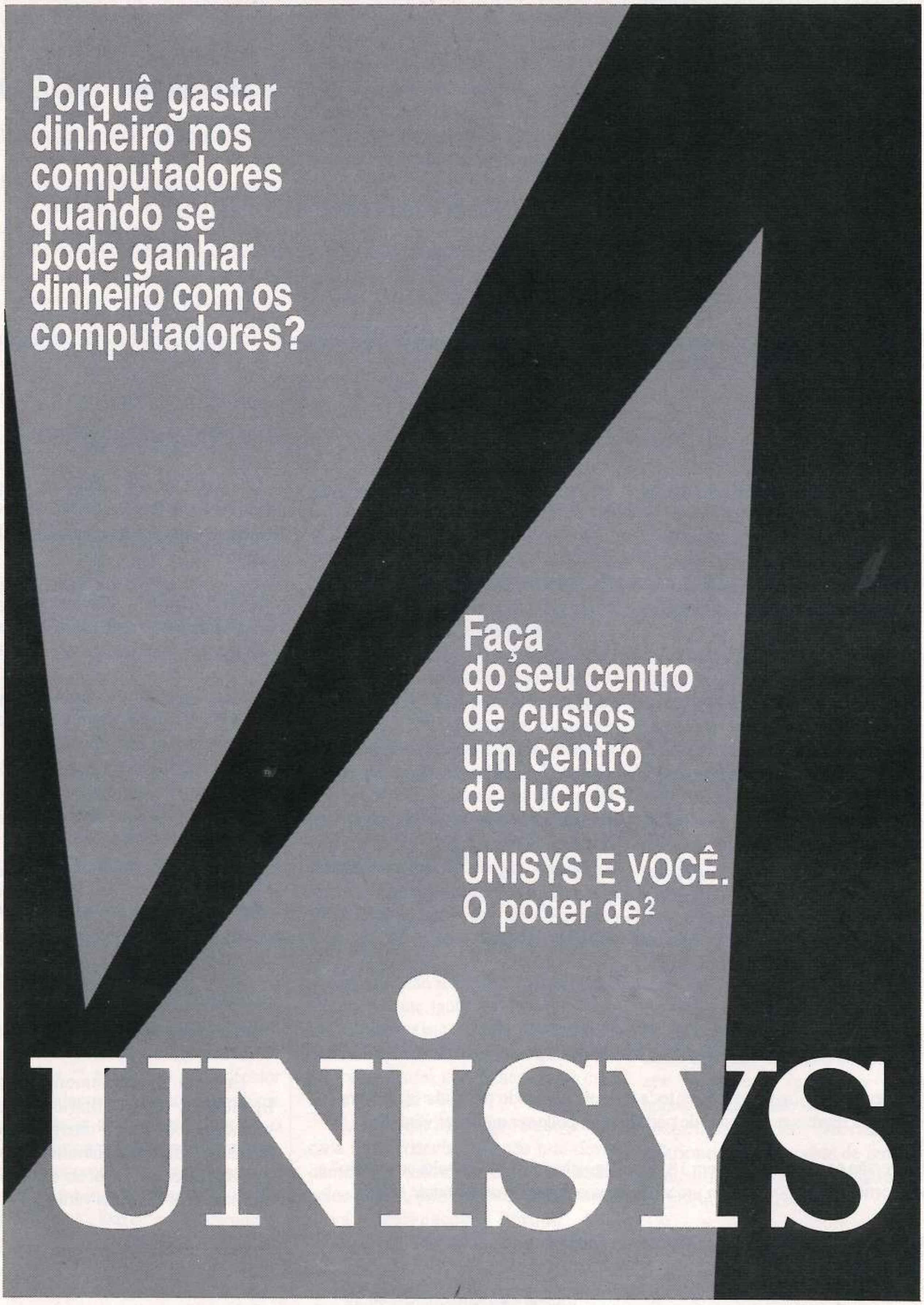
Euler apresentou uma solução sistemática deste solitário num estudo de 1759 e o mesmo fez Vandermonde 12 anos mais tarde.

Considere-se um tabuleiro quadriculado de n x n casas.

Desafio:
Para que valores de n, o problema é possível?

Observação final

Embora aparentemente desligados, os dois solitários apresentados podem ser interpretados mediante "grafos de Hamilton", isto é, grafos percorridos por um caminho que passa por todos os vértices.


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

91·92

MATEMÁTICA

5.º ANO
MATEMÁTICA 5

6.º ANO
MATEMÁTICA 6

Leonor Filipe
Leonor Moreira

5.º ANO
MATEMATICANDO

6.º ANO
MATEMATICANDO

5.º/6.º ANOS
MATEMATICANDO
Problemas

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO
MATEMÁTICA
Curso Nocturno

Isabel Moura
Cristina Loureiro
Maria José Delgado
M.ª José Correia de Oliveira

O NOVO M 7,
O NOVO M 8
O NOVO M 9

ACTIVIDADES
O NOVO M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

O NOVO M 10
O NOVO M 11

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

M 12

Armando Machado
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

EXERCÍCIOS
M 10, M 11 E M 12

Inês dos Santos
Judite Barros
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

MATERIAL DIDÁCTICO PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

COLECÇÃO DE TRANSPARÊNCIAS — 7.º, 8.º e 9.º anos

SOFTWARE
Equações / Núm. Int. Relativos — 7.º ano
Utilidades I — 7.º ano
Geometria Analítica — 10.º ano
Gráficos de Funções — 10.º/11.º anos

CONHEÇA AS NOSSAS PUBLICAÇÕES
CONSULTE O NOSSO CATÁLOGO

índice

1 **De novo reunidos...**
Eduardo Veloso

3 **Um Profmat à americana...**
Eduardo Veloso

8 Problema do trimestre

10 **Um passeio pela cidade**
António Bernardes

13 Materiais para a aula de Matemática
Estrelas pulsantes

15 **Que manuais vamos ter?**
Rosário Ribeiro

17 Para este número seleccionámos
A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças
NCTM

23 **Um modelo matemático**
J. Francisco Furtado e Nuno Rei

27 Vamos jogar
O Jogo Icosiano e o Problema do Cavalo